Critères de l'uniforme intégrabilité

Définition Une famille $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ est dite *uniformément intégrable (U.I.)* si

$$\lim_{C\to+\infty} \sup_{\alpha\in I} \mathbb{E}\left[|X_\alpha|\mathbb{1}_{\{|X_\alpha|>C\}}\right] = 0$$

Proposition S'il existe un réel $p > 1$ tel que $\sup_{\alpha\in I} \mathbb{E}[|X_\alpha|^p] < \infty$ donc $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ est U.I.

Proposition S'il existe une variable aléatoire réelle <u>intégrable</u> Y telle que p.s. $\sup_{\alpha\in I} |X_\alpha| \leq Y$ donc $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ est U.I.

Théorème (Critère de la Vallée Poussin) $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ est U.I. <u>ssi</u> il existe une fonction $\phi(x)$ croissante convexe telle que $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\phi(x)}{x} = \infty$ et $\sup_{\alpha\in I} \mathbb{E}[\phi(|X_\alpha|)] < \infty$.

Proposition Soient $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a.r. intégrables et X_∞ une v.a.r. intégrable. Alors $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$ ssi $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X_\infty$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ est U.I.

Proposition $(X_\alpha)_{\alpha\in I}$ est U.I. ssi $\sup_{\alpha\in I} \mathbb{E}[|X_\alpha|] < \infty$ et pour tout $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que $\forall B \in \mathcal{F},\ \mathbb{P}(B) < \delta$ on a $\sup_{\alpha\in I} \mathbb{E}[X_\alpha \mathbb{1}_B] < \epsilon$.

Proposition Soit ξ une v.a.r. intégrable. Alors $\{\mathbb{E}[\xi\,|\mathcal{G}] : \mathcal{G} \subset \mathcal{F} \text{ sous} - \text{tribu}\}$ est U.I.

Théorèmes de convergence

On considère une suite $(X_n)_{n\geq 1}$ de v.a.r. telle que $X_n \to X_\infty$ p.s.

Théorème Si $X_n \geq 0$ p.s. et $\mathbb{E}X_n < \infty$ alors $\mathbb{E}X_n \to \mathbb{E}X_\infty$ ssi $(X_n)_{n\geq 1}$ est U.I.

Théorème de convergence monotone (Beppo Levi) Si $(X_n)_{n\geq 1}$ est positive et croissante alors $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_\infty$.

Théorème de convergence dominée S'il existe Y intégrable donc $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n = \mathbb{E}X_\infty$.

Lemme de Fatou Si $X_n \geq 0$ donc $\mathbb{E} \liminf_{n\to\infty} X_n \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}X_n$.

Convergence des martingales

On ne considère que des (sur)-martingales continues.

Théorème Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une sur-martingale. Si $\sup\limits_{t\geq 0} \mathbb{E}[M_t^-] < \infty$ alors il existe $M_\infty \geq 0$ intégrable telle que $M_t \to M_\infty$ p.s.

Corollaire Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une sur-martingale positive. Alors il existe $M_\infty \geq 0$ intégrable telle que $M_t \to M_\infty$ p.s.

Théorème Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale. S'il existe $p > 1$ tel que $\sup\limits_{t>0} \mathbb{E}[|M_t|^p] < \infty$ alors il existe $M_\infty \in L^p(\mathbb{P})$ telle que $M_t \to M_\infty$ p.s. et dans $L^p(\mathbb{P})$.

Corollaire Si $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale de carré intégrable et $\mathbb{E}\langle M\rangle_\infty < \infty$ donc il existe $M_\infty \in L^2(\mathbb{P})$ telle que $M_t \to M_\infty$ p.s. et dans $L^2(\mathbb{P})$.

Théorème Une martingale $(M_t)_{t\geq 0}$ est fermée ssi elle est U.I. Dans ce cas $M_t \to M_\infty$ p.s. et dans $L^1(\mathbb{P})$.

Résultats générales sur le martingales

Théorème (d'arrêt) Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ c.à.d. et fermée. Soient $\sigma \leq \tau$ deux temps d'arrêt. Alors $\mathbb{E}[M_\tau \,|\, \mathcal{F}_\sigma] = M_\sigma$.

Théorème (Inégalité de Doob) Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ c.à.d. tel que $M_t \in L^p(\mathbb{P})$. Alors

$$\|\sup_{s\in[0,t]} |M_s|\|_p \leq q\|M_t\|_p, \qquad \|\sup_{s\geq 0} |M_s|\|_p \leq q \sup_{s\geq 0} \|M_t\|_p,$$

où $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Martingales locales

Théorème Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale continue. Il existe un processus croissant $(\langle M\rangle_t)_{t\geq 0}$, unique à indistinguabilité près, tel que $M_t^2 - \langle M\rangle_t$ soit une martingale locale et $\langle M\rangle_0 = 0$.

Théorème Soit $(M_t)_{t\geq 0}$ une martingale locale, $M_0 = 0$. Alors $\mathbb{E}[\langle M\rangle_t] < \infty$ pour tout $t \geq 0$ ssi M est une martingale de carré intégrable. Dans ce cas, $M^2 - \langle M\rangle$ est une vraie martingale.

Théorème (Burkholder-Davis-Gundy) Pour tout $p > 0$ il existe $c_p, C_p > 0$ telles que, pour toute martingale locale $(M_t)_{t\geq 0}$ issue de 0,
$c_p\mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty^{p/2}] \leq \mathbb{E}[\sup\limits_{t\geq 0}|M_t|^p] \leq C_p\mathbb{E}[\langle M\rangle_\infty^{p/2}]$