Fiche Calcul Stochastique

Simon Depaule

Novembre 2023

Table des matières

1 Chapitre 0 - Rappels sur les variables gaussiennes

Soit $X \in \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On a

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \exp\left(\mu t + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \quad \textbf{Fonction génératrice des moments}$$

$$\mathbb{E}[e^{itX}] = \exp\left(i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right) \quad \textbf{Fonction caractéristique}$$

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Théorème 1.1.1 (Queue de distribution gaussienne) : Si Z suit la loi gaussienne centrée réduite, alors pour tout $x > 0$,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right) e^{-x^2/2} \leq \mathbb{P}(Z > x) \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{x} e^{-x^2/2},$$

$$\mathbb{P}(\xi > x) \leq e^{-x^2/2}$$

Proposition 1.1.4 (Convergence de suite de variables gaussiennes). Soit (ξ_n) une suite de variables aléatoires gaussiennes, telle que ξ_n suive la loi $\mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$.

(i) *Si la suite (ξ_n) converge en loi vers une variable aléatoire ξ, alors ξ suit la loi gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, où $\mu := \lim_{n\to\infty} \mu_n$ et $\sigma := \lim_{n\to\infty} \sigma_n$.*

(ii) *Si la suite (ξ_n) converge en probabilité vers ξ, alors la convergence a lieu dans L^p, pour tout $p \in [1, \infty[$.*

Définition 1.1.5 (Vecteur aléatoire gaussien) : Un vecteur aléatoire $(X_1, \ldots, X_n)$ est dit **gaussien** si toute combinaison linéaire de ses coordonnées (c'est-à-dire $\sum_{j=1}^n \lambda_j X_j = \lambda_1 X_1 + \cdots + \lambda_n X_n$ pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$) suit une loi gaussienne.

Remarque 1.1.6. Si $(X_1, \ldots, X_n)$ est un vecteur gaussien, alors chaque coordonnée est une variable gaussienne réelle. Attention, la réciproque est **fausse**. □

Proposition 1.1.7 : Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ un **vecteur gaussien**. On définit :

$$\begin{aligned} m &:= \mathbb{E}[X] \\ Q_{ij} &:= \mathrm{Cov}(X_i, X_j) = \mathbb{E}\left[(X_i - m_i)(X_j - m_j)\right] \quad i, j = 1, \dots, n \end{aligned}$$

Alors :

(1) La **fonction caractéristique** de X est donnée par

$$\mathbb{E}[\exp(i\langle X, u\rangle)] = \exp(i\langle m, u\rangle - \frac{1}{2}\langle Qu, u\rangle), \quad u \in \mathbb{R}^n,$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

(2) m et Q **déterminent uniquement** la loi de X. On écrit $X \sim \mathcal{N}(m, Q)$.

(3) Si $\det Q \neq 0$ alors la loi de X admet une densité explicite :

$$\mathcal{N}(m, Q)(dx) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)^n \det Q}} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle Q^{-1}(x - m), x - m\rangle\right) dx, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

(4) Si $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est une **application linéaire**, alors AX est un **vecteur gaussien** avec loi $\mathcal{N}(Am, AQA^T)$ où $A^T : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ est la matrice transposée.

(5) Pour que les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ soient **indépendantes**, il faut et il suffit que la matrice Q des covariances de X soit **diagonale.**

(6) Soit $(\eta_1, \dots, \eta_N)$ un vecteur gaussien et $0 = n_1 < n_2 < \dots < n_m = N$. Pour que la famille de vecteurs aléatoires $(\theta_1, \dots, \theta_{m-1})$, où $\theta_k = (\eta_{n_k+1}, \dots, \eta_{n_{k+1}})$, soit indépendante, il faut et il suffit que $\mathrm{Cov}(\eta_i, \eta_j) = 0$, $\forall i, j \leq N$ tels que $n_k < i \leq n_{k+1}$ et $n_h < j \leq n_{h+1}$ pour $k \neq h$.

Remarques :

- La matrice de variance $Q \in S_n^+(\mathbb{R})$ est **semi-définie positive** :

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Q\lambda, \lambda\rangle = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \lambda_i \lambda_j Q_{ij} = \mathbb{V}ar(\lambda_1 X_1 + \ldots + \lambda_n X_n) \geq 0$$

- Dans (3) : $\lambda \in \mathbb{R}^n, \quad \langle Q\lambda, \lambda\rangle > 0 \iff det(Q) > 0$ cas non dégénéré

Proposition : Soit (X, Y) un **vecteur gaussien**, alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X|Y] = \mathbb{E}[X] + a(Y - \mathbb{E}[Y]), &\quad \text{où } \ a = \frac{Cov(X, Y)}{\mathbb{V}ar(Y)} \\ X|Y \sim \mathcal{N}\left(\mathbb{E}[X|Y], \mathbb{V}ar(W)\right), &\quad \text{où } \ W = X - aY \perp\!\!\!\perp Y \end{aligned}$$

2 Chapitre 1 : Mouvement Brownien

2.1 Processus à temps continu

Définition I.1 (Processus Stochastique) : Soit :

- $(E, \mathcal{E})$ un **espace mesurable**
- $\mathbb{T}$ un **ensemble quelconque**
- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un **espace de probabilité**

On dit que $(X_t, t \in \mathbb{T})$ est un **processus stochastique** sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ à valeurs dans $(E, \mathcal{E})$ si pour tout $t \in \mathbb{T}$, X_t est une variable aléatoire de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(E, \mathcal{E})$

Remarque :

- $\mathbb{T} = \mathbb{N} \Rightarrow$ Processus à temps discret
- $\mathbb{T} = \mathbb{R}_+ \Rightarrow$ Processus à temps continu

Définition : Soit un **processus stochastique** $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ et un $n-$uplet $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$. Le vecteur $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ forme une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

- Les variables X_t sont appelées **marginales uni-dimensionnelles**
- Les vecteurs $(X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$ sont appelées **marginales finies-dimensionnelles**
- Ces variables aléatoires peuvent être vu comme des projections de l'application :

$$X : \left| \begin{array}{lcl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}_+} \\ \omega & \longmapsto & (W_t(\omega), t \in \mathbb{R}_+) \end{array} \right.$$

qui prend ses valeurs dans un **espace de trajectoires**

Lemme I.2 : Si $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est un processus stochastique, alors l'application X définie ci-dessus est **mesurable** de $(\Omega, \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{R}_+})$. Ainsi un processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ peut être vu comme une **variable aléatoire** à valeurs dans un **espace de trajectoires**

Remarque : La loi d'un processus stochastique est entièrement caractérisée par les lois de ses **marginales fini-dimensionnelles**.

Définition I.4 : On dit qu'un processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est **gaussien** si toutes ses marginales finies-dimensionnelles forment des **vecteurs gaussiens**. Autrement dit, $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est gaussien si pour tous $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}_+$ et tous $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ la variable aléatoire $\sum_{i=1}^n \lambda_i X_{t_i}$ est gaussienne.

Proposition I.5 : La loi d'un **processus gaussien** $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est complètement caractérisée par la donnée de sa **fonction moyenne** et de sa **fonction de covariance**

$$t \mapsto \mathbb{E}[X_t], \quad (s,t) \mapsto \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$$

2.2 Définition du Mouvement Brownien

Définition I.6 Un processus stochastique $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est appelé **Mouvement Browien** (issu de 0) si :

1. B est un **processus gaussien, centré de fonction de covariance**

$$\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = \mathbb{E}[B_s B_t] = \min(s,t) := s \wedge t$$

2. Les **trajectoires** de B sont **continues**

Remarque : Il existe des processus gaussiens qui ne sont pas continues. Prendre X un processus gaussien centré de fonction de covariance égale à

$$\Gamma(s,t) = \min(s,t)\mathbf{1}_{s,t\in\mathbb{Q}_+}$$

Alors X est constant égal à 0 aux temps irrationnels et a une variance non triviale aux temps rationnels : s'il était continu, il serait constant égal à 0 partout.

Proposition I.7 : Soit $(B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un processus stochastique. Il y a équivalence entre :

- **(i)** B est un **processus gaussien centré de fonction de covariance** $\mathrm{Cov}(B_s, B_t) = s \wedge t$
- **(ii)** B vérifie :
  - **(a)** $B_0 = 0$ p.s
  - **(b)** Pour tout $n \geq 2$, pour tous $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n$, les variables aléatoires $B_{t_1}, B_{t_2} - B_{t_1}, \ldots, B_{t_n} - B_{t_{n-1}}$ sont indépendantes **(accroissements indépendants)**
  - **(c)** Pour tous $0 \leq s \leq t$ $B_t - B_s \sim \mathcal{N}(0, t-s)$ **(Stationnarité)**

Remarque : Ainsi tout processus B dont les trajectoires sont continues et qui satisfait les propriétés **(a),(b),(c)** est un **Mouvement Brownien**

Corollaire I.8 : Soit B un **Mouvement Brownien**. Pour tout $n \geq 1$ et tous $0 \leq t_1 < \ldots < t_n$ la loi du vecteur $(B_{t_1}, B_{t_2}, \ldots, B_{t_n})$ admet une densité sur $\mathbb{R}^n$ donnée par

$$p(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}\sqrt{t_1(t_2-t_1)\ldots(t_n-t_{n-1})}} \exp\left(-\sum_{i=1}^{n} \frac{(y_i - y_{i-1})^2}{2(t_i - t_{i-1})}\right)$$

2.3 Continuité des trajectoires

Définition I.9 : Soient deux processus stochastiques $(X_t, t \in I)$ et $(\tilde{X}_t, t \in I)$ indexés par un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, et définis sur un même espace de probabilité. On dit que $\tilde{X}$ est une **modification de X** si

$$\forall t \in I, \quad \mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t) = 1$$

Définition I.10 : Soient deux processus stochastiques $(X_t, t \in I)$ et $(\tilde{X}_t, t \in I)$ indexés par un ensemble $I \subset \mathbb{R}$, et définis sur un même espace de probabilité. On dit que X et $\tilde{X}$ sont **indistinguables** s'il existe un sous ensemble $N \subset \Omega$ qui est négligeable (i.e N est inclus dans un évènement de mesure nulle) et tel que

$$\forall w \in \Omega \setminus N, \forall t \in I, X_t(w) = \tilde{X}_t(w)$$

Théorème I.12 (Théorème de continuité de Komogorov) : Soit $(X_t, t \in I)$ un processus stochastique à valeurs réelles indiqué par un intervalle borné $I \subset \mathbb{R}$. Supposons qu'il existe des réels $q, \epsilon, C > 0$ tels que pour tous $s, t \in I$

$$\mathbb{E}[|X_s - X_t|^q] \leq C|t-s|^{1+\epsilon}.$$

Alors il existe une modification $\widetilde{X}$ de X dont les trajectoires sont Hölderiennes d'exposant α pour tout $\omega \in \Omega$ et tout $\alpha \in]0, \epsilon/q[$, c'est-à-dire, pour tout $\alpha \in]0, \epsilon/q[$ il existe une variable aléatoire positive C_α telle que pour tous $s, t \in I$ et tout $\omega \in \Omega$

$$|\widetilde{X}_s(\omega) - \widetilde{X}_t(\omega)| \leq C_\alpha(\omega)|t-s|^\alpha.$$

Lemme I.13 : Soit D l'ensemble dénombrable des nombres dyadiques de l'intervalle $[0,1]$. Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. On suppose qu'il existe $\alpha, K > 0$ tels que pour tout entier $n \geq 1$ et tout $i \in \{1, \dots, 2^n\}$

$$|f((i-1)2^{-n}) - f(i2^{-n})| \leq K2^{-n\alpha}.$$

Alors pour tous $s, t \in D$

$$|f(s) - f(t)| \leq \frac{2K}{1-2^{-\alpha}}|t-s|^\alpha.$$

Corollaire I.14 : Le Mouvement Brownien existe.

2.4 Quelques propriétés du mouvement Brownien

Dans cette partie :

- $B = (B_t, t \in \mathbb{R}_+)$ désignera toujours un **Mouvement Brownien.**
- Pour tout $t \geq 0$, on note $\mathcal{F}_t := \sigma(B_s, s \in [0,t])$: il s'agit de la plus petite tribu contenant toute l'information encodée par la trajectoire Brownienne jusqu'au temps t
- On notera $\mathcal{F}_\infty := \sigma(B_s, s \geq 0)$

Proposition I.17 (Propriétés d'invariance) :

- **Invariance par changement de signe :** $-B$ est un Mouvement Brownien
- **Inversion du temps :** $\tilde{B}_t = tB_{\frac{1}{t}}$ est un Mouvement Brownien
- **Invariance par changement d'échelle :** Pour tout $\lambda > 0$, le processus B^λ défini par $B_t^\lambda := \lambda^{-1} B_{t\lambda^2}$ est un Mouvement Brownien
- **Invariance par translation :** Pour tout $T \geq 0$, le processus $B^{(T)}$ défini par $B_t^{(T)} := B_{T+t} - B_T$ est un Mouvement Brownien

Proposition I.18 (Propriété de Markov simple) : Pour tout $T \geq 0$, le processus $B^{(T)}$, défini par $B_t^{(T)} := B_{T+t} - B_T$ est un mouvement Brownien **indépendant de la tribu $\mathcal{F}_T$**

Proposition I.19 (Loi du tout ou rien) : La tribu

$$\mathcal{F}_{0_+} := \bigcap_{s>0} \mathcal{F}_s$$

est **grossière** au sens suivant : pour tout $A \in \mathcal{F}_{0_+}, \mathbb{P}(A) = 0$ ou 1

Corollaire I.20 : On a presque sûrement

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \sup_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s > 0, \quad \inf_{0 \leq s \leq \varepsilon} B_s < 0$$

Par ailleurs pour tout $a \in \mathbb{R}$, si l'on note $T_a := \inf\{t \geq 0 \ : \ B_t = a\}$ alors presque sûrement

$$\forall a \in \mathbb{R}, \quad T_a < \infty$$

En conséquence, presque sûrement

$$\limsup_{t \to \infty} B_t = +\infty, \quad \liminf_{t \to \infty} B_t = -\infty$$

2.5 Propriété de Markov forte du mouvement Brownien

Définition I.21 (temps d'arrêt) : On dit qu'une variable aléatoire T à valeurs dans $[0, \infty]$ est un **temps d'arrêt** si pour tout $t \geq 0$, l'événement $\{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$.

Remarque : Cela signifie que l'information encodée dans la tribu $\mathcal{F}_t$ suffit à déterminer si T s'est réalisé avant le temps t ou pas.

Lemme I.22 : Soit T un **temps d'arrêt**. Pour tout $t \geq 0$, les événements $\{T < t\}$ et $\{T = t\}$ sont dans $\mathcal{F}_t$. Par ailleurs, pour tout $n \geq 1, T_n := 2^{-n}(\lfloor 2^n T \rfloor + 1)$ est un **temps d'arrêt**

Définition (Tribu du passé) : Étant donné un temps d'arrêt T, on introduit la tribu du passé avant T en posant

$$\mathcal{F}_T := \{A \in \mathcal{F}_\infty : \forall t \geq 0, A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t\}$$

Théorème I.23 (Propriété de Markov forte) : Soit T un temps d'arrêt fini presque sûrement. On pose pour tout $t \geq 0$

$$B_t^{(T)} := \mathbf{1}_{\{T \leq \infty\}}(B_{T+t} - B_T)$$

Alors le processus $B^{(T)}$ est un **mouvement Brownien indépendant de $\mathcal{F}_T$**

Théorème I.24 (Principe de réflexion) : Notons S_t le **supremum courant** du mouvement Brownien i.e

$$S_t := \sup_{0 \leq s \leq t} B_s, \quad t \geq 0$$

Alors pour tout $t > 0$, tout $a \geq 0$ et tout $b \leq a$, on a

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b)$$

En particulier, S_t a la même loi que $|B_t|$

2.6 Mouvement Brownien multi-dimensionnel

Définition : Un processus stochastique $(B_t, t \in \mathbb{R}_+) = ((B_t^{(1)}, \ldots, B_t^{(d)}), t \in \mathbb{R}_+)$ à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est un **mouvement Brownien en dimension d** si les processus $(B_t^{(i)}, t \in \mathbb{R}_+),\ i \in \{1, \ldots, d\}$ sont des **mouvement Browniens indépendants**

3 Chapitre 2 : Martingales

3.1 Martingales à temps continu

Dans ce chapitre, $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}, \mathbb{P})$ est un espace de probabilité filtré, c'est à dire un espace de probabilité muni d'une collection $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ satisfaisant $s \leq t \Rightarrow \mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$. Une telle collection est appelée **filtration**.

Définition II.1 (Martingale) : Soit $M = (M_t, t \in \mathbb{R}_+)$ un processus stochastique à valeurs dans $\mathbb{R}$. On dit que M est une **martingale** si

1. M est **adapté** à la filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{R}_+}$, c'est à dire pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, M_t est $\mathcal{F}_t-$mesurable
2. Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, M_t est **intégrable**
3. Pour tous $0 \leq s \leq t$, $\quad \mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] = M_s$ p.s

Remarques :

- On dira que M est une **sur-martingale** si M vérifie le point 1 et 2 et que $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \leq M_s$
- On dira que M est une **sous-martingale** si M vérifie le point 1 et 2 et que $\mathbb{E}[M_t|\mathcal{F}_s] \geq M_s$

Lemme II.2 : Soient M une **martingale** (resp. une **sous-martingale**) et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction **convexe** (resp. **convexe croissante**). On suppose que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $f(M_t)$ est intégrable. Alors $f(M)$ est une **sous-martingale**

Définition II.3 : Soit T un temps d'arrêt. On appelle **tribu du passé avant T** la collection $\mathcal{F}_T$ de tous les événements $A \in \mathcal{F}$ tels que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\ A \cap \{T \leq t\} \in \mathcal{F}_t$

Lemme II.5 : Soient S, T deux temps d'arrêt. Alors $S \wedge T$ est encore un temps d'arrêt et $\mathcal{F}_{S\wedge T} = \mathcal{F}_S \cap \mathcal{F}_T$

Lemme II.6 : Soit X un processus stochastique à **trajectoires continues** et soit T un **temps d'arrêt fini p.s**. Alors X_T est une variable aléatoire $\mathcal{F}_T$ mesurable.

Si X_t admet une limite p.s quand $t \to \infty$, notée X_∞, alors X_T est une v.a $\mathcal{F}_T$ mesurable sans condition de finitude sur T.

3.1.1 Inégalités maximales

Proposition II.8 :

- Si M est une **sous-martingale** à trajectoires continues alors pour tout $a > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$a\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} M_s > a\right) \leq \mathbb{E}[M_t^+]$$

- Si M est une **sur-martingale** à trajectoires continues alors pour tout $a > 0$ et pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$a\mathbb{P}\left(\sup_{0\leq s\leq t} M_s > a\right) \leq \mathbb{E}[M_0] + \mathbb{E}[M_t^-]$$

Proposition II.9 (Inégalité maximale de Doob) : Soit M une **martingale à trajectoires continues**. Posons $M_t^* := \sup_{0 \leq s \leq t} |M_s|$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Pour tout $p > 1$ et tout $\mathbb{R}_+$

$$\mathbb{E}[(M_t^*)^p] \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \mathbb{E}[|M_t|^p]$$

Corollaire II.10 : Soit M une martingale à trajectoires continues et $p > 1$. Si M est **bornée** dans L^p c'est à dire $\sup_t \mathbb{E}[|M_t|^p] < \infty$ alors la famille de v.a $|M_t|^p, t \in \mathbb{R}_+$ est **uniformément intégrable**

3.1.2 Convergence

Théorème II.11 : Soit M une martingale (resp. sous-martingale, resp. sur-martingale) à trajectoires continues, et **bornée dans** L^1 c'est à dire $\sup_{t \in \mathbb{R}_+} \mathbb{E}[|M|_t] < \infty$. Alors quand $t \to \infty$, M_t converge presque sûrement vers une variable aléatoire intégrable M_∞

3.1.3 Martingales fermées

Définition II.12 : On dit qu'une martingale M est **fermée** s'il existe une variable aléatoire $X \in L^1$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$M_t = \mathbb{E}[X|\mathcal{F}_t]$$

Théorème II.13 : Soit M une martingale à trajectoires continues. Il y a équivalence entre :

- **(i)** M est **fermée**
- **(ii)** M est **uniformément intégrable**
- **(iii)** M converge p.s et dans L^1 vers une variable aléatoire M_∞ intégrable

Si l'une des trois conditions est vérifiée, alors nécessairement M est fermée par sa limite M_∞

Théorème II.14 (Théorème d'arrêt) : Soit M une martingale à trajectoires continues et **fermée**. Pour tout **temps d'arrêt** T on a presque surement

$$M_T = \mathbb{E}[M_\infty|\mathcal{F}_T]$$

Par ailleurs pour tous **temps d'arrêt** $S \leq T$, on a presque surement

$$M_S = \mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S]$$

Corollaire II.15 (Théorème d'arrêt borné) : Soit M une martingale. Soient $S \leq T$ deux **temps d'arrêt bornés**, c'est à dire qu'il existe $t_0 \geq 0$ (déterministe) tel que $0 \leq S \leq T \leq t_0$ p.s. Alors M_S et M_T sont intégrables et presque sûrement

$$\mathbb{E}[M_T|\mathcal{F}_S] = M_S$$

Corollaire II.16 : Soient M une martingale à trajectoires continues et **fermée**, et T un **temps d'arrêt**. On pose $M_t^T := M_{T \wedge t}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$. Alors M^T est une **martingale fermée** par M_t

Corollaire II.17 : Soient $(M_t, t \in \mathbb{R}_+)$ une **martingale à trajectoires continues**, et T un **temps d'arrêt**. Alors M^T est encore une **martingale.**

3.2 Martingales locales

Définition II.18 (Martingale locale) : On appelle **martingale locale** issue de 0, tous processus stochastique $M = (M_t, t \in \mathbb{R}_+)$ adapté, à trajectoires continues, qui vérifie $M_0 = 0$ p.s et pour lequel il existe une **suite croissante de temps d'arrêt** $(T_n, n \in \mathbb{N})$ **telle que** $T_n \nearrow \infty$ et M^{T_n} est une martingale.

Plus généralement, on appelle **martingale locale** tout procesuss stochastique $M = (M_t, t \in \mathbb{R}_+)$ tel que M_0 est $\mathcal{F}_0-$mesurable et $N_t = M_t - M_0, t \in \mathbb{R}_+$ est une martingale locale issue de 0.

Définition : On dira qu'une suite $(T_n, n \in \mathbb{N})$ de temps d'arrêt **réduit** M si p.s $T_n \nearrow \infty$ et $M^{T_n} - M_0$ est une martingale.

Proposition II.19

1. Toute **martingale** à trajectoires continues est une **martingale locale**
2. Soient M une **martingale locale** et T un **temps d'arrêt**. Alors M^T est encore une **martingale locale.**
3. Soit M une **martingale locale**. S'il existe une v.a **positive** $Z \in L^1$ telle que pour tout $t \geq 0, |M_t| \leq Z$ alors M est une **martingale (uniformément intégrable)**
4. Si M est une **martingale locale issue de 0**, alors il existe une suite $(T_n, n \in \mathbb{N})$ qui réduit M et telle que M^{T_n} est une **martingale uniformément intégrable.**

3.3 Variation finie et martingales

Définition : Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, on appelle **variation** de f la quantité

$$V(f, s, t) = \sup_{(t_k)_k} \sum_k |f(t_{k+1}) - f(t_k)|$$

où le supremum porte sur toutes les subdivisions finies $s = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = t$ de l'intervalle $[s, t]$.

- On dit que f est à **variation finie** si $V(f, s, t) < \infty$ pour tout $0 \leq s \leq t$
- Toute fonction continûment différentiable vérifie

$$V(f, s, t) = \int_s^t |f'(r)| \, dr < \infty$$

- Toute fonction monotone vérifie

$$V(f, s, t) = |f(t) - f(s)|$$

Proposition II.22 : Une fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ est à **variation finie** si et seulement si c'est la différence de deux fonctions croissantes.

Lemme II.23 : **Le mouvement brownien n'est pas à variation finie** i.e pour tous $0 \leq s < t, V(B,s,t) = \infty$

Théorème II.24 : Soit M une **martingale locale issue de 0**. Si M est un processus à **variation finie** alors presque surement pour tout $t \in \mathbb{R}_+,\ M_t = 0$

3.4 Variation quadratique

Théorème II.26 : Soit M une **martingale locale**. Il existe un unique processus à trajectoires continues et **croissant**, noté $(\langle M,M\rangle_t, t \geq 0)$ et appelé **variation quadratique** de M, tel que $M_t^2 - \langle M,M\rangle_t$ soit une **martingale locale** et $\langle M,M\rangle_0 = 0$.

De plus, pour tout $t > 0$ et pour toute suite indicée par $n \geq 1$ de subdivisions emboîtées $0 = t_0^n < t_1^n < \ldots < t_{p_n}^n = t$ de l'intervalle $[0,t]$ dont le pas tend vers 0 quand $n \to \infty$, la convergence suivante a lieu en probabilité

$$\langle M,M\rangle_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{p_n} (M_{t_i^n} - M_{t_{i-1}^n})^2$$

Remarque II.27 : Si M est une **martingale locale** et T un temps d'arrêt alors $\langle M^T, M^T\rangle_t = \langle M,M\rangle_{t\wedge T}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

Proposition II.28 : Soit M une **martingale locale issue de 0**. Il y a équivalence entre

1. M est une **vraie martingale bornée** dans L^2
2. $\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_\infty] < \infty$

Sous ces hypothèses, $M_t^2 - \langle M,M\rangle_t$ est une **martingale uniformément intégrable.**

Corollaire II.29 : Soit M une **martingale locale issue de 0**. Il y a équivalence entre :

1. M est une **vraie martingale de carré intégrable**
2. $\mathbb{E}[\langle M,M\rangle_t] < \infty$ pour tout $t \geq 0$

Sous ces hypothèses, $M_t^2 - \langle M,M\rangle_t$ est une **martingale**

Définition (Crochet de deux martingales) : Soient M,N deux martingales locales, on introduit :

$$\langle M,N\rangle_t := \frac{1}{2}\left(\langle M+N, M+N\rangle_t - \langle N,N\rangle_t - \langle M,M\rangle_t\right) \quad t \in \mathbb{R}_+$$

Ce processus est l'unique processus à variation finie issu de 0 tel que $M_tN_t - \langle M,N\rangle_t$ est une martingale locale.

4 Chapitre 3 : Intégrale stochastique et formule d'Itô

4.1 Intégrale stochastique contre le mouvement Brownien

4.1.1 Intégrale stochastique des processus élémentaires

Définition (Processus élémentaire) : On appelle **processus élémentaire** tout processus H qui s'écrit de la forme

$$H_t(w) = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(w)\mathbf{1}_{]t_i,t_{i+1}]}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, w \in \Omega$$

où p est un entier positif ou nul, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_p$ une collection de réels positifs et chaque $H^{(i)}$ une variable aléatoire $\mathcal{F}_{t_i}-$mesurable bornée.

Notation : On notera $\mathcal{E}$ la classe des **processus élémentaires**.

Définition (Intégrale d'un processus élémentaire) : Pour tout **processus élémentaire** H, on définit l'intégrale de H contre B comme la variable aléatoire

$$I(H) := \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(w)(B_{t_{i+1}} - B_{t_i})(w)$$

Pour définir l'intégral de H contre B **restreinte** à chaque intervalle $[0,t]$, on pose

$$I_t(H) := I(H\mathbf{1}_{[0,t]}) = \sum_{i=0}^{p-1} H^{(i)}(w)(B_{t_{i+1}\wedge t} - B_{t_i\wedge t})$$

Il est clair que le processus $(I_t(H), t \in \mathbb{R}_+)$ est constant égal à $I(H)$ à partir du temps t_p

Remarque Par exemple si $t \in]t_1, t_2[$ alors

$$I_t(H) = H^{(0)}(w)(B_{t_1} - B_{t_0}) + H^{(1)}(w)(B_t - B_{t_1})$$

Lemme III.2 : Pour tout processus élémentaire H, le processus $(I_t(H), t \in \mathbb{R}_+)$ est une **martingale continue issue de 0**, bornée dans L^2 et de variation quadratique

$$\langle I.(H), I.(H)\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, ds$$

Proposition : L'espace des processus élémentaires $\mathcal{E}$ est un espace vectoriel, et on a que pour tous $H, K \in \mathcal{E}$

$$\langle I.(H), I.(K)\rangle_t = \int_0^t H_s K_s\, ds$$

De plus on a

$$\mathbb{E}[I(H)^2] = \mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2\, ds\right]$$

4.1.2 Intégrale stochastique des processus progressifs intégrables

Définition : On considère la classe $\mathcal{H}^2$ de l'ensemble des processus $(H_s, s \in \mathbb{R}_+)$ tels que

- **(i) Mesurabilité :** L'application $(s, w) \mapsto H_s(w)$ est mesurable de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- **(ii) Progressive mesurabilité :** Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $(s, w) \mapsto H_s(w)$ est mesurable de $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- **(iii) Intégrabilité :** $\mathbb{E}\left[\int_0^\infty H_s^2\, ds\right] < \infty$

Lemme III.3 : Tout processus stochastique adapté dont les trajectoires sont continues à gauche et vérifie les propriétés **(i)** et **(ii)**. En particulier, $\mathcal{E} \subset \mathcal{H}^2$

Lemme III.4 : L'ensemble $\mathcal{E}$ est dense dans $\mathcal{H}^2$

Proposition III.5 : Pour tout $H \in \mathcal{H}^2$, le processus $(I_t(H), t \in \mathbb{R}_+)$ est une martingale continue issue de 0, bornée dans L^2 et de variation quadratique

$$\langle I.(H), I.(H)\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, ds$$

4.1.3 Intégrale stochastique des processus progressifs localement intégrables

Définition : On considère l'espace $\mathcal{H}^2_{loc}$ de tous les processus H vérifiant

- **(i) Mesurabilité :** L'application $(s, w) \mapsto H_s(w)$ est mesurable de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ dans $\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- **(ii) Progressive mesurabilité :** Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $(s, w) \mapsto H_s(w)$ est mesurable de $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$
- **(iii) Intégrabilité locale :** Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^t H_s^2\, ds < \infty$ p.s

Définition : Soit $H \in \mathcal{H}^2_{loc}$. On considère la suite de temps d'arrêt $T_n := \inf\{t \geq 0 : \int_0^t H_s^2\, ds \geq n\}$. La suite T_n est croissante et converge vers $+\infty$ p.s. Pour tout n, le processus tronqué $H_t^{(n)} := H_t \mathbf{1}_{[0,T_n]}$ appartient à $\mathcal{H}^2$. De plus, pour tout $t \geq 0$, la suite $I_t(H^{(n)})$ est constante à partir du premier rang n ou $T_n \geq t$. On définit alors

$$I_t(H) = \lim_{n\to\infty} I_t(H^{(n)})$$

Lemme III.6 : Pour tout $H \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}$, le processus $(I_t(H), t \in \mathbb{R}_+)$ est une **martingale locale issue de 0** de variation quadratique

$$\langle I.(H), I.(H)\rangle_t = \int_0^t H_s^2\, ds.$$

Remarque : Dans la suite, on manipulera l'intégrale stochastique à l'aide de la notation naturelle suivante :

$$I_t(H) = \int_0^t H_s \, dB_s, \quad t \geq 0.$$

Remarque III.7 : La notion de martingale locale prend tout son sens ici. **L'intégrale stochastique d'un processus H adapté et à trajectoires continues n'est, en général, pas une martingale mais seulement une martingale locale.** On peut ainsi fournir de nombreux exemples de martingales locales.

4.1.4 Un résultat d'approximation

Proposition III.8 : Soit H un processus continu adapté. Pour tout $t > 0$ et toute suite $0 = t_0^n < \cdots < t_{p_n}^n = t$ de subdivisions de $[0,t]$ de pas tendant vers 0, la convergence suivante a lieu en probabilité

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{k=0}^{p_n - 1} H_{t_i^n} (B_{t_{i+1}^n} - B_{t_i^n}) = \int_0^t H_s \, dB_s.$$

4.2 Integrale stochastique contre une martingale continue

Proposition : Soit $\mathcal{H}^2_{\text{loc}}(M)$ l'ensemble des processus H vérifiant :

(i) (*Mesurabilité*) l'application $(s,\omega) \mapsto H_s(\omega)$ est mesurable de $(\mathbb{R}_+ \times \Omega, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+) \otimes \mathcal{F})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

(ii) (*Progressive mesurabilité*) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, l'application $(s,\omega) \mapsto H_s(\omega)$ est mesurable de $([0,t] \times \Omega, \mathcal{B}([0,t]) \otimes \mathcal{F}_t)$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$,

(iii) (*Intégrabilité locale*) pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $\int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s < \infty$ p.s.

Pour tout $H \in \mathcal{H}^2_{\text{loc}}(M)$, il existe un processus $(I_t(H), t \in \mathbb{R}_+)$ qui est une **martingale locale issue de 0** de variation quadratique

$$\langle I(H), I(H)\rangle_t = \int_0^t H_s^2 d\langle M, M\rangle_s.$$

Ce processus est caractérisé par la propriété suivante : il s'agit de l'unique martingale locale issue de 0 telle que pour toute martingale locale N

$$\langle I(H), N\rangle_t = \int_0^t H_s d\langle M, N\rangle_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Là encore, on utilisera la notation

$$I_t(H) = \int_0^t H_s dM_s, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

4.3 Formule d'Itô

Définition III.9 : Un processus stochastique $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est une **semi-martingale** s'il existe :

- Une **martingale locale issue de 0** : M_t
- Un **processus à variation finie** et à trajectoires continues A
- Une v.a. $\mathcal{F}_0$-mesurable X_0

tels que

$$X_t = X_0 + M_t + A_t, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Théorème III.10 (Formule d'Itô en dimension 1) : Soit X une **semi-martingale** et soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{1,2}$. Alors le processus $(f(t, X_t), t \in \mathbb{R}_+)$ satisfait presque sûrement : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t \partial_s f(s, X_s)\, ds + \int_0^t \partial_x f(s, X_s)\, dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t \partial_x^2 f(s, X_s)\, d\langle X, X\rangle_s.$$

Remarques III.11 :

- L'intégrale contre dX_s est la somme de deux termes : une intégrale stochastique contre la partie martingale locale de X
$$\int_0^t \partial_x f(s, X_s) dM_s,$$
et une intégrale classique contre la partie à variation finie de X
$$\int_0^t \partial_x f(s, X_s) dA_s.$$
- En notation différentielle cette formule s'écrit
$$df(t, X_t) = \partial_t f(t, X_t)dt + \partial_x f(t, X_t)dX_t + \frac{1}{2}\partial_x^2 f(t, X_t)d\langle X, X\rangle_t.$$

Théorème III.12 (Formule d'Itô en dimension quelconque) : Soient $X^{(1)}, \dots, X^{(d)}$ d semi-martingales et soit $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $C^{1,2}$. Alors le processus $(f(t, X_t), t \in \mathbb{R}_+)$ satisfait l'équation

$$\begin{aligned} f\big(t, X_t^{(1)}, \dots, X_t^{(d)}\big) = f\big(0, X_0^{(1)}, \dots, X_0^{(d)}\big) &+ \int_0^t \partial_s f\big(s, X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(d)}\big)\, ds \\ &+ \sum_{i=1}^d \int_0^t \partial_{x(i)} f\big(s, X_s^{(1)}, \dots, X_s^{(d)}\big)\, dX_s^{(i)} \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^d \int_0^t \partial^2_{x(i),x(j)} f\big(s, X_s\big)\, d\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_s. \end{aligned}$$

5 Chapitre 4 - Outils en calcul stochastique

5.1 Martingales exponentielles

Proposition IV.1 : Soit L une **martingale locale**. On définit

$$\mathcal{E}(L)_t := \exp\left(L_t - \frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Le processus $(\mathcal{E}(L)_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est une **martingale locale.**

Théorème IV.3 (Novikov) : Soit L une **martingale locale.** On fixe $t > 0$. Si

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(\frac{1}{2}\langle L, L\rangle_t\right)\right] < \infty,$$

alors $(\mathcal{E}(L)_s, s \in [0, t])$ est une **martingale.**

5.2 Caractérisation de Lévy et théorème de Dubins-Schwarz

Théorème IV.5 (Caractérisation de Lévy du mouvement Brownien) : Soit X un **processus adapté, à trajectoires continues et issu de 0**. Il y a équivalence entre :

(i) X est un **mouvement Brownien**,

(ii) X est une **martingale locale et** $\langle X, X\rangle_t = t$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$.

Théorème IV.6 (Caractérisation de Lévy du mouvement Brownien multi-dimensionnel) : Soit $X = (X^{(1)}, \ldots, X^{(d)})$ un **processus adapté, à trajectoires continues et issu de 0**. Il y a équivalence entre :

1. X est un **mouvement Brownien multi-dimensionnel**,
2. Chaque processus $X^{(i)}$ est une **martingale locale** et $\langle X^{(i)}, X^{(j)}\rangle_t = t\delta_{i=j}$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tous $i, j \in \{1, \ldots, d\}$.

Théorème IV.7 (Dubins-Schwarz) : Soit M une **martingale locale issue de 0** telle que $\langle M, M\rangle_\infty = \infty$ p.s. Il existe un **Mouvement Brownien** B tel que presque sûrement

$$\forall t \geq 0, \quad M_t = B_{\langle M,M\rangle_t}.$$

Remarque : Ce théorème nous dit que toute martingale locale continue peut s'écrire comme un mouvement brownien changé de temps.

5.3 Théorème de Girsanov

Proposition IV.8 : Soit L une **martingale locale**. On fixe $t \geq 0$ et on suppose que $(\mathcal{E}(L)_s, s \in [0,t])$ est une **vraie martingale**. On pose pour tout $A \in \mathcal{F}_t$

$$\mathbb{Q}(A) := \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A \mathcal{E}(L)_t].$$

Alors **$\mathbb{Q}$ est une mesure de probabilité** sur $(\Omega, \mathcal{F}_t)$ et pour tout $s \in [0,t]$ et tout $A \in \mathcal{F}_s$

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbf{1}_A \mathcal{E}(L)_s].$$

Remarque : En pratique, pour s'assurer que $\mathcal{E}(L)_s, s \in [0,t])$ est une vraie martingale, on utilisera le critère de Novikov.

Théorème IV.9 : Soit L une **martingale locale**. On fixe $t \geq 0$ et on suppose que $(\mathcal{E}(L)_s, s \in [0,t])$ est une **vraie martingale**. On note alors $\mathbb{Q}$ la mesure de probabilité induite par $\mathcal{E}(L)_t$, comme introduit dans le résultat précédent.

- Si $(B_s, s \in [0,t])$ est un **mouvement Brownien** sous $\mathbb{P}$ alors le processus

$$\widetilde{B}_s := B_s - \langle B, L \rangle_s, \quad s \in [0,t],$$

  est un **mouvement Brownien sous $\mathbb{Q}$.**

- Plus généralement si $(M_s, s \in [0,t])$ est une martingale locale sous $\mathbb{P}$ alors le processus

$$\widetilde{M}_s := M_s - \langle M, L \rangle_s, \quad s \in [0,t],$$

  est une martingale locale sous $\mathbb{Q}$ de même variation quadratique que M.

5.4 Inégalités de Burkholder-Davis-Gundy

Théorème IV.10 : Pour tout réel $p > 0$ il existe des constantes $c_p, C_p > 0$ telles que, pour toute **martingale locale M issue de 0**

$$c_p \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2}] \leq \mathbb{E}[(M_\infty^*)^p] \leq C_p \mathbb{E}[\langle M, M \rangle_\infty^{p/2}],$$

où $M_t^* = \sup_{s \in [0,t]} |M_s|$ pour tout $t \in [0, \infty]$.

6 Chapitre 5 - Équations différentielles stochastiques et processus de diffusion

6.1 Processus d'Ornstein Uhlenbeck

Proposition V.1 : Il existe un unique processus continu V satisfaisant l'EDS :

$$dV_t = -bV_t dt + \sigma dB_t$$

Ce processus, appelé **processus d'Ornstein-Uhlenbeck** est donné par :

$$V_t = e^{-bt}V_0 + \sigma \int_0^t e^{-b(t-s)} dB_s$$

6.2 Solutions fortes

On se donne deux fonctions $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et l'on considère l'équation

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad t \geq 0, \tag{V.3}$$

partant d'une condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^d$ donnée.

Définition V.2 : On dit qu'un processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est **solution forte** de l'équation (V.3) si :

1. X est adapté à la filtration du mouvement Brownien B,
2. presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{R}_+$
$$\int_0^t |b(s, X_s)| ds < \infty, \quad \int_0^t \sigma(s, X_s)^2 ds < \infty.$$
3. presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{R}_+$
$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Théorème V.3 (Existence et unicité de solutions fortes) On suppose que les fonctions b et σ sont **continues** et qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$ et tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$|b(t, 0)| + |\sigma(t, 0)| \leq K, \quad |b(t, x) - b(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y|.$$

Alors il existe une unique solution forte $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ à (V.3).

6.3 Solutions fortes - Dimension quelconque

Le résultat précédent reste vrai en dimension supérieure. On travaille dans $\mathbb{R}^d$ pour $d \geq 1$ fixé et l'on se donne un espace de probabilité sur lequel est défini un mouvement Brownien $B = (B^{(1)}, \ldots, B^{(k)})$ de dimension $k \geq 1$. (Notons que d et k ne sont pas nécessairement égaux). On note $M_{d,k}(\mathbb{R})$ l'espace des matrices réelles de taille $d \times k$.

On se donne deux fonctions continues $b : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to M_{d,k}(\mathbb{R})$ et l'on considère l'équation vectorielle

$$dX_t = b(t, X_t)dt + \sigma(t, X_t)dB_t, \quad t \geq 0, \tag{V.7}$$

partant d'une condition initiale $X_0 \in \mathbb{R}^d$ donnée.

Définition V.5 : On dit qu'un processus $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ est **solution forte** de l'équation (V.7) si :

1. X est adapté à la filtration du mouvement Brownien B,
2. presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{R}_+$
$$\int_0^t |b(s, X_s)|ds < \infty, \quad \int_0^t \sigma(s, X_s)^* \sigma(s, X_s)ds < \infty.$$
3. presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{R}_+$
$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dB_s.$$

Théorème V.6 (Existence et unicité de solutions fortes) : On suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$|b_i(0, x)| + |\sigma_{i,j}(0, x)| \leq K, \quad |b_i(t, x) - b_i(t, y)| + |\sigma_{i,j}(t, x) - \sigma_{i,j}(t, y)| \leq K|x - y|.$$

Il existe une unique solution forte $(X_t, t \in \mathbb{R}_+)$ à (V.7).

6.4 Solutions faibles

6.4.1 Un exemple d'EDS sans solution forte

Concentrons-nous sur une équation particulière pour laquelle l'hypothèse Lipschitzianité n'est pas vérifiée :

$$dX_t = \operatorname{sgn}(X_t)dB_t, \tag{1}$$

où sgn désigne la fonction "signe" définie par

$$\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1 & \text{si } u \geq 0, \\ -1 & \text{si } u < 0. \end{cases}$$

Tout d'abord, on observe que si $\mathcal{F}$ est une filtration à laquelle X est adapté et dans laquelle B est un mouvement Brownien, alors X est une martingale locale de crochet

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)^2 ds = t.$$

La **caractérisation de Lévy**, assure alors que X est un **mouvement Brownien.** Or $-X$ satisfait

$$-X_t = -\int_0^t \operatorname{sgn}(X_s)dB_s = \int_0^t \operatorname{sgn}(-X_s)dB_s.$$

En effet, ces deux intégrales diffèrent là où X_s s'annulent cependant $\int_0^t 1_{X_s=0}dB_s$ est une martingale locale de crochet égal à $\int_0^t 1_{X_s=0}ds$ et cette quantité est nulle pour un mouvement Brownien). Ainsi $-X$ satisfait également l'EDS de sorte qu'il ne peut y avoir d'unicité forte pour l'équation.

7 Chapitre 6 - Processus de Markov et EDP

7.1 Processus de Markov

Définition VI.1 : Une famille $(p_t(x,\cdot))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ de mesures de probabilités sur $\mathbb{R}^d$ est appelée **noyau de transition** si

1. $p_0(x,\cdot) = \delta_x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^d$,
2. pour tout Borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, l'application $(t,x) \mapsto p_t(x,A)$ est mesurable,
3. pour tout Borélien $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ et toute paire $0 \leq s \leq t$, la relation dite de Chapman-Kolmogorov est satisfaite

$$p_t(x,A) = \int_{\mathbb{R}^d} p_s(x,dy)p_{t-s}(y,A), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

Etant donné un noyau de transition $(p_t(x,\cdot))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$, nous pouvons introduire un semigroupe d'opérateurs $(P_t, t \geq 0)$ en posant

$$P_t f(x) := \int_{\mathbb{R}^d} p_t(x,dy)f(y), \quad \forall x \in \mathbb{R}^d, \quad \forall t \geq 0,$$

pour toute fonction mesurable bornée $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$.

Définition VI.3 : Un processus stochastique X défini sur $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t)_t, \mathbb{P})$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^d$ est dit **Markovien** s'il existe un noyau de transition $(p_t(x,\cdot))_{t\geq 0, x\in\mathbb{R}^d}$ tel que pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ mesurable bornée presque sûrement

$$\mathbb{E}[f(X_t) \mid \mathcal{F}_s] = P_{t-s}f(X_s).$$

Examinons cette dernière identité. Le terme de gauche peut s'interpréter comme : la meilleure approximation de $f(X_t)$ sachant toute la trajectoire jusqu'au temps s. Le terme de droite, lui, ne dépend que de la valeur de la trajectoire au temps s et, à l'aide du semigroupe, *propage* cette quantité vers le temps t.

Proposition VI.4 : Le mouvement Brownien est un processus de Markov dont le noyau de transition est donné par le noyau gaussien

$$p_t(x,dy) = \frac{1}{(2\pi t)^{d/2}} \exp\left(-\frac{|x-y|^2}{2t}\right) dy.$$

Proposition VI.5 : On se place sous les hypothèses du Théorème V.6 en supposant que les coefficients ne dépendent pas du temps, et l'on note X_t^x la solution de l'EDS correspondante partant de $x \in \mathbb{R}^d$. On pose pour tout $x \in \mathbb{R}^d$ et tout $t \geq 0$

$$p_t(x,A) := \mathbb{P}(X_t^x \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d).$$

Alors pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, le processus $(X_t^x, t \geq 0)$ est un processus de Markov de noyau de transition $(p_t(y,\cdot))_{t\geq 0, y\in\mathbb{R}^d}$.

Théorème VI.6 (Propriété de Markov forte) : Soit $x \in \mathbb{R}^d$. Si T est un temps d'arrêt fini p.s. alors pour toute fonction $F : \mathcal{C}([0,\infty[,\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ mesurable bornée on a presque sûrement

$$\mathbb{E}\left[F(X_T^{x,\cdot}) \mid \mathcal{F}_T\right] = \Phi(X_T^x),$$

où

$$\Phi(y) = \mathbb{E}\left[F(X^y)\right], \quad y \in \mathbb{R}^d.$$

7.2 Lien avec les EDP linéaires

Dans toute cette partie, on se donne deux fonctions continues $b : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d \to M_{d,k}$, et l'on suppose qu'il existe une constante $K > 0$ telle que pour tous $t \in \mathbb{R}_+$ et tous $x, y \in \mathbb{R}^d$

$$|b_i(t,x)| + |\sigma_{i,j}(t,x)| \leq K, \quad |b_i(t,x) - b_i(t,y)| + |\sigma_{i,j}(t,x) - \sigma_{i,j}(t,y)| \leq K|x-y|.$$

(On notera qu'on a ici supposé que les fonctions σ et b étaient bornées par K en tout point). Le théorème V.6 s'applique sous ces hypothèses et fournit un processus de Markov $(X_t^x, t \geq 0)$ pour tout point de départ $x \in \mathbb{R}^d$.

7.2.1 Générateur infinitésimal

Théorème VI.7 : On introduit l'opérateur différentiel suivant :

$$\mathcal{L}f(x) := \sum_{i=1}^d b_i(x) \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d (\sigma\sigma^*)_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x), \quad x \in \mathbb{R}^d,$$

agissant sur les fonctions $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C_c^∞. Pour toute fonction $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ de classe C_c^∞, le processus

$$f(X_t^x) - f(x) - \int_0^t \mathcal{L}f(X_s^x) ds, \quad t \geq 0,$$

est une martingale.

8 Annexe

8.1 Uniforme Integrabilité

Définition B.2 : On dit que la famille $(X_i, i \in I)$ est **uniformément intégrable** si

$$\lim_{a\to\infty} \sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i|\mathbf{1}_{|X_i|>a}] = 0.$$

Proposition B.4 : S'il existe Y dans L^1 telle que pour tout $i \in I$, p.s. $|X_i| \leq |Y|$ alors la famille $(X_i, i \in I)$ est **uniformément intégrable**

Proposition B.5 : Soit $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction telle que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{g(t)}{t} = +\infty.$$

- Si $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[g(|X_i|)] < \infty$ alors la famille $(X_i, i \in I)$ est uniformément intégrable.
- En particulier, si $(X_i, i \in I)$ est bornée dans L^p pour un certain $p > 1$ alors elle est uniformément intégrable.

Proposition B.7 : Soit X une variable aléatoire intégrable. Soit $(\mathcal{F}_i)_{i\in I}$ une collection de sous-tribus de $\mathcal{F}$ et soit $X_i := \mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}_i]$ pour tout $i \in I$. Alors la famille $(X_i, i \in I)$ est **uniformément intégrable.**

8.2 Espérance conditionnelle

8.3 Exercices classiques

Principe de réflexion : Pour tout $t > 0$, tout $a \geq 0$ et $b \leq a$, en notant $S_t := \sup_{0 \leq s \leq t} B_s$ on a

$$\mathbb{P}(S_t \geq a, B_t \leq b) = \mathbb{P}(B_t \geq 2a - b)$$

Corollaire : En particulier $S_t \overset{(d)}{=} |B_t|$

Corollaire : La loi du couple (S_t, B_t) a pour densité :

$$f_{(S_t,B_t)}(a,b) = \frac{2(2a-b)}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{(2a-b)^2}{2t}} \mathbf{1}_{a \geq 0, b < a}$$

Loi du premier temps d'atteinte : On a $\tau_a \overset{(d)}{=} \frac{a^2}{B_1^2}$ et donc la densité de τ_a est donnée par

$$f_{\tau_a}(t) = \frac{|a|}{\sqrt{2\pi t^3}} e^{-\frac{a^2}{2t}}$$

En particulier on remarque que $\mathbb{E}[\tau_a] = \infty$

Martingales usuelles du Mouvement Brownien (Exercice 2 - TD 4 M2MO) : Soit B_t un mouvement brownien.

- $(B_t)_t$ est une martingale
- $(B_t^2 - t)_t$ est une martingale
- $(e^{\lambda B_t - \frac{\lambda^2 t}{2}})_t$ est une martingale
- Construire une martingale à partir de $(B_t^3)_t$:

$$Y_t = B_t^3 - 3tB_t$$

- Construire une martingale à partir de $(B_t^4)_t$:

$$Y_t = B_t^4 - 6tB_t^2 + 3t^2$$

- Construire une martingale à partir de $(\cosh(\lambda B_t))_t$ où $\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$$Y_t = \cosh(\lambda B_t))_t e^{-\frac{\lambda^2 t}{2}}$$

Temps de sortie (Exercice 3 - TD 3 EK) : On note $\tau_{a,b} := \inf\{t \geq 0 : B_t = -a \text{ or } B_t = b\} = \tau_{-a} \wedge \tau_b$.

- Montrer que $\mathbb{P}(\tau_b < \tau_{-a}) = \frac{a}{a+b}$ et que $\mathbb{P}(\tau_b > \tau_{-a}) = \frac{b}{a+b}$
- **(Transformée de Laplace)** Montrer que pour tout $\lambda \geq 0$

$$\mathbb{E}[e^{-\lambda \tau_{a,b}}] = \frac{\mathrm{ch}(\frac{a-b}{2}\sqrt{2\lambda})}{\mathrm{ch}(\frac{a+b}{2}\sqrt{2\lambda})}$$

Temps d'atteinte avec dérive (Exercice 4 TD 3 EK) : Soient $\gamma \neq 0$, $a > 0$ et $b > 0$ trois réels. Posons $\tau_x := \inf\{t > 0 : B_t + \gamma t = x\}$, $x = -a$ ou b. Calculer $\mathbb{P}(\tau_{-a} < \tau_b)$.

Exercice 3 - TD 4 M2MO (Loi de temps d'atteinte) : Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $a > 0$.

1. À l'aide de la martingale $\{B_t^2 - t\}_{t\geq 0}$, calculer l'espérance de $T_a^\star := \inf\{t \geq 0 : |B_t| = a\}$.
2. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la variance de $T_a^\star$.
3. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la transformée de Laplace de $T_a^\star$.
4. Calculer la transformée de Laplace de $T_a := \inf\{t \geq 0 : B_t = a\}$ et retrouver le fait que T_a a même loi que $(a/B_1)^2$. Que vaut $\mathbb{E}[T_a]$?

Exercice 4 - TD 4 M2MO (Maximum du mouvement brownien avec dérive) : Soit $\{B_t\}_{t\geq 0}$ un mouvement brownien. On fixe $a, b > 0$ et on pose $\tau := \inf\{t \geq 0 : B_t - bt = a\}$.

1. Montrer que τ est un temps d'arrêt relativement à la filtration naturelle.
2. À l'aide d'une martingale bien choisie, calculer la transformée de Laplace de τ.
3. En déduire la probabilité que la courbe du mouvement brownien soit au dessous de la demi-droite $t \mapsto a + bt$. Pouvait-on prévoir que la réponse ne dépendrait que de ab?
4. Quelle est la loi de la variable aléatoire $U := \sup_{t\geq 0} B_t - bt$?

Exercice 1 (Examen 2015). On se donne une constante $\sigma > 0$ et on considère l'EDS

$$dX_t = -\frac{X_t}{1+t}\, dt + \frac{\sigma}{1+t}\, dB_t, \quad X_0 = 0.$$

1. Justifier que cette EDS admet une unique solution $(X_t)_{t\geq 0}$.
2. Calculer la différentielle stochastique du processus $(Y_t)_{t\geq 0}$ défini par $Y_t := (1+t)X_t$. En déduire la forme explicite de $(X_t)_{t\geq 0}$. Justifier que $X_t \to 0$ quand t tend vers l'infini.
3. On fixe $a > 0$ et on note $\tau_a := \inf\{t \geq 0 : X_t \geq a\}$. Pour $t \geq 0$, on pose

$$M_t := \exp\left(\frac{2at}{\sigma^2}(X_t - a) + \frac{2a}{\sigma^2} X_t\right).$$

   Montrer que $(M_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, et en déduire la valeur de $\mathbb{P}(\tau_a < \infty)$.
4. Conclure que la variable aléatoire $X^\star := \sup_{t\geq 0} X_t$ est la racine carrée d'une variable aléatoire de loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

Exercice 3 (Fonctionnelles quadratiques du brownien). Pour $a, b, t \geq 0$, on cherche ici à calculer

$$I(a,b) := \mathbb{E}\left[\exp\left\{-aB_t^2 - \frac{b^2}{2}\int_0^t B_s^2\, ds\right\}\right].$$

1. Calculer $I(a,0)$ pour tout a. On supposera désormais $b > 0$.
2. Trouver $\psi \in M_1^{\text{loc}}$ tel que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ défini ci-dessous soit une martingale locale :

$$Z_t := \exp\left\{-b\int_0^t B_s\, dB_s - \int_0^t \psi(s)\, ds\right\}.$$

3. Exprimer Z_t en fonction de b, t, B_t et $\int_0^t B_s^2\, ds$ seulement, et en déduire que

$$I(a,b) = \mathbb{E}\left[Z_t \exp\left\{\left(\frac{b}{2} - a\right) B_t^2\right\} \exp\left(-\frac{bt}{2}\right)\right].$$

4. Construire une probabilité $\mathbb{Q}$ sur $(\Omega, \mathcal{F}_\infty)$ sous laquelle le processus $(W_t)_{t\geq 0}$ défini par

$$W_t := B_t + b\int_0^t B_s\, ds$$

   soit un mouvement brownien.
5. Montrer que pour tout $t \geq 0$,

$$B_t = \int_0^t e^{b(s-t)}\, dW_s.$$

6. Pour $t \geq 0$ fixé, expliciter la loi de B_t sous la mesure $\mathbb{Q}$ et en déduire la formule suivante :

$$I(a,b) = \left(\cosh(bt) + \frac{2a}{b}\sinh(bt)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Exercice 2 (Examen 2015). Étant donné $x \in \mathbb{R}$, on considère l'EDS

$$dX_t = dB_t - \frac{X_t}{1+X_t^2}\,dt, \quad X_0 = x.$$

1. Justifier que cette équation différentielle stochastique admet une unique solution $(X_t)_{t\geq 0}$.
2. Justifier que le processus $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une martingale, où

$$Z_t := \exp\left\{\int_0^t \frac{X_s}{1+X_s^2}\,dB_s - \frac{1}{2}\int_0^t \frac{X_s^2}{(1+X_s^2)^2}\,ds\right\}.$$

3. Calculer la différentielle stochastique de $\left(\ln\left(1+X_t^2\right)\right)_{t\geq 0}$ et en déduire que pour $t \geq 0$,

$$\frac{1+X_t^2}{1+x^2} = Z_t^2 \exp\left\{\int_0^t \frac{1-2X_s^2}{(1+X_s^2)^2}\,ds\right\}.$$

4. Construire une probabilité $\mathbb{Q}$ sous laquelle $(X_s - x)_{s\geq 0}$ est un mouvement brownien.
5. On fixe $t \geq 0$. En déduire que pour $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable, on a $\mathbb{E}[h(X_t)] = \hat{h}(x)$ avec

$$\hat{h}(x) := \mathbb{E}\left[h(x+B_t)\left(\frac{1+x^2}{1+(x+B_t)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t \frac{1-2(x+B_s)^2}{(1+(x+B_s)^2)^2}\,ds\right\}\right].$$

6. Soit ζ une variable aléatoire indépendante de $(B_s)_{s\geq 0}$, de densité $x \mapsto \pi(1+x^2)^{-1}$. On note $(X_s^*)_{s\geq 0}$ la solution de l'EDS ci-dessus avec $X_0^* = \zeta$. Ainsi, on a $\mathbb{E}[h(X_t^*)|\zeta] = \hat{h}(\zeta)$.
   (a) Vérifier que le processus $(B_{t-s} - B_t)_{s\in[0,t]}$ est un mouvement brownien restreint à $[0,t]$.
   (b) En déduire que pour tout $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ mesurable,

$$\int_{\mathbb{R}} \hat{h}(x)\,\frac{dx}{1+x^2} = \int_{\mathbb{R}} h(x)\,\frac{dx}{1+x^2}.$$

   (c) Pour $t \geq 0$, quelle est la loi de X_t^* ?