Document de travail
pour le cours "Modèles d'actifs avec sauts".

Master 2, finance.

Thomas DUQUESNE [1]

2022-2023

[1]Sorbonne Université, Campus Pierre et Marie Curie, LPSM, Case courrier 158, 4 place Jussieu, 75252 Paris Cedex 05 France; email: thomas.duquesne@sorbonne-universite.fr

Contents

Avertissement.

Ces notes sont un document de travail pour vous aider à assimiler les notions de ce cours concentré. Je tiens à préciser qu'*elles ne sont destinées qu'aux étudiants du M2 de finance et que je n'autorise aucune forme de diffusion autre qu'interne au M2*. Elles ne remplacent pas la prise de notes: en effet, ce polycopié contient beaucoup (trop) de détails; par ailleurs, je n'ai pas jugé utile de recopier le chapitre 7 du Lamberton et Lapeyre, qui constitue la fin du cours.

Le premier chapitre expose quelques résultats sur les mesures signées, les fonctions à variation bornée et la formule de Doléans-Dade dans ce cadre déterministe. J'ai repris des notes de cours de G. Pagès.

Le chapitre 2 expose les principaux résultats sur les processus de Poisson. Une bonne référence sur le sujet est le livre de J.F. Kingman, *Poisson Processes* (Oxford studies in probability Nr 3, Clarendon Press, Oxford 1993). Dans le cours effectivement donné, je simplifie et admets quelques détails techniques: ils sont prouvés dans ces notes. En plus de la définition d'un processus de Poisson, il faut essentiellement retenir les principales propriétés (restriction, disjonction, superposition, image), la construction, la formule de Palm et les formules exponentielles. Un exemple récapitulatif est détaillé.

Le chapitre 4 regroupe quelques exercices. Il y en a peu: il faut donc les faire. Quasiment toutes les idées nécessaires à la résolution des exercices concernant les nuages Poissonniens sont exposées dans l'exemple de la fin du chapitre 2. Les deux exercices sur les modèles d'actifs avec sauts ne sont pas compliqués. Je signale que 5 exercices sont donnés à la fin du chapitre 7 du Lamberton et Lapeyre. Refaire, pour soi et en détail, la preuve du calcul du risque quadratique constitue également un bon entrainement.

Je vous souhaite un bon travail.

Le 26 Janvier 2023,

Thomas Duquesne.

Chapter I

Etude déterministe.

I.1 Rappels sur les mesures signées.

I.1.a Généralités.

Définition I.1.1 Soit $(E, \mathscr{E})$ un ensemble mesurable. Soit $\mu : \mathscr{E} :\to \mathbb{R}$. On dit que μ est une mesure signée si pour toute suite $A_n \in \mathscr{E}$, $n \in \mathbb{N}$, d'ensembles deux-à-deux disjoints, on a $\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(A_n)| < \infty$ et

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \ . \tag{I.1}$$

□

On vérifie immédiatement que $\mu(\emptyset) = 0$. Soient $A, B \in \mathscr{E}$, deux ensembles disjoints. En prenant dans (I.1) $A_0 = A$, $A_1 = B$ et $A_n = \emptyset$, $n \geq 1$, on a $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$. Par conséquent, pour tout $C \in \mathscr{E}$, $\mu(E \backslash C) = \mu(E) - \mu(C)$.

Contrairement aux mesures positives, une mesure signée ne peut pas prendre de valeur infinie. Une mesure positive $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ est une mesure signée *ssi* elle est de masse finie.

Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable et soient μ_1 et μ_2, deux mesures de masse finie. On définit une fonction μ sur $\mathscr{E}$ par

$$\forall A \in \mathscr{E} \ , \quad \mu(A) = \mu_2(A) - \mu_1(A) \ . \tag{I.2}$$

Il est facile de vérifier que μ est une mesure signée. On la note $\mu = \mu_2 - \mu_1$. Supposons par exemple que E contienne deux éléments distincts x et y. On pose $\mu = \delta_x - \delta_y$. On pose $A = \{x\}$ et $B = E$. On a $\mu(A) = 1 \geq 0 = \mu(B)$ bien que $A \subset B$. Les mesures signées n'ont donc pas de propriété de monotonie simple. Néanmoins, on a le résultat suivant qui est l'équivalent de la propriété de monotonie séquentielle des mesures positives.

Lemme I.1.1 *Soit μ une mesure signée sur $(E, \mathscr{E})$. Soit $A_n \in \mathscr{E}$, $n \in \mathbb{N}$.*

(i) On suppose que $A_n \subset A_{n+1}$. Alors, $\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_n \mu(A_n)$.

(ii) On suppose que $A_{n+1} \subset A_n$. Alors, $\mu\Big(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \lim_n \mu(A_n)$.

Preuve: (b) se déduit de (a) par passage au complémentaire. Il suffit donc de montrer (a): on pose $B_0 = A_0$ et $B_n = A_n \backslash A_{n-1}$, pour tout $n \geq 1$. On voit que les B_n sont disjoints deux-à-deux, que

$A_n = \bigcup_{0\leq k\leq n} B_k$ et $\bigcup B_n = \bigcup A_n$. On a alors les égalités suivantes:

$$\mu\Big(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\Big) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(B_n) = \lim_n \sum_{0\leq k\leq n} \mu(B_k) = \lim_n \mu(A_n) \ ,$$

ce qui termine la preuve. ■

Comme pour les mesures positives, le lemme précédent entraîne "l'unicité du prolongement des mesures signées."

Théorème I.1.2 *Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Soit $\mathscr{P}$ un pi-système engendrant $\mathscr{E}$. Si deux mesures signées coïncident sur $\mathscr{P}$, alors elle sont égales.*

Preuve: soient μ et ν, deux mesures signées coïncidant sur $\mathscr{P}$. On reprend la preuve du théorème d'unicité du prolongement des mesures positives en posant $\mathscr{L} = \{B \in \mathscr{E} : \mu(B) = \nu(B)\}$. On a supposé que $\mathscr{P} \subset \mathscr{L}$. La monotonie séquentielle des mesures signée établie au lemme I.1.1 et des arguments simples montrent que $\mathscr{L}$ est une classe monotone. Le théorème de la classe monotone implique alors que $\sigma(\mathscr{P}) \subset \mathscr{L}$; comme $\mathscr{L} \subset \mathscr{E}$, on a donc $\mathscr{L} = \mathscr{E}$, qui est bien équivalent à $\mu = \nu$. ■

I.1.b Décomposition de Jordan, variation totale et intégrale d'une mesure signée.

Le théorème de Jordan, qui est le principal résultat de cette section, montre que toute mesure signée est de la forme (I.2).

Théorème I.1.3 **(Décomposition de Jordan)** *Soit μ une mesure signée sur l'espace mesurable $(E, \mathscr{E})$. Il existe deux ensembles A^+ et A^- dans $\mathscr{E}$ tels que $A^+ \cap A^- = \emptyset$, $A^+ \cup A^- = E$ et tels que si pour tout $B \in \mathscr{E}$, on pose $\mu^+(B) = \mu(A^+ \cap B)$ et $\mu^-(B) = -\mu(A^- \cap B)$, alors μ^+ et μ^- sont deux mesures positives de masse finie ayant les propriétés suivantes.*

(i) $\mu = \mu^+ - \mu^-$ *et pour tout* $B \in \mathscr{E}$,

$$\mu^+(B) = \sup\big\{\mu(C)\,;\, C \in \mathscr{E} : C \subset B\big\} \quad \textit{et} \quad \mu^-(B) = -\inf\big\{\mu(C)\,;\, C \in \mathscr{E} : C \subset B\big\}.$$

(ii) (μ^+, μ^-) *est l'unique couple de mesures positives de masse finie tel que si* $\mu_1, \mu_2 : \mathscr{E} \to \mathbb{R}_+$ *sont deux mesures de masse finie satisfaisant* $\mu = \mu_2 - \mu_1$, *alors*

$$\forall B \in \mathscr{E} \ , \quad \mu_2(B) \geq \mu^+(B) \quad \text{et} \quad \mu_1(B) \geq \mu^-(B) \ . \tag{I.3}$$

Le couple (μ^+, μ^-) est la décomposition de Jordan de μ.

Preuve: on note $M = \sup\{\mu(A)\ ;\ A \in \mathscr{E}\}$ qui appartient a priori à $[0, \infty]$ (en effet, $M \geq 0$, car $\mu(\emptyset) = 0$). On montre d'abord que

$$\exists A^+ \in \mathscr{E} \ : \quad \mu(A^+) = M < \infty \ . \tag{I.4}$$

Par définition de M, il existe des ensembles $A_n \in \mathscr{E}$, $n \in \mathbb{N}$, tels que $\lim_n \mu(A_n) = M$. On pose $A = \bigcup A_n$ et pour tout n, on note $\mathscr{P}_n$ la classe de tous les ensembles *non-vides* de la forme $\bigcap_{0\leq k\leq n} A'_k$ où pour chaque $0 \leq k \leq n$, l'ensemble A'_k peut être soit A_k, soit $A\backslash A_k$. On note $N(n)$ le cardinal de $\mathscr{P}_n$, et on observe que $N(n) \leq 2^{n+1}$. De plus, on remarque que les éléments non-vides de $\mathscr{P}_n$ forment une partition de A. Si on se donne la notation $\mathscr{P}_n = \{B_{n,i}\,;\ 1 \leq i \leq N(n)\}$, on voit que chaque $B_{n-1,j} \in \mathscr{P}_{n-1}$ est réunion d'éléments $B_{n,i}$ de $\mathscr{P}_n$:

$$B_{n-1,j} = \bigcup \left\{ B_{n,i}\ ;\ i \in \{0, \dots, N(n)\}\ :\ B_{n,i} \subset B_{n-1,j} \right\} ,$$

c'est-à-dire que $\mathscr{P}_n$ est une partition de A qui est plus fine que $\mathscr{P}_{n-1}$. On note ensuite $J_n = \{1 \leq i \leq N(n) : \mu(B_{n,i}) \geq 0\}$ et on pose $C_n = \bigcup_{i \in J_n} B_{n,i}$. Comme A_n est la réunion de certains $B_{n,i}$, on a:

$$\mu(A_n) \leq \mu(C_n)\ . \tag{I.5}$$

Soit $m < n$. Comme $\mathscr{P}_n$ est plus fine que $\mathscr{P}_m$, $(C_m \cup \ldots \cup C_n) \backslash (C_m \cup \ldots \cup C_{n-1})$ est la réunion de certains $B_{n,i}$ tels que $\mu(B_{n,i}) \geq 0$. On en déduit alors que $\mu(C_m \cup \ldots \cup C_n) \geq \mu(C_m \cup \ldots \cup C_{n-1})$. Et en répétant cet argument, par (I.5), on obtient

$$\forall m < n\ , \quad \mu(A_m) \leq \mu(C_m) \leq \mu(C_m \cup C_{m+1}) \leq \ldots \leq \mu(C_m \cup \ldots \cup C_n)\ . \tag{I.6}$$

On pose alors $D_m = \bigcup_{n \geq m} C_n$. Le lemme I.1.1 (a) et l'inégalité précédente entraînent que $\mu(A_m) \leq \mu(D_m)$, pour tout $m \geq 1$. On pose ensuite $A^+ = \bigcap_{m \geq 0} D_m$. En remarquant que $D_{m+1} \subset D_m$, le lemme I.1.1 (b) entraîne que $\lim_m \mu(D_m) = \mu(A^+)$ et l'inégalité précédente implique alors: $M = \lim_n \mu(A_m) \leq \lim_m \mu(D_m) = \mu(A^+)$, ce qui prouve (I.4), par définition de M.

Soit $B \in \mathscr{E}$ tel que $B \subset A^+$. Si $\mu(B) < 0$, alors $M = \mu(A^+) = \mu(B) + \mu(A^+ \backslash B) < \mu(A^+ \backslash B)$, ce qui contredit la définition de M. On pose $A^- = E \backslash A^+$ et de même, si $B \subset A^-$ est tel que $\mu(B) > 0$, comme $B \cap A^+ = \emptyset$, on a $\mu(A^+ \cup B) = \mu(A^+) + \mu(B) > \mu(A^+) = M$, ce qui contredit la définition de M. On en déduit que

$$\forall B \subset A^+\ ,\ \forall C \subset A^-\ , \quad \mu(B) \geq 0 \quad \text{et} \quad \mu(C) \leq 0\ . \tag{I.7}$$

On définit ensuite μ^+ et μ^- comme dans le théorème. Il est clair que ce sont des fonctions sigma-additives d'ensembles, par ailleurs elles sont positives: ce sont donc des mesures positives sur $\mathscr{E}$. Comme A^+ et A^- forment une partition de E, on a bien $\mu = \mu^+ - \mu^-$. Enfin, pour tous $B, C \in \mathscr{E}$ tels que $C \subset B$, on a

$$\mu(C) = \mu^+(C) - \mu^-(C) \leq \mu^+(C) \leq \mu^+(B) = \mu(A^+ \cap B)\ .$$

Cela entraîne que $\sup\{\mu(C)\,;\ C \in \mathscr{E} : C \subset B\} = \mu^+(B)$. On démontre de la même manière la formule pour μ^-, ce qui prouve (i).

Montrons que (μ^+, μ^-) satisfait (I.3): soit $B \in \mathscr{E}$. Pour tout $C \in \mathscr{E}$ tel que $C \subset B$, on a $\mu(C) = \mu_2(C) - \mu_1(C) \leq \mu_2(C) \leq \mu_2(B)$. En passant au sup en C, on a $\mu^+(B) \leq \mu_2(B)$. L'inégalité $\mu^-(B) \leq \mu_1(B)$, se démontre de manière similaire. Si (ν^+, ν^-) est un couple de mesures positives de masse finie satisfaisant (I.3), on obtient alors $\mu^{+/-}(B) \leq \nu^{+/-}(B)$ mais aussi $\mu^{+/-}(B) \geq \nu^{+/-}(B)$, pour tout $B \in \mathscr{E}$, ce qui achève la preuve du théorème. ■

Variation totale d'une mesure signée. On rappelle les notations $(y)^+ = \max(0, y)$ et $(y)^- = \max(0, -y)$, pour respectivement la partie positive et la partie négative du réel y. Ce sont des fonctions continues positives telles que $|y| = (y)^+ + (y)^-$ et $y = (y)^+ - (y)^-$. On a donc

$$(y)^+ = \tfrac{1}{2}(|y| + y) \quad \text{et} \quad (y)^- = \tfrac{1}{2}(|y| - y)\ .$$

Pour une mesure signée μ^+ joue le rôle de la partie positive de μ et μ^- celui de sa partie négative. La "valeur absolue" d'une mesure signée est plutôt appelée *variation totale* et elle se définit comme suit.

Définition I.1.2 Soit μ une mesure signée sur l'espace mesurable $(E, \mathscr{E})$. Soit (μ^+, μ^-) la décomposition de Jordan de μ. Alors $\mu^+ + \mu^-$ est une mesure positive de masse finie que l'on appelle *variation totale* de μ. On la note $|\mu|$. □

Pour tout $A \in \mathscr{E}$, on voit que

$$|\mu|(A) = \mu^+(A) + \mu^-(A) \geq |\mu^+(A) - \mu^-(A)| = |\mu(A)| \ ,$$

mais en général cette inégalité est stricte. On remarque également que $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| + \mu)$ et $\mu^+ = \frac{1}{2}(|\mu| - \mu)$. Si A^+ et A^- sont comme dans le théorème de décomposition de Jordan, on a aussi

$$\forall B \in \mathscr{B} \ , \quad |\mu|(B \cap A^{+/-}) = \mu^{+/-}(B) \ . \tag{I.8}$$

Si μ est une mesure positive de masse finie, on a donc $\mu^- = 0$ et $\mu = |\mu| = \mu^+$.

Intégrale d'une mesure signée. Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable. Soit $\mu : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$, une mesure signée. On note (μ^+, μ^-) sa décomposition de Jordan et $|\mu|$ sa variation totale. On rappelle la notation de l'espace vectoriel des fonctions $|\mu|$-intégrables:

$$\mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, |\mu|) = \Big\{ u : E \to \mathbb{R} \ : \ u \text{ est } \mathscr{E}\text{-mesurable et } \int_E |u| \, d|\mu| < \infty \Big\} \ .$$

Puisque $\mu = \mu^+ + \mu^-$, il est facile de vérifier que

$$\mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, |\mu|) = \mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu^+) \cap \mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, \mu^-) \ .$$

Pour toute fonction $u \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, |\mu|)$, et tout $A \in \mathscr{E}$, on pose alors

$$\int_A u \, d\mu = \int_A u \, d\mu^+ - \int_A u \, d\mu^- \ . \tag{I.9}$$

On vérifie immédiatement les propriétés suivantes

(a) $\int_A u \, d\mu = \int_E u \mathbf{1}_A \, d\mu$.

(b) Pour toutes fonctions $u, v \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, |\mu|)$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$,

$$\int_E (u + \lambda v) \, d\mu = \int_E u \, d\mu + \lambda \int_E v \, d\mu \ .$$

(c) $\big| \int_E u \, d\mu \big| \leq \int_E |u| \, d|\mu|$.

Pour prouver (c), on remarque que

$$\begin{aligned} \left| \int_E u \, d\mu \right| &= \left| \int_E u \, d\mu^+ - \int_E u \, d\mu^- \right| \leq \left| \int_E u \, d\mu^+ \right| + \left| \int_E u \, d\mu^- \right| \\ &\leq \int_E |u| \, d\mu^+ + \int_E |u| \, d\mu^- = \int_E |u| \, d|\mu| \ . \end{aligned}$$

On en déduit une version *signée* du théorème de convergence dominée.

Théorème I.1.4 *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable. Soit $\mu : \mathscr{E} \to \mathbb{R}$, une mesure signée. On note (μ^+, μ^-) sa décomposition de Jordan et $|\mu|$ sa variation totale. Soit $u_n : E \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$ et $u : E \to \mathbb{R}$, des fonctions $\mathscr{E}$-mesurables qui satisfont les hypothèses suivantes.*

(a) Il existe $g \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, |\mu|)$ telle que $|u_n| \leq g$, $|\mu|$-p.p. pour tout $n \in \mathbb{N}$.

(b) Pour $|\mu|$-presque tout x, $\lim_n u_n(x) = u(x)$.

Alors $u \in \mathscr{L}^1(E, \mathscr{E}, |\mu|)$, $\lim_n \int_E |u - u_n| \, d\mu^{+/-} = 0$ et

$$\lim_n \int_E u_n \, d\mu = \int_E u \, d\mu \ .$$

Preuve: c'est une conséquence immédiate du théorème de convergence dominée usuel appliqué à μ^+ et μ^-. ■

I.1.c Atomes, mesures diffuses.

Nous allons brièvement considérer les atomes et la partie diffuse d'une mesure signée ou positive. Pour que cette notion ait un sens il faut supposer que l'espace mesuré $(E, \mathscr{E})$, sur lequel sont définies les mesures que l'on considère, contient les singletons, c'est-à-dire

$$\forall x \in E \,, \quad \{x\} \in \mathscr{E} \ . \tag{I.10}$$

Définition I.1.3 Soit μ une mesure signée ou positive sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ satisfaisant (I.10). On dit que μ a un *atome* en $x \in E$ si $\mu(\{x\}) \neq 0$. La quantité $\mu(\{x\})$ est la masse de l'atome x de μ. On utilise la notation

$$\mathrm{Ato}(\mu) = \{x \in E \ : \ \mu(\{x\}) \neq 0\} \ .$$

Si une mesure n'a pas d'atome, on dit qu'elle est *diffuse*. □

Lemme I.1.5 *Soit μ une mesure signée ou positive sigma-finie, sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ satisfaisant (I.10). Alors $\mathrm{Ato}(\mu)$ est dénombrable (c'est-à-dire, vide, fini ou en bijection avec $\mathbb{N}$).*

Preuve: par la décomposition de Jordan ou par définition d'une mesure sigma-finie, on se ramène au cas d'une mesure positive μ de masse finie: $\mu(E) < \infty$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n = \{x \in E : \mu(\{x\}) > 2^{-n}\}$. Supposons que B_n compte au moins p points distinct $x_1, \ldots, x_p$. Par (I.10), $\{x_1, \ldots, x_p\} \in \mathscr{E}$ et

$$p2^{-n} \leq \mu(\{x_1\}) + \ldots + \mu(\{x_p\}) = \mu(\{x_1, \ldots, x_n\}) \leq \mu(E) < \infty \ .$$

Cela implique que B_n est un ensemble fini comptant au plus $2^n \mu(E)$ éléments. On conclut en remarquant que $\mathrm{Ato}(\mu) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. ■

Pour tout $B \subset E$, on pose $\#(B) = n$ si B est un ensemble fini à n éléments et $\#(B) = \infty$ si B est infini. Il est facile de montrer que $\#$ est une mesure positive: c'est la *mesure de comptage* qui est définie sur la tribu $\mathscr{P}(E)$ de tous les sous-ensembles de E. On remarque également que $\#(\{x\}) = 1$, pour tout $x \in E$. Par conséquent, $\mathrm{Ato}(\#) = E$. Si E n'est pas dénombrable, la mesure de comptage a une infinité non-dénombrable d'atomes. Le lemme précédent montre que $\#$ n'est pas sigma-finie, ce qui est facile à voir directement.

Lemme I.1.6 *Soit μ une mesure signée sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ satisfaisant (I.10). On a*

$$\forall x \in E\,, \quad (\mu(\{x\}))^+ = \mu^+(\{x\})\,, \quad (\mu(\{x\}))^- = \mu^-(\{x\}) \quad \text{et} \quad |\mu(\{x\})| = |\mu|(\{x\})\,.$$

On a donc $\mathrm{Ato}(\mu^+) \cap \mathrm{Ato}(\mu^-) = \emptyset$ *et* $\mathrm{Ato}(\mu^+) \cup \mathrm{Ato}(\mu^-) = \mathrm{Ato}(\mu) = \mathrm{Ato}(|\mu|)$. *De plus,*

$$\sum_{x \in \mathrm{Ato}(\mu)} |\mu(\{x\})| \leq |\mu|(E) < \infty\,.$$

Preuve: soient A^+ et A^- comme dans le théorème de décomposition de Jordan. Soit $x \in E$. Comme A^+ et A^- forment une partition de E: ou bien $x \in A^+$, ou bien $x \in A^-$. Dans le premier cas $\mu(\{x\}) = \mu(\{x\} \cap A^+) = \mu^+(\{x\}) \geq 0$. Dans le second cas, $-\mu(\{x\}) = \mu(\{x\} \cap A^-) = \mu^-(\{x\}) \geq 0$, ce qui entraîne le premier point du lemme. Le reste du lemme découle facilement de ce résultat. ■

Définition I.1.4 Soit μ une mesure signée ou positive sigma-finie sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ satisfaisant (I.10). On dit que μ est *purement atomique* s'il existe un ensemble dénombrable $D \subset E$ tel que $|\mu|(E \backslash D) = 0$, si μ est une mesure signée, ou tel que $\mu(E \backslash D) = 0$, si μ est une mesure sigma-finie. □

Exemple I.1.1 Soit $x_n \in E$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de points distincts et $a_n \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de réels *non-nuls* sommables: $\sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| < \infty$. Cela implique donc que $\sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n)^{+/-} < \infty$. On rappelle que δ_x est la masse de Dirac en x. On pose

$$\mu_1 = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n)^+ \delta_{x_n} \quad \text{et} \quad \mu_2 = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n)^- \delta_{x_n}\,.$$

Il est clair que μ_1 et μ_2 sont des mesures positives de masse finie:

$$\mu_1(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n)^+ < \infty \quad \text{et} \quad \mu_2(E) = \sum_{n \in \mathbb{N}} (a_n)^- < \infty\,.$$

En choisissant $D = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$, on vérifie facilement que μ_1 et μ_2 sont purement atomiques. On pose ensuite $\mu = \mu_1 - \mu_2$, qui est donc une mesure signée. Il est facile de vérifier que $\mu^+ = \mu_1$ et que $\mu^- = \mu_2$ et donc que $|\mu| = \sum_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \delta_{x_n}$. On voit donc que μ est purement atomique et on utilise la notation

$$\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n \delta_{x_n}\,. \tag{I.11}$$

Si on suppose seulement que les $a_n \in]0, \infty[$, $n \in \mathbb{N}$ (mais pas nécessairement que la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ soit sommable), alors on voit aisément que (I.11) définit également une mesure positive sigma-finie qui est purement atomique.

Dans les deux cas, c'est-à-dire si la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ réelle sommable ou si elle est positive, la mesure définie par (I.11) ne dépend pas de l'indexation des x_n et on a $\mathrm{Ato}(\mu) = \{x_n; n \in \mathbb{N}\}$. Le lemme suivant montre que toute mesure purement atomique est de la forme (I.11). □

Lemme I.1.7 *Soit μ une mesure signée ou positive sigma-finie sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ satisfaisant (I.10). On suppose que μ est purement atomique non-nulle. Alors*

$$\mu = \sum_{x \in \mathrm{Ato}(\mu)} \mu(\{x\}) \delta_x\,.$$

De plus, si μ est signée on a

$$\sum_{x\in \mathrm{Ato}(\mu)} |\mu(\{x\})| = |\mu|(E) < \infty \; .$$

Preuve: on ne détaille la preuve que dans le cas où μ est une mesure signée, le cas sigma-fini se prouvant de manière similaire. Il existe un ensemble dénombrable $D \subset E$ tel que $|\mu|(E\backslash D) = 0$. D'après le lemme I.1.6, on a $|\mu|(D) = \sum_{x\in D} |\mu|(\{x\}) = \sum_{x\in D} |\mu(\{x\}| < \infty$. On peut donc se ramener au cas où $D = \mathrm{Ato}(\mu)$. Comme $|\mu(B)| \leq |\mu|(B)$, pour tout $B \in \mathscr{E}$, on a $\mu(B \cap (E\backslash \mathrm{Ato}(\mu))) = 0$ et donc

$$\forall B \in \mathscr{E} \; , \quad \mu(B) = \mu(B\cap \mathrm{Ato}(\mu)) = \sum_{x\in \mathrm{Ato}(\mu)} \mu(\{x\})\mathbf{1}_B(x) \; ,$$

ce qui entraîne facilement le résultat voulu. ■

Théorème I.1.8 *Soit μ une mesure signée ou positive sigma-finie sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ satisfaisant (I.10). On pose*

$$\mu_{\mathbf{a}} = \sum_{x\in \mathrm{Ato}(\mu)} \mu(\{x\})\delta_x \quad \text{et} \quad \mu_{\mathbf{d}} = \mu(\,\cdot\, \cap (E\backslash \mathrm{Ato}(\mu)) \; ,$$

avec la convention $\mu_{\mathbf{a}} = 0$ et donc $\mu_{\mathbf{d}} = \mu$ si $\mathrm{Ato}(\mu) = \emptyset$. Les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) $\mu_{\mathbf{a}}$ et $\mu_{\mathbf{d}}$ sont des fonctions d'ensemble bien définies: ce sont des mesures signées si μ est une mesure signée et ce sont des mesures positives sigma-finies si μ l'est. On a $\mu = \mu_{\mathbf{a}} + \mu_{\mathbf{d}}$. De plus, $\mu_{\mathbf{a}}$ est purement atomique telle que $\mathrm{Ato}(\mu_{\mathbf{a}}) = \mathrm{Ato}(\mu)$ et $\mu_{\mathbf{d}}$ est diffuse. Enfin $(\mu_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a}} = \mu_{\mathbf{a}}$ et $(\mu_{\mathbf{d}})_{\mathbf{d}} = \mu_{\mathbf{d}}$.

(ii) Soient μ_1 et μ_2, deux mesures de même nature que μ (signées si μ l'est ou positives sigma-finies si μ l'est) telles que $\mu = \mu_1 + \mu_2$. On suppose que μ_1 est purement atomique et que μ_2 est diffuse. Alors $\mu_1 = \mu_{\mathbf{a}}$ et $\mu_2 = \mu_{\mathbf{d}}$.

Preuve: si la mesure μ est signée, le lemme I.1.6 implique que $\sum_{x\in \mathrm{Ato}(\mu)} |\mu(\{x\})| < \infty$. D'après la discussion qui précède l'énoncé du lemme I.1.7, $\mu_{\mathbf{a}}$ est une mesure purement atomique bien définie qui est de même nature que μ. Il est clair que $\mathrm{Ato}(\mu_{\mathbf{a}}) = \mathrm{Ato}(\mu)$. Comme la mesure est purement atomique, il est également clair que $(\mu_{\mathbf{a}})_{\mathbf{a}} = \mu_{\mathbf{a}}$.

On voit ensuite que $\mu_{\mathbf{d}}$ une mesure bien définie car c'est la restriction de μ à $E\backslash \mathrm{Ato}(\mu)$, qui est clairement de même nature que μ. Il est clair que $\mu_{\mathbf{d}}$ est diffuse. Donc $(\mu_{\mathbf{d}})_{\mathbf{a}} = 0$, ce qui entraîne que $(\mu_{\mathbf{d}})_{\mathbf{d}} = \mu_{\mathbf{d}}$. On voit que

$$\mu_{\mathbf{a}} = \mu\big(\,\cdot\, \cap \mathrm{Ato}(\mu)\big) \quad \text{et} \quad \mu_{\mathbf{d}} = \mu\big(\,\cdot\, \cap (E\backslash \mathrm{Ato}(\mu))\big) \; ,$$

ce qui entraîne que $\mu = \mu_{\mathbf{a}} + \mu_{\mathbf{d}}$. Cela termine la preuve du point (i).

Montrons le point (ii): puisque μ_2 est diffuse, $\mu(\{x\}) = \mu_1(\{x\})$ et on on $\mathrm{Ato}(\mu) = \mathrm{Ato}(\mu_1)$. Le lemme I.1.7 permet de conclure. ■

La proposition suivante résulte immédiatement des résultats précédents.

Proposition I.1.9 *Soit μ une mesure signée sur un espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ satisfaisant (I.10). On a*

$$(\mu^+)_{\mathbf{a}} = (\mu_{\mathbf{a}})^+ = \sum_{x \in \mathrm{Ato}(\mu)} (\mu(\{x\}))^+ \delta_x \quad \text{et} \quad (\mu^-)_{\mathbf{a}} = (\mu_{\mathbf{a}})^- = \sum_{x \in \mathrm{Ato}(\mu)} (\mu(\{x\}))^- \delta_x \ .$$

Par conséquent, $(|\mu|)_{\mathbf{a}} = |\mu_{\mathbf{a}}| = \sum_{x \in \mathrm{Ato}(\mu)} |\mu(\{x\})| \delta_x$. *De plus,* $(\mu^+)_{\mathbf{d}} = (\mu_{\mathbf{d}})^+$, $(\mu^-)_{\mathbf{d}} = (\mu_{\mathbf{d}})^-$ *et* $(|\mu|)_{\mathbf{d}} = |\mu_{\mathbf{d}}|$.

Autrement dit, les opérations consistant à prendre la partie atomique et la partie diffuse d'une mesure signée commutent avec les opérations consistant à prendre la variation positive, la variation négative et la variation totale d'une mesure.

I.2 Fonctions à variation bornée.

Le but de cette section est de définir des intégrales du type $\int_{[a,b]} u(s) dF(s)$ pour une classe "raisonnable" de fonctions u et F. Par "raisonnable", il faut comprendre que nous allons considérer une classe de fonctions F pour lesquelles le problème se ramène à la théorie de la mesure usuelle.

I.2.a Fonctions croissantes et mesures de Stieltjes.

Nous commençons tout d'abord par examiner le cas des fonctions croissantes. Dans cette section a et b désignent deux réels distincts tels que $a < b$. L'intervalle $[a, b]$ est muni de ses Boréliens dont l'ensemble est noté $\mathscr{B}([a, b])$. Il est sous-entendu que toute mesure sur $[a, b]$ est au moins définie sur les Boréliens de $[a, b]$. On note ℓ la mesure de Lebesgue.

Soit une mesure positive finie μ sur $[a, b]$. On note $F_\mu : [a, b] \to \mathbb{R}_+$, sa *fonction de répartition*:

$$\forall t \in [a, b] \, , \quad F_\mu(t) = \mu([a, t]) \ . \tag{I.12}$$

Comme μ est positive, F_μ est croissante. La monotonie séquentielle des mesures positives implique que pour toute suite $h_n \in \mathbb{R}_+^*$, $n \in \mathbb{N}$ décroissant vers 0, on ait

$$\lim_{n \to \infty} \mu([a, t + h_n]) = \mu([a, t]) \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} \mu([a, t - h_n]) = \mu([a, t[\,) \ .$$

Cela implique que F_μ est continue à droite et que pour tout $t \in]a, b]$, $F_\mu(t-) = \mu([a, t[\,)$, où $F_\mu(t-)$ désigne la limite à gauche de F_μ. Il est alors logique d'adopter la convention $F_\mu(a-) = 0$. Pour tout $t \in [a, b]$, on pose $\Delta F_\mu(t) = F_\mu(t) - F_\mu(t-)$. La fonction F_μ est continue en t ssi $\Delta F_\mu(t) = 0$ et on vérifie que

$$\forall t \in [a, b] \, , \quad \Delta F_\mu(t) = \mu(\{t\}) \quad \text{et} \quad \mathrm{Ato}(\mu) = \{t \in [a, b] : \Delta F_\mu(t) > 0\} \ .$$

Autrement dit $\mathrm{Ato}(\mu)$ est l'ensemble des points de discontinuité de F_μ et μ est diffuse ssi F_μ est continue. Le théorème suivant montre que réciproquement, à toute fonction croissante continue à droite, on peut associer une mesure finie dont elle est la fonction de répartition (à une constante additive près).

Théorème I.2.1 **(Lebesgue-Stieltjes)** *Soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$, une fonction croissante et continue à droite. Il existe une unique mesure positive μ définie sur les Boréliens de $[a, b]$ telle que*

$$\mu([a, t]) = F(t) - F(a) \, , \quad t \in [a, b] \ . \tag{I.13}$$

On observe que $\mu(\{a\}) = 0$ et que $F(t) = F(a) + F_\mu(t)$, pour tout $t \in [a, b]$. La mesure μ est appelée mesure de Stieltjes associée à F et elle est notée $\mu = dF$.

Preuve: on pose $M = F(b) - F(a)$ et on définit une fonction croissante $F^{-1} : [0, M] \to [a, b]$ en posant

$$F^{-1}(y) = \inf\big\{t \in [a,b] \ : \ F(t) - F(a) > y\big\} \quad \text{si } y < M \quad \text{et} \quad F(M) = b.$$

On montre ensuite que F^{-1} est continue à droite. On raisonne par l'absurde en supposant l'existence de $0 \leq y < M$ et de t, tels que

$$F^{-1}(y) < t < \inf_{h>0} F^{-1}(y+h) = F^{-1}(y+) \ .$$

Alors la première inégalité montre que $F(t) - F(a) > y$. La seconde inégalité implique que pour tout h suffisamment petit on a $F(t) - F(a) \leq y + h$, et donc que $F(t) - F(a) \leq y$, ce qui entraine une contradiction. Par conséquent F^{-1} est continue à droite. On voit ensuite que

$$\forall y \in [0, M] \, , \quad F\big(F^{-1}(y) - \big) \leq y \leq F\big(F^{-1}(y)\big) \ . \tag{I.14}$$

On note μ la mesure image par F^{-1} de la restriction de de la mesure de Lebesgue ℓ à l'intervalle $[0, M]$, c'est-à-dire

$$\forall B \in \mathscr{B}([a,b]) \, , \quad \mu(B) = \ell\big(\{y \in [0,M] \, : F^{-1}(y) \in B\}\big) \ .$$

On calcule ensuite la fonction de répartition de μ. Pour cela on fixe $t \in [0, M]$ et on montre

$$[0, F(t) - F(a)[\subset \{y \in [0, M[: F^{-1}(y) \in [a, t]\} \subset [0, F(t) - F(a)] \ . \tag{I.15}$$

En effet, si $y < F(t) - F(a)$, alors, $a \leq F^{-1}(y) \leq t$, par définition. Supposons maintenant que $t < M$ et que $F^{-1}(y) \leq t$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $t + \varepsilon < M$, on a $F(t + \varepsilon) - F(a) > y$. On fait tendre ε vers 0 et par continuité à droite de F, on obtient $F(t) - F(a) \geq y$, ce qui entraîne (I.15).

L'inclusion (I.15) implique que $\mu([a, t]) = \ell([0, F(t) - F(a)]) = F(t) - F(a)$, ce qui montre l'existence d'une mesure satisfaisant (I.13). L'unicité vient de la remarque suivante: la classe d'ensembles $\mathscr{P} = \{[a, t] \, ; \, t \in [a, b]\} \cup \{\emptyset\}$ est un pi-système qui génère $\mathscr{B}([a, b])$. Le théorème d'unicité du prolongement des mesures permet alors de conclure la preuve. ■

Ce théorème permet de résoudre le problème que l'on s'est posé dans le cas des fonctions croissantes continues à droite. Si u est dF-intégrable, on utilise les notations

$$\forall B \in \mathscr{B}([a,b]) \, , \quad \int_B u dF = \int_{[a,b]} \mathbf{1}_B u \, dF = \int_B u(s) \, dF(s) \ .$$

Mentionnons que comme dF est une mesure finie, toute fonction Borélienne bornée $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ est intégrable. En utilisant les argument de la preuve du théorème de Lebesgue-Stieljes, on prouve également le lemme suivant qui est utile plus loin dans le chapitre.

Lemme I.2.2 *Soit $T > 0$ et soit $F : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction croissante continue à droite telle que $F(0) = 0$. Alors pour tout $n \geq 1$, et tout $t \in [0, T]$,*

$$\int_{[0,t]} \tfrac{1}{(n-1)!} F(s-)^{n-1} \, dF(s) \leq \tfrac{1}{n!} F(t)^n \leq \int_{[0,t]} \tfrac{1}{(n-1)!} F(s)^{n-1} \, dF(s) \ . \tag{I.16}$$

Preuve: on pose $M = F(T)$ et on définit $F^{-1} : [0,T] \to [0,M]$ comme dans la preuve du théorème I.2.1 de Lebesgue-Stieltjes. On y a montré $\mu := dF$ est la mesure image par F^{-1} de la mesure de Lebesgue ℓ restreinte à $[0,M]$. Le théorème de changement de variable abstrait (ou théorème de transfert) implique que pour toute fonction Borélienne bornée $g : [0,T] \to \mathbb{R}$, on a

$$\int_{[0,T]} g(s)dF(s) = \int_{[0,M]} g\big(F^{-1}(y)\big)\, d\ell(y)\ . \tag{I.17}$$

On a donc

$$\int_{[0,t]} F(s-)^{n-1} dF(s) = \int_{[0,M]} \mathbf{1}_{[0,t]}\big(F^{-1}(y)\big) F\big(F^{-1}(y)-\big)^{n-1} d\ell(y).$$

En effet, on a appliqué (I.17) à $g(s) = \mathbf{1}_{[0,t]}(s) F(s-)^{n-1}$. Par (I.14) et (I.15), on a

$$\mathbf{1}_{[0,t]}\big(F^{-1}(y)\big)\, F\big(F^{-1}(y)-\big)^{n-1} \leq \mathbf{1}_{[0,F(t)]}(y)\, y^{n-1}\ ,$$

ce qui entraîne donc que $\int_{[0,t]} F(s-)^{n-1} dF(s) \leq \int_{[0,F(t)]} y^{n-1} d\ell(y) = \frac{1}{n} F(t)^n$, et cela prouve la première inégalité du lemme.

Pour prouver la seconde inégalité, on applique (I.17) à $g(s) = \mathbf{1}_{[0,t]}(s) F(s)^{n-1}$, pour obtenir

$$\int_{[0,t]} F(s)^{n-1} dF(s) = \int_{[0,M]} \mathbf{1}_{[0,t]}\big(F^{-1}(y)\big) F\big(F^{-1}(y)\big)^{n-1} d\ell(y).$$

Par (I.14) et (I.15), on a $\mathbf{1}_{[0,t]}\big(F^{-1}(y)\big)\, F\big(F^{-1}(y)\big)^{n-1} \geq \mathbf{1}_{[0,F(t)[}(y)\, y^{n-1}$, ce qui entraîne donc que $\int_{[0,t]} F(s)^{n-1} dF(s) \geq \int_{[0,F(t)[} y^{n-1} d\ell(y) = \frac{1}{n} F(t)^n$. ■

La formule d'intégration par parties suivante est utile plus loin dans le chapitre.

Proposition I.2.3 *Soit $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$, deux fonctions croissantes continues à droite. Alors pour tout $t \in [a,b]$, on a*

$$F(t)G(t) - F(a)G(a) = \int_{[a,t]} F(s-)\, dG(s) + \int_{[a,t]} G(s)\, dF(s)\ .$$

Preuve: par le théorème de Fubini pour les mesures positives, on justifie les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
(F(t)-F(a))(G(t)-G(a)) &= \iint_{[a,t]\times[a,t]} dF(s)\, dG(r) \\
&= \iint_{\{a\leq s<r\leq t\}} dF(s)\, dG(r) + \iint_{\{a\leq r\leq s\leq t\}} dF(s)\, dG(r) \\
&= \int_{[a,t]} (F(r-)-F(a))\, dG(r)\ + \int_{[a,t]} (G(s)-G(a))\, dF(s)\ ,
\end{aligned}$$

qui donne bien le résultat, après simplification. Mentionnons que nous avons utilisé le fait suivant $\int_{[a,r[} dF(s) = \lim_{r'\uparrow r} \int_{[a,r']} dF(s) = \lim_{r'\uparrow r} F(r') - F(a) = F(r-) - F(a)$. ■

I.2.b Définition des fonctions à variation bornée.

Dans cette section, on définit de façon intrinsèque une classe de fonctions qui peuvent se voir comme des fonctions de répartition de mesures signées. Commençons par quelques définitions.

Définition I.2.1 Soient $a \leq c < d \leq b$ et soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.

(a) On rappelle que $S = \{s_0 = a < s_1 < \ldots < s_n = b\}$ est une *subdivision* de S dont le *pas* est défini par $\mathbf{pas}(S) = \max_{0 \leq i < n}(s_{i+1} - s_i)$. On note $\mathscr{S}([a, b])$ l'ensemble des subdivisions de $[a, b]$.

(b) On pose $V(S, F) = \sum_{0 \leq i \leq n-1} |F(s_{i+1}) - F(s_i)|$, pour toute subdivision $S = \{s_0 = c < t_1 < \ldots < s_n = d\}$ de $[c, d]$. On pose également

$$V_{[c,d]}(F) = \sup \left\{ V(S, F) \, ; \, S \in \mathscr{S}([c, d]) \right\} .$$

Si $V_{[c,d]}(F) < \infty$, on dit que F est *à variation bornée sur* $[c, d]$. □

Proposition I.2.4 *Soient $a < b$ et soit $F : [a, b] \to \mathbb{R}$.*

(i) Pour tous $c < d$ dans $[a, b]$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tous $t_1, \ldots, t_p \in [c, d]$, on a

$$V_{[c,d]}(F) = \sup \left\{ V(S, F) \, ; \, S \in \mathscr{S}([c, d]) : \mathbf{pas}(S) < \varepsilon \text{ et } \{t_1, \ldots, t_p\} \in S \right\} .$$

(ii) Soient $a \leq c_1 < c_2 < c_3 \leq b$. On suppose que $V_{[c_1,c_3]}(F) < \infty$. Alors,

$$V_{[c_1,c_2]}(F) + V_{[c_2,c_3]}(F) = V_{[c_1,c_3]}(F) .$$

Cela entraîne que si F est à variation bornée sur $[a, b]$, alors elle est à variation bornée sur tout sous-intervalle de $[a, b]$.

Preuve: le premier point se prouve en observant que pour tout $\varepsilon > 0$ et à toute subdivision S de $[c, d]$, on peut ajouter des points de façon à obtenir une subdivision S' telle que $S \subset S'$, $\{t_1, \ldots, t_p\} \in S'$ et $\mathbf{pas}(S') < \varepsilon$, et on a alors $V(S, F) \leq V(S', F)$.

Montrons (ii): soient $S \in \mathscr{S}([c_1, c_2])$ et $S' \in \mathscr{S}([c_2, c_3])$. Par conséquent $S \cup S' \in \mathscr{S}([c_1, c_3])$. On a clairement $V(S, F) + V(S', F) = V(S \cup S', F) \leq V_{[c_1,c_3]}(F)$, et, en passant au supremum,

$$V_{[c_1,c_2]}(F) + V_{[c_2,c_3]}(F) \leq V_{[c_1,c_3]}(F) .$$

Montrons l'inégalité contraire: comme $V_{[c_1,c_3]}(F) < \infty$, pour tout $\eta > 0$, il existe une subdivision $S = \{s_0 = c_1 < \ldots < s_n = c_3\}$ telle que $V_{[c_1,c_3]}(F) < V(S, F) + \eta$. D'après le premier point on peut supposer, sans perdre en généralité, que $c_2 = s_k \in S$. Si on pose $S' = [c_1, c_2] \cap S$ et $S'' = [c_2, c_3] \cap S$, on obtient

$$V_{[c_1,c_3]}(F) \leq V(S, F) + \eta = \eta + V(S', F) + V(S'', F) \leq \eta + V_{[c_1,c_2]}(F) + V_{[c_2,c_3]}(F)$$

Puisque η peut être choisi arbitrairement petit, cela entraîne l'inégalité contraire. ■

Définition I.2.2 Soient $a < b$ et soit F une fonction à variation bornée sur $[a, b]$.

(a) Pour tout $t \in [a, b]$, on pose $\mathbf{var}_F(x) = V_{[a,t]}(F)$. La fonction $\mathbf{var}_F$ est appelée la *variation de* F.

(b) Pour tous $c < d$ dans $[a, b]$ et pour toute subdivision $S = \{s_0 = c < \ldots < s_n = d\}$, on pose $V^+(S, F) = \sum_{0 \leq i < n} (F(s_{i+1}) - F(s_i))^+$ et $V^-(S, F) = \sum_{0 \leq i < n} (F(s_{i+1}) - F(s_i))^-$. Pour tout $t \in [a, b]$, on pose ensuite

$$\mathbf{var}_F^+(t) = \sup \big\{ V^+(S, F); S \in \mathscr{S}([a, t]) \big\} \text{ et } \mathbf{var}_F^-(t) = \sup \big\{ V^-(S, F); S \in \mathscr{S}([a, t]) \big\}.$$

La fonction $\mathbf{var}_F^+$ est appelée *variation positive de* F et la fonction $\mathbf{var}_F^-$ est appelée *variation négative de* F. □

Théorème I.2.5 *Soient $a < b$ et soit F une fonction à variation bornée sur $[a, b]$.*

(i) Les fonctions $\mathbf{var}_F$, $\mathbf{var}_F^+$ et $\mathbf{var}_F^-$ sont croissantes, nulles en a, et pour tout $t \in [a, b]$,

$$F(t) - F(a) = \mathbf{var}_F^+(t) - \mathbf{var}_F^-(t) \quad \text{et} \quad \mathbf{var}_F(t) = \mathbf{var}_F^+(t) + \mathbf{var}_F^-(t) \ .$$

F est donc bornée, ses discontinuité éventuelles sont de première espèce, et pour tout $t \in [a, b]$,

$$\mathbf{var}_F^+(t) = \tfrac{1}{2} \left(\mathbf{var}_F(t) + F(t) - F(a) \right) \quad \text{et} \quad \mathbf{var}_F^-(t) = \tfrac{1}{2} \left(\mathbf{var}_F(t) - F(t) + F(a) \right) \ .$$

(ii) Soit $G = g_2 - g_1$, où g_1 et g_2 sont des fonctions croissantes sur $[a, b]$. Alors G est à variation bornée sur $[a, b]$ et pour tout $t \in [a, b]$,

$$\mathbf{var}_G^+(t) \leq g_2(t) - g_2(a) \quad \text{et} \quad \mathbf{var}_G^-(t) \leq g_1(t) - g_1(a) \ .$$

Preuve: puisque F est à variation bornée, et que $S = \{a < t < b\}$ est une subdivision de $[a, b]$, on a $|F(a) - F(t)| + |F(t) - F(b)| \leq V_{[a,b]}(F)$, et on en déduit facilement que F est bornée. La proposition I.2.4 (ii) montre que $\mathbf{var}_F$ est une application croissante et par définition, on a $\mathbf{var}_F(a) = 0$. On observe pour toute subdivision $S = \{a = s_0 < \ldots < s_n = t\}$, que

$$V(S, F) + F(t) - F(a) = \sum_{0 \leq i < n} \big(|F(s_{i+1}) - F(s_i)| + F(s_{i+1}) - F(s_i) \big) = 2V^+(S, F) \ .$$

En passant au suprémum, on a donc $\mathbf{var}_F(t) + F(t) - F(a) = \mathbf{var}_F^+(t)$. De même, on a $\mathbf{var}_F(t) - F(t) + F(a) = \mathbf{var}_F^-(t)$. Il est ensuite facile de montrer que $\mathbf{var}_F^{+/-}$ sont des fonctions croissantes positives, ce qui entraîne le premier point du théorème.

Montrons (ii): pour toute subdivision $S = \{a = s_0 < \ldots < s_n = b\}$, on vérifie facilement que $V(S, G) \leq V(S, g_1) + V(S, g_2) = g_1(b) - g_1(a) + g_2(b) - g_2(a)$, ce qui implique que G est à variation bornée. On observe ensuite que pour tout $t \in [a, b]$ et toute subdivision $S = \{a = s_0 < \ldots < s_n = t\}$, on a

$$V^+(S, G) = \sum_{0 \leq i < n} \big(g_2(s_{i+1}) - g_2(s_i) - (g_1(s_{i+1}) - g_1(s_i)) \big)^+ \ .$$

Or $\big(g_2(s_{i+1}) - g_2(s_i) - (g_1(s_{i+1}) - g_1(s_i))\big)_+ \leq g_2(s_{i+1}) - g_2(s_i)$ car $g_1(s_{i+1}) - g_1(s_i)$ est une quantité positive et car $y \mapsto (y)^+$ est croissante. Donc $V^+(S, G) \leq g_2(t) - g_2(a)$, ce entraîne que $\mathbf{var}^+_G(t) \leq g_2(t) - g_2(a)$. On montre de la même façon que $\mathbf{var}^-_G(t) \leq g_1(t) - g_1(a)$, ce qui termine la preuve du point (ii). ■

Le théorème précédent ressemble à la décomposition de Jordan des mesures signées: il montre que les fonctions à variation bornée sont les fonctions qui s'expriment comme la différence de deux fonctions croissantes et que la décomposition en *variation positive moins variation négative* est minimale dans le sens du point (ii). Le lien entre mesures signées et fonctions à variation bornée peut être établi précisément mais il faut d'abord se préoccuper de la régularité (continuité à droite et à gauche) des fonctions à variation bornée, ce qui est l'objet de la proposition suivante.

Proposition I.2.6 *Soient $a < b$ et soit F une fonction à variation bornée sur $[a, b]$. Alors,*

(i) $\mathbf{var}^+_F(t) = \mathbf{var}^+_F(t+) - (F(t+) - F(t))^+ = \mathbf{var}^+_F(t-) + (F(t-) - F(t))^+$;

(ii) $\mathbf{var}^-_F(t) = \mathbf{var}^-_F(t+) - (F(t+) - F(t))^- = \mathbf{var}^-_F(t-) + (F(t-) - F(t))^-$;

(iii) $\mathbf{var}_F(t) = \mathbf{var}_F(t-) + |F(t-) - F(t)| = \mathbf{var}_F(t+) - |F(t+) - F(t)|$.

Notamment, si F est continue à droite (resp. à gauche) en t, alors il en est de même pour $\mathbf{var}_F$, $\mathbf{var}^+_F$ et $\mathbf{var}^-_F$. De même, si F est continue en t.

Preuve: comme $\mathbf{var}^+_F$ et $\mathbf{var}^-_F$ peuvent s'écrire en fonction de $\mathbf{var}_F$ et de F, (i) et (ii) se déduisent facilement de (iii), dont on donne la preuve. On rappelle que F admet une limite à gauche en tout point $t \in]a, b]$. Comme $\mathbf{var}_F$ est croissante, il est clair qu'elle admet également une limite à gauche en tout point de $]a, b]$. Il est ensuite facile de montrer que pour tous $a \leq s < t \leq b$, on a $\mathbf{var}_F(s) + |F(t) - F(s)| \leq \mathbf{var}_F(t)$ et en passant à la limite lorsque s tend vers t, on obtient

$$\mathbf{var}_F(t-) \leq \mathbf{var}_F(t) - |F(t) - F(t-)| \ . \tag{I.18}$$

Montrons l'inégalité contraire. Soit $\delta > 0$. Il existe $\eta > 0$, tel que pour tout s dans $[t - \eta, t]$, on ait

$$|F(t) - F(t-)| - \delta \leq |F(t) - F(s)| \leq |F(t) - F(t-)| + \delta \ .$$

Par la proposition I.2.4 (i), on peut trouver $S = \{s_0 = a < \ldots < s_n = t\}$ telle que $\mathbf{pas}(S) < \eta$ et $V_{[a,t]}(F) \leq V(S, F) + \delta$. Comme $\mathbf{pas}(S) < \eta$, $s_{n-1} \in [t - \eta, t]$ et donc

$$V(S, F) = V([a, s_{n-1}] \cap S, F) + |F(s_{n-1}) - F(t)| \leq \mathbf{var}_F(s_{n-1}) + |F(t-) - F(t)| + \delta.$$

Comme $\mathbf{var}_F(s_{n-1}) < \mathbf{var}_F(t-)$, on a donc $\mathbf{var}_F(t) \leq \mathbf{var}_F(t-) + |F(t-) - F(t)| + \delta$, pour tout $\delta > 0$, ce qui implique l'inégalité contraire de (I.18). Donc

$$\forall t \in]a, b] \ , \quad \mathbf{var}_F(t) = \mathbf{var}_F(t-) + |F(t-) - F(t)| \ . \tag{I.19}$$

On définit $\phi : [a, b] \to [a, b]$ par $\phi(t) = b + a - t$. L'application ϕ est une bijection linéraire telle que $\phi \circ \phi$ soit l'identité (c'est une involution). On pose $H = F \circ \phi$. On a donc $H \circ \phi = F$. Si F n'a que des discontinuités de première espèce, il en est de même pour H et on a de plus

$$F(t+) = H((b + a - t)-) \ . \tag{I.20}$$

Il est ensuite assez facile de voir que toute subdivision $S = \{s_0 = c < \ldots < s_n = d\}$ de $[c,d] \subset [a,b]$, est envoyée par ϕ sur $\phi(S) = \{\phi(s_n) < \ldots < \phi(s_0)\}$ qui est une subdivision de $[\phi(d), \phi(c)]$. De plus $V(S,F) = V(\phi(S), H)$. Cela entraîne que $\mathbf{var}_F(t) = V_{[a+b-t,b]}(H) = \mathbf{var}_H(b) - \mathbf{var}_H(a+b-t)$, pour tout $t \in [a,b]$. Si on applique (I.19) à H, alors (I.20) entraîne que $\mathbf{var}_F(t) = \mathbf{var}_F(t+) - |F(t+) - F(t)|$, ce qui entraîne (iii) et ce qui termine la preuve de la proposition. ∎

Comme les fonctions croissantes et continues à droites correspondent, à constante addtive près, aux fonctions de répartition de mesures positives, le théorème précédent permet de montrer qu'une fonction à variation bornée continue à droite est la fonction de répartition d'une mesure signée. Plus précisément, on a le résultat suivant.

Théorème I.2.7 *Soient $a < b$ et soit F une fonction à variation bornée sur $[a,b]$ que l'on suppose continue à droite. Alors, il existe une unique mesure signée $\mu : \mathscr{B}([a,b]) \to \mathbb{R}$ telle que*

$$F(t) - F(a) = \mu([a,t]) , \quad t \in [a,b] . \tag{I.21}$$

La mesure μ est notée dF et elle appelée mesure de Stieltjes associée à la fonction F. De plus

$$\mathbf{var}_F(x) = |\mu|([a,t]) , \quad \mathbf{var}_F^+(t) = \mu^+([a,t]) \quad \text{et} \quad \mathbf{var}_F^-(t) = \mu^-([a,t]) ,$$

où (μ^+, μ^-) est la décomposition de Jordan de μ et où $|\mu|$ est la variation totale de μ. Autrement dit

$$|\mu| = |dF| = d\mathbf{var} , \quad \mu^+ = (dF)^+ = d\mathbf{var}^+ \quad \text{et} \quad \mu^- = (dF)^- = d\mathbf{var}^- .$$

Preuve: soient θ^+ et θ^-, les mesures de Stieltjes associées aux fonctions continues à droite croissantes $\mathbf{var}_F^+$ et $\mathbf{var}_F^-$. On pose $\mu = \theta^+ - \theta^-$, qui est donc une mesure signée telle que

$$\forall t \in [a,b] , \quad \mu([a,t]) = \mathbf{var}_F^+(t) - \mathbf{var}_F^-(t) = F(t) - F(a) , \tag{I.22}$$

Supposons que ν soit une autre mesure signée satisfaisant (I.22). Elle coincide avec μ sur le pi-système $\mathscr{P} = \{[a,t] \; ; \; t \in [a,b]\} \cup \{\emptyset\}$ engendrant $\mathscr{B}([a,b])$. Le théorème d'unicité du prolongement des mesures signées I.1.2 implique que $\mu = \nu$, ce qui achève la preuve de l'existence et de l'unicité de μ.

On note (μ^+, μ^-), la décomposition de Jordan de μ. On remarque que $F(t) - F(a) = \mu^+([a,t]) - \mu^-([a,t])$. Soit $\varepsilon \in \{+,-\}$. Comme $t \mapsto \mu^\varepsilon([a,t])$ est une application croissante nulle en a, le théorème I.2.5 (ii) implique que $\theta^\varepsilon([a,t]) = \mathbf{var}_F^\varepsilon(t) \leq \mu^\varepsilon([a,t])$. Puisque $\mu = \theta^+ - \theta^- = \mu^+ - \mu^-$, la propriété de minimalité de la décomposition de Jordan montre que $\mu^\varepsilon(B) \leq \theta^\varepsilon(B)$, pour tout $B \in \mathscr{B}([a,b])$. En particulier, on doit avoir $\mu^\varepsilon([a,t]) \leq \theta^\varepsilon([a,t])$, et finalement $\mu^\varepsilon([a,t]) = \theta^\varepsilon([a,t]) = \mathbf{var}_F^\varepsilon(t)$. En sommant on en déduit $|\mu|([a,t]) = \mathbf{var}_F(t)$, ce qui termine la preuve du théorème. ∎

Intégrale contre une fonction à variation bornée. On peut maintenant résoudre le problème que l'on s'était posé dans le cadre des fonctions à variation bornée. Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction à variation bornée continue à droite. On pose

$$\forall B \in \mathscr{B}([a,b]) , \; \forall u \in \mathscr{L}^1(|dF|) , \quad \int_B u \, dF = \int_B u \, (dF)^+ - \int_B u \, (dF)^- .$$

On utilise également la notation $\int_B u(s)dF(s)$ pour spécifier la variable d'intégration. On rappelle que

$$u \in \mathscr{L}^1(|dF|) \mapsto \int_{[a,b]} u\, dF \text{ est une forme linéaire et } \Big| \int_{[a,b]} u\, dF \Big| \leq \int_{[a,b]} |u|\, |dF| \, . \tag{I.23}$$

La notation $\int udF$ se justifie (un peu comme dans le cas de l'intégrale d'Itô) par une approximation de type Riemann: si on suppose $u : [a,b] \to \mathbb{R}$ *continue*, pour tout $\varepsilon \in]0,\infty[$, on introduit son module d'uniforme continuité

$$w_u(\varepsilon) = \sup \big\{ |u(s) - u(t)| \; ; \; t,s \in [a,b] \, , \; |s-t| \leq \varepsilon \big\}$$

On a donc $\lim_{\varepsilon \to 0} w_u(\varepsilon) = 0$. Soit $S = \{s_0 = a < s_1 < \ldots < s_n = b\}$, on pose

$$I_F(u,S) = \sum_{0 \leq k < n} u(s_k) \big(F(s_{k+1}) - F(s_k) \big) \, .$$

On remarque que

$$I_F(u,S) - \int_{[a,b]} u(s)\, dF(s) = \sum_{0 \leq k < n} \int_{]s_k, s_{k+1}]} \big(u(s_k) - u(s) \big)\, dF(s) \, .$$

Par conséquent

$$\Big| \int_{[a,b]} u\, dF - I_F(u,S) \Big| \leq w_u\big(\mathbf{pas}(S)\big) \int_{[a,b]} |dF| \, .$$

Par conséquent, pour toute suite $S_n \in \mathscr{S}([a,b])$ telle que $\lim_n \mathbf{pas}(S_n) = 0$, on a

$$\lim_n I_F(u, S_n) = \int_{[a,b]} u\, dF \, .$$

Dans ce chapitre, même si on utilise du calcul intégral classique, on travaille sur des fonctions: le but est d'exposer des techniques de calcul intégro-différentiel. Pour cela on utilise le fait que l'espace d'intégration est $\mathbb{R}_+$ et on utilise les mesures signées sur $\mathbb{R}_+$, via leur fonctions de répartition pour produire de nouvelles fonctions. Par exemple, il est clair que l'on peut multiplier des fonctions à variation bornée (leur produit reste à variation bornée): c'est une opération très naturelle sur les fonctions mais qui l'est beaucoup moins pour les mesures de Stieltjes associées. La proposition suivante permet de répondre à cette question.

Proposition I.2.8 *Soit $F, G : [a,b] \to \mathbb{R}$, deux fonctions à variation bornée continues à droite. Alors pour tout $t \in [a,b]$, on a*

$$F(t)G(t) - F(a)G(a) = \int_{[a,t]} F(s-)\, dG(s) + \int_{[a,t]} G(s)\, dF(s) \, .$$

Preuve: on se ramène au cas des fonctions croissantes et des mesures positives en développant F en $\mathbf{var}_F^+ - \mathbf{var}_F^-$ et G en $\mathbf{var}_G^+ - \mathbf{var}_G^-$. Les détails sont laissés en exercice. ■

On conclut cette section par la proposition suivante qui est utile plus loin dans le chapitre.

Proposition I.2.9 *Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction à variation bornée, continue à droite. Soit $u \in \mathscr{L}^1(|dF|)$. On définit $G : [a,b] \to \mathbb{R}$ en posant*

$$\forall t \in [a,b] \ , \quad G(t) = \int_{[a,t]} u \, dF \ .$$

Alors, G est à variation bornée, continue à droite. De plus, $\mathbf{var}_G(t) = \int_{[a,t]} |u| \, |dF|$,

$$\mathbf{var}_G^+(t) = \int_{[a,t]} (u)^+ (dF)^+ + \int_{[a,t]} (u)^- (dF)^- \quad \text{et} \quad \mathbf{var}_G^-(t) = \int_{[a,t]} (u)^+ (dF)^- + \int_{[a,t]} (u)^- (dF)_+ \ ,$$

pour tout $t \in [a,b]$. Autrement dit, $|dG| = |u| \, |dF|$,

$$(dG)^+ = (u)^+ (dF)^+ + (u)^- (dF)^- \quad \text{et} \quad (dG)^- = (u)^+ (dF)^- + (u)^- (dF)^+ \ .$$

Preuve: pour tout $B \in \mathscr{B}$, on pose $\nu(B) = \int_B u \, dF$,

$$\nu_1(B) = \int_B (u)^+ (dF)^+ + \int_B (u)^- (dF)^- \quad \text{et} \quad \nu_2(B) = \int_B (u)^- (dF)^+ + \int_B (u)^+ (dF)^- \ .$$

On voit que ν_1 et ν_2 sont deux mesures positives de masse finie et que $\nu = \nu_1 - \nu_2$. La décomposition de Jordan de dF fournit deux ensembles A_+ et A_- qui partitionnent $[a,b]$ tels que $(dF)^\varepsilon$ est la restriction de εdF à A_ε, pour $\varepsilon = +$ ou $-$. On pose également $B_+ = \{s \in [a,b] : u(s) > 0\}$ et $B_- = \{s \in [a,b] : u(s) \leq 0\}$. On pose alors $C_+ = (A_+ \cap B_+) \cup (A_- \cap B_-)$ et $C_- = (A_+ \cap B_-) \cup (A_- \cap B_+)$. Il est clair que C_+ et C_- sont deux Boréliens qui partitionnent $[a,b]$ et que $\nu_1 = \nu(\,\cdot\, \cap C_+)$ et $\nu_2 = -\nu(\,\cdot\, \cap C_-)$. Le théorème de décomposition de Jordan implique alors que $\nu_1 = \nu^+$ et $\nu_2 = \nu^-$, ce qui entraîne le résultat désiré. ∎

La proposition précédente suggère la notation $dG = u \, dF$, pour toute fonction dans $u \in \mathscr{L}^1(|dF|)$. Le lemme suivant montre, en quelque sorte, que cette notation est "bonne" en prouvant que $v \, dG = vu \, dF$.

Lemme I.2.10 *Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction à variation bornée, continue à droite. Soit $u \in \mathscr{L}^1(|dF|)$ et $v : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction bornée. Pour tout $t \in [a,b]$, on pose $G(t) = \int_{[0,t]} u(s) \, dF(s)$. La proposition précédente, montre que $|dG| = |u| \, |dF|$. Comme v est bornée, on a $v \in \mathscr{L}^1(|u| \, |dF|)$. Alors, $H(t) = \int_{[a,t]} v(s) \, dG(s)$, définit pour tout $t \in [a,b]$, une fonction à variation bornée continue à droite et on a*

$$\forall B \in \mathscr{B}([a,b]) \, , \quad (dH)(B) = \int_B v(s) u(s) \, dF(s) \ . \quad \blacksquare$$

Preuve: d'après la proposition I.2.9 qui précède, on a les égalité suivantes pour tout $B \in \mathscr{B}([a,b])$:

$$\begin{aligned}
(dH)(B) &= \int_B v(s) dG(s) = \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+,-\}} \int_B \varepsilon_1 \varepsilon_2 v \cdot (u)^{\varepsilon_2} (dF)^{\varepsilon_1} \\
&= \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{+,-\}} \int_B \varepsilon_1 \varepsilon_2 \varepsilon_3 (v)^{\varepsilon_3} (u)^{\varepsilon_2} (dF)^{\varepsilon_1} \\
&= \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+,-\}} \int_B (v)^{\varepsilon_1 \varepsilon_2} (u)^{\varepsilon_2} (dF)^{\varepsilon_1} - \sum_{\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in \{+,-\}} \int_B (v)^{-\varepsilon_1 \varepsilon_2} (u)^{\varepsilon_2} (dF)^{\varepsilon_1}.
\end{aligned}$$

On vérifie ensuite facilement que facilement

$$\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{+,-\}}\int_B (v)^{\varepsilon_1\varepsilon_2}(u)^{\varepsilon_2}(dF)^{\varepsilon_1}=\int_B((v)^+(u)^+ + (v)^-(u)^-)(dF)^+ + \int_B((v)^+(u)^- + (v)^+(u)^-)(dF)^-$$
$$=\int_B (vu)^+(dF)^+ + \int_B (vu)^-(dF)^- \ .$$

De même, on vérifie que

$$\sum_{\varepsilon_1,\varepsilon_2\in\{+,-\}}\int_B (v)^{-\varepsilon_1\varepsilon_2}(u)^{\varepsilon_2}(dF)^{\varepsilon_1}=\int_B((v)^+(u)^- + (v)^-(u)^+)(dF)^+ + \int_B((v)^+(u)^+ + (v)^-(u)^-)(dF)^-$$
$$=\int_B (vu)^-(dF)^+ + \int_B (vu)^+(dF)^- \ .$$

Cela montre que

$$(dH)^+ = (vu)^+(dF)^+ + (vu)^-(dF)^- \text{ et } (dH)^- = (vu)^-(dF)^+ + (vu)^+(dF)^- \ .$$

Si on note maintenant $I(t) = \int_{[0,t]} v(s)u(s)\,dF(s)$, la proposition I.2.9 qui précède implique que $(dI)^+ = (vu)^+(dF)^+ + (vu)^-(dF)^- = (dH)^+$ et $(dI)^- = (vu)^-(dF)^+ + (vu)^+(dF)^- = (dH)-$. Cela montre que $dH = dI$, ce qu'il fallait prouver. ■

I.2.c Parties continue et discontinue d'une fonction à variation bornée

Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ à variation bornée, continue à droite. On a démontrée qu'elle est la différence de deux fonctions croissantes. La fonction F admet une limite à gauche en tout point de $t \in]a,b]$. On note cette limite $F(t-)$ et on adopte la convention que $F(a-) = F(a)$. Pour tout $t \in [a,b]$, on note $\Delta F(t) = F(t) - F(t-)$, le saut éventuel de F en t. On voit que F est continue en t ssi $\Delta F(t) = 0$. On remarque que si $\mu = dF$, $\mu(\{t\}) = \Delta F(t)$. Par conséquent,

$$J_F := \big\{t \in [a,b] : \Delta F(t) \neq 0\big\} = \mathrm{Ato}(dF) \ .$$

La proposition I.2.6 implique que

$$\Delta\mathbf{var}_F(t) = |F(t)-F(t-)| \ , \quad \Delta\mathbf{var}^+_F(t) = (F(t)-F(t-))^+ \ , \quad \Delta\mathbf{var}^-_F(t) = (F(t)-F(t-))^- \ .$$

On vérifie facilement que

$$\sum_{s\in J_F} |\Delta F(s)| \leq \mathbf{var}_F(b) = V_{[a,b]}(F) < \infty \ .$$

On peut donc définir la fonction $F_{\mathbf{a}} : [a,b] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in [a,b] \ , \quad F_{\mathbf{a}}(t) = \sum_{s\in J_F} \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\,\Delta F(s) = \mu_{\mathbf{a}}([a,t]) \ , \tag{I.24}$$

où on rappelle la notation $dF = \mu$ et où $\mu_{\mathbf{a}}$ désigne la partie atomique de μ. On voit donc que $F_{\mathbf{a}}$ est à variation bornée, continue à droite. Elle ne progresse que par saut, ce qui explique que l'on dise que $F_{\mathbf{a}}$ est de *saut pur*. La fonction $F_{\mathbf{a}}$ est appelée la *partie discontinue* de F. On pose ensuite $F_{\mathbf{d}} = F - F_{\mathbf{a}}$. On remarque que $F_{\mathbf{d}}$ que est à variation bornée continue. On l'appelle la *partie continue de* F. On a donc

$$\forall t \in [a,b] \ , \quad F_{\mathbf{d}}(t) = F(t) - F_{\mathbf{a}}(t) = \mu([a,t]) - \mu_{\mathbf{a}}([a,t]) = \mu_{\mathbf{d}}([a,t]) \ . \tag{I.25}$$

On déduit facilement le résultat suivant de (I.24), de (I.25) et de la proposition I.1.9,

Proposition I.2.11 *Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction à variation bornée continue à droite. Pour tout $\varepsilon \in \{+,-\}$, on a les identité suivantes:*

$$(dF)_{\mathbf{a}} = \sum_{s \in J_F} \Delta F(s)\delta_s\,, \quad ((dF)_{\mathbf{a}})^{\varepsilon} = \sum_{s \in J_F} (\Delta F(s))^{\varepsilon}\delta_s\,, \quad |(dF)_{\mathbf{a}}| = \sum_{s \in J_F} |\Delta F(s)|\delta_s.$$

On a aussi $((dF)_{\mathbf{a}})^{\varepsilon} = (d\mathbf{var}^{\varepsilon}_F)_{\mathbf{a}} = d(\mathbf{var}^{\varepsilon}_F)_{\mathbf{a}}$ et $|(dF)_{\mathbf{a}}| = (d\mathbf{var}_F)_{\mathbf{a}} = d(\mathbf{var}_F)_{\mathbf{a}}$. De même,

$$((dF)_{\mathbf{d}})^{\varepsilon} = (d\mathbf{var}^{\varepsilon}_F)_{\mathbf{d}} = d(\mathbf{var}^{\varepsilon}_F)_{\mathbf{d}} \quad \text{et} \quad |(dF)_{\mathbf{d}}| = (d\mathbf{var}_F)_{\mathbf{d}} = d(\mathbf{var}_F)_{\mathbf{d}}\ .$$

Notation. Comme $(dF)_{\mathbf{a}} = d(F_{\mathbf{a}})$ et $(dF)_{\mathbf{d}} = d(F_{\mathbf{d}})$, on note simplement ces mesures $dF_{\mathbf{a}}$ et $dF_{\mathbf{d}}$.
□

On déduit facilement le résultat suivant de la proposition I.2.9

Proposition I.2.12 *Soit $F : [a,b] \to \mathbb{R}$, une fonction à variation bornée, continue à droite. Soit $u \in \mathscr{L}^1(|dF|)$. Pour tout $t \in [a,b]$, on pose $G(t) = \int_{[a,t]} udF$. La proposition I.2.9 assure que G est à variation bornée et continue à droite et on a $u \in \mathscr{L}^1(|dF_{\mathbf{a}}|) \cap \mathscr{L}^1(|dF_{\mathbf{d}}|)$ et*

$$dG_{\mathbf{a}} = \sum_{s \in J_F} u(s)\Delta F(s)\,\delta_s \quad \text{et} \quad (dG_{\mathbf{d}})(B) = \int_B u(s)\,dF_{\mathbf{d}}(s)\,, \quad B \in \mathscr{B}([a,b])\ .$$

Cela implique que $J_G \subset J_F$ et que G est continue dès que F est continue.

I.3 Application à un problème de calcul différentiel.

I.3.a Formule d'Itô pour les fonctions à variation bornée.

Dans cette section, on étudie la composée de fonctions à variation bornée par une fonction de classe C^1. On montrer que la fonction qui en résulte est encore à variation bornée. Cette opération de composition est très naturelle sur les fonctions mais ce qui se passe pour les mesures de Stieltjes est un peu plus compliqué. Le théorème suivant précise certaines des caractéristiques de la fonction composée sous la forme d'une équation intégrale ressemblant (un peu) à la formule d'Itô pour les martingales.

Théorème I.3.1 *Soit $F : [0,T] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée continue à droite. Soit $\Phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1, c'est-à-dire partout différentiable et de dérivée continue. On définit une fonction $\frac{\delta \Phi \circ F}{\delta F} : [0,T] \to \mathbb{R}$ en posant pour tout $s \in [0,T]$,*

$$\frac{\delta\,\Phi\circ F}{\delta F}(s) = \Phi'(F(s)) \text{ si } \Delta F(s) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\delta\,\Phi\circ F}{\delta F}(s) = \frac{\Phi(F(s)) - \Phi(F(s-))}{\Delta F(s)} \text{ si } \Delta F(s) \neq 0.$$

Alors la fonction $\frac{\delta \Phi \circ F}{\delta F}$ est bornée, $\Phi \circ F$ est à variation bornée et

$$\Phi(F(t)) = \Phi(F(0)) + \int_{[0,t]} \frac{\delta\,\Phi\circ F}{\delta F}(s)\,dF(s)\,, \tag{I.26}$$

ce qui se réécrit

$$\Phi(F(t)) = \Phi(F(0)) + \int_{[0,t]} \Phi'(F(s))\,dF_{\mathbf{d}}(s) + \int_{[0,t]} \frac{\Delta(\Phi\circ F)(s)}{\Delta F(s)}\,dF_{\mathbf{a}}(s)\ . \tag{I.27}$$

où $\Delta(\Phi \circ F)(s) = \Phi(F(s)) - \Phi(F(s-))$, pour tout $s \in [0,T]$.

Remarque I.3.1 Les propositions I.2.12 et I.2.9 permettent de calculer $\mathbf{var}_{\Phi\circ F}$, $\mathbf{var}^+_{\Phi\circ F}$, $\mathbf{var}^-_{\Phi\circ F}$ ainsi que $(\Phi\circ F)_{\mathbf{a}}$ et $(\Phi\circ F)_{\mathbf{d}}$, c'est-à-dire de calculer les mesures $|d(\Phi\circ F)|$, $(d(\Phi\circ F))^+$, $(d(\Phi\circ F))^-$, $d(\Phi\circ F)_{\mathbf{a}}$ et $d(\Phi\circ F)_{\mathbf{d}}$. Nous laissons au soin du lecteur le calcul précis de ces quantités. □

La preuve du théorème est en trois étapes: la première consiste à considérer le cas où F est continue, et la deuxième, celui où F n'a qu'un nombre fini de sauts, le cas général étant traité dans la troisième étape.

• **Etape 1**. On suppose F est continue, c'est-à-dire que dF est diffuse. Pour tout $\eta>0$, on introduit le module d'uniforme continuité de F sur $[0,T]$:

$$w_F(\eta)=\sup\big\{|F(s)-F(t)|\ ;\ s,t\in[0,T]:|s-t|\leq\eta\big\}\ .$$

On pose $K=|F(0)|+V_{[0,T]}(F)=|F(0)|+\mathbf{var}_F(T)$ et on introduit introduit également le module d'uniforme continuité de Φ' sur $[-K,K]$:

$$w_{\Phi'}(\eta)=\sup\big\{|\Phi'(y)-\Phi'(x)|\ ;\ x,y\in[-K,K]:|y-x|\leq\eta\big\}\ .$$

Puisque F et Φ' sont continues, $\lim_{\eta\to0}w_F(\eta)=\lim_{\eta\to0}w_{\Phi'}(\eta)=0$. On observe ensuite que pour tout $t\in[0,T]$,

$$|F(t)|\leq|F(0)|+|F(t)-F(0)|\leq|F(0)|+\mathbf{var}_F(t)\leq K\ .$$

On note $\lfloor\cdot\rfloor$ la fonction partie entière et pour tout $n\in\mathbb{N}$, et tout $t\in[0,T]$, on pose $[t]_n=2^{-n}\lfloor 2^nt\rfloor$. Pour tout $n\geq1$ et pour tout $t\in[0,T]$, on remarque d'abord que

$$\Phi(F([t_n]))-\Phi(F(0))=\sum_{0\leq k<\lfloor 2^nt\rfloor}\Phi(F((k+1)2^{-n}))-\Phi(F(k2^{-n}))\ .$$

On fixe $k\in\{0,\dots,\lfloor 2^nt\rfloor-1\}$. Le théorème des accroissements finis pour Φ implique l'existence d'un réel θ compris entre les valeurs $F(k2^{-n})$ et $F((k+1)2^{-n})$ tel que

$$\Phi(F((k+1)2^{-n}))-\Phi(F(k2^{-n}))=\Phi'(\theta)\big(F((k+1)2^{-n})-F(k2^{-n})\big)\ .$$

On pose $I_{k,n}=]k2^{-n},(k+1)2^{-n}]$ et on remarque que

$$\Phi'(\theta)\big(F((k+1)2^{-n})-F(k2^{-n})\big)=\int_{I_{k,n}}\Phi'(\theta)\,dF(s)\ ,$$

puisque θ est constant. Si $s\in I_{k,n}$, on remarque que

$$|\theta-F(s)|\leq|F((k+1)2^{-n})-F(k2^{-n})|+|F(s)-F(k2^{-n})|\leq 2w_F(2^{-n})\ .$$

Cela implique donc que

$$\Big|\Phi(F((k+1)2^{-n}))-\Phi(F(k2^{-n}))-\int_{I_{k,n}}\Phi'(F(s))\,dF(s)\Big|\leq w_{\Phi'}(2w_F(2^{-n}))\int_{I_{k,n}}|dF|\ .$$

En sommant sur k, on obtient

$$\Big|\Phi(F([t_n]))-\Phi(F(0))-\int_{[0,[t]_n]}\Phi'(F(s))\,dF(s)\Big|\leq w_{\Phi'}(2w_F(2^{-n}))\int_{[0,[t]_n]}|dF|\ .$$

On montre de même que

$$\Big|\Phi(F(t)) - \Phi(F([t_n])) - \int_{[[t]_n,t]} \Phi'(F(s))\,dF(s)\Big| \le w_{\Phi'}(2w_F(2^{-n}))\int_{[[t]_n,t]} |dF| \ ,$$

ce qui entraîne donc que

$$\begin{aligned}\Big|\Phi(F(t)) - \Phi(F(0)) - \int_{[0,t]} \Phi'(F(s))\,dF(s)\Big| &\le w_{\Phi'}(2w_F(2^{-n}))\int_{[0,t]} |dF| \\ &= w_{\Phi'}(2w_F(2^{-n}))\mathbf{var}_F(t)\ .\end{aligned}$$

Comme $\lim_{n\to\infty} w_{\Phi'}(2w_F(2^{-n})) = 0$, on en déduit que pour tout $t \in [0,T]$, on a

$$\Phi(F(t)) = \Phi(F(0)) + \int_{[0,t]} \Phi'(F(s))\,dF(s)\ ,$$

qui est le résultat désiré lorsque F est continue.

• **Etape 2**. On suppose ensuite que F n'a qu'un nombre fini d'atomes:

$$J_F = \{t_1 < \ldots < t_N\} = \{t \in [0,T]\ :\ \Delta F(t) \neq 0\}\ .$$

On fixe $t \in [0,T]$ et on pose $J_F \cap [0,t] = \{t_1 < \ldots < t_n\}$, que l'on suppose non-vide pour éviter les trivialités. On observe alors que $\Phi(F(t)) - \Phi(F(0)) = S_1 + S_2$ où

$$S_1 = \Phi(F(t_1-)) - \Phi(F(0)) + \Big(\sum_{1\le i<n} \Phi(F(t_{i+1}-)) - \Phi(F(t_i))\Big) + \Phi(F(t)) - \Phi(F(t_n))\ ,$$

et $S_2 = \big(\Phi(F(t_1)) - \Phi(F(t_1-))\big) + \ldots + \big(\Phi(F(t_n)) - \Phi(F(t_n-))\big)$. Pour tous $r < r'$ tels que $]r,r'[\cap J_f = \emptyset$, on a $F(r'-) - F(r) = \int_{]r,r'[} dF = \int_{]r,r'[} dF_{\mathbf{d}} = \int_{[r,r'[} dF_{\mathbf{d}}$ et d'après l'étape 1, on obtient

$$\Phi(F(r'-)) - \Phi(F(r)) = \int_{[r,r'[} \Phi'(F(s))\,dF_{\mathbf{d}}(s)\ .$$

On a donc

$$\begin{aligned}S_1 &= \int_{[r,r'[} \Phi'(F(s))\,dF_{\mathbf{d}}(s) + \Big(\sum_{1\le i<n} \int_{[t_{i+1},t_i[} \Phi'(F(s))\,dF_{\mathbf{d}}(s)\Big) + \int_{[t_n,t[} \Phi'(F(s))\,dF_{\mathbf{d}}(s) \\ &= \int_{[0,t]} \Phi'(F(s))\,dF_{\mathbf{d}}(s) = \int_{[0,t]} \Phi'(F(s-))\,dF_{\mathbf{d}}(s)\,.\end{aligned}$$

puisque $\Phi'(F(s-))$ et $\Phi'(F(s))$ ne diffèrent que pour un nombre fini de valeurs s et que $dF_{\mathbf{d}}$ est diffuse. On remarque ensuite que puisque Φ est continue $\Delta(\Phi\circ F)(s) = \Phi(F(s)) - \Phi(F(s-))$. Donc

$$\begin{aligned}S_2 &= \sum_{s\in J_F} \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\Delta(\Phi\circ F)(s) = \sum_{s\in J_F} \mathbf{1}_{[0,t]}(s)\frac{\Delta(\Phi\circ F)(s)}{\Delta F(s)}\Delta F(s) \\ &= \int_{[0,t]} \frac{\Delta(\Phi\circ F)(s)}{\Delta F(s)}\,dF_{\mathbf{a}}(s)\ .\end{aligned}$$

On a donc montré

$$\Phi(F(t)) = \Phi(F(0)) + \int_{[0,t]} \Phi'(F(s))\, dF_{\mathbf{d}}(s) + \int_{[0,t]} \frac{\Delta(\Phi \circ F)(s)}{\Delta F(s)}\, dF_{\mathbf{a}}(s) \;, \tag{I.28}$$

qui est le résultat voulu.

• **Etape** 3. On se place dans le cas général. Rappelons que $\sum_{s \in J_F} |\Delta F(s)| \leq \mathbf{var}_F(T) < \infty$. Pour tout $\eta > 0$, on pose $J_F(\eta) = \{s \in J_F \;:\; |\Delta F(s)| \leq \eta\}$, $S(\eta) = \sum_{s \in J_F(\eta)} |\Delta F(s)|$ et pour tout $t \in [a, b]$,

$$F^\eta(t) = F(t) - \sum_{s \in J_F(\eta)} \mathbf{1}_{[0,t]}(s) \Delta F(s) \;.$$

F^η est à variation bornée, continue à droite, $dF^\eta_{\mathbf{d}} = dF_{\mathbf{d}}$ et $J_{F^\eta} = \{s \in J_F : |\Delta F(s)| > \eta\}$ On a donc $\# J_{F^\eta} < \infty$. On remarque aussi que $dF^\eta_a = \sum_{s \in J_F} \mathbf{1}_{]\eta,\infty[}(\Delta F(s)) \Delta F(s) \delta_s$ si bien que pour toute fonction bornée u,

$$\int_{[a,b]} u(s) dF^\eta_{\mathbf{a}}(s) = \int_{[a,b]} \mathbf{1}_{\{\Delta F(s) > \eta\}} u(s) dF_{\mathbf{a}}(s) \;. \tag{I.29}$$

D'après l'étape 2,

$$\begin{aligned}
\Phi(F^\eta(t)) \;&=\; \Phi(F(0)) + \int_{[0,t]} \Phi'(F^\eta(s))\, dF_{\mathbf{d}}(s) + \int_{[0,t]} \tfrac{\Delta(\Phi \circ F^\eta)(s)}{\Delta F^\eta(s)}\, dF^\eta_{\mathbf{a}}(s) \\
&=\; \Phi(F(0)) + \int_{[0,t]} \Phi'(F^\eta(s))\, dF_{\mathbf{d}}(s) + \int_{[0,t]} \mathbf{1}_{\{\Delta F(s) > \eta\}} \tfrac{\Delta(\Phi \circ F^\eta)(s)}{\Delta F^\eta(s)}\, dF_{\mathbf{a}}(s),
\end{aligned} \tag{I.30}$$

où la seconde égalité découle de (I.29). Observons alors que

$$\|F - F^\eta\|_\infty := \sup_{t \in [0,T]} |F(t) - F^\eta(t)| \leq S(\eta) \underset{\eta \to 0}{\longrightarrow} 0 \;. \tag{I.31}$$

En décomposant $dF_{\mathbf{d}}$ en sa variation positive et négative et en appliquant le théorème de convergence dominée, ce qui précède implique que

$$\lim_{\eta \to 0} \int_{[0,t]} \Phi'(F^\eta(s))\, dF_{\mathbf{d}}(s) = \int_{[0,t]} \Phi'(F(s))\, dF_{\mathbf{d}}(s) \tag{I.32}$$

Ensuite, on fixe $s \in [0, t]$ tel que $\Delta F^\eta(s) \neq 0$. Alors $\Delta F(s) = \Delta F^\eta(s)$ et $|\Delta F(s)| > \eta$. On pose

$$A(\eta, s) = \tfrac{\Delta(\Phi \circ F^\eta)(s)}{\Delta F^\eta(s)} - \tfrac{\Delta(\Phi \circ F)(s)}{\Delta F(s)} \;.$$

On pose également, $h = \Delta F(s) = \Delta F^\eta(s)$. On a donc

$$A(\eta, s) = \frac{1}{h}\big(\Phi(F^\eta(s-) + h) - \Phi(F^\eta(s-))\big) - \frac{1}{h}\big(\Phi(F(s-) + h) - \Phi(F(s-))\big).$$

On note ε le signe de h. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a

$$\frac{1}{h}\big(\Phi(x + h) - \Phi(x)\big) = \frac{1}{|h|} \int_0^{|h|} \Phi'(x + \varepsilon y) dy \;.$$

On en déduit donc que

$$A(\eta,s)=\frac{1}{|h|}\int_0^{|h|}\big(\Phi'(F^\eta(s-)+\varepsilon y)-\Phi'(F(s-)+\varepsilon y)\big)\,dy\ .$$

On remarque que $F^\eta(s-)+\varepsilon y$ et $F(s-)+\varepsilon y$ sont dans $[-K,K]$, et ce, pour tout $y\in[0,|h|]$. De plus, $|F^\eta(s-)-F(s-)|\leq S(\eta)$, on a

$$\forall s\in[0,T]\quad |A(\eta,s)|=\Big|\frac{\Delta(\Phi\circ F^\eta)(s)}{\Delta F^\eta(s)}-\frac{\Delta(\Phi\circ F)(s)}{\Delta F(s)}\Big|\leq w_{\Phi'}(S(\eta))\ .$$

Cela montre que

$$\begin{aligned}\Big|\int_{[0,t]}\mathbf{1}_{\{\Delta F(s)>\eta\}}\frac{\Delta(\Phi\circ F^\eta)(s)}{\Delta F^\eta(s)}dF_{\mathbf{a}}(s)-\int_{[0,t]}\mathbf{1}_{\{\Delta F(s)>\eta\}}\frac{\Delta(\Phi\circ F)(s)}{\Delta F(s)}\,dF_{\mathbf{a}}(s)\Big| &\leq \int_{[0,t]}|A(s,\eta)|\,|dF_{\mathbf{a}}(s)|\\ &\leq w_{\Phi'}(S(\eta))\mathbf{var}_F(T),\end{aligned}$$

et donc

$$\lim_{\eta\to 0}\Big|\int_{[0,t]}\mathbf{1}_{\{\Delta F(s)>\eta\}}\frac{\Delta(\Phi\circ F^\eta)(s)}{\Delta F^\eta(s)}dF_{\mathbf{a}}(s)-\int_{[0,t]}\mathbf{1}_{\{\Delta F(s)>\eta\}}\frac{\Delta(\Phi\circ F)(s)}{\Delta F(s)}\,dF_{\mathbf{a}}(s)\Big|=0. \tag{I.33}$$

Le théorème des accroissements finis implique ensuite que

$$\Big|\frac{\Delta(\Phi\circ F)(s)}{\Delta F(s)}\Big|\leq M:=\sup_{x\in[-K,K]}|\Phi'(x)|$$

Cela permet d'appliquer le théorème de convergence dominée et de montrer que

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{[0,t]}\mathbf{1}_{\{\Delta F(s)>\eta\}}\frac{\Delta(\Phi\circ F)(s)}{\Delta F(s)}\,dF_{\mathbf{a}}(s)=\int_{[0,t]}\frac{\Delta(\Phi\circ F)(s)}{\Delta F(s)}\,dF_{\mathbf{a}}(s)\ . \tag{I.34}$$

Par (I.33), on a donc

$$\lim_{\eta\to 0}\int_{[0,t]}\mathbf{1}_{\{\Delta F(s)>\eta\}}\frac{\Delta(\Phi\circ F^\eta)(s)}{\Delta F^\eta(s)}\,dF_{\mathbf{a}}(s)=\int_{[0,t]}\frac{\Delta(\Phi\circ F)(s)}{\Delta F(s)}\,dF_{\mathbf{a}}(s)\ .$$

Cette limite combinée à (I.32) permet de passer à la limite dans (I.30) ce qui implique la formule d'Itô (I.27). ■

I.3.b Formule de Doléans-Dade dans le cas déterministe.

On se propose de résoudre l'équation "différentielle" linéaire du premier ordre

$$dX(s)=X(s-)u(s)\,dF(s)\ , \tag{I.35}$$

d'inconnue X, avec F, fonction à variation bornée continue à droite et $u\in\mathscr{L}^1(|dF|)$. Supposons que u soit continue et F soit de classe C^1 sur $[0,T]$. Pour tout $t\in[0,T]$, on a

$$F(t)-F(0)=\int_{[0,t]}F'(s)\,ds=\int_{[0,t]}(F'(s))^+\,ds-\int_{[0,t]}(F'(s))^-\,ds\ .$$

Cela montre que F est à variation bornée et que $(dF)^+$ admet la densité $(F')^+$ par rapport à la mesure de Lebesgue et que $(dF)^-$ admet la densité $(F')^-$ par rapport à la mesure de Lebesgue. Autrement dit, on peut écrire $dF(t) = F'(t)dt$ et l'équation (I.35) qui est une équation en termes de mesures signées peut se réécrire comme une équation sur les densités que ces mesures ont avec la mesure de Lebesgue: on cherche alors une fonction X, de classe C^1, telle que $X'(s) = X(s)u(s)F'(s)$. La solution est bien connue:

$$X(t) = X(0) \exp\Big(- \int_0^t u(s) F'(s)\, ds \Big) ,$$

que l'on peut réécrire comme

$$X(t) = X(0) \exp\Big(- \int_0^t u(s)\, dF(s) \Big) .$$

Le but est de montrer une solution aussi explicite à (I.35) lorsque F est à variation bornée et lorsqu'elle peut avoir des sauts, ce qui complique un peu les choses.

Théorème I.3.2 **(Formule de Doléans-Dade)** *Soit $F : [0, T] \to \mathbb{R}$ une fonction à variation bornée continue à droite. Soit $u \in \mathscr{L}^1(|dF|)$ telle que*

$$\inf_{t \in [0,T]} u(t) \Delta F(t) \; > \; -1 . \tag{I.36}$$

Alors, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}_+$, il existe une unique fonction $X : [0, T] \to \mathbb{R}$, positive, à variation bornée continue à droite telle que

$$\forall t \in [0, T] , \quad X(t) = x_0 + \int_{[0,t]} X(s-) u(s)\, dF(s) . \tag{I.37}$$

De plus, X est donnée explicitement par la formule exponentielle de Doléans-Dade:

$$\forall t \in [0, T] , \quad X(t) = x_0 \, \exp\Big(\int_{[0,t]} u(s)\, dF_{\mathbf{d}}(s) \Big) \prod_{s \in J_F \cap [0,t]} \big(1 + u(s) \Delta F(s) \big) , \tag{I.38}$$

où on rappelle que $J_F = \{ s \in [0, T] : \Delta F(s) \neq 0 \}$ et où, par convention, un produit sur un ensemble d'indices vide est pris égal à 1.

Preuve: pour tout $x \in]-1, \infty[$ on pose $\kappa(x) = x^{-1} \log(1 + x)$ si $x \neq 0$ et $\kappa(0) = 1$. On vérifie que κ est continue et on a $\log(1 + x) = x\kappa(x)$, pour tout $x > -1$. On suppose que $x \geq -1 + \eta$. On remarque que $\kappa(x)$ est le taux d'accroissement de la fonction $y \mapsto \log(1 + y)$ entre 0 et x. Par le théorème des accroissements finis, il existe θ entre 0 et x tel que $\kappa(x) = 1/(1 + \theta)$. Donc

$$\forall x \in [-1 + \eta, \infty[, \quad |\kappa(x)| \leq \frac{1}{\eta}.$$

On pose $\inf_{t \in [0,T]} (1 + u(t)\Delta F(t)) = \eta$, qui est une quantité strictement positive par l'hypothèse (I.36). Alors on a $|\kappa(x)| \leq \eta^{-1}$, pour tout $x \geq -1 + \eta$. Il est alors facile de vérifier que $s \in [0, T] \mapsto u(s)\kappa\big(u(s)\Delta F(s)\big)$ est une fonction $|dF|$-intégrable car

$$\int_{[0,T]} |u(s)\kappa\big(u(s)\Delta F(s)\big)| \, |dF|(s) \leq \frac{1}{\eta} \int_{[0,T]} |u(s)| \, |dF|(s) < \infty .$$

Par la proposition I.2.9, cela permet de définir sur $[0,T]$ une fonction V à variation bornée et continue à droite en posant

$$V(t) = \int_{[0,t]} u(s)\, \kappa\big(u(s)\Delta F(s)\big)\, dF(s) \ .$$

La proposition I.2.12 implique que $J_V \subset J_F$ et que

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_{[0,t]} u(s)\, dF_{\mathbf{d}}(s) + \int_{[0,t]} u(s)\, \kappa\big(u(s)\Delta F(s)\big)\, dF_{\mathbf{a}}(s) \\ &= \int_{[0,t]} u(s)\, dF_{\mathbf{d}}(s) + \sum_{s\in J_F\cap[0,t]} \log\big(1+u(s)\Delta F(s)\big) \ . \end{aligned}$$

On a donc

$$\forall s\in[0,T]\,, \quad \Delta V(s) = \log\big(1+u(s)\Delta F(s)\big) \ . \tag{I.39}$$

On pose alors

$$X(t) = x_0 \exp\big(V(t)\big) = \exp\Big(\int_{[0,t]} u(s)\, dF_{\mathbf{d}}(s)\Big) \prod_{s\in J_F\cap[0,t]} \big(1+u(s)\Delta F(s)\big) \ .$$

La formule d'Itô appliquée à $\Phi = \exp$ et $F = V$, et la proposition I.2.10 montrent que

$$X(t) = x_0 + \int_{[0,t]} \frac{\delta \exp\circ V}{\delta V}(s)\, dV(s) = x_0 + \int_{[0,t]} \frac{\delta \exp\circ V}{\delta V}(s)\, u(s)\kappa\big(u(s)\Delta F(s)\big)\, dF(s).$$

Si $\Delta F(s)\neq 0$, alors $e^{V(s)} - e^{V(s-)} = e^{V(s-)}(e^{\Delta V(s)}-1) = X(s-)u(s)\Delta F(s)$ et par (I.39), on a

$$\frac{\delta \exp\circ V}{\delta V}(s)u(s)\kappa\big(u(s)\Delta F(s)\big) = \frac{e^{V(s)}-e^{V(s-)}}{\Delta V(s)}u(s)\kappa\big(u(s)\Delta F(s)\big) = X(s-)u(s) \ . \tag{I.40}$$

Si $\Delta F(s) = 0$, alors $\frac{\delta \exp\circ V}{\delta V}(s) = \exp(V(s)) = X(s-)$ car $\Delta V(s) = 0$ et on vérifie (I.40) car $\kappa(u(s)\Delta F(s)) = 1$. Par conséquent X est bien une fonction à variation bornée positive qui satisfait (I.37).

Pour montrer l'unicité, on suppose que X^* est aussi càdlàg, positive et solution à variation bornée de (I.37). L'inégalité triangulaire (I.23) implique que

$$\forall t\in[0,T]\ , \quad |X(t)-X^*(t)| \le \int_{[0,t]} |X(s-)-X^*(s-)|\, |u(s)|\, |dF|(s) \ . \tag{I.41}$$

Pour tout $t\in[0,T]$, on pose alors

$$M(t) = \sup_{s\in[0,t]} |X(s)-X^*(s)| \ .$$

Il est facile de démontrer que M est une fonction croissante continue à droite de plus, on a

$$M(t-) = \sup_{s\in[0,t[} |X(s)-X^*(s)| = \sup_{s\in[0,t]} |X(s-)-X^*(s-)| \ .$$

On pose également

$$\forall t\in[0,T]\,, \quad \beta(t) = \int_{[0,t]} |u(s)|\, |dF|(s) \ ,$$

qui est une fonction croissante, positive, continue à droite telle que $d\beta = |u|\,|dF|$. L'inégalité (I.41) implique que $M(t) \leq M(T)\beta(t)$, pour tout $t \in [0,T]$, et donc $M(s-) \leq M(T)\beta(s-)$, pour tout $s \in [0,T]$. En utilisant cette inégalité, (I.41) et le lemme I.2.2, on obtient

$$M(t) \leq M(T) \int_{[0,t]} \beta(s-)\, d\beta(s) \leq \tfrac{1}{2} M(T)\beta(t)^2 \ .$$

En itérant le raisonnement, on obtient facilement

$$\forall t \in [0,T] \ , \ \forall n \geq 1 \ , \quad M(t) \leq \tfrac{1}{n!} M(T)\beta(t)^n \ ,$$

ce qui implique, lorsque n tend vers ∞, que $M(T) = 0$ et donc $X = X^*$. Cela termine la preuve du théorème. ■

Chapter II

Processus de Poisson.

Dans ce chapitre, sauf mention du contraire, toutes les variables aléatoires sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ qui est supposé suffisamment riche pour que l'on puisse y définir autant de suites de variables aléatoires indépendantes que nécessaire.

II.1 Processus linéaire homogène sur $\mathbb{R}_+$

Il est simple de constater que la phrase "on choisit un point uniformément au hasard sur $\mathbb{R}_+$" n'a pas de sens précis. En effet, raisonnons par l'absurde et supposons que cette phrase ait un sens précis: on note X ce point aléatoire uniforme. C'est donc une variable aléatoire positive définie sur $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ et on doit avoir

$$1 = \mathbf{P}(\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{P}(X \in [n, n+1[\,) \ .$$

Comme X est de loi "uniforme", on doit avoir $\mathbf{P}(X \in [n, n+1[\,) = \mathbf{P}(X \in [0, 1[\,)$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, ce qui contredit l'égalité precédente.

Si la phrase précédente n'a pas de sens, il est en revanche possible de définir un ensemble *infini dénombrable* de points aléatoires sur $\mathbb{R}_+$ *uniformément répartis et totalement indépendants*. La définition d'un tel ensemble aléatoire est l'objet de cette section. Nous rappelons d'abord quelques résultats élémentaires sur les lois usuelles (Poisson, exponentielles, Erlang, statistiques d'ordre). Puis nous dégageons heuritiquement une définition d'un tel ensemble aléatoire de point avant d'en donner une construction.

II.1.a Rappels sur les lois de Poisson et les lois exponentielles.

Lois de Poisson. On rappelle d'abord (sans preuve) le résultat suivant sur les fonctions caractéristiques, les exposants de Laplace et les fonctions génératrices.

Théorème II.1.1 *Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_n)$, un vecteur aléatoire à valeurs dans E^n, où $E = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$ ou encore $\mathbb{N}$. Les résultats suivants sont vérifiés.*

(i) La fonction $(u_1, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n \mapsto \mathbf{E}\big[\exp(iu_1V_1 + \ldots + iu_nV_n)\big]$ caractérise la loi de $\mathbf{V}$.

(ii) Si $E = \mathbb{R}_+$, alors la fonction $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in (\mathbb{R}_+)^n \mapsto \mathbf{E}\big[\exp(-\lambda_1V_1 - \ldots - \lambda_nV_n)\big]$ caractérise la loi de $\mathbf{V}$.

(iii) Si $E = \mathbb{N}$*, alors* $(r_1, \ldots, r_n) \in [0,1] \mapsto \mathbf{E}\big[r_1^{V_1} \ldots r_n^{V_n}\big]$ *caractérise la loi de* $\mathbf{V}$.

Définition II.1.1 Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ et $X : \Omega \to \mathbb{N}$, une variable $\mathscr{F}$-mesurable. On dit que X suit une *loi de Poisson de paramètre* θ si $\mathbf{P}(X = n) = e^{-\theta}\theta^n/n!$, $n \in \mathbb{N}$. □

Proposition II.1.2 *Soient* $X, X_1, \ldots, X_n$ *des variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètres respectifs* $\theta, \theta_1, \ldots, \theta_n$.

(i) On a $\mathbf{E}[X] = \mathbf{var}(X) = \theta$*. Pour tout* $u \in \mathbb{R}$*, pour tout* $\lambda > 0$ *et pour tout* $r \in [0,1]$*, on a aussi*

$$\mathbf{E}\left[e^{iu.X}\right] = e^{-\theta\left(1-e^{iu}\right)}, \quad \mathbf{E}\left[e^{-\lambda X}\right] = e^{-\theta\left(1-e^{-\lambda}\right)} \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\left[r^X\right] = e^{-\theta(1-r)}.$$

(ii) La somme $X_1 + \ldots + X_n$ *suit une loi de Poisson de paramètre* $\theta_1 + \ldots + \theta_n$.

Preuve: le premier point est une conséquence de calculs élémentaires laissés en exercice. Concernant le second point, on remarque que pour tout $p \in \mathbb{N}$, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}(X_1 + \ldots + X_n = p) &= \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N} \\ k_1+\ldots+k_n = p}} \frac{e^{-\theta_1}\theta_1^{k_1}}{k_1!} \cdots \frac{e^{-\theta_n}\theta_n^{k_n}}{k_n!} \\
&= \frac{1}{p!} e^{-(\theta_1+\ldots+\theta_n)} \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N} \\ k_1+\ldots+k_n = p}} \frac{p!}{k_1! \ldots k_n!} \theta_1^{k_1} \ldots \theta_n^{k_n} \\
&= \frac{1}{p!} e^{-(\theta_1+\ldots+\theta_n)} (\theta_1 + \ldots + \theta_n)^p
\end{aligned}$$

■

Pour passer de l'avant-dernière ligne à la dernière ligne, on a utilisé la *formule du multinôme* que nous rappelons: pour tout $p \in \mathbb{N}$ et tout $n \geq 1$,

$$(y_1 + \ldots + y_n)^p = \sum_{\substack{k_1,\ldots,k_n \in \mathbb{N} \\ k_1+\ldots+k_n = p}} \frac{p!}{k_1! \ldots k_n!} y_1^{k_1} \ldots y_n^{k_n} . \tag{II.1}$$

La loi de Poisson de paramètre θ est une bonne approximation d'une loi binomiale de paramètres (n, p) lorsque n est grand et p petit mais np est proche de θ. Plus précisément, on a la proposition suivante.

Proposition II.1.3 **(Approximation Binomiale-Poisson)** *Pour tout* $n \geq 1$*, on de donne une suite* $(\xi_{n,m}, 1 \leq m \leq n)$ *de variables indépendantes de Bernoulli de paramètres respectifs* $p_{n,m}$*, c'est-à-dire* $\mathbf{P}(\xi_{n,m} = 1) = p_{n,m}$ *et* $\mathbf{P}(\xi_{n,m} = 0) = 1 - p_{n,m}$*. On pose*

$$X_n = \sum_{1 \leq m \leq n} \xi_m^{(n)} \quad \text{et} \quad \theta_n = \sum_{m=1}^{n} p_{n,m} .$$

Alors pour tout $\theta \in \mathbb{R}_+^*$*,*

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \mathbf{P}(X_n = k) - e^{-\theta}\frac{\theta^k}{k!} \right| \leq 2|\theta - \theta_n| + 2 \sum_{1 \leq m \leq n} p_{n,m}^2 .$$

Donc, si $\lim_{n\to\infty} \theta_n = \theta$ *et si* $\lim_{n\to\infty} \max_{1\leq m\leq n} p_{n,m} = 0$*, on a* $\lim_{n\to\infty} \sum_{1\leq m\leq n} p_{n,m}^2 = 0$*, et les lois des* X_n *tendent vers une loi de Poisson de paramètre* θ.

Preuve: voir l'exercice IV.2.1. ■

Voyons un exemple concret d'application de cette approximation: les statistiques nous disent que $3,2$ piétons sont écrasés à Paris chaque mois (c'est un chiffre fantaisiste). Quelle est la probabilité que, le mois prochain, exactement 5 piétons soient écrasés à Paris ? Pour répondre rapidement à cette question on peut établir le modèle (grossier) suivant: il y a (environ) $n \simeq 2.10^6$ Parisiens qui ont une "chance" très petite de se faire écraser dans le mois suivant, et ce, indépendamment les uns des autres. On numérote les Parisiens de 1 à n et on note ξ_i la variable aléatoire qui vaut 1 si le Parisien numero i se fait écraser le mois prochain et qui vaut 0 sinon. D'après nos hypothèses, on peut considérer $(\xi_i, 1 \leq i \leq n)$ comme une suite i.i.d. de variables de Bernoulli de paramètre p. Par conséquent $X = \xi_1 + \ldots + \xi_n$ suit une loi Binomiale de paramètres (n,p) . Sa moyenne vaut $np = 3,2$. En appliquant la proposition précédente avec $np = \theta = 3,2$, on obtient

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \left| \mathbf{P}(X_n = k) - e^{-3,2} \frac{3,2^k}{k!} \right| \leq (3,2)^2/n.$$

Or $(3,2)^2/n$ est de l'ordre de 10^{-5}. On peut donc assimiler la probabilité que le mois prochain exactement 5 piétons soient écrasés à Paris à la quantité $e^{-3,2}(3,2)^5/5!$.

Définition II.1.2 (*Lois de Poisson étendues*) Les lois de Poisson usuelles sont caractérisées par leur paramètre θ qui varie dans $\mathbb{R}_+^*$. Par commodité on convient que $X : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, une variable $\mathscr{F}$-mesurable, suit une loi de Poisson de paramètre ∞ (resp. 0) ssi $X = \infty$ (resp. $X = 0$) $\mathbf{P}$-presque sûrement. □

Proposition II.1.4 *Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ une suite de v.a. de Poisson (étendues) indépendantes de paramètres respectif $\theta_n \in [0, \infty]$, $n \in \mathbb{N}$. Alors $X = \sum_{n \geq 0} X_n$ suit une loi de Poisson (étendue) de paramètre $\theta = \sum_{n \geq 0} \theta_n$.*

Preuve: voir l'exercice IV.2.2. ■

Lois exponentielles. Voici quelques rappels sur les variables exponentielles qui servent plus loin.

Définition II.1.3 Une variable $X : \Omega \to \mathbb{R}_+$, $\mathscr{F}$-mesurable, suit une loi exponentielle de paramètre $c \in \mathbb{R}_+^*$ ssi la densité de X est donnée par $f_X(t) = ce^{-ct}$, $t \in \mathbb{R}_+$. Il est facile de montrer que $\mathbf{E}[X] = 1/c$ et $\mathbf{var}(X) = 1/c^2$. Cela justifie la définition suivante. Les lois exponentielles usuelles sont caractérisées par leur paramètre c qui varie dans $\mathbb{R}_+^*$. Par commodité on convient que $X : \Omega \to [0, \infty]$, une variable $\mathscr{F}$-mesurable, suit une loi exponentielle de paramètre ∞ (resp. 0) ssi $X = 0$ (resp. $X = \infty$) $\mathbf{P}$-p.s. □

Proposition II.1.5 *Soit $X : \Omega \to [0, \infty]$ une variable $\mathscr{F}$-mesurable. X suit une loi exponentielle (étendue) ssi X possède la propriété d'oubli $\mathbf{P}(X > s + t) = \mathbf{P}(X > s)\mathbf{P}(X > t)$, $t, s \in \mathbb{R}_+$.*

Preuve: voir l'exercice IV.2.3. ■

Proposition II.1.6 *Soient $\mathscr{E}_1, \ldots, \mathscr{E}_n$, des exponentielles indépendantes de paramètre $c \in \mathbb{R}_+^*$. Alors $S = \mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_n$ suit une loi d'Erlang de paramètres (n, c), c'est-à-dire que S a pour densité $f_S(t) = \frac{c^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-ct}$, $t \in \mathbb{R}_+$.*

Preuve: soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction mesurable bornée. On a

$$\mathbf{E}\left[f(S)\right] = \int_{\mathbb{R}_+^n} c^n e^{-c(x_1+\ldots+x_n)} f(x_1+\ldots+x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \ .$$

On effectue le changement de variable linéaire:

$$t = x_1 + \ldots + x_n \ , \ t_{n-1} = x_1 + \ldots + x_{n-1} \ , \ \ldots \ , \ t_2 = x_1 + x_2 \ , \ t_1 = x_1$$

La matrice de transition est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Par ailleurs $\mathbb{R}_+^n$ est envoyé sur le domaine $\{0 \leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n-1} \leq t\}$. On a donc

$$\mathbf{E}\left[f(S)\right] = \int_{\{0\leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n-1} \leq t\}} c^n e^{-ct} f(t)\, dt\, dt_{n-1} \ldots dt_1 \ .$$

Une simple récurrence montre que $\int_{\{0\leq t_1 \leq \ldots \leq t_{n-1} \leq t\}} dt_{n-1} \ldots dt_1 = t^{n-1}/(n-1)!$, ce qui implique le résultat par Fubini. ■

Statistiques d'ordre. On fixe $t \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $(U_n)_{n\geq 0}$, une suite i.i.d. de variables uniformes sur $[0,t]$. Il est facile de voir que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \forall 1 \leq k < l \ , \quad U_l \neq U_k \ . \tag{II.2}$$

C'est-à-dire que si on pose

$$N = \big\{\omega \in \Omega : \exists k \neq l \text{ tels que } U_k(\omega) = U_l(\omega)\big\}$$

on a $N \in \mathscr{F}$ et $\mathbf{P}(N) = 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $\mathbb{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $\{1, \ldots, n\}$ et on définit une permutation aléatoire $\Sigma_n : \Omega \to \mathbb{S}_n$ et n variables $(U_1^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)})$ de la manière suivante:

- Si $\omega \in \Omega \backslash N$, alors $U_1(\omega)$, ... , $U_n(\omega)$ sont n éléments distincts de $[0,t]$. Il existe donc un unique éléments σ de $\mathbb{S}_n$ tel que $U_{\sigma(1)}(\omega) < \ldots < U_{\sigma(n)}(\omega)$. On pose alors

$$\forall 1 \leq k \leq n \,, \quad U_k^{(n)}(\omega) = U_{\sigma(k)}(\omega) \,, \quad \text{et} \quad \Sigma_n(\omega) = \sigma \ .$$

- Si $\omega \in N$, on pose $\Sigma_n(\omega) = \mathrm{Id}_{\{1,\ldots,n\}}$, l'identité sur $\{1, \ldots, n\}$ et $U_k^{(n)}(\omega) = U_k(\omega)$, pour tout $1 \leq k \leq n$.

Le vecteur $(U_1^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)})$ est appelée la *statistique d'ordre* n de $(U_1, \ldots, U_n)$. Il est facile de montrer les propriétés suivantes.

(i) $\mathbf{P}$-p.s. on a $U_1^{(n)} \leq U_2^{(n)} \leq \ldots \leq U_{n-1}^{(n)} \leq U_n^{(n)}$.

(ii) La permutation aléatoire Σ_n est indépendante de $(U_1^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)})$.

(iii) Σ_n est de loi uniforme sur $\mathbb{S}_n$, c'est-à-dire que $\mathbf{P}(\Sigma_n = \sigma) = 1/n!$, $\sigma \in \mathbb{S}_n$.

(iv) Pour toute fonction $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ mesurable bornée, on a

$$\mathbf{E}\left[F\left(U_1^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)}\right)\right] = \frac{n!}{t^n} \int_{\{0\leq x_1 < \ldots < x_n \leq t\}} F(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \ldots dx_n \ . \tag{II.3}$$

La preuve de ces résultats est laissée en exercice.

II.1.b Un modèle discret.

Pour résoudre le problème consistant à trouver une famille infinie dénombrable de points de $\mathbb{R}_+$ qui soit *totalement aléatoire* et *uniformément répartie*, on peut commencer par élaborer un modéle discret de la manière suivante: on fixe un pas $h > 0$ (qui tendra vers 0) et on discrétise $\mathbb{R}_+$ en la collection d'intervalles $I(h, n) = [nh, (n+1)h[$, $n \in \mathbb{N}$. On note Π_h le nuage dénombrable de point "uniformément réparti" en supposant que chaque intervalle $I(n, h)$ contient *au plus un point de* Π_h. Comme on veut une répartition totalement aléatoire et uniforme, il est naturel de considérer que $\xi_{h,n} = \#(\Pi_h \cap [nh, (n+1)h[\,)$ sont des variables de Bernoulli indépendantes dont paramètre ne dépend que de h: on le note $p(h)$ et on a $0 < p(h) < 1$. On a donc les propriétés suivantes.

(a) Pour tous entiers positifs $n_1 < n_2$, la variable entière $\#(\Pi_h \cap [n_1 h, n_2 h[\,)$ suit la loi binomiale de paramètres $n_2 - n_1$ et $p(h)$.

(b) Pour tous $n_1 < \ldots < n_p$, les variables $\#(\Pi_h \cap [n_1 h, n_2 h[\,), \ldots, \#(\Pi_h \cap [n_{p-1} h, n_p h[\,)$ sont indépendantes.

Par ailleurs on veut que Π_h, soit une version discrétisée d'un ensemble aléatoire dénombrable Π sur $\mathbb{R}_+$; c'est-à-dire que l'on suppose que lorsque h tend vers 0, Π_h "tend" vers Π. Cela impose que Π_h ne dépende que "peu" de h lorsque h est petit. En particulier, si on se fixe un intervalle $[a, b] \subset [0, \infty[$, on veut que la quantité

$$m_h(a, b) = \mathbf{E}\Big[\ \#\big(\,\Pi_h \cap \big[\,\lfloor a/h \rfloor h\,,\ \lfloor b/h \rfloor h\,\big[\,\big)\Big] = (\lfloor b/h \rfloor - \lfloor a/h \rfloor) p(h)\ ,$$

ne dépende pas trop de h, lorsque h est petit. Cela conduit donc a imposer la chose suivante.

(c) $p(h) = \theta h + o(h)$, où θ est un réel strictement positif fixé.

L'approximation binomiale-Poisson permet alors de dire que lorsque h est petit, la variable $\#(\Pi_h \cap [a, b])$ est très proche d'une loi de Poisson de paramètre $\theta(a - b)$ et $m_h(a, b)$ est très proche de $\theta(a - b)$.

Intéressons-nous au numéro de l'intervalle où tombe le premier point de Π_h: on pose

$$T_1(h) = \inf\{n \geq 0\ :\ \xi_{h,n} = 1\ \}\ .$$

Il est facile de voir que $T_1(h)$ suit une loi géométrique: $\mathbf{P}(T_1(h) = n) = p(h)(1 - p(h))^n$, $n \in \mathbb{N}$. On introduit aussi les numéros d'intervalle des points successifs. On les note $(T_k(h))_{k \geq 1}$ et on les définit récursivement par

$$T_{k+1}(h) = \inf\{n > T_k(h)\ :\ \xi_{h,n} = 1\ \}\ .$$

On a clairement les propriétés suivantes.

(d) $\{\lfloor x/h \rfloor h; x \in \Pi_h\}$ est exactement l'ensemble $\{hT_k(h); k \geq 1\}$.

(e) Les variables $\mathscr{E}_1(h) = T_1(h)$, ... , $\mathscr{E}_k(h) = T_k(h) - T_{k-1}(h) - 1$, ... , sont i.i.d.

Il est ensuite facile de constater que $\lim_{h\to 0} \mathbf{P}(h\mathscr{E}_k(h) > t) = \exp(-\theta t)$, $t \in \mathbb{R}_+$. Autrement dit lorsque h est proche de 0, les variables indépendantes $(h\mathscr{E}_k(h))_{k\geq 1}$ sont proches d'une suite i.i.d. de variables exponentielles de paramètre θ.

Résumons les résultats apportés par cette brève heuristique: on cherche à définir un ensemble aléatoire de points Π qui soit infini dénombrable, sans point d'accumulation, "totalement aléatoire" et "uniformément réparti" sur $\mathbb{R}_+$. Si un tel objet existe, alors il est raisonnable de penser qu'il satisfait *nécessairement* les propriétés suivantes.

(i) Il exite $\theta \in \mathbb{R}_+^*$, tel que pour tous réels positifs $a < b$, la variable $\#(\Pi \cap [a, b])$ comptant le nombre de points de Π tombant dans $[a, b]$, suit une loi de Poisson de paramètre $(b - a)\theta$.

(ii) Pour tous réels positifs $t_1 < \ldots < t_p$, les variables

$$\#(\Pi \cap [0, t_1[) \ , \ \#(\Pi \cap [t_1, t_2[) \ , \ \ldots \ , \ \#(\Pi \cap [t_{p-1}, t_p[)$$

sont indépendantes.

(iii) Π peut être indexé en croissant: $\Pi = \{T_1 < T_2 < \ldots < T_n < \ldots\}$. De plus les variables T_1, $T_2 - T_1$, ..., $T_n - T_{n-1}$, ... sont des variables exponentielles indépendantes de paramètre θ.

Comme nous le montrons plus loin, ces propriétés sont redondantes: (i) et (ii) sont des conséquences de (iii). La propriété (iii) permet de donner une définition simple de Π, qui est le point de départ de la section suivante.

II.1.c Construction des processus Poisson homogènes sur $\mathbb{R}_+$.

Définition II.1.4 Soit $\theta \in \mathbb{R}_+^*$ et $(\mathscr{E}_n)_{n\geq 1}$, une suite i.i.d. de variables exponentielles de paramètre θ. On pose

$$\forall n \geq 1, \quad T_n = \mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_n, \quad \Pi = \big\{T_n \, ; \, n \in \mathbb{N}^*\big\} \quad \text{et} \quad N_t = \#\big(\Pi \cap [0, t]\big), \ t \in \mathbb{R}_+.$$

On remarque que $N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n)$, est une variable mesurable. Le processus $(N_t)_{t\geq 0}$ est appelé *processus de Poisson homogène d'intensité θ*. L'ensemble aléatoire discret Π est appelé *nuage Poissonnien homogène d'intensité θ sur* $\mathbb{R}_+$. □

Par commodité, on pose $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et pour tout ensemble Borélien $B \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, on pose

$$N_B(\Pi) = \# \, \Pi \cap B = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_B(T_n) \ \in \ \mathbb{N}_\infty \ .$$

On remarque que $N_B(\Pi)$ est une variable $\mathscr{F}$-mesurable. C'est la *fonction de comptage de* Π *en* B. Par la loi des grands nombre, $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} T_n = \infty) = 1$. Par conséquent si B est bornée, on a $\mathbf{P}(N_B(\Pi) < \infty) = 1$.

On constate facilement que pour tout $\omega \in \Omega$, $t \mapsto N_t(\omega)$ est croissant et *continu à droite et admet une limite à gauche en tout point*, c'est-à-dire que $(N_t)_{t\geq 0}$ est càdlàg. On pose $\Delta N(t) = N_t - N_{t-}$, qui représente le saut éventuel au temps t du processus. On a alors, $\Pi = \{t \in \mathbb{R}_+ : \Delta N(t) \neq 0\}$ et $N_{[0,t]}(\Pi) = N_t$, $t \in \mathbb{R}_+$. Par conséquent, se donner $(N_t)_{t\geq 0}$ équivaut à se donner Π.

Le théorème suivant montre que Π peut se voir comme un ensemble infini dénombrable, complètement aléatoire et uniformément réparti sur $\mathbb{R}_+$.

Théorème II.1.7 *On note ℓ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Soit Π un nuage Poissonnien homogène d'intensité θ et soit $(N_t)_{t\geq 0}$. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) Pour tout $s < t$, $N_t - N_s = N_{]s,t]}(\Pi)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\theta(t-s)$.

(ii) Pour tous $t_1 < \ldots < t_p$, les variables $N_{t_1}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_p} - N_{t_{p-1}}$ sont indépendantes.

(iii) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'ensemble $\Pi \cap [0,t]$ sous $\mathbf{P}(\,\cdot\mid N_t = n)$ a même loi que $\{U_1, \ldots, U_n\}$, où U_1, ... , U_n sont i.i.d. uniformes sur $[0,t]$.

(iv) Soient $A_1, \ldots, A_p \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)$, disjoints deux-à-deux. Alors, $N_{A_1}(\Pi), \ldots, N_{A_p}(\Pi)$ sont des variables de Poisson indépendantes de paramètres respectifs $\theta\ell(A_1), \ldots, \theta\ell(A_p)$.

Remarque II.1.1 On voit que (iv) implique (i) et (ii), qui sont plus élémentaires et qui ne concernent que $(N_t)_{t\geq 0}$. Puisque dans de nombreuses applications, seul $(N_t)_{t\geq 0}$ intervient, nous avons pris la peine d'expliciter (i) et (ii). □

Preuve du théorème: montrons d'abord que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, N_t suit une loi de Poisson de paramètre θt. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On observe que T_n est indépendante de $\mathscr{E}_{n+1}$ et que T_n suit une loi d'Erlang de paramètres (n, θ). Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(N_t = n) &= \mathbf{P}(T_n \leq t < T_n + \mathscr{E}_{n+1}) = \int_0^t du\, \theta^n \frac{u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\theta u} \left(\int_{t-u}^{\infty} dv\, \theta e^{-\theta v} \right) \\ &= \frac{\theta^n}{(n-1)!} e^{-\theta t} \int_0^t du\, u^{n-1} = \frac{(t\theta)^n}{n!} e^{-\theta t}, \end{aligned}$$

ce qui montre le résultat désiré.

Nous allons montrer (iii) et ensuite prouver que (iii) implique (iv), ce qui est suffisant d'après la remarque précédente. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, une fonction mesurable bornée. On a les égalités suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\left[F(T_1, \ldots, T_n); N_t = n\right] &= \mathbf{E}\left[F(T_1, \ldots, T_n)\,;\, T_n \leq t < T_n + \mathscr{E}_{n+1}\right] \\ = \int_{\{s_1+\ldots+s_n \leq t\}} ds_1 \ldots ds_n\, \theta^n e^{-\theta(s_1+\ldots+s_n)}\, &F(s_1, s_1+s_2, \ldots, s_1+\ldots+s_n) \int_{t-s_1+\ldots+s_n}^{\infty} ds_{n+1}\, \theta e^{-\theta s_{n+1}} \\ &= \theta^n e^{-\theta t} \int_{\{s_1+\ldots+s_n \leq t\}} ds_1 \ldots ds_n F(s_1, s_1+s_2, \ldots, s_1+\ldots+s_n) \\ &= \theta^n e^{-\theta t} \int_{\{0 \leq x_1 < \ldots < x_n \leq t\}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,. \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\mathbf{E}\left[F(T_1, \ldots, T_n) \mid N_t = n\right] = \frac{n!}{t^n} \int_{\{0 \leq x_1 < \ldots < x_n \leq t\}} dx_1 dx_2 \ldots dx_n F(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,, \tag{II.4}$$

ce qui implique (iii) par (II.3).

Montrons (iv): soit $t \in \mathbb{R}_+^*$. On suppose tout d'abord que $A_1, \ldots, A_p$ sont des Boréliens disjoints *inclus* dans $[0,t]$. On fixe $n \geq 1$. Le point (iii) implique que

$$\big(N_{A_1}(\Pi), \ldots, N_{A_p}(\Pi)\big) \text{ sous } \mathbf{P}(\,\cdot\,|N_t = n) \overset{(loi)}{=} \big(\#(\Pi_n \cap A_1), \ldots, \#(\Pi_n \cap A_p)\big) \text{ sous } \mathbf{P}\,,$$

où $\Pi_n = \{U_1, \dots, U_n\}$, avec $(U_k, 1 \le k \le n)$ i.i.d. de loi uniforme sur $[0,t]$. Par commodité on pose $A_{p+1} = [0,t] \backslash \bigcup_{j=1}^{p} A_j$. Soient $u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}$. Pour tout $1 \le k \le n$, on pose:

$$X_k = e^{iu_1} \mathbf{1}_{A_1}(U_k) + \dots + e^{iu_p} \mathbf{1}_{A_p}(U_k) + \mathbf{1}_{A_{p+1}}(U_k) \; .$$

Les variables $(X_1, \dots, X_n)$ sont indépendantes et de même loi. De plus on a

$$X_1 \dots X_n = \prod_{k=1}^{p} \exp\left(iu_k \#(\Pi_n \cap A_k)\right) \; .$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big[\prod_{1 \le k \le p} \exp\left(iu_k N_{A_k}(\Pi)\right) \Big| N_t = n \Big] \quad &= \quad \mathbf{E}[X_1 \dots X_n] = \mathbf{E}[X_1]^n \\ &= \Big(e^{iu_1} \frac{\ell(A_1)}{t} + \dots + e^{iu_p} \frac{\ell(A_p)}{t} + 1 - \frac{\ell(A_1)}{t} - \dots \frac{\ell(A_p)}{t} \Big)^n \\ &= t^{-n} \left(t - (1 - e^{iu_1})\ell(A_1) - \dots - (1 - e^{iu_p})\ell(A_p) \right)^n . \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big[\prod_{1 \le k \le p} \exp\left(iu_k N_{A_k}(\Pi)\right) \Big] &= \sum_{n \ge 0} \mathbf{P}(N_t = n) t^{-n} \left(t - (1 - e^{iu_1})\ell(A_1) - \dots - (1 - e^{iu_p})\ell(A_p) \right)^n \\ &= e^{-\theta t} \sum_{n \ge 0} \frac{1}{n!} \left(\theta t - (1 - e^{iu_1})\theta \ell(A_1) - \dots - (1 - e^{iu_p})\theta \ell(A_p) \right)^n \\ &= \prod_{1 \le k \le p} \exp\left(-\theta \ell(A_k) \left(1 - e^{iu_k}\right) \right) , \end{aligned}$$

ce qui entraîne bien le point (iv), dans le cas où $A_1, \dots, A_p \subset [0,t]$. Le cas général découle facilement du fait que $\mathbf{P}$-p.s. pour tout $1 \le k \le p$, $\lim_{t \to \infty} \uparrow N_{A_k \cap [0,t]}(\Pi) = N_{A_k}(\Pi)$. ■

II.2 Nuages aléatoires de points.

II.2.a Généralités.

Définition II.2.1 (*Nuages, fonctions de comptage*) Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable. On utilise la notation $\mathbb{N}_\infty = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$.

(a) $\mathbf{S}_E := \{\pi \subset E : \pi \text{ est dénombrable}\}$ est *l'ensemble des nuages de points sur E*. On rappelle que *dénombrable* signifie *fini* (éventuellement vide) ou *en bijection avec* $\mathbb{N}$.

(b) Pour tout $B \in \mathscr{E}$, et tout $\pi \in \mathbf{S}_E$, on pose $N_B(\pi) = \#(\pi \cap B)$, qui est le nombre (éventuellement infini) de points de π qui sont dans B. La fonction $N_B : \mathbf{S}_E \to \mathbb{N}_\infty$ est appelée la *fonction de comptage en B*.

(c) On note $\mathscr{S}_E$ la tribu engendrée sur $\mathbf{S}_E$ par les fonctions de comptage N_B, $B \in \mathscr{E}$.

(d) Soit $(\Omega, \mathscr{F})$, un espace mesurable et $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, une fonction. C'est un *nuage aléatoire* si cette fonction est $(\mathscr{F}, \mathscr{S}_E)$-mesurable, ce qui est équivalement à ce que pour tout $B \in \mathscr{E}$, $N_B(\Pi) : \Omega \to \mathbb{N}_\infty$ soit $\mathscr{F}$-mesurable. □

Exemple II.2.1 Soit $(\Omega, \mathscr{F})$, un espace mesurable. Soit $X_n : \Omega \to E$, $n \in \mathbb{N}^*$, une suite de variables $(\mathscr{F}, \mathscr{E})$-mesurables telle que

$$\forall \omega \in \Omega\,,\ \forall n > m \geq 1\,, \quad X_n(\omega) \neq X_m(\omega)\ . \tag{II.5}$$

Soit $M : \Omega \to \mathbb{N}_\infty$, une variables $\mathscr{F}$-mesurable. On pose:

$$\Pi = \begin{cases} \emptyset & \text{si } M = 0, \\ \{X_1, \ldots, X_M\} & \text{si } 0 < M < \infty, \\ \{X_n; n \in \mathbb{N}^*\} & \text{si } M = \infty. \end{cases}$$

Pour tout $B \in \mathscr{E}$, (II.5) implique que

$$N_B(\Pi) = \sum_{n \geq 1} \mathbf{1}_B(X_n) \mathbf{1}_{\{n \leq M\}}$$

qui est clairement $\mathscr{F}$-mesurable. Cela implique donc que $N_B(\Pi)$ est $\mathscr{F}$-mesurable et donc que Π est un nuage aléatoire. □

Dans le lemme suivant, on définit une caractéristique importante des nuages aléatoires, à savoir leur *intensité*.

Lemme II.2.1 *Soit* $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$*, un espace de probabilité et* $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$*, un nuage aléatoire. On pose*

$$\forall B \in \mathscr{E}\,, \quad \mu(B) = \mathbf{E}\big[N_B(\Pi)\big]\ .$$

Alors, $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$ *est une mesure positive appelée* **intensité** *de* Π.

Preuve: on observe que $N_\emptyset(\Pi) = 0$, sur Ω, donc $\mu(\emptyset) = 0$. Soient $B_n \in \mathscr{E}$, $n \in \mathbb{N}$, deux-à-deux disjoints. On pose $B := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} B_n$. Par interversion série/intégrale pour la mesure de comptage $\#$ et pour $\mathbf{P}$, on a bien

$$\mu(B) = \mathbf{E}\big[N_B(\Pi)\big] = \mathbf{E}\Big[\sum_{n \in \mathbb{N}} N_{B_n}(\Pi)\Big] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}\big[N_{B_n}(\Pi)\big] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu(B_n)$$

ce qui implique le résultat désiré. ■

Définition II.2.2 *(Fonctions de comptage généralisées)* Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable et $f : E \to [0, \infty]$, une fonction $\mathscr{E}$-mesurable. On pose

$$\forall \pi \in \mathbf{S}_E, \quad N_f(\pi) = \sum_{x \in \pi} f(x)\ .$$

On appelle $N_f : \mathbf{S}_E \to [0, \infty]$ la *fonction de f-comptage*. On remarque que $N_B = N_{\mathbf{1}_B}$, pour tout $B \in \mathscr{E}$. □

Pour tous $k, n \in \mathbb{N}$, on pose $B_n := \{f \geq n\}$ et $A_{k,n} := \{k2^{-n} \leq f < (k+1)2^{-n}[\}$. Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé, les $A_{k,n} \in \mathscr{E}$, $k \in \mathbb{N}$, sont deux-à-deux disjoints. On pose $f_n := n\mathbf{1}_{B_n} + \sum_{0 \leq k < n2^n} k2^{-n} \mathbf{1}_{A_k,n}$. On rappelle que $0 \leq f_n \leq f_{n+1}$ et $\sup_n f_n = f$. On remarque aussi que

$$N_{f_n} = nN_{B_n} + \sum_{0 \leq k \leq n2^n} k2^{-n} N_{A_k,n}\ . \tag{II.6}$$

Cela montre que N_{f_n} est $\mathscr{S}_E$-mesurable. Par convergence monotone pour la mesure de comptage, on a

$$\lim_{n\to\infty} \uparrow N_{f_n} = N_f \ . \tag{II.7}$$

On en déduit le premier point du lemme suivant.

Lemme II.2.2 *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable. Soit $f : E \to [0, \infty]$, une fonction $\mathscr{E}$-mesurable. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) La fonction $N_f : \mathbf{S}_E \to [0, \infty]$ est $\mathscr{S}_E$-mesurable.

(ii) Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité et $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage aléatoire d'intensité μ. Alors $N_f(\Pi)$ est une variable $\mathscr{F}$-mesurable et $\mathbf{E}\big[N_f(\Pi)\big] = \int_E f(x)\, \mu(dx)$.

Preuve: par (II.6), $\mathbf{E}\big[N_{f_n}(\Pi)\big] = \sum_{0\leq k\leq n2^n} k2^{-n}\mu(A_k, n) = \int_E f_n(x)\, \mu(dx)$, et on conclut par convergence monotone sous $\mathbf{P}$ et sous μ. ■

Il arrive fréquement de *restreindre* un nuage de point à un certain sous ensemble B et de prendre *l'image* d'un nuage de points par une fonction ϕ: modulo un hypothèse, ces deux opérations sont mesurables, comme le montre le lemme suivant.

Lemme II.2.3 *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable. Les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(i) Soit $B \in \mathscr{E}$. Alors $R_B : \pi \in \mathbf{S}_E \mapsto \pi \cap B \in \mathbf{S}_E$ est $(\mathscr{S}_E, \mathscr{S}_E)$-mesurable.

(ii) Soit $(E', \mathscr{E}')$, un espace mesurable et soit $\phi : E \to E'$, une fonction $(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$-mesurable supposée injective. Alors $\Phi : \pi \in \mathbf{S}_E \mapsto \phi(\pi) \in \mathbf{S}_{E'}$ est $(\mathscr{S}_E, \mathscr{S}_{E'})$-mesurable.

Preuve: on remarque que pour tout $C \in \mathscr{E}$, $N_C \circ R_B = N_{B\cap C}$ qui est donc $\mathscr{S}_E$-mesurable, ce qui implique (i). Montrons (ii): puisque ϕ est injective, on remarque que pour tout B' et tout nuage $\pi \in \mathbf{S}_E$, on a $\#(\{\phi(x); x \in \pi\} \cap B') = \#\{x \in \pi : \phi(x) \in B'\}$ et donc que $N_{B'}(\phi(\pi)) = N_{\phi^{-1}(B')}(\pi)$. On a $N_{B'} \circ \Phi = N_{\phi^{-1}(B')}$ qui est $\mathscr{S}_E$-mesurable, ce qui implique le résultat voulu. ■

Ces résultats se traduisent immédiatement pour les nuages aléatoires.

Lemme II.2.4 *Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage aléatoire. Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) Soit $B \in \mathscr{E}$. Alors $\Pi \cap B$ est un nuage aléatoire. On munit B de la tribu $\mathscr{E}(B) = \{A \cap B; A \in \mathscr{E}\}$. Alors $\Pi \cap B$ est un nuage aléatoire sur $(B, \mathscr{E}(B))$ au sens de la définition II.2.1 (d).

(ii) Soit $(E', \mathscr{E}')$, un espace mesurable et soit $\phi : E \to E'$, une fonction $(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$-mesurable supposée injective. Alors $\phi(\Pi)$ est un nuage aléatoire sur E' d'intensité $\mu' = \mu \circ \phi^{-1}$ qui est la mesure image de μ par ϕ.

II.2.b Loi et indépendance de nuages aléatoires.

On voit un nuage aléatoire Π comme le processus de ses fonctions de comptage $(N_B(\Pi))_{B\in\mathscr{E}}$, processus qui est indexés par $\mathscr{E}$.

Définition II.2.3 On note $\mathscr{C}_E \subset \mathscr{S}_E$ la classe contenant tous les sous-ensembles C de la forme

$$C = \left\{ \pi \in \mathbf{S}_E : \ N_{B_1}(\pi) \geq k_1; \ \dots \ ; \ N_{B_q}(\pi) \geq k_q \ \right\} . \tag{II.8}$$

avec $q \in \mathbb{N}^*$, $B_1, \dots, B_q \in \mathscr{E}$, et $k_1, \dots, k_q \in \mathbb{N}$. □

Lemme II.2.5 *La classe $\mathscr{C}_E$ est un pi-système engendrant $\mathscr{S}_E$: $\sigma(\mathscr{C}_E) = \mathscr{S}_E$.*

Preuve: clairement $\mathscr{C}_E$ est stable par intersection et contient $\mathbf{S}_E = \{\pi \in \mathbf{S}_E : N_E(\pi) \geq 0\}$. De plus, la forme (II.8) des ensembles de $\mathscr{C}_E$ implique que $\mathscr{C}_E \subset \mathscr{S}_E$ et donc que $\sigma(\mathscr{C}_E) \subset \mathscr{S}_E$. On remarque ensuite que pour tout $B \in \mathscr{E}$, et pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $\{\pi \in \mathbf{S}_E : N_B(\pi) \geq k\} \in \mathscr{C}_E$. Par conséquent $N_B : \mathbf{S}_E \to \mathbb{N}_\infty$ est $\sigma(\mathscr{C}_E)$-mesurable. Or $\mathscr{S}_E$ est, par définition, la plus petite tribu sur $\mathbf{S}_E$ rendant mesurable les fonctions de comptage. Par conséquent $\mathscr{S}_E \subset \sigma(\mathscr{C}_E)$, ce qui termine la preuve du lemme. ■

Puisqu'on l'utilise plusieurs fois, on établit sous forme de lemme le résultat élémentaire suivant.

Lemme II.2.6 *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable. Soient $B_1, \dots, B_q \in \mathscr{E}$. Alors il existe un entier $p \leq 2^q$ et $A_1, \dots, A_p \in \mathscr{E}$, disjoints deux-à-deux tels que tout B_k est réunion de certains A_ℓ, c'est-à-dire*

$$\forall k \in \{1, \dots, q\}\,,\ \exists I_k \subset \{1, \dots, p\} \ : \quad B_k = \bigcup_{\ell \in I_k} A_\ell \quad \textit{et donc} \quad N_{B_k} = \sum_{\ell \in I_k} N_{A_\ell} \ . \tag{II.9}$$

Preuve: on note $\mathscr{B}$ la classe des ensembles de la forme $\bigcap_{1 \leq k \leq q} C_k$, où C_k est soit B_k, soit son complémentaire $E \backslash B_k$; $\mathscr{B}$ compte au plus 2^q ensembles distincts, les ensembles de $\mathscr{B}$ sont dans $\mathscr{E}$ et ils forment une partition de E. On se donne explicitement $\mathscr{B} = \{A_1, \dots, A_p\}$, avec $p = \#\mathscr{B}$. Pour tout $k \in \{1, \dots, q\}$, on pose $I_k = \{\ell \in \{1, \dots, p\} : B_k \cap A_\ell \neq \emptyset\}$ et on vérifie (II.9) facilement. ■

La proposition suivante caractérise la loi d'un nuage de points.

Proposition II.2.7 *Soit $(E, \mathscr{E})$ un espace mesurable. Soient $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ et $(\Omega, \mathscr{F}', \mathbf{P}')$, des espaces de probabilité. Soient $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$ et $\Pi' : \Omega' \to \mathbf{S}_E$, deux nuages aléatoires. Ils ont la même loi ssi pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ et tous $A_1, \dots, A_p \in \mathscr{E}$ disjoints deux-à-deux , on a*

$$(N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)) \ \text{ sous } \ \mathbf{P} \quad \overset{(loi)}{=} \quad (N_{A_1}(\Pi'), \dots, N_{A_p}(\Pi')) \ \text{ sous } \ \mathbf{P}' \ . \tag{II.10}$$

Preuve: il est clair que $\Psi : \pi \in \mathbf{S}_E \longmapsto (N_{A_1}(\pi), \dots, N_{A_p}(\pi)) \in \mathbb{N}_\infty^p$ est $\mathscr{S}_E$-mesurable car chaque composante de cette application l'est. Si Π et Π' ont même loi, alors il en est de même pour $\Psi(\Pi)$ et $\Psi(\Pi')$, ce qui est exactement (II.10). Montrons la réciproque: par le lemme II.2.6, l'identité (II.10) implique pour tous $B_1, \dots, B_q \in \mathscr{E}$, on a

$$(N_{B_1}(\Pi), \dots, N_{B_q}(\Pi)) \ \text{ sous } \ \mathbf{P} \quad \overset{(loi)}{=} \quad (N_{B_1}(\Pi'), \dots, N_{B_p}(\Pi')) \ \text{ sous } \ \mathbf{P}' \ . \tag{II.11}$$

Cela implique que $\mathbf{P}(\Pi \in C) = \mathbf{P}'(\Pi' \in C)$, pour tout C de la forme (II.8). Si on note ν et ν' les lois respectives de Π et de Π', cela montre que $\nu(C) = \nu'(C)$, pour tout $C \in \mathscr{C}_E$. Comme $\mathscr{C}_E$ est un pi-système engendrant $\mathscr{S}_E$ (lemme II.2.5), le théorème d'unicité du prolongement des mesures de probabilité implique que $\nu = \nu'$. ■

Brefs rappels sur la notion d'indépendance. Rappelons quelques définitions générales sur l'indépendance. (voir la section **??**, page **??**, du chapitre **??** en appendice).

1– Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soient $\mathscr{R}_i \subset \mathscr{F}$, $i \in I$, une famille de classes de sous-ensembles mesurables. *Les classes $\mathscr{R}_i$, $i \in I$, sont (mutuellement) indépendantes (sous $\mathbf{P}$)* si pour tout sous-ensemble d'indices $J \subset I$, non-vide et fini, et pour tous $A_j \in \mathscr{R}_j$, $j \in J$, les événements A_j, $j \in J$ sont mutuellement indépendants. Autrement dit:

$$\forall J \subset I \ J \text{ fini}, \forall A_j \subset \mathscr{R}_j, \ j \in J, \qquad \mathbf{P}\Big(\bigcap_{j\in J} A_j\Big) = \prod_{j\in J} \mathbf{P}(A_j) \ .$$

On rappelle le résultat standard suivant.

Proposition II.2.8 *On conserve les notations précédentes. Soit $\mathscr{P}_i \subset \mathscr{F}$, $i \in I$, une famille de pi-systèmes qui sont mutuellement indépendants. Alors, les tribus engendrées $\sigma(\mathscr{P}_i)$, $i \in I$, sont également mutuellement indépendantes.*

Preuve: voir la proposition **??**, page **??** en appendice. ■

2– Soit $(G, \mathscr{G})$, un espace mesurable. Soit $Y : \Omega \to G$, une variable $(\mathscr{F}, \mathscr{G})$-mesurable. On rappelle que la tribu engendrée par Y est simplement donnée par $\sigma(Y) = \{\{Y \in A\}; A \in \mathscr{G}\}$. Soit $\mathscr{C}$, un pi-système sur G engendrant $\mathscr{G}$. On pose $\mathscr{P}_Y := \{\{Y \in C\}; C \in \mathscr{C}\}$. On voit immédiatement que $\mathscr{P}_Y$ est un pi-système sur Ω générant $\sigma(Y)$.

Soit $X_i : \Omega \to G$, $i \in I$, une famille de variables $(\mathscr{F}, \mathscr{G})$-mesurables. *Les variables X_i, $i \in I$, sont indépendantes* si les tribus $\sigma(X_i)$, $i \in I$ sont indépendantes.

Lemme II.2.9 *On reprend les notation précédentes. Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes.*

(i) Les variables X_i, $i \in I$, sont indépendantes.

(ii) $\mathbf{P}\big(X_{i_1} \in C_1; \ldots; X_{i_n} \in C_n\big) = \mathbf{P}\big(X_{i_1} \in C_1\big) \ldots \mathbf{P}\big(X_{i_n} \in C_n\big)$, pour tous $i_1, \ldots, i_n \in I$, et tous $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{C}$.

Preuve: il est clair que (i) implique (ii). Montrons la réciproque: on remarque que (ii) implique que les pi-systèmes $\mathscr{P}_{X_i}$, $i \in I$ sont mutuellement indépendants. La proposition II.2.8 implique alors que les tribus $\sigma(\mathscr{P}_{X_i}) = \sigma(X_i)$, $i \in I$ sont mutuellement indépendantes, c'est-à-dire (i). ■

Après ces quelques rappels sur la notion d'indépendance, on peut énoncer le critère d'indépendance suivant pour les nuages aléatoires.

Proposition II.2.10 *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable. Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité. Soit $\Pi_i : \Omega \to \mathbf{S}_E$, $i \in I$, une famille de nuages aléatoires. Il y a équivalence entre les deux assertions suivantes.*

(i) Les nuages Π_i, $i \in I$, sont mutuellement indépendants.

(ii) Pour tous $A_1, \ldots A_p \in \mathscr{E}$, deux-à-deux disjoints les vecteurs aléatoires de $\mathbb{N}_\infty^p$, $(N_{A_k}(\Pi_i))_{1 \le k \le p}$, $i \in I$, sont mutuellement indépendants.

Preuve: il est clair que $\Psi : \pi \in \mathbf{S}_E \longmapsto (N_{A_1}(\pi), \ldots, N_{A_p}(\pi)) \in \mathbb{N}_\infty^p$ est $\mathscr{S}_E$-mesurable car chaque composante de cette application l'est. Si les nuages Π_i, $i \in I$, sont mutuellement indépendants, alors il en est de même pour la famille de vecteurs aléatoires $\Psi(\Pi_i)$, $i \in I$. Cela montre que (i) implique (ii).

Réciproquement, par le lemme II.2.6, pour tous $B_1, \ldots, B_q \in \mathscr{E}$, les vecteurs aléatoires $(N_{B_q}(\Pi_i))_{1 \leq \ell \leq q}$, $i \in I$, sont indépendants. Soient $i_1, \ldots, i_n \in I$, et $C_1, \ldots, C_n \in \mathscr{C}_E$ qui par définition peuvent s'écrire

$$C_m = \left\{ \pi \in \mathbf{S}_E : N_{B_1}(\pi) \geq k_1(m); \ \ldots \ ; \ N_{B_q}(\pi) \geq k_q(m) \right\} ,$$

où $B_1, \ldots B_q \in \mathscr{E}$, et où pour tout $1 \leq m \leq n$, $k_1(m), \ldots, k_q(m) \in \mathbb{N}$. On en déduit donc que $\mathbf{P}\big(\Pi_{i_1} \in C_1; \ldots ; \Pi_{i_n} \in C_n\big) = \mathbf{P}\big(\Pi_{i_1} \in C_1\big) \ldots \mathbf{P}\big(\Pi_{i_n} \in C_n\big)$, et le lemme II.2.9 permet de conclure. ∎

II.2.c Mesurabilité de certaines opérations sur les nuages de points.

Soient $(E, \mathscr{E})$ et $(E', \mathscr{E}')$ deux espaces mesurables. Le but de cette section technique est de montrer la mesurabilité du *produit*, de l'*intersection* et de l'*union* de nuages aléatoires:

- $(\pi, \pi') \in \mathbf{S}_E \times \mathbf{S}_{E'} \mapsto \pi \times \pi' \in \mathbf{S}_{E \times E'}$,
- $(\pi, \pi') \in \mathbf{S}_E \times \mathbf{S}_E \mapsto \pi \cap \pi' \in \mathbf{S}_E$,
- $(\pi, \pi') \in \mathbf{S}_E \times \mathbf{S}_E \mapsto \pi \cup \pi' \in \mathbf{S}_E$.

On considère également la mesurabilité des fonctions de nuages suivantes:

- $\pi \longmapsto \sum_{x \in \pi} F(x, \pi \backslash \{x\})$, où $F : E \times \mathbf{S}_E \to [0, \infty]$ est $\mathscr{E} \otimes \mathscr{S}_E$-mesurable.

En général, il n'est du tout clair que ces opérations soient mesurables et les obstructions sont doubles.

- Les espaces $(E, \mathscr{E})$ et $(E', \mathscr{E}')$ doivent satisfaites des conditions de régularité.
- Il est aussi nécessaire de se restreindre à des nuages finis sur chaque ensemble d'une partition fixée.

Ces deux types de restrictions techniques ne sont pas très contraignantes dans la pratique.

Hypothèses sur l'espace. On suppose dans la suite que l'espace mesurable $(E, \mathscr{E})$ sur lequel sont définis les nuages de points sont *séparables et séparés*: on rappelle la définition **??**, page **??**. On rappelle ici le théorème **??**, page **??** en appendice Si $(E, \mathscr{E})$ est un espace mesurable séparable et séparé alors les assertions suivantes sont vérifiées.

(i) $\mathscr{E}$ contient tous les singletons.

(ii) $(E, \mathscr{E})$ est diaginal, c-à-d. que $\Delta := \{(x, x) \, ; \, x \in E\} \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}$.

(iii) Il existe $C \subset \mathbb{R}$ (pas nécessairement Borélien) tel que $(E, \mathscr{E})$ soit isomorphe à $(C, \mathscr{B}(C))$, où $\mathscr{B}(C)$ est la tribu trace des Boréliens de $\mathbb{R}$ sur C.

Hypothèses sur les nuages aléatoires.

Définition II.2.4 Soit $(E,\mathscr{E})$, un ensemble mesurable. Soit $B_p\in\mathscr{E}$, $p\in\mathbb{N}$, une *partition de* E, que l'on note $\mathbf{B}:=(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$. On pose

$$\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}=\big\{\pi\in\mathbf{S}_E:\forall p\in\mathbb{N},\ N_{B_p}(\pi)<\infty\big\}.$$

qui est l'ensemble des nuages finis sur chaque ensemble de la partition $\mathbf{B}$. Clairement que $\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\in\mathscr{S}_E$. On munit $\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$ de la tribu

$$\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}}=\big\{D\cap\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\,;\,D\in\mathscr{S}_E\big\}\,.$$

qui est la tribu trace de $\mathscr{S}_E$ sur $\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$. □

Remarque II.2.1 Comme $\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\in\mathscr{S}_E$, on a bien $\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}}\subset\mathscr{S}_E$. □

Résultats de mesurabilité. Commençons par résoudre le problème consistant à localiser de manière mesurable les points d'un nuage.

Lemme II.2.11 ***(Localisation des points)*** *Soit $(E,\mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. Soit $\mathbf{B}=(B_p)_{p\geq 1}$, une partition de E en ensembles de $\mathscr{E}$. Il existe une famille de fonctions $Y_k^{(p)}:\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\to E$, $p,k\geq 1$, qui sont $(\mathscr{S}_E,\mathscr{E})$-mesurables telles que*

$$\forall p\in\mathbb{N},\ \forall\pi\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}},\quad \pi\cap B_p=\big\{Y_1^{(p)}(\pi),Y_2^{(p)}(\pi),\ldots,Y_{N_{B_p}(\pi)}^{(p)}(\pi)\big\}\quad \textit{dès que } N_{B_p}(\pi)\geq 1.\qquad\text{(II.12)}$$

Preuve: comme $(E,\mathscr{E})$ est séparable et séparé, il existe $C\subset\mathbb{R}$ et $\phi:E\to C$ isomorphisme entre les espaces mesurables $(E,\mathscr{E})$ et $(C,\mathscr{B}(C))$. On fixe $p\in\mathbb{N}^*$ et $x^*\in B_p$. Soit $\pi\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$; on pose $\ell=N_{B_p}(\pi)$ et on se donne π comme l'ensemble $\{x_1,\ldots,x_\ell\}$ où l'indexation est telle que $\phi(x_1)<\ldots<\phi(x_\ell)$. On pose alors pour tout $k\in\mathbb{N}^*$, $Y_k^{(p)}(\pi):=x_k$ si $k\leq\ell$ et $Y_k^{(p)}(\pi):=x^*$ si $k>\ell$. On a clairement (II.12). Puisque ϕ est un isomorphisme, $Y_k^{(p)}$ est $(\mathscr{S}_E,\mathscr{E})$-mesurable ssi $\phi\circ Y_k^{(p)}$ est $(\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}},\mathscr{B}(C))$-mesurable. Pour montrer cela, on fixe $y\in\mathbb{R}$ et on pose $D:=\phi^{-1}\big(\,]-\infty,y]\cap\phi(B_p)\big)$, qui est dans $\mathscr{E}$; on remarque que

$$\{\pi\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}:N_{B_p}(\pi)\geq k\}\cap\{\pi\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}:\phi\circ Y_k^{(p)}\leq y\}=\{\pi\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}:N_D(\pi)\geq k\}\in\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}}.$$

D'autre part

$$\{\pi\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}:N_{B_p}(\pi)<k\}\cap\{\pi\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}:\phi\circ Y_k^{(p)}\leq y\}=\ \emptyset\ \text{ ou bien }\{\pi\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}:N_{B_p}(\pi)<k\}$$

selon que $\phi(x^*)>y$ ou que $\phi(x^*)\leq y$. Dans les deux cas, les ensembles sont dans $\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}}$, ce qui entraîne que $\{\pi\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}:\phi\circ Y_k^{(p)}\leq y\}\in\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}}$ pour tout $y\in\mathbb{R}$. Donc $\phi\circ Y_k^{(p)}$ est $(\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}},\mathscr{B}(C))$-mesurable, ce qui permet de conclure. ■

Lemme II.2.12 ***(Mesurabilité du produit)*** *Soient $(E,\mathscr{E})$ et $(E',\ \mathscr{E}')$, des espaces mesurables. On munit $E\times E'$ de la tribu produit $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}'$. Soit $\mathbf{B}=(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une partition de E en ensembles de $\mathscr{E}$. Soit $\mathbf{B}'=(B'_q)_{q\in\mathbb{N}}$, une partition de E' en ensembles de $\mathscr{E}'$. Alors, l'application*

$$(\pi,\pi')\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\times\mathbf{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}\longmapsto\pi\times\pi'\in\mathbf{S}_{E\times E'}$$

est $\big(\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}}\otimes\mathscr{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}\,,\,\mathscr{S}_{E\times E'}\big)$-mesurable.

Preuve: soient $A \in \mathscr{E}$ et $A' \in \mathscr{E}'$. On remarque que $N_{A\times A'}(\pi \times \pi') = N_A(\pi)N_{A'}(\pi')$, pour tous $(\pi, \pi') \in \mathbf{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbf{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$, avec la convention que $0 \times \infty = 0$. Par conséquent, $(\pi, \pi') \mapsto N_{A\times A'}(\pi \times \pi')$ est $\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathscr{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$-mesurable. Pour tous $p, q \in \mathbb{N}$, on pose alors

$$\mathscr{L}_{p,q} = \left\{ C \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}' : \; (\pi, \pi') \in \mathbf{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbf{S}_{E'}^{\mathbf{B}'} \longmapsto N_{C\cap(B_p \times B'_q)}(\pi \times \pi') \text{ est } \mathscr{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathscr{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}\text{-mesurable} \right\}$$

et $\mathscr{P} = \{A \times A' \,;\; A \in \mathscr{E},\; A' \in \mathscr{E}'\}$, qui est un pi-système générant la tribu produit $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}'$. On rappelle que $(A \times A') \cap (B_p \times B'_q) = (A \cap B_p) \times (A' \cap B'_q)$ et les arguments précédents montrent alors que $\mathscr{P} \subset \mathscr{L}_{p,q}$.

On montre ensuite que $\mathscr{L}_{p,q}$ est une classe monotone. Tout d'abord, puisque $\mathscr{P} \subset \mathscr{L}_{p,q}$, on a $E \times E' \in \mathscr{L}_{p,q}$. Soient $C, D \in \mathscr{L}_{p,q}$ tels que $C \subset D$, alors pour tous, $(\pi, \pi') \in \mathbf{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbf{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$, on a

$$N_{C\cap(B_p\times B'_q)}(\pi \times \pi') \le N_{D\cap(B_p\times B'_q)}(\pi \times \pi') \le N_{B_p}(\pi) N_{B'_q}(\pi') < \infty.$$

Sur $\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbf{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$, on a donc $N_{(D\backslash C)\cap(B_p\times B'_q)} = N_{D\cap(B_p\times B'_q)} - N_{C\cap(B_p\times B'_q)}$, ce qui implique que $D \backslash C \in \mathscr{L}_{p,q}$. Il ensuite facile de montrer que $\mathscr{L}_{p,q}$ est stable par union dénombrable croissante en appliquant le théorème de convergence monotone pour la mesure de comptage. Cela montre que $\mathscr{L}_{p,q}$ est une classe monotone. Le théorème de la classe monotone implique alors que $\mathscr{L}_{p,q} = \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}'$, pour tous $p, q \in \mathbb{N}$.

Ensuite pour tout $C \in \mathscr{E} \otimes \mathscr{E}'$, une interversion série/intégrale pour la mesure de comptage, implique que sur $\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbf{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$, on a $N_C = \sum_{p,q\in\mathbb{N}} N_{C\cap(B_p\times B'_q)}$. Cela montre que N_C restreinte à $\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbf{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$ est $\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathscr{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$-mesurable, ce qui implique le résultat voulu. ■

Lemme II.2.13 ***(Mesurabilité de l'intersection)*** *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace séparable et séparé. Soient $\mathbf{B} = (B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{B}' = (B'_p)_{p\in\mathbb{N}}$, deux partitions de E en ensembles de $\mathscr{E}$. Alors,*

$$(\pi, \pi') \in \mathbf{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbf{S}_E^{\mathbf{B}'} \longmapsto \pi \cap \pi' \in \mathbf{S}_E$$

est $\left(\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathscr{S}_E^{\mathbf{B}'} ,\, \mathscr{S}_E\right)$-mesurable.

Preuve: soit $\Delta := \{(x, x);\, x \in E\}$, la diagonale de E^2 qui appartient à la tribu produit $\mathscr{E}^{\otimes 2}$, car $(E, \mathscr{E})$ est séparable et séparé. On note $\mathscr{E}^{\otimes 2}(\Delta) := \{C \subset \Delta;\, C \in \mathscr{E}^{\otimes 2}\}$, la tribu trace de $\mathscr{E}^{\otimes 2}$ sur la diagonale Δ; on introduit la fonction $\phi : (x, x) \in \Delta \mapsto x \in E$. Il est facile de voir que ϕ est un isomorphisme mesurable de $(\Delta, \mathscr{E}^{\otimes 2}(\Delta))$ sur $(E, \mathscr{E})$. Par ailleurs, le lemme II.2.12 qui précède implique que $(\pi, \pi') \mapsto \pi \times \pi'$ est $\left(\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathscr{S}_E^{\mathbf{B}'} ,\, \mathscr{S}_{E^2}\right)$-mesurable. Le lemme II.2.3 (i) implique ensuite que $(\pi, \pi') \mapsto (\pi \times \pi') \cap \Delta$ est $\left(\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathscr{S}_{E'}^{\mathbf{B}'} ,\, \mathscr{S}_\Delta\right)$-mesurable, où $\mathscr{S}_\Delta$ est la tribu engendrée par les fonctions de comptage N_C, où C varie dans $\mathscr{E}^{\otimes 2}(\Delta)$. Le même lemme II.2.3 (ii) implique alors que

$$(\pi, \pi') \in \mathbf{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbf{S}_E^{\mathbf{B}'} \;\longmapsto\; \phi\big((\pi \times \pi') \cap \Delta\big) = \pi \cap \pi' \in \mathbf{S}_E$$

est $\left(\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathscr{S}_E^{\mathbf{B}'} ,\, \mathscr{S}_E\right)$-mesurable, ce qui est le résultat désiré. ■

Lemme II.2.14 ***(Mesurabilité de l'union)*** *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace séparable et séparé. Soient $\mathbf{B} = (B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{B}' = (B'_p)_{p\in\mathbb{N}}$, deux partitions de E en ensembles de $\mathscr{E}$. Alors,*

$$(\pi, \pi') \in \mathbf{S}_E^{\mathbf{B}} \times \mathbf{S}_E^{\mathbf{B}'} \longmapsto \pi \cup \pi' \in \mathbf{S}_E$$

est $\left(\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}} \otimes \mathscr{S}_E^{\mathbf{B}'} ,\, \mathscr{S}_E\right)$-mesurable.

Preuve: pour tout $C\in\mathscr{E}$, tout $p\in\mathbb{N}$, et tous $(\pi,\pi')\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}'}$, on peut écrire

$$N_{C\cap B_p}(\pi\cup\pi') = N_{C\cap B_p}(\pi) + N_{C\cap B_p}(\pi') - N_{C\cap B_p}(\pi\cap\pi')$$

car $N_{C\cap B_p}(\pi\cap\pi')\leq N_{B_p}(\pi)<\infty$. Par le lemme II.2.13, $(\pi,\pi')\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\mapsto N_{C\cap B_p}(\pi\cup\pi')$ est $\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}}\otimes\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}'}$-mesurable. L'interversion positive série/intégrale pour la mesure de comptage implique alors que pour tout $C\in\mathscr{E}$, $N_C(\pi\cup\pi')=\sum_{p\in\mathbb{N}}N_{C\cap B_p}(\pi\cup\pi')$, pour tous $(\pi,\pi')\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}'}$, ce qui entraîne que $(\pi,\pi')\mapsto N_C(\pi\cup\pi')$ est $\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}}\otimes\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}'}$-mesurable. ■

Lemme II.2.15 ***(Mesurabilité des fonctionnelles de type Palm)*** *Soient $(E,\mathscr{E})$ et $(E_0,\mathscr{E}_0)$, des espaces mesurables. On suppose que $(E,\mathscr{E})$ est séparable et séparé. Soit $\mathbf{B}=(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une partition mesurable de E. Soit $F:E_0\times E\times\mathbf{S}_E\to[0,\infty]$, une fonction $\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_E$-mesurable. On pose*

$$\forall(z,\pi)\in E_0\times\mathbf{S}_E\,,\quad \Phi_F(z,\pi)=\sum_{x\in\pi}F(z;x,\pi\backslash\{x\})\ ,$$

avec $\Phi_F(z,\emptyset):=0$, pour tout $z\in E_0$. Alors, la restriction de Φ_F à $E_0\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$ est $(\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}})$-mesurable.

Preuve: comme F s'approche en croissant par des combinaisons linéaires de fonctions indicatrices, il suffit de montrer le résultat pour les fonctions F de la forme $\mathbf{1}_Q$, avec $Q\in\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_E$. On remarque ensuite que pour tout $(z,\pi)\in(E_0,\mathbf{S}_E)$, on a $\Phi_{\mathbf{1}_Q}(z,\pi)=\sum_{p\in\mathbb{N}}\sum_{x\in\pi}\mathbf{1}_{B_p}(x)\mathbf{1}_Q(z;x,\pi\backslash\{x\})$. On pose alors

$$\forall(z,\pi)\in(E_0,\mathbf{S}_E)\,,\quad \phi_Q^p(z,\pi):=\sum_{x\in\pi}\mathbf{1}_{B_p}(x)\mathbf{1}_Q(z;x,\pi\backslash\{x\})\ ,$$

et il suffit de montrer que la restriction de ϕ_Q^p à $E_0\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$ est $(\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}})$-mesurable. Pour cela, on pose

$$\mathscr{L}=\big\{Q\in\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_E:\ \text{la restriction de } \phi_Q^p \text{ à } E_0\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}} \text{ est } (\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}})\text{-mesurable}\big\}. \qquad \text{(II.13)}$$

Montrons que $\mathscr{L}$ est une classe monotone: on observe d'abord que pour tout $Q\in\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_E$ et tout $(z,\pi)\in E_0\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$,

$$\phi_Q^p(z,\pi)\leq\phi^p_{E_0\times E\times\mathbf{S}_E}(z,\pi)=N_{B_p}(\pi)<\infty\ . \qquad \text{(II.14)}$$

L'égalité précédente montre que $E_0\times E\times\mathbf{S}_E\in\mathscr{L}$. Soient $Q,R\in\mathscr{L}$ tels que $Q\subset R$. Par (II.14), on peut écrire $\phi^p_{R\backslash Q}=\phi^p_R-\phi^p_Q$ sur $E_0\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$, ce qui implique que $R\backslash Q\in\mathscr{L}$. Par convergence monotone pour la mesure de comptage, on vérifie facilement que $\mathscr{L}$ est stable union dénombrable croissante et donc que c'est une classe monotone.

On pose ensuite $\mathscr{P}=\big\{A_0\times A\times C;\ A_0\in\mathscr{E}_0,\ A\in\mathscr{E},\ C\in\mathscr{C}_E\big\}$, où on rappelle la définition II.2.3 du pi-système $\mathscr{C}_E$ qui génère $\mathscr{S}_E$. La classe $\mathscr{P}$ est clairement un pi-système générant $\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_E$. Par le théorème de la classe monotone, le résultat voulu découle du fait que $\mathscr{P}\subset\mathscr{L}$ que nous démontrons: pour cela on fixe $A_0\in\mathscr{E}_0$, $A\in\mathscr{E}$ et $C\in\mathscr{C}_E$ qui est de la forme

$$C=\big\{\pi\in\mathbf{S}_E:\ N_{D_1}(\pi)\geq k_1;\ldots;N_{D_q}(\pi)\geq k_q\big\}\ .$$

Pour tout $x\in E$, on remarque d'abord que $N_{D_i}(\pi\backslash\{x\})=N_{D_i}(\pi)-\mathbf{1}_{D_i}(x)$. Pour tout $I\subset\{1,\ldots,q\}$, on introduit alors $D(I):=\bigcap_{i\in I}D_i\cap\bigcap_{i\notin I}(E\backslash D_i)$ et $C(I):=\{\pi\in\mathbf{S}_E:N_{D_i}(\pi)\geq k_i-\mathbf{1}_I(i)\,,\ 1\leq i\leq q\}$. Il est clair que $C(I)\in\mathscr{C}_E$ et que les $D(I)$, $I\subset\{1,\ldots,q\}$ forment une partition de E. Cela permet de voir que pour tout $(z,\pi)\in E_0\times\mathbf{S}_E$,

$$\phi^p_{A_0\times A\times C}(z,\pi)=\sum_{I\subset\{1,\ldots,q\}}\mathbf{1}_{A_0}(z)\mathbf{1}_{C(I)}(\pi)N_{B_p\cap A\cap D(I)}(\pi)\ ,$$

ce qui montre que $A_0\times A\times C\in\mathscr{L}$ et on conclut. ■

On déduit de l'énoncé précédent, un énoncé analogue pour des fonctions à n points.

Lemme II.2.16 *Soient $(E,\mathscr{E})$ et $(E_0,\mathscr{E}_0)$, des espaces mesurables. On suppose que $(E,\mathscr{E})$ est séparable et séparé. Soit $\mathbf{B}=(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une partition mesurable de E. Soit $n\in\mathbb{N}^*$ et $F\colon E_0\times E^n\times\mathbf{S}_E\to[0,\infty]$, une fonction $\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{E}^{\otimes n}\otimes\mathscr{S}_E$-mesurable. On pose*

$$\forall (z,\pi)\in E_0\times\mathbf{S}_E\,,\quad \Phi_F^{(n)}(z,\pi):=\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n\in\pi\\ \text{distincts}}} F(z;\,x_1,\ldots,x_n,\,\pi\backslash\{x_1,\ldots,x_n\})\,,$$

avec $\Phi_F^{(n)}(z,\pi):=0$, pour tout $z\in E_0$ si $\#\pi<n$. Alors la restriction de $\Phi_F^{(n)}$ à $E_0\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$ est $(\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}})$-mesurable.

Preuve: on montre ce résultat par récurrence, le cas $n=1$ étant le lemme II.2.15. On suppose le résultat vrai pour $n\in\mathbb{N}^*$. Soit $F\colon E_0\times E^{n+1}\times\mathbf{S}_E\to[0,\infty]$, une fonction $\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{E}^{\otimes n+1}\otimes\mathscr{S}_E$-mesurable. On pose $E_1:=E_0\times E$ muni de la tribu $\mathscr{E}_1:=\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{E}$ et on définit $G:E_1\times E^n\times\mathbf{S}_E\to[0,\infty]$, la fonction $G\big((z,x);x_2,\ldots,x_{n+1},\pi\big):=F(z;x,x_2,\ldots,x_{n+1},\pi)$. C'est donc une fonction $\mathscr{E}_1\otimes\mathscr{E}^{\otimes n}\otimes\mathscr{S}_E$-mesurable. On pose $F_0:=\Phi_G^{(n)}$ pour simplifier les notations. L'hypothèse de récurrence au rang n implique que la restriction à $E_1\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$ de

$$F_0(z;x,\pi)=\sum_{\substack{x_2,\ldots,x_{n+1}\in\pi\\ \text{distincts}}} F(z;x,\,x_2,\ldots,x_{n+1},x,\,\pi\backslash\{x_2,\ldots,x_{n+1}\})$$

est $\mathscr{E}_1\otimes\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}}$-mesurable. Le lemme II.2.15 implique ensuite que la restriction à $E_1\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$ de Φ_{F_0} est $\mathscr{E}_1\otimes\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$-mesurable. Et on conclut en remarquant que

$$\begin{aligned}\Phi_{F_0}(z,\pi)&=\sum_{x_1\in\pi}F_0(z;x_1,\pi\backslash\{x_1\})\\ &=\sum_{x_1\in\pi}\ \sum_{\substack{x_2,\ldots,x_{n+1}\in\pi\backslash\{x_1\}\\ \text{distincts}}} F(z;x_1,\,x_2,\ldots,x_{n+1},\,\pi\backslash\{x_1,x_2,\ldots,x_{n+1}\})=\Phi_F^{(n+1)}(z,\pi).\end{aligned}$$ ■

Lemme II.2.17 *Soit $(E,\mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. Soit $\mathbf{B}=(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une partition $\mathscr{E}$-mesurable de E. Les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) La fonction $x\in E\mapsto\{x\}\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$ est $(\mathscr{E},\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}})$-mesurable.

(ii) La fonction $(x,\pi)\in E\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\mapsto\pi\cup\{x\}\in\mathbf{S}_E$ est $(\mathscr{E}\otimes\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}},\mathscr{S}_E)$-mesurable.

(iii) La fonction $(x_1,\ldots,x_n,\pi)\in E^n\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\mapsto\pi\cup\{x_1,\ldots,x_n\}\in\mathbf{S}_E$ est $(\mathscr{E}^{\otimes n}\otimes\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}},\mathscr{S}_E)$-mesurable.

Preuve: on note ψ la fonction du (i). Pour tout $B\in\mathscr{E}$, $(N_B\circ\psi)(x)=\mathbf{1}_B(x)$. Cela montre que $N_B\circ\psi$ est $\mathscr{E}$-mesurable pour tout $B\in\mathscr{E}$, ce qui prouve (i). Montrons (ii): par (i), $(x,\pi)\in E\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\mapsto(\{x\},\pi)\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$ est mesurable. Par le lemme II.2.14, $(\{x\},\pi)\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}\mapsto\pi\cup\{x\}$ est également mesurable, ce qui prouve (ii). Par (i) et (ii), combinés à une simple récurrence, $(x_1,\ldots,x_n)\mapsto\{x_1,\ldots,x_n\}$ est $(\mathscr{E}^{\otimes n},\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}})$-mesurable et le lemme II.2.14 termine la preuve du point (iii). ■

Lemme II.2.18 *Soient $(E,\mathscr{E})$ et $(E_0,\mathscr{E}_0)$, des espaces mesurables. On suppose que $(E,\mathscr{E})$ est séparable et séparé. Soit $\mathbf{B}=(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$, une partition $\mathscr{E}$-mesurable de E. Soit $F:E_0\times E^n\times\mathbf{S}_E\to[0,\infty]$, une fonction $\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{E}^{\otimes n}\otimes\mathscr{S}_E$-mesurable. On pose*

$$\forall(z,\pi)\in E_0\times\mathbf{S}_E\,,\quad \Lambda_F^{(n)}(z,\pi)=\sum_{\substack{x_1,\ldots,x_n\in\pi\\ \text{distincts}}}F(z,\,x_1,\ldots,x_n,\,\pi)$$

avec la convention que $\Lambda_F^{(n)}(z,\pi)=0$, pour tout $z\in E_0$ si $\#\pi<n$. Alors, la restriction de $\Lambda_F^{(n)}$ à $E_0\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$ est $(\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{S}_E^{\mathbf{B}})$-mesurable.

Preuve: on pose $G(z,x_1,\ldots,x_n,\pi):=\mathbf{1}_{\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}}(\pi)F(z,x_1,\ldots,x_n,\pi\cup\{x_1,\ldots,x_n\})$, qui est une fonction $\mathscr{E}_0\otimes\mathscr{E}^{\otimes n}\otimes\mathscr{S}_E$-mesurable par le lemme II.2.17 (iii). Il suffit de remarquer que $\Lambda_F^{(n)}=\Phi_G^{(n)}$ sur $E_0\times\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$. ■

II.2.d Intersections et unions de nuages aléatoires.

Sauf mention explicite du contraire, on fait les hypothèses suivantes:

– toutes les v.a. considérées sont définies sur l'espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ supposé *complet*;

– l'espace $(E,\mathscr{E})$ est supposé séparable et séparé.

Fait. Soit $\Pi:\Omega\to\mathbf{S}_E$, un nuage aléatoire d'intensité μ supposée sigma-finie: il existe une partition $\mathscr{E}$-mesurable $\mathbf{B}=(B_p)_{p\geq 1}$ de E telle que $\mathbf{E}[N_{B_p}(\Pi)]=\mu(B_p)<\infty$ pour tout $p\geq 1$. Par conséquent, p.s. $\Pi\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$. On peut appliquer le lemme II.2.11, page 40, de localisation des points des nuages à Π: pour tout $k,p\geq 1$, il existe des fonctions $Y_k^{(p)}:\mathbf{S}_E\to E$, qui sont $(\mathscr{S}_E,\mathscr{E})$-mesurables et telles que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.}\quad \forall p\geq 1,\quad \Pi\cap B_p=\big\{Y_1^{(p)}(\Pi),Y_2^{(p)}(\Pi),\ldots,Y_{N_{B_p}(\Pi)}^{(p)}(\Pi)\big\}\;.$$

Proposition II.2.19 *Soient $(E,\mathscr{E})$ et $(E',\,\mathscr{E}')$, des espaces mesurables séparables et séparés. On munit $E\times E'$ de la tribu produit $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}'$. Soient $\Pi:\Omega\to\mathbf{S}_E$ et $\Pi':\Omega\to\mathbf{S}_{E'}$, des nuages aléatoires d'intensités respectives μ et μ' supposées, sigma-finies. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) $\Pi\times\Pi':\Omega\to\mathbf{S}_{E\times E'}$ *est un nuage aléatoire.*

(ii) Si Π et Π' sont indépendants, alors l'intensité de $\Pi\times\Pi'$ est $\mu\otimes\mu'$.

Preuve: d'après le fait détaillé ci-dessus, il existe $\mathbf{B}=(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ et $\mathbf{B}'=(B'_q)_{q\in\mathbb{N}}$ des partitions mesurables de resp. E et E' telles que p.s. $\Pi\in\mathbf{S}_E^{\mathbf{B}}$ et $\Pi'\in\mathbf{S}_{E'}^{\mathbf{B}'}$. Le lemme II.2.12 implique alors que $\Pi\times\Pi'$ est p.s. égal à une variable $(\mathscr{F},\mathscr{S}_{E\times E'})$-mesurable. Comme $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ est supposé complet, $\Pi\times\Pi'$ est donc $(\mathscr{F},\mathscr{S}_{E\times E'})$-mesurable: c'est un nuage aléatoire.

Montrons (ii): on note $\nu:\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}'\to[0,\infty]$ l'intensité de $\Pi\times\Pi'$. Comme Π et Π' sont indépendants, on a pour tout $B\in\mathscr{E}$ et $B'\in\mathscr{E}'$

$$\begin{aligned}\nu(B\times B')&=\mathbf{E}\big[N_{B\times B'}(\Pi\times\Pi')\big]=\mathbf{E}\big[N_B(\Pi)N_{B'}(\Pi')\big]\\&=\mathbf{E}\big[N_B(\Pi)\big]\mathbf{E}\big[N_{B'}(\Pi')\big]=\mu(B)\mu'(B')\;.\end{aligned}\tag{II.15}$$

Comme μ et μ' sont sigma-finies, $\mu\otimes\mu'$ est l'unique mesure ν satisfaisant (II.15). ■

Proposition II.2.20 *Soient $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. Soient $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$ et $\Pi' : \Omega \to \mathbf{S}_E$, deux nuages p.s. aléatoires d'intensités respectives μ et μ', supposées sigma-finies. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) $\Pi \cap \Pi' : \Omega \to \mathbf{S}_E$ *est un nuage aléatoire.*

(ii) Si Π et Π' sont indépendants et si μ (ou μ') est diffuse, alors p.s. $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$.

Preuve: on raisonne comme dans la preuve du point (i) de la proposition précédente II.2.19 en utilisant le lemme II.2.13 pour prouver (i). Montrons (ii): la proposition II.2.19 implique que l'intensité $\Pi \times \Pi'$ est $\mu \otimes \mu'$. Donc,

$$\mathbf{E}\big[N_\Delta(\Pi \times \Pi')\big] = (\mu \otimes \mu')(\Delta) = \int_E \mu(\{x\})\mu'(dx) = 0 \; ,$$

si μ est diffuse. Donc p.s. $(\Pi \times \Pi') \cap \Delta = \emptyset$, c'est-à-dire $\Pi \cap \Pi' = \emptyset$. ■

Proposition II.2.21 *Soient $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. Soit $\Pi_n : \Omega \to \mathbf{S}_E$, $n \in \mathbb{N}$, une suite de nuages aléatoires d'intensités respectives μ_n, $n \in \mathbb{N}$, toutes supposées sigma-finies. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) $\Pi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n$ *est un nuage aléatoire.*

(ii) Si les $(\Pi_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont indépendants et si les $(\mu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sont diffuses, alors

$$\mathbf{P}\text{-}p.s. \quad \forall B \in \mathscr{E} \, , \quad N_B(\Pi) = \sum_{n \in \mathbb{N}} N_B(\Pi_n) \tag{II.16}$$

et l'intensité de Π est $\mu = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n$.

Quitte à prendre les nuages Π_n vides à partir d'un certain rang, cette proposition est évidemment vraie pour une suite finie de nuages.

Preuve: en utilisant le fait que les intensités sont sigma-finies et en appliquant de manière répétée le lemme II.2.14, page 41, on montre que $\Pi_0 \cup \ldots \cup \Pi_n^o$ est $(\mathscr{F}, \mathscr{S}_E)$-mesurable On pose $\Pi := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n$. Par convergence monotone pour la mesure de comptage,

$$\forall \omega \in \Omega \, , \; \forall B \in \mathscr{E} \, , \quad N_B(\Pi) = \lim_{n \to \infty} N_B(\Pi_0 \cup \ldots \cup \Pi_n) \; .$$

Cela montre que pour tout $B \in \mathscr{E}$, $N_B(\Pi)$ est $\mathscr{F}$-mesurable, c'est-à-dire que Π est un nuage $(\mathscr{F}, \mathscr{S}_E)$-mesurable, ce qui prouve (i).

Montrons (ii): la proposition II.2.20 (ii) implique que p.s. pour tout $m < n$, $\Pi_m \cap \Pi_n = \emptyset$, ce qui implique (II.16). Par interversion positive série/espérance, on a donc $\mu(B) = \mathbf{E}[N_B(\Pi)] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbf{E}[N_B(\Pi_n)] = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_n(B)$, pour tout $B \in \mathscr{E}$, ce qui termine la preuve. ■

II.3 Nuages Poissonniens.

II.3.a Définition, premières propriétés.

Sauf mention explicite du contraire, on fait les hypothèses suivantes:
– toutes les v.a. considérées sont définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ supposé *complet*;
– l'espace $(E, \mathscr{E})$ est supposé séparable et séparé.

On rappelle qu'une variable à valeurs dans $\mathbb{N}_\infty$ est une variable de Poisson *étendue* si son paramètre appartient à $[0, \infty]$: notamment son paramètre est nul (resp. infini) ssi la variable est p.s. nulle (resp. p.s. infinie). En s'inspirant du cas des nuages homogènes sur $\mathbb{R}_+$, on introduit la définition suivante.

Définition II.3.1 (*Nuages Poissonniens*) Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage aléatoire. C'est un *nuage Poissonnien* s'il satisfait les deux hypothèses suivantes.

(**Chaos**) Pour tous $A_1, \dots, A_p \in \mathscr{E}$ deux-à-deux disjoints, les variables $N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)$ sont indépendantes.

(**Poisson**) Pour tout $A \in \mathscr{E}$, $N_A(\Pi)$ suit une loi de Poisson étendue. □

Théorème II.3.1 *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage Poissonnien d'intensité μ. Alors, μ est diffuse et la loi de Π est entièrement déterminée par μ.*

Preuve: pour tout $x \in E$, $N_{\{x\}}(\Pi) \in \{0, 1\}$. Or, par définition $N_{\{x\}}(\Pi)$ est une loi de Poisson de paramètre $\mu(\{x\})$, ce qui implique que $\mu(\{x\}) = 0$. Montrons le second point de la proposition: supposons que Π' soit un nuage Poissonnien d'intensité μ défini sur un espace de probabilité $(\Omega', \mathscr{F}', \mathbf{P}')$. Par définition, Π et Π' satisfont l'identité en loi (II.10) de la proposition II.2.7. Cette même proposition implique que Π et Π' ont même loi. ■

Le théorème suivant montre que l'hypothèse de chaos pour un nuage aléatoire implique en réalité son caractère Poissonnien. Ce théorème est satisfaisant d'un point de vue théorique n'est pas d'une grande utilité pratique. Sa preuve est rejetée en fin de section.

Théorème II.3.2 *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace séparable et séparé. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage aléatoire d'intensité μ, supposée sigma-finie et diffuse. On suppose que Π satisfait également l'hypothèse de Chaos.*

(**Chaos**) *Pour tous $A_1, \dots, A_p \in \mathscr{E}$ deux-à-deux disjoints, les variables $N_{A_1}(\Pi), \dots, N_{A_p}(\Pi)$ sont indépendantes.*

Alors, Π est un nuage Poissonnien.

Preuve: voir la fin de la section. ■

Théorème II.3.3 **(Restriction)** *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. Soit Π, un nuage Poissonnien sur E d'intensité μ. Soient $B_1, B_2 \in \mathscr{E}$, disjoints. Alors $\Pi \cap B_1$ et $\Pi \cap B_2$ sont deux nuages Poissonniens indépendants d'intensités respectives $\mu(\,\cdot\, \cap B_1)$ et $\mu(\,\cdot\, \cap B_2)$.*

Plus généralement, soit $B_i \in \mathscr{E}$, $i \in I$, une famille d'ensembles mesurables deux-à-deux disjoints. Alors, $\Pi \cap B_i$, $i \in I$, est une famille de nuages Poissonniens indépendants d'intensités respectives $\mu(\,\cdot\, \cap B_i)$, $i \in I$.

Preuve: la définition même des nuages Poissonniens implique que pour tout $A \in \mathscr{E}$, $\Pi \cap A$ est un nuage Poissonnien d'intensité $\mu(\,\cdot \cap A)$. Pour tout $i \in I$, on pose $\Pi_i := \Pi \cap B_i$ et on a pour tout $A \in \mathscr{E}$, $N_A(\Pi_i) = N_{A\cap B_i}(\Pi)$. Comme les $B_i \in \mathscr{E}$, $i \in I$, deux-à-deux disjoints, pour tous $A_1, \ldots, A_p \in \mathscr{E}$ deux-à-deux disjoints, les vecteurs aléatoires $(N_{A_k}(\Pi_i))_{1\leq k\leq p}$, $i \in I$, sont indépendants (on utilise la propriété de Chaos des nuages Poissonniens car les ensembles $A_k \cap B_i$, $1 \leq k \leq p$, $i \in I$, sont deux-à-deux disjoints). On conclut grâce à la proposition II.2.10 (ii). ■

Théorème II.3.4 **(Superposition croissante ou indépendante)** *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. Soit $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite de nuages Poissonniens sur E d'intensités respectives $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ toutes supposées sigma-finies. On pose $\Pi := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Pi_n$. Alors, c'est un nuage aléatoire dont l'intensité est notée μ et les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) Si on suppose que $\mathbf{P}$-p.s. $\Pi_n \subset \Pi_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors Π est un nuage de Poisson d'intensité μ et pour tout $A \in \mathscr{E}$, on a $\mu(A) = \lim_n \uparrow \mu_n(A)$.

(ii) Si on suppose que les $(\Pi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont indépendants, alors Π est un nuage de Poisson d'intensité μ et on a $\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$.

Preuve: puisque la tribu $\mathscr{F}$ est complète, la proposition II.2.21 (i) montre que Π est un nuage aléatoire $(\mathscr{F}, \mathscr{S}_E)$-mesurable. On montre d'abord (i): soit $A \in \mathscr{E}$; le théorème de convergence monotone pour la mesure de comptage implique que $\mathbf{P}$-p.s. $N_A(\Pi) = \lim_n \uparrow N_A(\Pi_n)$. En prenant l'espérance, le théorème de convergence monotone sous $\mathbf{P}$ implique alors que $\mu(A) = \lim_n \uparrow \mu_n(A)$. Supposons que $\mu(A) < \infty$. Alors clairement, pour tout $r \in [0, 1]$, par convergence dominée

$$\mathbf{E}\big[r^{N_A(\Pi)}\big] = \lim_{n\to\infty} \mathbf{E}\big[r^{N_A(\Pi_n)}\big] = \lim_{n\to\infty} e^{-\mu_n(A)(1-r)} = e^{-\mu(A)(1-r)},$$

ce qui implique que $N_A(\Pi)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(A)$. Supposons ensuite que $\mu(A) = \infty$. Par une inégalité de type Markov, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a alors

$$\mathbf{P}\big(N_A(\Pi) \leq t\big) \leq \mathbf{P}\big(N_A(\Pi_n) \leq t\big) \leq e^t \mathbf{E}\big[e^{-N_A(\Pi_n)}\big] = e^{t-\mu_n(A)(1-e^{-1})} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

et donc $\mathbf{P}$-p.s. $N_A(\Pi) = \mu(A)$. Dans tous les cas, $N_A(\Pi)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(A)$.

Soient $A_1, \ldots, A_p \in \mathscr{E}$, deux-à-deux disjoints. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ fixé les v.a. $N_{A_1}(\Pi_n), \ldots, N_{A_p}(\Pi_n)$ sont indépendantes et

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \lim_{n\to\infty} \big(N_{A_1}(\Pi_n), \ldots, N_{A_p}(\Pi_n)\big) = \big(N_{A_1}(\Pi), \ldots, N_{A_p}(\Pi)\big)$$

ce qui implique facilement que les v.a. $N_{A_1}(\Pi), \ldots, N_{A_p}(\Pi)$ sont indépendantes. Cela montre donc que Π est un nuage de Poisson.

Montrons (ii): posons $\Pi^*_n := \bigcup_{0\leq k\leq n} \Pi_n$, $\in \mathbb{N}$; par la proposition II.2.21, page 45, Π^*_n est un nuage aléatoire $(\mathscr{F}, \mathscr{S}_E)$-mesurable d'intensité $\sum_{0\leq k\leq n} \mu_k$ et on conclut en appliquant (i) aux $(\Pi^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$. ■

Proposition II.3.5 *Soient $(E, \mathscr{E})$ et $(E', \mathscr{E}')$, des espaces mesurables séparés et séparables. Soit Π, un nuage Poissonnien sur E d'intensité μ. Soit $\phi : E \to E'$, supposée $(\mathscr{E}, \mathscr{E}')$-mesurable. On note μ' la mesure image de μ par ϕ et on pose $\Pi' := \phi(\Pi)$. Si ϕ est injective, alors Π' est un nuage Poissonnien sur E' d'intensité μ'.*

Preuve: si ϕ est injective, alors

$$\forall \omega \in \Omega\,,\ \forall B' \in \mathscr{E}'\,, \quad N_{B'}(\Pi'(\omega)) = N_{\phi^{-1}(B')}(\Pi(\omega))\ . \tag{II.17}$$

Cela montre que Π' est un nuage aléatoire. Par ailleurs $N_{B'}(\Pi')$ est une variable de Poisson d'intensité $\mu(\phi^{-1}(B'))=\mu'(B')$. Enfin, pour tous $A'_1,\ldots,A'_p\in\mathscr{E}'$, deux-à-deux disjoints, $\phi^{-1}(A'_1),\ldots,\phi^{-1}(A'_p)\in\mathscr{E}$ sont également deux-à-deux disjoints et (II.17) implique que les variables $N_{A'_1}(\Pi'),\ldots,N_{A'_p}(\Pi')$ sont indépendantes. ■

Le théorème suivant est une version plus sophistiquée de la proposition précédente.

Théorème II.3.6 **(Image)** *Soient $(E,\mathscr{E})$ et $(E',\mathscr{E}')$, deux espaces mesurables séparables et séparés. Soit Π, un nuage Poissonnien sur E d'intensité μ, supposée sigma-finie. Soit $\phi : E\to E'$, une fonction $(\mathscr{E},\mathscr{E}')$-mesurable. On note μ' la mesure image de μ par ϕ et on pose $\Pi' := \phi(\Pi)$. On suppose μ' diffuse.*

Alors, Π' est un nuage Poissonnien d'intensité μ' et p.s. ϕ est injective sur Π, c'est-à-dire

$$\mathbf{P}\text{-}p.s. \quad \forall X,Y\in\Pi\,, \quad \Big(X\neq Y\Big) \Longrightarrow \Big(\phi(X)\neq\phi(Y)\Big)\,, \tag{II.18}$$

ce qui entraîne que

$$\mathbf{P}\text{-}p.s. \quad \forall x'\in E'\,, \quad N_{\phi^{-1}(\{x'\})}(\Pi)\in\{0,1\} \tag{II.19}$$

Preuve du théorème: on suppose d'abord que l'on a montré (II.18). Cela implique immédiatement (II.19). Il existe alors $\Omega^*\in\mathscr{F}$ tel que $\mathbf{P}(\Omega^*)=1$ et

$$\forall \omega \in \Omega^*\,,\ \forall B' \in \mathscr{E}'\,, \quad N_{B'}(\Pi'(\omega)) = N_{\phi^{-1}(B')}(\Pi(\omega))\ , \tag{II.20}$$

On raisonne ensuite comme à la proposition II.3.5 pour montrer que Π' est Poissonnien d'intensité μ'.

Il reste donc à prouver (II.18). Pour cela on considère $\Pi^*=\Pi\times\Pi$, qui d'après la proposition II.2.19, est un nuage aléatoire sur l'espace $E\times E$ muni de la tribu produit $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$. On note ρ son intensité, que l'on calcule comme suit: on fixe $A,B\in\mathscr{E}$ et on pose $A_0:=A\backslash(A\cap B)$ et $B_0:=B\backslash(A\cap B)$, si bien que $A_0, A\cap B, B_0$ sont disjoints deux-à-deux. On a donc

$$\begin{aligned}\rho(A\times B) &= \mathbf{E}\big[N_{A_0}(\Pi)N_{B_0}(\Pi)\big]+\mathbf{E}\big[N_{A_0}(\Pi)N_{A\cap B}(\Pi)\big]\\ &\qquad +\mathbf{E}\big[N_{A\cap B}(\Pi)N_{B_0}(\Pi)\big]+\mathbf{E}\big[(N_{A\cap B}(\Pi)\,)^2\big]\\ &= \mu(A_0)\mu(B_0)+\mu(A_0)\mu(A\cap B)+\mu(A\cap B)\mu(B_0)+\mathbf{E}\big[(N_{A\cap B}(\Pi)\,)^2\big].\end{aligned}$$

Comme une variable de Poisson de paramètre θ a un moment d'ordre 2 est égal à $\theta+\theta^2$, on a

$$\begin{aligned}\rho(A\times B) &= \mu(A_0)\mu(B_0)+\mu(A_0)\mu(A\cap B)+\mu(A\cap B)\mu(B_0)+\mu(A\cap B)^2+\mu(A\cap B)\\ &= \mu(A)\mu(B)+\mu(A\cap B)=(\mu\otimes\mu)(A\times B)+\mu(A\cap B)\ .\end{aligned}$$

On introduit ensuite la fonction $\jmath : x\in E\mapsto(x,x)\in E\times E$. On rappelle que $\Delta\in\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$. Donc $\jmath$ est $(\mathscr{E},\mathscr{E}\otimes\mathscr{E})$-mesurable: c'est même une bijection E sur Δ. On note μ_Δ la mesure induite sur Δ par μ via $\jmath$. Comme $\jmath^{-1}((A\times B)\cap\Delta)=A\cap B$, on a donc

$$\forall A,B\in\mathscr{E}\,, \quad \rho(A\times B)=\mu_\Delta(A\times B)+(\mu\otimes\mu)(A\times B)\ . \tag{II.21}$$

On pose $\mathscr{P}:=\{A\times B\,;\ A,B\in\mathscr{E}\}$, qui est un pi-système générant $\mathscr{E}\otimes\mathscr{E}$. On rappelle que μ est sigma-finie. Il existe donc une partition E en ensembles $\mathscr{E}$-mesurables $(B_p)_{p\in\mathbb{N}}$ tels que $\mu(B_p)<\infty$.

On a donc $\rho(B_p \times B_q) < \infty$ par (II.21). Comme ρ et $\mu_\Delta + \mu \otimes \mu$ coïncident sur $\mathscr{P}$, le théorème d'unicité du prolongement des mesures sigma-finies s'applique et $\rho = \mu_\Delta + \mu \otimes \mu$.

On pose $\Phi : (x, y) \in E \times E \mapsto (\phi(x), \phi(y)) \in E' \times E'$. Il est facile de montrer que Φ est $(\mathscr{E} \otimes \mathscr{E}, \mathscr{E}' \otimes \mathscr{E}')$-mesurable. On note Δ' la diagonale de $E' \times E'$, diagonale qui appartient à $\mathscr{E}' \otimes \mathscr{E}'$. On s'intéresse à l'ensemble $U := \Phi^{-1}(\Delta') \backslash \Delta = \{(x, y) \in E \times E : x \neq y \text{ et } \phi(x) = \phi(y)\}$. Comme μ_Δ est concentrée sur Δ (par définition), on a $\mu_\Delta(U) = 0$. Par Fubini, on a également,

$$\begin{aligned}(\mu \otimes \mu)(U) &= \int_E \mu(dx) \int_E \mu(dy) \mathbf{1}_{\{y \in E : y \neq x \text{ et } \phi(y) = \phi(x)\}} \\ &\leq \int_E \mu(dx) \mu\big(\phi^{-1}(\{\phi(x)\})\big) = \int_E \mu(dx) \mu'(\{\phi(x)\}) .\end{aligned}$$

Comme μ' est diffuse, on a $\mu'(\{\phi(x)\}) = 0$, pour tout $x \in E$ et donc $(\mu \otimes \mu)(U) = 0$. On en déduit donc que $\rho(U) = \mathbf{E}[N_U(\Pi^*)] = 0$ et donc que $\mathbf{P}$-p.s. $\Pi^* \cap U = \emptyset$, c'est-à-dire (II.18), ce qui termine la preuve. ■

Preuve du théorème II.3.2. On montre d'abord que 'on peut se ramener au cas des mesure finies: supposons le théorème II.3.2 démontré dans le cas des mesures d'intensité de masse finie. Soit μ sigma-finie et diffuse. Il existe une partition $\mathscr{E}$-mesurable de E notée $(B_p)_{p \geq 1}$ telle que $0 < \mu(B_p) < \infty$, pour tout $p \geq 1$. Par la proposition II.2.4, page 36, $\Pi_p := \Pi \cap B_p$ est un nuage aléatoire d'intensité $\mu(\,\cdot \cap B_p)$, diffuse et de masse finie; clairement Π_p satisfaisant l'hypothèse de chaos: par le théorème II.3.2, supposé vrai pour les mesures finies, Π_p est un nuage Poissonnien d'intensité $\mu(\,\cdot \cap B_p)$. Par ailleurs, l'hypothèse de chaos et la proposition II.2.10, page 38, implique que les nuages Poissonniens $(\Pi_p)_{p \geq 1}$ sont indépendants; or $\Pi = \bigcup_{p \geq 1} \Pi_p$; le théorème de superposition II.3.4, page 47, s'applique alors: il implique que Π est Poissonnien d'intensité $\sum_{p \geq 1} \mu(\,\cdot \cap B_p) = \mu$.

Il suffit donc de montrer le théorème II.3.2 dans le cas où μ est de masse finie. Comme $(E, \mathscr{E})$ est séparable et séparé, il existe $C \subset [0, 1]$ et $\phi : E \to C$ bijective $(\mathscr{E}, \mathscr{B}(C))$-mesurable telle que la réciproque $\phi^{-1} : C \to E$ soit $(\mathscr{B}(C), \mathscr{E})$-mesurable (on rappelle que $\mathscr{B}(C)$ est la tribu trace des Boréliens de $\mathbb{R}$ sur C). Le lemme II.2.4, page 36, montre que $\Pi' := \phi(\Pi)$ est un nuage aléatoire d'intensité $\mu' := \mu \circ \phi^{-1}$. Comme ϕ est bijective, il est clair que μ' est diffuse et que Π' satisfait la propriété de chaos. Si on montre que Π' est Poissonnien, alors la proposition II.3.5, page 47, implique que $\Pi = \phi^{-1}(\Pi')$ est Poissonnien également.

Il suffit donc de montrer que Π' est Poissonnien: comme Π' satisfait la propriété de chaos, il suffit de montrer que pour tout $A \in \mathscr{B}(C)$, $N_A(\Pi')$ suit une loi de Poisson. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $k \in \{0, \ldots, 2^n - 1\}$, on pose alors $A_{n,k} := A \cap [k2^n, (k+1)2^n[$ et

$$\xi_{n,k} := \mathbf{1}_{\{N_{A_{n,k}}(\Pi') \geq 1\}}, \quad p_{n,k} := \mathbf{P}(N_{A_{n,k}}(\Pi') \geq 1) \quad \text{et} \quad X_n := \sum_{0 \leq k < 2^n} \xi_{n,k}.$$

L'hypothèse de chaos implique que pour tout $n \in \mathbb{N}$, les v.a. $(\xi_{n,k})_{0 \leq k < 2^n}$ sont des Bernoulli indépendantes de paramètre respectifs $(p_{n,k})_{0 \leq k < 2^n}$. Il est ensuite facile de voir que p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$X_n \leq X_{n+1} \quad \text{et} \quad \lim_{n \to \infty} X_n = \sup_{n \geq 0} X_n = N_A(\Pi') < \infty. \tag{II.22}$$

Par convergence monotone, cela implique que

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{0 \leq k < 2^n} p_{n,k} = \lim_{n \to \infty} \mathbf{E}[X_n] = \mathbf{E}[N_A(\Pi')] = \mu'(A) . \tag{II.23}$$

On remarque ensuite que $p_{n,k} \leq \mathbf{E}[N_{A_{n,k}}(\Pi')] = \mu'(A_{n,k})$ et donc que

$$\sum_{0\leq k<2^n} p_{n,k}^2 \leq \sum_{0\leq k<2^n} \mu'(A_{n,k})^2 \leq \mu'(A) \max_{0\leq k<2^n} \mu'(A_{n,k}) \ . \qquad \text{(II.24)}$$

Raisonnons par l'absurde en supposant que $\max_{0\leq k<2^n} \mu'(A_{n,k})$ ne tende pas vers 0 lorsque n tend vers l'infini: il existe donc $\varepsilon > 0$ une suite strictement croissante d'entiers naturels $(n_\ell)_{\ell\geq 0}$ telle que

$$\max_{0\leq k<2^{n_\ell}} \mu'(A_{n_\ell,k}) \geq \varepsilon \ .$$

On pose $I_{n,k} = [k2^n, (k+1)2^n]$, $0 \leq k < 2^n$, et $J_\ell := \cup\{I_{n_\ell,k}; k \ : \ \mu'(A_{n_\ell,k}) \geq \varepsilon\}$. Clairement, $J_{\ell+1} \subset J_\ell$. On pose $K = \bigcap_{\ell\geq 0} J_\ell$, qui est un compact non-vide, par ce qui précède et puisque les J_ℓ sont également compacts non-vides. Comme $\mu'(A \cap J_\ell) \geq \varepsilon$, on a $\mu'(K \cap A) \geq \varepsilon$.

Soient $x_1, \ldots, x_q$, q points distincts de $K \cap A$; alors pour tout ℓ assez grand, il existe $k_1, \ldots, k_q$ tels que pour tout $p \in \{1, \ldots, q\}$, on ait $x_p \in A_{n_\ell,k_p}$ et $\mu'(A_{n_\ell,k_p}) \geq \varepsilon$, et tels que les les intervalles I_{n_ℓ,k_p}, $1 \leq p \leq q$ soient disjoints. Cela implique que $q\varepsilon \leq \sum_{1\leq p\leq q} \mu'(A_{n_\ell,k_p}) \leq \mu'(A)$. On a montré que $K \cap A$ contient au plus $\mu'(A)/\varepsilon$ points. Or on a également prouvé que $\mu'(K \cap A) \geq \varepsilon$, ce qui contredit le fait que μ' soit diffuse.

On a donc montré par l'absurde que $\lim_{n\to\infty} \max_{0\leq k<2^n} \mu'(A_{n,k}) = 0$. Par (II.24) et (II.23), l'approximation Binomiale-Poisson établie au théorème **??** s'applique (voir page **??**, en appendice): les variables X_n tendent en loi vers une loi de Poisson de paramètre $\mu'(A)$ et (II.22) implique que $N_A(\Pi')$ suit une loi de Poisson, ce qui permet de conclure. ■

II.3.b Construction.

Les cas des nuages Poissonniens d'intensité finie. On se donne les objets suivants.

(a) $(E, \mathscr{E})$, un espace séparable et séparé; $\mu : \mathscr{E} \to \mathbb{R}_+$, une mesure finie, non-nulle et diffuse.

(b) $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité complet; $X_n : \Omega \to E$, $n \in \mathbb{N}^*$, des v.a. $(\mathscr{F}, \mathscr{E})$-mesurables, indépendantes de même loi $\mu(\,\cdot\,)/\mu(E)$.

(c) $M : \Omega \to \mathbb{N}$, une v.a. $\mathscr{F}$-mesurable, indépendante de $(X_n)_{n\geq 1}$, loi de Poisson de paramètre $\mu(E)$.

Théorème II.3.7 *Sous les hypothèses et notations précédentes, on définit* $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$ *par*

$$\Pi = \{X_1, \ldots, X_M\} \quad \text{si} \quad M \geq 1 \quad \text{et} \quad \Pi = \emptyset \quad \text{si} \quad M = 0 \ . \qquad \text{(II.25)}$$

Alors, Π *est un nuage Poissonnien d'intensité* μ.

Preuve: l'exemple II.2.1 permet d'affirmer que Π est un nuage aléatoire. Soient $p \in \mathbb{N}^*$ et $A_1, \ldots, A_p \in \mathscr{E}$, deux-à-deux disjoints. On pose $A_{p+1} := E \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_p)$, si bien que $A_1, \ldots, A_{p+1}$ est une partition de E. On fixe $u_1, \ldots, u_p \in \mathbb{R}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $Z_n := e^{iu_1}\mathbf{1}_{A_1}(X_n) + \ldots + e^{iu_p}\mathbf{1}_{A_p}(X_n) + \mathbf{1}_{A_{p+1}}(X_n)$. Les variables $(Z_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. et on vérifie facilement que

$$\mu(E)\big(1 - \mathbf{E}[Z_n]\big) = \mu(E)\big(1 - \mathbf{E}[Z_1]\big) = \mu(A_1)(1 - e^{iu_1}) + \ldots + \mu(A_p)(1 - e^{iu_p}) \ . \qquad \text{(II.26)}$$

Comme μ est sans atome, $\mathbf{P}$-p.s. pour tous $m < n$, $X_n \neq X_m$, ce qui entraîne

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \prod_{1\leq j\leq p} \exp\big(iu_j N_{A_j}(\Pi)\big) = \prod_{1\leq j\leq M} Z_j \ ,$$

avec la convention qu'un produit sur un ensemble d'indices vide est égal à 1. On en déduit les égalités suivantes:

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\Big[\prod_{1\leq j\leq p} \exp\big(iu_j N_{A_j}(\Pi)\big)\Big] &= \mathbf{E}\Big[\prod_{1\leq j\leq M} Z_j\Big] = 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbf{E}\Big[\mathbf{1}_{\{M=n\}} \prod_{1\leq j\leq n} Z_j\Big] \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbf{P}(M=n)\mathbf{E}\Big[\prod_{1\leq j\leq n} Z_j\Big] = \sum_{n\geq 0} e^{-\mu(E)} \frac{\mu(E)^n}{n!} \mathbf{E}[Z_1]^n \\
&= \exp\left(-\mu(E)(1-\mathbf{E}[Z_1])\right) = \prod_{1\leq j\leq p} \exp\big(-\mu(A_j)(1-e^{iu_j})\big) \, .
\end{aligned}$$

L'injectivité de la fonction caractéristique montre que le vecteurs $(N_{A_1}(\Pi), \ldots, N_{A_p}(\Pi))$ a des composantes indépendantes suivant des lois de Poisson, ce qui implique le résultat désiré. ■

Construction pour les intensité sigma-finies. On procède de la même façon en utilisant le principe de superposition. Plus précisément, on se donne les objets suivants.

(a) $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. $\mu : \mathscr{E} \to \mathbb{R}_+$, une mesure sigma-finie, non-nulle et diffuse. Il existe donc $B_p \in \mathscr{E}$, $p \geq 1$, une partition de E telle que pour tout $p \geq 1$, on ait $0 < \mu(B_p) < \infty$.

(b) $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité complet; $X_n^{(p)} : \Omega \to E$, $p, n \geq 1$, des v.a. $\mathscr{F}$-mesurables indépendantes telles que pour tout $p \geq 1$, la suite $(X_n^{(p)})_{n\geq 1}$ est i.i.d. de loi $\mu(\,\cdot\, \cap B_p)/\mu(B_p)$. On pose $T := (X_m^{(p)})_{p,n\geq 1}$.

(c) $M_p : \Omega \to \mathbb{N}$, $p \geq 1$, des v.a. $\mathscr{F}$-mesurables indépendantes; M_p suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(B_p)$. On suppose que la suite $(M_p)_{p\geq 1}$ est indépendante du tableau de variables T.

Théorème II.3.8 *Sous les hypothèses et notations précédentes, pour tout $p \geq 1$, on pose*

$$\Pi_p = \big\{X_1^{(p)}, \ldots, X_{M_p}^{(p)}\big\} \ \text{ si } M_p \geq 1 \quad \text{et} \quad \Pi_p = \emptyset \ \text{ si } M_p = 0 \, .$$

On pose également $\Pi = \bigcup_{p\geq 1} \Pi_p$. Alors, Π est un nuage Poissonnien sur E d'intensité μ.

Preuve: par le théorème II.3.7, Π_p est un nuage Poissonnien d'intensité $\mu(\,\cdot\, \cap B_p)$. La construction garantit que les Π_p, $p \geq 1$, sont indépendants. Par la propriété de superposition (proposition II.3.4, page 47), Π est un nuage Poissonnien d'intensité $\sum_{p\geq 1} \mu(\,\cdot\, \cap B_p) = \mu$. ■

Représentation des nuages Poissonniens. On montre, à l'aide du lemme de localisation II.2.11 (page 40) que tout nuage Poissonnien, sur un espace séparable et séparé et d'intensité sigma-finie, peut se représenter de manière mesurable comme dans la construction générale qui précède. On commence par considérer les nuages d'intensité finie. Plus précisément, on se donne les objets suivants.

(α) $(E, \mathscr{E})$, un espace séparable et séparé.

(β) $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité complet sur lequel est défini $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage Poissonnien d'intensité finie: $\mu(E) < \infty$.

(γ) $U : \Omega \to [0,1]$, une v.a. $\mathscr{F}$-mesurable indépendante de Π et de loi uniforme.

À l'aide U, on construit:
– une suite $(X'_n)_{n\geq 1}$ de v.a. i.i.d. de loi $\mu(\,\cdot\,)/\mu(E)$;
– une suite de permutations indépendantes $(\Sigma_n)_{n\geq 1}$ telle que d'une part, $\Sigma_n : \{1,\ldots,n\} \to \{1,\ldots,n\}$ suit la loi uniforme et telle que d'autre part, la suite $(\Sigma_n)_{n\geq 1}$ est indépendante de $(X'_n)_{n\geq 1}$.
Comme $(E, \mathscr{E})$ est séparable et séparé, il existe $C \subset \mathbb{R}$ et une bijection $\phi : E \to C$ qui est $(\mathscr{E}, \mathscr{B}(C))$-mesurable et telle que la réciproque ϕ^{-1} soit $(\mathscr{B}(C), \mathscr{E})$-mesurable également. Par lemme II.2.11 (page 40), il existe une suite $Y_k : \mathbf{S}_E \to E$, $k \geq 1$, de fonctions $(\mathscr{S}_E, \mathscr{E})$-mesurables telles que pour tout nuage $\pi \in \mathbf{S}_E$ comptant n points,

$$\pi = \big\{Y_1(\pi), \ldots, Y_n(\pi)\big\} \quad \text{et} \quad \phi(Y_1(\pi)) < \ldots < \phi(Y_n(\pi)) \,.$$

Pour tout $n \geq 1$, sur $\{\#\Pi = n\}$, on pose:

$$X_k = Y_{\Sigma_n(k)}(\Pi) \text{ si } 1 \leq k \leq n \quad \text{et} \quad X_k = X'_{k-n} \text{ si } k > n.$$

Sur $\{\#\Pi = 0\} \cup \{\#\Pi = \infty\}$, pour tout $k \geq 1$, on pose $X_k = X'_k$. On montre tout d'abord que pour tout $n \geq 1$,

$$\text{sous } \mathbf{P}(\,\cdot\,|\,\#\Pi = n),\ X_1, \ldots, X_n \text{ sont i.i.d. de loi } \mu(\,\cdot\,)/\mu(E). \tag{II.27}$$

Preuve: soient $A_1, \ldots, A_n \in \mathscr{E}$. Observons que $\{N_{A_1}(\Pi) = 1; \ldots; N_{A_n}(\Pi) = 1\} = \bigcup_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \{X_{\sigma(1)} \in A_1; \ldots; X_{\sigma(n)} \in A_n\}$, les événements dans l'union étant deux-à-deux disjoints. Ici, $\mathbf{S}_n$ désigne l'ensemble des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. On remarque ensuite que pour tout $\sigma \in \mathbf{S}_n$, $\Sigma_n \circ \sigma$ est une permutation de loi uniforme. Cela implique que sous $\mathbf{P}(\,\cdot\,|\,\#\Pi = n)$, $(X_1, \ldots, X_n)$ à même loi que $(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(n)})$ et donc

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(N_{A_1}(\Pi) = 1; \ldots; N_{A_n}(\Pi) = 1 \,\big|\, \#\Pi = n\big) &= \mathbf{P}\Big(\bigcup_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \{X_{\sigma(1)} \in A_1; \ldots; X_{\sigma(n)} \in A_n\} \,\Big|\, \#\Pi = n\Big) \\
&= \sum_{\sigma \in \mathbf{S}_n} \mathbf{P}\big(X_{\sigma(1)} \in A_1; \ldots; X_{\sigma(n)} \in A_n \,\big|\, \#\Pi = n\big) \\
&= n!\, \mathbf{P}\big(X_1 \in A_1; \ldots; X_n \in A_n \,\big|\, \#\Pi = n\big) \,. \qquad \text{(II.28)}
\end{aligned}$$

On pose ensuite $A_{n+1} := E \backslash (A_1 \cup \ldots \cup A_n)$ et on remarque que

$$\begin{aligned}
\mathbf{P}\big(N_{A_1}(\Pi) = 1; \ldots; N_{A_n}(\Pi) = 1; \#\Pi = n\big) &= \mathbf{P}\big(N_{A_1}(\Pi) = 1; \ldots; N_{A_n}(\Pi) = 1; N_{A_{n+1}}(\Pi) = 0\big) \\
&= \mu(A_1) \ldots \mu(A_n) e^{-\mu(E)}.
\end{aligned}$$

Comme $\#\Pi$ est une v.a. de Poisson de paramètre $\mu(E)$, on en déduit que

$$\mathbf{P}\big(N_{A_1}(\Pi) = 1; \ldots; N_{A_n}(\Pi) = 1 \,\big|\, \#\Pi = n\big) = n!\, \frac{\mu(A_1)}{\mu(E)} \ldots \frac{\mu(A_1)}{\mu(E)},$$

ce qui implique (II.27) par (II.28). ■

On déduit facilement de (II.27) la proposition suivante.

Proposition II.3.9 *On suppose (α), (β) et (γ) ci-dessus. On note $\mathscr{G}$ la tribu engendrée par U et Π. On pose $M := \#\Pi$. Alors, il existe une famille de variables $(X_n)_{n\geq 1}$ satisfaisant les conditions suivantes.*

(i) Pour tout $n \geq 1$, $X_n : \Omega \to E$ est $(\mathscr{G}, \mathscr{E})$-mesurable.

(ii) Les variables $(X_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. de loi $\mu(\,\cdot\,)/\mu(E)$.

(iii) La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est indépendante de M.

(iv) $\mathbf{P}$-p.s. $\Pi = \{X_1, \ldots, X_M\}$ dès que $M \geq 1$.

Cette proposition se généralise immédiatement au cas sigma-fini.

Proposition II.3.10 *On suppose (α), (β) et (γ) ci-dessus, excepté que μ est seulement supposée sigma-finie; il existe donc une partition $\mathscr{E}$-mesurable de E, notée $\mathbf{B} = (B_p)_{p\geq 1}$ telle que pour tout $p \geq 1$, on ait $0 < \mu(B_p) < \infty$. Pour tout $p \geq 1$, on note $\mathscr{G}_p$ la tribu engendrée par U et $\Pi \cap B_p$ et on note $M_p = N_{B_p}(\Pi)$. Alors, il existe un tableau de variables $(X_n^{(p)})_{p,n\geq 1}$ qui satisfont les conditions suivantes.*

(i) Pour tous $n, p \geq 1$, $X_n^{(p)} : \Omega \to B_p$ est $(\mathscr{G}_p, \mathscr{E})$-mesurable.

(ii) Les variables $(X_n^{(p)})_{p,n\geq 1}$ sont indépendantes et pour tous $p, n \geq 1$, $X_n^{(p)}$ a pour loi $\mu(\,\cdot \cap B_p)/\mu(B_p)$.

(iii) Le tableau de variables $(X_n^{(p)})_{p,n\geq 1}$ est indépendant de la suite $(M_p)_{p\geq 1}$.

(iv) $\mathbf{P}$-p.s. pour tout $p \geq 1$, $\Pi \cap B_p = \{X_1^{(p)}, \ldots, X_{M_p}^{(p)}\}$ dès que $M_p \geq 1$.

II.4 Outils de calculs.

II.4.a Formules de Palm.

Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ supposé complet. Nous renvoyons au lemme II.2.15 pour les questions de mesurabilité soulevées implicitement par le théorème suivant.

Théorème II.4.1 **(Formule de Palm)** *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace séparable et séparé. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage Poissonnien d'intensité μ, supposée sigma-finie et non-nulle. Soit $(E_0, \mathscr{E}_0)$, un espace mesurable et soit $Z : \Omega \to E_0$, une variable $(\mathscr{F}, \mathscr{E}_0)$-mesurable supposée indépendante de Π. Soit $F : E_0 \times E \times \mathbf{S}_E \to [0, \infty]$, une fonction $\mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{E} \otimes \mathscr{S}_E$-mesurable. Alors,*

$$\mathbf{E}\left[\sum_{X\in\Pi} F(Z, X, \Pi\backslash\{X\})\right] = \int_E \mu(dx)\, \mathbf{E}[F(Z, x, \Pi)] \;, \tag{II.29}$$

avec la convention qu'une somme sur un ensemble d'indices vide est nulle.

Preuve: on remarque que (II.29) ne dépend que de la loi jointe de (Z,Π). On peut donc choisir Π comme dans le théorème de construction II.3.8 et Z indépendante des variables $X_n^{(p)}$ et M_p (ou bien on applique la proposition de représentation II.3.10). On pose alors

$$a=\mathbf{E}\Big[\sum_{X\in\Pi}F(Z,X,\Pi\backslash\{X\})\Big] \quad \text{et} \quad \Pi_p^*=\bigcup_{p'\in\mathbb{N}\backslash\{p\}}\Pi_{p'} \ .$$

Par interversion positive série/intégrale,

$$a=\sum_{p\geq 1}\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(M_p=n)\sum_{1\leq k\leq n}\mathbf{E}\big[F\big(Z,X_k^{(p)},\,\Pi_p^*\cup\{X_1^{(p)},\dots,X_n^{(p)}\}\backslash\{X_k^{(p)}\}\big)\big] \ .$$

On observe que pour toute permutation γ de $\{1,\dots,n\}$, on a

$$\big(X_1^{(p)},\dots,X_n^{(p)}\big)\overset{\text{(loi)}}{=}\big(X_{\gamma(1)}^{(p)},\dots,X_{\gamma(n)}^{(p)}\big) \ . \tag{II.30}$$

On pose $b_{p,n,k}=\mathbf{E}\big[F\big(Z,X_k^{(p)},\,\Pi_p^*\cup\{X_1^{(p)},\dots,X_n^{(p)}\}\backslash\{X_k^{(p)}\}\big)\big]$ et on déduit de (II.30) que

$$\begin{aligned}
b_{p,n,k} &= \mathbf{E}\big[F\big(Z,X_n^{(p)},\,\Pi_p^*\cup\{X_1^{(p)},\dots,X_n^{(p)}\}\backslash\{X_n^{(p)}\}\big)\big]\\
&= \mathbf{E}\big[F\big(Z,X_n^{(p)},\,\Pi_p^*\cup\{X_1^{(p)},\dots,X_{n-1}^{(p)}\}\big)\big]\\
&= \int_{B_p}\frac{\mu(dx)}{\mu(B_p)}\mathbf{E}\big[F\big(Z,x,\,\Pi_p^*\cup\{X_1^{(p)},\dots,X_{n-1}^{(p)}\}\big)\big] \ ,
\end{aligned}$$

avec la convention que $\{X_1^{(p)},\dots,X_{n-1}^{(p)}\}=\emptyset$ si $n=1$. Par conséquent

$$\begin{aligned}
a &= \sum_{p\geq 1}\sum_{n\geq 1}\mathbf{P}(M_p=n)\,n\int_{B_p}\frac{\mu(dx)}{\mu(B_p)}\mathbf{E}\big[F\big(Z,x,\,\Pi_p^*\cup\{X_1^{(p)},\dots,X_{n-1}^{(p)}\}\big)\big]\\
&= \sum_{p\geq 1}\sum_{n\geq 1}e^{-\mu(B_p)}\frac{\mu(B_p)^n}{n!}\,n\int_{B_p}\frac{\mu(dx)}{\mu(B_p)}\mathbf{E}\big[F\big(Z,x,\,\Pi_p^*\cup\{X_1^{(p)},\dots,X_{n-1}^{(p)}\}\big)\big]\\
&= \sum_{p\geq 1}\sum_{n\geq 1}e^{-\mu(B_p)}\frac{\mu(B_p)^{n-1}}{(n-1)!}\int_{B_p}\mu(dx)\mathbf{E}\big[F\big(Z,x,\,\Pi_p^*\cup\{X_1^{(p)},\dots,X_{n-1}^{(p)}\}\big)\big]\\
&= \sum_{p\geq 1}\sum_{n'\geq 0}\mathbf{P}(M_p=n')\int_{B_p}\mu(dx)\mathbf{E}\big[F\big(Z,x,\,\Pi_p^*\cup\{X_1^{(p)},\dots,X_{n'}^{(p)}\}\big)\big]\\
&= \sum_{p\geq 1}\int_{B_p}\mu(dx)\sum_{n'\geq 0}\mathbf{P}(M_p=n')\mathbf{E}\big[F\big(Z,x,\,\Pi_p^*\cup\{X_1^{(p)},\dots,X_{n'}^{(p)}\}\big)\big]\\
&= \sum_{p\geq 1}\int_{B_p}\mu(dx)\mathbf{E}\big[F\big(Z,x,\,\Pi_p^*\cup\Pi_p\}\big)\big]\\
&= \sum_{p\geq 1}\int_{B_p}\mu(dx)\mathbf{E}[F(Z,x,\Pi)]=\int_E\mu(dx)\,\mathbf{E}[F(Z,x,\Pi)],
\end{aligned}$$

qui est bien le résultat voulu. ■

Remarque II.4.1 On se donne $G : \mathbf{S}_E \to \mathbb{R}_+$ et $g : E \to \mathbb{R}_+$ qui sont respectivement $\mathscr{S}_E$-mesurable et $\mathscr{E}$-mesurable. La formule de Palm appliquée à $F(x, \pi) = g(x)G(\pi)$, donne

$$\mathbf{E}\left[\sum_{X\in\Pi} g(X)G(\Pi\backslash\{X\})\right] = \mathbf{E}[G(\Pi)]\int_E g(x)\mu(dx) \ .$$

Cette formule peut s'interpréter de la manière suivante: si on choisit un point X de Π "uniformément au hasard" (c'est-à-dire selon la mesure de comptage) alors ce point a pour "loi" μ, il est indépendant du nuage $\Pi\backslash\{X\}$ qui est Poissonnien d'intensité μ. Autrement dit, si on observe Π depuis un point typique de Π (qui est enlèvé de Π, on observe toujours un nuage Poissonnien. De plus, le nouveau nuage observé ne donne pas d'information sur la position d'observation. □

Remarque II.4.2 On conserve les mêmes hypothèses que le théorème précédent en ce qui concerne Π et Z mais on considère une application $F : E_0 \times E \times \mathbf{S}_E \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ qui est $\mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{E} \otimes \mathscr{S}_E$-mesurable et telle que

$$\int_E \mu(dx)\mathbf{E}[\,|F(Z, x, \Pi)|\,] < \infty \ . \tag{II.31}$$

Alors on déduit facilement du théorème II.4.1, qui traite le cas des fonctions positives, que

$$\mathbf{E}\left[\sum_{X\in\Pi} F(Z, X, \Pi\backslash\{X\})\right] = \int_E \mu(dx)\mathbf{E}\left[F(Z, x, \Pi)\right] \ .$$

En effet, si F est réelle, il suffit de séparer F en sa partie positive et sa partie négative, de montrer que toutes les expressions ont un sens grâce à l'hypothèse (II.31) et au théorème II.4.1 et de déduire le résultat. Dans le cas où F est à valeurs complexes, il faut raisonner sur la partie réelle et la partie imaginaire. Nous laissons les détails au lecteur. □

En itérant la formule de Palm, on prouve le résultat suivant.

Théorème II.4.2 **(Formule de Palm à n points)** *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace séparable et séparé. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage Poissonnien d'intensité μ, supposée sigma-finie et non-nulle. Soit $(E_0, \mathscr{E}_0)$, un espace mesurable et soit $Z : \Omega \to E_0$, une variable $(\mathscr{F}, \mathscr{E}_0)$-mesurable supposée indépendante de Π. Soit $F : E_0 \times E^n \times \mathbf{S}_E \to [0, \infty]$, une fonction $\mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{E}^{\otimes n} \otimes \mathscr{S}_E$-mesurable. On rappelle la notation*

$$\Phi_F^{(n)}(Z, \Pi) = \sum_{\substack{X_1,\ldots,X_n\in\Pi \\ \text{distincts}}} F\big(Z, X_1, \ldots, X_n,\, \Pi\backslash\{X_1, \ldots, X_n\}\big) \ .$$

avec la convention qu'une somme sur un ensemble d'indices vide est nulle. Alors,

$$\mathbf{E}\Big[\Phi_F^{(n)}(Z, \Pi)\Big] = \int_{E^n} \mu(dx_1)\ldots\mu(dx_n)\,\mathbf{E}[F(Z, x_1, \ldots, x_n,\, \Pi)] \ . \tag{II.32}$$

De même, on rappelle que $\Lambda_F^{(n)}(Z, \Pi) = \sum_{X_1,\ldots,X_n\in\Pi,\,\text{distincts}} F\big(Z, X_1, \ldots, X_n,\, \Pi\big)$. Alors

$$\mathbf{E}\Big[\Lambda_F^{(n)}(Z, \Pi)\Big] = \int_{E^n} \mu(dx_1)\ldots\mu(dx_n)\,\mathbf{E}[F(Z, x_1, \ldots, x_n,\, \Pi\cup\{x_1, \ldots, x_n\})] \ . \tag{II.33}$$

Preuve: le théorème II.4.1 montre (II.32) pour $n = 1$. On suppose que (II.32) est vérifiée au rang n. Soit $F : E_0 \times E^{n+1} \times \mathbf{S}_E \to [0, \infty]$, une fonction $\mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{E}^{\otimes n+1} \otimes \mathscr{S}_E$-mesurable. On reprend l'argument de la preuve du lemme II.2.16 pour la récurrence: on pose $E_1 = E_0 \times E$ muni de la tribu $\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{E}$ et on définit la fonction $G : E_1 \times E^n \times \mathbf{S}_E \to [0, \infty]$, par $G\big((z, x), x_2, \ldots, x_{n+1}, \pi\big) = F(z, x, x_2, \ldots, x_{n+1}, \pi)$. C'est une fonction $\mathscr{E}_1 \otimes \mathscr{E}^{\otimes n} \otimes \mathscr{S}_E$-mesurable. On pose $F_0 = \Phi^{(n)}_G$. La formule de Palm au rang $n = 1$ (théorème II.4.1) implique que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big[\sum_{X_1 \in \Pi} F_0(Z, X_1, \Pi \backslash \{X_1\})\Big] &= \int_E \mu(dx_1)\, \mathbf{E}[F_0(Z, x_1, \Pi)] \\ &= \int_E \mu(dx_1) \mathbf{E}\big[\Phi^{(n)}_G (Z, x_1, \Pi)\big]. \end{aligned} \tag{II.34}$$

On fixe $x_1 \in E$. L'hypothèse de récurrence implique au rang n que

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\big[\Phi^{(n)}_G (Z, x_1, \Pi)\big] &= \mathbf{E}\Big[\sum_{\substack{X_2,\ldots,X_{n+1} \in \Pi \\ \text{distincts}}} F\big(Z, x_1, X_2 \ldots, X_{n+1},\, \Pi \backslash \{X_2, \ldots, X_{n+1}\}\,\big)\Big] \\ &= \int_{E^n} \mu(dx_2) \ldots \mu(dx_n)\, \mathbf{E}[F(Z, x_1, x_2, \ldots, x_{n+1},\, \Pi)]\ . \end{aligned} \tag{II.35}$$

On remarque enfin que

$$\begin{aligned} \sum_{X_1 \in \Pi} F_0(Z, X_1, \Pi \backslash \{X_1\}) &= \sum_{X_1 \in \Pi}\ \sum_{\substack{X_2,\ldots,X_{n+1} \in \Pi \backslash \{X_1\} \\ \text{distincts}}} F\big(Z, X_1,\, X_2, \ldots, X_{n+1}, \Pi \backslash \{X_1, X_2, \ldots, X_{n+1}\}\big) \\ &= \Phi^{(n+1)}_F (Z, \Pi). \end{aligned} \tag{II.36}$$

Les égalités (II.34), (II.35) et (II.36) permettent alors de montrer (II.32) au rang $n + 1$, ce qui conclut la preuve de (II.32). Pour démontrer la formule (II.33), il suffir d'appliquer la formule (II.32) à la fonction $G(z, x_1, \ldots, x_n, \pi) = F(z, x_1, \ldots, x_n, \pi \cup \{x_1, \ldots, x_n\})$. ■

En application nous donnons une formule de moment d'ordre 2 pour $\Phi_F(\Pi)$.

Proposition II.4.3 *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace séparable et séparé. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage Poissonnien d'intensité μ, supposée sigma-finie et non-nulle. Soit $(E_0, \mathscr{E}_0)$, un espace mesurable et soit $Z : \Omega \to E_0$, une variable $(\mathscr{F}, \mathscr{E}_0)$-mesurable supposée indépendante de Π. Soit $F : E_0 \times E \times \mathbf{S}_E \to [0, \infty]$, une fonction $\mathscr{E}_0 \otimes \mathscr{E} \otimes \mathscr{S}_E$-mesurable. On rappelle que $\Phi_F(\Pi) = \sum_{X \in \Pi} F(Z, X, \Pi \backslash \{X\})$. Alors, on a*

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\Big[\Phi_F(\Pi)^2\Big] = &\int_E \mu(dx)\, \mathbf{E}\big[F(Z, x, \Pi)^2\big] \\ &+ \int_{E^2} \mu(dx)\mu(dy)\, \mathbf{E}\big[F(Z, x, \Pi \cup \{y\})F(Z, y, \Pi \cup \{x\})\big]. \end{aligned} \tag{II.37}$$

Preuve: pour tout sous-ensemble fini $J \subset \Pi$, on a bien

$$\Big(\sum_{X \in J} F(Z, X, \Pi \backslash \{X\})\Big)^2 = \sum_{X \in J} F(Z, X, \Pi \backslash \{X\})^2 + \sum_{\substack{X_1, X_2 \in J \\ \text{distincts}}} G(Z, X_1, X_1, \Pi \backslash \{X_1, X_2\})\ .$$

où $G(z, x, y, \pi) = F(z, x, \pi \cup \{y\})F(z, y, \pi \cup \{x\})$. En effet, il s'agit juste du developpement du carré d'une somme finie. En prenant le supremum sur tous les sous-ensembles finis $J \subset \Pi$, on peut remplacer J par Π dans l'expression précédente : on a $\Phi_F(\Pi)^2 = \Phi_{F^2}(\Pi) + \Phi^{(2)}_G(\Pi)$ et on conclut par le théorème II.4.2. ■

II.4.b Formules exponentielles.

Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ supposé complet. Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable et $f : E \to [0, \infty]$, une fonction $\mathscr{E}$-mesurable. On rappelle la définition II.2.2 (page 35) de la *f-fonction de comptage* $N_f(\pi) = \sum_{x \in \pi} f(x)$, pour tout $\pi \in \mathbf{S}_E$. On rappelle également l'approximation f_n de f, (II.6) et (II.7) page 35.

Théorème II.4.4 **(Formule exponentielle positive)** *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage Poissonnien d'intensité μ. Soit $f : E \to [0, \infty]$ une application $\mathscr{E}$-mesurable. Alors*

$$\mathbf{E}\big[\exp(-N_f(\Pi))\big] = \exp\Big(-\int_E \mu(dx)\big(1 - e^{-f(x)}\big)\Big) , \tag{II.38}$$

avec la convention $\exp(-\infty) = 0$. *De plus, on a*

$$\mathbf{E}\big[N_f(\Pi)\big] = \int_E \mu(dx) f(x) \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\big[N_f(\Pi)^2\big] = \int_E \mu(dx)\, f(x)^2 + \Big(\int_E \mu(dx) f(x)\Big)^2 ,$$

Preuve: par (II.6), on a

$$\mathbf{E}\big[\exp(-N_{f_n}(\Pi))\big] = \prod_{0 \leq k < n2^n} \exp\big(-\mu(A_{k,n})\big(1 - e^{-k2^{-n}}\big)\big) = \exp\Big(-\int_E \mu(dx)\big(1 - e^{-f_n(x)}\big)\Big) ,$$

ce qui entraîne (II.38) par (II.7), par convergence dominée et par convergence monotone. Le premier moment de $N_f(\Pi)$ est donné par le lemme II.2.2 (ii). La formule donnant le moment d'ordre 2 découle directement de la proposition II.4.3 avec $F(z, x, \pi) = f(x)$. ■

Lemme II.4.5 **(Caractérisation)** *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage aléatoire d'intensité μ. C'est un nuage Poissonnien ssi pour toute fonction f positive $\mathscr{E}$-mesurable bornée (II.38) est vérifiée.*

Preuve: si Π est Poissonnien, alors le théorème II.4.4 montre que (II.38) est vérifié pour toute fonction f positive, $\mathscr{E}$-mesurable bornée. Réciproquement, soient $A_1, \ldots, A_p \in \mathscr{E}$, disjoints deux-à-deux et soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbb{R}_+$. En choisissant $f = \lambda_1 \mathbf{1}_{A_1} + \ldots + \lambda_p \mathbf{1}_{A_p}$ dans (II.38), on obtient

$$\begin{aligned} \mathbf{E}\big[e^{-\lambda_1 N_{A_1}(\Pi) - \ldots - \lambda_1 N_{A_1}(\Pi)}\big] &= \mathbf{E}\big[e^{-N_f(\Pi)}\big] = \exp\Big(-\int_E \mu(dx)\big(1 - e^{-f(x)}\big)\Big) \\ &= \prod_{1 \leq k \leq p} \exp(-\mu(A_k)(1 - e^{-\lambda_k})) . \end{aligned}$$

Par injectivité de la transformée de Laplace, cela entraîne que $N_{A_1}(\Pi), \ldots, N_{A_p}(\Pi)$ sont des variables de Poisson indépendantes si $\mu(A_1), \ldots, \mu(A_p)$ sont des quantités finies. Le cas général est facile à déduire car si $\mu(A) = \infty$, $N_A(\Pi)$ est déterministe et vaut l'infini. ■

Proposition II.4.6 *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$, un nuage Poissonnien d'intensité μ. Soit $f : E \to \mathbb{R}_+$ une application $\mathscr{E}$-mesurable (f ne prend pas la valeur ∞). Alors, on a l'alternative suivante.*

(a) *Si $\int_E (1 \wedge f(x))\, \mu(dx) < \infty$, alors p.s. $N_f(\Pi) < \infty$.*

(b) *Si* $\int_E (1 \wedge f(x))\, \mu(dx) = \infty$*, alors p.s.* $N_f(\Pi) = \infty$*.*

Preuve: on pose $c = 1 - e^{-1}$. On a $c(1 \wedge y) \leq 1 - e^{-y} \leq 1 \wedge y$, pour tout $y \in \mathbb{R}_+$, car la fonction $y \mapsto 1 - e^{-y}$ est concave. Donc pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$,

$$c \int_E \mu(dx) \left(1 \wedge (\lambda f(x))\right) \leq \int_E \mu(dx) \left(1 - e^{-\lambda f(x)}\right) \leq \int_E \mu(dx) \left(1 \wedge (\lambda f(x))\right) . \tag{II.39}$$

Supposons que $\mathbf{P}\big(N_f(\Pi) < \infty\big) > 0$, alors $\mathbf{E}[\exp(-N_f(\Pi))] > 0$, et la formule exponentielle implique que $\int_E \mu(dx)(1 - e^{-f(x)}) < \infty$. L'inégalité (II.39) avec $\lambda = 1$ implique donc que $\int_E \mu(dx)\,(1 \wedge f(x)) < \infty$.

Réciproquement, on suppose que $\int_E \mu(dx)\,(1 \wedge f(x)) < \infty$. On observe que pour tout $\lambda \in [0, 1]$, $1 - e^{-\lambda f(x)} \leq 1 \wedge f(x)$. Comme f ne peut pas prendre la valeur ∞, on a $\lim_{\lambda \to 0} 1 - e^{-\lambda f(x)} = 0$. Par convergence dominée, on obtient $\lim_{\lambda \to 0} \int_E \mu(dx) \left(1 - e^{-\lambda f(x)}\right) = 0$ et un argument élémentaire combiné à la formule exponentielle montre que

$$\mathbf{P}\big(N_f(\Pi) < \infty\big) = \lim_{\lambda \to 0} \mathbf{E}[\exp(-\lambda N_f(\Pi))] = \lim_{\lambda \to 0} \exp\Big(\int_E \mu(dx) \left(1 - e^{-\lambda f(x)}\right)\Big) = 1 ,$$

ce qui montre **(a)**. Supposons que $\int_E \mu(dx)(1 \wedge f(x)) = \infty$. Alors, par (II.39) $\int_E \mu(dx)(1 - e^{-f(x)}) = \infty$, et la formule exponentielle entraîne que $\mathbf{E}[\exp(-N_f(\Pi))] = 0$, ce qui est équivalent à dire que $\mathbf{P}(N_f(\Pi) = \infty) = 1$. Cela montre une implication de **(b)**. L'implication réciproque suit immédiatement de **(a)**. ■

On se place sous les hypothèses du théorème II.4.4. Soit $f : E \to \mathbb{R}$, une fonction $\mathscr{E}$-mesurable telle que

$$\int_E \mu(dx)\ (1 \wedge |f(x)|\,) \ < \ \infty\ . \tag{II.40}$$

Cela implique que $\int_E \mu(dx)\ (1 \wedge f^+(x)\,)$ et $\int_E \mu(dx)\ (1 \wedge f^-(x)\,)$ sont des quantités finies. Ici f^+ et f^- sont les parties positives et négatives de f. La proposition (II.4.6) entraîne alors que $N_{f^+}(\Pi)$ et $N_{f^-}(\Pi)$ sont des variables finies presque sûrement et on a

$$N_{|f|}(\Pi) = \sum_{X \in \Pi} |f(X)| = N_{f^+}(\Pi) + N_{f^-}(\Pi)\ < \infty\ .$$

On pose alors

$$N_f(\Pi) = N_{f^+}(\Pi) - N_{f^-}(\Pi) := \sum_{X \in \Pi} f(X)\ . \tag{II.41}$$

Théorème II.4.7 **(Formule exp. réelle)** *Soit* $(E, \mathscr{E})$*, un espace mesurable séparable et séparé. Soit* $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_E$*, un nuage Poissonnien d'intensité* μ*. Soit* $f : E \to \mathbb{R}$ *une application* $\mathscr{E}$*-mesurable satisfaisant (II.40), ce qui permet de définir* $N_f(\Pi)$ *par (II.41). Alors,*

$$\mathbf{E}\big[\exp(iN_f(\Pi))\big] = \exp\Big(-\int_E \mu(dx)\big(1 - e^{i\,f(x)}\big)\Big)\ . \tag{II.42}$$

Si $\int_E \mu(dx)|f(x)| < \infty$*, alors* $N_f(\Pi)$ *est une variable intégrable et on a*

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{X \in \Pi} f(X)\Big] = \int_E \mu(dx) f(x)\ . \tag{II.43}$$

Si $\int_E \mu(dx)|f(x)| < \infty$ *et* $\int_E \mu(dx) f(x)^2 < \infty$, *alors* $N_f(\Pi)$ *a un moment d'ordre deux et*

$$\mathbf{var}(N_f(\Pi)) = \int_E \mu(dx) f(x)^2 \; .$$

Preuve: soit $g : E \to \mathbb{R}_+$, une fonction $\mathscr{E}$-mesurable telle que $\int_E \mu(dx)(1 \wedge g(x)) < \infty$. Par la proposition II.4.6, on a $\mathbf{P}(N_g(\Pi) < \infty) = 1$. Comme dans la preuve de la formule exponentielle positive (théorème II.4.4) on démontre facilement que

$$\forall u \in \mathbb{R} \, , \quad \mathbf{E}[\exp(iu \, N_g(\Pi)) \,] = \exp\Big(-\int_E \mu(dx)\big(1 - e^{iu\, g(x)}\big)\Big) \; . \tag{II.44}$$

On pose $E_+ := \{f \geq 0\}$ et $E_- := \{f < 0\}$, qui sont deux Boréliens disjoints. On a donc $f = f^+$ sur E_+ et $-f = f^-$ sur E_- . On pose également $\Pi_+ := \Pi \cap E_+$ et $\Pi_- := \Pi \cap E_-$. Le principe de restriction implique que Π_+ et Π_- sont deux nuages Poissonniens indépendants d'intensités respectives $\mu(\cdot \cap E_+)$ et $\mu(\cdot \cap E_-)$. En utilisant (II.44) avec $\Pi_{+/-}$, $u = +1$ ou -1 et $g = |f|$, on obtient

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[\exp(iN_f(\Pi)\,)] &= \mathbf{E}[\exp(iN_f(\Pi_+)\,)] \; \mathbf{E}[\exp(-iN_{-f}(\Pi_-)\,)] \\
&= \exp\Big(-\int_{E_+} \mu(dx)\big(1 - e^{i\, f(x)}\big)\Big) \exp\Big(-\int_{E_-} \mu(dx)\big(1 - e^{i\, f(x)}\big)\Big) \\
&= \exp\Big(-\int_E \mu(dx)\big(1 - e^{i\, f(x)}\big)\Big) \; ,
\end{aligned}$$

ce qui montre le point (II.42). On a également, $\mathbf{E}[N_{f^{+/-}}(\Pi)] = \int_E \mu(dx) f^{+/-}(x)$ et on en déduit (II.43). On rappelle que le théorème II.4.4 implique

$$\mathbf{E}[N_{|f|}(\Pi_{+/-})^2] = \int_{E_{+/-}} \mu(dx)\, |f(x)|^2 + \Big(\int_{E_{+/-}} \mu(dx)\, |f(x)|\Big)^2 \; .$$

Donc si $\int_E \mu(dx)|f(x)| < \infty$ et $\int_E \mu(dx) f(x)^2 < \infty$, $N_f(\Pi) = N_{|f|}(\Pi_+) - N_{|f|}(\Pi_-)$ admet un moment d'ordre deux et par indépendance de Π_+ et de Π_-, on a

$$\mathbf{var}(N_f(\Pi)) = \mathbf{var}(N_f(\Pi_+)) + \mathbf{var}(N_f(\Pi_-)) = \int_E \mu(dx)(f^+(x))^2 + \int_E \mu(dx)(f^-(x))^2 \, ,$$

ce qui entraîne le résultat voulu. ■

II.5 Nuages Poissonniens sur $\mathbb{R}_+ \times E$.

II.5.a Premières propriétés.

Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité noté $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ supposé complet. Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace mesurable séparable et séparé. On munit $\mathbb{R}_+ \times E$ de la tribu $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E}$. Il est facile de vérifier que $(\mathbb{R}_+ \times E, \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E})$ est séparable et séparé. On rappelle ensuite que ℓ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$. Soit une mesure sigma-finie μ sur $(E, \mathscr{E})$: la mesure produit $\ell \otimes \mu$ est également sigma-finie et elle est diffuse, même lorsque μ n'est pas diffuse.

Proposition II.5.1 *Soit* $\theta \in]0, \infty[$. *Soit* $\nu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$, *une mesure de probabilité. Soit* $(\mathscr{E}_n, X_n)$, $n \geq 1$, *une suite de variables telles que* $(\mathscr{E}_n)_{n \geq 1}$ *soient i.i.d. de loi exponentielle de paramètre* θ, *telles que $(X_n)_{n\geq 1}$ soient i.i.d. à valeurs dans E de loi ν, et telles que $(\mathscr{E}_n)_{n\geq 1}$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ soient indépendantes. On pose*

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\ T_n:=\mathscr{E}_1+\ldots+\mathscr{E}_n \quad \text{et} \quad \Pi:=\big\{(T_n,X_n)\,;\,n\in\mathbb{N}^*\big\}.$$

Alors, Π *est un nuage Poissonnien sur* $\mathbb{R}_+\times E$ *d'intensité* $\theta\,\ell\otimes\nu$.

Preuve: par le lemme II.4.5 page 57, il suffit de montrer que pour toute fonction mesurable $f:\mathbb{R}_+\times E\to\mathbb{R}_+$,

$$\mathbf{E}\big[\exp\big(-N_f(\Pi)\big)\big]=\exp\Big(-\theta\int_{\mathbb{R}_+\times E}\ell(ds)\nu(dx)\big(1-e^{-f(s,x)}\big)\Big)\,. \tag{II.45}$$

On rappelle que $\Pi_0=\{T_n;n\in\mathbb{N}^*\}$ est un nuage Poissonnien d'intensité $\theta\ell$ (voir le théorème II.1.7, page 33 en appendice). Il est clairement indépendant de $(X_n)_{n\geq 1}$. On fixe $t>0$ et on définit f_t en posant $f_t(s,x):=\mathbf{1}_{[0,t]}(s)f(s,x)$. Par le théorème II.1.7 (iii), on montre facilement que pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\mathbf{E}\big[\exp\big(-N_{f_t}(\Pi)\big)\,\big|\,N_{[0,t]}(\Pi_0)=n\big]=\Big(\frac{1}{t}\int_{[0,t]\times E}\ell(ds)\nu(dx)e^{-f(s,x)}\Big)^n\,.$$

On obtient alors

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[\exp\big(-N_{f_t}(\Pi)\big)\big] &= \sum_{n\in\mathbb{N}}\mathbf{P}\big(N_{[0,t]}(\Pi_0)=n\big)\Big(\frac{1}{t}\int_{[0,t]\times E}\ell(ds)\nu(dx)e^{-f(s,x)}\Big)^n\\
&= e^{-\theta t}\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{1}{n!}\Big(\theta\int_{[0,t]\times E}\ell(ds)\nu(dx)e^{-f(s,x)}\Big)^n\\
&= \exp\Big(-\theta\int_{[0,t]\times E}\ell(ds)\nu(dx)\big(1-e^{-f(s,x)}\big)\Big),
\end{aligned}$$

Par convergence monotone, on a $\lim_{t\to\infty}N_{f_t}(\Pi)=N_f(\Pi)$ et

$$\lim_{t\to\infty}\int_{[0,t]\times E}\ell(ds)\nu(dx)\big(1-e^{-f(s,x)}\big)=\int_{\mathbb{R}_+\times E}\ell(ds)\nu(dx)\big(1-e^{-f(s,x)}\big).$$

Par convergence dominée, on a $\lim_{t\to\infty}\mathbf{E}\big[\exp\big(-N_{f_t}(\Pi)\big)\big]=\mathbf{E}\big[\exp\big(-N_f(\Pi)\big)\big]$, ce qui montre (II.45) et donc la proposition. ■

On veut montrer que tous les nuages d'intensité $\ell\otimes\mu$ avec μ finie se représentent comme dans la proposition II.5.1. Pour cela, on introduit la notation suivante

> R est l'ensemble des nuages π sur $\mathbb{R}_+\times E$ de la forme $\{(t_n,x_n);n\in\mathbb{N}^*\}$ où la suite $(t_n)_{n\geq 1}$ croît strictement vers ∞.

Le résultat suivant est un résultat technique de mesurabilité dont la preuve peut être passée à première lecture.

Lemme II.5.2 *$R\in\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$. De plus, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, il existe des fonctions $\mathscr{E}_n:\mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E}\to]0,\infty[$ qui sont $\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$-mesurables et des fonctions $X_n:\mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E}\to E$ qui sont $(\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E},\mathscr{E})$-mesurables, et qui satisfont les propriétés suivantes.*

- *Si $T_n:=\mathscr{E}_1+\ldots+\mathscr{E}_n$, $n\in\mathbb{N}^*$, alors pour tout $\pi\in\mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$, $\lim_{n\to\infty}T_n(\pi)=\infty$.*
- *Pour tout $\pi\in R$, on a $\pi=\big\{(T_n(\pi),X_n(\pi))\,;\,n\in\mathbb{N}^*\big\}$.*

Preuve: on pose $R_0 := N^{-1}_{\mathbb{R}_+\times E}(\{\infty\}) \cap \bigcap_{p\geq 1} N^{-1}_{[0,p]\times E}(\mathbb{N})$, qui est dans la tribu $\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$. Soit $f : E \to \mathbb{R}_+$, une fonction $\mathscr{E}$-mesurable bornée. On pose

$$\forall (t,\pi) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E}\, , \quad S_f(t,\pi) = \sum_{(s,x)\in\pi} (1+f(x))\mathbf{1}_{[0,t]}(s) \ \in [0,\infty] \, .$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $f_t(s,x) = (1+f(x))\mathbf{1}_{[0,t]}(s)$. Clairement, $f_t : \mathbb{R}_+ \times E \to \mathbb{R}_+$ est $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{E}$-mesurable et on voit que $S_f(t,\pi) = N_{f_t}(\pi)$. Cela montre que pour t fixé, $\pi \mapsto S_f(t,\pi)$ est mesurable. Par ailleurs, on remarque que à π fixé, $t \mapsto S_f(t,\pi)$ est croissante. Si $S_f(t_0,\pi) < \infty$, alors $t \mapsto S_f(t,\pi)$ est càd sur $[0, t_0[$. Comme f est bornée, pour tout nuage $\pi \in R_0$, $t \mapsto S_f(t,\pi)$ est donc croissante càd.

On pose $\mathscr{S}_{R_0} = \{C \cap R_0 ; C \in \mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E}\}$, la tribu trace de $\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$ sur R_0. Comme R_0 est dans la tribu $\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$, $\mathscr{S}_{R_0}$ est une sous-tribu de $\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$. Montrons que la fonction

$$(t,\pi) \in \mathbb{R}_+ \times R_0 \longmapsto S_f(t,\pi) \in \mathbb{R}_+ \text{ est } \mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{S}_{R_0}\text{-mesurable.} \tag{II.46}$$

En effet, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $(t)_n := 2^{-n}\lceil 2^n t\rceil$, qui tend en décroissant vers t lorsque n tend vers l'infini. On remarque que $S_f((t)_n,\pi) = \sum_{k\geq 1} \mathbf{1}_{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}[}(t) S_f(k2^{-n},\pi)$. Ce qui précède implique que $(t,\pi) \mapsto \mathbf{1}_{[(k-1)2^{-n}, k2^{-n}[}(t) S_f(k2^{-n},\pi)$ est $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{S}_{R_0}$-mesurable. Il en est donc de même pour $(t,\pi) \mapsto S_f((t)_n,\pi)$. Or $\lim_n S_f((t)_n,\pi) = S_f(t,\pi)$, sur $\mathbb{R}_+ \times R_0$, ce qui permet de conclure.

Si f est nulle, alors $S_0(t,\pi) = N_{[0,t]\times E}(\pi)$. La fonction $(t,\pi) \in \mathbb{R}_+ \times R_0 \to N_{[0,t]\times E}(\pi) \in \mathbb{N}$ est donc $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{S}_{R_0}$-mesurable. On remarque qu'à π fixé, les sauts de $t \mapsto N_{[0,t]\times E}(\pi)$ peuvent être strictement supérieurs à 1, si par exemple (t,x) et (t,y) appartiennent à π avec x et y distincts. On fixe $\pi \in R_0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $T_0(\pi) := 0$ et $T_{n+1}(\pi) := \inf\{t \in \mathbb{R}_+ : S_0(t,\pi) > S_0(T_n(\pi),\pi)\}$. Par définition de R_0, la suite $T_n(\pi)$ croît strictement vers ∞ et on a $S_0(T_n(\pi),\pi) \geq n$. Supposons que $T_n : R_0 \to \mathbb{R}_+$ soit $\mathscr{S}_{R_0}$-mesurable; alors il en est de même pour $\pi \in R_0 \mapsto S_0(T_n(\pi),\pi)$, par le résultat de mesurabilité conjointe (II.46). On constate ensuite que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $T^{-1}_{n+1}(\,]t,\infty[\,) = \big\{\pi \in R_0 : S_0(T_n(\pi),\pi) = S_0(t,\pi)\big\}$, qui est bien un ensemble de $\mathscr{S}_{R_0}$. Cela montre que T_{n+1} est $\mathscr{S}_{R_0}$-mesurable.

Par récurrence, on a donc montré que les T_n, $n \in \mathbb{N}^*$, sont des fonctions $\mathscr{S}_{R_0}$-mesurables. Il en est donc de même pour les fonctions $\pi \mapsto S_0(T_n(\pi),\pi)$. On remarque alors que R est le sous-ensemble des $\pi \in R_0$ où $t \mapsto N_{[0,t]\times E}(\pi)$ ne progresse que de 1 en 1, c'est-à-dire $R = \bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{\pi \in R_0 : S_0(T_{n+1}(\pi),\pi) = 1 + S_0(T_n(\pi),\pi)\}$, qui est donc un ensemble dans la tribu $\mathscr{S}_{R_0}$, donc dans $\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$.

On note $\mathscr{S}_R$ la tribu trace de $\mathscr{S}_{\mathbb{R}\times E}$ sur R. Si $\pi \in R$, alors il existe une suite $X_n(\pi) \in E$, $n \in \mathbb{N}^*$, telle que $\pi = \{(T_n(\pi), X_n(\pi)); n \in \mathbb{N}^*\}$. On remarque ensuite que $f(X_n(\pi)) = S_f(T_n(\pi),\pi) - S_f(T_{n-1}(\pi),\pi) - 1$ et les résultats de mesurabilités conjointes qui précèdent impliquent que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la fonction $\pi \in R \mapsto f(X_n(\pi)) \in \mathbb{R}_+$ est $\mathscr{S}_R$-mesurable, pour toute fonction Borélienne f. Par conséquent, $\pi \in R \mapsto X_n(\pi)$ est $(\mathscr{S}_R, \mathscr{E})$-mesurable.

On fixe $x_0 \in E$, qui ne joue aucun rôle spécifique. On étend X_n de façon mesurable à $\mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$ en posant $X_n(\pi) := x_0$ si $\pi \in \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E}\backslash R$: la fonction obtenue $X_n : \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E} \to E$ est donc $(\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E}, \mathscr{E})$-mesurable. On pose ensuite $\mathscr{E}_n(\pi) := 1$ si $\pi \in \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E}\backslash R$ et $\mathscr{E}_n(\pi) := T_n(\pi) - T_{n-1}(\pi)$ si $\pi \in R$. On vérifie immédiatement que $\mathscr{E}_n : \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E} \to]0,\infty[$ est $\mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$-mesurable et que les suites de fonctions $\mathscr{E}_n$, X_n, $n \in \mathbb{N}$, satisfont bien les propriétés désirées. ■

Proposition II.5.3 *Soit $(E,\mathscr{E})$, un espace séparable et séparé. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$ un nuage Poissonnien d'intensité $\ell\otimes\mu$. La mesure μ est supposée de masse finie. On rappelle de la proposition II.5.2, les définitions de X_n et $\mathscr{E}_n$. Alors, on a les propriétés suivantes.*

(i) $\mathbf{P}(\Pi \in R) = 1$.

(ii) Les deux suites $(\mathscr{E}_n(\Pi))_{n\geq 1}$ *et* $(X_n(\Pi))_{n\geq 1}$ *sont indépendantes.*

(iii) Les variables $(\mathscr{E}_n(\Pi))_{n\geq 1}$ *sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre* $\mu(E)$.

(iv) Les variables $(X_n(\Pi))_{n\geq 1}$ *sont i.i.d. de loi* $\mu(\,\cdot\,)/\mu(E)$.

(v) Si on pose $T_n(\Pi) = \mathscr{E}_1(\Pi) + \ldots + \mathscr{E}_n(\Pi)$, $n \in \mathbb{N}^*$, *on a donc*

$$\mathbf{P}\text{-}p.s. \quad \Pi = \left\{ \left(T_n(\Pi), X_n(\Pi)\right) ; \, n \in \mathbb{N}^* \right\} .$$

Preuve: soit $(\Omega', \mathscr{F}', \mathbf{P}')$, un espace de probabilité sur lequel sont définies deux suites indépendantes de variables, $(\mathscr{E}'_n)_{n\geq 1}$ et $(X'_n)_{n\geq 1}$, où les variables $(\mathscr{E}'_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre $\mu(E)$ et les variables $(X'_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. de loi $\mu(\,\cdot\,)/\mu(E)$. On pose $T'_n = \mathscr{E}'_n + \ldots + \mathscr{E}'_n$ et $\Pi' = \{(T'_n, X'_n); n \in \mathbb{N}^*\}$. La proposition II.5.1 montre que Π' est un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}_+ \times E$ d'intensité $\ell \otimes \mu$. Donc Π' a même loi que Π. Comme il est clair que $\mathbf{P}'(\Pi' \in R) = 1$, on a $\mathbf{P}(\Pi \in R) = 1$. Le lemme II.5.2 implique alors que la suite $(\mathscr{E}_n(\Pi'), X_n(\Pi'))_{n\geq 1}$ a même loi que la suite $(\mathscr{E}_n(\Pi), X_n(\Pi))_{n\geq 1}$. Par ailleurs, il est clair que $\mathbf{P}'$-p.s. pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\mathscr{E}'_n = \mathscr{E}_n(\Pi')$ et $X'_n = X_n(\Pi')$, ce qui permet de conclure. ■

En appliquant le principe de restriction et les résultats précédents, on a immédiatement le résultat suivant.

Théorème II.5.4 *Soit* $(E, \mathscr{E})$, *un espace séparable et séparé. Soit* $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$ *un nuage Poissonnien d'intensité* $\ell \otimes \mu$. *La mesure* μ *est supposée sigma-finie. Soit* $B_p \in \mathscr{E}$, $p \in \mathbb{N}^*$, *une partition de* E *telle que* $0 < \mu(B_p) < \infty$. *On rappelle de la proposition II.5.2, les définitions de* X_n *et* $\mathscr{E}_n$ *et on pose pour tous* $n, p \geq 1$

$$\mathscr{E}_n^{B_p} = \mathscr{E}_n(\Pi \cap B_p) \quad et \quad X_n^{B_p} = X_n(\Pi \cap B_p) .$$

Alors, les assertions suivantes sont vraies

(i) Les variables $\mathscr{E}_n^{B_p}$, $X_n^{B_p}$, $n, p \geq 1$, *sont indépendantes.*

(ii) Pour tout $p \geq 1$, *les variables* $(\mathscr{E}_n^{B_p})_{n\geq 1}$ *suivent une loi exponentielle de paramètre* $\mu(B_p)$.

(iii) Pour tout $p \geq 1$, *les variables* $(X_n^{B_p})_{n\geq 1}$ *ont pour loi* $\mu(\,\cdot\, \cap B_p)/\mu(B_p)$.

(iv) Pour tous $n, p \geq 1$, *on pose* $T_n^{B_p} := \mathscr{E}_1^{B_p} + \ldots + \mathscr{E}_n^{B_p}$. *Alors* $\mathbf{P}$*-p.s. pour tout* $p \geq 1$, $\Pi \cap B_p = \left\{ \left(T_n^{B_p}, X_n^{B_p}\right) ; \, n \in \mathbb{N}^* \right\}$, *et donc*

$$\mathbf{P}\text{-}p.s. \qquad \Pi = \left\{ \left(T_n^{B_p}, X_n^{B_p}\right); \, n, p \geq 1 \right\}. \tag{II.47}$$

Ce théorème donne une construction, et une méthode de simulation, des nuages Poissonniens d'intensité $\ell \otimes \mu$ lorsque μ est sigma-finie. On remarque que (II.47) implique que sous les hypothèses du théorème II.5.4 qui précède,

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+ , \quad N_{\{t\}\times E}(\Pi) \in \{0, 1\} . \tag{II.48}$$

Cela implique le résultat suivant.

Lemme II.5.5 *Soit $(E, \mathscr{E})$, un espace séparé et séparable. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+ \times E}$, un nuage Poissonnien d'intensité $\ell \otimes \mu$, où μ est sigma finie et de masse infinie. On pose*

$$J(\Pi) := \big\{ T \in \mathbb{R}_+ : \exists X \in E \textit{ tel que } (T, X) \in \Pi \big\} .$$

Alors, p.s. $J(\Pi)$ est dense dans $\mathbb{R}_+$.

Preuve: pour tous réels positifs $a < b$, on a $(\ell \otimes \mu)([a, b] \times E) = \infty$. Cela montre que p.s. $N_{[a,b]\times E}(\Pi) = \infty$. Or (II.48) implique que

$$\mathbf{P}\text{-p.s. pour tous réels positifs } a < b, \quad \#\big(J(\Pi) \cap [a, b]\big) = N_{[a,b]\times E}(\Pi) \ .$$

Donc, p.s. pour tous rationnels positifs $a < b$, $\#\big(J(\Pi) \cap [a, b]\big) = \infty$, ce qui implique le résultat voulu. ■

II.5.b Un exemple.

On note ℓ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$ et ℓ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+^2$. On suppose que $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ est un espace de probabilité sur lequel est défini un nuage Poissonnien $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+^2}$ d'intensité ℓ_2. On note $J(\Pi) = \big\{ T \in \mathbb{R}_+ : \exists X \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } (T, X) \in \Pi \big\}$, l'ensemble des abscisses des points de Π. Le lemme II.5.5 implique que $J(\Pi)$ est $\mathbf{P}$-p.s. dense dans $\mathbb{R}_+$.

On note ensuite $O = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ 0 \le y \le x\}$, l'*octant* principal du plan $\mathbb{R}^2$: c'est le cône délimité par l'axe des abscisses positives et par la moitié Nord-Est de la première bissectrice. On pose $\Pi_O = \Pi \cap O$, qui est l'ensemble des points de Π qui tombent dans l'octant. Le théorème de restriction permet d'affirmer que Π_O est un nuage Poissonnien d'intensité $\ell_2(\,\cdot \cap O)$. Pour simplifier les notations, on pose $\mu = \ell_2(\cdot \cap O)$, qui est concrètement donnée par $\mu(dxdy) = \mathbf{1}_{\{0 \le y \le x\}} \ell(dx)\ell(dy)$. On remarque que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N_{[0,t]\times\mathbb{R}_+}(\Pi_O)$ est une variable de Poisson de paramètre

$$\mu\big([0, t] \times \mathbb{R}_+\big) = \ell_2\big(O \cap ([0, t] \times \mathbb{R}_+)\big) = t^2/2 < \infty \ .$$

En effet, c'est l'aire d'un triangle rectangle isocèle de plus petit côté égal à t. On en déduit que presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $N_{[0,t]\times\mathbb{R}_+}(\Pi_O) < \infty$ et $N_{\mathbb{R}_+^2}(\Pi_O) = \infty$. Il existe donc une suite $(T_n)_{n\ge1}$ strictement croissante telles que $\lim_{n\to\infty} T_n = \infty$ et

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad J(\Pi_O) = \big\{ T \in \mathbb{R}_+ : \exists X \in \mathbb{R}_+ \text{ tel que } (T, X) \in \Pi_O \big\} = \big\{ T_n ; n \in \mathbb{N}^* \big\} \ .$$

Comme Π satisfait (II.48), il existe également une suite $(X_n)_{n\ge1}$ telle que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \Pi_O = \big\{ (T_n, X_n) ; n \in \mathbb{N}^* \big\} \ .$$

Presque sûrement, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on a $N_{[0,t]\times\mathbb{R}_+}(\Pi_O) = \sum_{n\ge1} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n)$ et donc $\mathbf{1}_{\{T_n \le t\}} = \mathbf{1}_{\{N_{[0,t]\times\mathbb{R}_+}(\Pi_O) \ge n\}}$. On peut donc toujours choisir la suite $(T_n)_{n\ge1}$ comme une suite de variables $\mathscr{F}$-mesurables. La fonction de répartition de T_n est donnée par

$$\mathbf{P}(T_n \le t) = 1 - \mathbf{P}(N_{[0,t]\times\mathbb{R}_+}(\Pi_O) \le n - 1) = 1 - \exp\big(-\tfrac{1}{2}t^2\big) \sum_{0 \le p \le n-1} \frac{t^{2p}}{2^p p!} \ .$$

On note $\mathbf{p} : (x, y) \in \mathbb{R}_+^2 \longmapsto x \in \mathbb{R}_+$, la projection orthogonale sur l'axe des abscisses. Il est clair que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \mathbf{p}(\Pi_O) = J(\Pi_O) = \big\{ T_n ; n \in \mathbb{N}^* \big\} \ .$$

On note m la mesure induite sur $\mathbb{R}_+$ par μ via $\mathbf{p}$: $\mathrm{m} = \mu \circ \mathbf{p}^{-1}$, que l'on calcule comme suit: pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose $O_t = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \, : \, 0 \le y \le x \le t\}$, qui est un triangle d'aire $t^2/2$ et on voit que

$$\mathrm{m}([0, t]) = \mu\big(\mathbf{p}^{-1}([0, t])\,\big) = \ell_2(O_t) = t^2/2 \; .$$

Comme les mesures sur $\mathbb{R}_+$ sont caractérisées par leur fonction de répartition, $\mathrm{m}(dt) = t\ell(dt)$. Cette mesure est clairement diffuse. Le *principe d'image* (théorème II.3.6) s'applique et montre que $\mathbf{p}(\Pi_O)$ est $\mathbf{P}$-p.s. égal à un nuage Poissonnien Π_0 sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $t\ell(dt)$ et on a $\Pi_0 = \big\{T_n ; n \in \mathbb{N}^*\big\}$ presque sûrement.

On pose $f(t) = t^2/2$ qui est clairement bijective de $\mathbb{R}_+$ sur lui-même. On note ν la mesure induite par m via f: $\nu = \mathrm{m} \circ f^{-1}$. On calcule ν en remarquant que

$$\nu([0, t]) = \mathrm{m}\big(f^{-1}([0, t]\big) = \int_0^{\sqrt{2t}} s\ell(ds) = t \; .$$

Par conséquent $\nu = \ell$. Le principe d'image implique que $\Pi_1 := f(\Pi_0)$ est un nuage Poissonien sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité $\ell(dt)$. On utilise la proposition II.5.3 et on pose $\mathscr{E}'_n = \mathscr{E}_n(\Pi_1)$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $T'_n = \mathscr{E}'_1 + \ldots + \mathscr{E}'_n$. Alors, on a

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \qquad \big\{T_n^2/2 \; ; \; n \in \mathbb{N}\big\} = f\big(\Pi_0\big) = \Pi_1 = \big\{T'_n \; ; \; n \in \mathbb{N}^*\big\}.$$

On en déduit donc que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \forall n \in \mathbb{N}^* \, , \quad T_n = \sqrt{2(\mathscr{E}'_1 + \ldots + \mathscr{E}'_n)} \; .$$

Comme Π_1 est un nuage linéaire homogène d'intensité 1, les variables $\mathscr{E}'_n$ sont des exponentielles indépendantes de paramètre 1 et $\mathscr{E}'_1 + \ldots + \mathscr{E}'_n$ suit une loi d'Erlang de paramètres $(n, 1)$ (voir la proposition II.1.6, page 29). Par un changement de variable simple, on en déduit que la densité de T_n est égale à

$$f_{T_n}(t) = \frac{t^{2n-1}}{2^{n-1}(n-1)!} e^{-t^2/2} \; .$$

En utilisant la loi des grands nombres on voit aussi que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \lim_{n \to \infty} \frac{T_n}{\sqrt{2n}} = 1 \; .$$

On peut aller plus vite et donner une représentation de Π_O en considérant directement la fonction $\phi : O \to \mathbb{R}_+ \times [0, 1]$, définie par

$$\phi(x, y) = (x^2/2 \, , \, y/x) \quad \text{si } x > 0 \quad \text{et} \quad \phi(x, y) = (0, 0) \quad \text{si } x = 0.$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et $a \in [0, 1]$, on a

$$\phi^{-1}([0, t] \times [0, a]) = \big\{(x, y) \in]0, \sqrt{2t}] \times [0, a] \; : \; y \le ax\big\} \cup \big(\{0\} \times \mathbb{R}_+\big).$$

On a donc

$$\mu\big(\phi^{-1}([0, t] \times [0, a])\big) = \ell_2\big(\big\{(x, y) \in [0, \sqrt{2t}] \times [0, a] \; : \; y \le ax\big\}\big) = \frac{1}{2}\sqrt{2t} \cdot a\sqrt{2t} = at \; ,$$

qui est l'aire d'un triangle rectangle de côté horizontal de longueur $\sqrt{2t}$ et de côté vertical de longueur $a\sqrt{2t}$. On note ν la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. On a donc montré que

$$\mu\big(\phi^{-1}([0,t]\times[0,a])\big) = (\ell\otimes\nu)([0,t]\times[0,a]) \ , \quad (t,a)\in\mathbb{R}_+\times[0,1] \ .$$

Comme $\mathscr{P} = \big\{[0,t]\times[0,a]; (t,a)\in\mathbb{R}_+\times[0,1]\big\}\cup\{\mathbb{R}_+\times[0,1]\}$ est un pi-système générant les Boréliens $\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{B}([0,1])$, on en déduit que $\mu\circ\phi^{-1}=\nu$, c'est-à-dire que ν est la mesure image de μ par ϕ. C'est clairement une mesure diffuse. Le théorème II.3.6 de l'image s'applique et montre que $\phi(\Pi_O)$ est presque sûrement égal à un nuage Poissonnien Π' sur $\mathbb{R}_+\times[0,1]$ d'intensité $\ell\otimes\nu$.

On pose alors $\mathscr{E}'_n=\mathscr{E}_n(\Pi')$ et $U_n=X_n(\Pi')$, $n\in\mathbb{N}^*$, et on a presque sûrement

$$\phi(\Pi_O) = \big\{(T^2/2\, ,\, X/T)\, ;\, (T,X)\in\Pi_O\big\} = \big\{\big(\mathscr{E}'_1+\ldots+\mathscr{E}'_n\, ,\, U_n\big)\, ;\, n\in\mathbb{N}^*\big\}.$$

La proposition II.5.3 montre donc qu'il existe des variables $\mathscr{F}$-mesurables $(\mathscr{E}'_n, U_n)_{n\geq 1}$ qui satisfont les propriétés suivantes.

- Les variables $(\mathscr{E}'_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.
- Les variables $(U_n)_{n\geq 1}$ sont i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$.
- Les suites $(\mathscr{E}'_n)_{n\geq 1}$ et $(U_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et si on pose $T_n=\sqrt{2(\mathscr{E}'_1+\ldots+\mathscr{E}'_n)}$, alors on a

$$\mathbf{P}\text{-p.s.}\quad \Pi_O = \big\{\big(T_n\, ,\, U_nT_n\big)\ ;\ n\in\mathbb{N}^*\big\}\ ,$$

ce qui est une représentation très explicite de Π_O, permettant notamment une simulation.

II.6 Processus ponctuels, formule de compensation.

Dans cette section, sauf mention explicite du contraire, toutes les variables aléatoires considérées sont définies sur le même espace de probabilité $(\Omega,\mathscr{F},\mathbf{P})$ qui est supposé complet. Soit $(E,\mathscr{E})$, un espace mesurable. Il est toujours supposé séparable et séparé. Soit $\partial\notin E$. On pose alors

$$E_\partial := E\cup\{\partial\}\quad \text{et}\quad \mathscr{E}_\partial=\sigma(\{\partial\},\mathscr{E})\ .$$

On introduit la notion de processus ponctuel, définition due à Itô.

Définition II.6.1 (*Processus ponctuel*) Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, soit $V_t:\Omega\to E_\partial$, une fonction. Alors, $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un *processus ponctuel sur E* s'il satisfait les deux conditions suivantes.

(a) $\mathbf{P}$-p.s. l'ensemble de temps $\{t\in\mathbb{R}_+ : V_t\neq\partial\}$ est dénombrable.

(b) Pour tout $A\in\mathscr{B}(\mathbb{R}_+)\otimes\mathscr{E}$, la variable de comptage en A donnée par $N_A(V):=\sum_{t\in\mathbb{R}+}\mathbf{1}_A(t,V_t)$ est $\mathscr{F}$-mesurable. Ici la somme est au sens des familles sommables (et elle ne porte que l'ensemble des temps $t\in\mathbb{R}+$ tels que $V_t\neq\partial$).

Soit $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, une filtration sur $(\Omega,\mathscr{F})$. Le processus ponctuel $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-*adapté* si de plus

(c) pour tout $B\in\mathscr{E}$ et tout $t\in\mathbb{R}_+$, $N_{[0,t]\times B}(V)$ est $\mathscr{G}_t$-mesurable. □

Remarque II.6.1 Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on se donne une fonction $V_t : \Omega \to E_\partial$. Les points (a) et (b) de la définition précédente montrent que $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus ponctuel sur E *si et seulement si* $\Pi := \{(t, V_t)\,;\, V_t \neq \partial\}$ est un nuage de points sur $\mathbb{R}_+ \times E$ qui est $(\mathscr{F}, \mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E})$-mesurable.

Réciproquement, si on part d'un nuage sur $\mathbb{R}_+ \times E$ et que l'on veut obtenir un processus ponctuel, il est nécessaire de supposer qu'à chaque temps t ne correspond qu'une seule valeur d'espace. Plus précisément on introduit l'ensemble de ces nuages de points:

$$\texttt{Process} := \big\{ \pi \in \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E} \;:\; \forall t \in \mathbb{R}_+, \quad N_{\{t\}\times E}(\pi) \leq 1 \,\big\} \,.$$

En général $\texttt{Process} \notin \mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$. Soit $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+\times E}$, un nuage aléatoire $(\mathscr{F}, \mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E})$-mesurable. On fait l'hypothèse suivante

$$\text{L'événement } \big\{ \Pi \notin \texttt{Process} \big\} \text{ est } \mathbf{P}\text{-négligeable.} \tag{II.49}$$

Comme $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$ est supposé complet, on a donc $\big\{\Pi \in \texttt{Process}\big\} \in \mathscr{F}$ et $\mathbf{P}(\Pi \in \texttt{Process}) = 1$. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tout $\omega \in \Omega$, on définit alors $V_t(\omega) \in E_\partial$ comme suit

- si $\omega \notin \{\Pi \in \texttt{Process}\}$, on pose $V_t(\omega) := \partial$;
- si $\omega \in \{\Pi \in \texttt{Process}\}$ et $N_{\{t\}\times E}(\Pi(\omega)) = 0$, on pose $V_t(\omega) := \partial$;
- si $\omega \in \{\Pi \in \texttt{Process}\}$ et $N_{\{t\}\times E}(\Pi(\omega)) \neq 0$, alors par définition de $\texttt{Process}$, il existe un unique $x \in E$ tel que $(t, x) \in \Pi(\omega)$ et on pose $V_t(\omega) = x$.

Par construction, sur l'événement $\big\{\Pi \in \texttt{Process}\big\}$, $\Pi = \big\{(t, V_t);\, t \in \mathbb{R}+ : V_t \neq \partial\big\}$ et donc pour tout $A \in \mathscr{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathscr{E}$, on a $N_A(V) = N_A(\Pi)$. Comme on suppose $\mathbf{P}(\Pi \in \texttt{Process}) = 1$, $N_A(V)$ est $\mathscr{F}$-mesurable, ce qui montre que $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un processus ponctuel, selon la définition II.6.2. □

On introduit ensuite la notion de processus ponctuel de Poisson relativement à une filtration comme suit.

Définition II.6.2 (*Processus ponctuel de Poisson relativement à une filtration*). Soit $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, un processus ponctuel sur E. Soit $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, une filtration sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Soit $\mu : \mathscr{E} \to [0, \infty]$, une mesure. Le processus $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est un *processus ponctuel de Poisson relativement à* $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ *d'intensité* μ s'il satisfait les conditions suivantes.

(a) $\Pi := \big\{(t, V_t)\,;\, t \in \mathbb{R}+ : V_t \neq \partial\big\}$ est un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}_+ \times E$ qui est $(\mathscr{G}_\infty, \mathscr{S}_{\mathbb{R}_+\times E})$-mesurable d'intensité $\ell \otimes \mu$, où ℓ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}_+$.

(b) Pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$ et $B \in \mathscr{E}$, $N_{[0,t]\times B}(V)$ est $\mathscr{G}_t$-mesurable et $N_{]t,t+s]\times B}(V)$ est indépendant de $\mathscr{G}_t$. □

Le but de la section est de reformuler la formule de Palm pour des nuages de Poisson muni d'une filtration. Pour cela on introduit les notions de tribu prévisible et de processus prévisible.

Définition II.6.3 (*Tribu et processus prévisibles*) Soit $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, une filtration sur $(\Omega, \mathscr{F})$.

(a) On note $\mathscr{C}_{\text{prev}}$ les sous-ensembles de $\mathbb{R}_+ \times \Omega$ ayant les formes suivantes:

- $\{0\}\times A$, avec $A\in\mathscr{G}_0$.
- $]s,t]\times A$, avec $t\geq s>0$ et $A\in\mathscr{G}_s$.
- $\mathbb{R}_+\times\Omega$.

On vérifie aisément que $\mathscr{C}_{\mathrm{prev}}$ est un pi-système sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$.

(b) On pose $\mathscr{G}_{\mathrm{prev}}:=\sigma(\mathscr{C}_{\mathrm{prev}})$, tribu sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$. C'est la *tribu prévisible associée à* $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$.

(c) Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, soit $X_t:\Omega\to E$, une fonction. Le processus $(X_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ est dit $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-*prévisible* si $(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega\longmapsto X_t(\omega)\in E$ est $(\mathscr{G}_{\mathrm{prev}},\mathscr{E})$-mesurable. □

La proposition suivante donne quelques propriétés utiles de la tribu prévisible.

Proposition II.6.1 *Soit $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, une filtration sur $(\Omega,\mathscr{F})$. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) $\mathscr{G}_{\mathrm{prev}}$ est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ rendant mesurables les processus $X:(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)\in\mathbb{R}$ qui sont càg sur $]0,\infty[$ et $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-adaptés.

(ii) Soit (E,d), métrique séparable muni des Boréliens $\mathscr{B}(E)$. Soit $X:(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)\in E$, un processus $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}+}$-adapté et càg sur $]0,\infty[$. Alors, il est $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-prévisible.

(iii) Soit $X:(t,\omega)\mapsto X_t(\omega)\in E$, un processus $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-prévisible. Alors, il est adapté.

Preuve: on montre (i) tout d'abord. Pour cela on observe facilement que l'ensemble des processus à valeurs réelles qui sont $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-prévisibles, forment un espace vectoriel. Soient $t_0,s_0\in\mathbb{R}_+$ tels que $t_0\geq s_0$ et soit $Y:\Omega\to\mathbb{R}$, une v.a. $\mathscr{G}_{s_0}$-mesurable. On pose $X:(t,\omega)\in\mathbb{R}_+\times\Omega\mapsto\mathbf{1}_{]s_0,t_0]}(t)Y(\omega)\in\mathbb{R}$. Alors X est $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-prévisible. *En effet*, soit $B\in\mathscr{B}(\mathbb{R})$; si $0\notin B$, $\{X\in B\}=]s_0,t_0]\times\{Y\in B\}\in\mathscr{C}_{\mathrm{prev}}$; si $0\in B$, alors $\{X\in B\}=(]s_0,t_0]\times\{Y\in B\})\cup([0,s_0]\times\Omega)\cup(]t_0,\infty[\times\Omega)$ Cet événement est dans $\mathscr{G}_{\mathrm{prev}}$ car $[0,s_0]\times\Omega=(\{0\}\times\Omega)\cup\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]2^{-n},s_0]\times\Omega$ et car $]t_0,\infty[\times\Omega=\bigcup_{n\in\mathbb{N}}]t_0+n,t_0+n+1]\times\Omega$.

Soit X un processus à valeurs réelles qui est $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-adapté càg. Pour tout $t\in\mathbb{R}_+$, on pose $X^n_t(\omega)=X_0\mathbf{1}_{\{0\}}(0)+\sum_{0\leq k<n2^n}X_{k2^{-n}}\mathbf{1}_{]k2^{-n},(k+1)2^{-n}]}(t)$. Ce qui précède montre que X^n est $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-prévisible. Comme X est càg sur $]0,\infty[$, X est la limite ponctuelle des X^n lorsque $n\to\infty$, ce qui entraîne que X est également $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-prévisible.

Si on note $\mathscr{H}$ la tribu sur $\mathbb{R}_+\times\Omega$ engendrée par les processus qui sont càg sur $]0,\infty[$ et $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-adaptés. On a clairement $\mathscr{C}_{\mathrm{prev}}\subset\mathscr{H}$ et donc $\mathscr{G}_{\mathrm{prev}}\subset\mathscr{H}$. Par ailleurs, ce qui précède montre que $\mathscr{H}\subset\mathscr{G}_{\mathrm{prev}}$, et donc $\mathscr{H}=\mathscr{G}_{\mathrm{prev}}$, ce qui prouve (i).

Pour montrer (ii) on effectue la même approximation qu'au (i): nous laissons les détails au lecteur. Le points (iii) se démontre en raisonnant par classe monotone: on note $\mathscr{Q}$ l'espace des processus à valeurs réelles qui sont $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-prévisibles et $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-adaptés. C'est clairement un espace vectoriel. On vérifie immédiatement que $\mathbf{1}_C\in\mathscr{Q}$, pour tout $C\in\mathscr{C}_{\mathrm{prev}}$. Il est facile de vérifier que $\mathscr{Q}$ est également stable par limite ponctuelle croissantes uniformément bornées. Le théorème de la classe monotone, dans sa version fonctionnelle, implique alors que $\mathscr{Q}$ contient tous les processus $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-prévisibles bornés. On passe au cas général par troncature: les détails sont laissés au lecteurs. ■

Notation. Soit $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_\partial \to \mathbb{R},\ \mathbb{C}$ ou $[0, \infty]$. Sauf mention explicite du contraire, on suppose:

$$\forall (s, \omega) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega, \quad H_s(\omega, \partial) = 0 \ . \tag{II.50}$$

Soit $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, un processus ponctuel sur E; on pose $\Pi := \{(t, V_t)\ ;\ t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}$. Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$\sum_{s\in[0,t]} H_s(\omega, V_s) \quad \text{signifie} \quad \sum_{(T,X)\in\Pi} \mathbf{1}_{[0,t]}(T) H_T(\omega, X) \ \text{ au sens des familles sommables}$$

Cette expression a toujours un sens lorsque H est à valeurs dans $[0, \infty]$; si H est à valeurs dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, alors, cette expression a un sens dès que $\sum_{s\in[0,t]} |H_s(\omega, V_s)| < \infty$. □

L'énoncé suivant, appelé *formule de compensation*, est une réécriture de la formule de Palm (qui ne lui est pas strictement équivalente).

Théorème II.6.2 **(Formule de compensation)** *Soit $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, une filtration sur $(\Omega, \mathscr{F})$. Soit $(V_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, un $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-processus ponctuel de Poisson sur E d'intensité μ, qui est supposée sigma-finie. Alors, les assertions suivantes sont vérifiées.*

(i) Soit $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_\partial \to [0, \infty]$, un processus $(\mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}_\partial)$-mesurable satisfaisant (II.50). Alors pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$\omega \longmapsto \sum_{s\in[0,t]} H_s(\omega, V_s) \quad \textit{et} \quad \omega \longmapsto \int_E \mu(dx) \int_0^t H_s(\cdot, x)\, ds$$

sont deux v.a. à valeurs dans $[0, \infty]$; elles sont $\mathscr{G}_t$-mesurables et on a

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{s\in[0,t]} H_s(\omega, V_s) \Big] = \int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}\big[H_s(\cdot, x) \big]\, ds \ . \tag{II.51}$$

(ii) Soit $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_\partial \to \mathbb{C}$, un processus $(\mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}_\partial)$-mesurable satisfaisant (II.50). On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}\big[|H_s(\cdot, x)|\big]\, ds < \infty$. Alors, (II.51) a lieu et

$$t \longmapsto M_t := \sum_{s\in[0,t]} H_s(\omega, V_s) \ - \int_E \mu(dx) \int_0^t H_s(\cdot, x)\, ds$$

est une $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale bien définie et càd.

(iii) Soit $H : \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_\partial \to \mathbb{R}$, un processus $(\mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}_\partial)$-mesurable satisfaisant (II.50). On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}\big[|H_s(\cdot, x)|\big]\, ds < \infty$ et $\int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}\big[H_s(\cdot, x)^2\big]\, ds < \infty$. On a alors

$$\mathbf{E}\big[M_t^2\big] = \int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{E}\big[H_s(\cdot, x)^2\big]\, ds \ . \tag{II.52}$$

avec la notation M_t introduite au (ii).

Preuve: on considère d'abord le cas où μ est de masse finie. Soient $B \in \mathscr{E}$, $s_0, t_0 \in \mathbb{R}_+$ et $A \in \mathscr{G}_{t_0}$. On pose

$$I :=]t_0, t_0 + s_0] \quad \text{et} \quad \forall (s, \omega, x) \in \mathbb{R}_+ \times \Omega \times E_\partial, \quad H_s(\omega, x) := \mathbf{1}_I(s) \mathbf{1}_A(\omega) \mathbf{1}_B(x) \; .$$

Il est clair que H est $(\mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}_\partial)$-mesurable, qu'il satisfait (II.50). On pose $\Pi := \{(t, V_t) \, ; \, t \in \mathbb{R}_+ : V_t \neq \partial\}$, qui est un nuage Poissonnien d'intensité $\ell \otimes \mu$. On observe que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$X_t := \sum_{s \in [0,t]} H_s(\cdot, V_s) = \mathbf{1}_A(\cdot) N_{([0,t] \cap I) \times B}(\Pi) \quad \text{et} \quad \int_E \mu(dx) \int_0^t H_s(\cdot, x) \, dr = \mathbf{1}_A(\omega) \mu(B) \ell\big([0,t] \cap I\big).$$

Ce sont des variables $\mathscr{G}_t$-mesurables. On remarque que $X_{t+s} - X_t = \mathbf{1}_A(\cdot) N_{(]t,t+s] \cap I) \times B}(\Pi)$. Comme V est un processus ponctuel de Poisson la v.a. $N_{(]t,t+s] \cap I) \times B}(\Pi)$ suit une loi de Poisson de paramètre $\mu(B)\ell\big(]t, t+s] \cap I\big)$ et elle est indépendante de $\mathscr{G}_{t \vee t_0}$. Donc $\mathbf{E}[X_{t+s} | \mathscr{G}_{t \vee t_0}] = X_t + \mathbf{1}_A(\omega) \mu(B) \ell\big(]t, t+ s] \cap I\big)$, puisque $A \in \mathscr{G}_{t \vee t_0}$. On a donc

$$\mathbf{E}[X_{t+s} | \mathscr{G}_t] = X_t + \mathbf{E}\big[\, \mathbf{1}_A \big| \mathscr{G}_t\big] \mu(B) \ell\big(]t, t+s] \cap I\big) = X_t + \mathbf{E}\Big[\int_E \mu(dx) \int_t^{t+s} \mathbf{1}_{A \times I \times B}(\cdot, r, x) \, dr \, \Big| \, \mathscr{G}_t \Big]. \tag{II.53}$$

Pour tout $C \in \mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}$ on pose

$$X_t(C) := \sum_{s \in [0,t]} \mathbf{1}_C(\cdot, s, V_s) \quad \text{et} \quad Y_t(C) := \int_E \mu(dx) \int_0^t \mathbf{1}_C(\cdot, s, x) \, ds.$$

On note $\mathscr{L}$ l'ensemble des $C \in \mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}$ tels que

$$\mathbf{E}[X_{t+s}(C) | \mathscr{G}_t] = X_t(C) + \mathbf{E}\big[Y_{t+s}(C) - Y_t(C) \big| \mathscr{G}_t\big] = X_t(C) + \mathbf{E}\Big[\int_E \mu(dx) \int_t^{t+s} \mathbf{1}_C(\cdot, r, x) \, dr \, \Big| \, \mathscr{G}_t \Big]. \tag{II.54}$$

Il est facile de montrer que $\mathscr{L}$ est une classe monotone: nous laissons les détails au lecteur. D'autre par (II.53) montre que $\mathscr{L}$ contient le pi-système $\mathscr{P} := \{Q \times B ; Q \in \mathscr{C}_{\mathrm{prev}}, \, B \in \mathscr{E}\}$ qui génère $\mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}$. Le théorème de la classe monotone implique alors que $\mathscr{L} = \mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}$. Autrement dit (II.54) est vérifiée pour tout $C \in \mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}$.

Ce résultat s'étend tout d'abord lorsque μ est sigma-finie: il existe une partition de E $B_n \in \mathscr{E}$, $n \in \mathbb{N}$; on pose $\mu_n = \mu(\cdot \cap B_n)$ et pour tout $C \in \mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}$, on pose $C_n := C \cap (\Omega \times \mathbb{R}_+ \times B_p)$. Comme μ_n est finie on a

$$\mathbf{E}[X_{t+s}(C_n) | \mathscr{G}_t] = X_t(C_n) + \mathbf{E}\Big[\int_E \mu_n(dx) \int_t^{t+s} \mathbf{1}_{C_n}(\cdot, r, x) \, dr \, \Big| \, \mathscr{G}_t \Big] = X_t(C_n) + \mathbf{E}\Big[\int_{B_n} \mu(dx) \int_t^{t+s} \mathbf{1}_C(\cdot, r, x) \, dr \, \Big| \, \mathscr{G}_t \Big].$$

En sommant sur n, et en utilisant l'interversion série/intégrale et série/espérance conditionnelle, on obtient (II.54) avec μ sigma-finie.

Soit $H : \Omega \times \mathbb{R}_+ \times E \to [0, \infty]$, une fonction $\mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}$-mesurable. Par le lemme **??**, page **??**, il existe $a_p \in]0, \infty[$, $C_p \in \mathscr{G}_{\mathrm{prev}} \otimes \mathscr{E}$, $p \in \mathbb{N}$ tels que $H = \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p \mathbf{1}_{C_p}$. Par interversion positives, on en déduit que pour tout t, $\sum_{s \in [0,t]} H_s(\cdot, V_s) = \sum_{p \in \mathbb{N}} a_p X_t(C_p)$ et en appliquant (II.54) aux C_p et en sommant sur $p \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\mathbf{E}\Big[\sum_{r \in [0,t+s]} H_r(\cdot, V_r) \, \Big| \, \mathscr{G}_t \Big] = \sum_{r \in [0,t]} H_r(\cdot, V_r) + \mathbf{E}\Big[\int_E \mu(dx) \int_t^{t+s} H_r(\cdot, x) \, dr \, \Big| \, \mathscr{G}_t \Big]. \tag{II.55}$$

On obtient (i) en prenant l'espérance de cette égalité avec $t=0$.

Montrons (ii): (II.55) implique que $(M_t)_{\in\mathbb{R}_+}$ est une $(\mathscr{G}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$-martingale lorsque H est positive. On montre ce résultat pour une fonction H à valeurs réelles, en prenant sa partie positive et sa partie négative; le cas des fonctions à valeurs complexes se déduit du cas réel en considérant la partie réelle et la partie imaginaire des fonctions H. Il reste donc à montrer que $t\mapsto M_t$ est càd: il est tout d'abord clair que $t\mapsto \int_E \mu(dx)\int_0^t H_s(\cdot,x)\,ds$ est continu par ailleurs, le théorème de convergence dominée pour la mesure de comptage implique que $t\mapsto \sum_{s\in[0,t]} H_s(\omega,V_s)$ est càd, ce qui termine la preuve de (ii).

Soit, H satisfaisant les hypothèses du (iii). On pose

$$X_t(H):=\sum_{s\in[0,t]} H_s(\cdot,V_s) \quad \text{et} \quad Y_t(H):=\int_0^t ds\int_E \mu(dx)\,H_s(\cdot,x)\;.$$

On suppose dans un premier temps que H satisfait l'hypothèse suivante

$$\forall(s,\omega,x)\in\mathbb{R}_+\times\Omega\times E\,,\quad |H_s(\omega,x)|\leq c\mathbf{1}_B(x) \quad \text{où } B\in\mathscr{E} \text{ est tel que } \mu(B)<\infty \text{ et où } c\in\mathbb{R}_+. \tag{II.56}$$

On suppose d'abord que $H\geq 0$. On a alors

$$X_t(H)^2=\sum_{s\in[0,t]} H_s(\cdot,V_s)^2+2\sum_{0\leq u<s\leq t} H_u(\cdot,V_u)H_s(\cdot,V_s)=X_t(H^2)+2\sum_{s\in[0,t]} A_{s-}(H)H_s(\cdot,V_s)\;,$$

car $s\mapsto A_s$ est croissant càd et car la limite à gauche A_{s-} est donnée par $\sum_{u<s} H_u(\cdot,V_u)$. Il est facile de vérifier que $(s,\omega,x)\mapsto A_{s-}(\omega)H_s(\omega,x)$ est $\mathscr{G}_{\mathrm{prev}}\otimes\mathscr{E}$-mesurable car $s\mapsto A_{s-}$ est càg. Par (i) on en déduit

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[X_t(H)^2\big] &= \int_0^t ds\int_E \mu(dx)\,\mathbf{E}[H_s(\cdot,x)^2]+2\int_0^t ds\int_E \mu(dx)\,\mathbf{E}[A_sH_s(\cdot,x)] \qquad \text{(II.57)}\\
&\leq c^2\mu(B)t+c\mu(B)t\mathbf{E}[A_t]=c^2\mu(B)t+2c\mu(B)t\int_0^t ds\int_E \mu(dx)\,\mathbf{E}[H_s(\cdot,x)]\\
&\leq c^2\mu(B)t+2c^2\mu(B)^2t^2<\infty
\end{aligned}$$

On remarque ensuite que

$$\begin{aligned}
X_t(H)Y_t(H) &= \sum_{s\in[0,t]} H_s(\cdot,V_s)\int_0^s du\int_E \mu(dx)\,H_u(\cdot,x)+\sum_{s\in[0,t]} H_s(\cdot,V_s)\int_s^t du\int_E \mu(dx)\,H_u(\cdot,x)\\
&= \sum_{s\in[0,t]} H_s(\cdot,V_s)Y_s(H)+\int_0^t du\int_E \mu(dx)\,H_u(\cdot,x)A_u
\end{aligned}$$

On a donc par (i)

$$\begin{aligned}
\mathbf{E}[X_t(H)Y_t(H)] &= \int_0^t ds\int_E \mu(dx)\,\mathbf{E}[H_s(\cdot,x)Y_s(H)]+\int_0^t ds\int_E \mu(dx)\,\mathbf{E}[H_s(\cdot,x)A_s]\\
&\leq \iint_{0\leq s<u\leq t} ds\,du\iint_E \mu(dy)\mu(dx)\,\mathbf{E}[H_s(\cdot,x)H_u(\cdot,y)]+\int_0^t ds\int_E \mu(dx)\,\mathbf{E}[H_s(\cdot,x)A_s] \qquad \text{(II.58)}\\
&\leq 2c^2\mu(B)^2t^2<\infty
\end{aligned}$$

On observe également que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}[Y_t(H)^2] &= \iint_{0\le s,u\le t} ds\,du \iint_E \mu(dy)\mu(dx)\,\mathbf{E}[H_s(\cdot,x)H_u(\cdot,y)] \\
&= 2\iint_{0\le s<u\le t} ds\,du \iint_E \mu(dy)\mu(dx)\,\mathbf{E}[H_s(\cdot,x)H_u(\cdot,y)] \qquad \text{(II.59)}\\
&\le c^2\mu(B)^2t^2<\infty
\end{aligned}
$$

On a $M_t(H):=X_t(H)-Y_t(H)$, qui est une martingale d'après le (ii). Comme

$$
\mathbf{E}\big[M_t(H)^2\big]=\mathbf{E}\big[X_t(H)^2\big]-2\mathbf{E}[X_t(H)Y_t(H)]+\mathbf{E}[Y_t(H)^2]
$$

par (II.57), (II.58) et (II.59), on obtient (II.52), qui est le résultat voulu. Ce résultat s'étend à une fonction H à valeurs réelles satisfaisant une hypothèse du type (II.56). D'autre part, soit $G:\mathbb{R}_+\times\Omega\times E\to\mathbb{R}$, une fonction satisfaisant les hypothèses du théorème et satisfaisant également (II.56) avec un ensemble $B'\in\mathscr{E}$ et une constante c'. Alors $H+G$ et $H-G$ satisfont également (II.56) avec un ensemble $B\cup B'\in\mathscr{E}$ et une constante $c+c'$. On a donc

$$
\begin{aligned}
4\mathbf{E}\big[M_t(H)M_t(G)\big] &= \mathbf{E}\big[M_t(H+G)^2\big]-\mathbf{E}\big[M_t(H-G)^2\big]\\
&= 4\int_E\mu(dx)\int_0^t\mathbf{E}\big[H_s(\cdot,x)G_s(\cdot,x)\big]\,ds \qquad \text{(II.60)}
\end{aligned}
$$

Passons au cas général. Comme μ est sigma-finie, il existe $B_p\in\mathscr{E}$, $p\in\mathbb{N}$, une partition de E telle que $0\le\mu(B_p)<\infty$. Pour tous $p,q\in\mathbb{N}$, on pose

$$
\forall(s,\omega,x)\in\mathbb{R}_+\times\Omega\times E,\quad H_s^{p,q}(\omega,x)=\mathbf{1}_{B_p}(x)H_s(\omega,x)\mathbf{1}_{\{|H_s(\omega,x)|\in[q,q+1[\}}\ .
$$

Il est clair que $H^{p,q}$ satisfait les hypothèses du théorème et (II.56) avec $B=B_p$ et $c=q+1$. Par ailleurs pour tout (s,ω,x), il existe au plus une paire (p,q) telle que $H_s^{p,q}(\omega,x)\neq0$ donc d'une part

$$
M_t(H)=\sum_{p,q\in\mathbb{N}}M_t\big(\,H^{p,q}\big) \qquad \text{(II.61)}
$$

et d'autre part $H_s^{p,q}(\omega,x)H_s^{m,n}(\omega,x)$ dès que $(p,q)\neq(m,n)$ et donc, par (II.60),

$$
\mathbf{E}\big[M_t(H^{p,q})M_t(H^{m,n})\big]=0\quad\text{dès que } (p,q)\neq(m,n).
$$

Ceci, combiné avec (II.61) et un argument élémentaire, implique que

$$
\begin{aligned}
\mathbf{E}\big[M_t(H)^2\big] &= \sum_{p,q\in\mathbb{N}}\mathbf{E}\big[M_t(H^{p,q})^2\big]\\
&= \sum_{p,q\in\mathbb{N}}\int_E\mu(dx)\int_0^t\mathbf{E}\big[\mathbf{1}_{B_p}(x)H_s(\cdot,x)^2\mathbf{1}_{\{|H|\in[q,q+1[\}}\big]\\
&= \int_E\mu(dx)\int_0^t\mathbf{E}\big[H_s(\cdot,x)^2\big]\ ,
\end{aligned}
$$

par interversion série/intégrale positive. Cela termine la preuve du théorème. ■

Chapter III

Modèles d'actifs avec sauts.

Cette partie traitée en cours suit de très près (à quelques détails de notation) le chapitre 7 du livre

> Introduction au Calcul Stochastique Appliqué à la Finance,
> Damien LAMBERTON et Bernard LAPEYRE,
> éditions ELLIPSES (1997).

Nous n'avons pas jugé nécessaire de le recopier.

Chapter IV

Exercices.

Voici quelques exercices. Nous avons mis une étoiles aux exercices qu'il est absolument nécessaire d'avoir traités pour réussir confortablement l'examen.

IV.1 Sur les fonctions à variation bornée.

Exercice IV.1.1 (*) Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1. Montrer qu'elle est à variation bornée. Calculer sa mesure de Stieltjes dF, ainsi que $(dF)^+$, $(dF)^-$ et la variation totale $|dF|$ en déduire $\mathbf{var}_F$. □

Exercice IV.1.2 (*) Soit $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ une fonction donnée par

$$F(s) = (-1)^{\lfloor s \rfloor} + \sin(\pi s) \ , \ t \in \mathbb{R}_+ \ .$$

Montrer que c'est une fonction à variation bornée. Montrer qu'il existe une unique fonction $X : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, à variation bornée telle que

$$X(t) = 1 + \int_{[0,t]} X_{s-} \cos(\pi s) \, dF(s) \, , \quad t \in \mathbb{R}_+ \ ,$$

que l'on calculera explicitement. □

IV.2 Sur les processus de Poisson homogènes.

Exercice IV.2.1 *Preuve de la proposition II.1.3.* Commençons par quelques notations et définitions. Soit E un ensemble infini dénombrable. On note $\mathscr{M}_1(E)$ l'ensemble des lois de probabilités sur E, c'est-à-dire l'ensemble des collections de nombres positifs $\mu = (\mu(i))_{i\in E}$ tels que $\sum_{i\in E} \mu(i) = 1$. On définit la distance en variation $d_{\mathbf{var}}$ sur $\mathscr{M}_1(E)$ par

$$\forall \mu, \nu \ , \quad d_{\mathbf{var}}(\mu, \nu) = \sum_{i \in E} |\mu(i) - \nu(i)| \ ,$$

1. Montrer que $(\mathscr{M}_1(E), d_{\mathbf{var}})$ est une espace métrique complet. Montrer que

$$d_{\mathbf{var}}(\mu, \nu) = 2 \sup_{A \subset E} |\mu(A) - \nu(A)| = 2 \sup_{A \subset E} \big(\mu(A) - \nu(A)\big) \ .$$

On note d_1 la distance en variation sur $\mathscr{M}_1(\mathbb{N})$ et on note d_2 la distance en variation sur $\mathscr{M}_1(\mathbb{N}^2)$. Soit $\mu, \nu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{N})$. Leur mesure produit $\mu \otimes \nu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{N}^2)$ est donc donnée par $(\mu \otimes \nu)(i,j) = \mu(i)\nu(j)$, $i, j \in \mathbb{N}$. On définit leur convolée $\mu * \nu \in \mathscr{M}_1(\mathbb{N})$ par

$$(\mu * \nu)(i) = \sum_{0 \leq j \leq i} \mu(j)\nu(i-j) \ , \quad i \in \mathbb{N} \ .$$

2. Montrer que pour toutes mesures de probabilité $\mu, \mu', \nu, \nu' \in \mathscr{M}_1(\mathbb{N})$, on a

$$d_2(\mu \otimes \mu', \nu \otimes \nu') \leq d_1(\mu, \nu) + d_1(\mu', \nu') \ .$$

3. Montrer que pour toutes mesures de probabilité $\mu, \mu', \nu, \nu' \in \mathscr{M}_1(\mathbb{N})$, on a

$$d_1(\mu * \mu', \nu * \nu') \leq d_2(\mu \otimes \mu', \nu \otimes \nu') \ .$$

4. Soit μ, une loi de probabilité sur $\{0, 1\}$ telle que $\mu(1) = p > 0$. Soit ν, la loi de Poisson de paramètre p: $\nu(k) = e^{-p}p^k/k!$, $k \in \mathbb{N}$. Prouver que

$$d_1(\mu, \nu) \leq 2p^2 \ .$$

Pour tout $n \geq 1$, on pose $\theta_n = \sum_{m=1}^n p_{n,m}$. Pour tous $m, n \geq 1$, on note $\nu_{m,n}$ la loi de Poisson de paramètre $p_{m,n}$; on note ν_n la loi de Poisson de paramètre θ_n. Enfin on note ν la loi de Poisson de paramètre θ. On note μ_n la loi de X_n, et on note $\mu_{n,m}$ la loi de $\xi_{n,m}$.

5. Montrer que $d_1(\nu_n, \nu) \leq 2|\theta - \theta_n|$. (*Indication:* si on suppose, par exemple, que $\theta > \theta_n$, exprimer ν comme la convolée de ν_n avec une autre loi que l'on précisera et utiliser les questions 2 et 3).

6. Montrer que $\mu_n = \mu_{1,n} * \ldots * \mu_{n,n}$ et $\nu_n = \nu_{1,n} * \ldots * \nu_{n,n}$.

7. Montrer que $d_1(\mu_n, \nu_n) \leq 2\sum_{1 \leq m \leq n} p_{m,n}^2$ et conclure. □

Exercice IV.2.2 (*Preuve de la proposition II.1.4, page 29*) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $S_n = X_0 + \ldots + X_n$, qui est une variable $\mathscr{F}$-mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$. On pose $\sigma_n = \theta_0 + \ldots + \theta_n \in [0, \infty]$.

1. Montrer que S_n suit une loi de Poisson étendue de paramètre σ_n (on distinguera le cas $\sigma_n < \infty$ du cas $\sigma_n = \infty$).

2. On suppose que $\theta = \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta_n < \infty$. En remarquant que $\mathbf{P}(\lim_{n\to\infty} S_n = X) = 1$, en utilisant les fonctions caractéristiques et le théorème de convergence dominée, montrer X suit une loi de Poisson d'intensité θ.

3. On suppose que $\theta_n < \infty$, $n \in \mathbb{N}$, et $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \infty$. Montrer que $\mathbf{P}(S_n \leq \sigma_n^2) \leq 1/\sigma_n$. Montrer qu'il existe une suite d'entiers positifs $(n_k)_{k \geq 0}$ strictement croissante et une variable $K_0 : \Omega \to \mathbb{N}$ telle que $\mathbf{P}(\forall k \geq K_0 : S_{n_k} > \sigma_{n_k}^2) = 1$. Conclure. □

Exercice IV.2.3 (*Preuve de la proposition II.1.5, page 29*) On suppose d'abord que X satisfait la propriété d'oubli et n'est pas nulle presque sûrement.

1. Montrer qu'il existe $t_0, a \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $\mathbf{P}(X > t) \geq a > 0$, pour tout $t \in [0, t_0]$.

2. Montrer que $\mathbf{P}(X > t) > 0$, pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. On peut poser $f(t) = -\log\big(\mathbf{P}(X > t)\big)$.

3. Montrer que f est continue à droire sur $\mathbb{R}_+$ et que $f(s+t) = f(s) + f(t)$, pour tous $s, t \in \mathbb{R}_+$. Calculer $f(0)$.

4. On pose $f(1) = c$. Montrer que $f(t) = ct$. En déduire que X suit une loi exponenielle étendue de paramètre $c \in \mathbb{R}_+$.

5. Montrer que toute variable exponentielle étendue satisfait la propriété d'oubli. $\square$

Exercice IV.2.4 *Paradoxe de l'inspection* Soit $(\mathscr{E}_n)_{n\geq 1}$, une suite i.i.d. de variables de loi exponentielle de paramètre $\theta \in \mathbb{R}_+^*$. On pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,, \quad T_n = \mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_n \quad \text{et} \quad \Pi = \big\{ T_n\,;\, n \in \mathbb{N}^* \big\},$$

qui est donc un nuage Poissonnien homogène sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité θ. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on note $N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{[0,t]}(T_n)$. On s'intéresse aux variables R_t et D_t définies par

$$R_t = t - T_{N_t} \quad \text{et} \quad D_t = T_{N_t+1} - t\,,$$

qui sont telles que $R_t + D_t = \mathscr{E}_{N_t+1}$.

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, D_t suit une loi exponentielle de paramètre θ, c'est-à-dire que D_t a même loi que $\mathscr{E}_1$.

2. Montrer que R_t a même loi que le maximum de t et d'une exponentielle de paramètre θ, c'est-à-dire que D_t a même loi que $t \vee \mathscr{E}_1$.

3. Calculer en fonction de t et de θ, l'espérance $\mathbf{E}[\mathscr{E}_{N_t+1}]$ et remarquer que

$$\mathbf{E}[\mathscr{E}_{N_t+1}] > \frac{1}{\theta} = \mathbf{E}[\mathscr{E}_1]\,,$$

   ce qui peut sembler "paradoxal" à première vue.

4. Montrer que D_t et R_t sont indépendantes et prouver que lorsque t tend vers l'infini, $\mathscr{E}_{N_t+1}$ converge vers une loi de densité $s \mapsto \theta^2 s e^{-\theta s}$. $\square$

Exercice IV.2.5 (*Statistiques d'ordre et processus de Poisson homogènes*) Soit $(U_n)_{n\geq 1}$, une suite de variables i.i.d. de loi uniforme sur $[0,1]$. Pour tout $n \geq 2$, on rappelle la notation $(U_1^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)})$ pour la statistique d'ordre associée à $(U_1, \ldots, U_n)$. Pour des raisons pratiques, on pose $U_0^{(n)} = 0$ et $U_{n+1}^{(n)} = 1$. On se donne également $(\mathscr{E}_n)_{n\geq 1}$, une suite i.i.d. de variables de loi exponentielle de paramètre 1, et on pose

$$\forall n \in \mathbb{N}^*\,, \quad T_n = \mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_n \quad \text{et} \quad \Pi = \big\{ T_n\,;\, n \in \mathbb{N}^* \big\},$$

qui est donc un nuage Poissonnien homogène sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité 1.

1. Montrer que pour tout $n \geq 2$, on a l'identité en loi suivante

$$(T_1/T_{n+1}, \ldots, T_n/T_{n+1}) \overset{(loi)}{=} \big(U_1^{(n)}, \ldots, U_n^{(n)}\big)\,.$$

2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a

$$n\, U_k^{(n)} \quad \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(loi)}}{\longrightarrow}} \quad T_k \ .$$

3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{\{n(U_k^{(n)} - U_{k-1}^{(n)}) > x\}} \quad \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(proba)}}{\longrightarrow}} \quad e^{-x} \ .$$

4. Montrer que

$$\frac{n}{\log n} \max_{1\leq k\leq n+1} (U_k^{(n)} - U_{k-1}^{(n)}) \quad \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(proba)}}{\longrightarrow}} \quad 1 \ .$$

5. Montrer que

$$n^2 \min_{1\leq k\leq n} (U_k^{(n)} - U_{k-1}^{(n)}) \quad \underset{n\to\infty}{\overset{\text{(loi)}}{\longrightarrow}} \quad \text{exponentielle}(1) \ .$$

□

IV.3 Sur les nuages Poissonniens.

Exercice IV.3.1 (*) On munit $\mathbb{R}^d$ de sa base canonique et de la norme Euclidienne associée, notée $\|\cdot\|$. On note ℓ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. On note v_d le volume de la boule unité. Si $B(x,r)$ dénote la boule ouverte de centre x et de rayon r, on a donc $\ell_d(B(x,r)) = v_d r^d$. On rappelle la formule de changement de variable radial: si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, est mesurable alors

$$\int_{\mathbb{R}^d} f\big(\|x\|\big)\, \ell_d(dx) = d v_d \int_{\mathbb{R}_+} f(r) r^{d-1}\, \ell_1(dr) \ .$$

Soit $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$, un espace de probabilité sur lequel est défini un nuage Poissonnien $\Pi : \Omega \to \mathbf{S}_{\mathbb{R}^d}$ d'intensité ℓ_d. On pose

$$\Pi_0 = \big\{ \|X\| \, ; \, X \in \Pi \big\} \ .$$

1. Montrer que Π_0 est presque sûrement égal à un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ dont on précisera l'intensité.

2. On note $\phi(r) = b r^{\beta}$. Pour quelles valeurs de b et de β, $\phi(\Pi_0)$ est un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité ℓ_1 ?

3. Montrer qu'il existe une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de variables $\mathscr{F}$-mesurables telles que $0 < \|X_n\| < \|X_{n+1}\|$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\Pi = \{X_n ; n \in \mathbb{N}^*\}$ presque sûrement. Trouver la fonction de répartition de $\|X_n\|$.

4. Montrer qu'il existe des constantes strictement positives c_d et C_d, que l'on calculera, telles que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \lim_{n\to\infty} n^{-c_d} \|X_n\| = C_d \ .$$

5. Trouver la densité de $\|X_n\|$.

6. On note μ la loi uniforme sur la sphère unité $S(0,1) = \{x \in \mathbb{R}^d : \|x\| = 1\}$. On rappelle que si $Z : \Omega \to B(0,1)$ a pour loi $(v_d)^{-1}\ell_d(\,\cdot\, \cap B(0,1))$, alors $(\|Z\|)^{-1}Z$ a pour loi μ. Montrer qu'il existe une suite $(\mathscr{E}_n)_{n\geq 1}$, de variable i.i.d. de loi exponentielles de paramètre 1, et une suite $(Z_n)_{n\geq 1}$, de variable i.i.d. de loi μ, telles que $(\mathscr{E}_n)_{n\geq 1}$ et $(Z_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes et

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \Pi = \big\{ a_d(\mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_n)^{\gamma_d} \cdot Z_n \, ; \, n \in \mathbb{N}^* \big\} ,$$

où on précisera les constantes a_d et γ_d. □

Exercice IV.3.2 (*) On note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des réels positifs, $\mathbb{R}_+^* = \mathbb{R}_+ \cap \mathbb{R}^*$, l'ensemble des réels strictement positifs. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on définit la loi μ_β sur $\mathbb{R}_+^*$ muni des Boréliens, par $\mu_\beta(dt) = \mathbf{1}_{\mathbb{R}_+^*}(t)t^{-\beta}\ell_1(dt)$, où ℓ désigne la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On rappelle la définition de la fonction Γ d'Euler sur $\mathbb{R}_+^*$ par l'intégrale

$$\Gamma(u) = \int_0^\infty t^{u-1}e^{-t}dt \; .$$

Pour tout nuage déterministe $\pi \in \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+^*}$ tout $c \in \mathbb{R}_+^*$ et tout $a \in \mathbb{R}^*$, on pose

$$c \cdot \pi = \{cx ; x \in \pi\} \quad \text{et} \quad (\pi)^a = \{x^a ; x \in \pi\} \; .$$

Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Pour tout $\beta \in \mathbb{R}_+^*$, on se donne $\Pi_\beta : \Omega \to \mathbf{S}_{\mathbb{R}_+^*}$, un nuage Poissonnien d'intensité μ_β. On pose

$$S_\beta = \sum_{X \in \Pi_\beta} X \; ,$$

qui est une variable $\mathscr{F}$-mesurable à valeurs dans $[0, \infty]$.

1. Soient $\beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe $c \in \mathbb{R}_+^*$ et $a \in \mathbb{R}^*$, qui dépendent de β_1 et β_2 tels que
$$\Pi_{\beta_1} \overset{\text{(loi)}}{=} c \cdot \big(\Pi_{\beta_2}\big)^a \; .$$

2. Pour quels $\beta \in \mathbb{R}^*$ a-t-on $\mathbf{P}(S_\beta < \infty) = 1$? Que vaut $\mathbf{P}(S_\beta < \infty)$ si $\mathbf{P}(S_\beta < \infty) < 1$.

3. On suppose que $\mathbf{P}(S_\beta < \infty) = 1$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}_+$, calculer $\mathbf{E}[\exp(-\lambda S_\beta)]$ en fonction de λ, β et $\Gamma(2-\beta)$.

4. On fixe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ et pour tout $a \in \mathbb{R}^*$, on pose $S_{a,\beta} = \sum_{X \in \Pi_\beta} X^a$. Pour quels a a-t-on $\mathbf{P}(S_{a,\beta} < \infty) = 1$?

5. On fixe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Trouver $(c, a) \in \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{R}^*$ tel que $c \cdot (\Pi_\beta)^a$ soit un nuage Poissonnien d'intensité ℓ_1.

6. On fixe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer qu'il existe une suite de variables $(X_n)_{n\geq 1}$ telles que $\mathbf{P}$-presque sûrement,
$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \quad X_n > X_{n+1} , \quad \lim_{n\to\infty} X_n = 0 \quad \text{et} \quad \Pi_\beta = \big\{X_n \, ; \, n \in \mathbb{N}^*\big\}.$$

7. On fixe $\beta \in \mathbb{R}_+^*$ et on reprend les notations de la question précédente. Trouver la fonction de répartition de X_n, sa densité et montrer qu'il existe deux constantes strictement positives c et C, que l'on précisera, telles que

$$\mathbf{P}\text{-p.s.} \quad \lim_{n\to\infty} n^c X_n = C \ .$$

Exercice IV.3.3 Soient $\theta_1, \theta_2 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit Π un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}_+ \times [0, \theta_1 + \theta_2]$ d'intensité $\mathbf{1}_{\mathbb{R}_+}(dt)\ell(dt) \otimes \mathbf{1}_{[0,\theta_1+\theta_2]}(x)\ell(dx)$.

1. En utilisant un théorème du cours, montrer qu'il existe deux suites indépendantes des variable i.i.d. $(\mathscr{E}_n)_{n\geq 1}$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ telles que
   - les $\mathscr{E}_n$ suivent une loi exponentielle de paramètre $\theta_1 + \theta_2$,
   - les X_n sont uniformes dans $[0, \theta_1 + \theta_2]$,
   - si on pose $T_n := \mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_n$, alors $\Pi = \{(T_n, X_n); n \geq 1\}$.
2. On pose $\Pi_1 = \{(T_n, X_n) : X_n \in [0, \theta_1], n \geq 1\}$ et $\Pi_2 = \{(T_n, X_n) : X_n \in]\theta_1, \theta_1 + \theta_2], n \geq 1\}$. Montrer que ce sont deux nuages de Poisson indépendants dont on précisera les intensités.
3. On pose $S = \inf\{n \geq 1 : X_n \in]\theta_1, \theta_1 + \theta_2]\}$. Quelle est la loi de S ? Quelle est la loi de T_S ? Conditionnellement à T_S, quelle est la loi de $\#\Pi \cap [0, T_S[$? (*aucun calcul n'est nécessaire pour résoudre cette question*).
4. Soit $G : \Omega \to \mathbb{N}^*$, un variable géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$, c'est-à-dire $\mathbf{P}(G = n) = p(1-p)^n$, $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(\mathscr{E}')_{n\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables indépendante de G et de loi exponentielles de paramètre θ. On pose

$$\mathscr{E} = \sum_{1\leq n\leq G} \mathscr{E}'_n \ .$$

   Quelle est la loi de $\mathscr{E}$? Conditionnellement à $\mathscr{E}$, quelle est la loi de $G-1$? (*aucun calcul n'est nécessaire pour résoudre cette question*).

Exercice IV.3.4 Soit Π un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}$ d'intensité la mesure de Lebesgue. On imagine un glouton partant de l'origine 0 qui mange les points de Π de proche en proche: il mange d'abord le point de Π le plus proche de 0, puis le plus proche parmi les points qui restent ... et ainsi de suite. On se demande s'il mange ainsi tous les points de Π.

Formellement, on note Y_n, $n \geq 0$ la suite des points mangés par le glouton: on a $Y_0 = 0$, Y_1 est le point de Π le plus proche de 0 et si $n \geq 1$, Y_{n+1} est le point de $\Pi\backslash\{Y_1, \ldots, Y_n\}$ le plus proche de Y_n.

Au temps n, le glouton se trouve au bord du "trou" qu'il a déjà exploré: c'est un intervalle I_n contenant 0 et dont les extrémités sont deux points de Π. Si le glouton est dans $\mathbb{R}_+$, alors le trou est sur sa gauche et à sa droite, il reste une partie inexplorée de Π. De même si le glouton est dans $\mathbb{R}_-$, il est à gauche de 0 et à sa gauche, il reste une partie inexplorée de Π. On dit qu'il effectue une traversée, si à l'instant n il est à gauche du trou (resp. à droite) et qu'à l'instant $n+1$ il se retrouve à droite (resp. à gauche) du trou.

1. Montrer qu'il existe une suite d'exponentielles $(\mathscr{E}_n)_{n\geq 0}$ indépendantes de paramètre 1 telles que $\ell(I_n) = \mathscr{E}_0 + \mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_n$.

2. Montrer que le glouton effectue une traversée entre n et $n+1$ ssi $\mathscr{E}_{n+1} > \ell(I_n)$.

3. Montrer que $\mathbf{P}$-p.s. le glouton ne visite pas tous les points de Π et qu'il en laisse même une infinité de côté.

Remarque. Soit Π est un nuage Poissonnien sur $\mathbb{R}^2$ dont l'intensité est la mesure de Lebesgue: on ne sait pas montrer (à ma connaissance) si un glouton partant de l'origine visite tous les points de Π ou pas.

IV.4 Sur les modèles d'actifs avec sauts.

Exercice IV.4.1 (*) Toutes les variables sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathscr{F}, \mathbf{P})$. Soient $\mathscr{E}_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ et $U_n : \Omega \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}^*$, une suite de variables aléatoires. On les suppose mutuellement indépendantes, on suppose que les $\mathscr{E}_n$ suivent une loi exponentielle de paramètre θ et que les U_n ont même loi notée ν. On pose

$$T_n = \mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_n \quad \text{et} \quad \Pi = \big\{ (T_n, U_n) \, ; \, n \in \mathbb{N}^* \big\} \, .$$

On fixe $c \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$N_t = N_{[0,t]\times\mathbb{R}}(\Pi) \quad \text{et} \quad Z_t = \sum_{1 \leq n \leq N_t} U_n - ct \, .$$

1. Montrer que
$$Z_t = \sum_{(S,U)\in\Pi} \mathbf{1}_{[0,t]}(S)\, U \;\; - ct \, .$$
Calculer $\mathbf{E}[\exp(-\lambda Z_t)]$, pour tous $t, \lambda \in \mathbb{R}_+$.

2. On suppose que $\int_{\mathbb{R}} |z| \nu(dz) < \infty$. Montrer que Z_t est intégrable pour tout t. Calculer $\mathbf{E}[Z_t]$ en fonction de t, θ et $m_1 = \int_{\mathbb{R}} z \nu(dz)$. On pose $\mathscr{F}_t = \sigma(\Pi \cap ([0,t] \times \mathbb{R}))$ si bien que $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$ est une filtration par rapport à laquelle $(Z_t)_{t\geq 0}$ est adapté. Montrer qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que $(Z_t - at)_{t\geq 0}$ soit une $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale.

3. On suppose que $\int_{\mathbb{R}} z^2 \nu(dz) < \infty$. Montrer que $\mathbf{E}[Z_t^2] < \infty$ et calculer cette quantité en fonction de t, θ, m_1 et $m_2 = \int_{\mathbb{R}} z^2 \nu(dz)$. Montrer qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que
$$\big((Z_t - at)^2 - bt \big)_{t \geq 0}$$
soit une $(\mathscr{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale. □

Exercice IV.4.2 (*) Toutes les variables sont définies sur un même espace mesurable $(\Omega, \mathscr{F})$. Soient $\mathscr{E}_n : \Omega \to \mathbb{R}_+$ et $U_n : \Omega \to]-1, 1[$, $n \in \mathbb{N}^*$, une suite de de variables aléatoires. On pose

$$T_n = \mathscr{E}_1 + \ldots + \mathscr{E}_n \quad \text{et} \quad \Pi = \big\{ (T_n, U_n) \, ; \, n \in \mathbb{N}^* \big\} \, .$$

On fixe $c \in \mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, on pose

$$N_t = N_{[0,t]\times\mathbb{R}}(\Pi) \quad \text{et} \quad Z_t = \sum_{1 \leq n \leq N_t} U_n - ct \, .$$

Soit $\mathbf{P}$, une loi de probabilité sur $(\Omega, \mathscr{F})$. On suppose que sous $\mathbf{P}$, les variables $\mathscr{E}_n$ et U_n, $n \in \mathbb{N}^*$ sont mutuellement indépendantes, que les $\mathscr{E}_n$ suivent une loi exponentielle de paramètre θ et que les U_n ont même loi notée ν. On fixe les paramètres suivants

$$\mu, c \in \mathbb{R}, \quad r = \text{taux d'intérêt fixe}, \quad m_2 = \int z^2 \nu(dz) < \infty\,, \quad m_1 = \int z\nu(dz), \quad \rho \in]-1,1[\,.$$

On note $\mathscr{F}_t = \sigma(\Pi \cap ([0,t] \times \mathbb{R}))$, $t \in \mathbb{R}_+$. On note $(S_t)_{t \geq 0}$ le prix de l'actif qui suit l'équation

$$dS_t = \mu S_{t-}\, dt + S_{t-} dZ_t \quad \text{et} \quad S_0 = s_0 > 0\,.$$

On note $\widetilde{S}_t = e^{-rt} S_t$, le prix actualisé. On note aussi $(L_t)_{t \geq 0}$, la solution à variation bornée, positive de

$$dL_t = -\rho L_{t-} dZ_t \quad \text{et} \quad L_0 = 1\,.$$

1. Calculer explicitement S_t, $\widetilde{S}_t$ et L_t. Calculer
$$\mathbf{E}\big[\widetilde{S}_{t+t_0} \,\big|\, \mathscr{F}_{t_0}\big] \quad \text{et} \quad \mathbf{E}\big[L_{t+t_0} \,\big|\, \mathscr{F}_{t_0}\big]\,.$$

2. Quelle equa-diff (version variation bornée) satisfait $(\widetilde{S}_t)_{t \geq 0}$?

3. On pose $L^*_t = L_t/\mathbf{E}[L_t]$, $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que sous $\mathbf{P}$, $(L^*_t)_{t \geq 0}$ est une $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$-martingale strictement positive. On définit une mesure $\mathbb{Q}_T$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ en posant
$$\mathbb{Q}_T(B) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_B L^*_T]\,.$$
Montrer que $\mathbb{Q}_T$ est une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbf{P}$ et que $\mathbf{P}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{Q}_T$. On note $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}_T}$ l'espérance sous $\mathbb{Q}_T$ et on rappelle que
$$\mathbf{E}_{\mathbb{Q}_T}[Y] = \mathbf{E}[Y L^*_T]\,.$$

4. On pose $\Pi_T = \Pi \cap ([0,T] \times \,]-1,1[\,)$. Soit $f : [0,T] \times \,]-1,1[\, \to \mathbb{R}_+$, une fonction mesurable. Calculer $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}_T}[\exp(-N_f(\Pi_T))]$. En déduire que Π_T sous $\mathbb{Q}_T$ est un nuage Poissonnien sur $[0,T] \times \,]-1,1[$ d'intensité $\theta^* \ell(\,\cdot \cap [0,T]) \otimes \nu^*(dz)$, où on précise le paramètre θ^* et la loi de probabilité ν^* en fonction des paramètres.

5. Quelles sont les conditions sur ρ pour que sous $\mathbb{Q}_T$, $(\widetilde{S}_t)_{0 \leq t \leq T}$ soit une $(\mathscr{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$-martingale ?

6. Soit $\phi :]-1,1[\, \to \,]-1,\infty[\,$, une fonction mesurable. On pose
$$\Lambda_t = e^{-qt} \prod_{1 \leq n \leq N_t} (1 + \phi(U_n))\,.$$
avec la convention qu'un produit sur un ensemble d'indices vide est pris égal à 1. Ici, la constante q est choisie telle que $(\Lambda_t)_{t \geq 0}$ soit une $(\mathscr{F}_t)_{t \geq 0}$-martingale. Préciser q.

7. On définit une mesure $\mathbb{Q}'_T$ sur $(\Omega, \mathscr{F})$ en posant
$$\mathbb{Q}'_T(B) = \mathbf{E}[\mathbf{1}_B \Lambda_T]\,.$$
Montrer que $\mathbb{Q}'_T$ est une probabilité absolument continue par rapport à $\mathbf{P}$ et que $\mathbf{P}$ est absolument continue par rapport à $\mathbb{Q}'_T$. On note $\mathbf{E}_{\mathbb{Q}'_T}$ l'espérance sous $\mathbb{Q}'_T$.

8. Montrer que Π_T sous $\mathbb{Q}'_T$ est un nuage Poissonnien sur $[0,T]\times\,]-1,1[$ d'intensité $\theta'\ell(\cdot\cap[0,T])\otimes\nu'(dz)$, où on précise le paramètre θ' et la loi de probabilité ν'.

9. Quelles conditions ϕ doit satisfaire pour que sous $\mathbb{Q}'_T$, $(\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ soit une $(\mathscr{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-martingale ?

10. On prend $\nu(dz) = \frac{1}{2}\delta_{-1/2}(dz) + \frac{1}{2}\delta_{1/2}(dz)$ et on suppose que $\mu = c$. Montrer qu'il existe plusieurs probabilités équivalentes à $\mathbf{P}$ telles que sous chacunes ces probabilités, $(\widetilde{S}_t)_{0\leq t\leq T}$ soit une $(\mathscr{F}_t)_{0\leq t\leq T}$-martingale. $\square$

Index