

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	6
1. Теоретическая часть.....	7
1.1. Постановка задачи.....	7
1.2. Конечно-разностная аппроксимация оператора дифференцирования по времени.....	9
1.3. Решение краевых задач методом конечных элементов	10
1.4. Вычисление ЭДС.....	14
1.5. Применение технологии выделения части поля.....	16
2. Описание разработанной программы	18
2.1. Средства разработки	18
2.2. Описание входных и выходных данных.....	18
2.3. Структуры данных и модули	20
3. Тестирование разработанной программы.....	23
3.1. Определение порядков точности и сходимости используемых численных методов.....	23
3.2. Тестирование на порядок точности.....	24
3.3. Тестирование на сходимость	26
4. Исследования.....	32
4.1. Верификация программы	32
4.2. Поиск оптимальных сеток.....	36
4.3. Исследование влияния точности вычисления нормального поля на точность аномального.....	44
4.4. Исследование зависимости результатов моделирования от глубины аномальных слоёв и их проводимости.....	46
4.5. Исследование скорости решения задач	51
4.6. Применение разработанной программы для моделирования полей в средах с неоднородностями в форме тел вращения	53
Заключение	58
Список литературы	59

ВВЕДЕНИЕ

Технология выделения части поля в методе конечных элементов применяется для повышения точности решения, понижения размерности части поля, снижения вычислительных затрат. При моделировании электромагнитных полей эффективным приложением данной технологии является выделение нормальных полей и полей влияния в контексте решения обратных задач. Расчет нормального поля выполняется один раз на подробной сетке, а серия задач моделирования аномальных полей, являющаяся ядром алгоритма, решается на грубой сетке с существенно меньшими вычислительными затратами.

Большой класс практических обратных задач, для которых эффективно применяется выделение поля, возникает в электроразведке. Одной из наиболее актуальных задач является задача аэроэлектроразведки: рассчитывается последовательность прямых задач моделирования полей от петлевого источника, решение которых сравнивается с экспериментальными данными, в результате чего выполняется восстановление проводимости среды. При одномерной инверсии проводимости по результатам точечных измерений в горизонтально-слоистой среде удобны осесимметричные постановки прямых задач, решение которых является двумерным. Петлевой сосредоточенный источник в осесимметричной постановке представляет собой источник, сосредоточенный в точке.

Для решения подобных задач требуется разработка и сопровождение программных комплексов численного моделирования. В рамках данной работы была реализована программа моделирования электромагнитных полей для осесимметричных постановок, проведены исследования выбора сеток и скорости решения задач, выявлены особенности поведения решения в зависимости от параметров модели.

1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ ЧАСТЬ

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В качестве математической модели, описывающей поведение электромагнитных полей, рассмотрим систему уравнений Максвелла в дифференциальной форме:

$$\operatorname{div} \varepsilon \vec{E} = \rho_{out}, \quad (1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad (2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \sigma \vec{E} + \frac{\partial(\varepsilon \vec{E})}{\partial t}, \quad (4)$$

где ε – диэлектрическая проницаемость среды, \vec{E} – напряжённость электрического поля, ρ_{out} – плотность стороннего заряда, \vec{B} – индукция магнитного поля, t – время, \vec{H} – напряжённость магнитного поля, \vec{J} – плотность тока проводимости, σ – удельная электрическая проводимость. Величины \vec{B} и \vec{H} связаны соотношением $\vec{B} = \mu_0 \mu \vec{H}$, где μ – коэффициент магнитной проницаемости, $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ Гн/м – магнитная постоянная.

Введём вектор-потенциал \vec{A} так, что $\vec{B} = \operatorname{rot} \vec{A}$ и $\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Тогда уравнения (2) и (3) превратятся в тождества, и поведение магнитного поля будет определяться только уравнением (4). Пренебрегая токами смещения (величина ε достаточно мала), полагая $\mu = 1$ и выражая компоненты уравнения (4) через вектор-потенциал \vec{A} , получим уравнение

$$\operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} \vec{A} \right) + \sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = \vec{J}. \quad (5)$$

Поскольку в рамках данной работы мы рассматриваем осесимметричные задачи, в цилиндрической системе координат вектор-потенциал \vec{A} и сторонний ток \vec{J} можно выразить через одну ненулевую компоненту: $\vec{A} = (0, A_\varphi(r, z, t), 0)^T$, $\vec{J} = (0, J_\varphi(r, z, t), 0)^T$. Таким образом, искомое поле вектор-потенциала описывается векторным уравнением

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{rot} (0, A_\varphi(r, z, t), 0)^T \right) + \sigma \frac{\partial (0, A_\varphi(r, z, t), 0)^T}{\partial t} = \\ = (0, J_\varphi(r, z, t), 0)^T. \end{aligned} \quad (6)$$

Преобразовав дифференциальный оператор первого слагаемого левой части уравнения (6), получим два тождества и уравнение для компоненты A_φ . Добавляя однородные краевые условия первого рода на удалённой границе Γ_1 (бак) и второго рода на границе Γ_2 (условие симметрии), а также начальные условия, получаем начально-краевую задачу

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} A_\varphi \right) + \frac{A_\varphi}{\mu_0 r^2} + \sigma \frac{\partial A_\varphi}{\partial t} = J_\varphi, \quad (7)$$

$$A_\varphi|_{\Gamma_1} = 0, \quad (8)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_\varphi}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad (9)$$

$$A_\varphi|_{t=0} = A_\varphi^0. \quad (10)$$

Так как функция $A_\varphi^0(r, z)$ неизвестна, найдём её как решение стационарной задачи

$$-\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} A_\varphi^0 \right) + \frac{A_\varphi^0}{\mu_0 r^2} = J_\varphi^0, \quad (11)$$

$$A_\varphi^0|_{\Gamma_1} = 0, \quad (12)$$

$$\left. \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_\varphi^0}{\partial n} \right|_{\Gamma_2} = 0 \quad (13)$$

в предположении, что к моменту времени $t = 0$ электромагнитное поле в достаточной степени устоялось (токи проводимости $\sigma \vec{E}$ малы) и может рассматриваться как стационарный процесс.

1.2. КОНЕЧНО-РАЗНОСТНАЯ АППРОКСИМАЦИЯ ОПЕРАТОРА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ПО ВРЕМЕНИ

Построим разностную схему, основанную на аппроксимации функции полиномиальным интерполянтom. Осуществим дискретизацию уравнения (7) по времени: зададим временную сетку t_0, t_1, \dots, t_m ($t_0 = 0$) и обозначим $A_\varphi^j = A_\varphi(r, z, t_j)$, $j = \overline{1, m}$. Представим A_φ на интервале (t_{j-2}, t_j) квадратным трёхчленом $A_\varphi^{j-2}\alpha(t) + A_\varphi^{j-1}\beta(t) + A_\varphi^j\gamma(t)$, где α, β, γ – базисные полиномы Лагранжа. Продифференцировав данное выражение и подставив $t = t_j$, получим неявную трёхслойную схему для вычисления искомой функции A_φ на j -м временном слое ($j = \overline{2, m}$):

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} \approx \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} A_\varphi^{j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} A_\varphi^{j-1} + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} A_\varphi^j, \quad (14)$$

где $\Delta t = t_j - t_{j-2}$, $\Delta t_0 = t_j - t_{j-1}$, $\Delta t_1 = t_{j-1} - t_{j-2}$. Уравнение (7) будет иметь вид

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} A_\varphi^j \right) + \frac{A_\varphi^j}{\mu_0 r^2} + \sigma \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} A_\varphi^j = \\ = J_\varphi^j + \sigma \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} A_\varphi^{j-1} - \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} A_\varphi^{j-2} \right). \end{aligned} \quad (15)$$

Для вычисления функции A_φ^1 применим неявную двухслойную разностную схему

$$\frac{\partial A_\varphi}{\partial t} \approx \frac{A_\varphi^1 - A_\varphi^0}{\Delta t}. \quad (16)$$

Подставляем (16) в (7):

$$-div\left(\frac{1}{\mu_0} grad A_\varphi^1\right) + \frac{A_\varphi^1}{\mu_0 r^2} + \sigma \frac{A_\varphi^1}{\Delta t} = J_\varphi^1 + \sigma \frac{A_\varphi^0}{\Delta t}. \quad (17)$$

1.3. РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Имеем m постановок краевых задач с неизвестными скалярными функциями $A_\varphi^j(r, z), j = \overline{0, m}$. Найдем неизвестную функцию численно как её проекцию на некоторое конечномерное пространство с помощью метода конечных элементов с вариационной постановкой в форме уравнения Галёркина.

Потребуем ортогональности в смысле скалярного произведения пространства H^0 невязки уравнений (11), (17) и (15) гильбертову пространству пробных функций H_0^1 , удовлетворяющих однородным краевым условиям на границе Γ_1 и обладающих суммируемыми с квадратом первыми производными (уравнение в слабой форме с пробными функциями такого вида называется уравнением Галёркина). Получим

$$\int_{\Omega} \left(-div\left(\frac{1}{\mu_0} grad A_\varphi^0\right) + \frac{A_\varphi^0}{\mu_0 r^2} - J_\varphi^0 \right) v \, d\Omega = 0 \, \forall v \in H_0^1,$$

$$\int_{\Omega} \left(-div\left(\frac{1}{\mu_0} grad A_\varphi^1\right) + \frac{A_\varphi^1}{\mu_0 r^2} + \sigma \frac{A_\varphi^1 - A_\varphi^0}{\Delta t} - J_\varphi^1 \right) v \, d\Omega = 0 \, \forall v \in H_0^1,$$

$$\int_{\Omega} \left(-\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} A_{\varphi}^j \right) + \frac{A_{\varphi}^j}{\mu_0 r^2} + \sigma \left(\frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} A_{\varphi}^j - \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} A_{\varphi}^{j-1} + \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} A_{\varphi}^{j-2} \right) - J_{\varphi}^j \right) v d\Omega = 0 \quad \forall v \in H_0^1.$$

После раскрытия скобок и разбиения интегралов по линейности применим интегрирование по частям:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} -\operatorname{div} \left(\frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} A_{\varphi}^j \right) v d\Omega &= \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} A_{\varphi}^j \operatorname{grad} v d\Omega - \\ &- \int_{\Gamma} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{\varphi}^j}{\partial n} v d\Omega, j = \overline{0, m}. \end{aligned}$$

Интегралы по границе

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{\varphi}^j}{\partial n} v d\Omega = \int_{\Gamma_1} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{\varphi}^j}{\partial n} v d\Omega + \int_{\Gamma_2} \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_{\varphi}^j}{\partial n} v d\Omega, j = \overline{0, m}$$

равны нулю, поскольку на границе Γ_1 по построению равны нулю пробные функции, а на границе Γ_2 по условию симметрии функции A_{φ}^j удовлетворяют однородным вторым краевым условиям. Таким образом мы получили вариационные постановки краевых задач в виде вариационных уравнений Галёркина:

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} A_{\varphi}^0 \operatorname{grad} v d\Omega + \int_{\Omega} \frac{A_{\varphi}^0}{\mu_0 r^2} v d\Omega = \int_{\Omega} J_{\varphi}^0 v d\Omega \quad \forall v \in H_0^1, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \operatorname{grad} A_{\varphi}^1 \operatorname{grad} v d\Omega + \int_{\Omega} \frac{A_{\varphi}^1}{\mu_0 r^2} v d\Omega + \\ &+ \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \sigma A_{\varphi}^1 v d\Omega = \int_{\Omega} J_{\varphi}^1 v d\Omega + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \sigma A_{\varphi}^0 v d\Omega \quad \forall v \in H_0^1, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \text{grad} A_{\varphi}^j \text{grad} v d\Omega + \int_{\Omega} \frac{A_{\varphi}^j}{\mu_0 r^2} v d\Omega + \\
& + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} \int_{\Omega} \sigma A_{\varphi}^j v d\Omega = \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} \int_{\Omega} \sigma A_{\varphi}^{j-1} v d\Omega - \\
& - \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} \int_{\Omega} \sigma A_{\varphi}^{j-2} v d\Omega + \int_{\Omega} J_{\varphi}^j v d\Omega \quad \forall v \in H_0^1.
\end{aligned} \tag{20}$$

Решения A_{φ}^j вариационных уравнений (18)-(20) являются элементами пространства функций $H_g^1 \subset H^1$ (H_g^1 является подмножеством H^1 , но подпространством не является при неоднородных главных краевых условиях), удовлетворяющих краевым условиям первого рода. Построим конечномерное подпространство V^h пространства H^1 , выбрав в качестве базиса набор билинейных финитных функций $\{\psi_l\}, l = \overline{1, n}$, определённых на прямоугольной конечноэлементной сетке $\{r_1, r_2, \dots, r_p\} \times \{z_1, z_2, \dots, z_q\}$. Локальные базисные функции на элементе $[r_i, r_{i+1}] \times [z_i, z_{i+1}]$ будут иметь вид

$$\hat{\psi}_1 = R_1 Z_1, \hat{\psi}_2 = R_2 Z_1, \hat{\psi}_3 = R_1 Z_2, \hat{\psi}_4 = R_2 Z_2,$$

где

$$\begin{aligned}
R_1(r) &= \frac{r_{i+1} - r}{r_{i+1} - r_i}, R_2(r) = \frac{r - r_i}{r_{i+1} - r_i}, \\
Z_1(z) &= \frac{z_{i+1} - z}{z_{i+1} - z_i}, Z_2(z) = \frac{z - z_i}{z_{i+1} - z_i}.
\end{aligned}$$

Пространства функций H_g^1 и H_0^1 аппроксимируем подмножествами пространства V^h V_g^h и V_0^h соответственно, причём разности $V^h \setminus V_g^h$ и $V^h \setminus V_0^h$ составляют подмножества базисных функций, содержащие базисные функции с фиксированными весами. Решение будем искать в виде

$$A_{h,\varphi}^j = \sum_{i=1}^n q_i^j \psi_i, i = \overline{1, n}. \quad (21)$$

Для удобства построения СЛАУ не будем непосредственно исключать уравнения, соответствующие базисным функциям с фиксированными весами, а сформируем фиктивные уравнения посредством учёта главных краевых условий по окончании процесса сборки СЛАУ.

Положим $v_k = \psi_k, v_k \in V^h, k = \overline{1, n}$ и подставим соотношения $v = v_k$ и (21) в вариационные уравнения (18)-(20):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \text{grad} \psi_i \text{grad} \psi_k d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\psi_i \psi_k}{\mu_0 r^2} d\Omega \right) q_i^0 = \\ = \int_{\Omega} J_{\varphi}^0 \psi_k d\Omega, k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \text{grad} \psi_i \text{grad} \psi_k d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\psi_i \psi_k}{\mu_0 r^2} d\Omega + \right. \\ \left. + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \sigma \psi_i \psi_k d\Omega \right) q_i^1 = \int_{\Omega} J_{\varphi}^1 \psi_k d\Omega + \\ + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n q_i^0 \psi_i \cdot \sigma \psi_k d\Omega, k = \overline{1, n}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \text{grad} \psi_i \text{grad} \psi_k d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\psi_i \psi_k}{\mu_0 r^2} d\Omega + \right. \\ \left. + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} \int_{\Omega} \sigma \psi_i \psi_k d\Omega \right) q_i^j = \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n q_i^{j-1} \psi_i \cdot \sigma \psi_k d\Omega - \\ - \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n q_i^{j-2} \psi_i \cdot \sigma \psi_k d\Omega + \int_{\Omega} J_{\varphi}^j \psi_k d\Omega, k = \overline{1, n}. \end{aligned} \quad (24)$$

В матричной форме уравнения (22)-(24) имеют вид

$$(G + M^r)q^0 = b^0,$$

$$\left(G + M^r + \frac{1}{\Delta t}M\right)q^1 = b^1 + \frac{1}{\Delta t}Mq^0,$$

$$\left(G + M^r + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0}M\right)q^j = b^j + \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0}Mq^{j-1} - \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1}Mq^{j-2},$$

где

$$G_{ij} = \iint_{\Omega} \frac{1}{\mu_0} \text{grad} \psi_i \text{grad} \psi_j r dr dz, M_{ij} = \iint_{\Omega} \sigma \psi_i \psi_j r dr dz,$$

$$M_{ij}^r = \iint_{\Omega} \frac{\psi_i \psi_k}{\mu_0 r} dr dz.$$

Сборку полученных СЛАУ реализуем с применением локальных матриц и векторов правой части. Интегралы вкладов в вектор правой части вида

$$\iint_D f(r, z) r dr dz$$

по прямоугольной области D будем находить численно с помощью пятиузлового метода Гаусса. Для решения СЛАУ используем метод ЛОС с предобуславливанием неполным разложением Холецкого.

1.4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭДС

Рассмотрим задачу моделирования магнитного поля, применяющуюся при восстановлении сред в аэроразведке. Расчетная область представляет собой горизонтально-слоистую по проводимости среду, включающую верхний непроводящий слой (воздух) и несколько проводящих слоёв (грунт). Петлевой источник

имеет вид окружности радиуса r_{src} , расположенной над грунтом в горизонтальной плоскости $z = z_{src}$, поэтому в осесимметричной постановке такой источник является сосредоточенным и задаётся δ -функцией в точке (r_{src}, z_{src}) , равной мощности источника. Приёмник также имеет форму горизонтально расположенной окружности радиуса r_{acc} на высоте z_{acc} , с его помощью вычисляется сигнал ЭДС. Воспользовавшись теоремой Стокса, выразим поток вектора магнитной индукции \vec{B} через введённый потенциал:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{ЭДС}} &= -\frac{\partial \Phi}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} d\vec{S} = -\frac{\partial}{\partial t} \oint_{\Gamma} \vec{A} d\vec{l} = \\ &= -\frac{\partial A_{\varphi}(r_{acc}, z_{acc}, t)}{\partial t} \oint_{\Gamma} d\vec{l} = -2\pi r_{acc} \frac{\partial A_{\varphi}(r_{acc}, z_{acc}, t)}{\partial t}, \end{aligned}$$

где S – кусочно-гладкая поверхность, ограниченная контуром окружности приёмника Γ .

Вычислим производную $\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t}$ численно с помощью трёхслойной лагранжевой интерполяции. Выдадим МКЭ-решение в точке (r_{acc}, z_{acc}) на трёх временных слоях $A_{h,\varphi}^{j-2}$, $A_{h,\varphi}^{j-1}$ и $A_{h,\varphi}^j$ и вычислим производную лагранжева интерполяционного сплайна в точке $t = t_{j-1}$ при $j = \overline{1, m-1}$:

$$\left. \frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t} \right|_{t=t_{j-1}} = -\frac{\Delta t_0}{\Delta t_1 \Delta t} A_{h,\varphi}^{j-2} + \frac{\Delta t_0 - \Delta t_1}{\Delta t_0 \Delta t_1} A_{h,\varphi}^{j-1} + \frac{\Delta t_1}{\Delta t_0 \Delta t} A_{h,\varphi}^j.$$

Для нахождения $\frac{\partial A_{\varphi}}{\partial t}$ на последнем временном слое ($t = t_{j-1}$) воспользуемся построенной нами трёхслойной неявной схемой (14).

1.5. ПРИМЕНЕНИЕ ТЕХНОЛОГИИ ВЫДЕЛЕНИЯ ЧАСТИ ПОЛЯ

Выделение части поля может использоваться при решении прямых задач для понижения размерности части поля, повышения точности вычислений (часть решения может быть найдена аналитически), уменьшения вычислительных затрат. Очень эффективна данная технология при вычислении полей влияния в обратных задачах восстановления сред. В таких задачах требуется решить серию прямых задач с одной и той же вмещающей средой и различными аномальными включениями. Вклад аномалий в сигнал ЭДС, как правило, существенно меньше вклада среды, поэтому задачу моделирования поля среды решают один раз на подробной сетке, а расчет серии задач моделирования полей аномальных объектов выполняют на грубой сетке, что позволяет существенно снизить вычислительные затраты без потери точности.

Применим выделение поля к рассматриваемым в данной работе задачам. Представим решение A_φ в виде суммы решений задач на т. н. нормальное (или первичное) поле A_φ^p и аномальное (или добавочное) поле A_φ^a :

$$-div\left(\frac{1}{\mu_0} grad A_\varphi^p\right) + \frac{A_\varphi^p}{\mu_0 r^2} + \sigma^p \frac{\partial A_\varphi^p}{\partial t} = J_\varphi^p, \quad (25)$$

$$A_\varphi^p|_{\Gamma_1} = 0, \quad (26)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_\varphi^p}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad (27)$$

$$A_\varphi^p|_{t=0} = A_\varphi^{p,0}, \quad (28)$$

$$-div\left(\frac{1}{\mu_0} grad A_\varphi^a\right) + \frac{A_\varphi^a}{\mu_0 r^2} + \sigma \frac{\partial A_\varphi^a}{\partial t} = (\sigma^p - \sigma) \frac{\partial A_\varphi^p}{\partial t} + J_\varphi - J_\varphi^p, \quad (29)$$

$$A_\varphi^a|_{\Gamma_1} = 0, \quad (30)$$

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial A_\varphi^a}{\partial n} \Big|_{\Gamma_2} = 0, \quad (31)$$

$$A_\varphi^p \Big|_{t=0} = 0, \quad (32)$$

где σ^p и σ^a – проводимость нормальной и аномальной среды соответственно, J_φ^p – источник нормального поля, $A_\varphi^{p,0}$ – решение стационарной задачи (11)-(13). Если сложить уравнения (25) и (29), а также соответствующие им условия (26)-(28) и (30)-(32), получим постановку задачи на суммарное поле (7)-(10).

Обе задачи будем решать методом конечных элементов аналогично п. 1.3. Принимая во внимание, что источник J_φ отключается начиная с первого временного слоя и совпадает с J_φ^p , получим СЛАУ

$$\begin{aligned} (G + M^r)q^{p,0} &= b^{p,0}, \\ \left(G + M^r + \frac{1}{\Delta t} M^p\right)q^{p,1} &= \frac{1}{\Delta t} M^p q^{p,0}, \\ \left(G + M^r + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} M^p\right)q^{p,j} &= \\ = \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} M^p q^{p,j-1} - \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} M^p q^{p,j-2}, j = \overline{2, m}, \\ \left(G + M^r + \frac{1}{\Delta t} M\right)q^{a,1} &= \frac{1}{\Delta t} M q^{a,0} + M^{a,\sigma} \frac{q^{p,1} - q^{p,0}}{\Delta t}, \\ \left(G + M^r + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} M\right)q^{a,j} &= M \left(\frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} q^{p,j-1} - \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} q^{p,j-2} \right) + \\ + M^{a,\sigma} \left(\frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} q^{p,j-2} - \frac{\Delta t}{\Delta t_1 \Delta t_0} q^{p,j-1} + \frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} q^{p,j} \right), j = \overline{2, m}, \end{aligned}$$

где $q^{a,0}$ – нулевой вектор; M^p – матрица массы, собранная с использованием проводимости σ^p ; $M^{a,\sigma}$ – матрица массы, собранная с использованием проводимости $\sigma^p - \sigma$. При перестраивании сетки для расчета аномального поля помимо матриц перестраиваются векторы решений $q^{p,j}$ посредством выдачи нормального поля в точках, соответствующих узлам новой сетки.

2. ОПИСАНИЕ РАЗРАБОТАННОЙ ПРОГРАММЫ

2.1. СРЕДСТВА РАЗРАБОТКИ

Программа моделирования нестационарных электромагнитных полей представляет собой консольное приложение для ОС Windows, реализованное на языке C++ в среде разработки Microsoft Visual Studio Enterprise 2019 версии 16.11.11. Стандарт языка 199711 (C++ 98), версия компилятора – Visual C++ 19.29.30141.0.

Программа визуализации численного решения написана на языке Python версии 3.11 с использованием библиотеки matplotlib. Также для визуализации сеток и решения, построения графиков и их анализа использовался программный комплекс TELMA. Для верификации разработанной программы применялось программное обеспечение IFGEM3D.

Вспомогательные модули, такие как средства тестирования и измерения времени работы программы, модуль выдачи ЭДС, модуль формирования файлов для визуализации, были реализованы также на языке C++ и интегрированы в программу моделирования поля.

2.2. ОПИСАНИЕ ВХОДНЫХ И ВЫХОДНЫХ ДАННЫХ

Входные данные программы моделирования поля представлены в наборе текстовых файлов. В файл grid.txt записываются границы расчётной области, координаты источника и приёмника, параметры пространственной сетки (число отрезков разбиения и их границы, начальные шаги и коэффициенты разрядки), параметры временной сетки (начальный шаг и коэффициент разрядки, число слоёв), число вложений сетки по времени и по пространству. Вложенность осуществляется добавлением узла на каждом отрезке сетки в его середину, дробление сетки по пространству проводится по обеим координатам.

В файле `grid_anomal.txt` задаётся сетка для расчёта аномального поля: границы бака, число отрезков разбиения, начальные шаги и коэффициенты разрядки, число вложений сетки. В файле `anomalies.txt` заданы границы неоднородностей и значения их проводимости. Неоднородность может быть включена как в первичное, так и в добавочное поле; неоднородности учитываются в режиме наложения в порядке следования в файле.

Выходными данными является набор файлов, содержащих веса векторов решений краевых задач на всех временных слоях. Формируется набор файлов для визуализации сетки и решения в комплексе TELMA. В результате работы модуля выдачи ЭДС формируются файлы, содержащие зависимость от времени вкладов в ЭДС первичного, добавочного и суммарного полей (`eds_prim.txt`, `eds_anom.txt`, `eds_sum.txt`).

Модуль визуализации поля принимает на вход набор файлов, содержащих веса векторов решений на временных слоях, и выдаёт на данных временных слоях графики зависимости поля от пространственных координат в указанном масштабе или их фрагменты (см. рисунок 1).

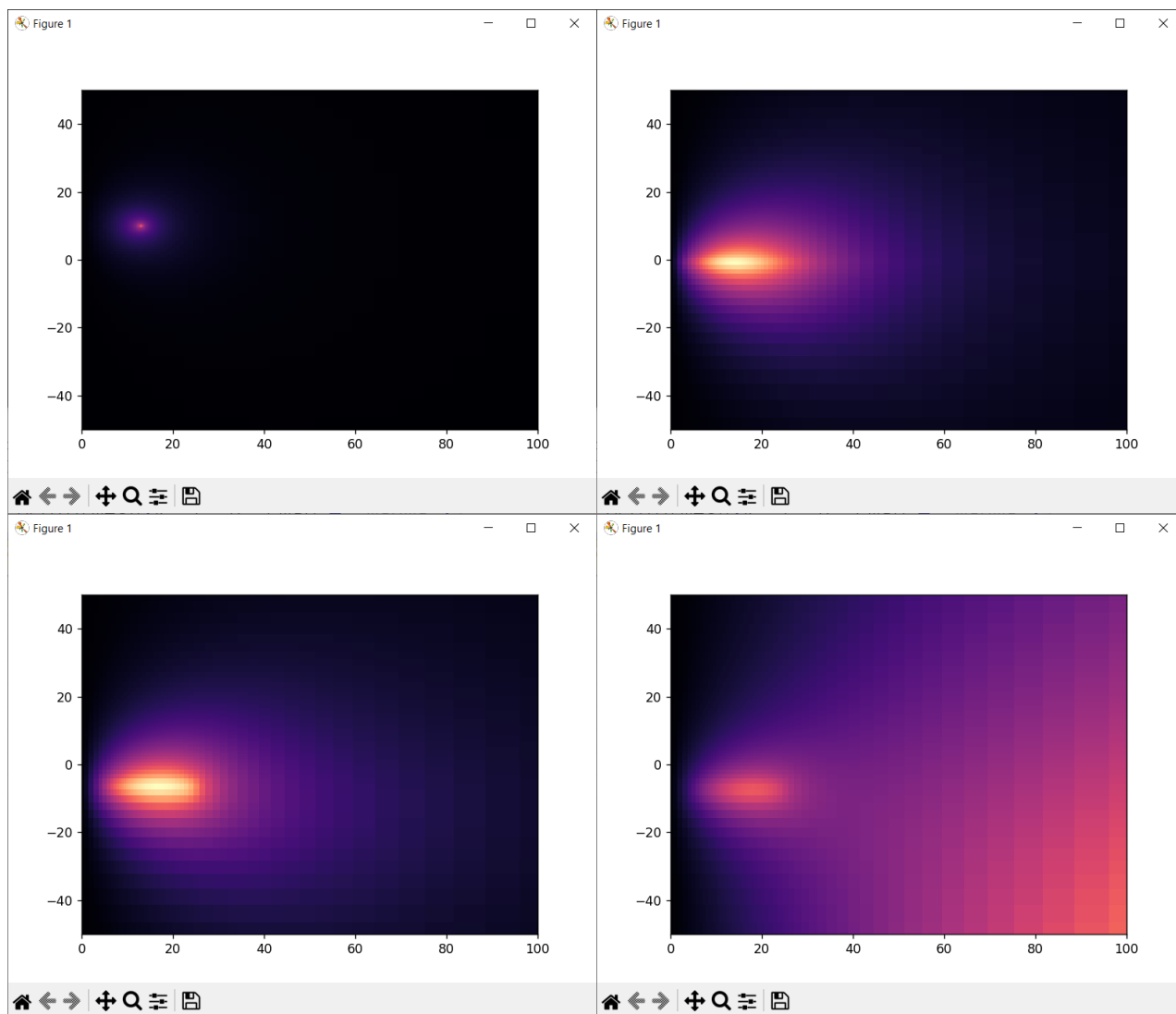


Рисунок 1 – Пример визуализации нестационарного поля сосредоточенного источника в неоднородной по проводимости среде

2.3. СТРУКТУРЫ ДАННЫХ И МОДУЛИ

Алгоритм решения начально-краевой задачи состоит из этапов, перечисленных ниже, для каждого из которых реализованы функциональные модули.

1. Чтение входных данных.

2. Построение структур.

- 2.1. Генерация сетки. Координаты хранятся в виде векторов по r , z и t .

По построении нерегулярной сетки осуществляется учёт границ неоднородностей и аномалий, после чего проводится заданное число вложений. Необходимо избегать дубликатов узлов и узлов,

расположенных на малом расстоянии друг от друга (это может привести к аномально большой погрешности, распространяющейся на всё решение); при этом сравнение вещественных чисел нужно реализовывать по относительной погрешности, считая числа равными с точностью до заданного числа знаков мантиссы. Такой подход позволяет сравнивать с одинаковой точностью числа разных порядков, возникающие как в пределах одной нерегулярной сетки, так и при решении нескольких задач.

2.2. Формирование вектора конечных элементов и портрета матриц. Прямоугольные конечный элемент задаётся структурой, содержащей границы прямоугольника, номера узлов и значение проводимости. Конечноеэлементные матрицы являются разреженными (содержат порядка n ненулевых компонент) и хранятся в разреженном строчно-столбцовом формате, портрет формируется для всех матриц.

3. Формирование локальных матриц общего вида. Сложность вычисления компонент локальных матриц позволяет аналитически вычислить значения компонент непосредственно, однако с целью проверки был также реализован способ сборки через локальные матрицы одномерных конечных элементов.

4. Решение задачи на первичное поле.

4.1. Сборка матрицы СЛАУ.

4.2. Сборка вектора правой части СЛАУ с применением модуля численного интегрирования двумерным пятиузловым методом Гаусса. Метод обладает высоким порядком сходимости – 10, что позволяет достаточно точно интегрировать правую часть, соответствующую эллиптическому оператору в цилиндрических координатах, например, функции вида $\frac{1}{r^k}$.

- 4.3. Учёт главных краевых условий. Матрицы являются симметричными, поэтому удобно реализовать учёт краевых условий методом штрафов: к компонентам матрицы, соответствующим узлам с краевыми условиями первого рода, прибавляется положительное число высокого порядка, к компонентам вектора правой части – это же число, домноженное на значение функции в узле. Разность порядков данного числа и суммы модулей элементов матриц по строке матрицы означает точность учёта краевого условия). Более точно с сохранением симметричности матрицы можно учесть краевые условия т. н. методом Пеано, обнулив не только строку, но и столбец матрицы путём гауссова исключения.
- 4.4. Решение СЛАУ методом ЛОС (локально-оптимальная схема, минимизирующая невязку) с предобуславливанием неполным разложением Холецкого. Параметры решателя для представленных в работе примеров: максимальное число итераций – \sqrt{n} , относительная точность выхода из итерационного процесса – $1e-15$.
5. Перестроение сетки для вычисления добавочного поля. При формировании правой части задачи на добавочное поле используются векторы первичного поля, полученные посредством выдачи поля в узлах перестроенной сетки.
6. Решение задачи на добавочное поле. Задача решается аналогично задаче на первичное поле, начальное приближение полагается равным нулевому вектору без решения СЛАУ, т. к. токи проводимости в начальном приближении не учитываются.
7. Запись векторов решения в файлы и вызов вспомогательных модулей.

3. ТЕСТИРОВАНИЕ РАЗРАБОТАННОЙ ПРОГРАММЫ

3.1. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОРЯДКОВ ТОЧНОСТИ И СХОДИМОСТИ ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

Прежде чем приступать к тестированию реализованной программы, определим некоторые характеристики применяемых численных методов. Метод конечных элементов как проекционный сходится к наилучшему приближению точного решения в конечномерном пространстве V_g^h . В [1] приведены оценки сходимости метода конечных элементов для энергетической нормы и нормы пространства L_2

$$\|u - u_h\|_{\mathcal{E}} \leq C_{\mathcal{E}} h^k, \|u - u_h\|_{L_2} \leq C_{L_2} h^{k+1}, \quad (33)$$

где k – порядок базисных полиномов (порядок точности). Однако на практике часто используется эмпирическое соотношение для оценки сходимости решения по набору точек в евклидовой норме пространства векторов l_2

$$\|q_h^* - q_h\|_{l_2} \leq C_{l_2} h^{k+1}, \quad (34)$$

где q_h – вектор решения СЛАУ, q_h^* – вектор значений точного решения в узлах. Расстояние между точным и приближённым решением можно вводить и по набору произвольных точек, не являющихся значениями в узлах сетки.

Конечно-разностные схемы (16) и (14) удовлетворяют условию аппроксимации и устойчивы по правой части и начальным данным. По теореме Рябенского-Лакса имеет место сходимость решения разностной схемы к точному решению при $h \rightarrow 0$, причём порядок аппроксимации оператора равен порядку сходимости решения к точному [7]. Схема (16) обладает 1-м порядком точности (под порядком точности имеется в виду порядок полинома наибольшей степени, для которого аппроксимация дифференциального оператора выполняется точно) и 2-м порядком сходимости.

Определим порядки точности и сходимости для схемы (14) на регулярной сетке $\{t_0, t_1, \dots, t_p\}$ с шагом h . Обозначим $u_{i+1} = u(t_i + h)$ и разложим u_{i+1} в ряд Тейлора в окрестности точки t_i :

$$u_{i+1} = u_i + hu'_i + \frac{h^2}{2}u''_i + \frac{h^3}{6}u'''_i + o(h^3). \quad (35)$$

Найдём коэффициенты разностной схемы для регулярной сетки:

$$u'_{i+1} \approx \frac{1}{2h}u_{i-1} - \frac{2}{h}u_i + \frac{3}{2h}u_{i+1}. \quad (36)$$

Подставим (35) в (36), затем разложим u_i в точке t_{i-1} и подставим в полученное равенство. Получим оценку аппроксимации

$$\|(Lu)(t_{i+1})_h - L_h u_{i+1}^h\| = \left| \frac{h^2}{3}u'''_{i-1} + o(h^2) \right| \leq \left| \frac{1}{3}Ch^2 + o(h^2) \right|, \quad (37)$$

где L – оператор дифференцирования по времени, а L_h – его конечно-разностный аналог; C – верхняя грань модуля $u'''(t)$ на области определения $u(t)$. Таким образом, схема (55) имеет 2-й порядок точности и 2-й порядок сходимости.

Обратим внимание: мы нашли порядок аппроксимации оператора; если выразить искомое u_{i+1} , порядок приближённого равенства будет на единицу выше; именно так и следует поступать при исследовании конкретного численного метода. Однако глобальный порядок сходимости всё же будет вторым: на временном интервале длины l выполняется l/h шагов (т. н. «шаговый» метод), поэтому локальная ошибка накапливается и составляет $O(h^3) \cdot l/h = O(h^2)$; локальная ошибка двухслойной схемы составит $O(h^2)$.

3.2. ТЕСТИРОВАНИЕ НА ПОРЯДОК ТОЧНОСТИ

На рисунке 2 изображена расчётная область, используемая для тестирования разработанной программы. Сетка по пространству равномерная с шагом 1.0,

число узлов – 231. Сетка по времени неравномерная, шаг – 1.0 с коэффициентом разрядки 1.1, число слоёв 10.

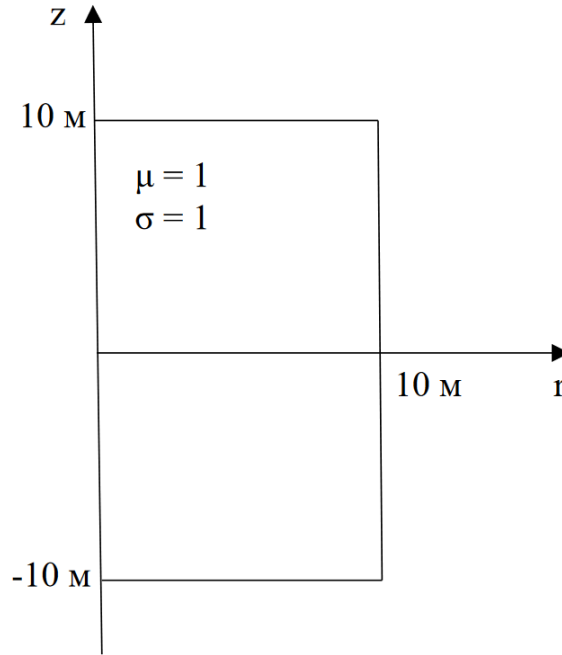


Рисунок 2 – Расчетная область для тестирования

Введём расстояние между точным u^* и конечноэлементным u^h решением как

$$\rho(u^*, u^h) = \sum_{i=1}^m \|q_{h,i}^* - q_{h,i}\|_{l_2}, \quad (38)$$

где m – число слоёв по времени, $q_{h,i}^*$ и $q_{h,i}$ – векторы значений функций u^* и u^h в узлах грубой сетки на i -м временном слое.

В таблице 1 представлены результаты тестов на аппроксимацию программного модуля вычисления поля без применения технологии выделения. В столбце «Матрицы» находится информация о том, какие слагаемые участвуют в постановке. Для всех тестов на границе области заданы краевые условия первого рода. Результаты тестирования соответствуют ожидаемым; из особенностей стоит отметить точное приближение в узлах функций, зависящих только от z .

Таблица 1 – Результаты тестирования программы без выделения поля на аппроксимацию

Функция u^*	Матрицы	Правая часть f^*	Приближение u_1	Расстояние $\rho(u^*, u^h)$
$rz t$	G, M^r, M	rz	Численное	$8.15384e-12$
$rz t$	G, M^r, M	rz	Точное	$8.20758e-12$
1	G, M^r, M	$\frac{1}{r^2}$	Численное	$9.30554e-03$
r^2	G, M^r, M	-3	Численное	$1.20169e+00$
r^2	G, M	-4	Численное	$1.94546e-03$
z^2	G, M^r, M	$-2 + \frac{z^2}{r^2}$	Численное	$6.32174e-01$
z^2	G, M	-2	Численное	$8.36581e-13$
z^2	G, M^r, M	$-2 + \frac{z^2}{r^2}$	Точное	$5.44496e-01$
z^2	G, M	-2	Точное	$6.97686e-13$
z^4	G, M	$-12z^2$	Точное	$5.36671e-11$
z^7	G, M	$-42z^5$	Точное	$3.69746e-08$
$\sin z$	G, M	$\sin z$	Численное	$7.34495e-11$
t^2	G, M	$2t$	Численное	$8.75405e+00$
t^2	G, M	$2t$	Точное	$6.50915e-13$
t^3	G, M	$3t^2$	Точное	$1.90024e+02$
$\sin(r + z + t)$	G, M^r, M	$\sin(r + z + t) \left(2 + \frac{1}{r^2}\right) +$ $+ \cos(r + z + t) \left(1 - \frac{1}{r}\right)$	Численное	$2.60223e+00$

3.3. ТЕСТИРОВАНИЕ НА СХОДИМОСТЬ

В таблицах 2-8 приведены результаты тестирования на сходимость программного модуля без выделения поля. Результаты соответствуют теоретическим оценкам за исключением нескольких тестов для функции z^2 : отношение погрешностей на вложенной сетке не достигло значения 4, что может объяс-

няться недостаточным числом дроблений и сложностью аппроксимации слагаемого $\frac{z^2}{r^2}$, для которого могут не выполняться теоретические оценки сходимости МКЭ при вычислении расстояния по узлам.

Для тестирования сходимости по времени исключим слагаемое M^r , выбрав функцию, для которой пространственная аппроксимация будет выполнена точно. Если дробить сетку только по времени для слагаемых G, M^r, M , погрешность будет сходиться к погрешности пространственной аппроксимации.

Таблица 2 – Результаты тестирования на сходимость для функции r^2

Вложенность сетки по пространству и число узлов	Вложенность сетки по времени и число узлов	Матрицы	Расстояние $\rho(u^*, u^h)$
0: 231	0: 11	G, M^r, M	1.20169e+00
1: 861	0: 11	G, M^r, M	2.91266e-01
2: 3321	0: 11	G, M^r, M	7.24739e-02
3: 13041	0: 11	G, M^r, M	1.81105e-02
4: 51681	0: 11	G, M^r, M	4.52755e-03
5: 205761	0: 11	G, M^r, M	1.131935e-03
0: 231	0: 11	G, M	1.945464e-03
1: 861	0: 11	G, M	5.151769e-04
2: 3321	0: 11	G, M	1.347326e-04
3: 13041	0: 11	G, M	3.469222e-05
4: 51681	0: 11	G, M	8.854356e-06
5: 205761	0: 11	G, M	2.247130e-06

Таблица 3 – Результаты тестирования на сходимость для функции z^2

Вложенность сетки по пространству и число узлов	Вложенность сетки по времени и число узлов	Матрицы	Расстояние $\rho(u^*, u^h)$
0: 231	0: 11	G, M^r, M	6.321743e-01
1: 861	0: 11	G, M^r, M	2.498867e-01
2: 3321	0: 11	G, M^r, M	2.520736e-01
3: 13041	0: 11	G, M^r, M	1.675447e-01
4: 51681	0: 11	G, M^r, M	8.234400e-02
5: 205761	0: 11	G, M^r, M	2.854403e-02

Таблица 4 – Результаты тестирования на сходимость для функции $\sin z$

Вложенность сетки по пространству и число узлов	Вложенность сетки по времени и число узлов	Матрицы	Расстояние $\rho(u^*, u^h)$
0: 231	0: 11	G, M^r, M	2.533297e-01
1: 861	0: 11	G, M^r, M	6.712115e-02
2: 3321	0: 11	G, M^r, M	1.811750e-02
3: 13041	0: 11	G, M^r, M	5.174433e-03
4: 51681	0: 11	G, M^r, M	1.542714e-03
5: 205761	0: 11	G, M^r, M	4.350174e-04

Таблица 5 – Результаты тестирования на сходимость для функции t^3

Вложенность сетки по пространству и число узлов	Вложенность сетки по времени и число узлов	Матрицы	Расстояние $\rho(u^*, u^h)$
0: 231	0: 11	G, M	2.073998e+02
0: 231	1: 21	G, M	5.509695e+01
0: 231	2: 41	G, M	1.418318e+01
0: 231	3: 81	G, M	3.591219e+00
0: 231	4: 161	G, M	9.029509e-01
0: 231	5: 321	G, M	2.263565e-01
0: 231	6: 641	G, M	5.666515e-02
0: 231	7: 1281	G, M	1.417571e-02
0: 231	8: 2561	G, M	3.545102e-03
0: 231	9: 5121	G, M	8.864225e-04
0: 231	10: 10241	G, M	2.216250e-04
0: 231	0: 11	M	9.245385e+02
0: 231	1: 21	M	2.431621e+02
0: 231	2: 41	M	6.253634e+01
0: 231	3: 81	M	1.586332e+01
0: 231	4: 161	M	3.994648e+00
0: 231	5: 321	M	1.002264e+00
0: 231	6: 641	M	2.510164e-01
0: 231	7: 1281	M	6.281038e-02
0: 231	8: 2561	M	1.570963e-02
0: 231	9: 5121	M	3.928289e-03
0: 231	10: 10241	M	9.821864e-04

Таблица 6 – Результаты тестирования на сходимость для функции $r^3 z^3$

Вложенность сетки по пространству и число узлов	Вложенность сетки по времени и число узлов	Матрицы	Расстояние $\rho(u^*, u^h)$
0: 231	0: 11	G, M	1.329172e+04
1: 861	0: 11	G, M	3.267202e+03
2: 3321	0: 11	G, M	8.135665e+02
3: 13041	0: 11	G, M	2.032106e+02
4: 51681	0: 11	G, M	5.079509e+01
5: 205761	0: 11	G, M	1.269905e+01
0: 231	0: 11	G, M^r, M	1.000745e+04
1: 861	0: 11	G, M^r, M	2.439265e+03
2: 3321	0: 11	G, M^r, M	6.063034e+02
3: 13041	0: 11	G, M^r, M	1.513649e+02
4: 51681	0: 11	G, M^r, M	3.782819e+01

Таблица 7 – Результаты тестирования на сходимость для функции $r^3 z^3 t^4$

Вложенность сетки по пространству и число узлов	Вложенность сетки по времени и число узлов	Матрицы	Расстояние $\rho(u^*, u^h)$
0: 231	0: 11	G, M^r, M	5.863999e+08
0: 231	1: 21	G, M^r, M	7.940536e+07
0: 231	2: 41	G, M^r, M	1.496395e+08
0: 231	3: 81	G, M^r, M	1.897228e+08
0: 231	5: 321	G, M^r, M	2.032540e+08
0: 231	8: 2561	G, M^r, M	2.041661e+08
0: 231	10: 10241	G, M^r, M	2.041798e+08
2: 3321	2: 41	G, M^r, M	4.417082e+07
3: 13041	3: 81	G, M^r, M	1.139543e+07
4: 51681	4: 161	G, M^r, M	2.891806e+06

Таблица 8 – Результаты тестирования на сходимость для функции $\sin(r + z + t)$

Вложенность сетки по пространству и число узлов	Вложенность сетки по времени и число узлов	Матрицы	Расстояние $\rho(u^*, u^h)$
0: 231	0: 11	G, M^r, M	2.602232e+00
1: 861	1: 21	G, M^r, M	1.053177e+00
2: 3321	2: 41	G, M^r, M	3.232735e-01
3: 13041	3: 81	G, M^r, M	8.749427e-02
4: 51681	4: 161	G, M^r, M	2.261704e-02
4: 51681	5: 321	G, M^r, M	7.407457e-03

4. ИССЛЕДОВАНИЯ

4.1. ВЕРИФИКАЦИЯ ПРОГРАММЫ

Верифицируем разработанную программу, сравнив результаты ее работы с решением физической задачи, полученным с помощью программного обеспечения IFGEM3D. Расчетная область и параметры сетки, используемые для расчета в разработанной нами программе, представлены на рисунке 3 и в таблице 9. Источник находится в точке (13, 30), приёмник – в точке (3, 30). Расчет в конечно-элементном пакете проводился на аналогичной пространственной сетке, сгенерированной автоматически (10848 узлов). Первичная проводимость грунта (граница раздела сред – $z = 0$ м) равна 0,1 См/м, воздух считается непроводящим.

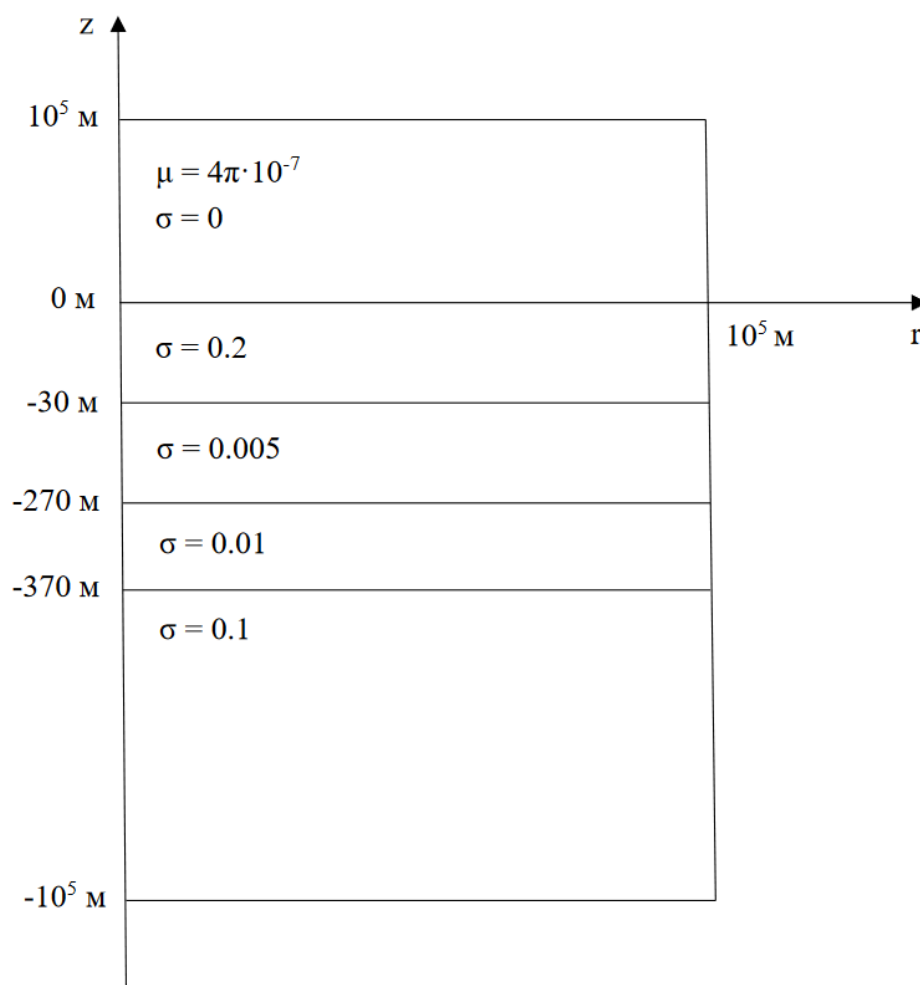


Рисунок 3 – Расчётная область для верификации программы с выделением поля

Таблица 9 – Параметры сетки для верификации программы с выделением поля

Координата	Отрезок	Коэффициент разрядки	Начальный шаг	Направление разрядки
r	[1e-3, 13]	1.05	5e-1	-
r	[13, 100000]	1.2	5e-1	+
z	[-100000, 30]	1.2	5e-1	-
z	[30, 100000]	1.2	5e-1	+
t	[0, 1.1e-2]	1.1	1e-7	+

На рисунках 4 и 5 представлена визуализация решения стационарной задачи в окрестности источника, а также выведены значения поля в контрольных точках. Погрешность численного решения в контрольных точках составляет менее 1%.

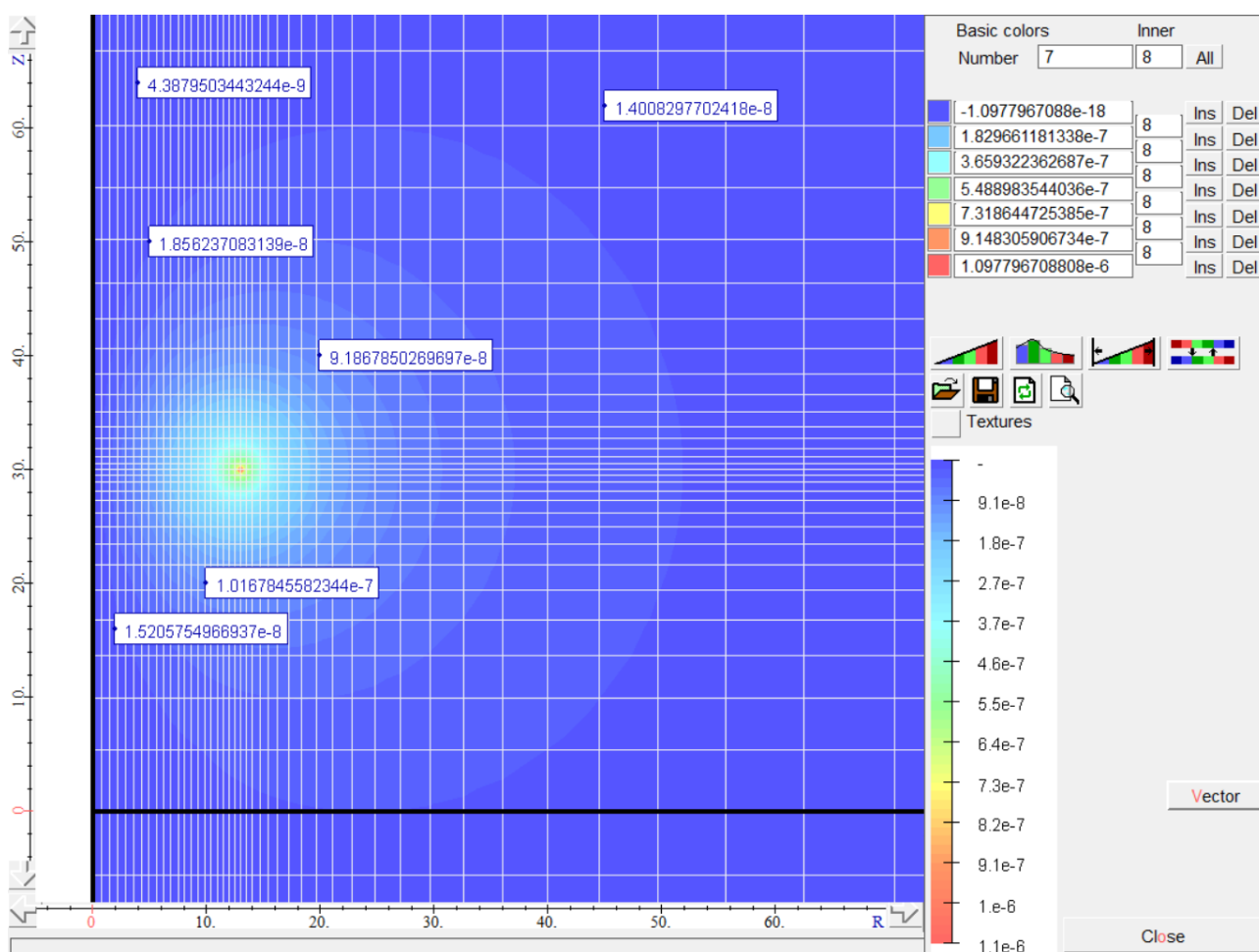


Рисунок 4 – Визуализация решения стационарной задачи, полученного с помощью специального ПО

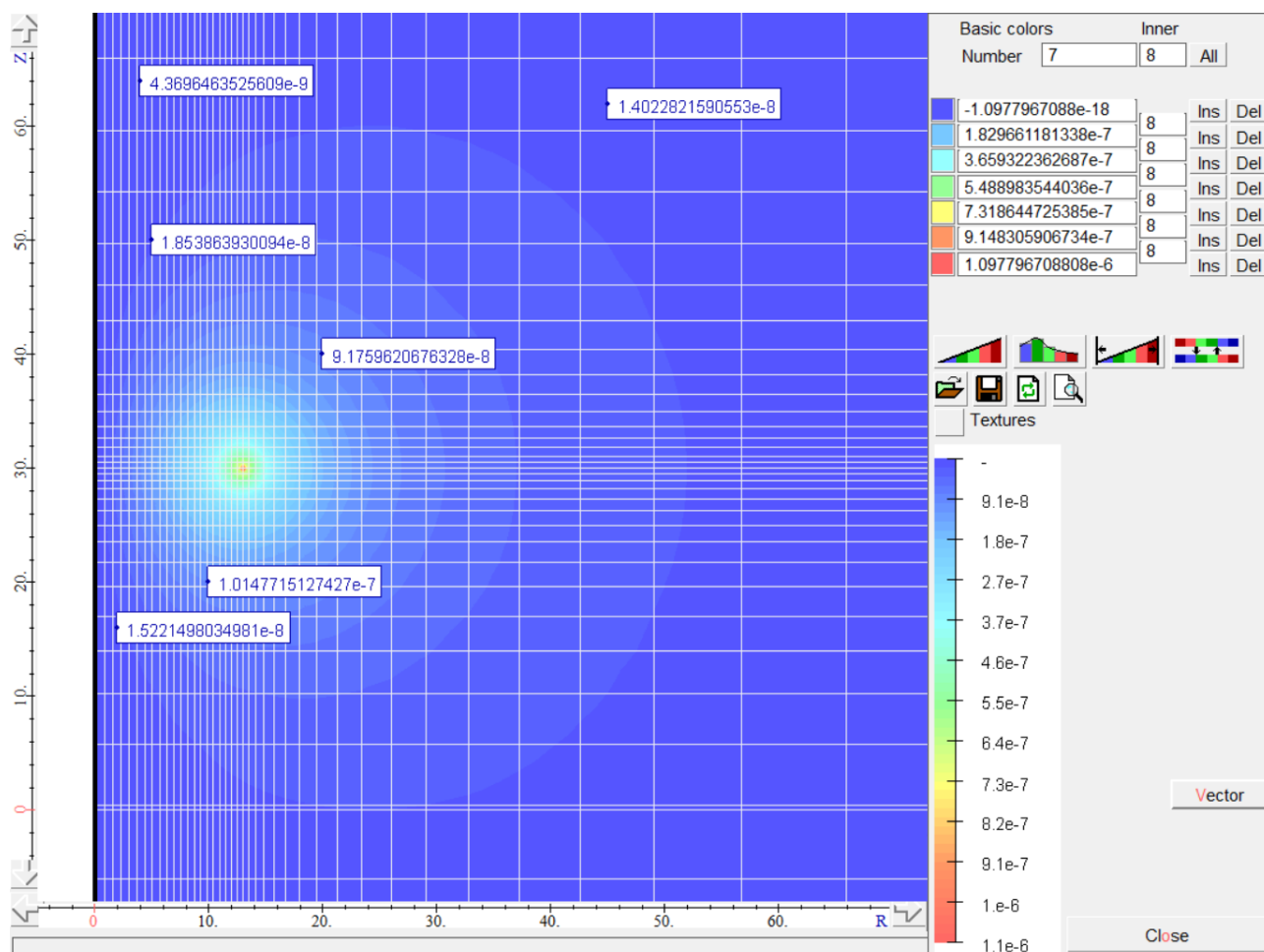


Рисунок 5 – Визуализация решения стационарной задачи, полученного с помощью разработанной программы

В таблице 10 представлены результаты сравнения численных решений ε^* (эталонное решение, полученное в конечноэлементном пакете IFGEM3D), ε_h^0 (численное решение без выделения поля) и ε_h^S (численное решение с выделением поля). Относительная погрешность ε_h^0 и ε_h^S составляет менее 1% на наиболее информативных временных слоях. Кроме того, данные величины совпадают с точностью до 3-4 знаков, что свидетельствует о согласованности задач без выделения поля и с применением этой технологии.

Таблица 10 – Верификация программы с выделением части поля

1	2	3	4	5	6	7
t, c	ε^* , В	ε_h^0 , В	ε_h^s , В	$\frac{ \varepsilon^* - \varepsilon_h^0 }{ \varepsilon^* }$, %	$\frac{ \varepsilon^* - \varepsilon_h^s }{ \varepsilon^* }$, %	$\frac{ \varepsilon_h^0 - \varepsilon_h^s }{ \varepsilon_h^0 }$, %
1,00000E-07	2,7367880344E-03	6,8925069600E+00	6,8925072256E+00	2,517E+05	2,517E+05	3,854E-06
2,00000E-07	2,5148839951E-03	2,3613967268E-03	2,3614295767E-03	6,103E+00	6,102E+00	1,391E-03
3,10000E-07	2,2972276211E-03	2,1974426969E-03	2,1974299303E-03	4,344E+00	4,344E+00	5,810E-04
4,31000E-07	2,0873043537E-03	2,0249256000E-03	2,0249087917E-03	2,988E+00	2,989E+00	8,301E-04
5,64100E-07	1,8851010799E-03	1,8525010623E-03	1,8524604077E-03	1,729E+00	1,732E+00	2,195E-03
7,10510E-07	1,6935985088E-03	1,6842847737E-03	1,6842393816E-03	5,499E-01	5,526E-01	2,695E-03
8,71561E-07	1,5166584253E-03	1,5227879645E-03	1,5227555765E-03	4,041E-01	4,020E-01	2,127E-03
1,04872E-06	1,3511145115E-03	1,3698428707E-03	1,3698220914E-03	1,386E+00	1,385E+00	1,517E-03
1,24359E-06	1,2000066042E-03	1,2268597624E-03	1,2268479999E-03	2,238E+00	2,237E+00	9,587E-04
1,45795E-06	1,0642263889E-03	1,0949446068E-03	1,0949020516E-03	2,886E+00	2,882E+00	3,887E-03
1,69374E-06	9,4362103939E-04	9,7474497494E-04	9,7470336498E-04	3,298E+00	3,294E+00	4,269E-03
1,95312E-06	8,4029144049E-04	8,6659685260E-04	8,6659912159E-04	3,131E+00	3,131E+00	2,618E-04
2,23843E-06	7,4791878462E-04	7,7055132154E-04	7,7055426724E-04	3,026E+00	3,026E+00	3,823E-04
2,55227E-06	6,6782826185E-04	6,8616179099E-04	6,8616419815E-04	2,745E+00	2,746E+00	3,508E-04
2,89750E-06	5,9905171394E-04	6,1269220000E-04	6,1269421260E-04	2,277E+00	2,277E+00	3,285E-04
3,27725E-06	5,4000616074E-04	5,4914360383E-04	5,4914438449E-04	1,692E+00	1,692E+00	1,422E-04
3,69497E-06	4,8945915699E-04	4,9433621198E-04	4,9433418533E-04	9,964E-01	9,960E-01	4,100E-04
4,15447E-06	4,4572830200E-04	4,4700187357E-04	4,4699772799E-04	2,857E-01	2,848E-01	9,274E-04
4,65992E-06	4,0593293309E-04	4,0588276538E-04	4,0587845390E-04	1,236E-02	1,342E-02	1,062E-03
5,21591E-06	3,7045282125E-04	3,6981468242E-04	3,6981193239E-04	1,723E-01	1,730E-01	7,436E-04
5,82750E-06	3,3851736784E-04	3,3778869335E-04	3,3778741246E-04	2,153E-01	2,156E-01	3,792E-04
6,50025E-06	3,0948299170E-04	3,0898272820E-04	3,0898258166E-04	1,616E-01	1,617E-01	4,743E-05
7,24027E-06	2,8328785300E-04	2,8276893307E-04	2,8277074594E-04	1,832E-01	1,825E-01	6,411E-04
8,05430E-06	2,5919723511E-04	2,5870172974E-04	2,5870441891E-04	1,912E-01	1,901E-01	1,039E-03
8,94973E-06	2,3648160696E-04	2,3648714498E-04	2,3648271655E-04	2,342E-03	4,692E-04	1,873E-03
9,93471E-06	2,1556989849E-04	2,1591712885E-04	2,1591136198E-04	1,611E-01	1,584E-01	2,671E-03
1,10182E-05	1,9634346664E-04	1,9686296956E-04	1,9686362731E-04	2,646E-01	2,649E-01	3,341E-04
1,22100E-05	1,7868405581E-04	1,7924806455E-04	1,7924812461E-04	3,156E-01	3,157E-01	3,351E-05
1,35210E-05	1,6247855127E-04	1,6298680780E-04	1,6298626931E-04	3,128E-01	3,125E-01	3,304E-04
1,49631E-05	1,4798648655E-04	1,4800027599E-04	1,4799965751E-04	9,318E-03	8,900E-03	4,179E-04
1,65494E-05	1,3420137763E-04	1,3420593518E-04	1,3420586268E-04	3,396E-03	3,342E-03	5,402E-05
1,82943E-05	1,2141217291E-04	1,2151891272E-04	1,2151950283E-04	8,792E-02	8,840E-02	4,856E-04
2,02138E-05	1,0963658988E-04	1,0985561155E-04	1,0985662807E-04	1,998E-01	2,007E-01	9,253E-04
2,23252E-05	9,8839290440E-05	9,9138288124E-05	9,9139405787E-05	3,025E-01	3,036E-01	1,127E-03
2,46477E-05	8,8936187327E-05	8,9298559835E-05	8,9299195774E-05	4,075E-01	4,082E-01	7,121E-04
2,72024E-05	7,9872600734E-05	8,0278633621E-05	8,0278287348E-05	5,084E-01	5,079E-01	4,313E-04
3,00127E-05	7,1662716568E-05	7,2029821070E-05	7,2028964247E-05	5,123E-01	5,111E-01	1,190E-03
3,31039E-05	6,4337119460E-05	6,4511498201E-05	6,4510872037E-05	2,710E-01	2,701E-01	9,706E-04
3,65043E-05	5,7476501912E-05	5,7687735146E-05	5,7687316729E-05	3,675E-01	3,668E-01	7,253E-04
4,02448E-05	5,1266506314E-05	5,1521734277E-05	5,1521438278E-05	4,978E-01	4,973E-01	5,745E-04
4,43593E-05	4,5711208135E-05	4,5973573251E-05	4,5973331684E-05	5,740E-01	5,734E-01	5,254E-04
4,88852E-05	4,0751658380E-05	4,0997736947E-05	4,0998458487E-05	6,038E-01	6,056E-01	1,760E-03
5,38637E-05	3,6331940442E-05	3,6546672810E-05	3,6547595900E-05	5,910E-01	5,936E-01	2,526E-03
5,93401E-05	3,2413765788E-05	3,2568234256E-05	3,2568242553E-05	4,766E-01	4,766E-01	2,548E-05
6,53641E-05	2,8989506885E-05	2,9006876176E-05	2,9006876446E-05	5,992E-02	5,992E-02	9,322E-07
7,19905E-05	2,5796152651E-05	2,5811791001E-05	2,5811788751E-05	6,062E-02	6,061E-02	8,717E-06
7,92795E-05	2,2903678939E-05	2,2935432986E-05	2,2935467196E-05	1,386E-01	1,388E-01	1,492E-04
8,72975E-05	2,0294480026E-05	2,0336206650E-05	2,0336249527E-05	2,056E-01	2,058E-01	2,108E-04
9,61172E-05	1,7932258546E-05	1,7979462729E-05	1,7979495175E-05	2,632E-01	2,634E-01	1,805E-04
1,05819E-04	1,5788905323E-05	1,5837672407E-05	1,5837648930E-05	3,089E-01	3,087E-01	1,482E-04
1,16491E-04	1,3869571500E-05	1,3889888818E-05	1,3889638549E-05	1,465E-01	1,447E-01	1,802E-03
1,28230E-04	1,2139457278E-05	1,2119788277E-05	1,2119740688E-05	1,620E-01	1,624E-01	3,927E-04
1,41143E-04	1,0519572534E-05	1,0515914130E-05	1,0516176921E-05	3,478E-02	3,228E-02	2,499E-03
1,55347E-04	9,0547585860E-06	9,0696155077E-06	9,0697067595E-06	1,641E-01	1,651E-01	1,006E-03
1,70972E-04	7,7469912358E-06	7,7723664567E-06	7,7723973739E-06	3,275E-01	3,279E-01	3,978E-04
1,88159E-04	6,5852585249E-06	6,6166811140E-06	6,6166779896E-06	4,772E-01	4,771E-01	4,722E-05
2,07065E-04	5,5612688884E-06	5,5947333402E-06	5,5947264370E-06	6,017E-01	6,016E-01	1,234E-04

Окончание таблицы 10

1	2	3	4	5	6	7
2,27862E-04	4,6833390370E-06	4,6981672877E-06	4,6981632223E-06	3,166E-01	3,165E-01	8,653E-05
2,50738E-04	3,9272098802E-06	3,9179914283E-06	3,9179894852E-06	2,347E-01	2,348E-01	4,960E-05
2,75901E-04	3,2460016664E-06	3,2446957207E-06	3,2446923771E-06	4,023E-02	4,034E-02	1,030E-04
3,03582E-04	2,6609359775E-06	2,6684476965E-06	2,6684437555E-06	2,823E-01	2,821E-01	1,477E-04
3,34030E-04	2,1674244199E-06	2,1793371481E-06	2,1793354534E-06	5,496E-01	5,495E-01	7,776E-05
3,67523E-04	1,7537628300E-06	1,7676095675E-06	1,7676082727E-06	7,895E-01	7,895E-01	7,325E-05
4,04365E-04	1,4107126044E-06	1,4238545496E-06	1,4238523574E-06	9,316E-01	9,314E-01	1,540E-04
4,44892E-04	1,1275293073E-06	1,1391722015E-06	1,1391699916E-06	1,033E+00	1,032E+00	1,940E-04
4,89471E-04	8,9968781685E-07	9,0529836908E-07	9,0529664852E-07	6,236E-01	6,234E-01	1,901E-04
5,38508E-04	7,1664451389E-07	7,1468276223E-07	7,1468168491E-07	2,737E-01	2,739E-01	1,507E-04
5,92449E-04	5,6029472034E-07	5,6053266937E-07	5,6053217241E-07	4,247E-02	4,238E-02	8,866E-05
6,51783E-04	4,3443671893E-07	4,3682498449E-07	4,3682487691E-07	5,497E-01	5,497E-01	2,463E-05
7,17052E-04	3,3518642886E-07	3,3829188959E-07	3,3829191984E-07	9,265E-01	9,265E-01	8,944E-06
7,88847E-04	2,5728673791E-07	2,6038592527E-07	2,6038585950E-07	1,205E+00	1,205E+00	2,526E-05
8,67822E-04	1,9639685343E-07	1,9923006639E-07	1,9922976644E-07	1,443E+00	1,442E+00	1,506E-04
9,54694E-04	1,5125858772E-07	1,5155799833E-07	1,5155745683E-07	1,979E-01	1,976E-01	3,573E-04
1,05025E-03	1,1526965682E-07	1,1464909765E-07	1,1464840701E-07	5,384E-01	5,390E-01	6,024E-04
1,15537E-03	8,6205029220E-08	8,6261822863E-08	8,6261088537E-08	6,588E-02	6,503E-02	8,513E-04
1,27100E-03	6,4133157139E-08	6,4568457446E-08	6,4567765157E-08	6,787E-01	6,777E-01	1,072E-03
1,39818E-03	4,7586061555E-08	4,8093415546E-08	4,8092843378E-08	1,066E+00	1,065E+00	1,190E-03
1,53809E-03	3,5281951568E-08	3,5656611017E-08	3,5656183329E-08	1,062E+00	1,061E+00	1,199E-03
1,69199E-03	2,6113570129E-08	2,6322748661E-08	2,6322433711E-08	8,010E-01	7,998E-01	1,196E-03
1,86128E-03	1,9652368792E-08	1,9356873936E-08	1,9356648028E-08	1,504E+00	1,505E+00	1,167E-03
2,04750E-03	1,4691197066E-08	1,4186196575E-08	1,4186051592E-08	3,437E+00	3,438E+00	1,022E-03
2,25234E-03	1,0795965864E-08	1,0367830632E-08	1,0367721884E-08	3,966E+00	3,967E+00	1,049E-03
2,47766E-03	7,9405808719E-09	7,5617657224E-09	7,5616967656E-09	4,771E+00	4,771E+00	9,119E-04
2,72552E-03	5,8826667555E-09	5,5089209828E-09	5,5089089160E-09	6,353E+00	6,354E+00	2,190E-04
2,99816E-03	4,3916329560E-09	4,0134065031E-09	4,0133014392E-09	8,612E+00	8,615E+00	2,618E-03
3,29807E-03	3,3051730952E-09	2,9276152491E-09	2,9274971019E-09	1,142E+01	1,143E+01	4,036E-03
3,62797E-03	2,5062167879E-09	2,1414412891E-09	2,1414371815E-09	1,455E+01	1,455E+01	1,918E-04
3,99085E-03	1,9369831534E-09	1,5734607289E-09	1,5734606191E-09	1,877E+01	1,877E+01	6,977E-06
4,39003E-03	1,4989700503E-09	1,1633600360E-09	1,1633646191E-09	2,239E+01	2,239E+01	3,940E-04
4,82912E-03	1,1500521850E-09	8,6704181433E-10	8,6704550053E-10	2,461E+01	2,461E+01	4,251E-04
5,31212E-03	8,8705098733E-10	6,5241070191E-10	6,5240967826E-10	2,645E+01	2,645E+01	1,569E-04
5,84342E-03	6,8738023629E-10	4,9625368701E-10	4,9625168090E-10	2,781E+01	2,781E+01	4,043E-04
6,42786E-03	5,3523928045E-10	3,8188459282E-10	3,8188316424E-10	2,865E+01	2,865E+01	3,741E-04
7,07073E-03	4,1749709112E-10	2,9737816053E-10	2,9737792887E-10	2,877E+01	2,877E+01	7,790E-05
7,77790E-03	3,2571219322E-10	2,3425579211E-10	2,3425649611E-10	2,808E+01	2,808E+01	3,005E-04
8,55578E-03	2,5393521241E-10	1,8651492074E-10	1,8651559806E-10	2,655E+01	2,655E+01	3,631E-04
9,41144E-03	1,9759148984E-10	1,4991799542E-10	1,4991800506E-10	2,413E+01	2,413E+01	6,431E-06
1,03527E-02	1,6825526927E-10	1,2147617582E-10	1,2147551126E-10	2,780E+01	2,780E+01	5,471E-04

4.2. ПОИСК ОПТИМАЛЬНЫХ СЕТОК

Будем считать оптимальной пространственную сетку с как можно меньшим числом узлов, для которой погрешность численного решения на вложенной сетке составляет не более определённого процента. При фиксированном числе узлов точность решения можно повысить использованием нерегулярных сеток. Сгущать сетку следует прежде всего к точке источника и к точке приемника, однако

слишком большие коэффициенты разрядки задавать не стоит. Сетка для аппроксимации по времени может строиться по некоторым априорным данным, физическим соображениям, может корректироваться. Далее в данной работе будет использоваться сетка с начальным шагом $1e-7$, коэффициентом разрядки 1.1 и 100 временных слоёв; более сложную структуру и больший интерес представляет пространственная сетка.

Пусть для задачи на суммарное поле оптимальной является сетка с ограничением 2%, тогда имеет смысл предложить следующий критерий оптимальности сеток для вычисления первичного и добавочного полей. Потребуем выполнения ограничения в 1% для первичного поля, а ограничение для добавочного поля будем вычислять на каждом временном слое в зависимости от величины вклада аномалии в сигнал ЭДС:

$$k_a^j = \left| \frac{\varepsilon_p^j}{\varepsilon_a^j} \right| \cdot k_p, \quad (39)$$

где k_a^j – ограничение для задачи на добавочное поле на j -м временном слое в процентах, k_p – ограничение для задачи на первичное поле в процентах, ε_p^j и ε_a^j – вклады первичного и добавочного полей соответственно в сигнал ЭДС. Оценка отношения вкладов проводится на подробной сетке.

Как правило, нормальное поле хорошо аппроксимирует суммарное, т. е. вклад аномального поля составляет небольшую часть сигнала (например, не более 10%). Однако в случае близости к нулю сигнала аномального поля (например, при смене знака) относительная погрешность решения на вложенной сетке может составлять более 100% даже на подробной сетке. Также, например, если аномальное поле составляет по модулю менее 0,1% нормального, нет смысла его вычислять с ограничением 1%, т. к. погрешность нормального поля перекроет вклад аномалии. Поэтому не следует задавать фиксированное ограничение для сигнала аномального поля на каждом из временных слоёв. При использовании

формулы (39) в худшем случае (соотношение сигналов нормального и аномального полей 99:1) погрешность составит менее 2%.

Цель установки ограничения – получить решение с заданной точностью (при погрешности в 2% можно считать точными 2 знака численного решения). Поиск оптимальных сеток будем начинать с подробных сеток, постепенно уменьшая число узлов и подбирая коэффициенты и интервалы разрядки. Ниже приведены найденные нами параметры близких к оптимальным сеток для двух сред с различной величиной вклада аномалии (таблицы 11-15). Расчетная область и параметры первой среды (вклад аномального поля не превышает 50%) приведены на рисунке 3, второй среды – на рисунке 6.

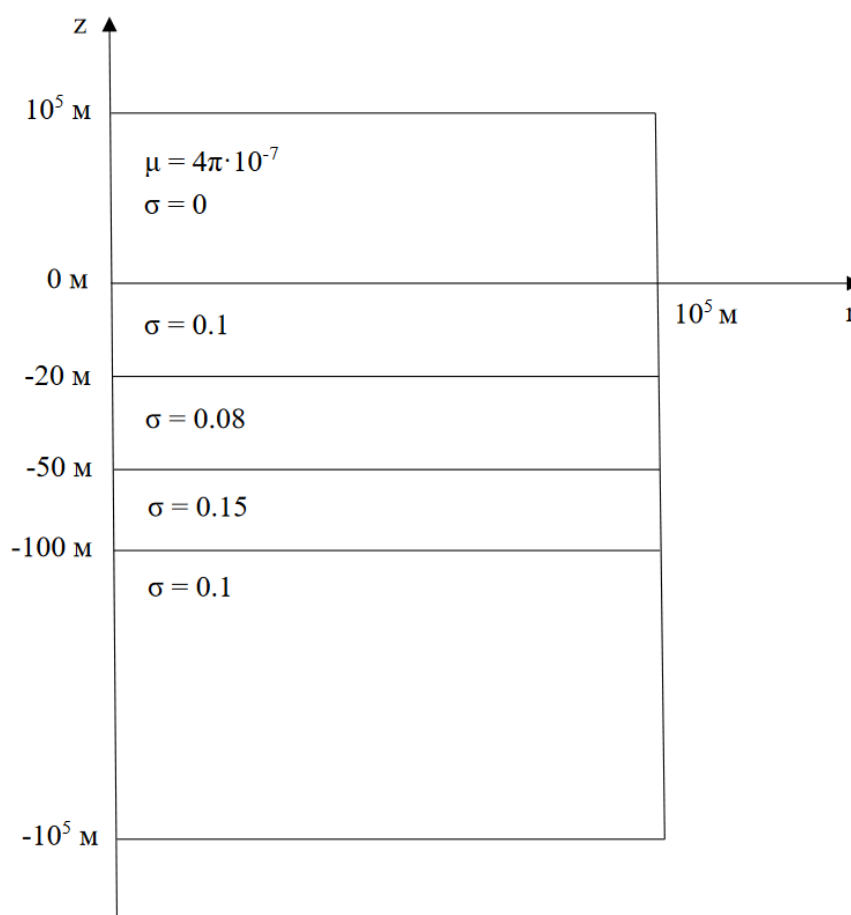


Рисунок 6 – Расчётная область для среды с вкладом аномалий не более 15%

Таблица 11 – Параметры сетки задачи на суммарное поле для среды с вкладом аномалии не более 50% (число узлов – 20520)

Координата	Отрезок	Коэффициент разрядки	Начальный шаг	Направление разрядки
r	[1e-3, 13]	1.02	2e-1	-
r	[13, 100000]	1.2	2e-1	+
z	[-100000, 30]	1.1	1e-1	-
z	[30, 100000]	1.2	2e-1	+

Таблица 12 – Параметры сетки задачи на суммарное поле для среды с вкладом аномалии не более 15% (число узлов – 19372)

Координата	Отрезок	Коэффициент разрядки	Начальный шаг	Направление разрядки
r	[1e-3, 13]	1.01	2e-1	-
r	[13, 100000]	1.2	2e-1	+
z	[-100000, 30]	1.12	2e-1	-
z	[30, 100000]	1.2	2e-1	+

Таблица 13 – Параметры сетки задачи на первичное поле (число узлов – 22140)

Координата	Отрезок	Коэффициент разрядки	Начальный шаг	Направление разрядки
r	[1e-3, 3]	1.05	3e-1	-
r	[3, 8]	1.05	3e-1	+
r	[8, 13]	1.05	3e-1	-
r	[13, 100000]	1.2	4e-2	+
z	[-100000, 30]	1.1	4e-2	-
z	[30, 100000]	1.2	4e-2	+

Таблица 14 – Параметры сетки задачи на аномальное поле для среды с вкладом аномалии не более 50% (число узлов – 8700)

Координата	Отрезок	Коэффициент разрядки	Начальный шаг	Направление разрядки
r	[1e-3, 3]	1.2	1e-1	-
r	[3, 100000]	1.17	1e-1	+
z	[-100000, 30]	1.07	1e-1	-
z	[30, 100000]	1.2	1e-1	+

Таблица 15 – Параметры сетки задачи на аномальное поле для среды с вкладом аномалии не более 15% (число узлов – 1890)

Координата	Отрезок	Коэффициент разрядки	Начальный шаг	Направление разрядки
r	[1e-3, 3]	1.3	5e-1	-
r	[3, 100000]	1.3	5e-1	+
z	[-100000, 30]	1.2	5e-1	-
z	[30, 100000]	1.3	5e-1	+

Для сетки задачи на добавочное поле бак выбирался намного меньшим, чем для суммарного и первичного полей: 10^3 м вместо 10^5 м. Отметим, что подбор параметров близких к оптимальным сеток без использования алгоритмов автоматического построения оптимальных сеток – довольно трудоёмкий процесс, поэтому мы ограничились выбором сеток, удовлетворяющим ограничениям погрешности, но содержащие несколько больше узлов, чем оптимальные сетки. На практике сетки обычно выбираются в зависимости от требований задачи и не всегда жёстко удовлетворяют сформулированным нами условиям оптимальности.

Ниже приведены таблицы 16 и с данными о погрешностях для выбранных сеток на части временных слоёв (слои выбирались таким образом, чтобы описать поведение погрешности, но не перегружать таблицы). Обозначения: ε_h^s – ЭДС

суммарного поля, ε_h^p – ЭДС первичного поля, ε_h^a – ЭДС аномального поля; r^a – сокращённое обозначение погрешности величины ε_h^a относительно вложенной сетки; нижний индекс $h/2$ означает, что численное решение получено на вложенной сетке.

Таблица 16 – Данные о погрешностях для среды с вкладом аномалии не более 50%

1	2	3	4	5	6	7	8	9
t, с	ε_h^s , В	$\frac{ \varepsilon_h^s - \varepsilon_{h/2}^s }{ \varepsilon_{h/2}^s }$, %	ε_h^p , В	$\frac{ \varepsilon_h^p - \varepsilon_{h/2}^p }{ \varepsilon_{h/2}^p }$, %	ε_h^a , В	$\frac{ \varepsilon_h^a - \varepsilon_{h/2}^a }{ \varepsilon_{h/2}^a }$, %	$\frac{ \varepsilon_{h/2}^p }{ \varepsilon_{h/2}^a }$	$r^a \cdot \frac{ \varepsilon_{h/2}^p }{ \varepsilon_{h/2}^a }$
1,00E-07	6,903E+00	0,130	6,906E+00	0,122	-2,476E-03	7,588	3004,955	0,003
2,00E-07	3,496E-03	6,023	4,896E-03	4,281	-1,379E-03	11,766	3,806	3,092
3,10E-07	2,846E-03	9,086	3,251E-03	1,359	-8,310E-04	11,001	4,285	2,567
4,31E-07	2,297E-03	16,046	2,472E-03	1,553	-6,078E-04	1,998	4,214	0,474
5,64E-07	1,872E-03	15,110	2,081E-03	0,810	-4,923E-04	5,829	4,014	1,452
7,11E-07	1,556E-03	11,346	1,817E-03	0,686	-4,086E-04	9,037	4,018	2,249
8,72E-07	1,323E-03	7,629	1,598E-03	1,365	-3,415E-04	9,155	4,195	2,183
1,05E-06	1,148E-03	4,962	1,411E-03	1,359	-2,882E-04	8,113	4,439	1,828
1,24E-06	1,014E-03	3,470	1,253E-03	1,189	-2,462E-04	7,045	4,677	1,506
1,46E-06	9,075E-04	2,617	1,120E-03	1,056	-2,124E-04	6,264	4,890	1,281
1,69E-06	8,192E-04	2,229	1,005E-03	0,950	-1,843E-04	5,695	5,096	1,118
1,95E-06	7,431E-04	1,939	9,053E-04	0,841	-1,602E-04	5,218	5,311	0,982
2,24E-06	6,758E-04	1,663	8,173E-04	0,760	-1,392E-04	4,770	5,548	0,860
2,55E-06	6,164E-04	1,474	7,392E-04	0,704	-1,208E-04	4,330	5,815	0,745
2,90E-06	5,631E-04	1,282	6,694E-04	0,636	-1,044E-04	3,895	6,121	0,636
3,28E-06	5,152E-04	1,141	6,066E-04	0,559	-8,991E-05	3,473	6,476	0,536
3,69E-06	4,719E-04	1,038	5,499E-04	0,503	-7,698E-05	3,071	6,890	0,446
4,15E-06	4,324E-04	0,923	4,986E-04	0,452	-6,543E-05	2,699	7,381	0,366
4,66E-06	3,962E-04	0,777	4,520E-04	0,412	-5,511E-05	2,369	7,975	0,297
5,22E-06	3,632E-04	0,689	4,096E-04	0,369	-4,590E-05	2,094	8,706	0,240
5,83E-06	3,329E-04	0,610	3,710E-04	0,326	-3,767E-05	1,888	9,631	0,196
6,50E-06	3,051E-04	0,553	3,357E-04	0,294	-3,035E-05	1,770	10,834	0,163
8,05E-06	2,557E-04	0,429	2,741E-04	0,240	-1,814E-05	1,910	14,788	0,129
9,93E-06	2,136E-04	0,345	2,226E-04	0,203	-8,750E-06	3,038	24,620	0,123
1,10E-05	1,950E-04	0,314	2,002E-04	0,183	-4,981E-06	4,801	38,189	0,126
1,22E-05	1,777E-04	0,286	1,797E-04	0,169	-1,761E-06	11,605	90,054	0,129
1,35E-05	1,618E-04	0,251	1,610E-04	0,154	9,579E-07	28,320	215,333	0,132
1,50E-05	1,470E-04	0,227	1,440E-04	0,148	3,221E-06	6,300	47,446	0,133
1,65E-05	1,334E-04	0,205	1,285E-04	0,140	5,073E-06	3,461	26,172	0,132
1,83E-05	1,209E-04	0,187	1,145E-04	0,127	6,557E-06	2,317	17,840	0,130
2,02E-05	1,093E-04	0,166	1,017E-04	0,125	7,712E-06	1,688	13,399	0,126
2,46E-05	8,892E-05	0,123	7,983E-05	0,110	9,194E-06	1,007	8,761	0,115
3,00E-05	7,178E-05	0,084	6,205E-05	0,109	9,817E-06	0,651	6,355	0,102
3,65E-05	5,755E-05	0,046	4,777E-05	0,105	9,863E-06	0,446	4,859	0,092
4,44E-05	4,589E-05	0,028	3,640E-05	0,107	9,566E-06	0,338	3,814	0,089
5,39E-05	3,648E-05	0,047	2,746E-05	0,113	9,082E-06	0,298	3,029	0,099
6,54E-05	2,893E-05	0,100	2,050E-05	0,117	8,472E-06	0,296	2,424	0,122
7,93E-05	2,285E-05	0,165	1,515E-05	0,126	7,728E-06	0,301	1,964	0,153
1,06E-04	1,577E-05	0,233	9,442E-06	0,139	6,337E-06	0,291	1,492	0,195
1,41E-04	1,048E-05	0,242	5,755E-06	0,154	4,728E-06	0,264	1,218	0,217

Окончание таблицы 16

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1,88E-04	6,605E-06	0,208	3,434E-06	0,167	3,174E-06	0,248	1,083	0,229
2,76E-04	3,246E-06	0,164	1,672E-06	0,187	1,577E-06	0,262	1,061	0,247
4,04E-04	1,427E-06	0,135	7,883E-07	0,208	6,411E-07	0,298	1,231	0,243
5,39E-04	7,168E-07	0,125	4,398E-07	0,223	2,784E-07	0,297	1,581	0,188
7,17E-04	3,395E-07	0,125	2,418E-07	0,235	9,826E-08	0,197	2,460	0,080
7,89E-04	2,613E-07	0,126	1,974E-07	0,239	6,424E-08	0,114	3,069	0,037
8,68E-04	2,000E-07	0,129	1,610E-07	0,243	3,917E-08	0,024	4,099	0,006
1,05E-03	1,151E-07	0,136	1,066E-07	0,251	8,489E-09	0,989	12,403	0,080
1,16E-03	8,658E-08	0,141	8,659E-08	0,255	-2,471E-11	137,271	1302,829	0,105
1,27E-03	6,480E-08	0,146	7,023E-08	0,259	-5,475E-09	1,566	12,996	0,120
1,54E-03	3,578E-08	0,158	4,604E-08	0,265	-1,033E-08	0,515	4,470	0,115
1,86E-03	1,942E-08	0,172	3,005E-08	0,273	-1,069E-08	0,189	2,807	0,067
2,25E-03	1,040E-08	0,189	1,953E-08	0,279	-9,201E-09	0,001	2,116	0,000
2,73E-03	5,522E-09	0,209	1,264E-08	0,285	-7,203E-09	0,087	1,748	0,050
3,30E-03	2,933E-09	0,234	8,155E-09	0,291	-5,320E-09	0,072	1,527	0,047
4,39E-03	1,164E-09	0,276	4,200E-09	0,298	-3,139E-09	0,120	1,335	0,090
5,84E-03	4,960E-10	0,317	2,149E-09	0,306	-1,730E-09	0,390	1,243	0,314
7,78E-03	2,340E-10	0,354	1,093E-09	0,312	-8,927E-10	0,541	1,228	0,441
1,14E-02	9,895E-11	0,360	4,407E-10	0,319	-3,355E-10	0,460	1,315	0,350

Таблица 17 – Данные о погрешностях для среды с вкладом аномалии не более 15%

1	2	3	4	5	6	7	8	9
t, c	ε_h^s , В	$\frac{ \varepsilon_h^s - \varepsilon_{h/2}^s }{ \varepsilon_{h/2}^s }$, %	ε_h^p , В	$\frac{ \varepsilon_h^p - \varepsilon_{h/2}^p }{ \varepsilon_{h/2}^p }$, %	ε_h^a , В	$\frac{ \varepsilon_h^a - \varepsilon_{h/2}^a }{ \varepsilon_{h/2}^a }$, %	$\frac{ \varepsilon_{h/2}^p }{ \varepsilon_{h/2}^a }$	$r^a \cdot \frac{ \varepsilon_{h/2}^p }{ \varepsilon_{h/2}^a }$
1,00E-07	6,907E+00	1,16E-01	6,906E+00	1,22E-01	-4,355E-11	1,35E+06	2,14E+15	6,30E-10
3,10E-07	3,785E-03	9,85E+00	3,251E-03	1,36E+00	2,253E-10	3,28E+05	4,67E+10	7,03E-06
5,64E-07	2,389E-03	1,20E+01	2,081E-03	8,10E-01	-3,281E-10	1,02E+05	6,52E+09	1,56E-05
1,05E-06	1,446E-03	3,35E+00	1,411E-03	1,36E+00	3,415E-10	5,93E+04	2,41E+09	2,46E-05
1,69E-06	1,016E-03	1,76E+00	1,005E-03	9,50E-01	8,899E-11	5,06E+03	5,55E+08	9,12E-06
2,55E-06	7,435E-04	1,13E+00	7,392E-04	7,04E-01	-1,762E-09	7,12E+04	2,96E+08	2,40E-04
3,28E-06	6,090E-04	8,60E-01	6,066E-04	5,59E-01	1,735E-09	4,73E+04	1,64E+08	2,88E-04
4,15E-06	4,999E-04	6,44E-01	4,986E-04	4,52E-01	6,272E-09	7,91E+05	6,26E+08	1,26E-03
5,22E-06	4,103E-04	4,69E-01	4,096E-04	3,69E-01	-2,903E-09	1,23E+03	1,59E+06	7,74E-04
6,50E-06	3,361E-04	3,40E-01	3,357E-04	2,94E-01	-2,476E-08	4,01E+02	4,07E+04	9,85E-03
8,05E-06	2,744E-04	2,92E-01	2,741E-04	2,40E-01	-1,127E-08	1,22E+02	5,34E+03	2,29E-02
9,93E-06	2,230E-04	2,65E-01	2,226E-04	2,03E-01	1,104E-07	3,52E+01	1,30E+03	2,70E-02
1,22E-05	1,803E-04	2,34E-01	1,797E-04	1,69E-01	3,705E-07	4,50E+00	4,62E+02	9,74E-03
1,50E-05	1,448E-04	2,17E-01	1,440E-04	1,48E-01	7,195E-07	6,01E+00	2,12E+02	2,84E-02
1,83E-05	1,155E-04	1,89E-01	1,145E-04	1,27E-01	1,058E-06	8,48E+00	1,17E+02	7,23E-02
2,23E-05	9,146E-05	1,55E-01	9,023E-05	1,19E-01	1,296E-06	7,87E+00	7,50E+01	1,05E-01
2,72E-05	7,177E-05	1,27E-01	7,047E-05	1,08E-01	1,385E-06	6,34E+00	5,40E+01	1,17E-01
3,31E-05	5,576E-05	1,16E-01	5,451E-05	1,07E-01	1,322E-06	4,66E+00	4,31E+01	1,08E-01
4,02E-05	4,283E-05	1,03E-01	4,175E-05	1,06E-01	1,132E-06	2,94E+00	3,79E+01	7,74E-02
4,44E-05	3,737E-05	9,83E-02	3,640E-05	1,07E-01	1,003E-06	2,01E+00	3,70E+01	5,43E-02
4,89E-05	3,249E-05	1,08E-01	3,166E-05	1,11E-01	8,582E-07	9,86E-01	3,72E+01	2,65E-02
5,39E-05	2,816E-05	1,31E-01	2,746E-05	1,13E-01	7,049E-07	1,90E-01	3,88E+01	4,90E-03
5,93E-05	2,431E-05	1,30E-01	2,376E-05	1,15E-01	5,493E-07	1,64E+00	4,25E+01	3,85E-02
6,54E-05	2,091E-05	1,16E-01	2,050E-05	1,17E-01	3,969E-07	3,61E+00	4,97E+01	7,26E-02
7,20E-05	1,791E-05	1,12E-01	1,764E-05	1,20E-01	2,530E-07	6,84E+00	6,49E+01	1,05E-01

Окончание таблицы 17

1	2	3	4	5	6	7	8	9
7,93E-05	1,529E-05	1,11E-01	1,515E-05	1,26E-01	1,219E-07	1,44E+01	1,06E+02	1,35E-01
8,73E-05	1,300E-05	1,09E-01	1,297E-05	1,29E-01	6,895E-09	7,51E+01	4,68E+02	1,60E-01
9,61E-05	1,101E-05	1,04E-01	1,108E-05	1,33E-01	-8,968E-08	2,85E+01	1,59E+02	1,80E-01
0,000106	9,291E-06	9,83E-02	9,442E-06	1,39E-01	-1,668E-07	1,22E+01	6,35E+01	1,93E-01
0,000128	6,552E-06	9,84E-02	6,804E-06	1,48E-01	-2,633E-07	5,40E+00	2,72E+01	1,98E-01
0,000155	4,570E-06	1,06E-01	4,856E-06	1,57E-01	-2,929E-07	3,06E+00	1,71E+01	1,80E-01
0,000188	3,163E-06	1,26E-01	3,434E-06	1,67E-01	-2,744E-07	1,81E+00	1,27E+01	1,42E-01
0,000228	2,180E-06	1,56E-01	2,407E-06	1,77E-01	-2,284E-07	9,91E-01	1,06E+01	9,33E-02
0,000276	1,501E-06	1,92E-01	1,672E-06	1,87E-01	-1,723E-07	3,81E-01	9,73E+00	3,91E-02
0,000334	1,035E-06	2,22E-01	1,153E-06	1,97E-01	-1,183E-07	1,32E-01	9,71E+00	1,36E-02
0,000404	7,149E-07	2,48E-01	7,883E-07	2,08E-01	-7,331E-08	6,15E-01	1,07E+01	5,77E-02
0,000489	4,952E-07	2,64E-01	5,352E-07	2,17E-01	-3,984E-08	1,16E+00	1,32E+01	8,72E-02
0,000592	3,432E-07	2,70E-01	3,609E-07	2,27E-01	-1,749E-08	2,04E+00	2,02E+01	1,01E-01
0,000652	2,856E-07	2,70E-01	2,956E-07	2,29E-01	-9,867E-09	2,99E+00	2,90E+01	1,03E-01
0,000717	2,374E-07	2,69E-01	2,418E-07	2,35E-01	-4,198E-09	5,60E+00	5,42E+01	1,03E-01
0,000789	1,972E-07	2,68E-01	1,974E-07	2,39E-01	-1,522E-10	5,69E+01	5,57E+02	1,02E-01
0,000868	1,635E-07	2,66E-01	1,610E-07	2,43E-01	2,585E-09	6,66E+00	6,63E+01	1,01E-01
0,000955	1,353E-07	2,64E-01	1,311E-07	2,47E-01	4,299E-09	3,10E+00	3,14E+01	9,89E-02
0,00105	1,118E-07	2,63E-01	1,066E-07	2,51E-01	5,239E-09	2,02E+00	2,07E+01	9,75E-02
0,001271	7,577E-08	2,62E-01	7,023E-08	2,59E-01	5,595E-09	1,21E+00	1,27E+01	9,54E-02
0,001538	5,088E-08	2,60E-01	4,604E-08	2,65E-01	4,884E-09	8,99E-01	9,49E+00	9,48E-02
0,001861	3,384E-08	2,65E-01	3,005E-08	2,73E-01	3,831E-09	7,67E-01	7,88E+00	9,74E-02
0,002252	2,230E-08	2,70E-01	1,953E-08	2,79E-01	2,806E-09	7,35E-01	6,99E+00	1,05E-01
0,002726	1,458E-08	2,75E-01	1,264E-08	2,85E-01	1,956E-09	7,64E-01	6,49E+00	1,18E-01
0,003298	9,453E-09	2,80E-01	8,155E-09	2,91E-01	1,314E-09	8,18E-01	6,24E+00	1,31E-01
0,003991	6,088E-09	2,86E-01	5,244E-09	2,96E-01	8,567E-10	8,68E-01	6,16E+00	1,41E-01
0,004829	3,898E-09	2,93E-01	3,362E-09	3,01E-01	5,456E-10	9,06E-01	6,20E+00	1,46E-01
0,005843	2,483E-09	2,97E-01	2,149E-09	3,06E-01	3,409E-10	9,44E-01	6,34E+00	1,49E-01
0,007071	1,575E-09	3,07E-01	1,370E-09	3,10E-01	2,099E-10	9,96E-01	6,57E+00	1,51E-01
0,008556	9,958E-10	3,07E-01	8,719E-10	3,14E-01	1,277E-10	1,07E+00	6,88E+00	1,55E-01
0,011388	4,978E-10	3,13E-01	4,407E-10	3,19E-01	5,954E-11	1,25E+00	7,47E+00	1,68E-01

На рисунке 7 приведены вклады аномалий в суммарный сигнал ЭДС для двух сред, использованных при поиске оптимальных сеток. В дальнейшем расчёты для класса задач со схожими средами будем проводить на сетках, полученных для первой среды (вклад аномалии не превышает 50%).

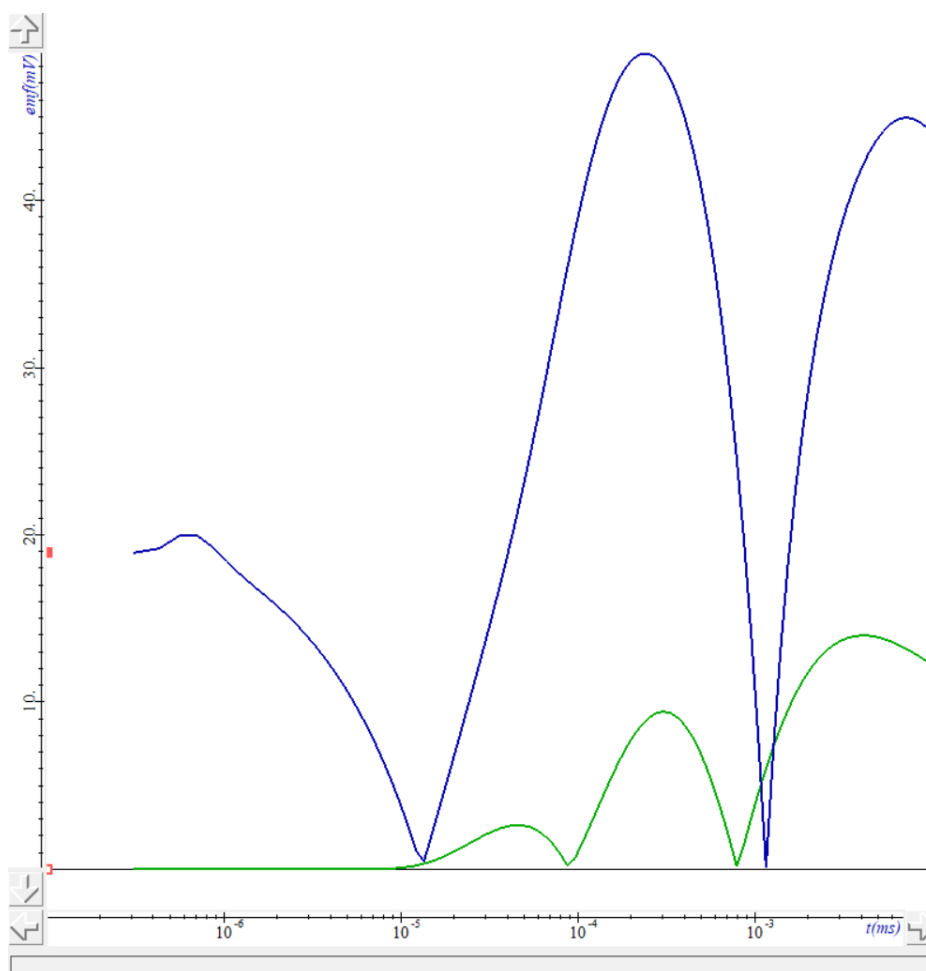


Рисунок 7 – График зависимости от времени вкладов аномального поля для двух сред, используемых в исследовании поиска оптимальных сеток

4.3. ИССЛЕДОВАНИЕ ВЛИЯНИЯ ТОЧНОСТИ ВЫЧИСЛЕНИЯ НОРМАЛЬНОГО ПОЛЯ НА ТОЧНОСТЬ АНОМАЛЬНОГО

Вычислим величину погрешности на вложенной сетке для среды, представленной на рисунке 3, на оптимальных сетках для различного числа вложений сетки первичного поля. Векторы первичного поля, подаваемые на вход задаче на аномальное поле, будут вычисляться с различной точностью, что должно сказаться и на величине численного решения. Результаты расчетов представлены на рисунке 8.

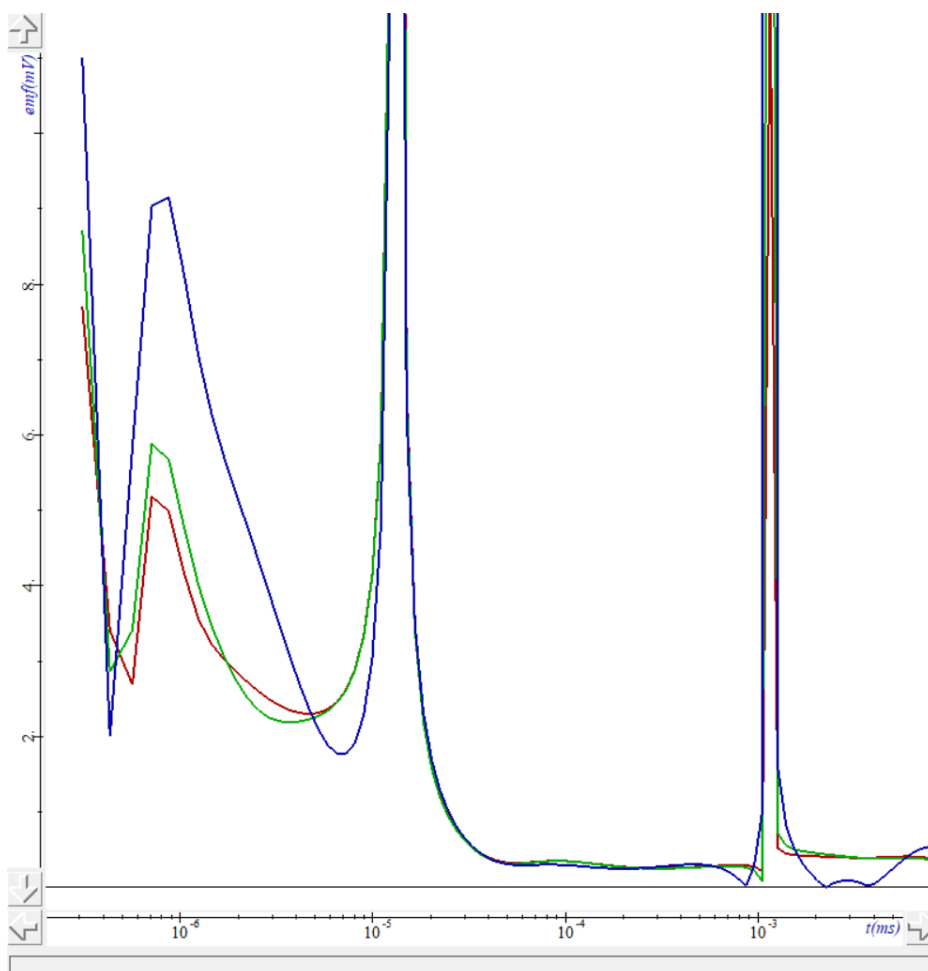


Рисунок 8 – Зависимость от времени погрешности решений при использовании для вычисления аномального поля нормального поля с различной точностью (синий график – первичное поле на грубой сетке, зелёный – на вложенной, красный – на дважды вложенной)

С дроблением сетки нормального поля погрешность аномального поля сходится к значениям, соответствующим погрешности для точно вычисленного нормального поля. Аномальное поле, как и его вклад в ЭДС, вычисляется более стабильно (повышается гладкость решения), хотя с дроблением сетки решающим фактором погрешности расчёта аномального поля становится выбор сетки аномального поля.

4.4. ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ РЕЗУЛЬТАТОВ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОТ ГЛУБИНЫ АНОМАЛЬНЫХ СЛОЁВ И ИХ ПРОВОДИМОСТИ

Рассчитаем сигнал ЭДС для различных расчетных областей, задавая различную глубину и проводимость слоёв, и постараемся выявить некоторые закономерности. Будем использовать пространственную сетку, описанную в таблицах 13 и 14. Расчётные области представлены на рисунках 9-11, результаты вычислений – на рисунках 12-17; синим цветом выделен график вклада в сигнал ЭДС первичного поля, зелёным цветом – добавочного поля, .

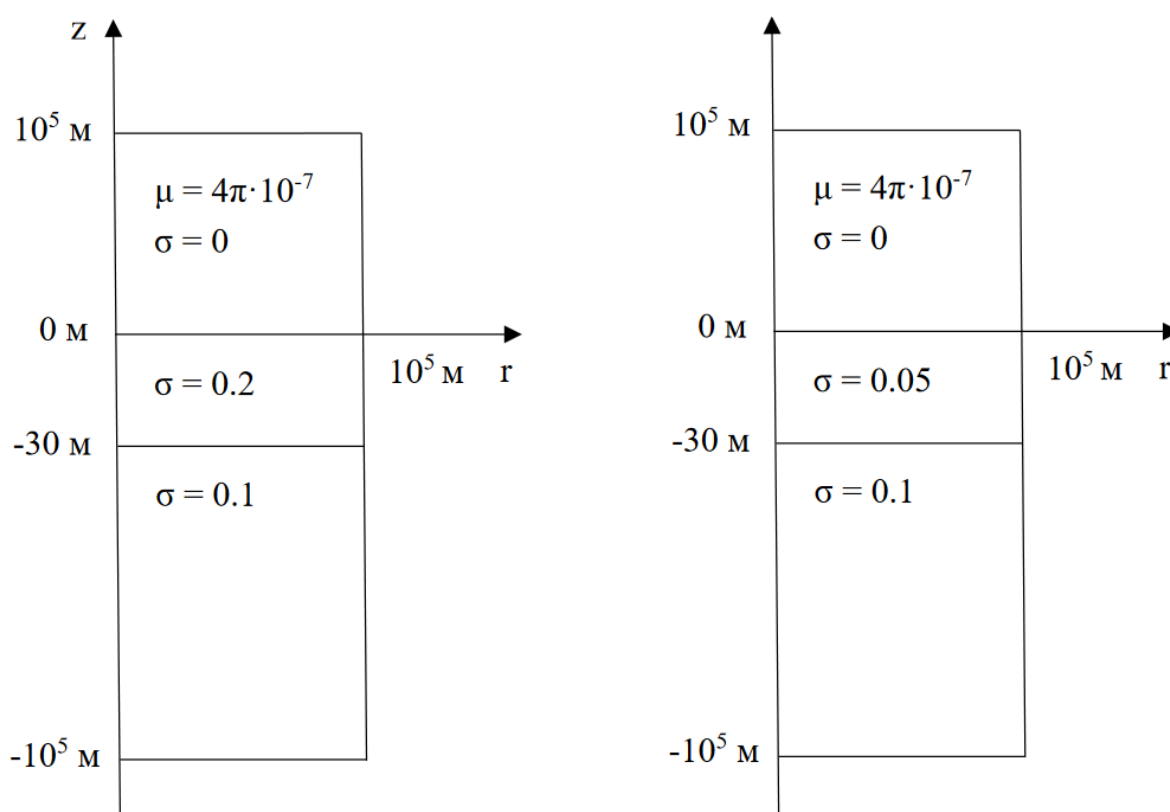


Рисунок 9 – Расчётная область для сред №1 (слева) и №2 (справа)

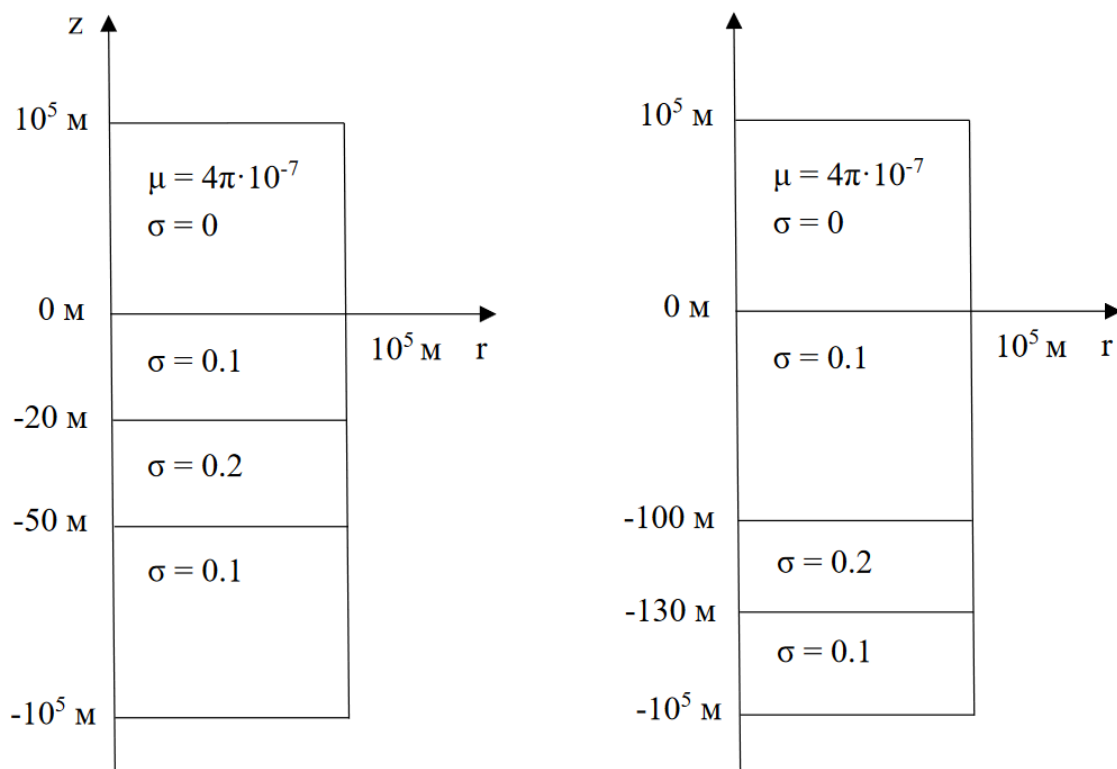


Рисунок 10 – Расчётная область для сред №3 (слева) и №4 (справа)

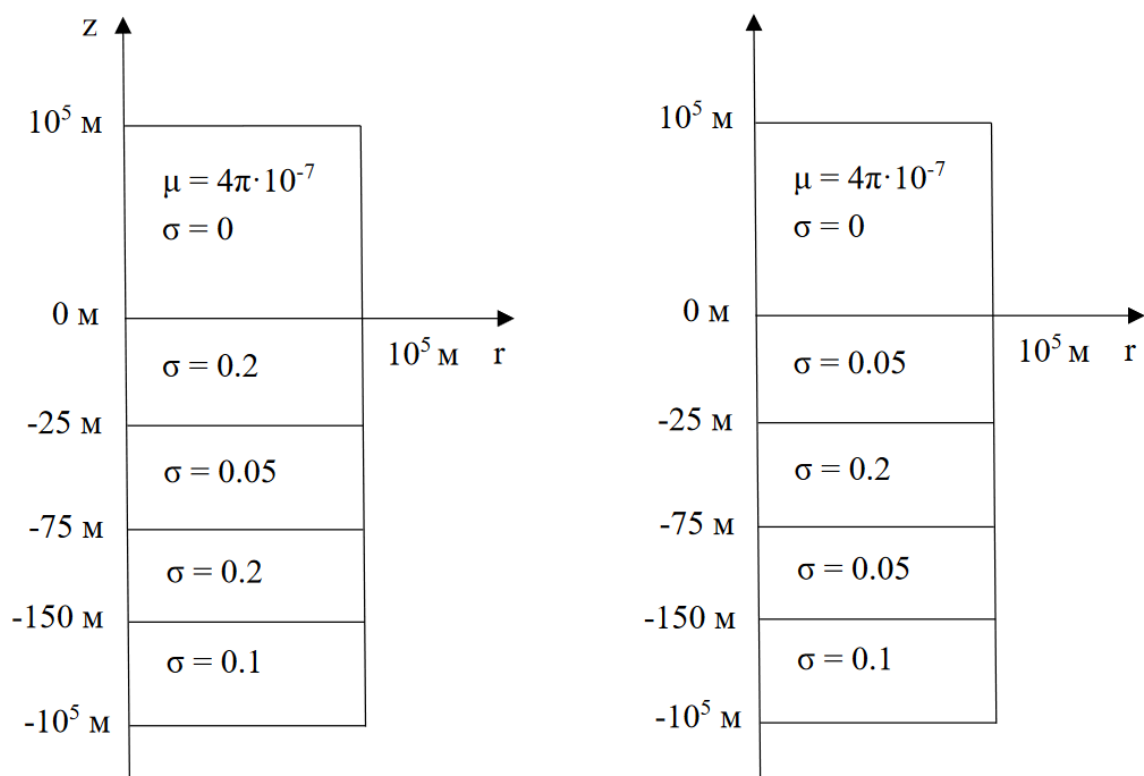


Рисунок 11 – Расчётная область для сред №5 (слева) и №6 (справа)

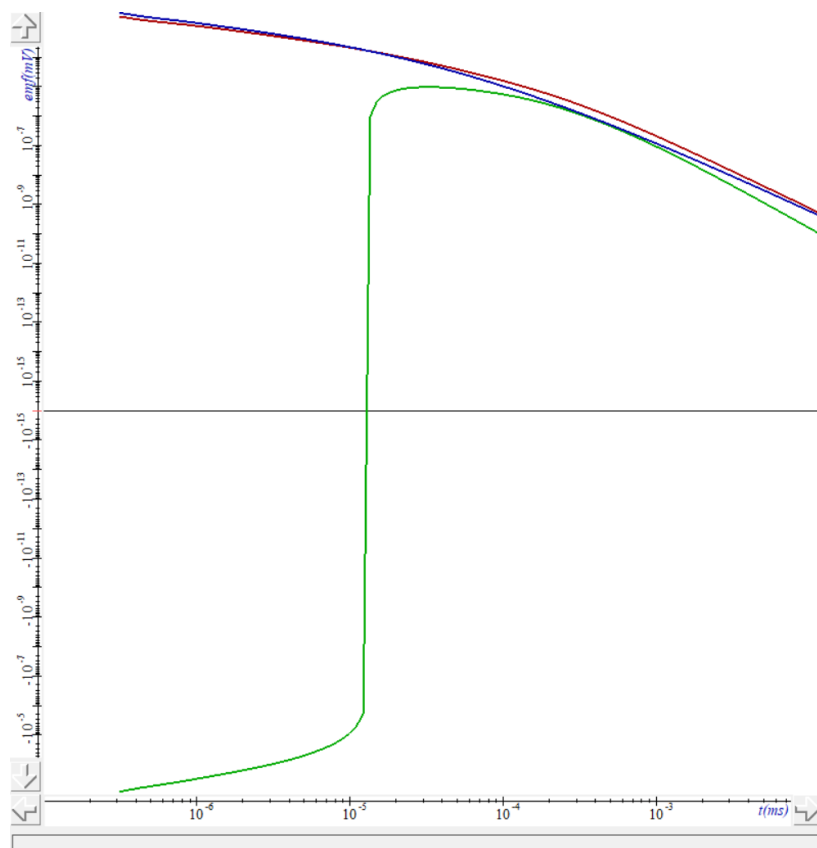


Рисунок 12 – Кривые ЭДС для среды №1

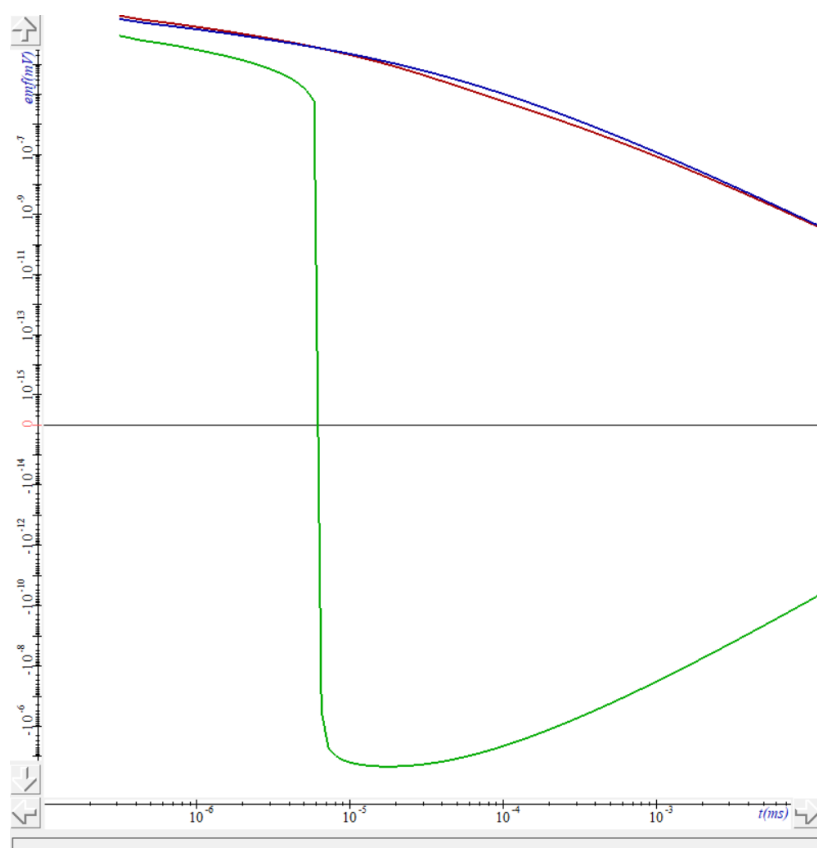


Рисунок 13 – Кривые ЭДС для среды №2

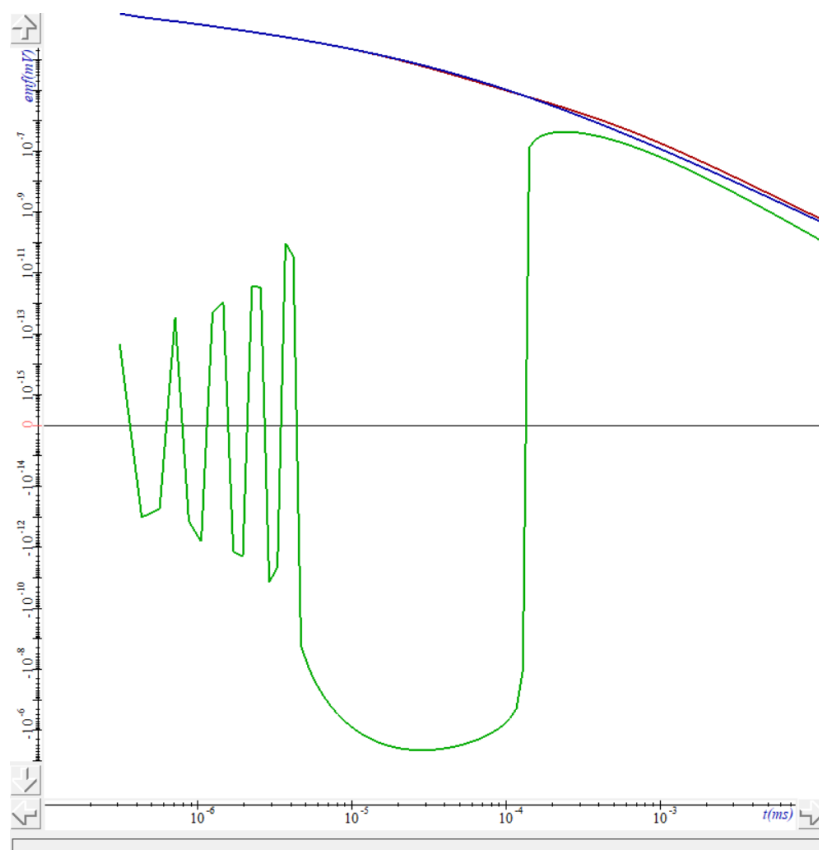


Рисунок 14 – Кривые ЭДС для среды №3

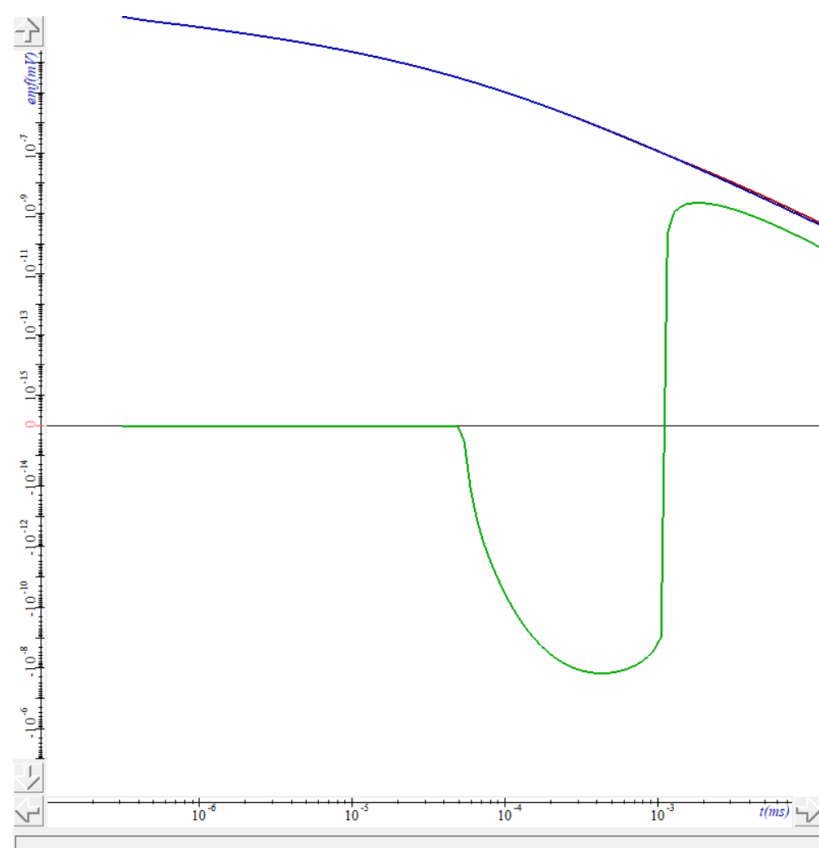


Рисунок 15 – Кривые ЭДС для среды №4

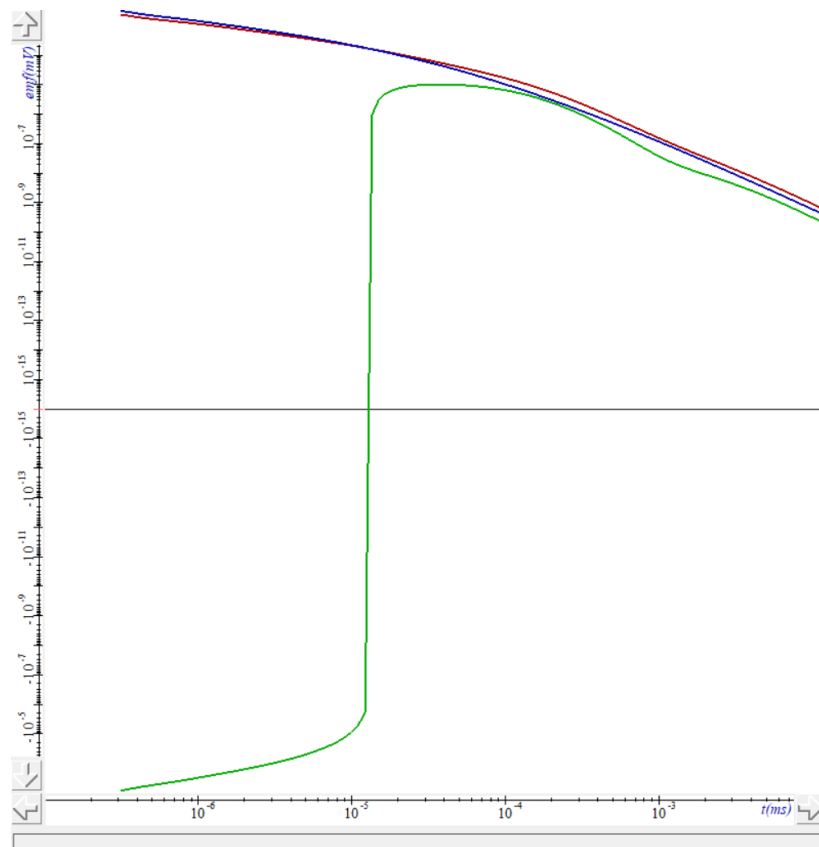


Рисунок 16 – Кривые ЭДС для среды №5

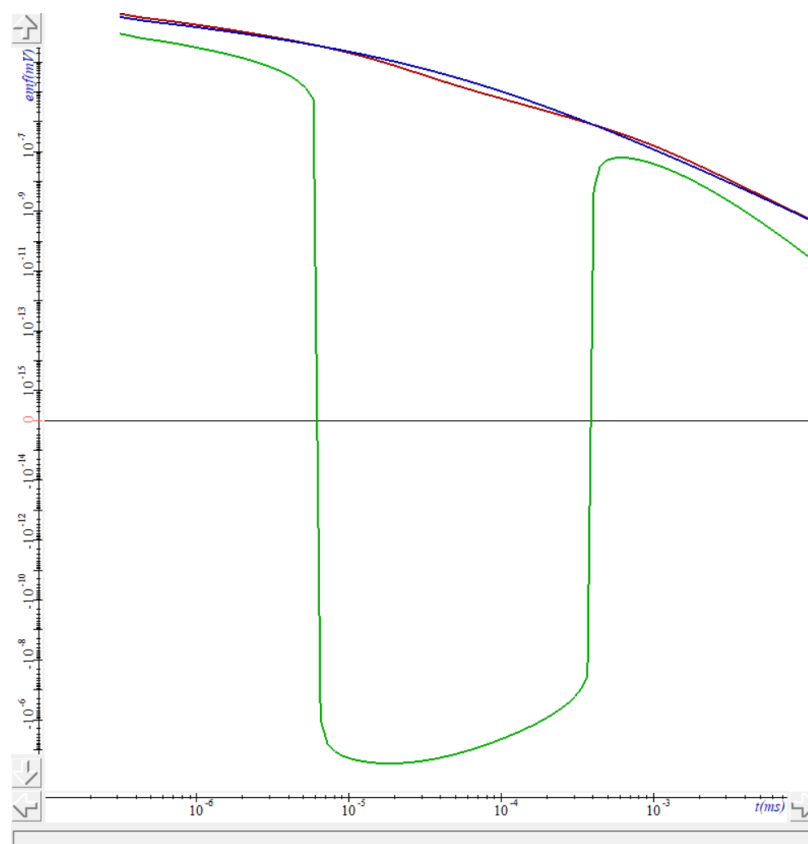


Рисунок 17 – Кривые ЭДС для среды №6

На основании проведённых исследований можно сделать следующие выводы.

1. Установлены зависимости между расположением объектов влияния, величиной аномального параметра и видом кривой сигнала ЭДС аномального поля. Меньшая проводимость аномалии по сравнению с параметрами среды нормального поля даёт отрицательный вклад в ЭДС, большая проводимость – положительный, что наглядно показано на рисунках 12 и 13. Наибольший вклад в ЭДС вносят поверхностные слои, что показано на рисунках 16 и 17, поэтому обнаружение нижних неоднородных слоёв по кривой ЭДС при наличии неоднородностей в верхних проводящих слоях представляет большую сложность.

2. Установлено, что основной вклад поля влияния начинает сказываться по истечении определенного времени (чтобы область «высокого» потенциала «достигла» слоя аномалии). До наступления этого момента наблюдается «осциллирующее» поведение сигнала ЭДС аномального поля (см. рисунок 14), что объясняется определяющим вкладом погрешности (при расчете на вложенных сетках такого эффекта нет, поле и ЭДС ближе к нулю и обладают постоянным знаком; при использовании другой временной сетки и двухслойной неявной схемы аппроксимации по времени характер «осцилляций» отличается).

3. При расчете на построенных в п. 4.2 оптимальных сетках решение задачи на добавочное поле выполняется тем быстрее, чем дальше от источника располагается аномальный слой.

4. Для всех областей характерны аномальные значения погрешности на начальных временных слоях (ранее $2E-6$). Также аномальные «выбросы» могут наблюдаться в момент смены знака (прохождения через 0) кривой ЭДС добавочного поля.

4.5. ИССЛЕДОВАНИЕ СКОРОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

Проведем замеры времени для серии задач, решаемых с выделением части поля и без выделения, на сетках, построенных в п. 4.2 для вклада аномалий не

более 15% (первый набор сеток) и для вклада аномалий не более 50% (второй набор сеток). Начальный шаг по времени – $1e-7$, коэффициент разрядки – 1.1, число слоёв по времени – 100. Результаты приведены в таблицах 18 и 19.

Таблица 18 – Скорость решения задач на сетке №1

Тип задачи	Суммарное поле без выделения	Нормальное поле	Аномальное поле
Число задач	10	1	10
Среднее число узлов	20531	22140	8706
Суммарное время решения	53,38 сек.	5,32 сек.	15.07 сек.

Для серии из 10 задач на оптимальной сетке для худшего случая (до 50% вклада аномального поля) решение удалось ускорить в 2,62 раза по сравнению с решением данной серии задач без использования технологии выделения части поля.

Таблица 19 – Скорость решения задач на сетке №2

Тип задачи	Суммарное поле без выделения	Нормальное поле	Аномальное поле
Число задач	10	1	10
Среднее число узлов	19384	22140	1923
Суммарное время решения	50,29 сек.	5,32 сек.	1,41 сек.

На оптимальной сетке для меньшего вклада аномального поля (не более 15%) было получено ускорение в 7,47 раз. На одной итерации задача на аномальное поле рассчитывается в 35 раз быстрее, чем задача без выделения поля.

Можно задавать и более грубую сетку как для первичного, так и для аномального полей в зависимости от требований обратной задачи к точности и скорости решения прямых задач.

4.6. ПРИМЕНЕНИЕ РАЗРАБОТАННОЙ ПРОГРАММЫ ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ПОЛЕЙ В СРЕДАХ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ В ФОРМЕ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

На практике встречаются среды, обладающие осевой симметрией и при этом имеющие в составе неоднородности в виде тел вращения. Такие среды возникают, например, при бурении скважин: буровой раствор проникает в пористые пласты, вытесняя пластовую жидкость, что приводит к образованию неоднородности по проводимости в виде тела вращения, т. к. буровой раствор можно считать распространяющимся в среде симметрично. Это позволяет исследовать не только проводимость горизонтально-слоистой среды, но и структуру пластов (например, проницаемость). Для решения подобных задач применяют методы электромагнитного каротажа скважины: в качестве электродов источника и приемника могут применяться проводящие кольца или катушки, расположенные на расстоянии L , соответствующему длине зонда. В цилиндрической системе координат при осесимметричном расположении установки поле вектор-потенциала A имеет одну ненулевую компоненту A_φ , поэтому процесс изменения поля вектор-потенциала можно моделировать с помощью разработанной нами программы. Однако на практике применяются гармонические токи, т. е. поле A_φ не зависит от времени.

Зададим модели сред, возникающих при бурении скважин (рисунок 18), при наличии и отсутствии бурового раствора. Первичная проводимость грунта – 0,1 См/м. Средний слой (-30 м – -270 м) является проницаемым. Расположим внутри скважины петлевой источник и приёмник и смоделируем процесс изменения магнитного поля. Координаты источника – (0.08, -50), приёмника – (0.03, -40),

радиус скважины 0.1 м. Начальный шаг по времени – $1e-7$, коэффициент разрядки – 1.1, число слоёв по времени – 100. Параметры пространственной сетки см. в таблицах 20 и 21, результаты – на рисунках 19-22; синим цветом обозначен вклад в сигнал ЭДС вмещающей среды, зелёным – вклад аномалий, красным – суммарный сигнал ЭДС в приёмнике.

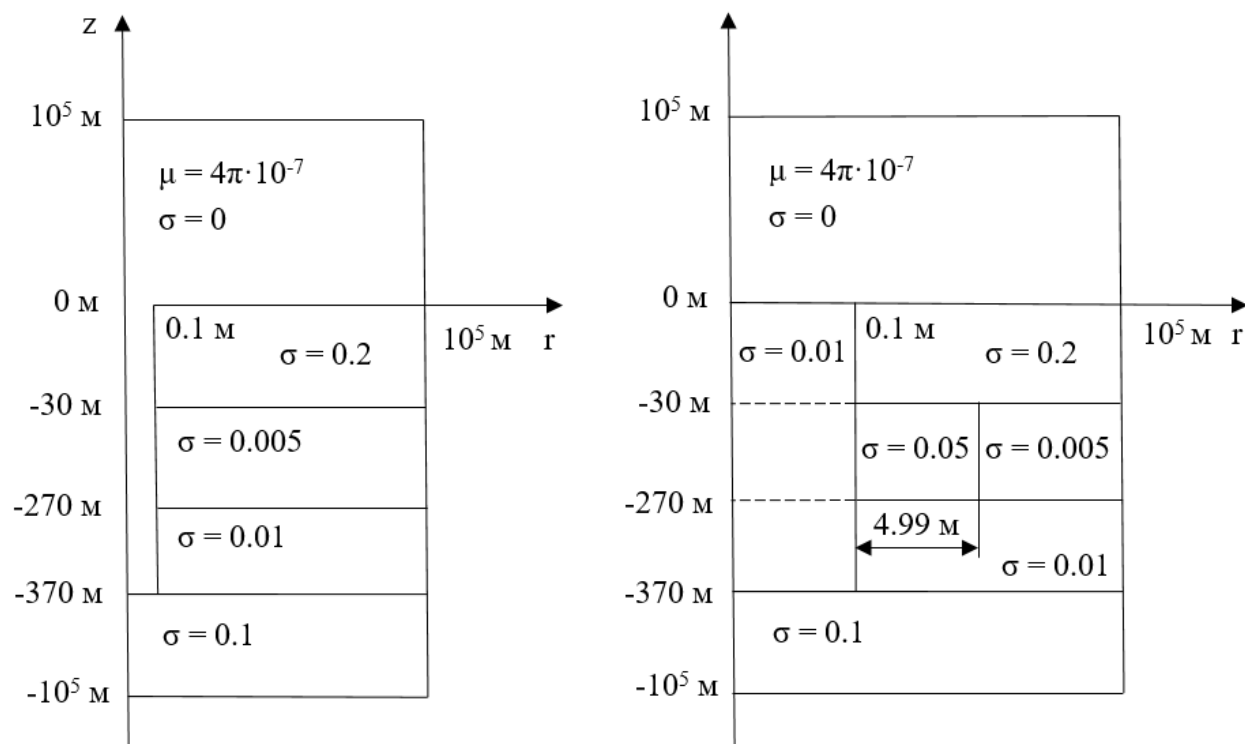


Рисунок 18 – Расчётная область для сред без проводящего раствора (слева) и с раствором (справа)

Таблица 20 – Параметры сетки для первичного поля

Координата	Отрезок	Коэффициент разрядки	Начальный шаг	Направление разрядки
r	[1e-3, 3e-2]	1.02	3e-3	-
r	[3e-2, 5e-2]	1.02	3e-3	+
r	[5e-2, 8e-2]	1.02	5e-3	-
r	[8e-2, 1e+5]	1.2	5e-3	+
z	[-1e+5, -50]	1.2	1e-1	-
z	[-50, 1e+5]	1.2	1e-1	+

Таблица 21 – Параметры сетки для аномального поля

Координата	Отрезок	Коэффициент разрядки	Начальный шаг	Направление разрядки
r	[1e-3, 3e-2]	1.21	3e-3	-
r	[3e-2, 1e+5]	1.22	3e-3	+
z	[-1e+5, -40]	1.22	1e-1	-
z	[-40, 1e+5]	1.22	1e-1	+

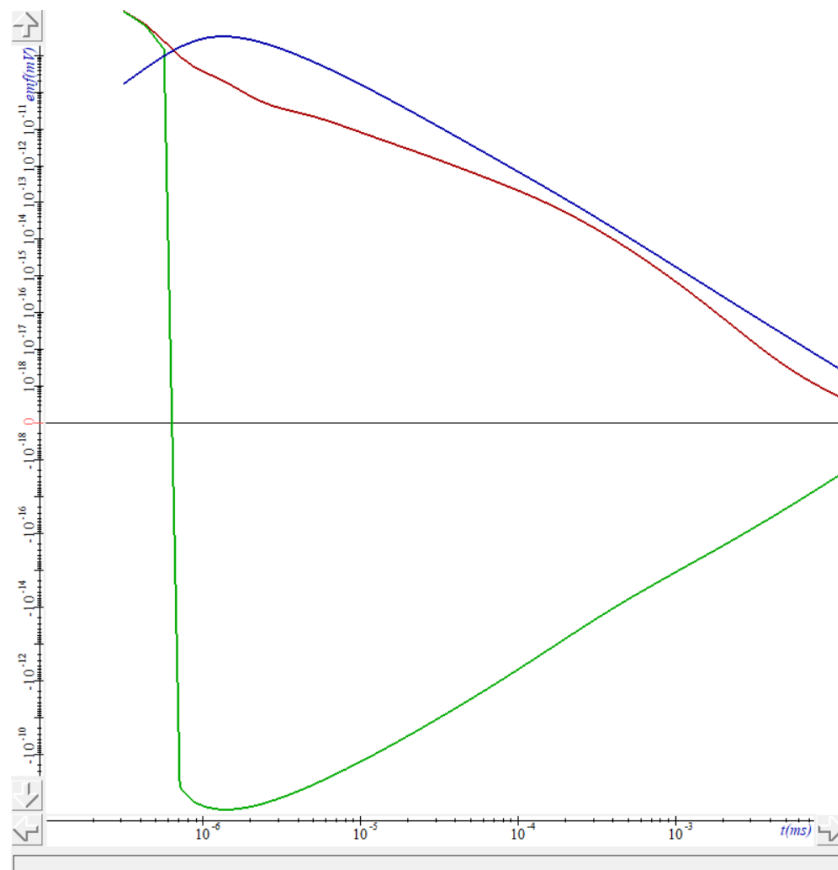


Рисунок 19 – Кривые ЭДС для среды без раствора

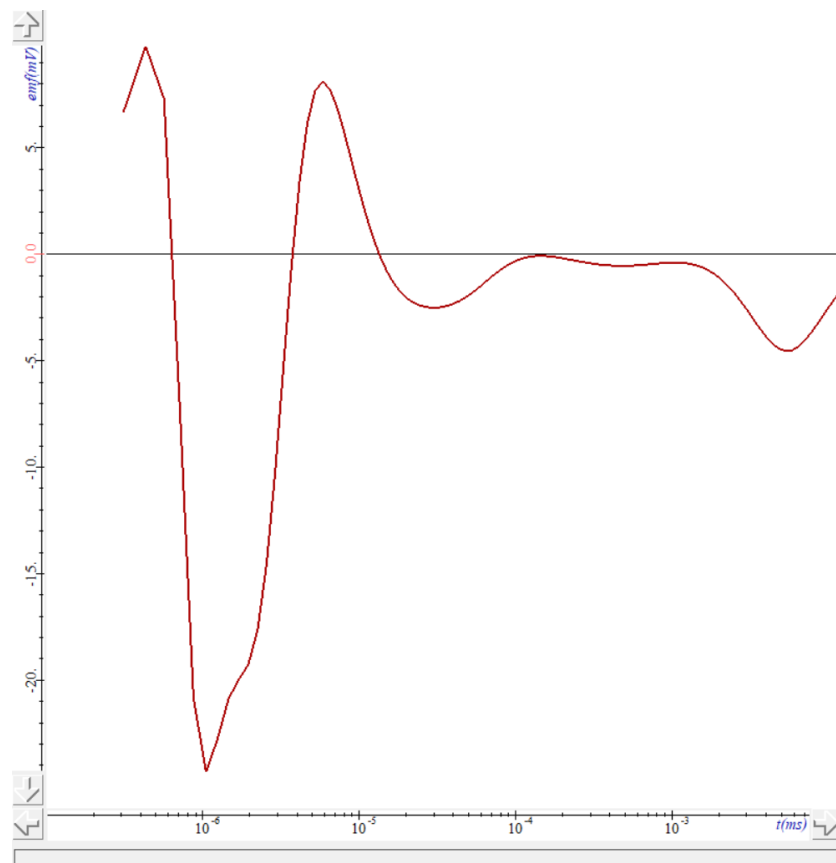


Рисунок 20 – Погрешность ЭДС для среды без раствора

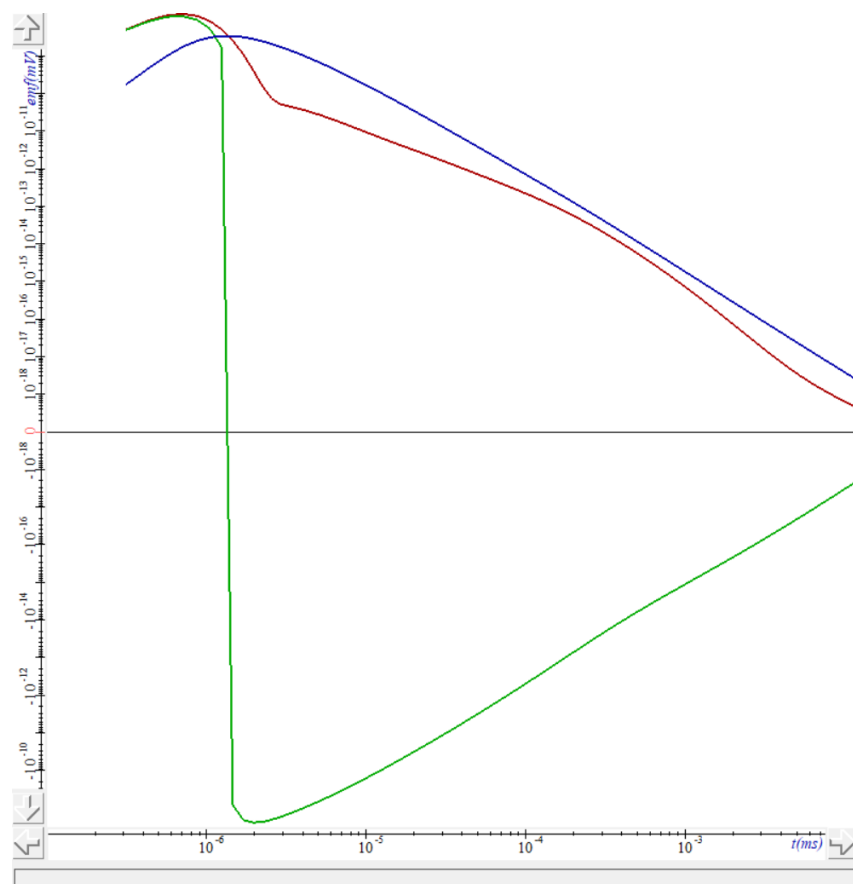


Рисунок 21 – Кривые ЭДС для среды с проводящим раствором

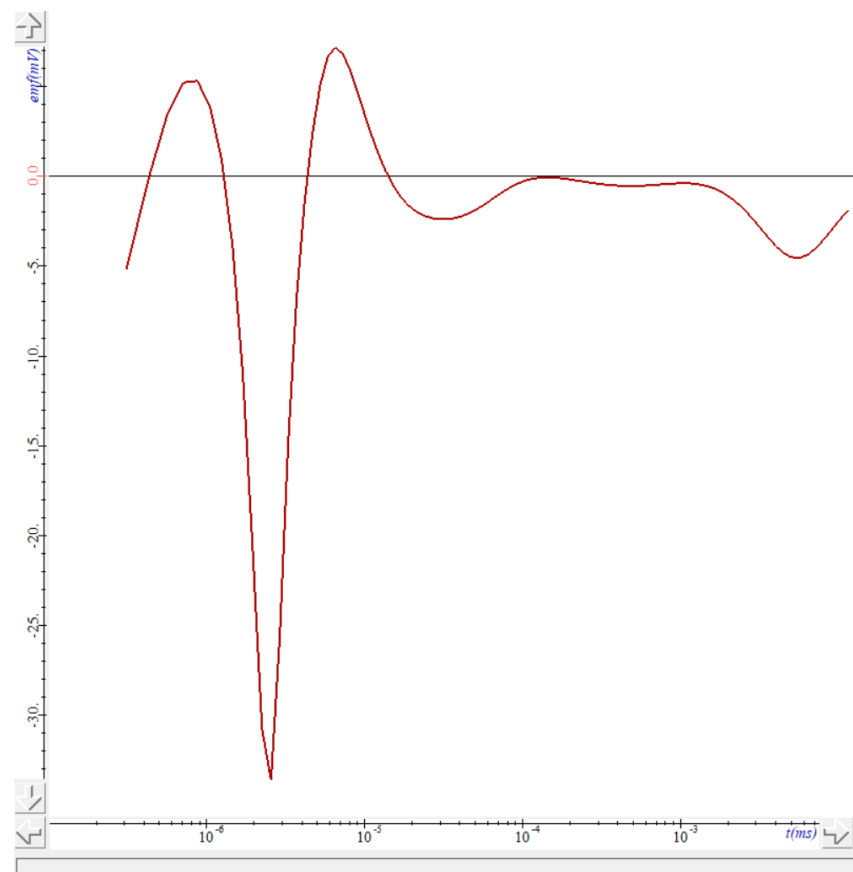


Рисунок 22 – Кривые погрешности ЭДС для среды с проводящим раствором

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В процессе выполнения квалификационной работы была разработана программа моделирования электромагнитных полей в осесимметричной постановке с применением технологии выделения части поля, были реализованы модули выдачи ЭДС и визуализации поля. Для верификации и визуализации численного решения были применены программные комплексы IFGEM3D и TELMA.

Проведены исследования на примере практической задачи аэроразведки. Предложены методы поиска оптимальных сеток, согласно которым найдены сетки для расчета полей с различным уровнем вклада аномалий. Число узлов сетки задачи на аномальное поле было уменьшено по сравнению с задачей без выделения поля в 2.5 раза для вклада 50% и в 10 раз для вклада 15%. На данных сетках были проведены замеры времени решения серии из 10 задач с одинаковой вмещающей средой: при использовании технологии выделения поля для вклада аномалии 50% было получено ускорение в 2.6 раз, для вклада 15% – 7.5 раз; одна задача на добавочное поле решается в среднем в 3.3 (для 50%) и 35 (для 15%) раз быстрее соответственно. При этом была достигнута требуемая точность вычислений, погрешность использования выделения поля компенсирована более подробной сеткой первичного поля.

Установлены зависимости между параметрами задачи и поведением решения. Чем точнее вычисляется первичное поле, тем меньше и стабильнее погрешность аномального поля. Величина вклада аномалий существенно зависит от проводимости и глубины неоднородностей; для выявления глубоких аномальных слоёв необходима большая точность вычислений, чем для поверхностных. Временной интервал, в течение которого сказывается основной вклад аномального слоя в ЭДС, зависит от глубины и толщины слоя.

Разработанная программа позволяет задавать различные модели осесимметричных электромагнитных полей; так, в п. 4.6 рассмотрены среды с неоднородностями в форме тел вращения, которые образуются при бурении скважин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Соловейчик Ю. Г. Метод конечных элементов для решения скалярных и векторных задач: учеб. пособие / Ю. Г. Соловейчик, М. Э. Рояк, М. Г. Персова. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2007. – 896 с.
2. Персова М. Г. Современные компьютерные технологии: конспект лекций / М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, П. А. Домников. – Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. – 80 с.
3. Волков Е. А. Численные методы: учеб. пособие для вузов – 2-е изд., испр. / Е. А. Волков. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987. – 248 с.
4. Сивухин, Д. В. Общий курс физики. Том 3. Электричество. / Д. В. Сивухин. – М.: Наука, 1977. – 704 с.
5. Батыгин В. В. Современная электродинамика: учеб. пособие. Ч.1 / В. В. Батыгин, И. Н. Топтыгин. – М.; Ижевск: Ин-т компьютер. исслед., 2003. – 736 с.
6. Тихонов А. Н. Уравнения математической физики / А. Н. Тихонов, А. А. Самарский – М.: Наука, 1997. – 798 с.
7. Годунов С. К. Разностные схемы (введение в теорию): учеб. пособие. / С. К. Годунов, В. С. Рябенский. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 440 с.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. / А. А. Самарский. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1977. – 656 с.
9. Персова М. Г. Численные методы решения систем уравнений: Методические указания к выполнению лабораторных работ / М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, М. Э. Рояк, А. В. Чернышев. – Новосибирск: Издательство НГТУ, 2004. – 39 с.
10. Кошкина Ю. И. Разработка методов, алгоритмов и реализующего их программного обеспечения для выполнения многомерной инверсии данных индукционного каротажа: дис. / Ю. И. Кошкина; науч. рук. М. Г. Персова; Новосиб. гос. техн. ун-т. – Изд-во НГТУ, 2017. – 165 с.

11. Конечноэлементное моделирование электромагнитного поля для кругового электрического диполя в трехмерных средах / Ю. Г. Соловейчик, М. Г. Персова, М. Э. Рояк, Г. М. Тригубович // Сиб. журн. индустр. матем., 2004, том 7, №1, с. 114-129.

12. Конечно-элементное моделирование электромагнитного поля горизонтальной электрической линии / Абрамов М. В // Системы анализа и обработки данных, 2008, №1, с. 3-11.

13. Методы и алгоритмы конечноэлементного моделирования геоэлектромагнитных полей от произвольно ориентированных катушек / М. Г. Персова, Ю. Г. Соловейчик, Д. В. Вагин, П. А. Домников, Ю. И. // Доклады Академии наук высшей школы Российской Федерации, 2014, том 1, №22, с. 123-134.