泛函分析整理

刘培德《泛函分析基础：修订版》

授课教师：朱朗峰

张天骏

2024 Spring

感谢王哲同学在题目解答方面提供的帮助

目录

1 线性赋范空间

1.1 知识点速览

1.1.1 度量空间、赋范线性空间、内积空间

1. 度量 d 是关于空间两个点的距离的描述。基于这个概念我们可以定义一个点列关于某一个点的收敛：$d(x_n, x) \to 0$。这是我们后续大多数证明的终点。
2. 范数是关于空间一个点的位置的描述，它给定了一个固定的参考点：原点。所以，若一个度量能诱导出范数，那它要满足一次齐次性和平移不变性。
3. 内积，就是从 $\mathbb{R}^n$ 中自然推广过来的。和 $\mathbb{R}^n$ 中一样，若一个范数能诱导出内积，那么它要满足平行四边形公式 (极化恒等式)。
4. 极化恒等式：$(x, y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2 + i||x+iy||^2 - i||x-iy||^2)$
   (a) $\mathrm{Re}(x, y) = \frac{1}{4}(||x+y||^2 - ||x-y||^2)$
   (b) $\mathrm{Im}(x, y) = \frac{1}{4}(||x+iy||^2 - ||x-iy||^2)$
5. 这一部分书上提供了丰富的例子，建议认真研读，感受。

1.1.2 $\mathbb{R}$ 上完备性定理在度量空间的推广

1. 首先，一般的度量空间中，柯西准则不一定成立。所以我们有必要首先定义完备性：满足柯西准则的空间，才能进一步操作。(所谓不完备的空间就是有”孔洞”的空间，有些点没有定义，但是附近有空间内的点列无限接近它)
2. 有了完备性，我们可以推广”区间套定理”为”闭集套定理”
3. 对于线性赋范空间，我们可以定义形式级数 (点列的无穷和 $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$)，进而定义它的可和性 (可和，绝对可和)。进一步，我们可以推广”单调有界原理”为”绝对可和级数可和定理”
4. 然而，在考虑紧集时，我们不再能够得出它与有界闭集的等价性。于是我们要重新定义紧性：基于有限覆盖这一本质。在度量空间中，紧性等价于无穷序列存在收敛子列，且极限点在集合内。在此有限覆盖定理和聚点定理 (Bolzano-Weierstrass) 被推广了。
5. 接着上面的紧性，在一般的线性赋范空间中，有界集的性质也发生了畸变。于是我们又基于 $\varepsilon-$网 定义了更强的有界性：完全有界。在度量空间中，完全有界性等价于

无穷序列存在柯西子列。完全有界的概念很有用，它给出了解构一个大集合的方法，通过 $\varepsilon-$ 网。

6. 在一般的度量空间，并未定义像 $\mathbb{R}$ 一样的序关系，所以没有确界原理。

1.1.3 基于映射的同构、等价

1.1.4 稠密与纲：无限维完备线性赋范空间的维数是不可数的

1. 首先要了解稠密、无处稠密、纲的概念，这对于无限维的描述十分关键。
2. 稠密性/无处稠密性的定义基于闭包，而闭包除去孤立点后，剩下聚点 (内点 + 边界点)，意味着“不可达的无限逼近”。
3. 稠密性可以推广到任意一个闭集的子集：只要该子集的闭包是原集合，就说这个子集关于闭集稠密。由此来理解“无处稠密集”：关于哪个闭子集都不稠密；“全空间的稠密子集”：关于任意闭子集稠密。
4. 至于纲，它基于集合的表示 (第一纲集的可数并)，将集合进行了分划，赋予”category”。基于纲，我们有著名的 Baire 纲定理：完备度量空间具有 Baire 性质：可数稠密子集的交仍稠密，这是第二纲集的充分条件。所以我们可以证明一个空间是第一纲的来证明它不完备：用这个思路可以证明无穷维完备赋范线性空间的维数是不可数的，不然就是一个第一纲集，矛盾。
5. 接着，我们引入了可分集的概念：存在可数稠密子集。这是完全有界集的必要条件。同时，我们也可以定义可分空间。

1.1.5 走向无限维：无尽的量变最终引起质变

1. 首先要了解著名的 Riesz 引理，它表示线性赋范空间中，点到一个闭线性子空间的距离可以无限接近这个点的范数。
2. 基于 Riesz 引理，我们可以刻画有限维空间的本质：有界闭集是紧集。而对于无限维空间，Riesz 引理中的操作可以无限进行，从而构成一个点列没有收敛子列。特别地，有界闭集可以取闭单位球和闭单位球面。

1.2 习题 (奇数题)

问题. *11*：设 $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \Sigma, \mu), \mu(\Omega) < \infty$，证明：

(1) $||f||_\infty = \inf\{C > 0 : \mu(|f| > C) = 0\} = \sup\{C > 0 : \mu(|f| > C) > 0\}$

(2) $||f||_\infty = \lim_{p\to\infty} ||f||_p$

(3) 如果 $||f||_\infty > 0$,$||f||_\infty = \lim_{p\to\infty} \frac{||f||_{p+1}}{||f||_p}$

证明. (1) $\exists c_n : \mu(A_n :| f |> c_n = 0), c_n > c_0 := \inf\{C > 0 : \mu(|f| > C) = 0\}, c_n \to c_0$ 取 $A = \bigcup_{n=1}^\infty : \mu(A) = 0, c_0 = \sup_{t\in U/A} |f(t)| \geq ||f||_\infty$ 记 $E = \{|f| > ||f||_\infty\}$ 则按照范数定义：$\mu(E) = 0$，所以 $||f||_\infty \geq c_0$ 所以 $c_0 = ||f||_\infty$。

而 $\inf\{C > 0 : \mu(|f| > C) = 0\} = \sup\{C > 0 : \mu(|f| > C) > 0\}$ 是一个双重否定 (零测集，正测集；下确界，上确界)，所以二者等价

(2)(3) 略 □

问题. *17*：设 X 是 $[a, b]$ 上连续函数的全体，$1 \leq p < \infty$，

$$\|x\|_p = \left(\int_\alpha^\beta |x(t)|^p \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{p}} \quad \forall x \in X.$$

证明 $\|\cdot\|_p$ 是 X 上的范数，但 $(X, \|\cdot\|_p)$ 不是完备的。验证 X 的完备化空间是 $L^p[\alpha, b]$.

证明. 先证明 $\|\cdot\|_p$ 是 X 上的范数：由于在该范数下，$C[a, b] \subset \mathscr{L}^p$。所以显然成立

举反例证明不完备:考虑连续函数列 $f_n(x) = \arctan(n(x-\frac{b-a}{2}))$,则 $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathbb{I}(x > \frac{b-a}{2}) - \mathbb{I}(x < \frac{b-a}{2})$ 很显然,$\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ 不是连续函数,但是 $f_n(x) \to f(X)$ in norms，所以该赋范线性空间不完备。

至于完备化的证明：因为连续函数可以逼近简单函数 (Lusin Theorem)，而简单函数全体在 $\mathscr{L}^p$ 中稠密，所以 $C[a, b]$ 是 $\mathscr{L}^p$ 的一个稠密子集。 □

问题. *19*：有可数 *Hamel* 基的线性赋范空间不是完备的。

证明. 设 $\{x_n\}$ 是 X 的可数 Hamel 基，则 $X = \bigcup_{n=1}^\infty \mathrm{span}(x_n)$。但是在 X 中，每个 $\mathrm{span}(x_n)$ 都不含内点，从而是无处稠密的。所以 X 是第一纲集，依 Baire 纲定理，完备度量空间的必要条件是第二纲的，所以 X 不完备。

(利用类似的方法还可以证明 $[0, 1]$ 区间是不可数的；无穷维 Banach 空间作为线性空间, 是不可数维的) □

问题. *27*：设 $l_n^\infty = \{x = (x_1, \cdots, x_n) : x \in \mathbb{R}; \|x\| = \sup_{1\leqslant i\leqslant n} |x_i|, \forall x \in l_n^\infty\}$。定义线性算子 $T : l_n^\infty \to l_n^\infty$, T 由 *(1.3.7)* 表达，证明当 $\sum_{j=1}^n |a_{ij}| < 1$ 时，算子方程 $Tx - x = y$ 有唯一解。

证明. 定义线性算子 $V(x) = T(x) - y$，从而待证等价于证明 V 存在唯一的不动点。因为 $||V(x_1 - x_2)|| = ||T(x_1 - x_2)|| \leq c||x_1 - x_2||, 0 < c < 1$；又因为 l_n^∞ 是一个 Banach 空间，所以根据压缩映射定理，得证。 □

问题. *29*：举例说明压缩映射定理中，如果映射条件放松到 $d(Tx, Ty) < d(x, y)$ 时，结论不成立

证明. 举反例：$f(x) = 2\pi + x - \arctan x$：$f$ 是 Banach 空间 $\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ 的一个函数，且 $|f(x) - f(y)| = |(x - y) - (\arctan x - \arctan y)| < |x - y|$，因为 $f'(x) = \frac{x^2}{1+x^2} < 1$。但是：方程 $f(x) = x$ 即 $\arctan x = 2\pi$ 无解，所以不存在不动点。 □

问题. *31*：对于度量空间 X，下面两个命题等价：

(1) X 是紧空间*;*

(2) 设 $\{F_\lambda : \lambda \in A\}$ 是 X 中的任一闭集族，若 F_λ 具有有限交性质（即其中任意有限个集合之交非空），则 $\bigcap_{\lambda\in A} F_\lambda \neq \varnothing$。

证明. 这其实就是紧集”有限覆盖”定义的逆否条件。验证这一点即可。 □

问题. *33*：若函数序列 $f_n(t)$ 在紧集 A 上等度连续且逐点收敛，则 $f_n(t)$ 在 A 上一致收敛。

证明. 由于紧集 A 上的连续函数空间是 Banach 空间，所以只需要证明 $\{f_n\}$ 是依范数柯西列即可。依据等度连续性：对于任意 $\varepsilon > 0$，给定 $\delta : |t - t'| < \delta \to |f(t) - f(t')| < \varepsilon_1$。基于这个 δ，取紧集 A 的有限开覆盖 $A = \bigcup_{i=1}^n A_i, \mathrm{diam}(A_i) < \delta$。对于每个 A_i：取 $\varepsilon_i > 0$，给定一个点 t：$\forall t' \in t, |f_m(t') - f_n(t')| \leq |f_n(t) - f_n(t')| + |f_m(t) - f_m(t')| + |f_m(t) - f_n(t)|$ 只要 $m, n > N(\varepsilon_i), |f_m(t') - f_n(t')| \leq 3\varepsilon_i : \sup\limits_{t'\in A_i} |f_m(t') - f_n(t')| \leq 3\varepsilon_i$；最后取 $\varepsilon = \max\limits_{n=1\cdots n} \varepsilon_i$，则 $\sup\limits_{t'\in A} |f_m(t') - f_n(t')| \leq 3\varepsilon$。得证。 □

2 空间 $B(X,Y)$ 与 X^*

2.1 知识点速览

2.1.1 有界线性算子 T 的几个等价条件

1. T 在某一点连续
2. T 是连续算子 (全局连续)
3. T 是有界算子
4. T 在某点有界邻域内有界：特别地，T 在单位球中有界
5. 存在 $a > 0 : ||Tx|| < a||x||$

   对于有界线性泛函 f，还等价于下面两个条件：
6. $N(f)$ 是闭集
7. $N(f)$ 不是 X 的稠密子集

2.1.2 空间 $B(X,Y), X^*$

1. 如果 Y 是 Banach 空间，则 $B(X,Y)$ 是 Banach 空间；X^* 是 Banach 空间：对于 $B(X,Y)$ 中柯西列 $\{T_n\} : \forall x \in X : \{f_n(x)\}$ 都是 Y 中的柯西点列；从而可以逐点定义极限 Tx; 此时 $||T_n x - T_x|| \leq \varepsilon ||x|| \forall x \in X : ||T_n - T|| \leq \varepsilon : T_n - T \in B(X,Y)$。所以 $T = T_n - (T_n - T) \in B(X,Y)$。柯西列 $\{T_n\}$ 的极限得以定义。

2.1.3 泛函四大定理

1. 共鸣定理：线性赋范空间 X 到线性赋范空间 Y 的有界线性算子族，如果在 X 的一个第二纲集上点点有界，则一致有界:

$$\sup_\lambda |T_\lambda x| < \infty, \forall x \in E(\text{第二纲集}) \rightarrow \sup_\lambda ||T_\lambda|| = \sup_\lambda \sup_x \frac{|T_\lambda x|}{||x||} < \infty$$

   Banach-Steinhaus：Banach 空间 (保证极限存在) X 到线性赋范空间 Y 的一列有界线性算子如果点点收敛 (自然点点有界)，则可定义算子极限 $T : Tx = \lim_{n\to\infty} T_n x$ 且

$$||T|| \leq \varliminf_{n\to\infty} ||T_n||$$

2. 开算子定理：Banach 空间 X 到线性赋范空间 Y 的有界线性算子 T，如果像集 $R(T)$ 是第二纲集，则 T 是开算子且满射；Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 上的有界线性算子 T 是开算子。

   逆算子定理：Banach 空间 X 到线性赋范空间 Y 的一一的有界线性算子 T，如果像集 $R(T)$ 是第二纲集，则 T^{-1} 是线性赋范空间 Y 到 Banach 空间 X 的有界线性算子，且 Y 是 Banach 空间 (形成同构 T)。
3. 闭图像定理：Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 的线性算子 T，如果图像 $G(T)$ 是闭的 (也就是一个闭算子)，则 T 连续。此时闭算子和连续算子等价，且 $G(T)$ 是一个 Banach 空间。
4. Hahn-Banach 延拓定理：

   实线性空间：定义在实线性子空间 M 上面的线性泛函 $f_0 : f_0(x) \le g(x)$(次可加正齐次性泛函) 可以延拓到全空间 X，且延拓后的线性泛函 f 满足 $f(x) \le g(x)$

   复线性空间：定义在实线性子空间 M 上面的线性泛函 $f_0 : |f_0(x)| \le |g(x)|$(次可加正齐次性泛函) 可以延拓到全空间 X，且延拓后的线性泛函 f 满足 $|f(x)| \le |g(x)|$

   线性赋范空间：定义在实线性子空间 M 上面的线性泛函 f_0 可以延拓到全空间 X，且延拓后的线性泛函 f 满足 $||f|| = ||f_0||$，我们称 f 是 f_0 的保范线性延拓

2.1.4 Hahn-Banach 定理的拓展

一些推论

1. $\forall x_0 \in X : \exists f \in x^* : ||f|| = 1, f(x_0) = ||x_0||$。考虑子空间 $\mathrm{span}(x_0)$ 上的泛函 $f(\alpha x_0) = \alpha||x_0|| : ||f|| = 1, f(x_0) = ||x_0||$，将 f 延拓到 X 上即可。
2. $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 \ne x_2 \iff \forall f \in X^* : f(x_1) \ne f(x_2)$
3. $\forall x_1, x_2 \in X, x_1 = x_2 \iff \forall f \in X^* : f(x_1) = f(x_2)$
4. 共轭空间视角下的泛函定义 $||x|| = \sup\limits_{||f||\le 1, f\in X^*} |f(x)|$，将 x 视为 X^{**} 中的点，用算子范数的方式定义这个点的范数。

应用：最佳逼近元

1. 赋范线性空间 X 的闭线性子空间 E 关于某个点 x_0 的最佳逼近元存在 (记作 y) $\iff$ 存在 $f \in X^* : ||f|| = 1, f(x) = 0 \forall x \in E, f(x_0) = ||x_0 - y||$
2. 有限维子空间 E 关于某个点 x_0 的最佳逼近元存在

3. 严格凸的 Banach 空间中的闭凸集 E 关于某个点 x_0 的最佳逼近元存在且唯一
4. 线性赋范空间 X 的线性子空间 E 的有界线性泛函存在唯一的保范延拓 $\iff$ X^* 是严格凸的 (已经是一个 Banach 空间)

应用：凸集隔离定理

1. $E \subset X$ 是极大真子空间 $\iff \exists f \in X' : E = N(f)$ 这里只需要 f 是线性泛函即可。
2. 线性赋范空间中的凸子集 $A, B : A^o \neq \varnothing; A^o \bigcap B = \varnothing$；则存在 $f \in X^*, r \in \mathbb{R}$ 将 A, B 分离
3. 线性赋范空间中的凸子集 A, B：A 是紧集，B 是闭集；$A \bigcap B = \varnothing$；则存在 $f \in X^*, r_1, r_2 \in \mathbb{R}, r_1 < r_2$ 将 A, B 严格分离

2.2 习题 (偶数题)

问题. *12*：设 $C_0(\mathbb{R})$ 是在 $\mathbb{R}$ 上连续并且当 $|t| \to \infty$ 时 $x(t) \to 0$ 的函数全体，以上确界为范数。证明：若 F 是 $C_0(\mathbb{R})$ 上的正线性泛函，则 F 必为连续线性泛函。

证明. 反证法：如果 F 不是连续线性泛函，自然也不是有界线性泛函，那么存在一列 $\phi_n \in C_0(-\infty, \infty) : \phi_n(x) \geq 0, ||\phi_n|| \leq 1, F(\phi_n) > n^2$。定义函数 $\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n}{n^2} : ||\phi|| < \frac{\pi^2}{6}$

$$|F(\phi)| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F(\phi_n)}{n^2} > \sum_{n=1}^{N} \frac{F(\phi_n)}{n^2} \geq N$$

由于 N 的任意性。F 在 ϕ 处没有确切的定义，矛盾。

* 证明逻辑：反证从无界出发，构造一个函数使得 F 在此没有定义，从而得到矛盾。 □

问题. *14*：由定理 *2.1.5* 的证明知道对于算子序列 T_n，若 $\|T_n - T\| \to 0$，则 $\forall x \in X$，有 $\|T_n x - Tx\| \to 0$。此命题的逆不成立，试考虑算子序列

$$T_n : l^2 \to l^2, T_n(x_1, x_2, \cdots) = (x_1, x_2, \cdots, x_n, 0, \cdots)$$

证明. 设 T 为恒等映射，则 $||Tx - T_n x|| \to 0, \forall x \in l^2$。而对于任意的 n，我们均可取 $e_{m:m>n}$，则 $||Te_m - T_n e_m|| = 1$，从而 $||T - T_n|| \geq 1, \forall n$，从而 $||T - T_n|| \nrightarrow 0$ □

问题. *18*：设 $1 \leqslant p < \infty$，$\alpha(t)$ 是 $[a,b]$ 上的可测函数，使得 $\forall x(t) \in L^p$，积分 $\int_a^b x(t)\alpha(t)\,dt$ 存在，则 $\alpha(t) \in L^q$，其中 $p^{-1} + q^{-1} = 1$.

证明. 取一列简单函数 $\alpha_n(t)$ 逼近可测函数 $\alpha(t)$。记 $F_n(x)=\int_a^b x(t)\alpha_n(t)\,dt$ 则对于每个 $\alpha_n(t)$：依据 $H\ddot{o}lder$ 不等式，$|\int_a^b x(t)\alpha_n(t)\,dt| \le ||\alpha_n||_q||x||_p$，当且仅当 $x(t)=\alpha_n^{q-1}(t)$ 时取等。此时 $||F_n||=||\alpha_n||_q$。由单调收敛定理，$||\alpha||_q=\lim_{n\to\infty}||\alpha_n||_q$，又依 Banach-Steinhaus 定理，$\lim_{n\to\infty}||F_n||<\infty$，所以 $||\alpha||_q=\lim_{n\to\infty}||\alpha_n||_q=\lim_{n\to\infty}||F_n||<\infty$，得证。 □

问题. *22*：设 l_0^2 是 l^2 中至多有限多个坐标不为 *0* 的元素集合，以 l^2 中的范数为范数。令 $T:l_0^2\to l_0^2$，$T(x_1,x_2,\cdots)=(x_1,\frac{x_2}{2},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots)$，证明 T 是一一有界的线性算子，但 T^{-1} 不是有界的。将此与逆算子定理对照。

证明. 显然 T 是一一的有界线性算子 (略证)，但是 $T^{-1}=(x_1,\cdots,nx_n,\cdots)$。对于 $||e_n:T^{-1}(e_n)||=\sqrt{n}$，显然 T^{-1} 无界。之所以不再成立的原因是 l_0^2 不完备 □

问题. *24*：设 X,Y 是线性赋范空间*,* $T:X\to Y$ 是线性算子*,* 则 $G(T)$ 闭当且仅当 $\forall x_n\to 0$*,* $Tx_n\to y$ 时*,* $y=0$*. (*这一题的结论很重要，体现了线性背后的平移操作*)*

问题. *26*：若 $T:X\to Y$ 是闭算子 *(*注意，闭算子的定义不限于线性算子*),* 则

(1) $N(T)=\{x:Tx=0\}$ 是 X 的闭线性子空间*.*

(2) 若 T^{-1} 存在*,* 则 T^{-1} 是闭算子*.*

(3) T 将 X 中的紧集映射为 Y 中的闭集*.*

(4) Y 中的紧集的逆像是 X 中的闭集*.*

证明. (3) 考虑 X 中紧集 E 中的任意一个点列 x_n，则存在收敛子列 $x_{nk}:x_{nk}\to x\in E$。由于 T 是闭算子：$T(x_{nk})\to T(x)\in T(E)$，由点列的任意性可知，$T(E)$ 是闭集。

(4) 考虑 Y 中紧集 E 中的任意一个点列 y_n，则存在收敛子列 $y_{nk}:y_{nk}\to y\in E$。记 $y=T(x),x\in T^{-1}(E)$ 由于 T 是闭算子：存在 $T^{-1}(E)$ 中收敛点列 $x_n\to x:T(x_n)y_{nk}=\to T(x)=y$，由点列的任意性可知，$T^{-1}(E)$ 是闭集。 □

问题. *28*：设 X 是线性赋范空间，$E_1,E_2\subseteq X$ 是线性子空间*.*

(1) 若 $X=E_1+E_2$ 且 $E_1\cap E_2=\{0\}$，则存在 $T:E_2\to X/E_1$，T 是一一到上的线性映射*.*

(2) 进一步地，若 X 是 *Banach* 空间，$E_1,E_2\subseteq X$ 是闭子空间，则 T 是到上的并且 T,T^{-1} 连续*.*

证明. (1) 定义 $T:E_2\mapsto X/E_1, Tx=x+E_1$，容易验证这个算子是一一的，到上的。下面展示到上的验证：$\forall\bar{x}\in X/E_1$，总存在 $x:\bar{x}=x+E_1$；由于 $X=E_1\oplus E_2$，从而一定存在 $x'\in E_2:\bar{x}=x'+E_1$。因为 $x'-x\in E_1$，从而对任意 $y\in barx:y-x'=(y-x)-(x'-x)\in E_1, y\sim x'$。由此可知 x,x' 之间一一对应，T 是到上的。
(2) 首先，E_1,E_2 是完备的；由 (1) 知，T 是一一的、到上的，且可以验证 T 是有界的：$||Tx||=\inf\limits_{y\in\bar{x}}||y||\leq||x||$。至此，题目满足逆算子的条件。$T^{-1}$ 连续。 □

问题. *32*：*Hahn Banach* 极限：设 B 是有界实数序列的全体*:*

$$B=\{x=\{x_n\}:x_n\in\mathbb{R},\sup_{n\geq1}|x_n|<\infty\},\quad \|x\|=\sup_n|x_n|.$$

证明在 B 上存在有界线性泛函 f 使得*:*

$$(1)\varliminf_{n\to\infty}x_n\leqslant f(x)\leqslant\varlimsup_{n\to\infty}x_n,\quad\forall x=(x_n)\in B.$$
$$(2)\text{若}x=(x_n)\in c,\ \text{则}f(x)=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证明. 取有界线性泛函 $f(x)=\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n$ 即可验证。 □

问题. *36*：对于线性赋范空间 X，E 是极大真子空间，则 E 要么是闭集，要么是稠密子集。

证明. $E\subset X$ 是极大真子空间 $\iff\exists f\in X':E=N(f)$; 如果 E 是闭集，那么 $f\in X^*$ 且 E 非稠密子集。不然，E 就是稠密子集。(根据 E 是否是稠密子集进行区分) □

问题. *40*：设 X 是线性赋范空间，$f\in X^*$，$f\neq0$，$E=\{x:f(x)=c\}$，$c\neq0$，则 $||\mathbf{f}||\cdot d(0,E)=|c|$。

证明. 法 1：对于 $\forall y\in X$，则 $f(\frac{cy}{f(y)})=c:\frac{c}{f(y)}y\in E$。同时：$\frac{|f(y)|}{d(0,y)}=\frac{|f(cy/f(y))|}{d(0,cy/f(y))}$。所以根据 f 范数定义，得证。
(注意此时 E 是超平面，且是一个不稠密的闭子集；超平面的不可数并是 X，且超平面之间" 相互平行"，可以仅通过平移得到。因此，可以得到上面的类似于" 相似三角形" 的等比结论。) □

证明. 法 2：易证 $c \le ||f|| \cdot d$；至于不等式另一方面：定义 $E_0 = E - x_0, x_0 \in E$，则 $E_0 = N(f)$，是 X 的极大真子空间。从而，$X = \mathrm{span}\{E_0, x_0\} : \forall x \in X : x = \alpha x_0 + z, z \in E_0$。此时定义 $f_0(x) = \alpha d(0,E), |f_0(x)| = |\alpha| d(0,E) \le |\alpha| \cdot ||\frac{z}{\alpha} + x_0|| = ||x||$。所以 $||f_0|| \le 1$。又因为 $N(f) = N(f_0) \to f = \frac{c}{d} f_0$，所以 $||f|| \le \frac{|c|}{d(0,E)}$。 □

3 共轭空间与共轭算子

3.1 知识点速览

3.1.1 共轭空间的例子

常见空间的共轭空间和对应的线性泛函形式整理如下图

共轭空间	线性泛函的一般形式
$(\Phi^n)^* = \Phi^n$	$f(x) = a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n$
$(l^p)^* = l^q$	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$
$c_0^* = l^1$	$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$
$c^* = l^1$	$f(x) = \alpha \lim_{n\to\infty} x_n + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$
$(L^p)^* = L^q$	$f(x) = \int_a^b x(t)\alpha(t)\mathrm{d}t$
$C[a,b]^* = V_0[a,b]$	$f(x) = \int_a^b x(t)\mathrm{d}\alpha(t)$

这里 $1 \leqslant p < \infty, p^{-1} + q^{-1} = 1$.

3.1.2 共轭的复合：共轭空间上泛函 & 自然嵌入算子

1. 对于共轭空间 X^*，我们可以定义一簇有界线性泛函 $x^{**} : x^{**}(f) = f(x), \forall f \in X^*$ 由于 $||x^{**}|| = \sup_{||f|| \le 1} |f(x)|$ 根据前面 Hahn-Banach 定理的推论：$||x^{**}|| = ||x||$
2. 这时我们转向考虑 X 与 X^{**} 之间的关系，于是我们定义了自然嵌入算子 $J : Jx = x^{**}$ 其中 $x^{**} : x^{**}(f) = f(x), \forall f \in X^*$ 就是我们上面考虑的那一组泛函。
   (a) J 是 X 与 X^{**} 的一个线性子空间 ($\{x^{**}\}$ 全体) 的等距同构
   (b) $\overline{J(X)}$ 是 X 的完备化空间 (X^{**} 是 Banach 空间)
   (c) 对于空间 X 一个的认识：既可以是 X 一个点，也可以是 X^{**} 一个点 (作为 X^* 的泛函)

3.1.3 w 收敛/有界/序列闭/序列紧/序列完备；w^* 收敛

1. w-convergence : $\forall f \in X^*(x_n, f) \to (x, f)$
2. w-bounded $E : \forall f \in X^*, \exists M_f : (x, f) < M_f, \forall x \in E$
3. w-convergence $\underset{\text{显然}}{\overset{\text{存在凸组合}}{\rightleftharpoons}}$ s-convergence
4. w-convergence $\overset{\dim\leq\infty}{\iff}$ s-convergence $\overset{\dim\leq\infty}{\iff}$ 按坐标收敛
5. w-bounded $\iff$ s-bounded
6. $x_n \overset{w}{\to} x \iff \{x_n\}s\text{-bounded} \ \&\ \exists\, G \subset X^* : \overline{\operatorname{span}(G)} = X^*; \forall f \in G : f(x_n) \to f(x)$
7. A s-closed $\overset{\text{concavity}}{\iff}$ A w-series closed (凸集分离定理)
8. w-serial compact : 任意点列存在w-收敛子列
9. w-serial complete : 任意w-Cauchy序列都是$w-$
10. w^*-convergence : $\forall x \in X : (x, f_n) \to (x, f)$ (逐点收敛)

3.1.4 共轭算子

给定 $T : X \mapsto Y$ 定义 $T^* : Y^* \mapsto X^* : (Tx, y^*) = (x, T^*y^*), \forall x \in X, y^* \in Y^*$ 为共轭算子。可以证明它的存在是普遍的、唯一的、保范的，它是线性代数中转置矩阵的推广。

而对于共轭算子的共轭算子 $T^{**} : X^{**} \mapsto Y^{**}$。它是 T 的保范线性延拓。

$$(y^*, A^{**}x) = (y^*, A^{**}x^{**}) = (A^*y^*, x^{**}) = (A^*y^*, x) = (y^*, Ax), \forall y \in Y^*, x \in X$$

3.1.5 紧算子、有限秩算子

1. 顾名思义,紧算子就是将有界集映为相对紧集的线性算子;有限秩算子就是 $\dim T(x) < \infty$ 的线性算子
2. 基于第一章，我们可以得到：
   (a) 紧算子全体 $C(X, Y)$ 是 $B(X, Y)$ 的线性子空间;当 Y 是 Banach 空间时,$C(X, Y)$ 是闭子空间，从而也是 Banach 空间。
   (b) 有界的有限秩算子是紧算子，因为有限维空间中，范数有界集等价于相对紧集。
3. 与共轭算子联动可以得到：紧算子的共轭算子也是紧算子。
4. 紧算子的强大之处：将弱收敛序列映射为强收敛
5. 对于有 Schauder 基的 Banach 空间，紧算子可以表示为一列有限秩算子的极限。

3.2 习题

问题. *4*：证明泛函序列 $f_n(x) = \int_{-\pi}^{\pi} x(t)e^{int}\,dt$ 在 $L^2[-\pi,\pi]$ 上弱收敛于 *0*。

问题. *5*：设 X 是线性赋范空间，X^* 是 X 的共轭空间，$x_n, x \in X$，$f_n, f \in X^*$。若 $x_n \xrightarrow{w} x$，$f_n \xrightarrow{s} f$，则 $f_n(x_n) \to f(x)$。举例说明，当二者皆为弱收敛时结论不必成立。

证明. 因为 $|f_n(x_n) - f(x)| \le |f_n(x_n) - f_n(x)| + |f(x) - f_n(x)| \le 2\varepsilon$，前者由于 $x_n \to x$，后者因为 $f_n \xrightarrow{w} f$。
反例：设 $X = c_0 : X^* = l^1$，取 $x_n = e_n$，则 $x_n \xrightarrow{w} x := 0$；取 $f_n = (1,1,1,\cdots 0 \cdots) \xrightarrow{w} f := (1,1,1,\cdots 1 \cdots)$ 。此时 $f_n(x_n) = 1, f(x) = 0$，矛盾。 □

问题. *6*：若 $T \in B(X,Y), x_n, x \in X, x_n \xrightarrow{w} x$，则 $Tx_n \xrightarrow{w} Tx$

证明. $\forall g \in Y^* : (Tx, g) = (x, T^*g)$，由于 $T^*g \in X^*, x_n \xrightarrow{w} x$。所以 $(Tx_n, g) \to (Tx, g), \forall g \in Y^*$。 □

问题. *7*：验证泛函序列 $g_n(x) = \int_0^1 x(t)t^n\,dt$ 在 $\mathscr{L}^\infty[0,1]$ 上 w^* 收敛于 *0*

证明. 根据 *Hölder* 不等式可以直接得出。 □

问题. *8*：X 是 *Banach* 空间，则它的共轭空间 X^* 中的 w^* 有界集是范数有界集。

证明. w^* 有界集 E：$\forall x \in X, f \in E : f(x) < \infty \to E$ 是一族在第二刚集 X 上点点有界的有界线性泛函。从而依据共鸣定理，E 范数有界。 □

问题. *9*：利用开映射定理证明：若 X 是 *Banach* 空间，$J : X \to X^{**}$ 是自然嵌入算子，并且 X 不是自反的，则 $J(X)$ 在 X^{**} 中是第一纲集。

证明. 反证：如果 $J(X)$ 是第二纲集，那么根据开映射定理，J 是到上的，从而是自反的，矛盾。
* 开映射定理：Banach 空间 X 到线性赋范空间 Y 的有界线性算子 T，如果像集 $R(T)$ 是第二纲集，则 T 是开算子且满射；Banach 空间 X 到 Banach 空间 Y 上的有界线性算子 T 是开算子
* 逆算子定理：Banach 空间 X 到线性赋范空间 Y 的一一的有界线性算子 T，如果像集 $R(T)$ 是第二纲集，则 T^{-1} 是线性赋范空间 Y 到 Banach 空间 X 的有界线性算子，且 Y 是 Banach 空间 □

问题. *10*：证明弱下半连续泛函是下半连续的，每个范数都是弱下半连续的

证明. 弱下半连续泛函 $f:\forall x, x_n \xrightarrow{w} x, \varliminf_{n\to\infty} f(x_n) \geq f(x)$。因为范数收敛强于若收敛，弱下半连续是下半连续的充分条件；同时，范数是连续的泛函，自然是弱下半连续泛函。 □

问题. *11*：设 $\{x_n\}$ 是 $C[a,b]$ 中的有界序列，若 $\forall t \in [a,b]$，$x_n(t) \to x(t)$，则存在 $\{x_n\}$ 的凸组合的序列在 $[a,b]$ 上一致收敛于 x。

证明. 根据例 3.2.4 和定理 3.2.5 即可得出结论 □

问题. *12*：设 $1 \leqslant p < \infty$，$\{x_n\}$ 是 l^p 中的一列元素，则存在 $\{x_n\}$ 的线性组合的序列以范数收敛于 x_0 当且仅当 $\forall f \in (l^p)^*$，$f(x_n) = 0$ 时，$f(x_0) = 0$。

证明. □

问题. *13*：证明空间 c_0 不是弱序列完备的空间。

证明. 举反例:考虑 $x_n = (1,1,1,\cdots,1,0,0,\cdots)$,则 x_n 是弱柯西列,但 $x_n \xrightarrow{w} (1,1,1,\cdots 1\cdots) \notin c_0$。所以 c_0 不是弱序列完备的空间。 □

问题. *15*：证明 l^2 的闭单位球面 $S_p(l^2)$ 是范数闭集但不是弱序列闭集。

证明. 由范数的连续性可以得出 $S_p(l^2)$ 是一个范数闭集；下面举反例证明 $S_p(l^2)$ 不是弱序列闭集：取 $x_n = e_n$，则 $e_n \xrightarrow{w} 0 \notin S_p(l^2)$，极限定义在 $S_p(l^2)$ 外了。 □

问题. *16*：设有 $T: l^p \to l^q$ *(*$1 < p < \infty$*)*，$T(x_1, x_2, \cdots) = (0, x_1, x_2, \cdots)$，试求 T 的共轭算子 T^*。

证明. 记 l^p 上有界线性泛函的一般形式为 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$。以共轭算子定义:$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{n+1} x_n = (Tx, f) = (x, T^* f) = \sum_{n=1}^{\infty} (T^* \alpha_n) x_n$ 。所以 $T^* \alpha_n = \alpha_{n+1}$。 □

问题. *18*：设 $1 < p < \infty$，证明线性算子

$$T: l^p \to l^p, \quad (x_1, x_2, \cdots) \to (x_1, \frac{x_2}{2}, \frac{x_3}{3}, \cdots)$$

是紧算子。

证明. 考虑算子序列 $T_n(x)=(x_1,\frac{x_2}{2},\frac{x_3}{3},\cdots,\frac{x_n}{n},\cdots)$。则 T_n 是有界的有限秩算子，而且：$||Tx-T_nx||=\left(\sum_{i=n}^{\infty}|\frac{x_i}{i}^p|\right)^{\frac{1}{p}}\to 0,\forall x\in X$，所以 $T_n\to T$。又因为 $C(l^p,l^p)$ 是 Banach 空间，所以 T 是紧算子。 □

问题. *19*：证明 $T:C[0,1]\mapsto C[0,1],Tx(t)=\int_0^t x(\tau)\,d\tau$ 是紧算子，而 $Sx(t)=tx(t)$ 不是紧算子

证明. 对于 T，根据 Arzela-Ascoli 定理，可以证明 $T(A:\text{C[0,1] 中的有界集})$ 是紧集，从而 T 是紧算子。下面证明 $T(A)$ 是等度连续的。首先对于每一个 $T(x)$，由积分的绝对连续性可知其一致连续。给定 $\varepsilon>0$，存在 $\delta:\forall Tx(t)\in A$，只要 $|t_1-t_2|<delta$，就有 $|Tx(t_1)-T(x_t2)|<\varepsilon$，从而可以证明其等度连续。

对于 S， □

问题. *20*：X 是线性赋范空间，Y 是 *Banach* 空间，$T\in B(X,Y)$。证明：若 T^* 是紧算子，那么 T 也是

证明. 如果 T^* 是紧算子，那么 $T^{**}:X^{**}\mapsto Y^{**}$ 也是紧算子。同时，因为 $Y\subset Y^{**}$ 是 Banach 空间，Y 是 Y^{**} 的闭子空间, 所以 $Y\subset Y^{**}$ 上的点列在 Y 上定义。考虑有界的点列 $x_n^{**}\in X\subset X^{**}$，记自然嵌入算子 J: 则 $T^{**}(x_n^{**})=T^{**}J(x_n)=JT(x_n)=(T(x_n))^{**}$，所以 $T(X_n)\in Y\subset Y^{**}$。根据 T^{**} 紧算子性质，$T(X_n)$ 存在收敛子列，所以 T 是紧算子。(这个题是定理 3.3.5 的逆命题，但是二者不等价，欲使逆命题成立需要加强 Y 是 Banach 空间) □

问题. *21*：设 X 是 *Banach* 空间，$\dim X<\infty$. $T:X\to X$ 是紧算子，则 T 是一一的就不可能是到上的。

证明. 反证：假设 T 是一一且到上的。那么根据逆算子定理：T 是 X 与 X 之间的同构映射。所以 $\dim(T(X))=\infty$，从而 $T(A:\text{X 中的有界集})$ 就不再是相对紧集，矛盾。 □

问题. *22*：设 X 是线性赋范空间，$T\in B(X)$，T 紧并且 $T^2=T$，则 $\dim T(X)<\infty$。

证明. 考虑 $T|_{T(X)}$，则 $T|_{T(X)}(x:=T(u))=TT(u)=T(u)=x$，所以 $T|_{T(X)}$ 是恒等算子。又因为 T 是紧算子，根据 T 连续性，$T|_{\overline{T(X)}}$ 是恒等算子；从而 $\overline{T(X)}$ 中的有界集就是相对紧集，$\dim T(X)<\infty$。 □

(上面两个题用到了一个第一章的重要结论：有限维空间的等价条件是有界集是相对紧的)

4 Hilbert 空间的几何学

4.1 知识点速览

下面 H 若无明确指代，则指内积空间

4.1.1 正交集、正交基

1. 对于 H 中的标准正交集 $\{e_n\}$：以下是必要条件
   (a) $\forall x \in X$：Bessel 不等式成立
   (b) 数集 $\{(x, e_n)\}$ 至多有可数多个非零元，不然就无限大了
   (c) $(x, e_n) \to 0 \forall x \in X \iff e_n \xrightarrow{w} 0$(剧透一下 Riesz 表示定理)
2. 对于 H 中的标准正交集 $\{e_n\}$：以下命题等价
   (a) $x \in \overline{\text{span}}(e_n)$
   (b) $x = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)e_n$，即可以进行 Fourier 展开
   (c) $\forall x \in \overline{\text{span}}(e_n)$，Parseval 等式成立，即 Bessel 不等式取等
3. Riesz-Fischer：对于 Hilbert 空间的标准正交集 $\{e_n\}$, 对于任意 $\alpha \in l^2$：存在 $x \in \overline{\text{span}}(e_n) : x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n e_n, \alpha_n = (x_n, e_n)$
4. 对于 Hilbert 空间 H 中的标准正交集 E：以下命题等价
   (a) E 是正交基
   (b) $\overline{\text{span}}(E) = H$
   (c) $\forall x \in H$ 可以进行 Fourier 展开
   (d) E 是完备正交集 ($\forall x \in H$，Parseval 等式成立)
   (e) $\forall x, y \in H : (x, y) = \sum_{n=1}^{\infty}(x, e_n)\overline{(y, e_n)}$
   (f) E 是完全正交集 ($x \perp E \to x = 0$)

4.1.2 Hilbert 空间的结构

如果 Hilbert 空间 H 的正交基 $\{e_n\}$ 是可数的，那么它是可分的；如果 $\{e_n\}$ 个数有限，则 Hilbert 空间 H 等距同构于 Φ^n；如果 $\{e_n\}$ 个数可数无限，则 Hilbert 空间 H 等距同构于 l^2。

4.1.3 内积空间中的点在线性子空间/凸子集上的投影

1. 投影的定义基于正交分解：给定线性子空间 E，点 x 可以做如下分解：$x = y + z, y \in E, z \perp E$。我们称 $y = P_E x$ 为 x 关于 E 的正交投影。
2. 投影点 y 就是子空间 E 关于点 x 的最佳逼近元。
3. 如果 E 是闭子空间，H 是 Hilbert 空间，则 $\forall x \in H$，$P_E x$(最佳逼近元) 存在且唯一。

4.1.4 Hilbert 空间中的投影算子

投影算子 $P_E : H(\text{Hilbert}) \mapsto E(\text{closed linear subspace})$

1. P_E 是线性算子
2. $||P_E|| = 1 \iff E \neq \varnothing$
3. $E = R(P_E) = N(I - P_E), N(P) = R(I - P_E)$

对于 Hilbert 空间 H 的子空间 E，我们可以定义 $E^\perp$ 为正交于 E 的元素全体。

1. $E^\perp$ 是 H 的闭线性子空间
2. 如果 E 是闭集，$E^{\perp\perp} = E$；$H = E \oplus E^\perp$，此时称 $E^\perp$ 是 E 的正交补。

投影算子之间的关系

1. 定义 $P_E \leq P_F \iff E \subset F$，它等价于以下条件：
   (a) $||P_E x|| \leq ||P_F x||, \forall x \in H$
   (b) $P_E P_F = P_F P_E = P_E$
   (c) $P_F - P_E$ 是投影算子
2. 如果 $E \perp F$，则以下条件等价：
   (a) $R(P_E) \perp R(P_F)$
   (b) $P_E P_F = 0$
   (c) $P_F + P_E$ 是投影算子
3. 一列点点收敛的投影算子的极限是投影算子
4. 两两正交的投影算子的和点点收敛于一个投影算子
5. 一列递升的投影算子 P_{E_n} 点点收敛于一个投影算子 $P_E : E = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$

4.1.5 Hilbert 空间中的伴随算子和自伴算子

1. 伴随算子：$(Tx, y) = (x, T^*y)$，此处是内积，而非泛函作用；作为线性代数中共轭转置矩阵的推广。
2. 自伴算子：$T^* = T : (Tx, y) = (x, Ty)$
3. 投影算子的充要条件:幂等的自伴算子;幂等算子且 $N(P) \perp R(P)$;复空间内:$(Px, x) = ||Px||^2, \forall x \in H$
4. $N(T) = R(T^*)^\perp; N(T^*) = R(T)^\perp; \overline{R(T)} = N(T^*)^\perp; \overline{R(T^*)} = N(T)^\perp$

4.1.6 Hilbert 空间 H 的共轭空间：Riesz 表示定理

$$\forall f \in H^*, \exists y \in H : f(x) = (x, y), ||f|| = ||y||$$

1. 从集合论来看，$H^* = H$, 从而 H 是自反空间
2. 为了保证泛函关于 x 的线性，只能将 y 放在后面。
3. 记 $T : H^* \mapsto H : T(f) = y$，则 T 是共轭线性的：
   $T(af_1 + bf_2)(x) = af_1(x) + bf_2(x) = a(x, y_1) + b(x, y_2) = (x, \bar{a}y_1 + \bar{b}y_2)$
4. $(Tf, Tg) = \overline{(f, g)} = (g, f)$

4.1.7 一 • 五线性泛函 (广义内积) 的表现

对于定义在 $H(\text{Hilbert}) \times H(\text{Hilbert}) \mapsto \Phi$ 的映射 ϕ：

1. 所谓的一 • 五线性就是满足以下条件：
   (a) $\phi(ax + by, z) = a\phi(x, z) + b\phi(y, z)$
   (b) $\phi(z, ax + by) = \bar{a}\phi(z, x) + \bar{b}\phi(z, y)$
2. 称 ϕ 是对称的 $\iff \phi(x, y) = \overline{\phi(y, x)}$
3. 称 ϕ 是有界的 $\iff |\phi(x, y)| \leq C||x||\,||y||$,此时定义算子范数 $||\phi|| = \sup\limits_{||x||,||y|| \leq 1} |\phi(x, y)|$
4. 在 Hilbert 空间 H 中，ϕ 是有界的一 • 五线性泛函 $\iff$ 存在 $T \in T(H) : \phi(x, y) = (Tx, y), ||\phi|| = ||T||$
5. 在 Hilbert 空间 H 中，$A \in B(H)$ 是自伴算子 $\iff$ 一 • 五线性泛函 $\phi(x, y) = (Ax, y)$ 是对称的；若 $\Phi = \mathbb{C}$，则还等价于 $\phi(x, x) = (Ax, x) \in \mathbb{R}$

4.1.8 Hilbert 空间上几个特殊的算子：酉算子、正规算子

1. 定义酉算子：$TT^* = T^*T = I$: 单位算子 $\iff (Tx, Ty) = (x, y)\,\forall x, y \in H$
2. 定义正规算子：$TT^* = T^*T \iff ||Tx|| = ||T^*x||\forall x \in H$
3. T 是正规算子 $\iff T = T_1 + iT_2, T_1T_2 = T_2T_2; T_1, T_2$是自伴算子
4. 正规算子的 (依范数收敛的) 极限也是正规算子

4.2 习题 (偶数题)

问题. *2*：设 H 是内积空间，$x, y_i \in H(i \geq 1)$，证明：

(1) $x \perp \overline{span}\{y_i : i \geq 1\} \iff x \perp y_i(i \geq 1)$

(2) $x \perp \overline{co}\{y_i : i \geq 1\} \iff x \perp y_i(i \geq 1)$

问题. *4*：设 H 是 *Hilbert* 空间，$\{x_n\}$ 是规范正交集。证明以下三条等价：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ 收敛 *(2)* $\forall y \in H, \sum_{n=1}^{\infty}(x_n, y)$ 收敛 *(3)* $\sum_{n=1}^{\infty} ||x_n||^2$ 收敛

证明. (1) $\Rightarrow$ (2)：设 $x := \sum_{n=1}^{\infty} x_n$，则对于 $\forall y \in H : \sum_{n=1}^{N}(x_n, y) = (\sum_{n=1}^{N} x_n, y) \to (\sum_{n=1}^{\infty} x_n, y) = (x, y)$

(2) $\Rightarrow$ (3)：由 (2) 知，$\forall y \in H, (x_n, y) \to 0$，所以 $x_n \to 0$，$||x_n||^2 \to 0$。所以 $\sum_{n=1}^{N} ||x_n||^2$ 收敛

(3) $\Rightarrow$ (1)：由 (3) 知，$\{\sum_{n=1}^{N} x_n\}$ 是柯西列，由于 H 是 Hilbert 空间，$\{\sum_{n=1}^{N} x_n\}$ 收敛 □

问题. *12*：设 $f \in \mathscr{L}^2[a, b]$*(实空间)*，若 $\int_a^b f(t)t^n\,dt = 0, n \geq 0$，则 $f(t) = 0, a.e.$

证明. 由题目知 $f \perp$ {实多项式全体}，而实多项式全体在 $C[a, b]$ 上面稠密，$C[a, b]$ 在 $\mathscr{L}^2[a, b]$ 上面稠密. 所以 $f \perp y, \forall y \in \mathscr{L}^2[a, b]$。从而 $f = 0$, a.e.。($\mathscr{L}^2[a, b]$ 将几乎处处相等的两个函数视为同一个点) □

问题. *14*：举例说明当 H 不是完备内积空间时，定理 *4.1.6* 的 *(4)(6)* 不等价

问题. *16*：若 $E \subset H$ 是线性子空间，且 $\forall x \in X$，x 在 E 上的投影存在，则 E 是闭的

证明. 设有 E 中点列 $x_n \to x_0$，下证 $x_0 \in E$。记 x_0 关于 E 的正交分解为 $x_0 = y + z, y \in E, z \perp E$，从而 $z \perp x_n$。$0 = \lim_{n\to\infty}(x_n, z) = (x_0, z) = ||z|| = 0$，所以 $z = 0$，从而 $x_0 \in E$ □

问题. *18*：若 P_1, P_2 是投影算子，则 P_1P_2 是投影算子 $\iff$ $P_1P_2 = P_2P_1$

证明. 只需验证 P_1P_2 是幂等、自伴算子 □

* 下面的 H 均为复 Hilbert 空间。

问题. *20*：设 P_n 是 H 上的投影算子序列，并且 $P_n \leq P_{n+1}$，证明存在投影算子 P，使得 $P_n \to P$ 是逐点收敛

证明. 法 1：记 E_n 为 P_n 对应的闭线性子空间：$P_n \leq P_{n+1} \iff E_n \subset E_{n+1}$，此时根据定理 4.2.7(2)：取 $P = P_E, E = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n}$，则 $P_n \to P$ 是逐点收敛。
法 2：$\forall x \in H$，$||P_n(x)||$ 是单调递升有上界 (Bessel 不等式) 的数列，所以存在极限，记为 $||Px||$。所以 $P_n \to P$ 是逐点收敛；依据引理 4.2.1：P 是投影算子。 □

问题. *22*：设 $E \subset H$ 是闭凸集，$x \in H$，为了 x_0 是 x 关于 E 的最佳逼近元，必须并且只须

$$Re(x - x_0, y - x_0) \leq 0, \quad \forall y \in E.$$

问题. *24*：设 $A \in B(H)$，证明 $A + A* = 0 \iff Re(Ax, x) = 0, \forall x \in H$

证明. $\Rightarrow$：$A + A* = 0 \Rightarrow (Ax, x) = -(x, Ax) = -\overline{(Ax, x)}, \forall x \in H$，从而:
$\mathrm{Re}(Ax, x) = 0, \forall x \in H$
$\Leftarrow$：$\forall x \in H : ((A + A^*)x, x) = (Ax, x) + (x, Ax) = 2\mathrm{Re}(Ax, x) = 0$，从而
$A + A^* = 0$ □

问题. *26*：证明 $T : \mathscr{L}^2[a, b] \mapsto \mathscr{L}^2[a, b], Tx(t) = tx(t)$ 是自伴算子

证明. 直接按照定义验证即可 □

问题. *28*：设 $\{e_n, n \geq 1\}$ 是 H 中的规范正交集，$\lambda_n \in \Phi$，定义 $T : H \to H$，$T(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(x, e_n)e_n$。证明若 λ_n 是有界数列，则 $T \in B(H)$，T 是自伴算子当且仅当 λ_n 是实数。

证明. 有界算子的证明依据 Bessel 不等式即可。
至于自伴算子的证明：
$(x, Ty) = (x, \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n(y, e_n)e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n(y, e_n)}(x, e_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \overline{\lambda_n}(e_n, y)(x, e_n)$

$(Tx,y)=(\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)e_n,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n(x,e_n)(e_n,y)$

所以二者相等当且仅当 $\lambda=\overline{\lambda} \iff \lambda\in\mathbb{R}$ $\square$

问题. *30*：证明 $T:\mathscr{L}^2[0,\infty)\mapsto\mathscr{L}^2[0,\infty),Tx(t)=x(t+a)$ 是酉算子

证明. 先将伴随算子按定义求出来，然后按定义验证 T 是酉算子即可 $\square$

问题. *32*：设 T 是 H 上面的紧算子，$\{e_n\}$ 是规范正交集，则 $Te_n\to 0$ *(*用弱收敛证明*)*

证明. 由 Riesz 表示定理 $\forall f\in H^*:\exists y\in H:f(x)=(x,y)$；由第四题：$\forall y\in H:(e_n,y)\to 0:e_n\overset{w}{\to}0$ 又因为 T 是紧算子，所以 $T(e_n)\to 0$。(定理 3.3.6：紧算子将若收敛点列映为强收敛点列) $\square$

问题. *34*：设 U 是酉算子，则当 T 分别是投影算子、自伴算子、酉算子、正规算子时，$U^{-1}TU$ 也是

证明. 按定义逐个验证即可 $\square$