

## MODÜL 3: İlk Yapay Zeka (Lineer Regresyon)

Artık soyut matematikten çıkış **gerçek veri bilimine** giriyoruz. Şu ana kadar gibi uydurma fonksiyonları optimize ettik. Şimdi gerçek veriye en uygun doğruya çizen bir model kodlayacağız.

### Teori: Hipotez ve Hata

Bir ev fiyatı tahmin modelinde iki değişken vardır:

- **Girdi ()**: Evin metrekaresi.
- **Cıktı ()**: Evin fiyatı.

Amacımız ile arasındaki ilişkiyi kuran şu denklemi (Hipotez) bulmaktır:

$$h(x) = w \cdot x + b$$

- **(Ağırlık/Eğim)**: Metrekarenin fiyataya etkisi.
- **(Bias)**: Sabit başlangıç fiyatı.

Bilgisayar başlangıçta ve 'yi rastgele sallar. Sonra senin az önce yazdığın **Gradient Descent** ile hatayı azaltarak en doğru ve 'yi bulur.

### Hata Fonksiyonu: MSE (Mean Squared Error)

Dağcıörneğinde hatamız idi. Gerçek hayatı hata şudur: (**Gerçek Fiyat - Tahmin Edilen Fiyat**)

Buna **MSE** denir ve formülü şöyledir:

$$Loss = \frac{1}{N} \sum (y_{ger\&ek} - (w \cdot x + b))^2$$

Karesini alıyoruz ki negatif hatalar pozitife dönsün ve büyük hatalar daha çok cezalandırılsın).

### Sıradaki Adım: Modeli Eğitmek (Gradient Descent)

Hatayı hesapladık (çok yükseltti). Şimdi o hatayı kullanarak ve değerlerini düzeltceğiz.

**Matematiksel Görev:** Loss fonksiyonumuzun (MSE) türevini almamız lazım.

Zincir kuralı (Chain Rule) ile türev aldığımızda (buraları senin için sadeleştiriyorum) bilgisayarın kullanacağı güncelleme formülleri şunlardır:

1. **w'nin türevi ( $dw$ ):**  $\frac{-2}{N} \sum x \cdot (y - \text{tahmin})$
2. **b'nin türevi ( $db$ ):**  $\frac{-2}{N} \sum (y - \text{tahmin})$

Bu formüller bize "Hangi yöne gitmeliyiz?" sorusunun cevabını verir.

$$Loss = \frac{1}{N} \sum (y - (wx + b))^2$$

### Zincir Kuralı (Chain Rule) Mantığı

Bir soğan düşün. Cücüğe (w) ulaşmak için katmanları dışarıdan içeriye doğru soyman gereklidir. Zincir kuralı şudur: "**En dıştaki hatanın türevini al, içeriye doğru çarparak ilerle.**"

Bizim yapımız şöyle:

1. **Girdi (w):** Değiştirdiğimiz şey.
2. **Ara Katman ( $y_{\text{tahmin}}$ ):** değişince bu değişir () .
3. **Çıktı (loss):** Tahmin değişince hata değişir () .

Formül:

$$\frac{\partial Loss}{\partial w} = \frac{\partial Loss}{\partial y_{\text{tahmin}}} \cdot \frac{\partial y_{\text{tahmin}}}{\partial w}$$

### Adım Adım İspat

Basitlik olsun diye toplam sembolünü () ve ortalamayı () şimdilik kenara koyalım, **tek bir veri noktası** için yapalım. Sonra onları geri ekleriz.

1. **Tahmin:**  $y_{\text{pred}} = w \cdot x + b$
2. **Hata (Loss):**  $L = (y_{\text{gerçek}} - y_{\text{pred}})^2$

Amacımız:  $\frac{\partial L}{\partial w}$  (Loss'un w'ye göre değişimi).

### **ADIM 1: Dış Katman (Hatanın Tahmine Göre Türevi)**

Hata fonksiyonumuz bir kare alma işlemidir:  $u^2$ . Türev kuralı:  $(u^2)' = 2 \cdot u \cdot u'$ .

Burada  $u = (y_{\text{gerçek}} - y_{\text{pred}})$ . Zincir kuralını uygulayalım:

$$\frac{\partial L}{\partial y_{\text{pred}}} = 2 \cdot (y_{\text{gerçek}} - y_{\text{pred}}) \cdot (-1)$$

Neden  $-1$ ? Çünkü parantezin içindeki  $y_{\text{pred}}$ 'in önünde eksi işaret var.  $y_{\text{gerçek}}$  sabit bir sayıdır, türevi 0'dır.

**Sonuç 1:**  $-2(y_{\text{gerçek}} - y_{\text{pred}})$

### **ADIM 2: İç Katman (Tahminin Ağırlığa Göre Türevi)**

Şimdi tahmin fonksiyonuna bakalım:  $y_{\text{pred}} = w \cdot x + b$

Bunun  $w$ 'ye göre türevi nedir?  $w$ 'nin katsayısı  $x$ 'tir. ( $b$  sabittir, türevi 0 olur).

**Sonuç 2:**  $x$

### **ADIM 3: Birleştir (Çarpım)**

Zincir kuralı gereği Adım 1 ve Adım 2'yi çarpıyoruz:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = \text{Sonuç 1} \cdot \text{Sonuç 2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial w} = [-2(y_{\text{gerçek}} - y_{\text{pred}})] \cdot x$$

Düzenlersek:

$$\frac{\partial L}{\partial w} = -2 \cdot x \cdot (y_{\text{gerçek}} - y_{\text{pred}})$$

#### **ADIM 4: Toplam Sembolünü Geri Getir**

Biz bunu tek bir veri için yaptık. MSE (Mean Squared Error) tüm verilerin **ortalamasıdır**. Yani formülün başına ekleriz.

#### **FİNAL FORMÜL (dw):**

Kodda yazdığımız hali:

##### **Python**

```
# hata_farki = (Y - tahminler)
dw = (-2 / N) * np.sum(X * hata_farki)
```

#### **Bias (db) İçin Durum Ne?**

Mantık birebir aynıdır, sadece Adım 2 değişir.  $y_{pred} = w.x + b$

Bunun  $b$ 'ye göre türevi nedir?  $b$ 'nin önünde gizli bir 1 vardır. Türevi 1'dir.

Bu yüzden db formülünde sonda x yoktur (çünkü 1 ile çarpılmıştır):

$$db = \frac{-2}{N} \sum (y_{gerçek} - y_{tahmin})$$

Bu matematiksel altyapı içine sindiyse, şimdi o kod satırlarını çok daha büyük bir güvenle doldurabilirsın.

Önceki koda dönüp  $w$  ve  $b$  güncelleme satırlarını tamamlayalım mı? Hatırlatma:  $yeni = eski - (lr * türev)$