Sensibilités

Théorème 1 (Dérivation sous le symbole d'$\mathbb{E}$) Soit $(E, \mathcal{E}, \mu)$ espace mesuré, I intervalle de $\mathbb{R}$ non-trivial, $\varphi : I \times E \to \mathbb{R}$ mesurable. On suppose que pour tout $x \in I$ on a $\varphi(x, \cdot) \in L^1(\mu)$. Alors

1. *Version locale*: soit $x_0 \in I$ et
   a. $\partial_x \varphi(x_0, \xi)$ existe $\mu(d\xi)$-p.p.
   b. $\left(\frac{|\varphi(x,\xi) - \varphi(x_0,\xi)|}{|x - x_0|} \right) \leq Y(\omega) \in L^1(\mu)$ pour tout $x \in (U(x_0) \cap I) \setminus \{x_0\}$.

   Alors $x \mapsto \int_E \varphi(x_0, \xi)\mu(d\xi)$ est bien définie sur I, dérivable en x_0 et $\partial_x \int_E \varphi(x_0, \xi)\mu(d\xi) = \int_E \partial_x \varphi(x_0, \xi)\mu(d\xi)$.
2. *Version globale*:
   a. $\mu(d\xi)$-p.p. $x \mapsto \varphi(x, \xi)$ est dérivable sur I.
   b. $|\partial_x \varphi(x, \xi)| \leq Y(\omega) \in L^1(\mu)$ pour tout $x \in I$.

   Alors $x \mapsto \int_E \varphi(x_0, \xi)\mu(d\xi)$ est bien définie et dérivable sur I et $\partial_x \int_E \varphi(x, \xi)\mu(d\xi) = \int_E \partial_x \varphi(x, \xi)\mu(d\xi)$ pour tout $x \in I$.

En plus, si $(E, \mathcal{E}, \mu)$ espace de proba, on peut vérifier l'U.I. dans (b) au lieu de majoration par $Y \in L^1(\mu)$.

Méthode de log-vraisemblance

On considère la dynamique $(X_t^x(\vartheta))_{t\in[0,T]}$, $X_0^x(\vartheta) = x$ et on suppose que

$$\mathcal{L}(X_T^x(\vartheta)) = p_T(x, \vartheta, y)\mu(dy), \quad \forall (x, \vartheta) \;\; p_T(x, \vartheta, y) > 0 \;\; \mu(dy)\text{-p.p.}$$

Si on peut appliquer théorème 1 on a
$\partial_\vartheta \mathbb{E}\left[\varphi(X_T^x(\vartheta))\right] = \mathbb{E}\left[\varphi(X_T^x(\vartheta))\partial_\vartheta \log p_T(x, \vartheta, X_T^x(\vartheta))\right]$.

La condition suffisante: $|\varphi(y)\partial_\vartheta p_T(x, \vartheta, y)| \leq Y(x, y)$, où $Y(x, \cdot) \in L^1(\mu)$.