随机过程

Drowm Genius　Drowm Genius　Drowm Genius

时齐马氏链闲聊

⭐递推思想:小步向前/向后

利用全概率公式/条件期望嵌套,考虑马氏链的一步转移，从而利用时齐马氏链的良好性质得到想要研究的事件的概率/期望值的递推表达式。

ta的具体形式取决于时期的假设：离散时间——差分方程；连续时间——微分方程

⭐时间上的分划

离散时间离散状态马氏链

默认：此处概率向量都是行向量，向量函数都是列向量，运算顺序从左向右;我们这里默认时齐性成立

马尔可夫性

设初始概率向量是$\boldsymbol{\mu}$, 转移概率矩阵是$\mathbf{P}$，马尔可夫性指的是：
$P(X_n|X_{n-1},\cdots,X_0)) = P(X_n|X_{n-1}) = P(X_1|X_0)$

- 基于马氏性可以推导出联合概率：
  $P(X_0=i_0,\cdots,X_n=i_n) = \mu_{i_0}P_{(i_0,i_1)}\cdots P_{(i_{n-1},i_n)}$
- 基于马氏性可以推导出两步转移概率：
  $$\begin{aligned}P(X_{n+2}=j|X_n=k) &= \sum_i P(X_{n+2}=j|X_{n+1}=i,X_n=k)P(X_{n+1}=i|X_n=k)\\ &= \sum_i P(X_1=j|X_0=i)P(X_1=i|X_0=k)\\ &= P_{(,j)}P_{(k,)}\\ &= P^2_{(k,j)}\end{aligned}$$
- 进而我们可以归纳出m步转移概率：$P(X_{n+m}=j|X_n=k) = P^m_{(k,j)}$
- 从向量角度考虑，给定$\boldsymbol{\mu}$，每一步转移实质上就是在对$\boldsymbol{\mu}$右乘以概率矩阵$\mathbf{P}$，而转移m步即是一步转移的m次复合$\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\cdot\mathbf{P}\cdots\mathbf{P}=\mathbf{P^m}$

- 函数值的期望，假设f是一个列向量，$f(X)$是一个数
  $E(f(X_n)|X_0=i_0)=\sum_j P^n_{(i_0,j)}f(j)=(P^nf)_{(i),n\times 1}$
  $E(f(X_n))=E(E(f(X_n)|X_0=i_0))=\sum_i \mu_i P^n f=(\mu P^n f)_{1\times 1}$

离散时间下的C-K方程(本质上是全概率公式)

基于上述关于m步转移概率的推导和马尔可夫性，我们很容易可以得到C-K方程：$P^{m+n}_{i,j}=\sum_k P^m_{i,k}P^n_{k,j}$ 其矩阵表述就是$\mathbf{P}^{m+n}=\mathbf{P}^m\mathbf{P}^n$

$$\begin{aligned}P(X_{m+n+k}=i|X_k=j)&=\sum_q P(X_{m+n+k}=i|X_k=j,X_{n+k}=q)P(X_{n+k}=q|X_k=j)\\&=\sum_q P(X_m=i|X_0=q)P(X_n=q|X_0=j)\end{aligned}$$

概率矩阵的一些性质(digression)

如果$\mathbf{P}$有一重特征值1:记$\mathbf{P}=\mathbf{Q^{-1}AQ}$，其中$\mathbf{A}$是对角阵

- 特征值1对应的特征向量是$(1,1,\cdots,1)'$
  因为$\mathbf{P}$的每一行的和是1，$\mathbf{I-P}$的每一行的和是0，从而
  $\mathbf{(I-P)(1,1,\cdots,1)'=0}$
- $\mathbf{Q^{-1}}$中向量$(1,1,\cdots,1)'$对应的那个行向量$\boldsymbol{\pi}$的各元素和为1
  利用伴随矩阵可以知道，这一行各个元素是向量$(1,1,\cdots,1)'$各个元素对应的代数余子式除以行列式的值，依据行列式按列分解的算法可知这个行向量的各元素和为1(分子求和就是行列式的值)
  进一步假设$\mathbf{P}$的其他特征值的绝对值小于1，那么
  $\lim_{n\to\infty}\mathbf{P^n}=\lim_{n\to\infty}\mathbf{Q^{-1}A^nQ}$此时$\mathbf{A}$只剩下对角线上的一个非零值:1，从而$\lim_{n\to\infty}\mathbf{A^nQ}$只有一行全是1，其余皆0，$\lim_{n\to\infty}\mathbf{Q^{-1}A^nQ}$每一行都是$\mathbf{Q^{-1}}$中向量$(1,1,\cdots,1)'$对应的那个行向量$\boldsymbol{\pi}$此时对任一初始概率$\boldsymbol{\mu}$，$\lim_{n\to\infty}\boldsymbol{\mu}\mathbf{P^n}=\boldsymbol{\pi}$。这就是一个马尔可夫过程稳定的极限分布

状态分析

从返回情况分类

在这里，我们是从时间维度延展的，我们一般假设起点是确定的，也就是从一个概率分布类似于$(0,\cdots,1,0)$的随机变量出发，去分析这个随机变量在若干步转移过程中体现的特征，对此我们浓缩为两个问题：

1. 到底会不会返回初始状态？如果返回，那么返回的期望次数是多少？
2. 返回一次所用的阶段数全体构成的集合有什么特征？

3. 不同状态之间的返回情况有什么关系吗？

对于第一个问题，我们先定义了一系列r. v.：

$$
\begin{aligned}
& def: \\
& \qquad \tau_j = \inf_{n\geq 1}\{X_n = j\} \quad \text{首次返回}j\text{的时间} \\
& \qquad f_{ij} = P(\tau_j < \infty | X_0 = i) \quad \text{从}i\text{出发，终究能返回的概率}
\end{aligned}
$$

1. 至此，我们可以用概率的形式描述上面两个问题并对状态进行分类：
   1. $f_{ii} < 1 \text{ or } f_{ii} = 1$
      前者定义为“**非常返/暂留**” 后者定义为“**常返**”
   2. $E(\tau_j | X_0 = j) < \infty \text{ or } E(\tau_j | X_0 = j) = \infty$
      前者定义为“**正常返**” 后者定义为“**零常返**”
2. 而对于第二个问题，我们可以定义集合$D = \{d : P_{ii}^d > 0\}$ 并进一步定义$d = gcd(D)$作为这个**状态的周期**
3. 而当我们考虑多个状态之间的关系的时候，我们首先看它们之间是否是**互通的**，即存在互通路径：$\exists (m,n) : P_{ij}^m P_{ji}^n > 0$
   互通关系可以视为一个等价关系，因为ta满足“自反性、传递性、对称性”，从而存在互通关系的状态全体构成了一个互通(等价)类
   可以证明互通类内部各个状态的周期、常返性是一致的
   如果所有状态都是互通的，我们称这个过程是**不可约**的

常返的判定(1)

一方面我们可以将f_{ii}分划：

$$
f_{ii} = P(\tau_i < \infty | X_0 = i) = \sum_{t=1}^{\infty} P(\tau_i = t | X_0 = i) = \sum_{t=1}^{\infty} f_{ii}^{(t)}
$$

另一方面，我们考虑r. v. N_i表示从i出发，返回i的总次数, 它的期望是：

$$
E(N_i | X_0 = i) = E(\sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_t = i}(t)) = \sum_{t=0}^{\infty} P_{ii}^t = \sum_{t=1}^{\infty} P_{ii}^t + 1
$$

除此，我们还可以把P_{ii}^t进行分划：$P_{ii}^t = \sum_{k=0}^{t} f_i^{(k)} P_{ii}^{t-k}$ 带入$E(N_i)$得：

$$
\begin{aligned}
E(N_i) = E(\sum_{t=0}^{\infty} \mathbb{1}_{X_t=i}(t)) &= 1 + \sum_{t=1}^{\infty} P_{ii}^t \\
&= 1 + \sum_{t=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{t} f_i^{(k)} P_{ii}^{t-k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{t=k}^{\infty} f_i^{(k)} P_{ii}^{t-k} \\
&= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_i^{(k)} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} P_{ii}^l \\
&= 1 + f_{ii} E(N_i) \\
&\to E(N_i) = \frac{1}{1-f_{ii}} = \sum_{i=0}^{\infty} i f_{ii}^i (1-f_{ii})
\end{aligned}
$$

最后一行给出了另外一种视角：视f_{ii}为常数, 则一个从i出发，返回次数为n的过程可以分划为：先返回n次，最后再也不返回，从而得到最后一个式子

常返的判定(2)

这时我们利用全概率公式看一看经过一步转移后f_{ii}变成了什么样：

$$
\begin{aligned}
f_{ii} = P(\tau_j < \infty | X_0 = i) &= \sum_j P(\tau_i < \infty | X_1 = j, X_0 = i) P(X_1 = j | X_0 = i) \\
&= \sum_j P(\tau_i < \infty | X_1 = j) P_{ij} \\
&= \sum_j P(\tau_i < \infty | X_0 = j) P_{ij}
\end{aligned}
$$

考虑向量$\mathbf{f} = (f_{1i} \cdots f_{ii} \cdots)'$则可以得到一个线性方程组：$\mathbf{f} = \mathbf{P}\mathbf{f}$ 从而可解f_{ii}
如果状态空间是可数无穷的，那么依靠以下充要条件可以判别：
如果上述方程组的**任意非负有界解是常数**，那么状态i常返
如果上述方程组存在非负、非常数、有界解，那么状态i非常返

正常返的判定

这里给出一个浅显、直觉的描述，因为严格的数学证明很复杂：
我们的目标是判断从i出发，**首次返回的期望**时间$E(\tau_j|X_0=j)$的大小。加入我们把眼光放长远一些，考虑从i出发，**k次返回的期望**时间的大小。依据时齐马尔可夫性，这个值可以视为k个首次返回的独立和，从而ta的大小就是$kE(\tau_j|X_0=j)$，这意味着$kE(\tau_j|X_0=j)$时间内访问了k次状态i，即有$\frac{1}{E(\tau_j|X_0=j)}$比例的时间是在状态$j$的

假如若干步转移后，存在一个极限分布$\bar{\pi}$, 那么：
$k=E(N_j|X_0=j)=E(\sum_{t=0}^{\infty}\mathbb{1}_{X_t=j}(t))=lim_{n\to\infty}\sum_{t=0}^{n}P_{jj}^t\sim lim_{n\to\infty}n\bar{\pi}_j$
这个式子表示在n步转移中，有$\bar{\pi}_j$比例的时间是在状态j的

令$n=kE(\tau_j|X_0=j)$, 可以得到:$E(\tau_j|X_0=j)=\frac{1}{\bar{\pi}_j}$ （时空不同视角）
判别定理：对于不可约马氏链，以下条件等价

1. 这个马氏链是正常返的
2. 存在唯一不变分布$\bar{\pi}:\bar{\pi}=\bar{\pi}\mathbf{P}$
   如果这个马氏链还是非周期的，那么还与以下条件等价：
3. $lim_{n\to\infty}P_{ij}^n=\bar{\pi}_j$
   即无论起点的随机变量服从什么分布，经过若干步转移后，总会收敛到一个稳定分布，这一点我们称之为**遍历性**(不可约+非周期+正常返)

🆓实例：分支过程

做题技巧：人为设定吸收态

连续时间离散状态马氏链

👏独立增量性是马尔可夫性的充分条件

Levy过程(独立平稳增量过程)

Poisson过程(一类特殊的Levy过程)

泊松过程$\{N(t),t\geq 0\}$的状态空间是$\mathbf{N}$，$N(t)$满足：
$P(N_{t+\Delta t}=i|N_t=i)=P(N_{\Delta t}=0)=1-\lambda\Delta t+o(\Delta t)$
$P(N_{t+\Delta t}=i+1|N_t=i)=P(N_{\Delta t}=1)=\lambda\Delta t+o(\Delta t)$
$P(N_{t+\Delta t}\geq 2|N_t=i)=P(N_{\Delta t}\geq 2)=o(\Delta t)$
泊松过程可以用以下r. v. 刻画：我们的故事背景是顾客到来问题

$def:$

$N(t)$　过程$[0,t]$中到来的顾客数

$\tau_i=\inf_{t\geq 0}\{X(t)\neq i\}-\inf_{t\geq 0}\{X(t)\neq i-1\}$　顾客到达时间的间隔

(由于独立增量性,τ_i与i的选取无关,均与$\inf_{t\geq 0}\{X(t)\neq 0\}$独立同分布)

$W_n=\sum_{i=1}^{n}\tau_i$　n个顾客到达所需时间

连续时间马氏链(假设状态空间可数)

我们先定义t时刻的转移矩阵$\mathbf{P}(t)=(p_{ij}(t))$, 满足$\sum_j p_{ij}(t)=1$; ta描述了$[0,t]$时间段对应过程的变化信息

假设$\lim_{t\to 0}\mathbf{P}(t)=\mathbf{I}$ 极短时间的过程内不会出现状态转移

连续时间下的C-K方程(本质上是全概率公式)

类似于离散时间下，我们经过同样的推导过程可以得出连续时间下的C-K方程：$P_{i,j}(s+t)=\sum_k P_{i,k}(s)P_{k,j}(t)$，对于一个时齐马氏链，当我们分析经过时长$t$的转移后的分布时，**我们总能将这个过程利用C-K方程(本质上是全概率公式)分割为若干个独立的子过程，子过程的时长任意**。这一思想是时齐马氏链的精髓。

换个角度想，对于连续时间时齐马氏链，C-K方程相当于是在$[0,t]$时间段任意做分划$\{[t_n,t_{n+1}]\}$而每个时段的过程由于时齐性等价于过程$[0,t_n-t_{n+1}]$，这极大方便了我们的分析和计算

转移速率矩阵

由于时间轴变为连续，我们对$\mathbf{P}(t)$在每个时刻的变化信息很感兴趣，由此我们对转移矩阵$\mathbf{P}(t)$求导, 令$t=0$可以得到转移速率矩阵$\mathbf{Q}=(q_{ij})$

对于转移速率矩阵$\mathbf{Q}$，我们可以发现：

$$q_{ii}=\lim_{t\to 0}\frac{p_{ii}(t)-1}{t}\leq 0$$

$$q_{ij}=\lim_{t\to 0}\frac{p_{ij}(t)}{t}\geq 0$$

$$\sum_j q_{ij}=\lim_{t\to 0}\frac{\sum_j p_{ij}(t)-1}{t}=0$$

最后一行的结果也可以这么理解$\sum_j q_{ij}=\sum_j\frac{\partial p_{ij}(t)}{\partial t}=\frac{\partial 1}{\partial t}=0$

处于方便，我们定义$q_i=\sum_{j\neq i}q_{ij}=-q_{ii}\geq 0$为离开速率

我们还可以计算出$P(X$从状态i转移到了状态$j) = \lim_{t\to 0} \frac{\frac{p_{ij}(t)}{t}}{\sum_{k\neq i}\frac{p_{ij}(t)}{t}} = \frac{q_{ij}}{q_i}$

柯尔莫哥洛夫向前/向后方程

这两个方程都是用来求$\mathbf{P}(t)$的，核心思想是把C-K方程在起点/终点**关于时间微分**，根据在起点还是在终点微分，分别得到向后/向前方程：
首先根据 $\mathbf{Q}$给出 $\mathbf{P}(\Delta t)$的表达式：

$$
\begin{aligned}
&p_{ii}(\Delta t) = 1 + q_{ii}\Delta t + o(\Delta t)\\
&p_{ij}(\Delta t) = q_{ij}\Delta t + o(\Delta t)\\
&\mathbf{P}(\Delta t) = \mathbf{I} + \mathbf{Q}\cdot\Delta t
\end{aligned}
$$

向后方程

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(t+\Delta t) &= \sum_k p_{ik}(\Delta t)p_{kj}(t)\\
&= p_{ij}(t) + \sum_k q_{ik}\Delta t\cdot p_{kj}(t) + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

$LHS = p_{ij}(t) + \dot{p_{ij}}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ 经泰勒展开有：

$$
\dot{p_{ij}}(t) = \sum_k q_{ik}\cdot p_{kj}(t) = (\mathbf{QP}(t))_{ij}
$$

向前方程

$$
\begin{aligned}
p_{ij}(t+\Delta t) &= \sum_k p_{ik}(t)p_{kj}(\Delta t)\\
&= p_{ij}(t) + \sum_k p_{ik}(t)\cdot q_{kj}\Delta t + o(\Delta t)
\end{aligned}
$$

$LHS = p_{ij}(t) + \dot{p_{ij}}(t)\Delta t + o(\Delta t)$ 经泰勒展开有：

$$
\dot{p_{ij}}(t) = \sum_k p_{ik}(t)\cdot q_{kj} = (\mathbf{P}(t)\mathbf{Q})_{ij}
$$

$*$ 向前方程成立有一定必要条件

无穷小生成元，求解$\mathbf{P}(t)$

我们依据向后方程可以得出矩阵微分方程：

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{P}}(t) = \mathbf{QP}(t)\\
&\mathbf{P}(0) = \mathbf{I}
\end{aligned}
$$

这个微分方程的解很简单：$\mathbf{P}(t)=\exp(\mathbf{Q}t)$，ta给出了$\mathbf{P}(t)$的通解，同时显示出转移速率矩阵$\mathbf{Q}$和转移矩阵$\mathbf{P}(t)$之间的关系：$\mathbf{Q}$生成了$\mathbf{P}(t)$，从而我们称$\mathbf{Q}$为**无穷小生成元**，ta是连续时间马氏链的核心特征(相比之下，离散时间马氏链以**转移矩阵**$\mathbf{P}$为核心特征)

离散与连续的转化

我们注意到$\mathbf{P}(t)=\lim_{n\to\infty}(\mathbf{I}+\mathbf{Q}\frac{t}{n})^n=\exp(\mathbf{Q}t)$，可以看出，当我们将过程$[0,t]$分划为无穷多个独立同分布的无穷小增量，从而得到了上式。

状态分析

停留时间&转移速率

首先定义r. v. :首次离开时间$\tau_i=\inf_{t\ge0}\{X(t)\ne i,X(0)=i\}$，这是一个取值在$[0,+\infty]$的随机变量，我们现在聚焦于一条链，一个特定的过程。

- $\tau_i\sim\text{Exp}(q_i)$
  利用C-K方程可以得到：

$$\begin{aligned}P(\tau_i\ge t|X(0)=i)&=P\{[0,t]\text{过程增量为}0|X(0)=i\}\\&=P\{[0,t]\text{过程的任意分划得到的任一子过程增量为}0|X(0)=\\&(\text{考虑标准}n\text{等分}[0,t],\text{令}n\to\infty)\\&=\Pi_{n=0}^{\infty}q_{ii}\\&=\lim_{n\to\infty}(1-q_i\frac{t}{n}+o(\frac{t}{n}))^n\\&=e^{-q_it}\\&\sim\text{Exp}(q_i)\end{aligned}$$

- τ_i与X_{τ_i}相互独立
  通过写联合分布可以看出：

$$\begin{aligned}P(\tau_i\le t,X_{\tau_i}=j|X(0)=i)&=\sum_{k=0}^{n}P\{[0,t]n\text{等分划的前}k\text{段为}0,(k+1)\text{段}|X(0)=\\&=\sum_{k=0}^{n}(1-q_i\frac{t}{n}+o(\frac{t}{n}))^k(q_{ij}\frac{t}{n})+o(\frac{t}{n}))\\&=q_{ij}\frac{t}{n}\frac{1-(1-q_i\frac{t}{n}+o(\frac{t}{n}))^n}{q_i\frac{t}{n}+o(\frac{t}{n})}+o(\frac{t}{n})\\&\to\frac{q_{ij}}{q_i}(1-e^{-q_it}),n\to\infty\\&=P(X_{\tau_i}=j|X(0)=i)P(\tau_i\le t|X(0)=i)\end{aligned}$$

对于速率为λ的**泊松过程**，基于此可以写出：

$$
\begin{aligned}
&P(N_{\tau_1}=n|N_0=0)\\
&=\int_0^\infty P(N_{\tau_0}=n|t-o(t)\le\tau_1\le t,N(0)=i)P(t-dt\le\tau_1\le t|N_0=0)\\
&=\int_0^\infty P(N_{\tau_0}=n|N(0)=i)P(t-dt\le\tau_1\le t|N_0=0)\\
&=\int_0^\infty P(N_{\tau_0}=n|X(0)=i)\mathrm{d}\tau_1(t)\qquad(\tau_1(t)\sim Exp(\lambda))\\
&=\int_0^\infty \frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n(\lambda e^{-\lambda t})dt\\
&=E_{\tau_1}(\frac{e^{-\lambda t}}{n!}(\lambda t)^n)
\end{aligned}
$$

不变分布的求法

依据不变分布π定义可以得到恒等式：$\pi=\pi\mathbf{P}(t),\forall t\ge 0$
此时等式两边对t求导可以得到：$0=\pi\mathbf{P}(t)\mathbf{Q},\forall t\ge 0$ （此处用向前方程）
由于不变分布，上式等价于：$0=\pi\mathbf{Q}$ 这就是不变分布的充要条件

离散状态鞅过程

鞅的定义

一个随机过程$\mathbf{X}=(\mathbf{X_1}\dots\mathbf{X_n}\dots)$满足:$E(X_{n+1}|X_n)=X_n$ 则称之为鞅过程

鞅差变换/离散版“随机积分”

由于现在还停留在离散时间，所以我们的“积分”只能停留在离散和阶段：给定一个可料的随机过程H_n:H_n关于$\mathscr{F}_{n-1}$可测；给定一个鞅X_n则可以定义H_n关于X_n的随机积分Z_n：

$$
Z_0=0,Z_n=\sum_{i=1}^n H_i(X_{i-1}-X_i)
$$

连续时间下的随机积分请看后续章节……

停时/抽样时点

伴随着时间的流逝，我们分析的随机过程会打出一条散点图。如果我们对随机变量的某些状态(如取值)感兴趣，我们便可以记录ta到达这些状态的时间点，

这就是我们所谓的“停时”。同时需要注意的是，停时的记录依赖于ta之前的信息，所以停时对应的事件是属于$\mathscr{F}_n$的。
举例子：假如股市价格随时间变化的过程是一个随机过程，那我们可以监测股价到达一定下限时买入股票；在到达一定上限时卖出股票，买入、卖出的时间点即是“停时”。

可选停时定理

我们既然对于停时处的状态感兴趣，那么停时处的期望$E(X_\tau)$自然是我们关注的。

为了保证时间上的有界性，我们转而分析r. v. $X_{\tau\wedge n}$ 进而可以得到一个随机过程($X_{\tau\wedge n} = X_{\min\{\tau,n\}}$)
可以证明这个随机过程是一个鞅过程：

$$\begin{aligned}
E(X_{\tau\wedge n+1}|\mathscr{F}_n) &= \sum_{k=0}^{n} X_k 1_{\tau=k} + E(\sum_{k=n+1}^{\infty} X_{n+1}1_{\tau=k}|\mathscr{F}_n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} X_k 1_{\tau=k} + E(X_{n+1}1_{\tau\geq n+1}|\mathscr{F}_n) \\
&= X_\tau 1_{\tau\leq n} + E(X_{n+1}(1-1_{\tau\leq n})|\mathscr{F}_n) \\
&= X_\tau 1_{\tau\leq n} + X_{n+1}(1-1_{\tau\leq n}) \\
&= X_{\tau\wedge n}
\end{aligned}$$

基于此可以给出完整的**可选停时定理**：
对于有界停时τ及鞅过程$\{X_n\}$ 如果满足

1. $E(|X_\tau|) < \infty$
2. $\lim_{n\to\infty} E(X_n 1_{\tau>n}) = 0 \to \lim_{n\to\infty} E(X_\tau 1_{\tau>n}) = 0$ 因为停时对应的事件是全体事件的子集
   那么就有$E(X_\tau) = E(X_0)$
   $E(X_\tau) = E(X_\tau 1_{\tau>n}) + E(X_\tau 1_{\tau\leq n}) = E(X_\tau 1_{\tau>n}) + E(X_{\tau\wedge n}) - E(X_n 1_{\tau>n})$
   由于$(X_{\tau\wedge n})$是一个有界鞅过程:$E(X_{\tau\wedge n}) = E(X_0)$
   等式两侧令$n\to\infty$:
   $E(X_\tau) = \lim_{t\to\infty} E(X_\tau 1_{\tau>n}) + E(X_0) - \lim_{t\to\infty} E(X_n 1_{\tau>n})$
   $E(X_\tau) = E(X_0)$

FREE 鞅收敛定理

Doob-Meyer 分解

对于一个下鞅X_n, 我们可以**构造一个可料增过程**
$A_n: E(\Delta A_n|\mathscr{F}_{n-1}) = E(\Delta X_n|\mathscr{F}_{n-1}) > 0$。此时可以证明$M_n = X_n - A_n$是一个鞅，从而我们把**一个下鞅分解成了一个鞅和一个可料增过程**

$$
\begin{aligned}
E(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) &= E(M_n + (X_{n+1} - X_n) - (A_{n+1} - A_n)|\mathscr{F}_n) \\
&= M_n + E(\Delta X_{n+1}|\mathscr{F}_n) - E(\Delta A_{n+1}|\mathscr{F}_n) \\
&= M_n
\end{aligned}
$$

一般地，我们可以直接令A_n满足$\Delta A_n = E(\Delta X_n|\mathscr{F}_{n-1}) > 0$来构造

一致平方可积鞅，平方变差过程

如果一个鞅X_n满足:$E(X_n^2) < \infty, \forall n$，则称为一致平方可积鞅(例子：平均随机游动)

此时对下鞅$\{X_n^2\}$进行D-M分解得到一个可料增过程:
$A_n: E(\Delta A_n|\mathscr{F}_{n-1}) = E(\Delta(X_n^2)|\mathscr{F}_{n-1})$
可以证明：假设$A_0 = 0$

$$
\begin{aligned}
E(A_n|\mathscr{F}_{n-1}) &= \sum_{i=1}^{n} E(\Delta(X_i^2)|\mathscr{F}_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2 - 2X_{i-1}^2 + X_{i-1}^2|\mathscr{F}_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E(X_i^2 - 2X_{i-1}X_i + X_{i-1}^2|\mathscr{F}_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{n} E([\Delta(X_i)]^2|\mathscr{F}_{i-1}) \\
&\to A_n = \sum_{i=1}^{n} [\Delta(X_i)]^2 \text{满足条件}
\end{aligned}
$$

此时$A_n = \sum_{i=1}^{n} [\Delta(X_i)]^2$我们称为平方变差过程

鞅的举例

随机游动

$X_n = X_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j \ \ \xi_j \overset{i.i.d}{\sim} 0-1$等可能分布
$M_n = X_n^2 - n$

$$\begin{aligned} E(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) &= E((X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j)^2 - (n+1)|\mathscr{F}_n) \\ &= E(M_n + 2\xi_{n+1}(X_0 + \sum_{j=1}^{n} \xi_j) + \xi_{n+1}^2 - 1|\mathscr{F}_n) \\ &= M_n \end{aligned}$$

$X_n^2 = (X_n^2 - n) + n, \quad X_n^2 - n = 2\sum_{i=1}^{n} X_{i-1}(X_i - X_{i-1})$
$X_n^2 - n = \sum_{i=1}^{n}(X_i^2 - X_{i-1}^2 - 1) = \sum_{i=1}^{n}[(X_i - X_{i-1})^2 - 2X_i^2 + 2X_iX_{i-1} - 1]$
$= \sum_{i=1}^{n} 2X_{i-1}(X_i - X_{i-1}), (X_i - X_{i-1})^2 - 1 \equiv 0$

$M_n = X_n^3 - f(n), f(n) = 3\sum_{i=0}^{n-1} X_i$

$$\begin{aligned} E(M_{n+1}|\mathscr{F}_n) &= E\left(\left(X_0 + \sum_{j=1}^{n+1} \xi_j\right)^3 - f(n+1)|\mathscr{F}_n\right) \\ &= E((X_n + \xi_{n+1})^3 - f(n+1)|\mathscr{F}_n) \\ &= E(M_n + f(n) + 3X_n^2\xi_{n+1} + 3X_n\xi_{n+1}^2 + \xi_{n+1}^3 - f(n+1)|\mathscr{F}_n) \\ &= M_n + f(n) - f(n+1) + 3X_n \\ &= M_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(n+1) - f(n) &= 3X_n \\ f(n) &= 3\sum_{i=1}^{n-1} X_i \end{aligned}$$

Polya Urn 生成$U(0,1)$

例6.6 (Polya坛子抽样模型)

考虑一个装有红、黄两色球的坛子. 假设最初坛子中装有红、黄两色球各一个， 每次都按如下规则有放回地随机抽取： 如果拿出的是红色的球， 则放回的同时再加入一个同色的球； 如果拿出是黄色的球也采取同样的做法. 以X_n表示第n次抽取后坛子中的红球数， 则$X_0=1$， 且$\{X_n\}$是一个非时齐的Markov链，转移概率为

$$P\{X_{n+1}=k+1|X_n=k\}=\frac{k}{n+2}$$
$$P\{X_{n+1}=k|X_n=k\}=\frac{n+2-k}{n+2}.$$

令M_n表示第n次抽取后红球所占的比例， 则$M_n=\frac{X_n}{n+2}$， 并且$\{M_n\}$是一个鞅.

5.5 鞅收敛定理

鞅收敛定理说的是在很一般的条件下，鞅 M_n 会收敛到一个极限随机变量 M_∞. 我们首先考虑一个特殊的例子，Polya 坛子（5.2 节例 4）. 在这种情形下 M_n 是第 n 次摸球后坛中红球所占的比例. 当 n 变大时，这个比例会如何变化呢？在习题 5.12 中证明了 M_n 的分布对于较大 n 值会近似于 [0，1] 上的均匀分布. 因此我们会想：红球所占的比例会在 0 和 1 之间无限地跳跃吗？又或者这个比例最终会到达一个特定值吗？接下来我们将证明后者是成立的.

设 $0<a<b<\infty$ 且 $M_n<a$，T 为停时

$$T=\min\{j:j\geqslant n,\quad M_j\geqslant b\},$$ 从a开始计时

令 $T_m=\min\{T,m\}$，则对 $m>n$，由可选抽样定理知

有界停时

$$\mathbf{E}(M_{T_m})=M_n<a.$$

但是

$$a>\mathbf{E}(M_{T_m})\geqslant\mathbf{E}(M_{T_m}I\{T\leqslant m\})\overset{\text{def}}{=}\mathbf{E}(M_T I\{T\leqslant m\})\geqslant b\mathbf{P}\{T\leqslant m\}.$$

所以，

$$\mathbf{P}\{T\leqslant m\}<\frac{a}{b}.$$ 116

一致

由于上式对所有的 m 都成立，从而

$$\mathbf{P}\{T<\infty\}\leqslant\frac{a}{b}.$$

这说明至少以概率 $1-\left(\frac{a}{b}\right)$ 红球的比例永远不会超过 b. 现在假设红球的比例确定超过了 b，那么它能够再一次降回到 a 以下的概率是多少？同样的讨论应用于绿球的比例，则降到 a 以下的概率最大为$\frac{(1-b)}{(1-a)}$. 继续同样的讨论，我们可以知道，从 a 出发超过 b，再小于 a，再大于 b，再小于 a，循环 n 次的概率为

利用循性 $$\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1-b}{1-a}\right)\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1-b}{1-a}\right)\cdots\left(\frac{a}{b}\right)\left(\frac{1-b}{1-a}\right)=\left(\frac{a}{b}\right)^n\left(\frac{1-b}{1-a}\right)^n,$$

当 $n\to\infty$时此概率趋于 0，从而它是有上界的. 因此，这一比例不会在 a 和 b 之间无限地跳跃. W.P.0

由于 a，b 是任意的，这表明该比例不会在任意两个数之间无限地跳跃，换言之，极限

$$M_\infty=\lim_{n\to\infty}M_n$$

存在. 这一极限 M_∞ 是随机变量；不难证明（见习题 5.12）M_∞ 服从 [0，1] 上的均匀分布.

证明$U(0,1)$:用归纳法易得每个点的概率是相等的

> 若$P\left(M_n=\frac{k}{n+2}\right)=\frac{1}{n+1}$
> 则$P\left(M_{n+1}=\frac{k}{n+3}\right)=P(X_{n+1}=k)=\frac{1}{n+1}\left(\frac{n+2-k}{n+2}+\frac{k-1}{n+2}\right)=\frac{1}{n+2}$

布朗运动B.M. 连续时间连续状态

标准布朗运动S.B.M.

标准表示是$B(t,\omega)$但也可以写作$B(t),B_t$

经典定义

对于一个随机过程$B(t,\omega)$:

1. 标准正态：$B(t)\sim N(0,t)$
2. 独立增量：$B(t)-B(s)\sim N(0,t-s)$
3. 连续轨迹：$B(t,\omega)$关于t是连续的

基于高斯过程的定义

对于一个随机过程$B(t)$:

1. $B(0)=0$
2. $B(t)$是一个高斯过程:任意时点的联合分布都是正态分布
3. $E(B(t)B(s))=\min\{t,s\}\rightarrow t>s:E(B(t-s)B(s))=0\rightarrow$ 独立增量
   正态分布前提下，独立与不相关等价

生成S.B.M.

1. $X_t=-B_t$
2. $X_t=B_{t+t_0}-B_{t_0}$ 平移不变性
3. $X_t=CB\left(\frac{t}{c^2}\right)$ 刻度不变性
4. $X_t=tB\left(\frac{1}{t}\right)$ 时间逆转，注意$\lim_{t\rightarrow 0^+}tB\left(\frac{1}{t}\right)=0$ S.B.M.阶数小于1

基本性质

1. 布朗运动具有**鞅**性(零期望增量：增量分布(正态)的对称性)
2. 布朗运动具有**马尔可夫**性(由于独立增量性：充分条件)
   所以，布朗运动拥有前面所学的关于一个随机过程的绝大部分性质，十分完美

运动轨迹的性质

一句话总结：不光滑，但至少是连续的

轨迹的平方变差收敛

要证明：$[0,t]$区间内的轨迹$B(t)$对任一分划$\{t_i\}$满足：

$\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}(B(t_i)-B(t_{i-1}))^2 \xrightarrow{\mathscr{L}^2} t$

注意这里的收敛方式是$\mathscr{L}^2$

即证：$E\left[\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}(B(t_i)-B(t_{i-1}))^2-t\right]^2=0$（作业题）

轨迹非有界变差(FV)，也就是不收敛

$\sum_{i=1}^{n}(B(t_i)-B(t_{i-1}))^2 \le \max_i|B(t_i)-B(t_{i-1})|\sum_{i=1}^{n}(B(t_i)-B(t_{i-1}))$

$\le \max_i|B(t_i)-B(t_{i-1})|V_0^t,\quad V_0^t=\sup\sum_{i=1}^{n}(B(t_i)-B(t_{i-1})$

如果$B(t)$是FV, 那么依据$B(t)$的**一致连续性**，不等式右侧收敛到0，而左侧收敛到t，矛盾

轨道连续性的刻画，Hölder连续

强马尔可夫性

给定一个有限停时τ, 定义:

$\tilde{B}(t)=2B(t\wedge\tau)-B(t)=\mathbb{1}_{(0,\tau)}B(t)+\mathbb{1}_{\tau,\infty}(2B(\tau)-B(t))$

$*$ $\tilde{B}(t)$也是一个布朗运动，而且$(\tilde{B},\tau),(B,\tau)$同分布

反射原理

此时我们给定感兴趣的状态a, 定义停时$T_a=\inf_t\{B_t=a\}\underset{连续变化}{=}\inf_t\{B_t\ge a\}$

我们还可以基于布朗运动定义最大值过程$S(t)=\sup_{s\le t}B(S)$，则$T_a=\inf_t\{S_t\ge a\}$

反射原理：$P(S_t\ge a)=P(T_a\le t)\underset{待证}{=}2P(B_t\ge a)=P(|B_t|\ge a)$

> 由此可以推出$P(T_a \le t) = 2P(B_t > a) = \int a^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{\frac{-x^2}{2t}}\,dx$
>
> 从而可以得到pdf：$f_a(t) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{\frac{-a^2}{2t}}$
>
> ② 求 T_a 的 pdf：已知 $P(T_a \le t) = 2\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} dx$
>
> ∴ $f_{T_a}(t) = \int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-\frac{x^2}{2t}} \left(\frac{x^2}{t^2} - \frac{1}{t}\right) dx$
>
> $u = \frac{x}{\sqrt{t}}$ $\quad = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, t} \int_{\frac{a}{\sqrt{t}}}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} (u^2 - 1)\, du$
>
> $\int e^{-\frac{u^2}{2}} (u^2-1)\, du = -\int \left(\frac{u^2-1}{u}\right) d e^{-\frac{u^2}{2}}$
>
> $= \int \left(1 + \frac{1}{u^2}\right) e^{-\frac{u^2}{2}} du - \left(u - \frac{1}{u}\right) e^{-\frac{u^2}{2}}$
>
> $= \int e^{-\frac{u^2}{2}} du - \int e^{-\frac{u^2}{2}} d\frac{1}{u} - \left(u - \frac{1}{u}\right) e^{-\frac{u^2}{2}}$
>
> $= \int e^{-\frac{u^2}{2}} du - \frac{1}{u} e^{-\frac{u^2}{2}} - \int e^{-\frac{u^2}{2}} du - \left(u - \frac{1}{u}\right) e^{-\frac{u^2}{2}}$
>
> $= -u e^{-\frac{u^2}{2}}$
>
> ∴上式 $= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, t} \left(-u e^{-\frac{u^2}{2}} \Big|_{a/\sqrt{t}}^{+\infty}\right) = \frac{a}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$

随机积分(Itö积分)

被积过程是鞅过程的Itö积分

⭐虽然现在的数学背景变了，但是我们定义积分的过程依旧：

分划区间-小区间取点-求和-取极限，若极限存在则定义ta为积分结果

只不过现在**积分的对象**是随机过程，**被积分的过程**是随机过程，**积分得到的结果**是随机变量（视为定积分）/随机过程（视为变限积分）……

由于**随机性**，我们在小区间上的取点会影响到最后的积分结果，以及并不是所有的随机过程都能积出一个好性质的结果。所以我们加入了一些限定：我们这里只研究**鞅过程上的随机积分**，且定义我们的**取点只能取区间(时段)的左端点**。由此给出随机积分的定义式：

$$\int_0^t \Phi(s)\, dM(s) = \lim_{||\Delta|| \to 0} \sum_{i=1}^{n} \Phi(t_{i-1})(M(t_i) - M(t_{i-1}))$$

与离散情况下类似，可以证明$\Psi(t)$是一个鞅 毕竟本质就是一个连续的鞅差变换 **（只不过这里的收敛形式还不太清楚，需要补充）**

被积过程是S.B.M的Itö积分

$$\Psi(t)\overset{def}{=}\int_0^t\Phi(s)\,dB(s)=\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Phi(t_{i-1})(B(t_i)-B(t_{i-1}))$$

例子:

$$\begin{aligned}&\int_0^t\Psi(s)\,dB(s)\,,\Psi(t)\text{非随机}\\&=\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Psi(t_{i-1})(B(t_i)-B(t_{i-1}))\end{aligned}$$

注意到布朗运动满足独立增量性，这个积分可以看做n个独立，服从$N(0,\Psi^2(t_{i-1})(t_i-t_{i-1}))$的正态随机变量的和，由正态分布的性质可知，这个积分服从正态分布

$$N\left(0,\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Psi(t_{i-1})^2(t_i-t_{i-1})=\int_0^t\Psi(s)\,ds\right)$$

例子：

$$\begin{aligned}\int_0^t B(s)\,dB(s)&=\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}B(t_{i-1})(B(t_i)-B(t_{i-1}))\\&=\frac{1}{2}\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}[2B(t_{i-1})B(t_i)-2B(t_{i-1})^2]\\&=\frac{1}{2}\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\left(-B(t_i)^2+2B(t_{i-1})B(t_i)-B(t_{i-1})^2\right)+\left(B(t_i)^2-B(t\right.\\&=\frac{1}{2}\left(\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}[\left(B(t_i)^2-B(t_{i-1})^2\right)]-\sum_{i=1}^{n}[B(t_i)-B(t_{i-1})]^2\right)\\&=\frac{1}{2}(B(t)^2-t)\end{aligned}$$

相比之下，对于实数域上的积分$\int_0^t f(s)\,df(s)=\frac{1}{2}f(t)^2,f(0)=0$
如果我们小区间取的是区间中点，那么最终积分的结果不一样：

$$\begin{aligned}\int_0^t B(s)\,dB(s)&=\lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(B(t_i)+B(t_{i-1}))(B(t_i)-B(t_{i-1}))\\&=\frac{1}{2}B(t)^2\end{aligned}$$

随机积分的平方变差$\langle\Psi_t\rangle$

[泛函分析观点下的随机积分（一）：L2鞅与变差 - 知乎]
这个概念原本是基于鞅定义的:对一个鞅$M(t)$:
def :$\langle M(t)\rangle = \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M(t_i)-M(t_{i-1}))^2$
现在分别考虑S.B.M.上的/一般鞅上的随机积分$\Psi(t)|B(t)$，$\Psi(t)|M(t)$:

$$\begin{aligned}\langle\Psi_t\rangle|B(t) &= \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Phi(s)\,dB(s)\right)^2\\ &\approx \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\Phi^2(t_{i-1})(B(t_i)-B(t_{i-1}))^2\right)\\ &\approx \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\Phi^2(t_{i-1})(t_i-t_{i-1})\\ &= \int_0^t \Phi^2(s)\,ds\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle\Psi_t\rangle|M(t) &= \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\int_{t_{i-1}}^{t_i}\Phi(s)\,dM(s)\right)^2\\ &\approx \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(\Phi^2(t_{i-1})(M(t_i)-M(t_{i-1}))^2\right)\\ &= \int_0^t \Phi^2(s)\,d\langle M(s)\rangle\end{aligned}$$

总结：随机积分的平方变差$\langle\Psi_t\rangle = \int_0^t \Phi^2(s)\,d\langle M(s)\rangle$

两个鞅的交互变差

对于两个鞅M_t, N_t，定义交互变差
$\langle M_t, N_t\rangle \overset{def}{=} \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n}(M(t_i)-M(t_{i-1}))(N(t_i)-N(t_{i-1})$
交互变差性质：

1. 鞅性
2. 等于0的充分条件：M, N相互独立，或者其中一个是连续FV过程

Itö公式

我们这里考虑积分对象是被积过程$M(t)$的函数$f(M(t))$（也就是一个可测的随机对象）。如果我们想用变限随机积分表示被积过程，我们需要将被积过程分划，并在每一小段进行$Taylor$展开。
在实数域上，这一过程如下：假设$f(\cdot)$一阶可微

$$
\begin{aligned}
f(t) &= f(0) + \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(t_{i-1}) - f(t_i) \\
&= f(0) + \lim_{||\Delta||\to 0} \sum f'(t_{i-1})(t_{i-1} - t_i) + \frac{1}{2} \lim_{||\Delta||\to 0} \sum f''(t_{i-1})(t_{i-1} - t_i)^2 + \dots \\
&= f(0) + \int_0^t f'(s)\, ds + \int_0^t f''(s)\, [ds]^2 \\
&= f(0) + \int_0^t f'(s)\, ds
\end{aligned}
$$

但是在随机积分中，被积过程的不光滑性会带来不一样的结果。

一维

假设$f(\cdot)$二阶可微：如果被积过程是S. B. M.

$$
\begin{aligned}
f(B_t) &= f(0) + \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(B_{t_i}) - f(B_{t_{i-1}}) \\
&= f(0) + \lim_{||\Delta||\to 0} \sum f'(B_{t_{i-1}})(B_{t_{i-1}} - B_{t_i}) + \frac{1}{2} \lim_{||\Delta||\to 0} \sum f''(B_{t_{i-1}})(B_{t_{i-1}} - B_{t_i})^2 \\
&= f(0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \int_0^t f''(B_s)\, [(dB_s)^2] \\
&= f(0) + \int_0^t f'(B_s)\, dB_s + \int_0^t f''(B_s)\, ds
\end{aligned}
$$

如果被积过程是一般鞅：

$$
\begin{aligned}
f(M_t) &= f(0) + \lim_{||\Delta||\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(M_{t_i}) - f(M_{t_{i-1}}) \\
&= f(0) + \lim_{||\Delta||\to 0} \sum f'(M_{t_{i-1}})(M_{t_{i-1}} - M_{t_i}) + \frac{1}{2} \lim_{||\Delta||\to 0} \sum f''(M_{t_{i-1}})(M_{t_{i-1}} - M \\
&= f(0) + \int_0^t f'(M_s)\, dM_s + \int_0^t f''(M_s)\, [(dM_s)^2] \\
&= f(0) + \int_0^t f'(M_s)\, dM_s + \int_0^t f''(M_s)\, d\langle M(s)\rangle
\end{aligned}
$$

二维→多维

假设$f(\cdot,\cdot)$有二阶连续偏导数：考虑被积过程是两个鞅M_t, N_t

$$
\begin{aligned}
& f(M_t, N_t) \\
& = f(0,0) + \lim_{||\Delta||\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(M_{t_i}, N_{t_i}) - f(M_{t_{i-1}}, N_{t_{i-1}}) \\
& = f(0) + \left[\int_0^t f_M(M_s)\,dM_s + \int_0^t f_N(N_s)\,dN_s\right] + \\
& \frac{1}{2}\left[\int_0^t f_{MM}(M_s)\left[(dM_s)^2\right] + \int_0^t f_{NN}(N_s)\left[(dN_s)^2\right] + 2\int_0^t f_{MN}(s)\left[(dM_s dN_s)\right]\right] \\
& = f(0) + \left[\int_0^t f_M(M_s)\,dM_s + \int_0^t f_N(N_s)\,dN_s\right] + \\
& \frac{1}{2}\left[\int_0^t f_{MM}(M_s)\,d\langle M(s)\rangle + \int_0^t f_{NN}(N_s)\,d\langle N(s)\rangle + 2\int_0^t f_{MN}(s)\,d\langle M(s)N(S)\rangle\right]
\end{aligned}
$$

如果$N(t)$是一个有界变差过程(或者是非随机的)，那么结果变为：

$$
f(M_t, N_t) = f(0) + \left[\int_0^t f_M(M_s)\,dM_s + \int_0^t f_N(N_s)\,dN_s\right] + \frac{1}{2}\int_0^t f_{MM}(M_s)\,d\langle M(s)\rangle
$$

Itö diffusion的随机微分方程

对于形如$X_t = f(B_t)$的随机过程，我们用伊藤积分表示为：

$$
X_t = f(B_t) = f(0) + \int_0^t f'(B_s)\,dB_s + \int_0^t f''(B_s)\,ds
$$

对这个式子微分就可以得到一个随机微分方程(SDE)：

$$
dX_t = f'(B_t)dB_t + f''(B_t)dt
$$

一般地，我们可以写成：

$$
dX_t = \mu(X_t)dt + \sigma(X_t)dB_t
$$

这就是Itö diffusion的随机微分方程的通式，$\mu(\cdot)$代表漂移项；$\sigma(\cdot)$代表扩散项

向后/向前方程

[C-K方程，Kolmogorov前后向方程与主方程 - 知乎]()
[什么是Fokker-Planck方程？ - 知乎]()
除了随机过程本身，我们也关注其转移概率密度函数的表达式，ta的定义如下：

$$\text{def}: P(t,x,y) \to P(t,x,A) = P_x(X_t \in A) = \int_A p(t,x,y)\,dy$$

ta满足什么样的微分方程？这就是“向后/向前方程”所要描述的目标

证明过程(重在欣赏)

我们在这里引入一族性质良好的“检验函数” $f(\cdot)$ 并定义：

$p_t f(x) = E_x f(x_t) = u(t,x)$

⭐其中: $E_x f(x_t) = \int_{\mathbb{R}} f(y)p(t,x,y)\,dy$

$$\begin{aligned}
\frac{dp_t f(x)}{dt} &= \lim_{h\to 0} \frac{u(t+h,x) - u(t,x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{E_x\left[E_x(f_{t+h}(x)|\mathscr{F}_h)\right] - u(t,x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{E_x\left[E_{x_h}(f_t(x))\right] - u(t,x)}{h} (\text{马氏性,对起点}) \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{E_x[u(t,x_h) - u(t,x)]}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{E_x\left(\int_0^t u_x(t,x_s)\,dx_s + \frac{1}{2}\int_0^t u_{xx}(t,x_s)\,d\langle x_s\rangle\right)}{h}
\end{aligned}$$

$$dx_t = b(x_t)dt + \sigma(x_t)dB_t$$
$$d\langle x_t\rangle = \sigma^2(x_t)dt$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{E_x\left(\int_0^t u_x(t,x_s)\left(b(x_s)ds + \sigma(x_s)dB_s\right) + \frac{1}{2}\int_0^t u_{xx}(t,x_s)\sigma^2(x_s)\,ds\right)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{E_x\left(\int_0^t \left[u_x(t,x_s)b(x_s) + \frac{1}{2}\sigma^2(x_s)u_{xx}(t,x_s)\right]ds + \int_0^t u_x(t,x_s)\sigma(x_s)\,dB\right.}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{E_x\left(\int_0^t \left[u_x(t,x_s)b(s) + \frac{1}{2}\sigma^2(x_s)u_{xx}(t,x_s)\right]ds\right)}{h} (\text{最后一项是鞅}) \\
&= b(x)u_x(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)u_{xx}(t,x) \\
&\overset{\Delta}{=} Au(t,x)
\end{aligned}$$

由此得到：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= Au(t,x) \\
&\left(= \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t}\,dy\right)(\text{按照定义直接求导}) \\
&= Ap_t f(x) \\
&= A\int_{\mathbb{R}} f(y)p(t,x,y)\,dy \\
&\left(= \int_{\mathbb{R}} f(y)Ap(t,x,y)\,dy\right)(\text{通过积分变换得到})
\end{aligned}
$$

由于$f(\cdot)$的任意性，可得向后方程

$\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t} = Ap(t,x,y) = b(x)p_x(t,x,y) + \frac{1}{2}\sigma^2(x)p_{xx}(t,x,y)$

而对于向前方程，我们有

$$
\begin{aligned}
u(t,x) = E_x(f(x_t)) &= f(x) + E_x\int_0^t Af(x_s)\,ds \\
&= f(x) + \int_0^t E_x Af(x_s)\,ds \\
&= f(x) + \int_0^t \int_{\mathbb{R}} Af(y)p(s,x,y)\,dy\,ds
\end{aligned}
$$

对于t求导：

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} &= \int_{\mathbb{R}} f(y)\frac{\partial p(t,x,y)}{\partial t}\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} Af(y)p(t,x,y)\,dy \\
&= -\int_{\mathbb{R}} f(y)(b(y)p(t,x,y))'\,dy\ + \frac{1}{2}\int(\sigma^2(y)p(t,x,y))''\,dy
\end{aligned}
$$

由于$f(\cdot)$的任意性，可得向前方程

$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} = -(b(y)p(t,x,y))' + \left(\frac{1}{2}\sigma^2(y)p(t,x,y)\right)''$

总结：

向后方程：$\dfrac{\partial P(t,x,y)}{\partial t} = AP(t,x,y) = b(x)\dfrac{\partial P(t,x,y)}{\partial x} + \dfrac{1}{2}\sigma^2(x)\dfrac{\partial^2 P(t,x,y)}{\partial x^2}$

向前方程：$\dfrac{\partial P(t,x,y)}{\partial t} = A^* P(t,x,y) = -\dfrac{\partial b(y)P(t,x,y)}{\partial y} + \dfrac{\partial^2\left[\frac{1}{2}\sigma^2(y)P(t,x,y)\right]}{\partial y^2}$

实例: Black-scholes 定价公式

假设市场上有两种资产：

$$
\begin{aligned}
&dS_0(t) = rS_0(t)dt \\
&dS_1(t) = b(S_t)dt + \sigma(X(t))dB_t \\
&X(t) = \delta_0(t)S_0(t) + \delta_1(t)S_1(t)
\end{aligned}
$$

设$b(x) = \mu x, \sigma(x) = \sigma x$：

$$dX(t) = rX(t)dt + ((\mu - r)\delta_1(t)S_1(t))dt + \sigma\delta_1(t)S_1(t)dB_t$$

$$X(t) = X_0 e^{rt} + \int_0^t e^{r(t-x)}(\mu - r)\delta_1(x)S_1(x))\,dx + \int_0^t e^{r(t-x)}\sigma\delta_1(x)S_1(x)\,dB_x$$

折现可以得到：

$$X_t e^{-rt} = X_0 + \int_0^t e^{-rx}(\mu - r)\delta_1(x)S_1(x))\,dx + \int_0^t e^{-rx}\sigma\delta_1(x)S_1(x)\,dB_x$$

现在引入第三种资产:看涨期权

对于看涨期权(T, K, S_T) 其当前价值$\overset{\Delta}{=} c(0, S_0) = (S_t - k)^+$

下面我们默认：$S_1(t) \equiv S(t)$

一方面，根据伊藤公式：

$d(e^{-rt}C(t,S_t)) = e^{-rt}dC(t,S_t) - re^{-rt}C(t,S_t)dt$

$$dC(t,S_t) = C_t(t,S_t)dt + C_s(t,S_t)dS_t + \frac{1}{2}C_{ss}(t,S_t)d\langle S\rangle_t$$
$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dB_t$$
$$d\langle S\rangle_t = \sigma^2 S_t^2 dt$$

$$dC(t,S_t) = \left[C_t(t,S_t) + \mu S_t C_s(t,S_t) + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2 C_{ss}(t,S_t)\right]dt + C_s(t,S_t)\sigma S_t dB_t$$

$$d(e^{-rt}C(t,S_t)) = e^{-rt}\left[C_t(t,S_t) + \mu S_t C_s(t,S_t) + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2 C_{ss}(t,S_t) - rC(t,S_t)\right]dt$$
$$+ e^{-rt}C_s(t,S_t)\sigma S_t dB_t$$

另一方面，由于**无套利原则**：

$$d(e^{-rt}C(t,S_t)) = e^{-rt}(\mu - r)\delta_1(t)S_1(t)dt + e^{-rx}\sigma\delta_1(t)S_t dB_t$$
$$X_t = C(t,S_t) \iff X_0 = C(0,S_0)$$

另一方面，由于**风险对冲**：$C_s(t,S_t) = \delta_1(t)$

$$C_t(t,S_t) + \mu S_t C_s(t,S_t) + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2 C_{ss}(t,S_t) - rC(t,S_t) = (\mu - r)C_s(t)S_t$$

可以得到一个PDE:

$$C_t(t,S_t) + rC_s(t,S_t)S_t + \frac{\sigma^2}{2}S_t^2 C_{ss}(t,S_t) - rC(t,S_t) = 0$$
$$s.t. C(T,X) = (X-K)^+$$

根据Feynman-Kac公式，可以计算出$C(t,x) = E_x(S_T - k)^+ e^{-r(T-t)}$
由于$S_t = x\exp\left(\sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t\right)$ 对数正态
可以算出

$$
\begin{aligned}
C(0,X) &= e^{-rt}\int_{\mathbb{R}}\left(x\exp\left(\sigma y+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)-K\right)^{+}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-y^2/2T}\,dy \\
&= e^{-rt}\int_{d}^{\infty}\left(x\exp\left(\sigma y+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)-K\right)^{+}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-y^2/2T}\,dy \\
& d: x\exp\left(\sigma d+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right)=0 \\
&= xe^{(\mu-\sigma^2/2-r)T}\int_{d}^{\infty}e^{\sigma y}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-y^2/2T}\,dy-Ke^{-rT}\int_{d}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi t}}e^{-y^2/2T}\,dy \\
&= (xe^{(\mu-r)T}-Ke^{-rT})(1-\Phi(d))\overset{\mu=r}{=}(X-Ke^{-rT})(1-\Phi(d)))
\end{aligned}
$$

这就是最终的期权定价公式

验证一些结论

O.U. 对于一个SDE $dX(t)=-\mu X_t dt+\sigma dB(t)$ 存在解:

$$
X(t)=e^{-\mu t}(X_0+\int_0^t \sigma e^{\mu s}\,dB(s))
$$

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= -\mu X(0)e^{-\mu t}dt+e^{-\mu t}(\sigma e^{\mu t}dB(t)-\mu\int_0^t \sigma e^{\mu s}\,dB(s)\,dt) \\
&= -\mu e^{-\mu t}[(X(0)+\int_0^t \sigma e^{\mu s}\,dB(s)]dt+\sigma dB(t) \\
&= -\mu X(t)dt+\sigma dB(t)
\end{aligned}
$$

Geo B.M. 对于一个SDE $dX(t)=\mu X_t dt+\sigma X(t)dB(t)$ 存在解:

$$
X(t)=e^{\mu t}(X_0+\int_0^t \sigma e^{-\mu s}X(s)\,dB(s))
$$

$$
\begin{aligned}
dX(t) &= \mu X(0)e^{\mu t}dt+e^{\mu t}(\sigma e^{-\mu t}X(t)dB(t)+\mu\int_0^t \sigma e^{-\mu s}X(s)\,dB(s)\,dt) \\
&= \mu e^{\mu t}[(X(0)+\int_0^t \sigma e^{-\mu s}X(s)\,dB(s)]dt+\sigma X(t)dB(t) \\
&= \mu X(t)dt+\sigma dB(t)
\end{aligned}
$$

这一结论对于一般的非齐次一阶SDE均生效

to be continued