

Feuille de TD n.8 de IPD, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 1. Soient W un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -M.B.S. En utilisant la formule d'Itô trouver les équations différentielles stochastiques vérifiées par :

- 1) $X_t = \sin(W_t)$;
- 2) $Y_t = (W_t)^n$, où $n \geq 2$;
- 3) $Z_t = \exp(W_t - t/2)$;
- 4) $V_t = t^p(W_t)^n$, où $p \geq 1$ et $n \geq 2$.

Exercice 2.

- a) Calculer $\mathbb{E}(\sin(W_t))$ par calcul direct puis en utilisant l'EDS obtenue dans l'exercice 1.
- b) En utilisant l'EDS de l'exercice 1 calculer $\mathbb{E}(W_t^n)$. Indication on pourra utiliser que

$$\int_0^t \int_0^{t_{n-1}} \int_0^{t_{n-2}} \cdots \int_0^{t_1} dt_0 \cdots dt_{n-2} dt_{n-1} = \frac{t^n}{n!}.$$

- c) Déduire de l'exercice 1 que le processus (Z_t) est une (\mathcal{F}_t) -martingale et un processus d'Itô. Calculer $\langle Z \rangle_t$.

Exercice 3. Soient W un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -M.B.S. et $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$ des paramètres. On considère le processus $S = (S_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$S_t = s_0 \exp \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma W_t \right),$$

où $s_0 > 0$ est une constante.

- (a) Quelle est la loi de S_t ?
- (b) Montrer que

$$S_t = s_0 + \int_0^t \mu S_s \, ds + \int_0^t \sigma S_s \, dW_s,$$

et retrouver $\mathbb{E}(S_t)$.

- (c) Dans quel cas le processus S est-il une (\mathcal{F}_t) -Martingale?

Exercice 4. Soient W un $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -M.B.S. et $\mu = (\mu_t)_{t \geq 0}$ et $\sigma = (\sigma_t)_{t \geq 0}$ où $\sigma_t > 0$, sont des processus $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -adaptés. On considère le processus $S = (S_t)_{t \geq 0}$ défini par

$$S_t = s_0 \exp \left(\int_0^t \left(\mu_s - \frac{\sigma_s^2}{2} \right) \, ds + \int_0^t \sigma_s \, dW_s \right),$$

où $s_0 > 0$ est une constante.

- (a) Ce processus est-il toujours défini? Lorsque c'est le cas montrer que

$$S_t = s_0 + \int_0^t \mu_s S_s \, ds + \int_0^t \sigma_s S_s \, dW_s.$$

- (b) Donner une condition suffisante pour que S soit une $(\mathcal{F}_t)_{t \geq 0}$ -Martingale?