

PSAF- Feuille d'exercices 3

Exercice 1.

Dans cet exercice X et Y sont deux v.a. définies sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ espace de probabilités, et \mathcal{H} est une sous-tribu de \mathcal{F} . On suppose toujours que $\mathbb{E}|X| < \infty$. On se propose de montrer trois propriétés simples de l'espérance conditionnelle.

1. Supposons que X est \mathcal{H} -mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = X \quad \text{p.s.}$$

2. Supposons que Y est \mathcal{H} -mesurable et bornée. Montrer que

$$\mathbb{E}[YX|\mathcal{H}] = Y\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] \quad \text{p.s.}$$

NB: la condition 2) du théorème-définition 2.2.1 du cours peut être remplacée de façon équivalente par $\forall Z$ v.a. \mathcal{H} -mesurable et bornée, $\mathbb{E}[Z\mathbb{E}[X|\mathcal{H}]] = \mathbb{E}[ZX]$.

3. Supposons maintenant que Y est \mathcal{H} -mesurable mais non bornée (mais telle que $\mathbb{E}|XY| < \infty$). Montrer qu'on a le même résultat.
4. Supposons que X est indépendante de \mathcal{H} (i.e. $\forall A \in \mathcal{H}$ alors $\mathbf{1}_A$ est indépendante de X). Montrer que

$$\mathbb{E}[X|\mathcal{H}] = \mathbb{E}[X] \quad \text{p.s.}$$

Exercice 2.

Soit X définie sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ avec $\mathbb{E}|X| < \infty$, et \mathcal{H} une sous-tribu de \mathcal{F} .

1. Montrer que $\mathbb{E}(X|\mathcal{H})$ est intégrable.
2. Montrer que si $X \geq 0$ p.s. alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{H}) \geq 0$ p.s. (monotonie de l'espérance conditionnelle).

Exercice 3 (ex. 2.1.1 du cours).

On en rappelle le contexte: X et Y sont deux variables aléatoires discrètes, à valeurs respectivement dans E et E' dénombrables. On suppose pour simplifier le raisonnement et pour fixer les idées que E' est équipé de la tribu $\mathcal{E}' = \mathcal{P}(E')$. On a $\mathbb{E}(X|Y)$ définie par $\mathbb{E}(X|Y) = \varphi(Y)$ où

$$\varphi(y) := \mathbb{E}(X|\{Y = y\}) = \frac{\mathbb{E}[X\mathbf{1}_{\{Y=y\}}]}{\mathbb{P}(Y = y)}, \quad y \in E',$$

(on ne note pas $\mathbb{E}(X|Y = y)$ pour bien faire la différence avec la nouvelle notion d'espérance conditionnelle; mais ces quantités vont être les mêmes!). Montrer que

1. La v.a. $\mathbb{E}(X|Y)$ est $\sigma(Y)$ -mesurable.
2. Pour tout A dans $\sigma(Y)$ on a $\mathbb{E}[\mathbf{1}_A \mathbb{E}(X|Y)] = \mathbb{E}[\mathbf{1}_A X]$.

Exercice 4.

Considérons un couple de variable aléatoires (X, Y) de densité pour $x, y > 0$

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{y} e^{-y-x/y}.$$

1. Déterminer la loi marginale de Y
2. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $\{Y = y\}$.
3. En déduire l'espérance conditionnelle.
4. Vérifier que cette espérance conditionnelle est d'espérance X .

Exercice 5.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités et \mathcal{G} une sous-tribu de \mathcal{F} . Montrer la formule de Bayes : pour tout $G \in \mathcal{G}$

$$\mathbb{P}(G|A) = \frac{\int_G \mathbb{P}(A|\mathcal{G}) \, d\mathbb{P}}{\int_{\Omega} \mathbb{P}(A|\mathcal{G}) \, d\mathbb{P}}.$$

Exercice 6.

Montrer le Lemme de Fatou : Soit X_1, X_2, \dots une suite de v.a. non négatives alors

$$\mathbb{E}(\liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n | \mathcal{F}) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n | \mathcal{F}) \text{ p.s.}$$