Chapitre 5 : Modèles financiers à temps discret

Buts du chapitre :

- Présenter la notion de produit financier, d'option
- Présenter la notion d'absence d'opportunité d'arbitrage
- Présenter les modèles financiers à temps discret type Cox-Ross-Rubinstein, qui utilisent les martingales à temps discret rencontrées dans le chapitre 4.
- Présenter les deux "théorèmes fondamentaux" des mathématiques financières.

5.1 Introduction

Exemple des options. Une option c'est un contrat passé entre un acheteur et un vendeur (de l'option). En $t = 0$ l'acheteur verse une prime p_0 au vendeur en échange du droit d'effectuer en $t = T$ (T est la maturité ou échéance de l'option) une opération sur un sous-jacent, ou actif.

Le sous-jacent peut être une action, un taux de change, une matière première (ex : un baril de pétrole), de l'énergie (ex : de l'électricité)...

Précisons encore l'exemple : considérons que le sous-jacent est une action cotée sur le marché, dont le prix à l'instant t est noté S_t.

Par la suite on considère son processus prix $S = (S_t)_{t \geq 0}$.

Considérons alors l'option d'achat (option Call, ou Call) de maturité T et de "strike" K : c'est le droit d'acheter à l'instant T l'action au prix K. Les quantités T et K sont convenues à l'avance dans le contrat qui constitue l'option Call.

Si on résume ce qui se passe :

En $t = 0$ l'acheteur verse p_0 euros au vendeur du Call.

En $t = T$: si $S_T > K$ l'acheteur exerce son droit, il peut ainsi acheter l'action au prix K et la revendre aussitôt au prix S_T. Il réalise ainsi un bénéfice de $S_T - K$ euros.
Si $S_T \leq K$ l'acheteur n'a aucun intérêt à exercer son droit. Il n'exerce pas (on dit que le Call est mort), et réalise un bénéfice de 0 euros.

Point de vue de l'acheteur : Il reçoit en $t = T$ la richesse $(S_T - K)_+$ euros (cette quantité est appelée le "pay-off" de l'option). Rappelons qu'il a versé p_0 euros en $t = 0$.

Quel est l'intérêt d'une telle opération ? Pourquoi l'acheteur est-il prêt à payer p_0 euros en $t = 0$ dans la perspective de recevoir $(S_T - K)_+$ euros en $t = T$?

☛...

...

<u>Intérêt spéculatif :</u> Si $(S_T - K)_+ > p_0$ l'acheteur aura au final gagné de l'argent. Il peut se lancer dans une telle opération s'il anticipe que en $t = T$ les cours de l'action S seront élevés (on parle de scénario haussier).

<u>Couverture d'un risque :</u> Si S est le cours d'un baril de pétrole par exemple. Une compagnie aérienne qui a besoin constamment de kérosène peut acheter des options Call pour se garantir un prix d'achat à K euros le baril. Elle se prémunit ainsi contre le risque de voir soudain le prix du pétrole monter en flèche en $t = T$, si elle anticipe un problème sur le marché ou un besoin pour son fonctionnement à cette date.

☛ Dans la suite du chapitre le point de vue de l'acheteur va être évacué.

Un ingénieur financier a en effet principalement pour mission de proposer des solutions pour le vendeur de l'option.

Point de vue du vendeur. Il reçoit p_0 euros en $t = 0$.
En $t = T$ tout se passe comme s'il devait fournir la richesse $(S_T - K)_+$ euros à l'acheteur.

Cela soulève deux problèmes :

1) Le problème du prix du Call (problème de la valorisation ou du pricing) : Quel est le montant p_0 à faire payer à l'acheteur en $t = 0$ pour accepter de lui fournir $(S_T - K)_+$ en $t = T$?

2) Le problème de la couverture (ou du hedging) : partant des p_0 euros que l'acheteur lui a donnés en $t = 0$ comment le vendeur va-t-il gérer au mieux cette somme d'argent initiale pour avoir à sa disposition $(S_T - K)_+$ euros en $t = T$?

En fait on va voir dans la suite du chapitre que ces deux problèmes sont intrinsèquement liés : en fait le prix d'une option c'est en quelque sorte le prix de sa couverture.

On peut se risquer à une première définition du prix d'une option payant h en $t = T$:

le prix à l'instant $t = 0$ d'une option payant la richesse h en $t = T$ c'est la quantité d'argent p_0 telle que, partant de la richesse p_0 en $t = 0$, et sans apport d'argent extérieur entre $t = 0$ et $t = T$, on est presque sûr (i.e. avec probabilité 1) d'avoir à sa disposition la richesse h en $t = T$.

Remarque 5.1.1 Le notion de "sans apport d'argent extérieur" sera formalisée très précisément dans la section 5.3, en introduisant le concept de "portefeuille autofinancé", comportant une part investie dans l'actif S sur lequel porte l'option, et une part investie dans un "actif sans risque" (en fait des euros qu'on place ou emprunte à la banque au taux sans risque).

Notons que bien sûr, pour vivre, le vendeur de l'option la vend à son juste prix p_0 plus une marge... [Remarque orale]

Dans ce chapitre : on va développer une théorie mathématique, basée sur des martingales à temps discret, pour calculer très précisément p_0.

5.2 Absence d'opportunité d'arbitrage (AOA)

Définition (5.2.1)

On dit qu'il y a possibilité d'arbitrage si, partant d'une richesse initiale $V(0) = 0$ et sans apport d'argent entre $t = 0$ et $t = T$, on peut disposer en $t = T$ d'une richesse $V(T) \geq 0$ p.s. avec $\mathbb{P}(\, V(T) > 0\,) > 0$.

Dans la plupart des modèles on travaille sous l'hypothèse d'AOA. Cela assure une cohérence mathématique (cf section 5.5).

C'est financièrement satisfaisant. En effet s'il y avait de telles opportunités d'arbitrage tout le monde se précipiterait dessus et ferait de l'argent à partir de rien. Le marché est supposé éliminer de lui-même de telles opportunités (par exemple s'il y a la possibilité d'acheter une première entité très bon marché et de l'échanger tout de suite contre une seconde plus chère, ça va faire monter le prix de la première ; il va y avoir retour à l'équilibre).

Théorème (5.2.1)

En AOA, si les valeurs de deux portefeuilles coïncident à une date donnée ($V_1(T) = V_2(T)$ pour $0 < T < \infty$) alors elles coïncident à toute date intermédiaire antérieure ($V_1(t) = V_2(t)$ pour tout $t \leq T$).

Dans cette section on fera intervenir le facteur de capitalisation au taux sans risque r garanti par la banque : 1 euros placé en t en vaut $e^{r(T-t)}$ en T.

Noter que la fonction $f(s) = e^{r(s-t)}$ satisfait $f(t) = 1$ et $df(s) = rf(s)\,ds$.

On notera aussi $B(t,T) = e^{-r(T-t)}$ le prix en t du zéro-coupon d'échéance T : c'est un titre émis par la banque et qui vaut 1 euros en T de façon certaine.

Preuve du théorème 5.2.1 : [Au tableau]

Grâce au théorème on peut établir la "relation de parité Call-Put".

Un option Put est une option de vente : elle donne le droit à son détenteur de vendre le sous-jacent au prix K à l'échéance T. Son pay-off est donc $(K - S_T)_+$.

Proposition (5.2.1, Relation de parité Call-Put)

Soit (S_t) le processus donnant le cours d'un sous-jacent.
Soit $0 < T < \infty$ une maturité et $K > 0$ un strike.
On note C_t le prix à l'instant $t \leq T$ du Call (de strike K et de maturité T) portant sur S.
On note P_t le prix à l'instant $t \leq T$ du Put (de strike K et de maturité T) portant sur S.
Alors on a pour tout $t \leq T$

$$C_t - P_t = S_t - Ke^{-r(T-t)}.$$

Preuve : [au tableau]

5.3 Modèles financiers à temps discret, exemple du modèle Cox-Ross-Rubinstein (CRR), portefeuille autofinancé

5.3.1 Modèle financier à temps discret, exemple du modèle CRR

Les modèles considérés dans ce chapitre et en TD vérifierons les hypothèses communes suivantes (modèles à un seul actif risqué).

Un horizon temporel $N \in \mathbb{N}$ est fixé.

On a un actif sans risque de valeur $S^0 = (S_n^0)_{0 \leq n \leq N}$, donné par

$$S_n^0 = (1 + r)^n, \quad \forall 0 \leq n \leq N.$$

Noter que la dynamique de S^0 est déterministe. Cet actif sans risque va nous permettre de représenter nos emprunts et placements à la banque (au taux sans risque r).

Puis on a un actif risqué, ou sous-jacent, dont le cours est donné par le processus $S = (S_n)_{0 \leq n \leq N}$, à valeurs dans $\mathbb{R}_+^*$, et défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Ici $|\Omega| < \infty$, on a $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$ et la mesure de probabilités $\mathbb{P}$, appelée "mesure de probabilités historique", vérifie $\mathbb{P}(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$. La loi de S sous $\mathbb{P}$ est censée se rapprocher au mieux de ce qu'on observe sur le marché.

Par la suite on cherchera à mettre en lumière une mesure probabilités risque-neutre $\mathbb{P}^*$, qui sera a priori différente de $\mathbb{P}$, mais sera celle qui intervient dans notre formule de valorisation.

On a une filtration $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ vérifiant $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et $\mathcal{F}_N = \mathcal{F}$. Le processus (S_n) est $(\mathcal{F}_n)$-adapté. Noter que ça implique que S_0 est déterministe et constante.

Exemple du modèle CRR. On a $-1 < a < b$. On définit $\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$ et $\mathcal{F} = \mathcal{P}(\Omega)$.

On a une suite $(T_n)_{n=1}^N$ définie sur $(\Omega, \mathcal{F})$ et à valeurs dans $\{1+a, 1+b\}$, définie par $T_n(\omega) = \omega_n$ pour tout $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \Omega$.

Sur $(\Omega, \mathcal{F})$ on a une probabilité historique $\mathbb{P}$ telle que la suite $(T_n)_{n=1}^N$ est i.i.d. sous $\mathbb{P}$ avec

$$\mathbb{P}(T_1 = 1+a) = p$$

avec $0 < p < 1$. Le fait que $0 < p < 1$ entraine que $\mathbb{P}(\omega) > 0$ pour tout $\omega \in \Omega$.

On note $(\mathcal{F}_n)_{0 \leq n \leq N}$ la filtration définie par $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ et

$$\forall 1 \leq n \leq N, \quad \mathcal{F}_n = \sigma(T_i,\, 1 \leq i \leq n).$$

Noter qu'on a bien $\mathcal{F}_N = \mathcal{P}(\Omega)$.

On peut alors définir la dynamique du processus (S_n), défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. La valeur initiale S_0 de l'actif risqué est déterministe. Puis on a

$$S_{n+1} = T_{n+1} S_n, \quad \forall 0 \leq n \leq N-1. \quad \text{[cf dessins au tableau]}$$

On a bien que (S_n) est $(\mathcal{F}_n)$-adapté (en fait on a mieux : pour tout n on a $\mathcal{F}_n = \sigma(S_k,\, 1 \leq k \leq n)$, la filtration $(\mathcal{F}_n)$ est la filtration naturelle de S).

5.3.2 Portefeuille autofinancé

On considère un portefeuille (ou stratégie) constitué à l'instant n d'une quantité H_n^0 d'actif sans risque et d'une quantité H_n^1 d'actif risqué. On note $H = (H_n)_{0 \leq n \leq N}$ le processus à valeurs vectorielles défini par

$$H_n = \begin{pmatrix} H_n^0 \\ H_n^1 \end{pmatrix}, \quad \forall 0 \leq n \leq N.$$

La valeur du portefeuille à l'instant $0 \leq n \leq N$ est donnée par

$$V_n = V_n(H) = H_n^0 S_n^0 + H_n^1 S_n = H_n \cdot S_n.$$

Ici le $\cdot$ désigne le produit scalaire dans $\mathbb{R}^2$ et on a noté $S_n = (S_n^0, S_n)^T$.

Plus précisément H_n^0 (resp. H_n^1) est la quantité d'actif S^0 (resp. S) détenue dans le portefeuille sur l'intervalle de temps $(n-1, n]$ (pour $0 < n \leq N$; H_0 donne la composition initiale du portefeuille, qu'on va changer aussitôt). C'est à dire qu'à l'instant $n-1$ on décide de la composition H_n du portefeuille sur $(n-1, n]$: en particulier (H_n^0) et (H_n^1) sont donc des processus $(\mathcal{F}_n)$-prévisibles.

On dit du portefeuille qu'il est autofinancé si les recompositions de portefeuille se font à valeur constante (du portefeuille) ; c'est à dire si pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$H_n \cdot S_n = H_n^0 S_n^0 + H_n^1 S_n = H_{n+1}^0 S_n^0 + H_{n+1}^1 S_n = H_{n+1} \cdot S_n. \quad (5.3.1)$$

Notons que par (5.3.1) on a

$$V_{n+1} - V_n = H_{n+1} \cdot S_{n+1} - H_n \cdot S_n = H_{n+1} \cdot S_{n+1} - H_{n+1} \cdot S_n = H_{n+1} \cdot \Delta S_{n+1},$$

où on a noté $\Delta S_{n+1} = (S_{n+1}^0 - S_n^0, S_{n+1} - S_n)^T$. En d'autres termes on a,

$$\Delta V_n = H_n \cdot \Delta S_n, \quad \forall 1 \leq n \leq N. \qquad (5.3.2)$$

Remarque 5.3.1 : L'équation (5.3.2) est à mettre en regard de la définition $dV_t = H_t \, dS_t$ de l'autofinancement dans les modèles à temps continu (cf IPD au sem. 8...)

Actualisation : On note

$$\tilde{S}^0_n = \frac{S^0_n}{S^0_n} \equiv 1, \quad \tilde{S}_n = \frac{S_n}{S^0_n}, \quad \tilde{V}_n = \frac{V_n}{S^0_n} \quad \text{et} \quad \tilde{S} = (\tilde{S}^0, \tilde{S})^T$$

(toutes ces quantités sont exprimées en actif sans risque, au lieu de l'être en euro).

La quantité $\tilde{S}_n$ est la "valeur de l'actif risqué actualisée" (au temps n) et $\tilde{V}_n$ est la "valeur du portefeuille actualisée" (au temps n).

En divisant (5.3.1) par S^0_n on trouve

$$H_n \cdot \tilde{S}_n = H_{n+1} \cdot \tilde{S}_n$$

puis, comme dans le cas non actualisé,

$$\Delta \tilde{V}_{n+1} = H_{n+1} \cdot \Delta \tilde{S}_{n+1}.$$

En résumé : ☛

Proposition (5.3.1)

Il y a équivalence entre :
1) Le portefeuille $H = (H^0, H^1)^T$ *est autofinancé.*
2) On a $\Delta V_n(H) = H_n \cdot \Delta S_n$, $1 \leq n \leq N$.
3) On a $\Delta \tilde{V}_n(H) = H_n \cdot \Delta \tilde{S}_n$, $1 \leq n \leq N$.

[Eléments d'explication au tableau]

Remarque 5.3.2 : Une stratégie autofinancée $((H_n^0, H_n^1)^T)_{0 \leq n \leq N}$ est définie de façon équivalente par la donnée de $V_0(H)$ et $(H_n^1)_{0 \leq n \leq N}$.

[Explications au tableau]

Moralité : la valeur initiale du portefeuille et la quantité d'actif risqué imposent, par autofinancement, la quantité d'actif sans risque, c'est à dire ce qu'il nous faut emprunter ou placer à la banque.
Cette remarque sera utilisée à diverses reprises (notamment dans les démonstrations des théorèmes 5.5.1 et 5.6.1).

Remarque 5.3.3 : Les valeurs de H^0 et H^1 peuvent être négatives : cela signifie que l'on a une dette (en l'actif sans risque ou risqué). Par contre il n'est pas raisonnable que dans un portefeuille de couverture H^0 et H^1 deviennent négatifs en même temps, d'où la définition suivante.

Définition (5.3.1)

On dit d'un portefeuille autofinancé H qu'il est admissible si $V_n(H) \geq 0$ pour tout n.

La définition ci-dessus traduit le fait que le détenteur d'un portefeuille admissible peut à tout instant rembourser sa dette (la part négative du portefeuille n'excède pas la part positive, en valeur absolue).

On peut maintenant préciser la définition du prix d'une option, déjà évoquée dans la section 5.1 :

Définition (5.3.2)

Le prix d'une option payant h en N (en toute généralité h est une v.a. $\mathcal{F}_N$-mesurable) est, à l'instant $0 \leq n \leq N$, la valeur $V_n(H)$ d'un portefeuille autofinancé et admissible tel que $V_N(H) = h$ p.s. (on dit que le portefeuille réplique le pay-off h).

Remarque 5.3.5 : 1) En particulier le prix à l'instant de vente $n = 0$ est V_0. C'est le prix p_0 qu'on cherche à calculer.

2) Le fait que le portefeuille de réplication est autofinancé traduit le "sans apport d'argent extérieur" de la section 5.1. Le caractère admissible est une mesure de sécurité raisonnable.

Grenoble INP
Ensimag

5.4 Mesure de probabilités risque-neutre

Définition (5.4.1)

Une mesure de probabilités $\mathbb{Q}$ *sur* $(\Omega, \mathcal{F})$ *est dite équivalente à* $\mathbb{P}$ *si pour tout* $A \in \mathcal{F}$ *on a* $\mathbb{P}(A) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{Q}(A) = 0$*.*

Remarque 5.4.1 : 1) On note $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q}$.
2) Dans le cadre discret dans lequel on est placé ici on a en fait $\mathbb{P} \sim \mathbb{Q} \Leftrightarrow \mathbb{Q}(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$ (on rappelle que $\mathbb{P}(\omega) > 0, \forall \omega \in \Omega$).

Définition (5.4.2)

On appelle mesure de probabilités risque-neutre une mesure $\mathbb{P}^*$ *équivalente à* $\mathbb{P}$ *telle que les processus* $(\tilde{S}^0_n)$ *et* $(\tilde{S}_n)$ *sont des* $(\mathcal{F}_n)$*-martingales sous* $\mathbb{P}^*$*.*

Remarque 5.4.2 : Comme $\tilde{S}^0 \equiv 1$, c'est bien sûr une $(\mathcal{F}_n)$-martingale sous n'importe quelle mesure de probabilités : la vraie question c'est donc de trouver $\mathbb{P}^*$ sous laquelle $\tilde{S}$ est une martingale.

Grenoble INP Ensimag

La proposition suivante est au coeur de la théorie du pricing par calcul de martingales.

Proposition (5.4.1)

Soit $\mathbb{P}^*$ une mesure de probabilités risque-neutre et $H = (H^0, H^1)^T$ une stratégie autofinancée.
Alors le processus $(\tilde{V}_n(H))_{0 \leq n \leq N}$ est une $(\mathcal{F}_n)$-martingale sous $\mathbb{P}^*$.

Preuve : [au tableau]

Conséquence : Si on trouve $\mathbb{P}^*$ une mesure de probabilités risque-neutre et $H = (H^0, H)^T$ une stratégie autofinancée admissible qui réplique le pay-off h on a pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\begin{aligned} V_n(H) &= S_n^0 \tilde{V}_n(H) = S_n^0 \mathbb{E}^*\big[\tilde{V}_N(H) \,|\, \mathcal{F}_n\big] = (1+r)^n \mathbb{E}^*\Big[\tfrac{V_N(H)}{(1+r)^N} \,|\, \mathcal{F}_n\Big] \\ &= \mathbb{E}^*\big[(1+r)^{n-N} h \,|\, \mathcal{F}_n\big], \quad (5.4.1) \end{aligned}$$

où on a noté $\mathbb{E}^* := \mathbb{E}_{\mathbb{P}^*}$.

En particulier le prix de vente p_0 en $n = 0$ du produit payant h en N est

$$V_0 = \mathbb{E}^* \left[(1+r)^{-N} h \right].$$

Les enjeux maintenant sont :

- cette mesure de probabilités risque-neutre existe-t-elle ?
- Est-elle unique (ce qui garantira l'unicité des prix) ?
- Peut-on trouver une stratégie autofinancée admissible de réplication ?

On va étudier les deux "théorèmes fondamentaux", qui vont apporter des réponses à ces questions.

5.5 Premier théorème fondamental

Définition (5.5.1)

Le modèle (ou le marché) est dit viable, si pour toute stratégie autofinancée et admissible H avec $V_0(H) = 0$ on a $\mathbb{P}(V_N(H) > 0) = 0$ (autrement dit il n'y a pas de stratégie autofinancée admissible d'arbitrage).

Théorème (5.5.1, premier théorème fondamental)

Le marché est viable si et seulement si il existe $\mathbb{P}^*$ mesure de probabilités risque-neutre sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Preuve : [Au tableau]. "$\Leftarrow$" : sens facile ; "$\Rightarrow$" : sens difficile, on a besoin du

Théorème de Hahn-Banach (forme géométrique). *Soit K un convexe compact et V un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, disjoint de K.*
Il existe une forme linéaire ξ sur $\mathbb{R}^n$, vérifiant :
1) Pour tout $x \in K$, on a $\xi(x) > 0$.
2) Pour tout $x \in V$, on a $\xi(x) = 0$.
Le sous-espace V est donc contenu dans un hyperplan qui ne rencontre pas K.

5.6 Second théorème fondamental

Définition (5.6.1)

On dit que le marché est complet si pour toute v.a. $h \geq 0$ (p.s.), $\mathcal{F}_N$-mesurable, il existe $H = (H^0, H^1)^T$ stratégie autofinancée admissible telle que $V_N(H) = h$ p.s.

Remarque 5.6.1 : Si le marché est viable et que $H = (H^0, H^1)^T$ autofinancée réplique $h \geq 0$ alors H est automatiquement admissible. En effet il existe alors $\mathbb{P}^*$ mesure de probabilités risque-neutre, et on a donc

$$\forall 0 \leq n \leq N, \quad V_n(H) = \mathbb{E}^*\left[(1+r)^{n-N} h \,|\, \mathcal{F}_n\right] \geq 0.$$

Théorème (5.6.1, second théorème fondamental)

Un marché viable est complet si et seulement si il existe une unique mesure de probabilités risque-neutre sur $(\Omega, \mathcal{F})$.

Preuve : <u>"$\Rightarrow$" :</u> sens facile ; <u>"$\Leftarrow$" :</u> sens difficile.

5.7 Conclusion : valorisation et couverture dans le cas d'un marché viable et complet

On travaille le plus souvent sous les hypothèses de viabilité et de complétude. Donc :

1) $\mathbb{P}^*$ mesure de probabilités risque-neutre existe.

2) Elle est unique.

3) Pour tout $h \geq 0$, $\mathcal{F}_N$-mesurable, il existe $H = (H^0, H^1)^T$ stratégie autofinancée et admissible t.q. $V_N(H) = h$ $\mathbb{P}$-p.s.

NB : Remarquons que si on examine la preuve du théorème 5.6.1 on a plutôt l'impression qu'il existe V_0 et $(H_n^1)_{0 \leq n \leq N}$ qui réalisent ceci, mais c'est équivalent par la remarque 5.3.2.

Moralité : le prix à l'instant $0 \leq n \leq N$ d'un produit payant h en N est bien donné par

$$V_n(H) = \mathbb{E}^*\left[(1+r)^{n-N} h \,|\, \mathcal{F}_n\right],$$

comme annoncé dans la formule (5.4.1).

Dans le cadre du modèle CRR avec $a < r < b$ le modèle est viable et complet (cf Exercice 1 de la fiche de TD 9).

Pour certains pay-off h, de la forme $h = h(S_N)$ (on parle d'option vanille), le prix est donc

$$V_n(H) = \mathbb{E}^*\left[(1+r)^{n-N} h(S_N) \,|\, \mathcal{F}_n\right].$$

On peut dans ce cas donner une formule explicite pour le prix, ainsi que pour la quantité d'actif risqué H_n^1 (cf Exercice 2 de la fiche de TD 9).