Modèles sur le taux court (short rate)

Caroline Hillairet, ENSAE Paris
caroline.hillairet@ensae.fr

Novembre-Décembre 2024

Modèle sur le taux court r_t

Soit un espace de probabilité filtré $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{Q})$ et un marché sans arbitrage avec

- $\mathbb{Q}$ la probabilité risque neutre
- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, la filtration de l'information disponible sur le marché.
- (W_t) un $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{Q})$-mouvement brownien (dimension 1).

Nous allons étudier quelques modèles de taux court $(r_t)_{t\geq 0}$ de la forme

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t, \tag{1}$$

avec μ et σ des fonctions continues telles que la solution de (1) existe et est unique.

EDP DE STRUCTURE PAR TERME

Variante de la formule de Feynman-Kac :EDP de structure par terme

- Si $\mathcal{B}(t, r, T)$ est la solution de l'EDP

$$\begin{aligned} 0 &= \mathcal{B}'_t(t,r,T) + \frac{1}{2}\sigma(t,r)^2\mathcal{B}''_{rr}(t,r,T) + \mu(t,r)\mathcal{B}'_r(t,r,T) - r\mathcal{B}(t,r,T) \\ 1 &= \mathcal{B}(T,r,T) \end{aligned} \tag{2}$$

  alors $\mathcal{B}(t, r_t, T)$ est le prix en t d'un zéro-coupon de maturité en T.
- *Preuve :* La différentielle d'Itô de $X_t = \mathcal{B}(t, r_t, T)$ vérifie

$$dX_t = \mathcal{B}'_t(t,r_t,T)dt + \mathcal{B}'_r(t,r_t,T)dr_t + \frac{1}{2}\sigma^2(t,r)\mathcal{B}''_{rr}(t,r_t,T)dt$$

  Par autofinancement, $dX_t = r_t X_t dt + X_t \Gamma(t,T) dW_t$. Il vient que

$$\Gamma(t,T) = \sigma(t,r)\frac{\mathcal{B}'_r(t,r_t,T)}{\mathcal{B}(t,r_t,T)}$$

PLAN

Le processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Dans le modèle de Vasicek, le taux court est donné par un processus d'Ornstein-Uhlenbeck de dynamique

$$dr_t = a(b - r_t)dt - \sigma dW_t \tag{3}$$

avec W MB sous la probabilité risque neutre $\mathbb{Q}$.

Interprétation des paramètres:

- b est la moyenne à long-terme
- $a > 0$ est la vitesse de retour à la moyenne long-terme b
- σ est la volatilité du taux court r

ORDRE DE GRANDEUR DES PARAMÈTRES

Dans l'étude des taux d'intérêt, les ordres de grandeur des paramètres sont les suivants,

- les taux, exprimés en pourcentage sont positifs, et évoluent en général entre 0 et 20%. Par suite, r_0 et b sont de cet ordre de grandeur.
- le paramètre a est en géneral de l'ordre de $0,2$ à 2, ce qui correspond à un temps de relaxation de 5 à une demi-année.(En physique, il est de l'ordre de $10^{-8}sec.$)
- Le paramètre de variabilité σ est en général assez petit, de l'ordre de $0,1\%$ à 1%.

LE PROCESSUS D'ORNSTEIN-UHLENBECK

- La solution de l'EDS (3) est donnée par

$$r_t = r_0\, e^{-at} + b(1 - e^{-at}) - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s.$$

- Si r_0 est une variable aléatoire gaussienne indépendante de W, alors (r_t) est un processus gaussien
  - de moyenne $\mu(t) = \mathbb{E}(r_t) = b + (\mathbb{E}(r_0) - b)e^{-at}$
  - de fonction de covariance $K(t,s) = \frac{\sigma^2}{2a}(e^{-a|t-s|} - e^{-a(t+s)}) + e^{-a(t+s)} Var(r_0)$.
  - La distribution est invariante si $r_0 \sim N(b, \frac{\sigma^2}{2a})$.
  - moyenne et variance à long terme

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{E}(r_t) = b, \qquad \lim_{t\to\infty} \mathbb{V}ar(r_t) = \frac{\sigma^2}{2a}.$$

Le processus primitif

- Soit r un processus d'O.U. La fonction aléatoire. $I_t = I_0 + \int_0^t r_s \, ds$ est un processus **gaussien** de représentation,

$$I_t = I_0 + bt + (r_0 - b)\frac{1 - e^{-at}}{a} - \sigma \int_0^t \frac{1 - e^{-a(t-s)}}{a} dW_s.$$

- Supposons que (I_0, r_0) soit un couple gaussien indépendant de W. La v.a. I_t est **gaussienne**, de moyenne

$$m(t) = \mathbb{E}(I_0) + bt + (\mathbb{E}(r_0) - b)\frac{1 - e^{-at}}{a}$$

et de variance $\Sigma^2(t)$, où :

$$\Sigma^2(t) = Var(I_0 + r_0 \frac{1 - e^{-at}}{a}) - \frac{\sigma^2}{2a^3}(1 - e^{-at})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2}(t - \frac{1 - e^{-at}}{a})$$

- De plus, le couple (I_t, r_t) est une diffusion markovienne.
Preuve : $a(I_t - I_0) = -(r_t - r_0) + a\, b\, t - \sigma\, W_t$.

LES ZC DANS MODÈLE VASICEK

Dans le modèle de Vasicek

- La distribution de $I_{t,T} := I_T - I_t$ sachant $\mathcal{F}_t$ est gaussienne
  - de moyenne $m(t,T) = b(T-t) - (b-r_t)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$
  - de variance $\Sigma(t,T)^2 = -\frac{\sigma^2}{2a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2 + \frac{\sigma^2}{a^2}\left(T-t-\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)$.
- Les ZC sont donnés par (Transformée de Laplace d'une gaussienne)

$$\begin{aligned}
B(t,T) &= \mathbb{E}[\exp(-(I_T - I_t)|\mathcal{F}_t] = \exp(-m(t,T) + \frac{1}{2}\Sigma(t,T)^2) \\
&= \exp\left[-b(T-t) + (b-r_t)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} - \frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right. \\
&\quad \left. + \frac{\sigma^2}{2a^2}\left(T-t-\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)\right]
\end{aligned}$$

Les ZC dans modèle Vasicek

Dans le modèle de Vasicek

- Les ZC sont donnés par

$$\begin{aligned} B(t,T) &= \exp\left[-b(T-t)+(b-r_t)\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}-\frac{\sigma^2}{4a^3}\left(1-e^{-a(T-t)}\right)^2\right. \\ &\left.+\frac{\sigma^2}{2a^2}\left(T-t-\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}\right)\right] \end{aligned}$$

- Modèle à structure affine car de la forme

$$B(t,T)=\exp\left[-\alpha(t,T)r_t+\beta(t,T)\right].$$

avec

$$\alpha(t,T)=\frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}=\frac{1}{\sigma}\Gamma_V(t,T)$$

et

$$\beta(t,T)=(b-\frac{\sigma^2}{2a^2})(\alpha(t,T)-(T-t))-\frac{\sigma^2}{4a}(\alpha(t,T))^2$$

La courbe des taux d'intérêt dans modèle Vasicek

- La vol des ZC est

$$\Gamma_V(t,T) = \sigma \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a}$$

et

$$B(t,T) = B(0,T)\exp\left(\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma_V(s,T)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \Gamma_V(s,T)^2 ds\right).$$

- $B(t,T) = \exp\left(-R(t,T-t)(T-t)\right)$, où la **courbe des taux** est donnée par

$$R(t,\theta) = R_\infty - (R_\infty - r_t)\frac{1-e^{-a\theta}}{a\theta} + \frac{\sigma^2}{4a^3\theta}(1-e^{-a\theta})^2$$

$$R(t,\infty) = R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$$

Propriété de la courbe des taux

- Le modèle de Vasicek donne la forme analytique de la courbe des taux aujourd'hui et de n'importe quelle date future.
- La courbe des taux est une combinaison linéaire des trois fonctions

$$(1, \frac{1-e^{-a\theta}}{a\theta}, \frac{(1-e^{-a\theta})^2}{a\theta})$$

- Cette forme fonctionnelle conduit à des graphes qui ressemblent effectivement à de nombreuses courbes de taux observées sur le marché.
- Toutefois, certaines d'entre elles, notamment les courbes dites "inversées", où le taux court r est plus haut que le taux long R_∞, et où apparaît un creux ne peuvent être atteintes par un modèle de ce genre.
- Cette forme a conduit à remplacer l'interpolation par des splines par des interpolations à l'aide de familles finies de type exponentielles (Nelson-Siegel,..).

Modèle de Vasicek: résumé

- le taux court (r_t) est un processus gaussien, il peut prendre des valeurs positives et négatives
- distributions connues et faciles à manipuler (gaussiennes), simulation Monte Carlo aisée
- formules explicites pour les obligations ZC et le taux ZC, ainsi que pour les caplets/floorlets
- la courbe initiale des taux ZC est entièrement définie par le modèle - on ne peut pas passer les observations du marché en entrée du modèle
- la courbe des taux ZC obtenue n'est pas assez souple pour reproduire toutes les formes des courbes observées sur le marché

Calibration à la courbe initiale des prix ZC

- A l'instant initial $t = 0$: observation de prix de marché pour différentes échéances $B^M(0, T_i)$, $i = 1, \cdots, n$.
- On voudrait choisir les paramètres du modèle a, b et σ pour que les prix obtenus dans le modèle coincident avec ceux observés sur le marché :

$$B^V(0, T_i) = B^M(0, T_i), \quad i = 1, \cdots, n$$

- Cette procédure s'appelle calibration à la courbe initiale des prix ZC ou inversion de la courbe de yield ("inversion of the yield curve").
- Si le nombre de prix observés n est grand, il n'est pas possible d'avoir une calibration parfaite avec seulement 3 paramètres comme dans le modèle de Vasicek.
- Deux solutions possibles:
  - remplacer les paramètres constants par des paramètres qui dépendent du temps $\rightarrow$ modèle de Hull-White (Vasicek Hull-White étendu, CIR Hull-White étendu)
  - introduire un shift déterministe $\rightarrow$ modèle avec un shift (G2++, CIR++ ...)

Modèle de Vasicek- Hull and White

- Modèle de Vasicek (à paramètres constants) : utilisé comme lisseur de courbes des taux.
- Comme modèle utilisé dans le pricing de dérivés: le marché préfère introduire la courbe des taux d'aujourd'hui comme une donnée du problème.
- La calibration à la courbe de marché va introduire une dépendence des paramètres par rapport au temps (non stationnarité).
- Vasocek- Hull and White: généralisation du modèle de Vasicek par l'introduction d'une fonction $b(t)$ qui dépend du temps.

Le taux court r_t vérifie le modèle de Vasicek -Hull and White ajusté à la courbe des taux forwards $(f^M(0,T); T \in \mathbb{R}^+)$ du marché si

$$dr_t = \left[\partial_t f^M(0,t) + af^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at})\right] dt - ar_t dt - \sigma dW_t \qquad (4)$$

ie

$$ab(t) = \left[\partial_t f^M(0,t) + af^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1-e^{-2at})\right]$$

Vasicek- Hull and White-Preuve

Trame de la preuve

- Dans Vasicek, courbe taux instantané forward est donnée par

$$f(0,t) = R_\infty - (R_\infty - r_0)e^{-at} + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})e^{-at} \tag{5}$$

- qui vérifie

$$\partial_t f(0,t) + a(f(0,t) - R_\infty) - \frac{\sigma^2}{2a^2}e^{-2at} = 0 \tag{6}$$

  avec condition en l'infini : $f(0,\infty) = R_\infty = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}$.
- $r_t^{HW} - r_t^V$ vérifie l'équation linéaire, non stochastique

$$d(r_t^{HW} - r_t^V) = a(b(t) - b) - a(r_t^{HW} - r_t^V)dt$$

  avec condition initiale égale à 0.
- Par suite : $f^{HW}(0,t) - f^V(0,t) = r_t^{HW} - r_t^V$
- On plugge les taux forward dans (6) ce qui conduit à (grace à (5))

$$ab(t) = \left[\partial_t f^M(0,t) + af^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right]$$

Modèle de Vasicek- Hull and White est affine

Dans le modèle de Vasicek- Hull and White

- Le taux court (r_t) reste un processus gaussien: pour $s \leq t$

$$r_t = r_s\, e^{-a(t-s)} + \kappa(t) - \kappa(s) e^{-a(t-s)} - \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_u$$

  avec $\kappa(t) := f^M(0,t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2$.

- Pour calculer les ZC et la courbe des taux, on peut procéder exactement comme dans le modèle de Vasicek (en remplaçant partout b par $b(t)$) car le taux court et son intégrale $I_{t,T}$ sont des v.a. gaussiennes.

Prix des ZC dans modèle de Vasicek- Hull and White

Modèle de Vasicek- Hull and White reste à structure affine

$$B(t,T) = \exp\left[-\alpha(t,T)r_t + \beta^{HW}(t,T)\right]$$

avec

$$\alpha(t,T) = \frac{1-e^{-a(T-t)}}{a} = \frac{1}{\sigma}\Gamma_V(t,T) = \frac{1}{\sigma}\Gamma_{HW}(t,T)$$

et

$$\beta^{HW}(t,T) = -\int_t^T ab(u)\alpha(u,T)du + \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T (\alpha(u,T))^2 du.$$

Calcul des prix par EDP

L'EDP d'évaluation dans Vasicek-Hull and White

On peut aussi procéder par EDP

- Si $\mathcal{B}(t, r, T)$ est la solution de l'EDP

$$\mathcal{B}'_t(t, r, T) + \frac{1}{2}\sigma^2 \mathcal{B}''_{rr}(t, r, T) + a(b(t) - r)\mathcal{B}'_r(t, r, T) - r\mathcal{B}(t, r, T) = 0$$

telle que $\mathcal{B}(T, r, T) = 1$, alors $\mathcal{B}(t, r_t, T)$ est le prix en t d'un zéro-coupon de maturité en T.

- *Preuve :* La différentielle d'Itô de $X_t = \mathcal{B}(t, r_t, T)$ vérifie

$$dX_t = \mathcal{B}'_t(t, r_t, T)dt + \mathcal{B}'_r(t, r_t, T)dr_t + \frac{1}{2}\sigma^2 \mathcal{B}''_{rr}(t, r_t, T)dt$$

Par autofinancement, $dX_t = r_t X_t dt + X_t \Gamma(t, T) dW_t$. Il vient que

$$\Gamma(t, T) = -\sigma \frac{\mathcal{B}'_r(t, r_t, T)}{\mathcal{B}(t, r_t, T)}$$

Solution de l'EDP

- Comme l'EDP est linéaire et la condition terminale constante on recherche une solution *exponentielle affine* $e^{-(A(t)r+B(t))}$.
- Par identification des coefficients de r, $r^0 = 1$, il vient que

$$\begin{cases} A'(t) &= a\,A(t) - 1, \quad A(T) = 0 \\ B'(t) &= \frac{1}{2}\sigma^2 A(t)^2 - ab(t)A(t), \quad B(T) = 0 \end{cases}$$

- Système de 2 EDOs appellé système d'équations de Riccati associé au modèle affine de Vasicek-Hull-White .
- Dans le modèle de Vasicek Hull-White, la 1ere equation n'a pas de terme quadratique $A(t)^2$ et il s'agit simplement d'une EDO linéaire (non-homogène) d'ordre 1
- La solution est

$$A(t) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}$$

et

$$B(t) = -\int_t^T ab(u)A(u)du + \frac{\sigma^2}{2}\int_t^T (A(u))^2 du.$$

PLAN

LE MODÈLE DE COX INGERSOLL ROSS

- Modèle dit en “racine carrée”

$$dr_t = a(b - r_t)dt - \sigma\sqrt{r_t}dW_t$$

  - $\sqrt{\cdot}$ pas une fonction lipschitzienne: existence et unicité par KARLIN (1981)
  - condition de Feller: $r_t > 0$ si $2ab > \sigma^2$ (et $r_0 > 0$)
  - pas de formule explicite pour r_t
- La vol de r est stochastique, donc ce n'est plus un processus gaussien...
- ... mais reste un modèle affine

DISTRIBUTION DU TAUX COURT

- Dans le modèle CIR, le taux court (r_t) suit une loi de χ^2 décentrée. La densité de probabilité de r_t est donnée par

$$p_{r_t}(x) = c_t \, p_{\chi^2(n,\lambda_t)}(c_t x)$$

- avec

$$\begin{aligned} c_t &= \frac{4a}{\sigma^2(1-e^{-at})} \\ n &= \frac{4ab}{\sigma^2} \quad \text{nombre de degrés de liberté} \\ \lambda_t &= c_t r_0 e^{-at} \quad \text{paramètre de décentralisation} \end{aligned}$$

Espérance et Variance du taux court

- La moyenne de (r_t) conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ $(s \leq t)$ est donnée par

$$\mathbb{E}[r_t|\mathcal{F}_s] = r_s e^{-a(t-s)} + b(1 - e^{-a(t-s)})$$

- et la variance de (r_t) conditionnellement à $\mathcal{F}_s$ est

$$Var(r_t|\mathcal{F}_s) = r_s \frac{\sigma^2}{a} \left(e^{-a(t-s)} - e^{-2a(t-s)}\right) + b\frac{\sigma^2}{2a} \left(1 - e^{-2a(t-s)}\right)^2$$

- Preuve: cf. Theorem 6.3.3.1 (page 360) dans M. Jeanblanc, M. Yor et M. Chesney (2009). Mathematical Methods for Financial Markets, Springer.

Calcul des prix par EDP

L'EDP d'évaluation dans CIR

- Si $\mathcal{B}(t,r,T)$ est la solution de l'EDP

$$\mathcal{B}'_t(t,r,T) + \frac{1}{2}\sigma^2 r\mathcal{B}''_{rr}(t,r,T) + a(b-r)\mathcal{B}'_r(t,r,T) - r\mathcal{B}(t,r,T) = 0$$

  telle que $\mathcal{B}(T,r,T) = 1$, alors $\mathcal{B}(t,r_t,T)$ est le prix en t d'un zéro-coupon de maturité en T dans le modèle CIR.

- La volatilité des ZC est

$$\Gamma^{CIR}(t,T) = -\sigma\sqrt{r}\frac{\mathcal{B}'_r(t,r_t,T)}{\mathcal{B}(t,r_t,T)}$$

Solution de l'EDP

- EDP reste linéaire + condition terminale constante $\rightarrow$ recherche d'une solution *exponentielle affine* $e^{-(A(t)r+B(t))}$.
- Par identification des coefficients de r, $r^0 = 1$, il vient que

$$\begin{cases} A'(t) &= & a\,A(t) - 1 + \frac{\sigma^2}{2}A^2(t), \quad A(T) = 0 \\ B'(t) &= & -ab(t)A(t), \quad B(T) = 0 \end{cases}$$

- Système de 2 EDOs appellé système d'équations de Riccati associé au modèle affine de CIR.
- Dans le modèle de CIR, la 1ere equation a un terme quadratique $A(t)^2$.
- Le prix du Zéro-coupon est alors donné par (structure affine)

$$B(t,T) = \exp(-\alpha(T-t)r_t + \beta(T-t))$$

$$\alpha(\theta) = \frac{2(e^{\rho\theta}-1)}{(\rho+a)(e^{\rho\theta}-1)+2\rho}, \quad \beta(\theta) = \frac{2ab}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\rho e^{\frac{(\rho+a)}{2}\theta}}{(\rho+a)(e^{\rho\theta}-1)+2\rho}\right)$$

pour $\theta = T - t$ et $\rho = \sqrt{a^2 + 2\sigma^2}$.

COURBE DES TAUX DANS LE MODÈLE CIR

- Prix du Zéro-coupon dans modèle CIR

$$B(t,T) = \exp(-\alpha(T-t)r_t + \beta(T-t))$$

$$\alpha(\theta) = \frac{2(e^{\rho\theta}-1)}{(\rho+a)(e^{\rho\theta}-1)+2\rho}, \quad \beta(\theta) = \frac{2ab}{\sigma^2}\ln\left(\frac{2\rho e^{\frac{(\rho+a)}{2}\theta}}{(\rho+a)(e^{\rho\theta}-1)+2\rho}\right)$$

pour $\theta = T-t$ et $\rho = \sqrt{a^2+2\sigma^2}$.

- Courbe des taux

$$R(t,\theta) = r_t\frac{\alpha(\theta)}{\theta} - \frac{\beta(\theta)}{\theta}.$$

- Le taux infini $R(t,\infty)$ est constant pour tout t et égal à

$$R_\infty = \frac{ab(\rho+a)}{\sigma^2} = \frac{2ab}{\rho+a}.$$

MODÈLE DE CIR: RÉSUMÉ

- le taux court (r_t) suit la loi χ^2 décentrée, il est positif (strictement positif si la condition de Feller est satisfaite).
- loi χ^2 décentrée moins facile à manipuler que la loi gaussienne et la simulation Monte Carlo plus compliquée

  (voir e.g. A. Alfonsi (2005) On the discretization schemes for the CIR (and Bessel squared) processes. Monte Carlo Methods and Appl. 11(4), 355-384)
- formules explicites pour les obligations ZC et le taux ZC, ainsi que pour les caplets/floorlets
- la courbe des taux ZC obtenue n'est pas assez souple pour reproduire toutes les formes des courbes observées sur le marché (e.g. courbe à une bosse)
- la courbe initiale des taux ZC est entièrement définie par le modèle - on ne peut pas passer les observations du marché en entrée du modèle $\rightarrow$ modèle CIR Hull-White étendu ou modèle CIR avec un shift
- La forme la plus générale du modèle Hull-White est

$$dr_t = (b(t) - a(t)r_t)dt + \sigma(t)r_t^{\beta}dWt$$

avec $\beta \geq 0$ et $a, b, \sigma : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ déterministes.

Modèles avec shift déterministe

- Toujours sous la proba risque-neutre Q, on considère un modèle de taux court de référence donné par

$$dx_t = \mu^\alpha(t, r_t)dt + \sigma\alpha(t, r_t)dW_t, \tag{7}$$

avec μ^α et σ^α des fonctions continues, dépendant d'un paramètre $\alpha \in \mathbb{R}^n$, telles que la solution de (1) existe et est unique.

- On s'intéresse aux modèles qui permettent une expression explicite du ZC sous la forme

$$B^x(t, T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left(\exp(-\int_t^T x_u du)\right) = \Pi^x(t, T, x_t; \alpha)$$

avec Π^x une fonction explicite (cf. modèles vus précédemment)

Modèles avec shift déterministe

- Modèle avec un shift déterministe (voir Brigo et Mercurio (2005), p. 95), le taux court est donné par

$$r_t = x_t + \phi(t; \alpha)$$

  est une fonction déterministe qui va permettre la calibration à la courbe initiale des taux ZC du marché

- Le vecteur des paramètres α est déterminé par calibration aux prix/volatilités implicites des options (typiquement caps/floors et/ou swaptions).

Modèles avec shift déterministe

- Le prix ZC dans un modèle avec shift déterministe est

$$B(t,T) = \exp(-\int_t^T \phi(u;\alpha)du)\Pi^x(t,T,x_t;\alpha)$$

- Le taux forward instantané est

$$f(0,t) = \phi(t;\alpha) + f^x(0,t)$$

avec $f^x(0,t)$ note le taux forward instantané associé à la courbe des prix ZC: $T \to B^x(0,T)$.

- Le modèle avec shift déterministe reproduit parfaitement la courbe initiale des prix ZC du marché si et seulement si

$$\phi(t;\alpha) = f^M(0,t) - f^x(0,t)$$

- Ex: modèle CIR++

Plan

Caractérisation des modèles affines à un facteur

- Modèle de taux court

$$dr_t = \mu(t, r_t)dt + \sigma(t, r_t)dW_t \tag{8}$$

avec μ et σ des fonctions continues.

- Ce modèle de taux court (8) est affine si et seulement si

$$\begin{aligned} \mu(t,r) &= b(t) + \beta(t)r \\ (\sigma(t,r))^2 &= a(t) + \alpha(t)r \end{aligned}$$

pour a, α, b, β des fonctions déterministes continues.

Prix ZC dans modèles affines

Le prix ZC s'écrit comme

$$B(t,T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t}$$

avec fonctions m et n solutions du système d' équations de Riccati

$$\begin{aligned} \partial_t n(t,T) &= \frac{1}{2}\alpha(t)(n(t,T))^2 - \beta(t)n(t,T) - 1 \\ \partial_t m(t,T) &= -\frac{1}{2}a(t)(n(t,T))^2 + b(t)n(t,T) \end{aligned}$$

avec les conditions terminales $n(T,T) = m(T,T) = 0$

- Remark: les modèles de taux court étudiés dans les slides précédents sont des modèles à structure affine.

Prix option call sur ZC dans modèles affines

Option call européenne d'échéance T et de strike K sur une obligation ZC d' échéance $T+\theta$

- Payoff en T est
$$(B(T,T+\theta)-K)^+$$
- Dans un modèle affine, l'option est exercée ssi
$$B(T,T+\theta)\geq K \Leftrightarrow e^{m(T,T+\theta)-n(T,T+\theta)r_T}\geq K \Leftrightarrow r_T \leq \frac{m(T,T+\theta)-\ln K}{n(T,T+\theta)} =: r^*$$
- Prix en t sous proba risque neutre $\mathbb{Q}$

$$\begin{aligned}
\pi^{call}(t,T,T+\theta) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}(B(T,T+\theta)-K)^+|\mathcal{F}_t\right] \\
&= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}B(T,T+\theta)\mathbf{1}_{r_T\leq r^*}|\mathcal{F}_t\right]-\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}K\mathbf{1}_{r_T\leq r^*}|\mathcal{F}_t\right] \\
&= E_1-E_2
\end{aligned}$$

Prix option call sur ZC dans modèles affines (suite)

- On utilise proba T forward neutre $\mathbb{Q}^T$ pour E_2

$$E_2 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} K \mathbf{1}_{r_T \leq r^*} | \mathcal{F}_t\right] = KB(t,T)\mathbb{Q}^T(r_T \leq r^* | \mathcal{F}_t)$$

- On utilise proba $(T+\theta)$ forward neutre $\mathbb{Q}^{T+\theta}$ (restreint à $\mathcal{F}_T$, vu de la date t) pour E_1

$$E_1 = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds} B(T, T+\theta) \mathbf{1}_{r_T \leq r^*} | \mathcal{F}_t\right] = B(t, T+\theta)\mathbb{Q}^{T+\theta}(r_T \leq r^* | \mathcal{F}_t)$$

- Ainsi

$$\pi^{call}(t, T, T+\theta) = B(t, T+\theta)\mathbb{Q}^{T+\theta}(r_T \leq r^* | \mathcal{F}_t) - KB(t,T)\mathbb{Q}^T(r_T \leq r^* | \mathcal{F}_t)$$

- Les probabilités $\mathbb{Q}^{T+\theta}(r_T \leq r^* | \mathcal{F}_t)$ et $\mathbb{Q}^T(r_T \leq r^* | \mathcal{F}_t)$ peuvent souvent être calculées explicitement comme e.g. dans Vasicek Hull-White ou CIR.

Prix option call sur ZC dans modèle CIR

Dans le modèle CIR, le prix de l'option call européenne d'échéance T et de strike K sur une obligation ZC d' échéance $T+\theta$ est

$$\pi^{call}(t,T,T+\theta) = B(t,T+\theta)\Phi_{\chi^2}\left(2r^*(\phi+\psi+n(T,T+\theta)); \frac{4ab}{\sigma^2}, \frac{2\phi^2 r_t e^{\gamma(T-t)}}{\phi+\psi+n(T,T+\theta)}\right)$$

$$-KB(t,T)\Phi_{\chi^2}\left(2r^*(\phi+\psi); \frac{4ab}{\sigma^2}, \frac{2\phi^2 r_t e^{\gamma(T-t)}}{\phi+\psi}\right)$$

avec $\Phi_{\chi^2}(.;n,\lambda)$ la fonction de répartition de la loi χ^2 décentrée

$$\begin{aligned}
\gamma &:= \sqrt{a^2+2\sigma^2} \\
\phi &:= \frac{2\gamma}{\sigma^2(e^{\gamma(T-t)}-1)}, \\
\psi &:= \frac{a+\gamma}{\sigma^2}
\end{aligned}$$

- **Preuve**: Le taux court r_T suit la loi χ^2 décentrée aussi sous les probabilités forward $\mathbb{Q}^T$ et $\mathbb{Q}^{T+\theta}$ puis l'expression du prix du call est obtenue par le th. de Girsanov. Cf. le papier de Cox, Ingersoll et Ross (1985) pour les détails.

Modèles de taux court affines - généralisations

- Dans un modèles à 1 facteur, la dynamique des taux n'est pas toujours assez riche pour produire un modèle suffisamment réaliste.
  - Si par exemple on étudie un pay-off qui dépend de la loi de deux (ou encore plus que deux) taux ZC (ce qui est le cas par exemple pour les swaptions), la corrélation entre ces deux taux devient centrale
  - Or dans un modèle à 1 facteur, ces deux taux sont parfaitement corrélés...
- Pour obtenir une correlation non-triviale, on passe alors aux modèles à plusieurs facteurs.
  - modèles à plusieurs facteurs (typiquement 2-3 sont suffisants).
    ex : modèle G2++, où le processus de taux court est donné par la somme deux facteurs gaussiens plus une fonction déterministe comme celle dans le modèle à un facteur de Hull-White.
  - modèles basés sur un processus de Wishart (processus affine à valeurs matricielles)
- Autre généralisation: remplacer le mouvement brownien W par un processus stochastique avec des sauts
  - e.g.modèle affine dirigé par un processus de Lévy L (processus cadlag à accroissements indépendants et stationnaires).

Modèles de taux court non-affines - Black et Karasinski

Modèles de taux court non-affine de Black et Karasinski (1991)

$$d\ln(r_t) = (b(t) - a(t)\ln(r_t))dt + \sigma(t)dW_t, \quad r_0 > 0$$

avec $b(t), a(t), \sigma(t)$ des fonctions déterministes (souvent σ et a sont pris constants)

- Modèle utilisé pour le pricing des options exotiques, comme e.g. des options américaines/bermudiennes sur les obligations et des swaptions américaines/bermudiennes
- Le cas particulier de ce modèle avec b, σ et a constants est le modèle de Vasicek exponentiel : le taux court r est alors $r_t = exp(y_t), t \geq 0$ avec y taux court Vasicek standard.

Modèle de Black et Karasinski

- Le taux r_t dans le modèle de Black et Karasinski est toujours positif et suit une loi log-normale.
- Problème d'explosion de la valeur du compte d?épargne

$$\mathbb{E}[e^{\int_0^t r_u du}] = \infty$$

même pour t petit.
- Pas d'expressions analytiques pour les prix ZC et les options sur les ZC
- Pour implementer ce modèle et pour calculer ces prix (et aussi les prix des pay-offs plus exotiques) on utilise un arbre trinomial (voir méthode de lattice par Hull et White dans Brigo et Mercurio (2005), p. 85-88)
- Cette procédure aide à résoudre aussi le problème d'explosion de la valeur du compte d'épargne (nombre d'état fini dans l'arbre, ainsi l'espérance est finie)