Тензорная гусеница

Алтай Эйнуллаев Эльшан оглы

Московский физико-технический институт

Курс: Математические методы прогнозирования

Лабораторная работа 2

2025

Цель работы и источники

Задача:
Разобраться в обобщении гусеницы на случай набора временных рядов, с использованием тензорного представления траекторных матриц.
Источники:
К. Семкин, *Метод tSSA*,
https://github.com/intsystems/tssa_method/blob/master

Траекторный тензор $\underline{\mathbf{X}}$

- $\{x_t^{(i)}\}_{i=1}^P$ – набор из P сигналов, $t = 1, \ldots, n$.
- $\mathbf{x}_t^{(i)} = (x_t^{(i)}, \ldots, x_{t+\tau-1}^{(i)})^\mathsf{T}$ – вектор задержек, размерности τ, i – го сигнала, $t = 1, \ldots, n$.
- $\mathbf{X}^{(i)} = (\mathbf{x}_1^{(i)}\mathbf{x}_2^{(i)} \ldots \mathbf{x}_n^{(i)})$ – траекторная матрица i – го сигнала.
- Объединим эти матрицы в траекторный тензор третьего порядка: $\underline{\mathbf{X}}_{:,:,i} = \mathbf{X}^{(i)}$
- Сигналы – связанные, если они имеют общий собственный базис в фазовых пространствах.

CP-разложение $\underline{\mathbf{X}}$ и интерпретация факторов

CP-разложение траекторного тензора $\underline{\mathbf{X}}$:

$$\underline{\mathbf{X}} = \sum_{r=1}^{R} \mathbf{a}_r \circ \mathbf{b}_r \circ \mathbf{c}_r.$$

Разложение траекторных матриц:

$$\mathbf{X}^{(i)} = \sum_{r=1}^{R} \sigma_{ri} \mathbf{a}_r \mathbf{b}_r^\mathsf{T} = \sum_{r=1}^{R} \mathbf{C}_r^{(i)} = \mathbf{A} \mathbf{\Sigma}_i \mathbf{B}^\mathsf{T},$$

где $\mathbf{A} = (\mathbf{a_1} \ldots \mathbf{a}_R)$ – общий собственный базис сигналов, $\mathbf{\Sigma}_i = \operatorname{diag}(\sigma_{1i}, \ldots, \sigma_{Ri})$ – аналог сингулярных чисел, но могут быть и отрицательными, $\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1 \ldots \mathbf{b}_R)$, $\mathbf{c}_r = (\sigma_{r1}, \ldots, \sigma_{rn})^\mathsf{T}$.

Декомпозиция сигнала и оператор ганкелизации

- Оператор ганкелизации Hankel($\cdot$) выполняет антидиагональное усреднение элементов матрицы,
- Невязка ганкелизации: $\mathbf{H}_r^{(i)} = \mathbf{C}_r^{(i)} - \text{Hankel}(\mathbf{C}_r^{(i)})$,
- При точном разложении траекторного тензора: $\sum\limits_{r=1}^{R} \mathbf{H}_r^{(i)} = 0$,
- Упрощенная задача декомпозиции сигнала на две компоненты:

$$\begin{cases} \|\sum\limits_{r=1}^{R-1} \mathbf{H}_r^{(i)} \beta_r^{(i)}\| \to \min\limits_{\beta^{(\mathbf{i})}} \\ \beta \in \{0, 1\} \\ \sum\limits_{r=1}^{R-1} \beta_r^{(i)} \geqslant 2, \end{cases}$$

Прогнозирование с помощью тензорной гусеницы

- Вектор задержки, с неизвестной последней компонентой: $\mathbf{x}_{n-\tau+2} = (\mathbf{x}_{kn} | x_{pr})^{\mathsf{T}}$,
- Введем обозначение: $\mathbf{A} = \left(\dfrac{\mathbf{A}_{kn}}{\mathbf{a}_{pr}^{\mathsf{T}}}\right)$. Решаем задачу наименьших квадратов:

$$\mathbf{x}_{n-\tau+2} = \mathbf{A}\lambda$$

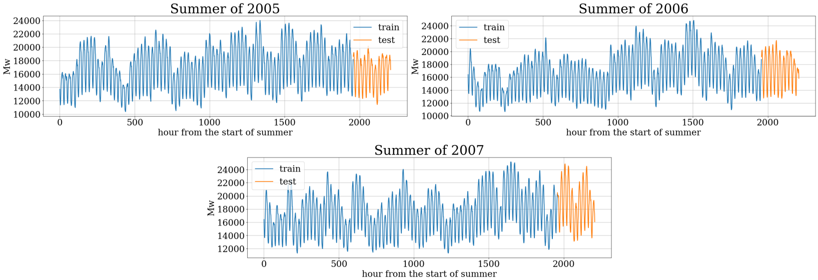
- Решение: $\lambda = (\mathbf{A}_{kn}^{\mathsf{T}} \mathbf{A}_{kn})^{-1} \mathbf{A}_{kn}^{\mathsf{T}} \mathbf{x}_{kn}$. Предсказание:

$$x_{n+1} = \mathbf{a}_{pr}^{\mathsf{T}} (\mathbf{A}_{kn}^{\mathsf{T}} \mathbf{A}_{kn})^{-1} \mathbf{A}_{kn}^{\mathsf{T}} \mathbf{x}_{kn}$$

- Модель предсказания: AR$(\tau - 1)$.

Данные

Эксперимент был проведен на данных потребления электроэнергии. Временной ряд был разделен на три ряда потребления энергии за лето, соответственно, 2005, 2006, 2007-х годов:



Временные ряды и их разделение на обучающую и тестовую выборки.

Декомпозиция временных рядов

1. По сетке рангов, произведем разложение траекторного тензора с помощью ALS.
2. Для каждого ранга выполним декомпозицию, численно решив задачу группировки.
3. Выберем ранг, отвечающий наименьшей средней относительной ошибке ганкелизации:

$$\mathrm{RHE} = \frac{\|\mathbf{C} - \mathrm{Hankel}(\mathbf{C})\|_2}{\|\mathbf{C}\|_2},$$

усредненной по трем рядам.

Декомпозиция временных рядов

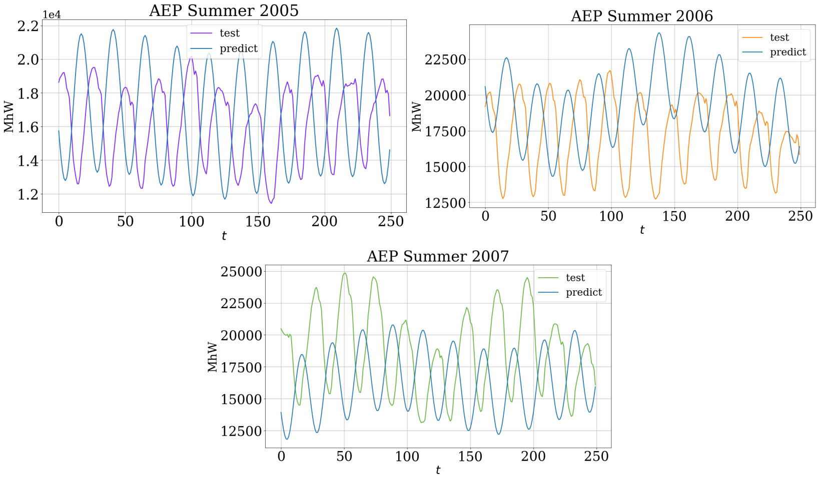
Декомпозиция временных рядов на две компоненты при ранге разложения $R = 45$.

Прогнозирование временных рядов.

1. По сетке рангов, произведем разложение траекторного тензора с помощью ALS.
2. Для каждого ранга выполним прогноз на валидационной выборке и вычислим MAPE.

3. Выберем ранг, отвечающий наименьшему среднему MAPE и выполним прогноз на тесте.

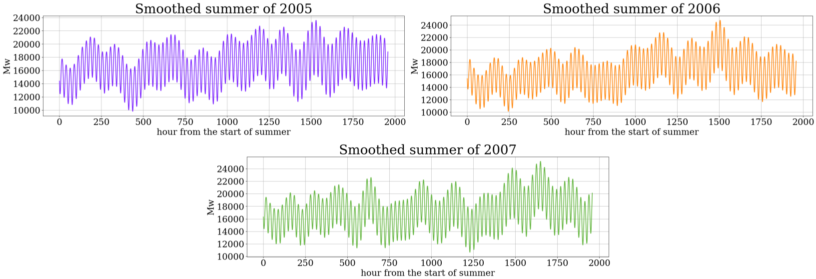
Прогнозирование временных рядов.



Предсказания временных рядов на тесте при ранге $R = 10$.

Сглаживание временных рядов

Проведем сглаживание временных рядов, с помощью умреднения антидиагональных элементов восстановленных траекторных матриц:



Сглаживание временных рядов при ранге $R = 10$.

Выводы

- Сглаживание и прогнозирование дали удовлетворительный результат.
- Сложность и неинтерпретируемость декомпозиции – главный недостаток метода.