Feuille de TD n.11 de IPD, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 1. Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $B = (B_t)_{0 \leq t}$ un mouvement brownien standard. On se place dans les conditions habituelles et on notera $(\mathcal{F}_t)_{T \geq t \geq 0}$ la filtration naturelle (complétée) de B, on supposera de plus que que $\mathcal{F}_T = \mathcal{F}$.
On rappelle que dans ces conditions $\mathcal{F}_0$ est la tribu triviale complétée par tous les $\mathbb{P}$-négligeables.

1. Soit Z une v.a. $\mathcal{F}_T$-mesurable et de carré intégrable, on note m sa moyenne. On considère $M = (M_t)_{T \geq t \geq 0}$ le processus défini par $M_t = \mathbb{E}(Z|\mathcal{F}_t)$ pour tout $t \in [0, T]$.
1.1. Que vaut M_0? Quel est M_T?
1.2. Montrer que M est une martingale de carré intégrable.
1.3. Justifier qu'il existe un processus H dont on précisera les propriétés tel que $M_t = M_0 + \int_0^t H_s \, dB_s$.
1.4. En déduire $\langle M \rangle_t$.
2. À partir d'ici on suppose que $Z = \exp((r - \sigma^2/2)T + \sigma B_T)$ où $r \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.
2.1. Calculer explicitement M_t, $\mathbb{E}(M_t)$, $\mathbb{E}(M_t^2)$ et $\mathbb{E}(M_t^4)$.
2.2. Ecrire la décomposition d'Itô de M.
2.3. En déduire $\langle M \rangle_t$ justifier qu'il s'agit bien d'un processus croissant adapté et calculer $\mathbb{E}(\langle M \rangle_t)$.
2.4. On pose $N_t = M_t^2 - \langle M \rangle_t$, quelle est la nature du processus $N = (N_t)_{0 \leq t \leq T}$?
2.5. Calculer $\mathbb{E}(N_t)$ et retrouver $\mathbb{E}(\langle M \rangle_t)$.
2.6. Trouver la décomposition d'Itô de N_t et en déduire $\langle N \rangle_t$ et $\mathbb{E}(\langle N \rangle_t)$.

Exercice 2. Soient W un $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$-M.B.S. et $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ et $\sigma(t) : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^{*,+}$ des fonctions déterministes continues sur $[0, T]$. On considère le processus S défini pour tout $t \in [0, T]$

$$S_t = s_0 \exp\left(\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{1}{2}\sigma^2(s) \right) \, ds + \int_0^t \sigma(s) \, dW_s \right),$$

où $s_0 > 0$ est une constante.
(a) Quelle est la loi de $\log(S_t)$, préciser ses paramètres. En déduire la loi de S_t en précisant son espérance et sa variance.
(b) Trouver l'équation différentielle satisfaite par le processus $S = (S_t)_{0 \leq t \leq T}$.
(c) Montrer qu'il existe $\widetilde{W}$ un $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$-M.B.S sous une probabilité $\mathbb{Q}_T$ que l'on précisera tel que

$$dS_t = \sigma(t) S_t \, d\widetilde{W}_t.$$

(d) En déduire que S est une martingale sous $\mathbb{Q}_T$. Donner $\langle S \rangle_t$ et $\mathbb{E}(\langle S \rangle_t)$.

Exercice 3. Put Européen.
Un put européen de strike K, de maturité T sur le titre S est une option de vente de payoff $h = (K - S_T)_+$. Calculer son prix et sa couverture dans le modèle de Black-Scholes-Merton sans utiliser la formule de parité Call-Put.