Chapitre 1 : Approche Markowitz et CAPM

① Notations

* Performance → moyenne des rendements
* Risque → Variance

- 2 dates : $t=0$ et $t=1$
- N actifs risqués et 1 ASR $(1 \to 1+r)$
- $P_{i,t}$ = Prix de l'actif i à la date t
- $r_i = \frac{P_{i,1}}{P_{i,0}} - 1 =: y_i - 1$ où $y_i = \frac{P_{i,1}}{P_{i,0}}$, $Y = (y_1, .., y_N)'$ vecteur aléatoire

- $\mathbb{E}[Y] := \mu$
- $Var(Y) := \Omega \in S_N^{+}(\mathbb{R})$

Ptf contenant a_0 unités de l'ASR et a_i unités de chaque actifs i, V_t sa valeur en t

$\Rightarrow V_t = a_0 P_t^{ASR} + a' P_t$ où $a = (a_1, .., a_N)'$ vecteur des positions

$P_t = (P_{1,t}, .., P_{N,t})'$ vecteur des prix

$$\boxed{\begin{aligned} V_0 &= a_0 + a' P_0 \\ V_1 &= a_0(1+r) + \sum_{i=1}^{N} a_i P_{i,1} = a_0(1+r) + \sum_{i=1}^{N} a_i P_{i,0} y_i = a_0(1+r) + a' \operatorname{diag}[P_0] Y \end{aligned}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \mathbb{E}[V_1] &= a_0(1+r) + a' \operatorname{diag}[P_0]\mu \\ Var(V_1) &= a' \operatorname{diag}[P_0]\, \Omega\, \operatorname{diag}[P_0] a \end{aligned}}$$

② Optimisation moyenne-variance

$$\boxed{(E) \quad \max_{(a_0, a)} \mathbb{E}[V_1(a_0,a)] \ \text{sc} \ \begin{cases} Var(V_1(a_0,a)) = \sigma^2 \\ V_0(a_0,a) = v \end{cases}}$$

$$\Leftrightarrow (E) \quad \max_{(a_0, a)} a_0(1+r) + a' \operatorname{diag}[P_0]\mu \ \text{sc} \ \begin{cases} a' \operatorname{diag}[P_0]\, \Omega\, \operatorname{diag}[P_0] a = \sigma^2 \\ a_0 + a' P_0 = v \end{cases}$$

Notons $\boxed{w_a = \operatorname{diag}[P_0] a}$ le vecteur des compositions en € du ptf en actifs risqués.

$\Rightarrow a_0 + a' P_0 = v \Leftrightarrow a_0 + w_a' e = v$ où $e = (1, .., 1)'$

$$(E') \quad \max_{w_a} (v - w_a' e)(1+r) + w_a' \mu \ \text{sc} \ w_a' \Omega w_a = \sigma^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(E') \quad \max_{w_a} w_a' \tilde{\mu} \ \text{sc} \ w_a' \Omega w_a = \sigma^2 \ \text{où} \ \tilde{\mu} = \mu - (1+r)e}$$

③ Résolution du problème

$$\mathcal{L}(w_a,\lambda) = w_a'\tilde{\mu} - \frac{\lambda}{2}\left(w_a'\Omega w_a - \sigma^2\right)$$

CPO

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_a} = \tilde{\mu} - \lambda\Omega w_a = 0 \\ \dfrac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda} = -\dfrac{1}{2}\left(w_a'\Omega w_a - \sigma^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w_a = \dfrac{1}{\lambda}\Omega^{-1}\tilde{\mu} \quad (1) \\ w_a'\Omega w_a = \sigma^2 \quad (2) \end{cases}$$

$(w_a = \mathrm{diag}[P_0]a$

$$(1) \Rightarrow \quad a = \frac{1}{\lambda}\mathrm{diag}[P_0]^{-1}\Omega^{-1}\tilde{\mu}$$

$$a_0 = v - a'P_0 = v - \frac{1}{\lambda}\tilde{\mu}'\Omega^{-1}e$$

$$(2) \Rightarrow \quad \frac{1}{\lambda^2}\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\Omega\,\Omega^{-1}\tilde{\mu} = \sigma^2 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\tilde{\mu}\right)^{1/2}$$

Ainsi la frontière efficient est constituée des ptf tq

$$\boxed{\begin{aligned} a &= \frac{1}{\lambda}\mathrm{diag}[P_0]^{-1}\Omega^{-1}\tilde{\mu} \\ a_0 &= v - \frac{1}{\lambda}\tilde{\mu}'\Omega^{-1}e \\ \lambda &= \frac{1}{\sigma}\left(\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\tilde{\mu}\right)^{1/2} \end{aligned}}$$

$\lambda \sim$ Paramètre d'aversion au risque

④ Caractérisation de la frontière efficient

Pour un ptf efficient on a :

- $\mathbb{E}[V_1(a_0,a)] = a_0(1+r) + a'\,\mathrm{diag}[P_0]\mu$

$$= v(1+r) - \frac{1}{\lambda}(1+r)\tilde{\mu}'\Omega^{-1}e + \frac{1}{\lambda}\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\mu \qquad \tilde{\mu} = \mu - (1+r)e$$

$$= v(1+r) + \frac{1}{\lambda}\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\tilde{\mu}$$

- $\sqrt{\mathrm{Var}(V_1)} = \sigma = \dfrac{1}{\lambda}\left(\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\tilde{\mu}\right)^{1/2}$

$\Rightarrow$ En paramétrant par λ : $\boxed{\mathbb{E}[V_1(\lambda)] = v(1+r) + \sqrt{\mathrm{Var}(V_1)}\left(\tilde{\mu}'\Omega^{-1}\tilde{\mu}\right)^{1/2}}$

$\Rightarrow$ Dans le plan (écart-type / espérance) la frontière efficiente est une droite.

5 Théorème de séparation en deux fonds

Tout ptf efficient s'écrit comme combinaison de deux portefeuilles particulier : P_0 et P^* où P_0 est l'ASR et P^* un portefeuille ne contenant que des actifs risqués.

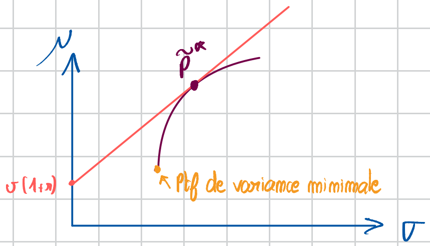
$$\boxed{P = \alpha_0(\lambda) P_0 + \alpha^*(\lambda) P^*}$$

- $P_0 = ASR$
- $P^* = \text{diag}[B]^{-1} \Omega^{-1} \tilde{\mu}$
- $\alpha^*(\lambda) = \frac{1}{\lambda}$
- $\alpha_0(\lambda) = \sigma - \frac{1}{\lambda} \tilde{\mu} \Omega^{-1} e$

6 Cas sans ASR

- Dans le cas sans ASR, dans le plan écart-type / espérance, la frontière efficience est une hyperbole

Dans le pb avec ASR, on peut toujours trouver un ptf efficient qui ne contient aucun ASR ($a_0 = 0$). Ce ptf est donc efficient dans les deux problèmes => il appartient donc aux deux frontières efficientes. On le note $\tilde{p}^*$
$\tilde{p}^*$ est le ptf tangent à l'hyperbole passant par le point $(0, \sigma(1+r))$



7 Ratios de sharpe

Sharpe des marchés : $S = \sqrt{\tilde{\mu}' \Omega^{-1} \tilde{\mu}}$

Ratio de sharpe d'un ptf : $S(a) = \dfrac{\mathbb{E}[V_1(a_0, a) - (1+r)\sigma]}{\sqrt{Var(V_1(a_0,a))}} = \dfrac{w_a' \tilde{\mu}}{(w_a' \Omega w_a)^{1/2}}$

- Tous les ptf efficient ont le même ratio de sharpe, à savoir le sharpe du marché. De plus $\forall$ ptf, (a_0, a), $S(a) \leq S$.
Ainsi un ptf est efficient <=> Son ratio de sharpe = sharpe du marché

Preuve : $\Omega \in S_n^{++}(\mathbb{R}) \Rightarrow \exists R \in S_n^{++}(\mathbb{R})$ tq $R = \Omega^{1/2}$

$$S(a) = \frac{w_a' \tilde{\mu}}{\sqrt{w_a' \Omega w_a}} = \frac{w_a' \Omega^{1/2} \Omega^{-1/2} \tilde{\mu}}{\sqrt{w_a' \Omega w_a}} = \frac{(\Omega^{1/2} w_a)'(\Omega^{-1/2} \tilde{\mu})}{\sqrt{w_a' \Omega w_a}} \underset{CS}{\leq} \frac{\sqrt{w_a' \Omega w_a \tilde{\mu}' \Omega \tilde{\mu}}}{\sqrt{w_a' \Omega w_a}} = \sqrt{\tilde{\mu}' \Omega \tilde{\mu}} = S$$

Chapitre 2 : Le CAPM

① Identification du ptf P^*

Hypothèse : $\Omega^{-1}\tilde{\mu} > 0$ i.e toutes les composantes de P^* sont positives $\left(P^* = diag[P_0]\,\Omega^{-1}\tilde{\mu}\right)$

· I investisseurs λ_i son aversion pour le risque. La demande en actifs risqués de l'agent i, s'écrit

$$a_i = \frac{1}{\lambda_i} diag[P_0]^{-1}\Omega^{-1}\tilde{\mu}$$

· La demande totale en actifs risques est

$$\sum_{i=1}^{I} \frac{1}{\lambda_i}\left(diag[P_0]^{-1}\Omega^{-1}\tilde{\mu}\right) = \frac{1}{\bar{\lambda}} P^* \quad \text{où} \quad \bar{\lambda} = \left(\sum_{i=1}^{I}\frac{1}{\lambda_i}\right)^{-1}$$

· Hypothèse d'équilibre du marché i.e offre = demande.

$$\Rightarrow \frac{1}{\bar{\lambda}} P^* = \text{ensemble des titres sur le marché.}$$

Proposition : P^* est proportionnel au ptf de marché i.e le ptf contenant tous les actifs risqués.
De plus, le prix des actifs s'ajustent de façon à obtenir $a^m = \frac{1}{\bar{\lambda}} diag[P_0]^{-1}\Omega^{-1}\tilde{\mu}$.

② Equations du CAPM

· $Z = Y - (1+r)e$ Vecteur des rendements net des actifs risqués

· $\tilde{\mu} = \mu - (1+r)e$

· $Z(a) =$ Vecteur de rentabilité net de la partie risquée d'un ptf de composition a en actifs risqués.

$$\hookrightarrow Z(a) = \frac{a'P_1}{a'P_0} - (1+r) = \frac{a' diag[P_0](Z+(1+r)e)}{a' diag[P_0]e} - (1+r) = \frac{a' diag[P_0]Z}{a' diag[P_0]e} = \frac{w_a' Z}{w_a' e}$$

$$\Rightarrow \boxed{Z(a) = \frac{w_a' Z}{w_a' e}}$$

En particulier, pour un ptf efficient, on a $w_a^* = \frac{1}{\lambda}\Omega^{-1}\tilde{\mu} \Rightarrow \boxed{Z(a^*) = \frac{\tilde{\mu}'\Omega^{-1}Z}{\tilde{\mu}'\Omega^{-1}e}}$

Proposition : $Z = \beta Z(a_m^*) + \varepsilon$

· a_m^* : le ptf de marché

· β le vecteur des Bêtas i.e $\beta = \frac{Cov(Z, Z(a_m^*))}{Var(Z(a_m^*))}$

· $\mathbb{E}[\varepsilon] = 0$ et $Cov(\varepsilon, Z(a_m^*)) = 0$

Rq : C'est comme une régression linéaire : $Z_i = \alpha_i + \beta_i Z(a_m^*) + \varepsilon_i$ où ici $\alpha_i = 0$

Corollaire : $\forall i,\ \mathbb{E}[Z_i] = \beta_i \mathbb{E}[Z(a_m^*)]$

$$Var(Z_i) = \beta_i^2 Var(Z(a_m^*)) + \underbrace{\sigma_i^2}_{Var(\varepsilon_i)}$$

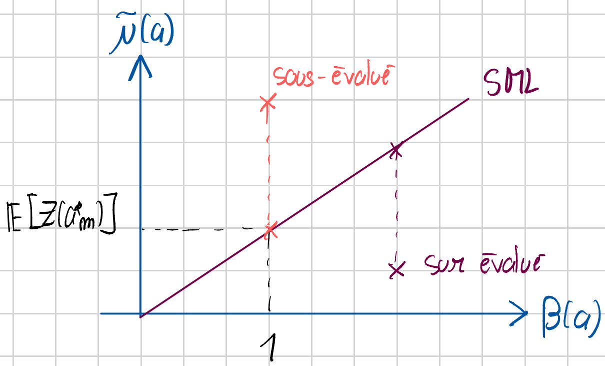
③ Commentaires sur le CAPM

1 L'espérance du rendement d'un titre ne dépends que de son beta et de l'espérance de rendement du ptf de marché ⇒ l'idée selon laquelle plus il y a de risque, plus il y a d'espérance de rendement est fausse. En effet, si on prends 2 actifs avec le même beta mais des $\sigma_i^2 \neq$, ils auront le même rendement espéré.
⇒ Le rendement d'un actif ne dépends que du risque systémique

$$Var(Z_i) = \underbrace{\beta_i^2 \, Var(Z(a^*_m))}_{\substack{\text{Risque systémique} \\ = \text{dépendant de l'économie}}} + \underbrace{\sigma_i^2}_{\substack{\text{Risque idiosyncratique} \\ = \text{propre à l'actif } i \text{ et décorélé} \\ \text{des rendements de l'économie}}}$$

Le Risque idiosyncratique est diversifiable et non rémunéré
Le Risque systémique est non diversifiable et rémunérateur car pour le réduire il faut diminuer le beta du ptf mais on perds alors en espérance de rendement.

2 Le graphique représentant les $(\beta(a), \bar{\mu}(a))$ est une droite de coefficient directeur $\mathbb{E}[Z(a^*_m)]$.
Elle est appelée Security Market Line (SML)



Dans le CAPM, à l'équilibre, tous les ptf sont sur cette droite.
Hors équilibre, les ptf peuvent être sous/sur-évalué.

④ Tester le CAPM

Pour chaque AR, on est dans le cadre de la regression linéaire : $Z_{i,t} = \alpha_i + \beta_i Z_{i,t}(a^*_m) + \varepsilon_{i,t}$
- $\mathbb{E}[\varepsilon_{i,t}] = 0$
- $\mathbb{E}[\varepsilon_{i,t} \mid Z_{i,t}(a^*_m)] = 0$
- $\mathbb{E}[\varepsilon_{i,t_k} \varepsilon_{i,t_\ell}] = \delta_{k,\ell}$

Cadre des MCO ⇒ on peut estimer β_i et tester la nullité de α_i ⇒ test du CAPM

En pratique, le CAPM étant valable pour tous les actifs, on considère plutôt la régression empilées.
⇒ $Var(\varepsilon)$ n'est plus diagonale
⇒ on utilise les MCQG plutôt que les MCO $\hat{\theta}_{MCQG} = (X' \hat{\Omega}_c^{-1} X)^{-1} X' \hat{\Omega}_c^{-1} Y$

⑤ Estimation de Ω

But : Estimer la matrice de variance-covariance des rendements Ω

Estimateur naturel : Corrélation empirique : $E = \frac{1}{m}\sum_{t=1}^{m} y_t y_t'$

3 Risques :

i) Risque in sample : $R^2_{In} = \omega_E' E \omega_E$ où ω_E = poids markowitz obtenus avec la matrice E

ii) Vrai risque : $R^2_{True} = \omega_\Omega \Omega \omega_\Omega$ où ω_Ω : Poids optimaux théoriques

iii) Risque out of sample : $R^2_{out} = \omega_E \Omega \omega_E$
(Risque que l'on va subir)

Decomposition de la variance :

On note (λ_k, V^k) les vp et $\vec{vp}$ de Ω avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$

On a
$$\Omega = \sum_{k=1}^{N} \lambda_k V^k V^{k'}$$
$$E = \sum_{k=1}^{N} \tilde{\lambda}_k \tilde{V}^k \tilde{V}^{k'}$$

Idée On ne fait pas confiance aux vp trop petite $\Rightarrow$ on pose $\lambda^k_{clean} = a$ pour $k > k^*$, $\lambda^k_{clean} = \tilde{\lambda}^k$ pour $k < k^*$

$\Rightarrow E_{clean} = \sum_{k=1}^{k^*} \tilde{\lambda}_k \tilde{V}^k \tilde{V}^{k'} + a I_{N-k}$

Comment trouver k^* ? $\rightarrow$ Théorème de Marcenko-Pastur

Théorème de Marceko-Pastur Si $N, T \to +\infty$ tq $\frac{N}{T} = q < 1$, alors on a la cv de la mesure empirique associée aux vp de E vers la loi de Marcenko-Pastur qui a une densité $\rho(\lambda)$

$\Rightarrow$ On ne fait pas confiance aux vp $\leq \lambda_+ \Rightarrow k^*$ est le nombre de vp $> k^*$

Chapitre 3 : Analyse en composantes principales (ACP)

But : Représenter de façon parcimonieuse et pertinente un nuage de points vivant dans un espace de grande dimension.

Données : $X \in \mathcal{M}_{n,p}$ — Une ligne $(x_i^1, \dots, x_i^p)$ = un individu
Une colonne $(x_1^j, \dots, x_n^j)$ = une variable

On considère la version centrée réduite des variables, $\bar{x}^j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^j \Rightarrow$ $\boxed{x_i^j = \dfrac{x_i^j - \bar{x}^j}{\sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i^j - \bar{x}^j)^2}}}$

Espace des individus

- On considère la distance euclidienne entre les individus : $d^2(x_i, x_\ell) = \|x_i - x_\ell\|^2 = \sum_{j=1}^{p}(x_i^j - x_\ell^j)^2$
- Le centre de gravité du nuage est $\vec{0}$ (individu moyen)
- On appelle inertie du nuage sa dispersion autour du centre de gravité

$$I = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(\vec{0}, x_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(x_i^j)^2 = p = \mathrm{Tr}(V) \quad \text{où} \quad V = \frac{1}{n}X'X$$
la matrice de variance-covariance entre les variables

- On appelle inertie portée par un sev F : $I_F = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d^2(\vec{0}, P_F x_i)$ avec $P_F x_i$ la proj $\perp$ de x_i sur F

Rq : Dans le cas d'un sev de dim 1 porté par $\vec{u}$ tel que $\|\vec{u}\| = 1$, $I_{\vec{u}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \langle \vec{u}, x_i \rangle^2$

ACP : Pour k fixé, on cherche le sev F_k de dimension $k < p$ tel qu'après projection, le nuage de points soit le moins déformé possible. i.e on cherche le sev F_k d'inertie maximale

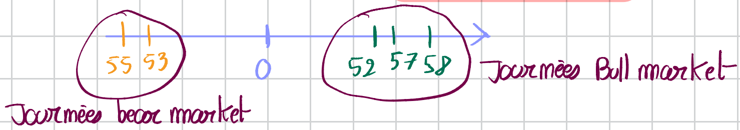
Connaissant F_k, on montre que F_{k+1} est de la forme $F_k \oplus^{\perp} u$ avec u l'axe orthogonale à F_k d'inertie maximum.
$\Rightarrow$ pour trouver un espace F_k, on cherche les axes les uns après les autres.

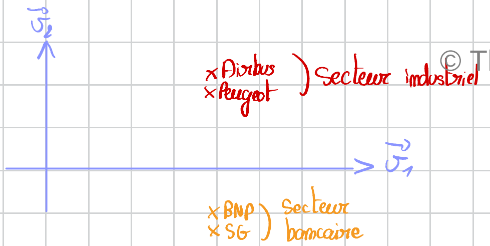
Théorème : Le sev F_k d'inertie max est $\mathrm{Vect}(\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_k)$. L'inertie associée est $\sum_{j=1}^{k} \lambda_j$ où $\vec{u}_j$ et λ_j sont les vp de $V = \frac{1}{n}X'X$ où $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots$

Projection des individus sur un exemple :

- individus = ligne = jour de trading
- variables = colonne = Rendement des actifs

Axe 1 = "rendement > 0" i.e Axe 1 = Bull ou Bear

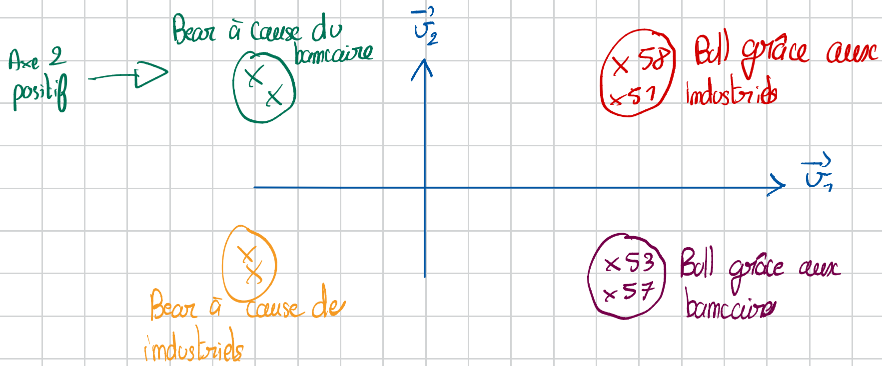




Axe 2 oppose secteur industriel et bancaire

Projection 2D des individus :

- L'info donnée par l'axe 1 est prioritaire par rapport à l'axe 2 !!



Annexe : Resolution sans ASR

$$(E)\quad \max_a \mathbb{E}[V_1(a)] \quad sc \quad \begin{cases} Var(V_1(a)) \leq \sigma_0^2 \\ V_0(a) = v \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \max_a a' diag[P_0]\mu \quad sc \begin{cases} a' diag[P_0]\,\Omega\, diag[P_0]\, a = \sigma^2 \\ a' P_0 = v \end{cases}$$

Notons $\boxed{w_a = diag[P_0]\, a}$. Ainsi $a' P_0 = v \Leftrightarrow \boxed{w_a' e = v}$

$$\Leftrightarrow (E')\quad \max_a w_a'\mu \quad sc \begin{cases} w_a'\Omega w_a = \sigma^2 \\ w_a' e = v \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{(E'')\quad \min_a w_a'\Omega w_a \quad sc \begin{cases} w_a'\mu \geq \mu_0 \\ w_a' e = v \end{cases}}$$

Resolution du Lagrangien : $\mathcal{L}(a,\lambda_1,\lambda_0) = w_a'\Omega w_a - \lambda_1(w_a'\mu - \mu_0) - \lambda_0(w_a'e - v)$

CPO :

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial a}(a,\lambda_0,\lambda_1) = 2\Omega w_a - \lambda_1\mu - \lambda_0 e = 0 \quad (i)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_0}(a,\lambda_0,\lambda_1) = w_a'e - v = 0 \Rightarrow \boxed{w_a'e = v} \Leftrightarrow \boxed{e'w_a = v} \quad (ii)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1}(a,\lambda_0,\lambda_1) = w_a'\mu - \mu_0 = 0 \Rightarrow \boxed{w_a'\mu = \mu_0} \quad (iii)$$

$$(i)\quad \boxed{w_a = \frac{1}{2}\Omega^{-1}(\lambda_1\mu + \lambda_0 e)}$$

$$e'w_a = v \Rightarrow \frac{1}{2}\left(\lambda_1 \boxed{e'\Omega^{-1}\mu} + \lambda_0 \boxed{e'\Omega^{-1}e}\right) = v$$

$$\begin{cases} e'\Omega^{-1}e = a \\ e'\Omega^{-1}\mu = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow 2v = \lambda_1 b + \lambda_0 a \Rightarrow \boxed{\lambda_0 = \frac{2v - \lambda_1 b}{a}} \quad (*)$$

$$(iii)\quad \mu_0 = \mu'w_a = \frac{\lambda_1}{2}\mu'\Omega^{-1}\mu + \frac{\lambda_0}{2}\overbrace{\mu'\Omega^{-1}e}^{b}$$

$$\Leftrightarrow 2\mu_0 = \lambda_0 b + \lambda_1\mu'\Omega^{-1}\mu$$

$$= \left(\frac{2v - \lambda_1 b}{a}\right)b + \lambda_1\mu'\Omega^{-1}\left(\mu - \frac{be}{a}\right) + \lambda_1 \boxed{\overbrace{\mu'\Omega^{-1}\frac{be}{a}}^{\frac{b^2}{a}}}$$

$$= \frac{2vb}{a} + \lambda_1\mu'\Omega^{-1}\left(\mu - \frac{be}{a}\right)$$

$$= \frac{2vb}{a} + \lambda_1\left(\mu - \frac{be}{a}\right)'\Omega^{-1}\left(\mu - \frac{be}{a}\right) + \lambda_1\underbrace{\frac{b}{a}e'\Omega^{-1}\left(\mu - \frac{be}{a}\right)}_{=0}$$

$$\Rightarrow \mu_0 = \frac{b}{a}v + \frac{\lambda_1}{2}\left\|\mu - \frac{be}{a}\right\|^2_{\Omega^{-1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\lambda_1}{2} = \frac{\mu_0 - \frac{b}{a}v}{\left\|\mu - \frac{be}{a}\right\|^2_{\Omega^{-1}}}} \quad (**)$$

$$w_a = \frac{1}{2}\Omega^{-1}(\lambda_1^*\mu + \lambda_0^* e)$$

$$= \frac{1}{2}\lambda_1^*\Omega^{-1}\mu + \frac{1}{2}\left(\frac{2v - \lambda_1^* b}{a}\right)\Omega^{-1}e$$

$$\boxed{w_a^* = \underbrace{\frac{v}{a}\Omega^{-1}e}_{\pi_a = \text{ptf de variance minimale}} + \underbrace{\frac{1}{2}\lambda_1^*\Omega^{-1}\left(\mu - \frac{be}{a}\right)}_{w_{a,b}}}$$