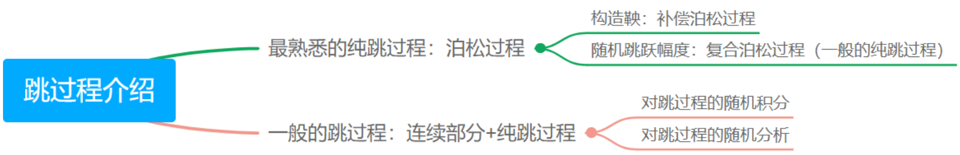
跳过程介绍

张天骏

2021300003004

目录


跳过程介绍
最熟悉的纯跳过程：泊松过程
构造鞅：补偿泊松过程
随机跳跃幅度：复合泊松过程（一般的纯跳过程）
一般的跳过程：连续部分+纯跳过程
对跳过程的随机积分
对跳过程的随机分析

1 泊松过程 $N(t)$

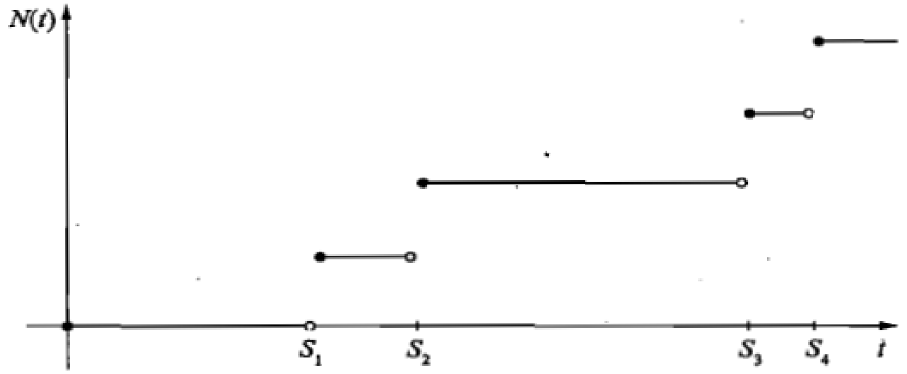


图 11.2.1 泊松过程的一条路径

考虑独立增量的计数过程 $N(t) \in \{1, 2, \cdots n \cdots\}$，记 S_n 为第 n 次跳跃的时间，λ 为跳跃的平均等待时间。则泊松过程 $N(t)$ 定义为：

$$N(t) = \begin{cases} 0, 0 \le t \le S_1 \\ 1, S_1 \le t \le S_2 \\ 2, S_2 \le t \le S_3 \\ \vdots \end{cases}$$

定理. $N(t)$ 服从强度为 λ 的泊松分布; S_1: 第 *1* 次跳跃等待时间 服从强度为 λ 的指数分布; S_n: 前 n 次跳跃用时 服从 $\Gamma(n, \lambda)$ 分布

1.1 补偿泊松过程 $M(t)$

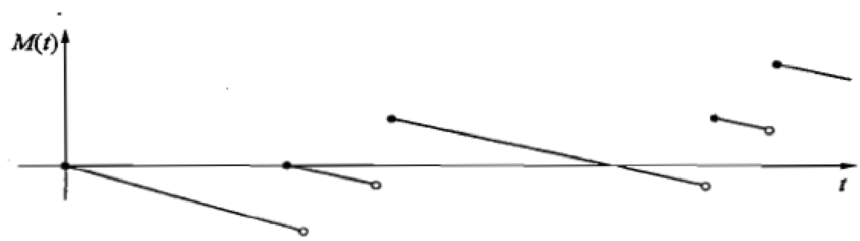


图 11.2.2 补偿泊松过程的一条路径

由于泊松过程是一个增过程，所以们考虑它的 Doob-Meyer 分解，$M(t) = N(t) - E(N(t)) = N(t) - \lambda t$，很容易证明 $M(t)$ 是一个鞅：

证明. 给定 $0 \leqslant t \leqslant s$, 由于 $N(t)-N(s)$ 独立于 $F(s)$，并且具有期望值 $\lambda(t-s)$，我们有:

$$
\begin{aligned}
E[M(t)|F(s)] =& E[M(t)-M(s)|F(s)]+E[M(s)|F(s)] \\
=& E[N(t)-N(s)-(t-s)|F(s)]+M(s) \\
=& E[N(t)-N(s)]-(t-s)+M(s) \\
=& M(s)
\end{aligned}
$$

□

1.2 复合泊松过程 $Q(t)$

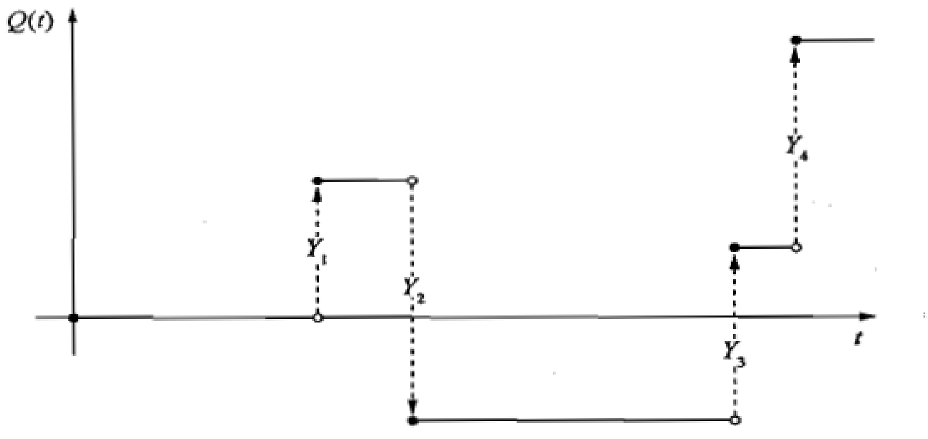


图 11.3.1 复合泊松过程的一条路径

基于泊松过程构造复合泊松过程:

- 设 $N(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程，$Y_1, Y_2 \ldots$ 是一列均值为 β 的同分布随机变量。假设随机变量 $Y_1, Y_2 \ldots$ 两两独立, 并且也独立于泊松过程 $N(t)$
- 定义复合泊松过程 $Q(t)=\sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, t \geqslant 0$
- $Q(t)$ 与 $N(t)$ 在同一时刻发生跳跃,$N(t)$ 的跳跃幅度恒为 1, 而 $Q(t)$ 的跳跃幅度则随机。第一次跳跃幅度为 Y_1, 第二次跳跃幅度为 Y_2……
- 类似的，$Q(t)$ 也有补偿过程 (取 Doob-Meyer 分解即可)

下面我们计算复合泊松过程 $Q(t)$ 的矩母函数：

$$
\begin{aligned}
\phi(u) &= \mathbb{E}e^{uQ(t)} = \mathbb{E}e^{u\sum_{i=1}^{N(t)}Y_i} \\
&= \mathbb{P}N(t) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[e^{u\sum_{i=1}^{k}Y_i}\middle|N(t)=k\right]\mathbb{P}\{N(t)=k\} \\
&= \mathbb{P}N(t) = 0 + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}\left[e^{u\sum_{i=1}^{k}Y_i}\right]\mathbb{P}\{N(t)=k\} \\
&= e^{-\lambda t} + \sum_{k=1}^{\infty}\mathbb{E}e^{uY_1}\mathbb{E}e^{uY_2}\cdots\mathbb{E}e^{uY_k}\frac{(\lambda t)^k}{k!}e^{-\lambda t} \\
&= e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t}\sum_{k=1}^{\infty}(\phi_Y(u)\lambda t)^k\frac{1}{k!} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty}(\phi_Y(u)\lambda t)^k\frac{1}{k!} \\
&= \exp\left(\lambda t(\phi_Y(u)-1)\right)
\end{aligned}
$$

- 如果 $Y_i = y$：$\phi(u) = \exp(\lambda t(e^{uy}-1))$
- 如果 $Y_i = 1$：$\phi_{Poisson}(u) = \exp(\lambda t(e^{u}-1))$
- 如果 Y_i 只取有限多个值：$\phi_Y(u) = \mathbb{E}\exp(uy) = \sum_{m=1}^{M}\mathbb{P}_{y_m}\exp(uy_m)$，从而：

$$
\begin{aligned}
\phi(u) &= \exp\left[\lambda t\left(\sum_{m=1}^{M}\mathbb{P}_{y_m}\exp(uy_m)-1\right)\right] \\
&= \prod_{m=1}^{M}\exp[\lambda\mathbb{P}_{y_m}t(e^{uy_m}-1)]
\end{aligned}
$$

1.3 分解定理

定理. 设 $y_1, y_2 \ldots, y_M$ 是非零常数的有限集，$\rho(y_1)\rho(y_2)\cdots\rho(y_M)$ 是总和为 *1* 的正数。给定 $\lambda > 0$, 设 $\overline{N}_1(t)\overline{N}_2(t)\cdots\overline{N}_M(t)$ 是两两独立的泊松过程，每个 $\overline{N}_m(t)$ 具有强度 $\lambda\rho(y_m)$. 定义*:*

$$
Q(t) = \sum_{m=1}^{M}y_m\overline{N}_m(t), \quad t \geqslant 0
$$

则 $\overline{Q}(t)$ 是复合泊松过程。如果 $\overline{Y}_1$ 是 $\overline{Q}(t)$ 的第一次跳跃的幅度，$\overline{Y}_2$ 是 $\overline{Q}(t)$ 的第二次跳跃的幅度，等等，并且

$$\overline{N}(t) = \sum_{m=1}^{M} \overline{N}_m(t), \quad t \geqslant 0$$

是时间区间 $(0,t]$ 内的跳跃总数，则 $\overline{N}(t)$ 是强度为 λ 的泊松过程，随机变量 $\overline{Y}_1, \overline{Y}_2, \cdots$ 两两独立，$\mathbb{P}(\overline{Y_i} = y_m) = p(\overline{y_m}), m = 1 \cdots, M$, 随机变量 $\overline{Y}_1, \ldots \overline{Y}_M$ 独立于 $\overline{N}(t)$, 并且

$$\overline{Q(t)} = \sum_{i=1}^{\overline{N}(t)} \overline{Y}_i, \quad t \geqslant 0$$

证明. 由级数换序

$$Q(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i = \sum_{m=1}^{M} y_m N_m(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} \sum_{m=1}^{M} Y_i \mathbb{1}_{Y_i = y_m}$$

可以得到二者的等价性 □

2 一般的跳过程

$$X(t) = \underset{initial}{X(0)} + \underset{It\ddot{o}}{I(t)} + \underset{Riemann}{R(t)} + \underset{Jump}{J(t)}$$

- $I(t) = \int_0^t \Gamma(s) dW(s)$
- $R(t) = \int_0^t \Theta(s) ds$
- 定义该过程的连续部分 $X^c(t) = X(0) + I(t) + R(t) = X(0) + \int_0^t \Gamma(s) dW(s) + \int_0^t \Theta(s) ds$
  - $[X^c(t), X^c(t)] = \int_0^t \Gamma^2(s) ds$
- $J(t)$ 是纯跳过程：右连续、两次跳跃之间是常数、假设有限时间内跳跃有限多次
  - 纯跳过程的左连续形式记作 $J(t-) := \lim_{s \to t^-} J(t)$ 对应着跳跃之前的瞬间
  - 纯跳过程 t 时刻的跳跃幅度记作 $\Delta J(t) := J(t) - J(t-)$

3 跳过程的随机积分

$$\int_0^t \Phi(s) dX(s) = \int_0^t \Phi(s)\Gamma(s) dW(s) + \int_0^t \Phi(s)\Theta(s) ds + \sum_{0<s\leq t} \Phi(s) \Delta I(s)$$

它对应的微分形式如下：

$$\begin{aligned}\Phi(t)dX(t) &= \Phi(t)dI(t) + \Phi(t)dR(t) + \Phi(t)dJ(t) \\ &= \Phi(t)dX^c(t) + \Phi(t)dJ(t) \\ &= \Phi(t)\Gamma(t)dW(t) + \Phi(t)\Theta(t)dt + \Phi(t)dJ(t)\end{aligned}$$

3.1 鞅性

我们在关于连续过程 (比如说布朗运动) 的积分时曾提及"适应过程关于一个鞅过程的随机积分是鞅"，在这里还成立吗？我们可以举出一个反例。

例子. 关于 $X(t) = M(t) = N(t) - \lambda t$ 补偿泊松过程的积分被积式是 $\Delta N(t)$ 定义同上

- $\int_0^t \Phi(s)dX^c(s) = \int_0^t \Phi(s)dR(s) = -\lambda \int_0^t d\Phi(s) = 0$
- $\int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}N(s) = \sum_{0<s\leqslant t}(\Delta N(s))^2 = N(t)$
- $\int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}M(s) = -\lambda \int_0^t \Phi(s)\mathrm{ds} + \int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}N(s) = N(t)$

此时 $\mathbb{E}(\int_0^t \Phi(s)\mathrm{d}M(s)|M(t')) = \mathbb{E}(N(t)|M(t')) = \lambda(t-t') \neq 0$ 由此可以看出，适应过程关于跳鞅的随机积分不一定是鞅。

那么我们需要加强什么条件才能得到跳过程随机积分的鞅性？我们有如下定理

定理. 如果被积过程是左连续、$\mathscr{L}^2$ 可积、适应过程。那么跳过程关于该过程的随机积分是鞅。（这个条件可以减弱为可料过程）

3.2 二次变差和交互变差

定理. 给定两个跳过程 $X_1(t), X_2(t)$，我们可以计算出它们各自的二次变差和交互变差：

$[X_1, X_1](T) = [X_1^c, X_1^c](T) + [J_1, J_1](T) = \int_0^T \Gamma_i^2(s)ds + \sum\limits_{0<s\leq T}(\Delta J_1(s))^2$

$[X_1, X_2](T) = [X_1^c, X_2^c](T) + [J_1, J_2](T) = \int_0^T \Gamma_1(s)\Gamma_2(s)ds + \sum\limits_{0<s\leq T}\Delta J_1(s)\Delta J_2(s)$

由于二次变差是交互变差的特例，我们在这里只证明交互变差的式子：

证明.

$$
\begin{aligned}
c_{\prod}(X_1,X_2) &= \sum_{i=0}^{n-1}(X_1(t_{i+1})-X_1(t_i))(X_2(t_{i+1})-X_2(t_i)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(X_1^c(t_{i+1})-X_1^c(t_i)+J_1(t_{i+1})-J_1(t_i))\times(X_2^c(t_{i+1})-X_2^c(t_i)+J_2(t_{i+1})-J_2(t_i)) \\
&= \sum_{i=0}^{n-1}(X_1^c(t_{i+1})-X_1^c(t_i))(X_2(t_{i+1})-X_2^c(t_i))+\sum_{i=0}^{n-1}(X_1^c(t_{i+1})-X_1^c(t_i))(J_2(t_{i+1})-J_2(t_i)) \\
&\quad +\sum_{i=0}^{n-1}(J_1(t_{i+1})-J_1(t_i))(X_2^c(t_{i+1})-X_2^c(t_i))+\sum_{i=0}^{n-1}(J_1(t_{i+1})-J_1(t_i))(J_2(t_{i+1})-J_2(t_i))
\end{aligned}
$$

其中：

$$
\begin{aligned}
&\left|\sum_{j=0}^{n-1}\left(X_1^c(t_{j+1})-X_1^c(t_j)\right)\left(J_2(t_{j+1})-J_2(t_j)\right)\right| \\
&\leqslant \max_{0\leqslant j\leqslant n-1}\left|(X_1^c(t_{j+1})-X_1^c(t_j))\right|\cdot\sum_{j=0}^{n-1}\left|(J_2(t_{j+1})-J_2(t_j)\right| \\
&\leqslant \max_{0\leqslant j\leqslant n-1}\left|(X_1^c(t_{j+1})-X_1^c(t_j))\right|\cdot\sum_{0\leqslant s\leqslant T}\left|\Delta J_2(s)\right|; \\
&\sum_{j=0}^{n-1}\left(J_1\left(t_{j+1}\right)-J_1\left(t_j\right)\right)\left(J_2\left(t_{j+1}\right)-J_2\left(t_j\right)\right) \\
&= \sum_{j\in A_1\cap A_2}\left(J_1\left(t_{j+1}\right)-J_1\left(t_j\right)\right)\left(J_2\left(t_{j+1}\right)-J_2\left(t_j\right)\right) \\
&= \sum_{0<s\leq t}\Delta J_1(s)\Delta J_2(s)
\end{aligned}
$$

带入可以得到：

$$
c_{\prod}(X_1,X_2)=\sum_{i=0}^{n-1}(X_1^c(t_{i+1})-X_1^c(t_i))(X_2^c(t_{i+1})-X_2^c(t_i))+\sum_{i=0}^{n-1}(J_1(t_{i+1})-J_1(t_i))(J_2(t_{i+1})-J_2(t_i))
$$

令 $n\to\infty$：

$$
[X_1,X_2](T)=[X_1^c,X_2^c](T)+[J_1,J_2](T)=\int_0^T\Gamma_1(s)\Gamma_2(s)ds+\sum_{0<s\leq T}\Delta J_1(s)\Delta J_2(s)
$$

□

由证明过程我们可以发现：一个跳过程可以分解为“正交”的两部分：连续部分 + 纯跳部分

4 跳过程的 $I\ddot{t}o$ 公式

定理. 跳过程的 $I\ddot{t}o$ 公式如下：

$$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX^c(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))dX^c(s)dX^c(s) + \sum_{0<s\leq T} f(X(s)) - f(X(s-))$$

证明. 若时域 $[u,v]$ 没有发生跳跃，则 $X(t)$ 的 $I\ddot{t}o$ 公式为：

$f(X(t)) = f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX^c(s) + \frac{1}{2}\int_0^t f''(X(s))dX^c(s)dX^c(s)$

此时对于时域 $[0,t]$，沿着跳时刻 τ_i 切分 (n 维情景就进一步切分为 $\cup_n\{\tau_i^n\}$) 只要保证积分区间 (时域) 没有跳，是连续的就行。这时仍有：

$$f(X(\tau_{i+1}-)) - f(X(\tau_j)) = \int_{\tau_j}^{\tau_{i+1}} f'(X(s))dX^c(s) + \frac{1}{2}\int_{\tau_j}^{\tau_{i+1}} f''(X(s))dX^c(s)dX^c(s)$$

由 $f(X(\tau_{i+1})) - f(X(\tau_j)) = f(X(\tau_{i+1})) - f(X(\tau_{i+1}-)) + f(X(\tau_{i+1}-)) - f(X(\tau_j))$ 可得：

$$\begin{aligned} f(X(\tau_{i+1})) - f(X(\tau_j)) = &\int_{\tau_j}^{\tau_{i+1}} f'(X(s))ds + \frac{1}{2}\int_{\tau_j}^{\tau_{i+1}} f''(X(s))dX^c(s)dX^c(s) \\ &+ f(X(\tau_{i+1})) - f(X(\tau_{i+1}-)) \end{aligned}$$

最后由 $f(X(t)) - f(X(0)) = \sum\limits_{i=1}^{n} f(X(\tau_{i+1})) - f(X(\tau_j))$ 得到跳过程的 $I\ddot{t}o$ 公式

$\square$

4.1 例子：$It\ddot{o}$ 乘积法则

给定两个跳过程 $X_1(t), X_2(t)$，可以根据上文的 $I\ddot{t}o$ 公式计算二者乘积过程的展开式：

$$
\begin{aligned}
& X_1(t)X_2(t) \\
=& X_1(0)X_2(0) + \int_0^t X_2(s)dX_1^c(s) + \int_0^t X_1(s)dX_2^c(s) + \left[X_1^c, X_2^c\right](t) \\
& + \sum_{0<s\leq t} \left[X_1(s)X_2(s) - X_1(s-)X_2(s-)\right] \\
=& X_1(0)X_2(0) + \int_0^t X_2(s-)dX_1(s) + \int_0^t X_1(s-)dX_2(s) + \left[X_1, X_2\right](t)
\end{aligned}
$$

至于两个式子的等价性，我们可以根据下面两个式子证明：

$$
\begin{aligned}
& [X_1, X_2](t) = [X_1^c, X_2^c](t) + [J_1, J_2](t) \\
& \sum_{0<s\leq t} \left[X_1(s)X_2(s) - X_1(s-)X_2(s-)\right] = \sum_{0<s\leq t} \left[X_1^c(s-)\Delta J_1(s) + X_2(s-)\Delta J_2(s) + \Delta J_1(s)\Delta J_2(s)\right]
\end{aligned}
$$

4.2 例子：同一个域流下的布朗运动和泊松过程相互独立

证明. 我们考虑随机过程：$Y(t) = \exp\left\{u_1W(t) + u_2N(t) - \frac{1}{2}u_1^2t - \lambda(e^{u_2}-1)t\right\}$，其中 $W(t)$ 是标准布朗运动，$N(t)$ 是泊松过程。

如果该过程在 $t=s$ 时发生跳跃，则：

$Y(s) = \exp\left\{u_1W(s) + u_2\left(N(s-)+1\right) - \frac{1}{2}u_1^2s - \lambda\left(e^{u_2}-1\right)s\right\} = Y(s-)e^{u_2}$

$Y(s) - Y(s-) = (e^{u2}-1)Y(s-)\Delta N(s)$

此时对 $Y(t)$ 运用 $It\ddot{o}$ 公式可得：

$$
\begin{aligned}
Y(t) =& f\left(X(t)\right) \\
=& f(X(0)) + \int_0^t f'(X(s))dX^c(s) + \frac{1}{2}\int_0^t x''(X(s))dX^c(s)dX^c(s) + \sum_{0<s\leq t}\left[f(X(s)) - f(X(s-))\right] \\
=& 1 + u_1\int_0^t Y(s)dW(s) - \frac{1}{2}u_1^2\int_0^t Y(s)ds - \lambda(e^{u_2}-1)\int_0^t Y(s)ds + \frac{1}{2}u_1^2\int_0^t Y(s)ds \\
& + \sum_{0<s\leq t}\left[Y(s) - Y(s-)\right] \\
=& 1 + u_1\int_0^t Y(s)dW(s) - \lambda(e^{u_2}-1)\int_0^t Y(s-)ds + (e^{u_2}-1)\int_0^t Y(s-)dN(s) \\
=& 1 + u_1\int_0^t Y(s)dW(s) + (e^{u_2}-1)\int_0^t Y(s-)dM(s)
\end{aligned}
$$

$Y(t)$ 可以表示为关于鞅的积分，从而是一个鞅 $E(Y_t) = E(Y_0) = 1$

$$\mathbb{E}\exp\left\{u_1W(t) + u_2N(t) - \tfrac{1}{2}u_1^2t - \lambda(e^{u_2}-1)t\right\} = 1, \quad \forall t \geqslant 0$$

$$\mathbb{E}e^{(u_1W(t)+u_2N(t))} = \exp\left\{\tfrac{1}{2}u_1^2t\right\}\cdot\exp\left\{\lambda t\left(e^{u_2}-1\right)\right\} = \mathbb{E}e^{u_1W(t)}\mathbb{E}e^{u_2N(t)}$$

从而得证明以给定时域下的独立性；至于任意的时域切分：由于独立增量性可以证明各自增量之间是独立的，而同一段时域的两个过程之间也是独立的；从而依独立性的传递性得证。 □