Feuille de TD n.9 de IPD, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 1. Soit B un mouvement brownien standard sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On considère le processus X défini par $X_t = \mu(t^2 - 2t) + B_t$ pour tous $t \geq 0$. Définissez une probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle X est un MBS.

Exercice 2. Martingale exponentielle.
Soit B un mouvement brownien standard sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Soit $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction déterministe mesurable telle que $\int_0^t h^2(s)\ ds < +\infty$ pour tout $t \geq 0$.
1. Montrer que

$$\mathbb{E}\left[e^{\int_0^t h(s)\ dB_s}\right] = e^{\frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\ ds.}.$$

2. Calculer

$$\mathbb{E}\left[e^{\int_0^t h(u)\ dB_u} \middle| \mathcal{F}_s\right],$$

pour $s \leq t$.
3. En combinant les deux questions précédentes, en déduire que le processus M défini par

$$M_t = \exp\left(\int_0^t h(s)\ dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\ ds\right),$$

pour $t \leq T$, est une martingale.
4. Montrer que M_t est un processus d'Itô et donner sa décomposition.
5. On pose

$$M_t^{-1} = \exp\left(-\int_0^t h(s)\ dB_s + \frac{1}{2}\int_0^t h^2(s)\ ds\right),$$

donner la décomposition d'Itô de M^{-1}. Calculer sa moyenne. Est-ce une martingale?

Exercice 3. Processus d'Itô.
Soit B un mouvement brownien standard. Donner la décomposition d'Itô (si elle existe) des processus suivants

a)

$$X_t = X_0\ e^{(r-\sigma^2/2)t+\sigma B_t} \text{ pour } r > 0 \text{ et } \sigma \in \mathbb{R}.$$

b)

$$X_t = X_0\ e^{-at} + \int_0^t e^{-a(t-s)}\ dB_s \text{ pour } a \in \mathbb{R}.$$

c)

$$X_t = \frac{B_t}{1+t}.$$

d)

$$X_t = B_t - tB_1 \text{ pour } t \in [0,1].$$

e)

$$X_t = B_t^2 - B_t W_t + W_t^2 \text{ où } W \text{ est un MBS indépendant de } B.$$