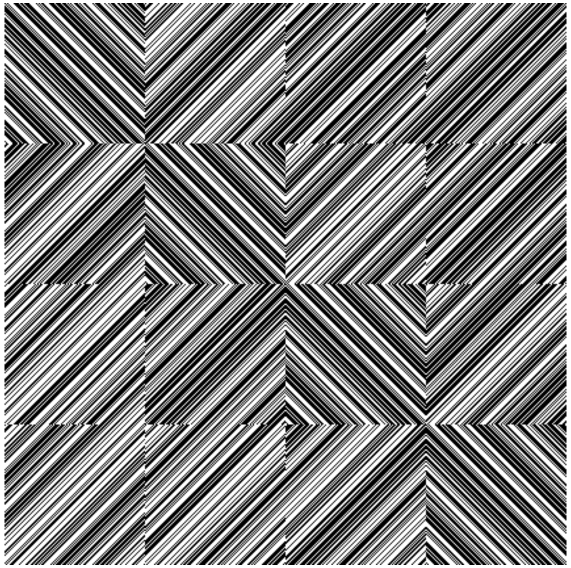
Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne

Algèbre linéaire I & II

Notes de cours



D'après le cours d'algèbre linéaire du Prof. K. Hess Bellwald EPFL

Fabien Margairaz

En collaboration avec
Noé Cuneo

Ce document n'est pas officiel

L'image du titre *est une image d'une matrice de Hadamard* 428×428. *Il s'agit d'une matrice avec des colonnes orthogonales et dont toutes les entrées sont égales soit à* 1 *(pixels blancs), soit à* -1 *(pixels noirs). Cet exemple a été découvert en 2004 par H. Kharaghani et B. Tayfeh-Rezaie. Il n'a pas encore été découvert s'il existe une matrice de Hadamard de taille* 668×668. *Mais une conjoncture prétend qu'il existe des exemples de taille* $4n \times 4n$ *pour tout* n.
Source : *http ://www.math.brown.edu/*.
Lire l'*article de Wikipedia* pour plus de renseignements (en anglais).

Table des matières

Avant-propos **4**

1 Ensembles et applications **5**
1.1 Relations et applications . . . 6

2 Espaces vectoriels **11**
2.1 Définitions, exemples et propriétés élémentaires . . . 11
2.2 Sous-espaces vectoriels . . . 15
2.3 Sommes directes . . . 18

3 Espaces vectoriels de dimension finie **21**
3.1 Génération de sous-espaces . . . 21
3.2 Bases . . . 28
3.3 Dimension d'un espace vectoriel . . . 32

4 Applications linéaires **38**
4.1 Définitions et exemples . . . 38
4.2 Sous-espaces associés aux applications linéaires . . . 40
4.3 Théorie des application linéaires . . . 43
4.4 Isomorphismes . . . 45

5 Matrice et applications linéaires **51**
5.1 Les matrices . . . 51
5.2 Relation entre applications linéaires et matrices . . . 52
5.3 Matrices inversibles . . . 59

6 Matrices et systèmes d'équations linéaires **61**
6.1 Systèmes et leurs solutions . . . 61
6.2 Matrices élémentaires . . . 64
6.3 L'algorithme de Gauss-Jordan . . . 66
6.4 Déterminants : première approche . . . 71

7 Produits scalaires **77**
7.1 Introduction . . . 77
7.2 Définitions et exemples . . . 78
7.3 Propriétés importantes de la norme . . . 84
7.4 Orthogonalité et bases orthogonales . . . 86
7.5 Le procédé de Gram-Schmidt . . . 90
7.6 Produits scalaires et applications linéaires . . . 92
7.7 Meilleures approximations . . . 93

8 Valeurs propres et vecteurs propres **97**
8.1 Définitions et exemples . . . 97
8.2 Calcul de $spec(\mathcal{T})$ . . . 101
8.3 Diagonalisation . . . 103

8.4 Un bref aperçu du cas réel . . . 106

9 Opérateurs linéaires et produits scalaires **107**
9.1 L'adjoint d'une application linéaire . . . 107
9.2 Opérateurs auto-adjoints et normaux . . . 113
9.3 Théorèmes spectraux . . . 119
9.4 Opérateurs normaux sur $\mathbb{R}$-espaces vectoriels . . . 120
9.5 Isométries . . . 123

10 Les opérateurs complexes **130**
10.1 Vecteurs propres généralisés . . . 131
10.2 Le polynôme caractéristique . . . 133
10.3 Le polynôme minimal . . . 136
10.4 Décomposition d'opérateur . . . 138
10.5 Bases de Jordan . . . 140

11 La trace et le déterminant d'un opérateur complexe **145**
11.1 La trace . . . 145
11.2 Le déterminant d'un opérateur . . . 147

Annexes **150**
A La récurrence . . . 150
B Déterminants : quelques suppléments . . . 150

Avant-propos

Remarques importantes

Ce document, basé sur des notes personnelles, a été réalisé dans le soucis d'avoir un support de cours écrit. Il a été relu par la professeur K. Hess Bellwald. Cependant, des erreurs peuvent subsister.

Le cours du professeur K. Hess Bellwald est inspiré du livre de *S. Axler* : *Linear Algebra Done Right*, aux éditions *Springer*[1].

Ce document est basé sur les cours d'algèbre linéaire des années académiques 2006-2007 et 2007-2008.

* Tout ce qui a été présenté au cours 2007-2008 y figure.
* L'ordre de présentation des propositions peut être différent.
* Les preuves peuvent légèrement différer de celles présentées au cours.

Pour de raisons d'écologie et de gaspillage, n'imprimez ce document qu'en cas de réel besoin.

Remerciements

Je tiens à remercier la professeur K. Hess Bellwald pour son travail de relecture, ainsi que Laurent Repond et Edgar Fernandes pour leur précieuse aide dans la réalisation de ce document. Je remercie également toutes les personnes ayant signalé des fautes.

Merci et bonne lecture !

Fabien Margairaz
fabien.margairaz@epfl.ch

[1] ISBN 0-387-98258-2

Chapitre 1

Ensembles et applications

Glossaire des terminologies et des symboles

Les ensembles

- $\mathbb{N}$: ensemble des nombres naturels, contient $\{0\}$
- $\mathbb{Z}$: l'ensemble des nombres entiers
- $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \ldots\}$
- $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels
- $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels
- $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes
- $\mathbb{F}$: veut dire soit $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Abréviations mathématiques

- $\forall$: pour tout
- $\exists$: il existe et $\exists!$ il existe un unique
- $\in$: appartient à
- $\notin$: n'appartient pas à
- $\subset$: est inclus dans, est un sous-ensemble de
- $\not\subset$: n'est pas inclus dans ou n'est pas un sous ensemble de
- $\Rightarrow$: implique que
- $\Leftrightarrow$: est équivalent à ou si et seulement si

Exemple 1.1. Utilisation basique :
- $\forall n \in \mathbb{N}, \exists n+1 \in \mathbb{N}$
- $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, \exists \sqrt{x} \in \mathbb{C}$
- n un entier pair $\Rightarrow n \cdot m$ un entier pair $\forall m \in \mathbb{Z}$
- $\exists! z \in \mathbb{R}$ *tq* $x + z = x = z + x, \forall x \in \mathbb{R}$

Les ensembles et opérations sur les ensembles

- $\{A|B\}$: l'ensemble de tous les A tq la propriété B soit vérifiée.
- $\emptyset$: ensemble vide
- Soit X et Y des ensembles alors :
  - $X \cup Y = \{z | z \in X \text{ } ou \text{ } z \in Y\}$
  - $X \cap Y = \{z | z \in X \text{ } et \text{ } z \in Y\}$
  - $X \times Y = \{(x, y) | x \in X \text{ } et \text{ } y \in Y\}$
  - Si $Y \subset X$ alors $X \smallsetminus Y = \{x \in X | x \notin Y\}$
  - Si X est un ensemble ayant un nombre fini d'éléments alors #X est le nombre l'élément de X, on l'appelle la *cardinalité* de X

1.1 Relations et applications

Soient X et Y des ensembles. Pour comparer X et Y, il nous faut les notions suivantes :

Définition 1.1. *Soient X et Y des ensembles, une* relation *de X vers Y est un sous-ensemble* $R \subset X \times Y$.

Définition 1.2. *Une relation* $R \subset X \times Y$ *est une* application *ou* fonction *si :*

$$\forall x \in X, \exists! y \in Y\ tq\ (x;y) \in R.$$

Exemple 1.2. $X = \{x_1, x_2\}$ et $Y = \{y_1, y_2, y_3\}$. Posons :

1. $R' = \{(x_1;y_1), (x_1;y_2), (x_1;y_3)\} \subset X \times Y$. R est une relation mais pas une application car
   - il y a 3 éléments y_i de Y tq $(x_1, y_i) \in R$.
   - $\nexists y_i \in Y\ tq\ (x_2, y_i) \in R$.
2. $R' = \{(x_1;y_1), (x_2;y_1)\} \subset X \times Y$. R' est une application car
   - $\forall i = 1, 2, \ldots \exists! y_j \in Y\ tq\ (x_i, y_j) \in R$
3. $R'' = \{(x_1, y_3), (x_2, y_2)\}$. R" est une application.

Définition 1.3. *Soit* $R \subset X \times Y$ *une application, nous écrirons :*
$f_R : X \longrightarrow Y : x \longmapsto f_R(x)$. *Où* $\forall x \in X$, $f_R(x)$ *est l'unique élément de Y tq* $(x; f_R(x)) \in R$
X est le domaine de f *ou la* source de f.
Y est le codomaine de f *ou le* but de f.

Exemple 1.3. Revenons aux applications précédentes :

1. $f : X \longrightarrow Y : \begin{cases} x_1 \longmapsto y_1 \\ x_2 \longmapsto y_1 \end{cases}$
2. $f : X \longrightarrow Y : \begin{cases} x_1 \longmapsto y_3 \\ x_2 \longmapsto y_2 \end{cases}$

Exemple 1.4. Soit $R = \{(n; |n|) | n \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ Alors R est une application de $\mathbb{Z}$ vers $\mathbb{Z}$ car $\forall n \in \mathbb{Z}\ \exists! m \in \mathbb{Z}\ (m = |n|)\ tq\ (n; m) \in R$
Dans l'autre notation : $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto |n|$, $f(n) = |n|$
Noter que $\mathbb{Z}$ est à la fois le domaine et le codomaine

Caractérisation des applications

Définition 1.4. *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *une application, alors :*
- *f est* injective *si* $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$
- *f est* surjective *si* $\forall y \in Y, \exists x \in X\ tq\ f(x) = y$
- *f est* bijective *si f est injective et surjective.*

Remarque. f bijective $\Rightarrow$ f surjective, donc $\forall y \in Y, \exists x \in X\ tq\ f(x) = y$. Or f est aussi injective et donc si $f(x) = y = f(x')$, on a forcement que $x = x'$. Autrement dit, f est bijective $\Rightarrow \forall y \in Y, \exists! x \in X\ tq\ f(x) = y$.
Par ailleurs, si $\forall y \in Y, \exists! x \in X\ tq\ f(x) = y$ alors f est bijective. En effet, si $\forall y \in Y, \exists! x \in X\ tq\ f(x) = y$, alors f est surjective. Et comme $\forall y \in Y, \exists! x \in X\ tq\ f(x) = y$, si $f(x) = f(x')$, alors par l'unicité de x, on a que $x = x'$ et donc f et injective.
On appelle une fonction injective, surjective, bijective une injection, surjection, bijection.

Exemple 1.5. Revenons aux applications précédentes.

1. - f n'est pas injective car $f(x_1) = y_1 = f(x_2)$ et $x_1 \neq x_2$
   - f n'est pas surjective car $f(x_1) \neq y_1, f(x_1) \neq y_3, f(x_2) \neq y_2, f(x_2) \neq y_3$
2. - f est injective car $f(x_1) \neq f(x_2)$
   - f n'est pas surjective car $f(x_1) \neq y_1 \neq f(x_2)$

Exemple 1.6. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto |n|$, alors f n'est pas injective, car :

$$f(2) = 2 = |-2| = f(-2) \text{ mais } 2 \neq -2$$

Plus généralement, $\forall n \in \mathbb{Z}_+, f(n) = n = f(-n)$ et $n \neq -n$.
De plus, f n'est pas surjective, car $f(n) \geqslant 0 \forall n \in \mathbb{Z}$ donc $\forall m < 0, \nexists n \in \mathbb{Z}\ tq\ f(n) = m$.

Définition 1.5. *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *une application, soit* $A \subset X$ *un sous-ensemble. Alors la* restriction *de f à A est l'application :*

$$f\big|_A : A \longrightarrow Y\ tq\ f\big|_A(a) = f(a), \forall a \in A$$

On ignore donc les $x \in X\ tq\ x \notin A$.

Autrement dit, si $R \subset X \times Y$ est la relation qui correspond à f, alors $R' = \{(a, y) | a \in A, (a, y) \in R\}$ est la relation qui correspond à la restriction.

Exemple 1.7. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto |n|$. Posons $A = \mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$ Considérons, $f\big|_A : A \longrightarrow \mathbb{Z}$. Alors $\forall n \in \mathbb{N}, f\big|_A(n) = f(n) = |n| = n$ car $n \geqslant 0$. Alors $f\big|_A$ est injective, car si $m, n \in \mathbb{N}$ et $f\big|_A(m) = f\big|_A(n)$, alors $m = f\big|_A(m) = f\big|_A(n) = n$, i.e., f est injective. Mais $f\big|_A$ n'est pas surjective, car $f\big|_A(n) \geqslant 0\ \forall n \in \mathbb{N}$

Définition 1.6. *Soit* $f : X \longrightarrow Y$ *une application, l'*image *de f est le sous-ensemble de Y tq*

$$Imf = \{f(x) \in Y | x \in X\} = \{y \in Y | \exists x \in X \text{ avec } f(x) = y\} \subset Y$$

Exemple 1.8. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto |n|$. $Imf = \{|n|\ | n \in \mathbb{Z}\} = \mathbb{N}$. En effet, montrer que $Imf \subset \mathbb{N}$ et que $\mathbb{N} \subset Imf$, ce qui implique que $Imf = \mathbb{N}$. Premièrement, Imf est un sous-ensemble du codomaine de f, i.e., $Imf \subset \mathbb{Z}$. De plus $f(n) = |n| \geqslant 0$, donc $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n) \geqslant 0$ donc $f(n) \in \mathbb{N}$. Ainsi ; $Imf \subset \mathbb{N}$. Deuxièmement, soit $n \in \mathbb{N}$. Puisque $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $f(n)$ est défini. En fait, $f(n) = |n| = n$, puisque $n \in \mathbb{N}$ et donc $n \geqslant 0$. Par conséquent, $n \in \mathbb{N} \Rightarrow n = f(n) \in Imf$, et donc $\mathbb{N} \subset Imf$. Nous avons donc $Imf = \mathbb{N}$.

Remarque. $f : X \longrightarrow Y$ est surjective $\Leftrightarrow Imf = Y$.

Pour préciser quels éléments de X sont envoyés par f sur un élément particulier de Y, nous avons besoin de la définition suivante :

Définition 1.7. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. Soit $Z \subset Y$ tq $Imf \subset Z$. La* corestriction *à Z est l'application :*

$$f\big|^{Z} : X \longrightarrow Z : x \longmapsto f(x), i.e., f\big|^{Z}(x) = f(x), \forall x \in X.$$

Cette définition a du sens, car $\forall x \in X, f(x) \in Imf \subset Z$ donc $f(x) \in Z$

Exemple 1.9. Considérons la corestriction $f\big|^{\mathbb{N}} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{N}$. Alors $f\big|^{\mathbb{N}}$ est surjective car $\forall n \in \mathbb{N}, f(n) = n = f\big|^{\mathbb{N}}(n)$.

Définition 1.8. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. Soit $y \in Y$. La* pré-image *de y est un sous-ensemble :*

$$f^{-1}(\{y\}) = \{x \in X | f(x) = y\} \subset X$$

Plus généralement, soit $B \subset Y$, la pré-image *de B est le sous-ensemble $f^{-1}(B) = \{x \in X | f(x) \in B\} \subset X$*

Exemple 1.10. Considérer l'application $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto |n|$.
- $f^{-1}(\{3\}) = \{n \in \mathbb{Z} | f(n) = 3\} = \{n \in \mathbb{Z} || n| = 3\} = \{3; -3\}$
- Posons $B = \{2n | n \in \mathbb{N}\}$
  $f^{-1}(B) = \{m \in \mathbb{Z} | f(m) \in B\} = \{m \in \mathbb{Z} | \exists n \in \mathbb{N}$ avec $f(m) = |m| = 2n\} = \{2n | n \in \mathbb{Z}\}$
- $f^{-1}(\{-5\}) = \{n \in \mathbb{Z} | f(n) = -5\} = \{n \in \mathbb{Z} || n| = -5\} = \emptyset$
- $B = \{n \in \mathbb{Z} | n < 0\} \Rightarrow f^{-1}(B) = \emptyset$ car $|n| \geqslant 0 \forall n \in \mathbb{Z}$
- $f^{-1}(\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$

Remarque. Pour toute application $f : X \longrightarrow Y$, si $y \notin Imf$, alors $f^{-1}(\{y\}) = \emptyset$

Exemple 1.11. $f : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto n + 1$.
- f est injective car $f(n) = f(m) \Rightarrow n + 1 = m + 1 \Rightarrow n = m$
- f est surjective car $\forall n \in \mathbb{Z}, f(n-1) = (n-1) + 1 = n$, i.e., $Imf = \mathbb{Z}$

f est donc bijective et possède un inverse. $f^{-1} : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$ *tq* $f\left(f^{-1}(n)\right) = n \ \forall n \in \mathbb{Z}$, donc $f^{-1}(n) + 1 = f\left(f^{-1}(n)\right) = n$, ce qui implique de $f^{-1}(n) = n - 1 \ \forall n \in \mathbb{Z}$.

Définition 1.9. *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Z \longrightarrow W$ des applications. Alors $f = g$ si*

1. *$X = Z$ et $Y = W$.*
2. *$f(x) = g(x) \ \forall x \in X$.*

Définition 1.10. *Soit X un ensemble, l'*application identité *sur X est l'application :*

$$Id_X : X \longrightarrow X : x \longmapsto x, \forall x \in X$$

Définition 1.11. *Soient $f : X \longrightarrow Y$ et $g : Y \longrightarrow Z$ des applications. La* composition *de f et de g donne une application*

$$g \circ f : X \longrightarrow Z : x \longmapsto (g \circ f)(x) = g\left(f(x)\right) \ \forall x \in X$$

Remarque. On voit facilement que $\forall f : X \longrightarrow Y$ application,

$$f \circ Id_X = f = Id_Y \circ f$$

Définition 1.12. *Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application bijective. $g : Y \longrightarrow X$ est l'*inverse *(ou réciproque) de f si :*

$$g \circ f = Id_X \text{ et } f \circ g = Id_Y$$

Noté $f^{-1} : Y \longrightarrow X : y \longmapsto f^{-1}(y)$, et définie par $f^{-1}(y)$ est l'unique élément de X tq $f\left(f^{-1}(y)\right) = y$.

Proposition 1.1. *Soient X et Y des ensembles et soit $f : X \longrightarrow Y$ une application. Alors*

$$f \text{ est inversible } \iff f \text{ est une bijection.}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons que f est inversible, et soit $g : Y \longrightarrow X$ un inverse à f. Alors f est une surjection, puisque $\forall y \in Y$:

$$y = Id_y(y) = \big(f \circ g\big)(y) = f(g(y)) \in Imf.$$

Par ailleurs, f est une injection, car si $f(x) = f(x')$, alors

$$x = Id_X(x) = \big(g \circ f\big)(x) = g(f(x)) = g(f(x')) = \big(g \circ f\big)(x') = Id_X(x') = x'$$

Par conséquent, f est une bijection.

$\Longleftarrow$ Supposons que f est une bijection. Soit

$$R = \{(x, f(x)) | x \in X\} \subset X \times Y$$

la relation correspondante. Observer que $\forall y \in Y, \exists! x \in X$ tq $(x, y) \in R$, puisque f est une bijection.
Considérer la relation

$$R' = \{(y, x) | (x, y) \in R\} \subset Y \times X$$

Observer que $(y, x) \in R' \Leftrightarrow (x, y) \in R$. Par conséquent, R' correspond à une application de Y vers X , $\forall y \in Y, \exists! x \in X$ tq $(x, y) \in R'$.
Soit $g : Y \longrightarrow X$ l'application correspondent à R'. Alors il est immédiat que

$$\big(g \circ f\big)(x) = g(f(x)) = x = Id_X(x), \forall x \in X$$

et que

$$\big(f \circ g\big)(x) = f(g(y)) = y = Id_Y(y), \forall y \in Y$$

ce qui veut dire que $g \circ f = Id_X$ et $f \circ g = Id_Y$, i.e., f est inversible, avec inverse g. cqfd

Lemme 1.1. *Soient* $f : X \longrightarrow Y, g : Y \longrightarrow Z, h : Z \longrightarrow W$ *des applications. Alors*

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

Démonstration.

$$h \circ (g \circ f)(x) = h\Big(g(f(x))\Big) = (h \circ g) \circ f(x), \forall x \in X$$

cqfd

Proposition 1.2. *Si* $f : X \longrightarrow Y$ *est inversible, alors son inverse est unique, i.e., si* g *et* h *sont les inverses de* f *, alors g=h.*

Démonstration. Soient $g, h : Y \longrightarrow X$ des inverses de f. Alors

$$g = g \circ Id_Y = g \circ (f \circ h) = (g \circ f) \circ h = Id_X \circ h = h$$

cqfd

Exemple 1.12.
1. Considérer les applications :
   - $f_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto n + 1$
   - $f_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto 6n$
   - $g_1 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto 2n$
   - $g_2 : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : n \longmapsto 3n + 6$

   Il est clair que $f_1 \neq f_2 \neq g_1 \neq g_2$, toutes ces applications sont distinctes.
   - $(f_2 \circ f_1)(n) = f_2(f_1(n)) = 6(f_1(n)) = 6(n + 1) = 6n + 6$
   - $(g_2 \circ g_1)(n) = g_2(g_1(n)) = 3g_1(n) + 6 = 3(2n) + 6 = 6n + 6$

   Ainsi $f_2 \circ f_1 = g_2 \circ g_1$ mais $f_1 \circ f_2 \neq f_2 \circ f_1$ et $g_1 \circ g_2 \neq g_2 \circ g_1$.
2. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application bijective soit $f^{-1} : Y \longrightarrow X$ son inverse. On peut les composer, pour obtenir : $(f \circ f^{-1})(y) = f\left(f^{-1}(y)\right) = y, \ \forall y \in Y$, i.e., $f \circ f^{-1} = Id_Y$.

Chapitre 2

Espaces vectoriels

Motivation : Géométrie des vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ et des règles vérifiées par l'*addition* de deux vecteurs et par la *multiplication d'un vecteur par un scalaire* réel.
En terme de coordonnées : $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ alors, $\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2) \in \mathbb{R}^2$ et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha \cdot \vec{u} = (\alpha u_1, \alpha u_2)$. Par conséquent, si $\vec{u} = (u_1, u_2), \vec{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}$, alors, $\alpha(\vec{u} + \vec{v}) = (\alpha(u_1 + v_1), \alpha(u_2 + v_2)) = (\alpha u_1 + \alpha v_1, \alpha u_2 + \alpha v_2) = \alpha\vec{u} + \alpha\vec{v} \in \mathbb{R}^2$.

Idée : Etendre les propriétés essentielles de ces opérateurs dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ pour qu'elles deviennent les axiomes d'un espace vectoriel abstrait.

But : Pouvoir appliquer les méthodes et les intuitions géométriques dans un contexte plus général, par exemples, à des *polynômes*.

2.1 Définitions, exemples et propriétés élémentaires

Définition 2.1. *Un* $\mathbb{F}$-espace vectoriel *consiste en un ensemble* V*, dont les éléments sont notés* $\vec{v} \in V$ *et appelés* vecteurs*, muni de deux opérations :*

Addition : $V \times V \longrightarrow V : (\vec{v}, \vec{w}) \longmapsto \vec{v} + \vec{w}$. *Aussi appelée* loi interne.

Multiplication par scalaire : $\mathbb{F} \times V \longrightarrow V : (\alpha, \vec{w}) \longmapsto \alpha\vec{w}$. *Aussi appelée* loi externe.

Vérifiant les axiomes *suivants :*

V_1 **commutativité de l'addition :** $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$

V_2 **associativité :** *cet axiome est en deux parties :*
- $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w}), \forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V$
- $\alpha(\beta\vec{v}) = (\alpha\beta)\vec{v}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall \vec{v} \in V$

V_3 **existence d'un élément neutre pour l'addition :** $\exists \vec{0} \in V$ *tq* $\vec{v} + \vec{0} = \vec{v}, \forall \vec{v} \in V$

V_4 **existence d'inverse additif :** $\forall \vec{v} \in V, \exists \vec{w} \in V$ *tq* $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$

V_5 **normalisation :** $1\vec{v} = \vec{v}, \forall \vec{v} \in V$

V_6 **distributivité :** *cet axiome est en deux parties :*
- $\alpha(\vec{w} + \vec{v}) = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{w}, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall \vec{v}, \vec{w} \in V$
- $(\alpha + \beta)\vec{v} = \alpha\vec{v} + \beta\vec{v}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall \vec{v} \in V$

Remarque. Noter que l'axiome V_3 implique que tout espace vectoriel contient au moins un vecteur : $\vec{0}$

Exemple 2.1. Les exemples suivants présentent des espaces vectoriels avec lesquels nous allons travailler tout au long de ce cours.

0. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel $V = \{\vec{0}\}$. Définissons l'addition et la multiplication par un scalaire,

$$add : \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$$
$$multi : \alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}, \forall \alpha \in \mathbb{F}$$

et vérifions les axiomes !

V_1 $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{0}$

V_2 $(\vec{0} + \vec{0}) + \vec{0} = \vec{0} + (\vec{0} + \vec{0})$ et $\alpha(\beta \cdot \vec{0}) = \vec{0} = (\alpha\beta)\vec{0}$

V_3 $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, donc $\vec{0}$ agit bien comme un élément neutre pour l'addition.

V_4 $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$, donc $\vec{0}$ agit bien comme un inverse additif.

V_5 $\alpha\vec{0} = \vec{0}, \forall \alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow 1 \cdot \vec{0} = \vec{0}$

V_6 $\alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \alpha\vec{0} + \alpha\vec{0}$ et $(\alpha + \beta)\vec{0} = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \alpha\vec{0} + \beta\vec{0}$

Conclusion : muni des opérations définies ci-dessus, $V = \{\vec{0}\}$ est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$, soit $\mathbb{F}^n = \{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{F}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Définissons l'addition et la multiplication par un scalaire.

$$add : \mathbb{F}^n \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n : (\vec{a}, \vec{b}) \longmapsto \vec{a} + \vec{b} \text{ par } \vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n).$$
$$multi : \mathbb{F} \times \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n : (\alpha, \vec{a}) \longmapsto \alpha\vec{a} \text{ par } \alpha\vec{a} = (\alpha a_1, \dots, \alpha a_n), \forall \alpha \in \mathbb{F}.$$

Ainsi $\mathbb{F}^n$ est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel.

V_1 $(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (a_1 + b_1, ..., a_n + b_n) = (b_1 + a_1, ..., b_n + a_n) = (b_1, ..., b_n) + (a_1, ..., a_n)$

V_2

$$\begin{aligned} [(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n)] + (c_1, ..., c_n) &= ((a_1 + b_1) + c_1, ..., (a_n + b_n) + c_n) \\ &= (a_1 + (b_1 + c_1), ..., a_n + (b_n + c_n)) \\ &= (a_1, ..., a_n) + [(b_1, ..., c_n) + (c_1, ..., c_n)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(\beta(a_1, ..., a_n)) &= \alpha(\beta a_1, ..., \beta a_1) = (\alpha(\beta a_1), ..., \alpha(\beta a_n)) \\ &= ((\alpha\beta)a_1, ..., (\alpha\beta)a_n) = (\alpha\beta)(a_1, ..., a_n) \end{aligned}$$

V_3 Poser $\vec{0} \underset{def}{=} (0, ..., 0)$. Alors : $(a_1, ..., a_n) + (0, ..., 0) = (a_1 + 0, ..., a_n + 0) = (a_1, ..., a_n)$

V_4 Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{F}^n$. Alors $\exists (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{F}^n$ tq $(a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n) = (0, ..., 0)$. $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, soit $-a_i$ l'inverse additif de a_i dans $\mathbb{F}$. Ainsi nous avons, $(a_1, ..., a_n) + (-a_1, ..., -a_n) = (a_1 + (-a_1), ..., a_n + (-a_n)) = (0, ..., 0) = \vec{0}$

V_5 $1(a_1, ..., a_n) = (1a_1, ..., 1a_n) = (a_1, ..., a_n)$

V_6 Soient $(a_1, ..., a_n), (b_1, ..., b_n) \in \mathbb{F}^n$ est soit $\alpha \in \mathbb{F}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \alpha((a_1, ..., a_n) + (b_1, ..., b_n)) &= \alpha(a_1 + b_1, ..., a_n + b_n) \\ &= (\alpha(a_1 + b_1), ..., \alpha(a_n + b_n)) \\ &= (\alpha a_1 + \alpha b_1, ..., \alpha a_n + \alpha b_n) \\ &= (\alpha a_1, ..., \alpha a_n) + (\alpha b_1, ..., \alpha b_n) \\ &= \alpha(a_1, ..., a_n) + \alpha(b_1, ..., b_n) \end{aligned}$$

Soit $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{F}^n$ et soient $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ Ainsi,

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(a_1, ..., a_n) &= ((\alpha + \beta)a_1, ..., (\alpha + \beta)a_n) \\ &= (\alpha a_1 + \beta a_1, ..., \alpha a_n + \beta a_n) \\ &= (\alpha a_1, ..., \alpha a_n) + (\beta a_1, ..., \beta a_n) \\ &= \alpha(a_1, ..., a_n) + \beta(a_1, ..., a_n) \end{aligned}$$

Conclusion : muni des opérations définies ci-dessus, $\mathbb{F}^n$ est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel.

2. **L'espace des applications**

Soit X un ensemble. Poser $\mathscr{F}(X, \mathbb{F}) = \{f : X \longrightarrow \mathbb{F} | f \text{ une application}\}$. Définir l'addition et la multiplication par un scalaire.

$$add : \mathscr{F}(X, \mathbb{F}) \times \mathscr{F}(X, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{F}(X, \mathbb{F}) : (f, g) \longmapsto f + g \text{ par } (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$
$$multi : \mathbb{F} \times \mathscr{F}(X, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{F}(X, \mathbb{F}) : (\alpha, f) \longmapsto \alpha \cdot f \text{ par } (\alpha \cdot f)(x) = \alpha \cdot f(x)$$

Ainsi $\mathscr{F}(X, \mathbb{F})$ est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel.

V_1 Soient $f, g \in \mathscr{F}(X, \mathbb{F})$, montrons que $f + g = g + f$. Nous avons $f + g = g + f \Leftrightarrow f(x) + g(x) = g(x) + f(x), \forall x \in X$.
Soit $x \in X$. Alors, $f(x), g(x) \in \mathbb{F}$. Puisque l'addition dans $\mathbb{F}$ est commutative, nous avons que $f(x) + g(x) = g(x) + f(x), \forall x \in X$.

V_2 L'associativité de l'addition et de la multiplication par scalaire dans $\mathscr{F}(X, \mathbb{F})$ suit immédiatement de l'associativité dans $\mathbb{F}$.

V_3 Définir $z : X \longrightarrow \mathbb{F}$ par $z(x) = 0, \forall x \in X$. Alors, $\forall f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{F})$, nous avons, $f + z = f$ car $\big(f + z\big)(x) = f(x) + z(x) = f(x) + 0 = f(x), \forall x \in X$.
Ainsi, l'application $z : X \longrightarrow \mathbb{F}$ joue le rôle de vecteur $\vec{0}$ dans $\mathscr{F}(X, \mathbb{F})$.

V_4 Soit $f : X \longrightarrow \mathbb{F}$, il faut trouver $g : X \longrightarrow \mathbb{F}$ tq $f + g = z$.
Définir $g : X \longrightarrow \mathbb{F}$ par $g(x) = -f(x), \forall x \in X$. Alors, $f + g = z$ car $\big(f + g\big)(x) = f(x) + g(x) = f(x) + \big(-f(x)\big) = 0 = z(x), \forall x \in X$.

V_5 $1 \cdot f(x) = f(x), \forall x \in X$ et $\forall f \in \mathscr{F}(X, \mathbb{F})$

V_6 Comme dans V_1 et V_2, les deux types de distributivité dans $\mathscr{F}(X, \mathbb{F})$ suivent immédiatement de la distributivité dans $\mathbb{F}$

Conclusion : muni des opérations définies ci-dessus, $\mathscr{F}(X, \mathbb{F})$ est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel.

3. **L'espace des polynômes à coefficients dans $\mathbb{F}$**

Poser $\mathscr{P}(\mathbb{F}) = \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k | n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{F}, a_n \neq 0\} \cup \{0\}$. On écrira souvent $p(x)$ pour un élément de $\mathscr{P}(\mathbb{F})$. Définissons l'addition et la multiplication par un scalaire.

$add : \mathscr{P}(\mathbb{F}) \times \mathscr{P}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{F}) : (p(x), q(x)) \longmapsto p(x) + q(x)$ par

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{max(n,m)} (a_k + b_k) x^k \text{ avec } p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, q(x) = \sum_{k=0}^{m} b_k x^k.$$

Nous posons si $n < m, a_j = 0, \forall n < j \leqslant m$, si $m < n, b_j = 0, \forall m < j \leqslant n$.

$multi : \mathbb{F} \times \mathscr{P}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{F}) : (\alpha, p(x)) \longmapsto \alpha \cdot p(x)$ par

$$\alpha p(x) = \sum_{k=0}^{m} (\alpha a_k) x^k \text{ avec } p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k, \alpha \in \mathbb{F}$$

Avec $p(x) + 0 = p(x)$ et $0p(x) = 0$.
Ainsi $\mathscr{P}(\mathbb{F})$ est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Quelques pistes...

V_1 suit de la commutativité de l'addition dans $\mathbb{F}$

V_2 suit de l'associativité de l'addition et de la multiplication par scalaire dans $\mathbb{F}$

V_3 par définition des opérations avec le polynôme zéro, 0 est un élément neutre de l'addition dans $\mathscr{P}(\mathbb{F})$

V_4 soit $p(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$, écrire $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ et poser $q(x) = \sum_{k=0}^{n} -a_k x^k$.

Alors,

$$p(x) + q(x) = \sum_{k=0}^{n} \big(a_k + (-a_k)\big)x^k = 0$$

Ainsi, $q(x)$ est l'inverse additif de $p(x)$

V_5 évident

V_6 suit de la distributivité dans $\mathbb{F}$

Conclusion : muni des opérations définies ci-dessus, $\mathscr{P}(\mathbb{F})$ est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel.

4. **L'espace des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{F}$**
Une matrice à m lignes et n colonnes est un tableau :

$$M = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \alpha_{1,2} & \cdots & \alpha_{1,n} \\ \alpha_{2,1} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} & \alpha_{m,2} & \cdots & \alpha_{m,n} \end{pmatrix} \text{ où } \alpha_{i,j} \in \mathbb{F}, \forall i, j$$

Nous écrivons $(M)_{ij}$ pour désigner l'entrée à la place (i, j). Ainsi, $\alpha_{i,j} = (M)_{i,j}$ pour $M = (\alpha_{i,j})$. Nous noterons $\mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$ ou $\mathrm{Mat}(m, n, \mathbb{F})$ l'ensembles des matrices à m lignes et n colonnes à coefficients dans $\mathbb{F}$. Soient $M = (\alpha_{i,j}), N = (\beta_{i,j}) \in \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$ et soit $\lambda \in \mathbb{F}$. Définissons l'addition et la multiplication par un scalaire.

$$add : \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F}) \times \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$$

$$M + N = \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} + \beta_{1,1} & \cdots & \alpha_{1,n} + \beta_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m,1} + \beta_{m,1} & \cdots & \alpha_{m,n} + \beta_{m,n} \end{pmatrix}$$

$$multi : \mathbb{F} \times \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$$

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{1,1} & \cdots & \lambda\alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m,1} & \cdots & \lambda\alpha_{m,n} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$ est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel[1].

Remarque. Les $\mathbb{F}$-espaces vectoriels que nous venons de définir dans les exemples précédent sont très importants. Nous allons travailler avec tout au long de ce cours.

Remarque. **Le polynôme 0**
La meilleur façon de voir le polynôme 0 est comme :

$$0 = 0 + 0x + 0x^2 = ... = 0 + 0x + ...0x^n = ...$$

Proposition 2.1. ***Propriétés élémentaires d'un espace vectoriel***
Soit V un $\mathbb{F}$ espace vectoriel.

1. *Soit $\vec{z} \in V$, si $\exists \vec{v} \in V$ tq $\vec{v} + \vec{z} = \vec{v}$ alors $\vec{z} = \vec{0}$* ***(unicité de l'élément neutre)***
2. *Soient $\vec{v}, \vec{w}, \vec{w}' \in V$. Si $\vec{v} + \vec{w} = \vec{v} + \vec{w}'$, alors $\vec{w} = \vec{w}'$*
3. $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}, \forall \vec{v} \in V$
4. $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}, \forall \alpha \in \mathbb{F}$
5. *$(-1)\vec{v}$ est toujours l'inverse additif de $\vec{v}, \forall \vec{v} \in V$.*

[1] voir la série 4 ; exercice 1

Remarque. De la propriété 2 on tire qu'il existe un *unique inverse additif* $\forall \vec{v} \in V$ car si $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0} = \vec{v} + \vec{w}'$ alors $\vec{w} = \vec{w}'$

Remarque. $\forall \vec{v} \in V$, on écrit $-\vec{v}$ pour l'unique inverse additif de $\vec{v}$.

Démonstration. Nous nous baserons uniquement sur les axiomes des espaces vectoriels.

1. Par l'axiome V_4, $\exists \vec{w} \in V$ *tq* $\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$. Alors par V_1, $\vec{v} + \vec{w} = \vec{w} + \vec{v} = \vec{0}$. Ainsi si $\vec{v} = \vec{v} + \vec{z}$, alors, en prenant la somme avec $\vec{w}$ sur les deux membres, on obtient,
$$\vec{0} = \vec{w} + \vec{v} = \vec{w} + (\vec{v} + \vec{z}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{z} = \vec{0} + \vec{z} = \vec{z} + \vec{0} = \vec{z}$$
Ainsi, nous avons bien $\vec{z} = \vec{0}$.
2. Nous savons, par l'axiome V_4 que $\exists \vec{z}$ tel que $\vec{v} + \vec{z} = \vec{0}$, ainsi :
$$\vec{w} = \vec{w} + \vec{0} = \vec{w} + (\vec{v} + \vec{z}) = (\vec{w} + \vec{v}) + \vec{z} = (\vec{w}' + \vec{v}) + \vec{z}' = \vec{w}' + (\vec{v} + \vec{z}) = \vec{w}' + \vec{0} = \vec{w}'$$
Ainsi, nous avons bien $\vec{w} = \vec{w}'$.
3. $$0 \cdot \vec{v} = (0 + 0)\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} + 0 \cdot \vec{v}$$
Par la propriété 1, on a que $0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$, où $0 \cdot \vec{v}$ joue le rôle de $\vec{v}$ et de $\vec{z}$ dans l'énoncé de la propriété 1.
4. Par l'axiome V_3, on a $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$ et donc,
$$\alpha \cdot \vec{0} = \alpha(\vec{0} + \vec{0}) = \alpha \cdot \vec{0} + \alpha \cdot \vec{0}$$
De même, par la propriété 1, on a que $\alpha \cdot \vec{0} = \vec{0}$.
5. $$\vec{v} + (-1)\vec{v} = 1 \cdot \vec{v} + (-1)\vec{v} = (1 + (-1))\vec{v} = 0 \cdot \vec{v} = \vec{0}$$
Ainsi, $(-1)\vec{v}$ est l'unique inverse additif de $\vec{v}$, par 2.

cqfd

2.2 Sous-espaces vectoriels

Question : Etant donné un $\mathbb{F}$-espace vectoriel V et un sous-ensemble $U \subset V$, quand est-ce que U est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel, muni de l'addition et de la multiplication par scalaire “héritée” de V ?

Réponse partielle : Il est évident qu'il faut au moins :
$\vec{u}, \vec{v} \in U \Longrightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U$
$\alpha \in \mathbb{F}, \vec{v} \in U \Longrightarrow \alpha\vec{v} \in U$
En fait, ces deux conditions sont non seulement nécessaires, mais aussi suffisantes, pour autant que $U \neq \emptyset$.

Exemple 2.2. Soit $V = \mathbb{F}^n, U = \{(a, 0, ..., 0) | a \in \mathbb{F}\} \subset V$ Alors U est un sous-espace vectoriel de V. En effet, $(a, 0, ..., 0) + (b, 0, ..., 0) = ((a + b), 0, ..., 0) \in U, \forall a, b \in \mathbb{F}$ et $\alpha(a, 0, .., 0) = (\alpha a, 0, ..., 0) \in U, \forall \alpha, a \in \mathbb{F}$. Ensuite il faut vérifier les axiomes.
Considérer $U' = \{(a, 1, 0, ..., 0) | a \in \mathbb{F}\}$ dans ce cas, U' n'est pas un sous-espace vectoriel de V. En effet, $(a, 1, 0, ..., 0) + (b, 1, 0, ..., 0) = (a + b, 2, 0, ..., 0) \notin U'$ et $\alpha(a, 1, 0, ..., 0) = (\alpha a, \alpha, 0, ..., 0) \notin U'$, si $\alpha \neq 1$. Ainsi, il n'est pas nécessaire de vérifier les axiomes.
Nous ne sommes pas obligés de re-vérifier tous les axiomes pour être sûr que U est un sous-espace vectoriel de V.

Cet exemple motive la proposition suivante :

Proposition 2.2. ***Caractérisation des sous espaces vectoriels*** *Soit V un $\mathbb{F}$ espace vectoriel, soit $U \subset V$ un sous-ensemble. Alors :*

$$U \text{ est un sous-espace vectoriel de } V \iff \begin{cases} U \neq \emptyset \\ \vec{u} + \vec{u}' \in U, \forall \vec{u}, \vec{u}' \in U \\ \alpha \cdot \vec{u} \in U, \forall \vec{u} \in U, \forall \alpha \in \mathbb{F} \end{cases}$$

Remarque. Si U hérite ainsi d'une structure d'espace vectoriel de V, alors U est un *sous-espace vectoriel* de V.

Démonstration. $\Longrightarrow$ On suppose U un sous-espace vectoriel de V. En particulier, U est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel et donc $\exists \vec{0} \in U$ et donc $U \neq \emptyset$. Par ailleurs, U est un sous-espace vectoriel de V. Ce qui implique que l'on peut restreindre l'addition et la multiplication par scalaire de V à U, i.e.,
$Im\Big(add|_{U \times U}\Big) \subset U$, i.e., $\vec{u} + \vec{v} \in U, \forall \vec{u}, \vec{v} \in U$
$Im\Big(multi|_{\mathbb{F} \times U}\Big) \subset U$, i.e., $\alpha\vec{v} \in U, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \forall \vec{v} \in U$
Les conditions $\vec{u} + \vec{u}' \in U, \forall \vec{u}, \vec{u}' \in U$ et $\alpha \cdot \vec{u} \in U, \forall \vec{u} \in U, \forall \alpha \in \mathbb{F}$ sont donc vérifiées.

$\Longleftarrow$ On suppose que $U \neq \emptyset$ et que les conditions $\vec{u} + \vec{u}' \in U, \forall \vec{u}, \vec{u}' \in U$ et $\alpha \cdot \vec{u} \in U, \forall \vec{u} \in U, \forall \alpha \in \mathbb{F}$ soient vérifiées. Nous allons voir que muni de l'addition et la multiplication par scalaire provenant de V, le sous ensemble U est lui-même un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Observer que puisque les axiomes V_1, V_2, V_5 et V_6 sont vérifiés dans V, ils sont aussi vrais dans U, qui est un sous-ensemble de V. Seuls les axiomes d'existence sont à vérifier, i.e., les axiomes V_3 et V_4.

V_3 $U \neq \emptyset \Rightarrow \exists \vec{u} \in U$. La troisième condition ci-dessus implique que $\alpha\vec{u} \in U, \forall \alpha \in \mathbb{F}$. En particulier, $0\vec{u} \in U$. Or, la propriété 3 implique que $0\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{0} \in U$.

V_4 Soit $\vec{u} \in U$. V est $\mathbb{F}$-espace vectoriel $\Rightarrow \exists -\vec{u} \in V$. Montrons que $-\vec{u} \in U$. Par la propriété 5 et la troisième condition, $-\vec{u} = (-1)\vec{u} \in U$.

cqfd

Exemple 2.3. **Application de la caractérisation**

0. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel, alors $\{\vec{0}\}$ est un sous-espace vectoriel de V.
   - $\{\vec{0}\} \neq \emptyset$
   - $\vec{0} + \vec{0} = \vec{0} \in \{\vec{0}\}$
   - $\alpha\vec{0} = \vec{0} \in \{\vec{0}\}, \forall \alpha \in \mathbb{F}$
1. Soit $V = \mathbb{F}^n\{(a_1, a_2, \dots, a_n) | a_i \in \mathbb{F}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n\}$ avec la définition de l'addition et de la multiplication par scalaire usuelle.
   a) Soit $U = \{(a, 2a, ..., na) | a \in \mathbb{F}\}$ alors U est un sous-espace vectoriel de V.
   - $U \neq \emptyset$
   - Soient $(a, 2a, ..., na), (b, 2b, ..., nb) \in U$
     $\Rightarrow (a, 2a, ..., na) + (b, 2b, ..., nb) = (a + b, 2a + 2b, ..., na + nb) \in U$
   - $\alpha(a, 2a, ..., na) = (\alpha a, \alpha 2a, ..., \alpha na) = (\alpha a, 2(\alpha a), ..., n(\alpha a)) \in U, \forall \alpha \in \mathbb{F}$

   b) Posons $n = 3$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ et considérer $U = \{(x, x - y, y) | x, y \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}^3$ Alors U est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$
   - $U \neq \emptyset$
   - Soient $(x, x - y, y), (x', x' - y', y') \in U$
     $\Rightarrow (x, x - y, y) + (x', x' - y', y') = (x + x', (x + x') - (y + y'), y + y') \in U$
   - $\alpha(x, x - y, y) = (\alpha x, \alpha x - \alpha y, \alpha y) \in U, \forall \alpha \in \mathbb{F}$
2. Soit $V = \mathscr{P}(\mathbb{F})$. Considérer
   $$U = \mathscr{P}_n(\mathbb{F}) = \left\{ \sum_{k=0}^{n} a_k z^k | n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{F}, a_n \neq 0 \right\} \cup \{0\}$$
   Alors $\mathscr{P}_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{P}(\mathbb{F})$.
   - $\mathscr{P}(\mathbb{F}) \neq \emptyset$ car $p(z) = 0 \Leftrightarrow p(z) = 0 + 0z + ... + 0z^n$
   - Soient $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k, q(z) = \sum_{j=0}^{n} b_j z^j \in U$
   $$\begin{aligned} p(z) + q(z) &= \sum_{k=0}^{n} a_k z^k + \sum_{j=0}^{n} b_j z^j = (a_0 + ... + a_n z^n) + (b_0 + ... + b_n z^n) \\ &= (a_0 + b_0) + ... + (a_n z^n + b_n z^n) \\ &= (a_0 + b_0) + ... + (a_n + b_n) z^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} (a_k + b_k) z^k \Rightarrow p + q \in \mathscr{P}_n(\mathbb{F}) \end{aligned}$$
   - Soient $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k \in U, \alpha \in \mathbb{F}$.
   $$\begin{aligned} \alpha p(z) &= \alpha \sum_{k=0}^{n} a_k z^k = \alpha(a_0 + ... + a_n z^n) = (\alpha a_0 + ... + \alpha a_n z^n) \\ &= (\alpha a_0) + ... + (\alpha a_n) z^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k) z^k \Rightarrow \alpha p \in \mathscr{P}_n(\mathbb{F}) \end{aligned}$$
3. Considérer le cas $V = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, qui est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Poser
   $$U = \{f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} | f \text{ continue}\}$$
   Alors U est un sous-espace vectoriel de $V = \mathscr{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
   - $U \neq \emptyset$
   - $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $f + g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue.
   - $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Alors $\alpha f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue $\forall \alpha \in \mathbb{R}$.

   Il est du ressort d'un cours d'analyse de démontrer ces affirmations. (Preuve par ε, δ)

Remarque. L'exemple 2 motive la notion de *degré d'un polynôme*, notée $deg\ p = n$. Pour le polynôme 0 on pose $deg 0 = -\infty$.

Constructions avec des sous-espaces vectoriels

Définition 2.2. *Soient $U_1, ..., U_n$ des sous-espaces vectoriels de V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Leur* somme *est*

$$U_1 + ... + U_n \underset{def}{=} \{\vec{u_1} + ... + \vec{u_n} | \vec{u_i} \in U_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Remarque. $\vec{u_i} \in U_i \subset V, \forall 1 \leqslant i \leqslant n, \Rightarrow u_1 + ... + u_n \in V$ et par conséquent $U_1 + ... + U_n \subset V$.

Lemme 2.1. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel et soient $U_1, ..., U_n$ des sous-espaces vectoriels de V. Alors*

1. *$U_1 + ... + U_n$ est un sous-espace vectoriel de V.*
2. *Si U est un sous-espace vectoriel de V tq $U_i \subset U, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$, alors la somme $U_1 + ... + U_n \subset U$.*

Démonstration. 1. Utiliser la caractérisation des sous-espaces vectoriels.
Soient $\vec{v}, \vec{v}' \in U_1 + ... + U_n$. Montrer que $\vec{v} + \vec{v}' \in U_1 + ... + U_n$. Nous avons $\vec{v}, \vec{v}' \in U_1 + ... + U_n \Rightarrow \exists \vec{u_i}, \vec{u_i}' \in U_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ tq $\vec{v} = \vec{u_1} + ... + \vec{u_n}$ et $\vec{v}' = \vec{u_1}' + ... + \vec{u_n}'$
Ainsi,

$$\vec{v} + \vec{v}' = (\vec{u_1} + ... + \vec{u_n}) + (\vec{u_1}' + ... + \vec{u_n}') = \underbrace{(\vec{u_1} + \vec{u_1}')}_{\in U_1} + ... + \underbrace{(\vec{u_n} + \vec{u_n}')}_{\in U_n}$$

Or chaque U_i est un sous-espace vectoriel de V, donc $\vec{u_i} + \vec{u_i}' \in U_i, \forall i \Rightarrow \vec{v} + \vec{v}' \in U_1 + ... + U_n$.

Soit $\vec{v} \in U_1 + ... + U_n$ et soit $\alpha \in \mathbb{F}$. Montrer que $\alpha\vec{v} \in U_1 + ... + U_n$.
$\vec{v} \in U_1 + .. + U_n \Rightarrow \exists \vec{u_i} \in U_i, \forall i$ tq $\vec{v} = \vec{u_1} + ... + \vec{u_n}$. Ainsi,

$$\alpha\vec{v} = \alpha(\vec{u_1} + ... + \vec{u_n}) = \underbrace{\alpha\vec{u_1}}_{\in U_1} + ... + \underbrace{\alpha\vec{u_n}}_{\in U_n}.$$

Or chaque U_i est un sous-espace vectoriel de V, donc $\alpha\vec{v} \in U_i, \forall i \Rightarrow \alpha\vec{v} \in U_1 + ... + U_n$.
Conclusion : $U_1 + ... + U_n$ est un sous-espace vectoriel de V.

2. On suppose $U_i \subset U, \forall i$, où U est un sous-espace vectoriel de V. Montrer que $U_1 + ... + U_n \subset U$, i.e., $\forall \vec{v} \in U_1 + ... + U_n$ on a que $\vec{v} \in U$.
Soit $\vec{v} \in U_1 + ... + U_n$, i.e., $\exists \vec{u_i} \in U_i, \forall i$ tq $\vec{v} = \vec{u_1} + ... + \vec{u_n}$. Or $\vec{u_i} \in U_i \Rightarrow \vec{u_i} \in U$ car $U_i \subset U, \forall i$. Puisque U est un sous-espace vectoriel de V et $\vec{u_i} \in U, \forall i$ il suit que $\vec{v} = \vec{u_1} + ... + \vec{u_n} \in U$. cqfd

Remarque. Le Lemme implique que $U_1 + ... + U_n$ est le plus petit sous-espace vectoriel de V qui contient tous les U_i.

2.3 Sommes directes

Définition 2.3. *Soient $U_1, ..., U_n$ des sous-espaces vectoriels de V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Leur somme $U_1 + ... + U_n$ est dite* directe *si*

$$\forall \vec{v} \in U_1 + ... + U_n, \exists! u_1 \in U_1, ..., \vec{u_n} \in U_n \text{ tq } \vec{v} = \vec{u_1} + ... + \vec{u_n}.$$

Nous noterons les sommes directes *: $U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_n$.*

Exemple 2.4. Poser $\vec{e_i} = (0, ..., 0, 1, 0, ..., 0)$, i.e., , le vecteur contenant que des 0 sauf un 1 au rang i. Poser $U_i = \{\alpha\vec{e_i} | \alpha \in \mathbb{F}\}$. U_i est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}^n$.

1. Que représente la somme $U_1 + ... + U_n$?
2. La somme $U_1 + ... + U_n$ est-elle directe ?

Essayons de répondre formellement à ces questions. Tout d'abord, effectuons un petit calcul préliminaire.

$$U_1 + ... + U_n = \{\vec{u_1} + ... + \vec{u_n} | \vec{u_i} \in U_i \forall 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Or, $\vec{u_i} \in U_i \Rightarrow \exists \alpha_i \in \mathbb{F}$ tq $\vec{u_i} = \alpha_i\vec{e_i} = (0, ...0, \alpha_i, 0...0)$. Ainsi

$$\begin{aligned} \vec{u_1} + ... + \vec{u_n} &= \alpha_1\vec{e_1} + ... + \alpha_n\vec{e_n} \\ &= (\alpha_1, 0, ..., 0) + ... + (0, ..., 0, \alpha_n) \\ &= (\alpha_1, ..., \alpha_n) \end{aligned}$$

1. *Affirmation* $U_1 + ... + U_n = \mathbb{F}^n$
   - $U_1 + ... + U_n \subset \mathbb{F}^n$, cette inclusion est triviale car $U_1 + ... + U_n$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}^n$ et donc un sous-ensemble.
   - $\mathbb{F}^n \subset U_1 + ... + U_n$, $\mathbb{F}^n = \{(a_1, ..., a_n) | a_i \in \mathbb{F}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n\}$. Par le calcul préliminaire, nous avons que pour tout $(a_1, ..., a_n) \in \mathbb{F}^n$

   $$(a_1, ..., a_n) = \underbrace{a_1\vec{e_1}}_{\in U_1} + ... + \underbrace{a_n\vec{e_n}}_{\in U_n} \in U_1 + ... + U_n$$

   Ainsi $\mathbb{F}^n \subset U_1 + ... + U_n$
   Nous avons donc bien l'égalité $\mathbb{F}^n = U_1 + ... + U_n$

2. *Affirmation.* Cette somme est directe, i.e., $U_1 \oplus ... \oplus U_n = \mathbb{F}^n$.
   Supposons que $\exists \vec{u_i}, \vec{u_i}' \in U_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ tq $\vec{u_1} + ... + \vec{u_n} = \vec{u_1}' + ... + \vec{u_n}'$. Montons que $\vec{u_i} = \vec{u_i}', \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi,

   $$\vec{u_i}, \vec{u_i}' \in U_i = \{\alpha\vec{e_i} | \alpha \in \mathbb{F}\} \Rightarrow \exists \alpha_i, \alpha_i' \in \mathbb{F} \text{ tq } \begin{cases} \vec{u_i} = \alpha_i\vec{e_i} \\ \vec{u_i}' = \alpha_i'\vec{e_i} \end{cases} \forall 1 \leqslant i \leqslant n.$$

   Ainsi, par le calcul préliminaire, nous avons.

   $$\begin{aligned} (\alpha_1, ..., \alpha_n) &= \alpha_1\vec{e_1} + ... + \alpha_n\vec{e_n} \\ &= \vec{u_1} + ... + \vec{u_n} = \vec{u_1}' + ... + \vec{u_n}' \\ &= \alpha_1'\vec{e_1} + ... + \alpha_n'\vec{e_n} \\ &= (\alpha_1', ..., \alpha_n') \end{aligned}$$

   Par conséquent, nous avons que :

   $$\alpha_i = \alpha_i', \forall 1 \leqslant i \leqslant n \Rightarrow \vec{u_i} = \vec{u_i}', \forall 1 \leqslant i \leqslant n$$

   La somme est donc directe, i.e., $U_1 \oplus ... \oplus U_n = \mathbb{F}^n$.

Autrement dit, si $\vec{u_1} + ... + \vec{u_n} = \vec{u_1}' + ... + \vec{u_n}'$ où $\vec{u_1}, \vec{u_i}' \in U_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ alors $\vec{u_i} = \vec{u_i}', \forall 1 \leqslant i \leqslant n$

Exemple 2.5. Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel et soit U un sous-espace vectoriel de V. Montrons que $U + \{\vec{0}\} = U$ et que cette somme est directe.
- $U + \{\vec{0}\} \subset U : \vec{v} \in U + \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \exists \vec{u} \in U \text{ tq } \vec{u} = \vec{v} + \vec{0}$ Par conséquent, $\vec{v} \in U + \{\vec{0}\} \Rightarrow \vec{v} \in U$
- $U \subset U + \{\vec{0}\} : \vec{u} \in U \Rightarrow \vec{u} = \vec{u} + \vec{0} \in U + \{\vec{0}\}$. Par conséquent, $U \subset U + \{\vec{0}\}$
- La somme est directe car, $\vec{u} + \vec{0} = \vec{u}' + \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{u}'$.

Ainsi, $U = U \oplus \{\vec{0}\}$.

Proposition 2.3. ***Caractérisation des sommes directes***
Soit $U_1, ..., U_n$ des sous-espaces vectoriels de V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Alors

$$U_1 + ... + U_n \text{ est directe} \Longleftrightarrow \begin{cases} \text{si } \vec{0} = \vec{u_1} + ... + \vec{u_n}, \vec{u_i} \in U_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n, \\ \text{alors } \vec{u_i} = \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons que la somme soit directe. Observer que $\vec{0}$ peut se décomposer en la somme suivante : $\vec{0} = \vec{0} + ... + \vec{0}$ où $\vec{0} \in U_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Nous avons que si $\vec{u_1} + ... + \vec{u_n} = \vec{0} = \vec{0} + ... + \vec{0}$, où $\vec{u_i} \in U_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ alors $\vec{u_i} = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$

$\Longleftarrow$ Supposons que $\vec{0} = \vec{u_1} + ... + \vec{u_n} \Rightarrow \vec{u_i} = \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Supposons que

$$\vec{u_1} + ... + \vec{u_n} = \vec{u_1}' + ... + \vec{u_n}' \text{ où } \vec{u_i}, \vec{u_i}' \in U_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$$

Additionnons $-\vec{u_1}' - ... - \vec{u_n}'$ aux deux membres de cette égalité et appliquons les axiomes V_1 et V_2 pour arriver à

$$\underbrace{(\vec{u_1} - \vec{u_1}')}_{\in U_i} + ... + \underbrace{(\vec{u_n} - \vec{u_n}')}_{\in U_n} = \vec{0}$$

Donc par hypothèse $\vec{u_i} - \vec{u_i}' = \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$, *i.e.*, $\vec{u_i} = \vec{u_i}', \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. La somme est donc bien directe. cqfd

Corollaire 2.1. *Soient U_1, U_2 des sous-espaces vectoriels de V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Alors*

$$U_1 + U_2 \textit{ est directe} \Longleftrightarrow U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons que $U_1 + U_2$ est directe. Ainsi, si $\vec{v} \in U_1 \cap U_2$, alors $\vec{v} \in U_1$ et $-\vec{v} \in U_2$. Par conséquent,

$$\vec{0} = \vec{v} - \vec{v} = \underbrace{\vec{v}}_{\in U_1} + \underbrace{(-\vec{v})}_{\in U_2} \Rightarrow \vec{v} = \vec{0} = -\vec{v}$$

Ainsi, $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$

$\Longleftarrow$ Supposons $U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$. Supposons que $\vec{0} = \vec{u_1} + \vec{u_2}$ où $\vec{u_1} \in U_1$ et $\vec{u_2} \in U_2$. Alors, $\vec{u_1} = -\vec{u_2}$ où $\vec{u_1} \in U_1$ et $\vec{u_2} \in U_2$, i.e., $\vec{u_2} \in U_1 \cap U_2 = \{\vec{0}\}$, donc $\vec{u_2} = \vec{0}$ et $\vec{u_1} = \vec{0}$. Ainsi, $\vec{u_1} + \vec{u_2} = \vec{0} \Rightarrow \vec{u_1} = \vec{0} = \vec{u_2}$ et donc la somme est directe par la caractérisation ci-dessus. cqfd

Remarque. Ce résultat n'est pas généralisable. En effet, si $U_1, ..., U_n$ des sous-espace vectoriel de V, alors,

$$U_1 \oplus ... \oplus U_n \not\Leftrightarrow U_1 \cap ... \cap U_n = \{\vec{0}\}$$

Il est facile de montrer que l'implication directe est vraie. Cependant, la réciproque n'est pas vraie. De même, pour la proposition suivante,

$$U_1 \oplus ... \oplus U_n \not\Leftrightarrow U_i \cap U_j = \{\vec{0}\} \forall i \neq j.$$

l'implication directe est vraie, mais pas la réciproque.

Chapitre 3

Espaces vectoriels de dimension finie

3.1 Génération de sous-espaces

Définition 3.1. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Soit $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ une* liste de vecteurs *dans V. Le sous-espace vectoriel de V* engendré *par cette liste est le sous-espace vectoriel suivant :*

$$span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}) \underset{def}{=} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} | \alpha_i \in \mathbb{F}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$$

On dit que $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i}$ est une combinaison linéaire *des vecteur $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$.*
Si $U = span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ alors $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est une liste génératrice *pour U. On dit que U est engendré par la liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$.*

Proposition 3.1. *$span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est un sous-espace vectoriel de V.*

Démonstration. Soient $\vec{u}, \vec{w} \in span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$. Alors

$$\exists \alpha_1, ..., \alpha_n \text{ et } \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{F} \text{ tq } \begin{cases} \vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} \text{ et} \\ \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v_i} \end{cases}$$

et donc

$$\vec{u} + \vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v_i} = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i \vec{v_i} + \beta_i \vec{v_i}) = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) \vec{v_i}}_{\text{combinaison linéaire}}$$

Ainsi, $\vec{u} + \vec{w} \in span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$.

Soit $\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} \in span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ et soit $\zeta \in \mathbb{F}$. Alors

$$\zeta\vec{u} = \zeta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_1} = \sum_{i=1}^{n} \zeta\alpha_i \vec{v_i} = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} (\zeta\alpha_i)\vec{v_i}}_{\text{combinaison linéaire}}$$

Ainsi, $\zeta\vec{u} \in span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$
Conclusion : $span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est bien un sous-espace vectoriel de V. cqfd

Remarque. Observer que la commutativité de V implique que l'ordre des $\vec{v}_i$ dans la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ n'a pas d'importance. En effet, $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, ..., \vec{v}_n) = span(\vec{v}_k, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$.

Exemple 3.1. Quelques exemples de listes génératrices importantes.

1. Soit $V = \mathbb{F}^n$, soient $\vec{e_1} = (1, 0, ...0), ..., \vec{e_n} = (0, ..., 0, 1) \in \mathbb{F}$ Alors $\mathbb{F}^n = span(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$.
   $\subset$: Par la définition de *span*, nous avons que $span(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n}) \in \mathbb{F}^n$
   $\supset$: Soit $\vec{v} = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in F^n$ un vecteur quelconque. Alors $\vec{v} = \alpha_1\vec{e_1} + ... + \alpha_n\vec{e_n}$. Ainsi, $\vec{v} \in span(\vec{e_1}, ..., \vec{e_n})$
2. Soit $V = \mathscr{P}_n(\mathbb{F})$. Rappel : $\mathscr{P}(\mathbb{F}) = \{\sum_{k=0}^{n} a_k x^k | n \in \mathbb{N}, a_k \in \mathbb{F}, a_n \neq 0\} \cup \{0\}$. Alors $V = span(1, x, x^2, ..., x^n)$.
   $\subset$: De même par la definition du *span*
   $\supset$: Soit $p(x) \in \mathscr{P}_n(\mathbb{F})$, alors $p(x)$ est par définition un combinaison linéaire de $1, x, x^2, ..., x^n$

Remarque. En fait, $span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est le *plus petit* sous-espace vectoriel qui contient $\vec{v_1}, ...\vec{v_n}$.
Si $W \subset V$ est un sous-espace vectoriel avec $\vec{v_i} \in W, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ alors, $span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}) \subset W$, puisque W doit contenir les multiples et sommes de tous ses éléments.

Remarque. Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. $\forall \vec{v} \in V$, alors,

$$span(\vec{v}) = \{\alpha\vec{v} | \alpha \in \mathbb{F}\}$$

Définition 3.2. *Un $\mathbb{F}$-espace vectoriel V est dit de* dimension finie *s'il existe $\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}$ tq $V = span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$*

Exemple 3.2. Soit $V = \mathscr{P}(\mathbb{F})$, montrons que V est de dimension infinie.
Supposons par l'absurde que V soit de dimension finie. Alors $\exists n \in \mathbb{N}$ et $p_1, ..., p_n \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$ tq $span(p_1, ..., p_n) = \mathscr{P}(\mathbb{F})$.
Soient $k_i = deg(p_i)$ le degré de p_i. Posons $k = \max(k_i)$. Alors, $p_1, ..., p_n \in \mathscr{P}_k(\mathbb{F})$. Donc, $span(p_1, ..., p_n) \subset \mathscr{P}_k(\mathbb{F})$, et par hypothèse : $\mathscr{P}(\mathbb{F}) \subset span(p_1, ..., p_n)$ Ce qui est contradictoire. Ainsi, la dimension de $\mathscr{P}(\mathbb{F})$ est infinie.

Proposition 3.2. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Alors pour toute liste $(\vec{v_1}, .., \vec{v_n})$, nous avons :*

$$span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}) = span(\vec{v_1}) + ... + span(\vec{v_n}).$$

Démonstration. Utilisons la définition du *span*.

- $span(\vec{v_1}, .., \vec{v_n}) \subset span(\vec{v_1}) + ... + span(\vec{v_n})$:
  Soit $\vec{w} \in span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$, nous avons $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i}$. Or $\alpha_i \vec{v_i} \in span(\vec{v_i}), \forall \alpha_i \in \mathbb{F}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Donc $\vec{w} \in span(\vec{v_1}) + ... + span(\vec{v_n})$.
- $span(\vec{v_1}) + ... + span(\vec{v_n}) \subset span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$:
  Puisque $\vec{w} \in span(\vec{v_1}) + ... + span(\vec{v_n})$, nous avons que, $\exists \vec{w_i} \in span(\vec{v_i}), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ tq $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \vec{w_i}$. Or $\vec{w_i} \in span(\vec{v_i})$, par conséquent, $\exists \alpha_i \in \mathbb{F}$ tq $\vec{w_i} = \alpha_i \vec{v_i}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.
  Ainsi, $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} \in span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$.

cqfd

Span et sommes directes

Sous quelles conditions est-ce que la somme $span(\vec{v_1}) + ... + span(\vec{v_n})$ est directe ? Autrement dit, par la caractérisation des sommes directes, quand est-ce que

$$\vec{0} = \vec{w_1} + ...\vec{w_n}, \text{ où } \vec{w_i} \in span(\vec{v_i}), \forall 1 \leqslant i \leqslant n. \Rightarrow \vec{w_i} = \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n?$$

Analysons la question : si $\vec{0} = \vec{w_1} + ... + \vec{w_n}$ et $\vec{w_i} \in span(\vec{v_i}), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ alors, $\exists \alpha_i \in \mathbb{F}$ tq $\vec{w_i} = \alpha_i \vec{v_i}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ et donc $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i}$. Ainsi :

$$\text{la somme est directe} \iff \begin{cases} \text{si } \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} = \vec{0} \\ \text{alors } \alpha_i \vec{v_i} = \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n. \end{cases}$$

Alors $\alpha_i \vec{v_i} = \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Mais si $\alpha_i \vec{v_i} = \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n \Rightarrow$ soit $\alpha_i = 0$, soit $\vec{v_i} = \vec{0}$.
Cette analyse nous mène à la définition.

Indépendance linéaire

Définition 3.3. *Une liste de vecteurs $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est dite* linéairement indépendante *ou* non-liée *ou* libre *si,*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} = \vec{0} \Longrightarrow \alpha_i = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$$

Si la liste ne vérifie pas cette condition, elle est dite linéairement dépendante *ou* liée.

Remarque. La liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est linéairement dépendante si et seulement si $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tq $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} = \vec{0}$ avec $\alpha_1, ..., \alpha_n$ pas tous nuls, i.e., $\exists i$ tq $\alpha_i \neq 0$.

Remarque. Soient $X_1, X_2 \subset V$ des sous-ensembles non vides, alors,

- $span(X_1) = \left\{ \sum_{i=1}^{r} \alpha_i \vec{v_i} | r \geqslant 1, \vec{v_i} \in X_1, \alpha_i \in \mathbb{F} \right\}$
- $span(X_1 \cup X_2) = span(X_1) + span(X_2)$
- $X_1 \subset X_2 \subset V \Longrightarrow span(X_1) \subset span(X_2) \subset V$

Définition 3.4. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel, et soit un sous-ensemble $A \subseteq V$ et $A \neq \emptyset$ est* lié *si tout nombre fini d'éléments de A est lié.*

Lemme 3.1. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Soit $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ une liste dans V. La liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est linéairement indépendante seulement si $\vec{v_i} \neq \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.*

Démonstration. Montrer par l'absurde que $\vec{v_i} \neq \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ si $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est linéairement indépendante. Supposer donc que $\exists i$ tq $\vec{v_i} = \vec{0}$.
Soit $\alpha \in \mathbb{F}, \alpha \neq 0$, considérons la combinaison linéaire

$$\underbrace{0\vec{v_1}}_{=0} + ... + \underbrace{0\vec{v}_{i-1}}_{=0} + \underbrace{\alpha\vec{v_i}}_{=0} + \underbrace{0\vec{v}_{i+1}}_{=0} + ... + \underbrace{0\vec{v_n}}_{=0} = \vec{0}$$

Or $\alpha \neq 0$ est contradictoire avec l'indépendance linéaire. Ainsi, $\vec{v_i} \neq \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. cqfd

Proposition 3.3. *Soit $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ une liste dans V. Alors, ces trois propositions sont équivalentes :*

1. *La liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est linéairement indépendante.*
2. *Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v_i}$ alors $\alpha_i = \beta_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$*
3. *La somme $span(\vec{v_1}) + ... + span(\vec{v_n})$ est directe et $\vec{v_i} \neq \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.*

Démonstration. **1⟹2** On suppose $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ linéairement indépendante. Si

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v_i}$$

alors,

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v_i} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i} + \sum_{i=1}^{n} \underbrace{-(\beta_i \vec{v_i})}_{=(-\beta_i)\vec{v_i}} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha_i \vec{v_i} + (-\beta_i)\vec{v_i}\big) = \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha_i + (-\beta_i)\big)\vec{v_i}. \end{aligned}$$

Ainsi, puisque le liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est linéairement indépendante par hypothèse, $\alpha_i + (-\beta_i) = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n.$, i.e., $\alpha_i = \beta_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

1⟹3 Par le Lemme, nous avons que $\vec{v_i} \neq \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Pour voir que la somme $span(\vec{v}_1) + ... + span(\vec{v}_n)$ est directe, supposer que

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{w_i} \text{ où } \vec{w_i} \in span(\vec{v_i}), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$$

et donc que $\exists \alpha_i \in \mathbb{F}$ tq $\vec{w_i} = \alpha_i \vec{v_i}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi, $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i}$, donc $\alpha_i = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ puisque la liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est linéairement indépendante. Par conséquent, $\vec{w_i} = \alpha_i \vec{v_i} = 0\vec{v_i} = \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi, la somme est directe.

2⟹3 Supposons 2 vrai. Si $\exists i$ tq $\vec{v_i} = \vec{0}$, alors,

$$0\vec{v}_1 + ... + a\vec{v}_i + ... + 0\vec{v}_n = 0\vec{v}_1 + ... + b\vec{v}_i + ... + 0\vec{v}_n, \forall a, b \in \mathbb{F}.$$

Il y a contradiction avec la condition 2. Donc, $\vec{v_i} \neq \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$
Montrons que $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = span(\vec{v}_1) \oplus ... \oplus span(\vec{v}_n)$. Nous avons déjà montré que $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = span(\vec{v}_1) + ... + span(\vec{v}_n)$[1]. Il nous reste à montrer que la somme est directe. Supposons que $\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{w_i}$ où $\vec{w_i} \in span(\vec{v_i})$ et montrons que $\vec{w_i} = \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Or $\vec{w_i} \in span(\vec{v_i}) \Rightarrow \exists a_i \in \mathbb{F}$ tq $\vec{w_i} = a_i \vec{v_i}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi,

$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{n} \vec{w_i} \Longleftrightarrow \vec{0} = \sum_{i=1}^{n} 0\vec{v_i} = \sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v_i}.$$

Ce qui implique, par la condition 2, que $a_i = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Par conséquent, $\vec{w_i} = a_i \vec{v_i} = 0\vec{v_i} = \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi, la somme est directe.

3⟹1 Supposer que $\vec{v_i} \neq \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ et que la somme $span(\vec{v_1}) + ... + span(\vec{v_n})$ soit directe. Supposer que $\sum_{i=0}^{n} \alpha_i \vec{v_i} = \vec{0}$. Nous avons vu que puisque la somme $span(\vec{v_1}) + ... + span(\vec{v_n})$ est directe, $\alpha_i \vec{v_i} = \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ et donc, de deux choses l'une, soit $\alpha_i = 0$, soit $\vec{v_i} = \vec{0}$. Cette dernière possibilité est éliminée par l'hypothèse. Nous avons donc forcément que $\alpha_i = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Et par conséquent, la liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est linéairement indépendante. cqfd

Proposition 3.4. ***Propriétés élémentaires***

1. *La liste $(\vec{v})$ est linéairement indépendante $\Longleftrightarrow \vec{v} \neq \vec{0}$*
2. *La liste $(\vec{v}, \vec{w})$ est linéairement indépendante* $\Longleftrightarrow \begin{cases} \nexists \alpha \in \mathbb{F} \text{ tq } \vec{v} = \alpha\vec{w} \\ \text{et } \vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}. \end{cases}$
3. *Si $\vec{w} \in span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ alors la liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{w}, ..., \vec{v_n})$ est linéairement dépendante.*

Démonstration. 1. $\Longrightarrow$ Conséquence directe du Lemme 3.1.

$\Longleftarrow$ Supposons $\vec{v} \neq \vec{0}$. Alors, $\vec{0} = \alpha\vec{v} \Rightarrow \alpha = 0$. Ainsi la liste $(\vec{v})$ est linéairement indépendante.

2. $\Longrightarrow$ Supposons que $(\vec{v}, \vec{w})$ est linéairement indépendante, nous avons alors par le Lemme 3.1 que $\vec{v}, \vec{w} \neq \vec{0}$. Supposons par l'absurde que $\exists \alpha \in \mathbb{F}$ tq $\vec{v} = \alpha\vec{w}$, alors :

$$1\vec{v} + (-\alpha)\vec{w} = \vec{v} - \alpha\vec{w} = \vec{0}.$$

Ce qui est en contradiction avec l'indépendance linéaire de $(\vec{v}, \vec{w})$. Par conséquent, $\nexists \alpha \in \mathbb{F}$ tq $\vec{v} = \alpha\vec{w}$.

$\Longleftarrow$ Supposons que $\alpha\vec{v} + \beta\vec{w} = \vec{0}$ et montrons par contradiction que $\alpha = 0 = \beta$. Ainsi, supposons par l'absurde qu'au moins un de α ou β soit non nul. Sans perte de généralité, nous pouvons supposer que $\alpha \neq 0$ et donc $\exists \alpha^{-1} \in \mathbb{F}$ tq $\alpha\alpha^{-1} = 1$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \alpha^{-1}\vec{0} = \alpha^{-1}(\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = (\alpha^{-1}\alpha)\vec{v} + (\alpha^{-1}\beta)\vec{w} \\ &= \vec{v} + (\alpha^{-1}\beta)\vec{w} \\ &\Rightarrow \vec{v} = -(\alpha^{-1}\beta)\vec{w} \text{ ce qui est contradictoire} \end{aligned}$$

[1] voir proposition 3.2

Par conséquent, $\alpha = 0 = \beta$. Ainsi, la liste$(\vec{v}, \vec{w})$ est linéairement indépendante.

3. Si $\vec{w} \in span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ alors $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tq $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v_i}$. Considérons la liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}, \vec{w})$ et la combinaison linéaire suivante,

$$\sum_{i=1}^{n}(-\alpha_i)\vec{v_i} + 1\vec{w} = \sum_{i=1}^{n}(-\alpha_i)\vec{v_i} + \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v_i} = \sum_{i=1}^{n}(-\alpha_i + \alpha_i)\vec{v_i} = \vec{0}$$

Ainsi, il existe une combinaison linéaire des vecteurs de la liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}, \vec{w})$ qui est égale à $\vec{0}$, mais où au moins un des coefficients est non nul, i.e., le coefficient de $\vec{w}$ est $\neq 0$.
Autrement dit, la liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}, \vec{w})$ est linéairement dépendante.

En particulier, si $V = span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$, alors si $\vec{w} \in V$, la liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}, \vec{w})$ est linéairement dépendante cqfd

Lemme 3.2. ***Lemme du vecteur superflu***
Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel, soient $\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n \in V$. Si $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ et si $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est linéairement dépendante, alors $\exists 1 \leqslant j \leqslant n$ tq
- $\vec{v}_j \in span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1})$
- $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n)$

Démonstration. Supposons que la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ soit linéairement dépendante. Ainsi, $\exists a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}$ pas tous nuls, tq $\sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i = \vec{0}$. Considérons $\{i | a_i \neq 0\} \neq \emptyset$ et posons, $j = \max\{i | a_i \neq 0\}$.
Ainsi, la combinaison linéaire est de la forme :

$$\sum_{i=1}^{j} a_i\vec{v}_i = \vec{0}.$$

Observer que $j \geqslant 2$ puisque si $j = 1$, nous aurions $a_i\vec{v}_1 = \vec{0}$, avec $a_i \neq 0$, ce qui n'est pas possible puisque $\vec{v}_1 \neq \vec{0}$ par l'hypothèse.
Ainsi, nous avons : $a_1\vec{v}_1 + ... + a_{j-1}\vec{v}_{j-1} = -a_j\vec{v}_j$ avec $a_j \neq 0$ et donc :

$$-\frac{1}{a_j}\big(a_1\vec{v}_1 + ... + a_{j-1}\vec{v}_{j-1}\big) = \vec{v}_j, \text{ i.e., } \quad \vec{v}_j = \sum_{i=1}^{j-1}\left(-\frac{a_i}{a_j}\right)\vec{v}_i \in span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}).$$

Pour montrer que $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n)$, nous allons montrer les deux inclusions.
- $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n) \subset span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$:
  $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n)$ est une sous liste de $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ et donc
  $$span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n) \subset span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$$
- $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) \subset span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n)$:

  Soit $\vec{w} \in span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$, i.e., $\exists a_1, ..., a_n \in \mathbb{F}$ tq $\vec{w} = \sum_{i=1}^{n} a_i\vec{v}_i$. Or $\vec{v}_j \in span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1})$, i.e., $\exists b_1, ..., b_{j-1} \in \mathbb{F}$ tq $\vec{v}_j = \sum_{i=1}^{j-1} b_i\vec{v}_i$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
\vec{w} &= \Big(\sum_{i=1}^{j-1} a_i\vec{v}_i\Big) + a_j\vec{v}_j + \Big(\sum_{i=j+1}^{n} a_i\vec{v}_i\Big) \\
&= \Big(\sum_{i=1}^{j-1} a_i\vec{v}_i\Big) + \Big(a_j\sum_{i=1}^{j-1} b_i\vec{v}_i\Big) + \Big(\sum_{i=j+1}^{n} a_i\vec{v}_i\Big) \\
&= \underbrace{\Big(\sum_{i=1}^{j-1}(a_i + a_jb_i)\vec{v}_i\Big)}_{\in span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1})} + \underbrace{\Big(\sum_{i=j+1}^{n} a_i\vec{v}_i\Big)}_{\in span(\vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n)} \\
&\in span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n)
\end{aligned}$$

  Ainsi, $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) \subset span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n)$.

Ce qui implique que $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n)$. cqfd

Théorème 3.1. ***Théorème de la borne***
Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel tel qu'il existe une liste $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ avec $V = span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$. Alors si la liste $(\vec{u_1}, ..., \vec{u_m})$ de vecteurs de V est linéairement indépendante, $m \leqslant n$.

Démonstration. Démonstration par récurrence en m étapes.

$1^{\text{ère}}$ **étape** $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = V$ implique que

$$(\vec{u}_1, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) \text{ est linéairement dépendante.}$$

Par ailleurs, puisque $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$ est linéairement indépendante, nous savons que $\vec{u}_i \neq \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant m$. En particulier, $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$. Nous pouvons donc appliquer le lemme du vecteur superflu à $(\vec{u}_1, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$. Ainsi, $\exists j \geqslant 1$ tq $\vec{v}_j \in span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1})$ et tq

$$span(\vec{u}_1, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n) = span(\vec{u}_1, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = V$$

Noter que, par le lemme 3.2, nous ne pouvons pas enlever le vecteur $\vec{u}_1$ parce que la liste $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$ est linéairement indépendante.

$2^{\text{ème}}$ **étape** $span(\vec{u}_1, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n) = V$ implique que

$$(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n) \text{ est linéairement dépendante.}$$

Par ailleurs, $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$. Nous pouvons appliquer le lemme du vecteur superflu et donc $\exists k \geqslant 1, k \neq j$ tq $\vec{v}_k$ soit une combinaison linéaire des vecteur qui le précèdent dans la liste et tq

$$span(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{v}_1, ..., \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_{k+1}, ..., \vec{v}_{j-1}, \vec{v}_{j+1}, ..., \vec{v}_n) = V$$

Noter que nous ne pouvons pas enlever les vecteurs $\vec{u}_1, \vec{u}_2$ parce que la liste $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$ est linéairement indépendante.

$j^{\text{ème}}$ **étape** Nous commençons par une liste $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_{j-1}, \vec{v}_{k_1}, ..., \vec{v}_{k_{n-j+1}})$ qui engendre l'espace V. Noter que la liste $(\vec{v}_{k_1}, ..., \vec{v}_{k_{n-j+1}})$ est une sous liste de $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ à laquelle nous avons retiré $j-1$ vecteurs. Par conséquent, en y ajoutant $\vec{u}_j$, nous obtenons la liste

$$(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_j, \vec{v}_{k_1}, ..., \vec{v}_{k_{n-j+1}}) \text{ linéairement dépendante}$$

Puisque $\vec{u}_1 \neq \vec{0}$, nous pouvons appliquer le lemme du vecteur superflu. Or $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_j)$ est linéairement indépendante, et donc aucun des $\vec{u}_i$ n'est une combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent. Par conséquent, $\exists i \geqslant 1$ tq $v_{k_i} \in span(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_j, \vec{v}_{k_1}, ..., \vec{v}_{k_{i-1}})$ et tq

$$V = span(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_{j-1}, \vec{v}_{k_1}, ..., \vec{v}_{k_{i-1}}, \vec{v}_{k_{i+1}}, ..., \vec{v}_{k_{n-j+1}})$$

$(j+1)^{\text{ème}}$ **étape** Nous pouvons itérer cette procédure jusqu'à la $m^{\text{ème}}$ étape pour obtenir une liste $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m, \vec{v}_{k_1}, ..., \vec{v}_{k_{n-m}})$. En particulier, nous devons pouvoir éliminer un vecteur de la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ à chacune des m étapes de cette procédure. Par conséquent, il faut que $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ contienne au moins m vecteurs, i.e., il faut que $m \leqslant n$.

Le Lemme du vecteur superflu nous garantit l'existence de ces vecteurs à éliminer de la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ à chaque étape. cqfd

Corollaire 3.1. *Tout sous-espace vectoriel U d'un $\mathbb{F}$-espace vectoriel V de dimension finie est de dimension finie*

Démonstration. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie, engendré par $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$. Soit U un sous-espace vectoriel de V.

– Si $U = \{\vec{0}\}$, U est trivialement de dimension finie.

– Si $U \neq \{\vec{0}\}$, V est de dimension finie, il existe une liste tq $V = span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$. Soit $\vec{u}_1, ..., \vec{u}_j \in U$ tq $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_j)$ soit linéairement indépendante. Supposons, par l'absurde que $dimU = +\infty$. Alors, $span(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_j) \subsetneq U$, i.e., $\exists \vec{u}_{j+1} \in U \setminus span(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_j)$ tq $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_j, \vec{u}_{j+1})$ soit linéairement indépendante. Ainsi, en appliquant ce processus n fois à la liste linéairement indépendante $(\vec{u}_1)$, nous obtenons la liste $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_{n+1})$ linéairement indépendante dans U et donc dans V, ce qui est en contradiction avec le théorème de la borne.
Par conséquent, la dimension de U est finie. cqfd

3.2 Bases

Définition 3.5. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ une liste de vecteurs de V. Alors $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ est une* base *de V, si*

1. $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ *est linéairement indépendante*
2. $span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n}) = V$

Proposition 3.5. ***Caractérisation des bases***
Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel et soit $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ une liste de vecteurs de V. Alors, ces trois propositions sont équivalentes :

1. $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_n})$ *est une base de V*
2. $\begin{cases} \forall \vec{v} \in V \\ \exists! \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F} \text{ tq } \vec{v} = \alpha_1 \vec{v_1} + ... + \alpha_n \vec{v_n}. \end{cases}$
3. $\begin{cases} \vec{v_i} \neq \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n. \\ V = span(\vec{v_1}) \oplus ... \oplus span(\vec{v_n}). \end{cases}$

Démonstration. **1⟹2** Supposons que $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ soit une base de V. Alors, comme $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = V$, $\forall \vec{v} \in V, \exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tq

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i.$$

Pour montrer que les α_i sont uniques supposons que $\exists \beta_1, ..., \beta_n \in \mathbb{F}$ tq

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v}_i.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{v} - \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \vec{v}_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i - \beta_i) \vec{v}_i \end{aligned}$$

Or la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est linéairement indépendante, car il s'agit d'une base de V. Ainsi, $\alpha_i - \beta_i = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n, \Leftrightarrow \alpha_i = \beta_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.
Par conséquent, les α_i sont uniques.

1⟹3 Supposons que $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ soit une base de V. Alors, $V = span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ et la liste est linéairement indépendante, ce qui implique que $\vec{v}_i \neq \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ et que $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = span(\vec{v}_1) \oplus ... \oplus span(\vec{v}_n)$. Donc, $V = span(\vec{v}_1) \oplus ... \oplus span(\vec{v}_n)$.

2⟹1 Supposons que tout vecteur $\vec{v}$ de V s'écrit de manière unique comme une combinaison linéaire des $\vec{v}_i$. Ainsi, nous avons $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i, \forall \vec{v} \in V$. Ainsi, $V = span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$.
Il reste à montrer l'indépendance linéaire de la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$. Considérer, la combinaison linéaire,

$$\sum_{i=1}^{n} \zeta_i \vec{v}_i = \vec{0}.$$

Or, nous avons également la décomposition de $\vec{0}$ suivante, $\vec{0} = 0\vec{v}_1 + ... + 0\vec{v}_n$.
Ainsi, par l'hypothèse de l'unicité de cette décomposition, nous avons que $\zeta_i = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. La liste est linéairement indépendante, il s'agit donc bien d'une base de V.

3⟹2 Soit $\vec{v} \in V$ et supposons que la proposition 3 soit vraie, ainsi, $V = span(\vec{v}_1) \oplus ... \oplus span(\vec{v}_n)$. Alors, $\vec{v} \in span(\vec{v}_1) \oplus ... \oplus span(\vec{v}_n)$, i.e., $\exists! \vec{w}_i \in span(\vec{v}_i), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$, tq $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \vec{w}_i$, or, $\vec{w}_i \in span(\vec{v}_i) \Rightarrow \exists a_i \in \mathbb{F}$ tq $\vec{w}_i = a_i \vec{v}_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Or $\vec{v}_i \neq \vec{0}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.
Supposons qu'il existe, $b_1, ..., b_n \in \mathbb{F}$ tq $\vec{w}_i = b_i \vec{v}_i$. Ainsi, nous avons que si $a_i \vec{v}_i = b_i \vec{v}_i$ alors, $a_i = b_i$. Donc $\exists! a_i \in \mathbb{F}, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ tq $\sum_{i=1}^{n} a_i \vec{v}_i$.

Nous avons donc montré les trois équivalences. cqfd

Exemple 3.3. 0. Par définition, $span(\emptyset) = \{\vec{0}\}$. Par ailleurs, $\emptyset$ est trivialement linéairement indépendant. Ainsi, $\emptyset$ est une base de $\{\vec{0}\}$.

1. Soit $V = \mathbb{F}^n$ et considérer $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$.
Nous avons vu que $\mathbb{F}^n = span(\vec{e}_1) \oplus ... \oplus span(\vec{e}_n)$. Ainsi $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base de $\mathbb{F}^n$, souvent appelée *base canonique* ou *standard*.

2. Soit $V = \mathscr{F}(X,\mathbb{F})$ où $X = \{x_1, ..., x_n\}$. Définissons $f_i \in \mathscr{F}(X,\mathbb{F})$ par

$$f_i : X \longrightarrow \mathbb{F} : x_i \longmapsto \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$$

Ainsi, montrons que $(f_1, ..., f_n)$ est une base de $\mathscr{F}(X,\mathbb{F})$.
Soit $g \in \mathscr{F}(X,\mathbb{F})$, i.e., $g : X \longrightarrow \mathbb{F}$ une application. Poser $a_i = g(x_i), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.
Observer que $\forall 1 \leqslant j \leqslant n$

$$\Big(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\Big)(x_j) = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i(x_j) = a_j \underbrace{f_j(x_j)}_{=1} = a_j = g(x_j)$$

Donc

$$g = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i \in span(f_i, ..., f_n), \forall g \in \mathscr{F}(X,\mathbb{F})$$

donc $\mathscr{F}(X,\mathbb{F}) = span(f_1, ..., f_n)$. Reste à vérifier l'unicité du choix des coefficients a_i :
si $\sum_{i=1}^{n} a_i f_i = \sum_{i=1}^{n} b_i f_i$, alors, $\forall 1 \leqslant j \leqslant n$,

$$a_j = \Big(\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\Big)(x_j) = \Big(\sum_{i=1}^{n} b_i f_i\Big)(x_j) = b_j$$

Ainsi, le choix des a_i est unique.

Nous sommes amenés à nous poser cette question :
Pour un $\mathbb{F}$-espace vectoriel quelconque, existe-t-il toujours une base ?
Pour répondre à cette question, il nous faut...

Théorème 3.2. ***Théorème du ballon***
Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors

"Dégonfler" *Soit $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_s)$ une liste de vecteurs de V tq $span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_s}) = V$. Alors $\exists 1 \leqslant i_1 < i_2 < ... < i_n \leqslant s$ tq la sous-liste $(\vec{v}_{i_1}, ..., \vec{v}_{i_n})$ de $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_s)$ soit une base de V.*

"Gonfler" *Soit $(\vec{v_1}, ..., \vec{v_m})$ une liste linéairement indépendante. Alors, $\exists \vec{w}_1, ..., \vec{w}_k \in V$ tq $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_k)$ soit une base de V.*

Démonstration. ***"Dégonfler"*** Deux cas, soit $V = \{\vec{0}\}$, soit $V \neq \{\vec{0}\}$.

1. Cas $V = \{\vec{0}\}$: la liste $\emptyset$ est une base de $\{\vec{0}\}$ et est une sous liste de toute liste de vecteurs. Nous pouvons donc prendre $\emptyset$ comme sous liste qui est une base de V.
2. Cas $V \neq \{\vec{0}\}$: Supposons $V \neq \{\vec{0}\}$ et $V = span(\vec{v_1}, ..., \vec{v_s})$. Ainsi, $\exists i$ tq $\vec{v}_i \neq \vec{0}$. Poser $i_1 = \min\{i | \vec{v}_i \neq \vec{0}\}$. Alors :

$$(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_{i-1}, \vec{v}_i, ..., \vec{v}_s) = (\vec{0}, ..., \vec{0}, \vec{v}_{i_1}, ..., \vec{v}_s)$$

et donc,

$$V = span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_s) = span(\vec{v}_{i_1}, ..., \vec{v}_s) \text{ où } \vec{v}_{i_1} \neq \vec{0}$$

Si $(\vec{v}_{i_1}, ..., \vec{v}_s)$ est linéairement indépendante, il s'agit d'une base de V et la preuve est terminée.
Sinon, nous pouvons appliquer le lemme du vecteur superflu pour éliminer un des $\vec{v}_k, k > i_1$, qui doit être une combinaison linéaire des $\vec{v}_j, j < k$. Ainsi nous avons une nouvelle liste $(\vec{v}_{i_1}, ..., \vec{v}_{k-1}, \vec{v}_{k+1}, ..., \vec{v}_s)$ qui engendre toujours V. Si cette nouvelle liste est linéairement indépendante, alors nous avons une base de V.

Sinon, nous appliquons le lemme du vecteur superflu une nouvelle fois. Puisque la liste de départ $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_s)$ est de longueur finie, cet algorithme de construction d'une base s'arrêtera après au plus $n - 1$ étapes.
Nous aurons donc $(\vec{v}_{i_1}, ..., \vec{v}_{i_k})$ qui est une base de V.

"Gonfler" Supposons que la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m)$ soit linéairement indépendante. Puisque V est de dimension finie, il existe une liste $(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$ de vecteurs de V tel que $V = span\ (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$. Par conséquent,

$$V = span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$$

En effet, $span(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n) \subset span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_n) \subset V$.
Or $span(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n) = V$ donc $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_n) = V$.
De plus, $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m)$ est linéairement indépendante. Ce qui implique que $\vec{v}_i \neq \vec{0}$. Par ailleurs, $span(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n) = V$ donc la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$ est linéairement dépendante. Nous pouvons donc appliquer le lemme du vecteur superflu pour trouver un vecteur de $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$ qui est une combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent. Ainsi, $\exists j \geqslant 1$ tel que $\vec{w}_j$ soit une combinaison linéaire des vecteurs qui le précèdent dans la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_n)$. Noter que nous supprimons un $\vec{w}_j$ car nous ne pouvons pas supprimer un des $\vec{v}_i$, car la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m)$ est linéairement indépendante. Nous avons une nouvelle liste :

$$(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_{j-1}, \vec{w}_{j+1}, ..., \vec{w}_n) \text{ qui engendre toujours V}$$

Nous itérons cet algorithme au plus m fois, pour éliminer un par un certains des vecteurs de $\vec{w}_1, ..., \vec{w}_n$ et obtenir à la fin une liste

$$(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m, \vec{w}_{i_1}, ..., \vec{w}_{i_r}) \text{ qui est une base de V}$$

cqfd

Ce théorème a deux conséquences très importantes.

Corollaire 3.2. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie.*

Existence de bases *Alors $\exists(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ qui est une base de V.*

Existence de compléments *Soit $U \subset V$ un sous-espace vectoriel de V. Alors $\exists W \subset V$ un sous-espace vectoriel de V tq $U \oplus W = V$.*

Démonstration. ***Existence de bases*** Si V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie, alors $\exists(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_s) \in V$ tq $V = span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_s)$. Ainsi, par la partie "dégonfler" du théorème du ballon, nous avons que $\exists 1 \leqslant i_1 < ... < i_n \leqslant s$ tq $(\vec{v}_{i_1}, ..., \vec{v}_{i_n})$ soit une base de V.

Existence de compléments Si V est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie, alors U, un sous-espace vectoriel de V, est aussi de dimension finie. De plus, par l'existence de bases, U admet une base $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$, qui est une liste linéairement indépendante de vecteurs de V. Ainsi, par la partie gonfler du théorème du ballon, nous avons que $\exists \vec{w}_1, ..., \vec{w}_k \in V$ tq $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_k)$ soit une base de V.
Soit W, un sous-espace vectoriel de V, posons $W = span(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_k)$. Et montrons que $U \oplus W = V$.

– $U + W = V$:
Nous avons déjà que $U + W \subset V$, il nous reste à montrer que $V \subset U + W$.
Soit $\vec{v} \in V = span(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_k)$. Ainsi, $\exists \alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{F}$ tq

$$\vec{v} = \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{u}_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{j=1}^{k} \beta_j \vec{w}_j}_{\in W}$$

Par conséquent, $\vec{v} \in U + W$, ainsi $V \in U + W$ et donc $V = U + W$.

– cette somme est directe, i.e., $U \oplus W = V$:
Calculons $U \cap W$:

$$\begin{aligned}
\vec{v} \in U \cap W \quad &\Leftrightarrow \quad \vec{v} \in U = span(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m) \text{ et } \vec{v} \in W = span(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_k) \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{F} \text{ tq } \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{u}_i = \vec{v} = \sum_{j=1}^{k} \beta_j \vec{w}_j \\
&\Leftrightarrow \quad \exists \alpha_1, ..., \alpha_m, \beta_1, ..., \beta_k \in \mathbb{F} \text{ tq } \vec{0} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{u}_i - \sum_{j=1}^{k} \beta_j \vec{w}_j
\end{aligned}$$

Or $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_k)$ est linéairement indépendante. Donc, $\alpha_i = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant m$ et $\beta_j = 0, \forall 1 \leqslant j \leqslant k$. Ce qui implique que $\vec{v} = \vec{0}$.
Ainsi, $U \cap W = \{\vec{0}\}$ ce qui veut dire que le somme est directe, i.e., $U \oplus W = V$. cqfd

3.3 Dimension d'un espace vectoriel

But : Faire une distinction plus fine qu'entre *dimension finie* ou *infinie*.

Proposition 3.6. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m)$ et $(\vec{v}'_1, ..., \vec{v}'_n)$, deux bases de V, alors $m = n$.*
Ainsi, toute base de V est de même longueur.

Démonstration. – $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m)$ base de V $\Rightarrow (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m)$ linéairement indépendante.
$(\vec{v}'_1, ..., \vec{v}'_n)$ base de V $\Rightarrow span(\vec{v}'_1, ..., \vec{v}'_n) = V$.
Ainsi, par le théorème de la borne, $m \leqslant n$.

– $(\vec{v}'_1, ..., \vec{v}'_n)$ base de V $\Rightarrow (\vec{v}'_1, ..., \vec{v}'_n)$ linéairement indépendante.
$(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m)$ base de V $\Rightarrow span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m) = V$.
Ainsi, par le théorème de la borne, $n \leqslant m$.
Ainsi, nous avons bien que $m = n$. cqfd

Cette proposition motive et donne du sens à la définition suivante.

Définition 3.6. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Alors la* dimension *(sur $\mathbb{F}$) de V est la longueur d'une base de V.*
Notation : $dimV$ ou $dim_{\mathbb{F}}V$,

Exemple 3.4. 0. $dim\{\vec{0}\} = 0$ car $\emptyset$ est une base de $\{\vec{0}\}$ et ne contient aucun vecteur.

1. $dim\mathbb{F}^n = n$ car $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$ est une base de $\mathbb{F}^n$

2. Si $X = \{x_1, ..., x_n\}$, alors $dim\mathscr{F}(X, \mathbb{F}) = n$ car $(f_1, ..., f_n)$ est une base de $\mathscr{F}(X, \mathbb{F})$ où $f_i(x_i) \begin{cases} 1 \text{ si } j = i \\ 0 \text{ si } j \neq i \end{cases}$

3. Si $p_k(x) = x^k \in \mathscr{P}_n(\mathbb{F}), \forall 0 \leqslant k \leqslant n$, alors $\big(p_0(x), ..., p_n(x)\big)$ est une base de $\mathscr{P}_n(\mathbb{F})$. Ainsi la $dim\mathscr{P}_n(\mathbb{F}) = n + 1$.

Proposition 3.7. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit U un sous-espace vectoriel de V. Alors $dimU \leqslant dimV$*

Démonstration. Soit $n = dimV$. Soit $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$ un base de U. Soit $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ une base de V. Alors, nous avons que $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = V$ et que $(\vec{u}_1, ..., \vec{u}_m)$ est linéairement indépendante car il s'agit d'une base de U. Ainsi, par le théorème de la borne, nous avons que $dimU = m \leqslant n = dimV$ cqfd

Proposition 3.8. ***Proposition pour les paresseux.***
Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie tq $dimV = n$. Soit $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ une liste de vecteurs de V. Alors
1. *$span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = V \Rightarrow (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est une base de V.*
2. *$(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est linéairement indépendante $\Rightarrow (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est une base de V.*

Démonstration. 1. Supposons que $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n) = V$ et supposons par l'absurde que ce n'est pas une base. Par le théorème du ballon ; "dégonfler", nous avons que $\exists 1 \leqslant i_1 < ... < i_m \leqslant n, (m < n)$ tq $(\vec{v}_{i_1}, ..., \vec{v}_{i_m})$ soit une base de V. Ce qui implique que $dimV = m$, ce qui contredit l'hypothèse. Par conséquent, $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est une base de V.

2. Supposons que $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ soit linéairement indépendante et supposons par l'absurde que ce n'est pas une base. Ainsi par le théorème du ballon ; "gonfler",$\exists(\vec{w}_1, ..., \vec{w}_k) \in V$ tq $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_k)$ soit une base de V. Ce qui implique de $dimV = n + k$, ce qui est contradictoire, car $dimV = n$. Ainsi, il n'est pas possible de rajouter des vecteurs à $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ et obtenir une liste linéairement indépendante, donc $V = span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$, i.e., $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ est une base de V. cqfd

Remarque. Ce résultat n'est vrai que sous l'hypothèse que $dimV = n$.

Exemple 3.5. Soit $V = \mathscr{P}_1(\mathbb{F})$, ainsi $dim\mathscr{P}_1(\mathbb{F}) = 2$. Soient $q_1 = 1 + 2x, q_2 = 2 + x \in \mathscr{P}_1(\mathbb{F})$. Montrons que $\big(q_1(x), q_2(x)\big)$ est une base de $\mathscr{P}_n(\mathbb{F})$.
Ainsi, il suffit de montrer que $\big(q_1(x), q_2(x)\big)$ est linéairement indépendante. Soient $a_1, a_2 \in \mathbb{F}$. Si

$$\begin{aligned}
a_1 q_1(x) + a_2 q_2(x) \quad &= \quad 0 \text{ alors,} \\
(a_1 + 2a_2 x) + (2a_2 + a_2 x) \quad &= \quad 0 \\
(a_1 + 2a_2) + (2a_1 + a_2)x \quad &= \quad 0 + 0x \\
\begin{cases} a_1 + 2a_2 = 0 \\ 2a_1 + a_2 = 0 \end{cases} \quad &\Longrightarrow \quad a_1 = 0 = a_2
\end{aligned}$$

Ainsi $\big(q_1(x), q_2(x)\big)$ est linéairement indépendante donc il s'agit d'une base de $\mathscr{P}_1(\mathbb{F})$.

Interaction entre la dimension et les sommes de sous-espaces vectoriels.

Proposition 3.9. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient U et W des sous-espaces vectoriels de V. Alors,*

$$dim(U + W) = dimU + dimW - dim(U \cap W).$$

Démonstration. Soit $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k)$ une base de $U \cap W$. Ainsi, en particulier la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k)$ est linéairement indépendante. Cette liste peut être vue, soit comme une liste de U, soit comme une liste de W. Par le théorème du ballon gonfler,

- $\exists \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l \in U$ tq $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l)$ soit une base de U.
- $\exists \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m \in W$ tq $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$ soit une base de W.

En particulier, nous avons que $dim(U \cap W) = k, dimU = k + l$ et $dimW = k + m$. Ainsi, $dimU + dimW - dim(U \cap W) = k + l + m$. Pour finir la preuve, nous devons montrer que $dim(U + W)$ est aussi égal à $k + l + m$.

Montrons que $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$ est une base de $U + W$.
Premièrement, montrons que $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m) = U + W$.

- $span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m) \subset U + W$:
  $\vec{v} \in span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m) \Leftrightarrow \exists \alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_l, \gamma_1, ..., \gamma_m \in \mathbb{F}$ tq
$$\vec{v} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{l} \beta_i \vec{u}_i}_{\in U} + \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \gamma_i \vec{w}_i}_{\in W} \in U + W$$
- $U + W \subset span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$:
  Soit, $\vec{v} \in U + W$, i.e., $\exists \vec{u} \in U, \vec{w} \in W$ tq $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$. Or, $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l)$ est une base de U, ce qui implique que $\exists \alpha_1, ..., \alpha_k, \beta_1, ..., \beta_l \in \mathbb{F}$ tq
$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{l} \beta_i \vec{u}_i$$
  De même, $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$ est une base de W, ce qui implique que $\exists \delta_1, ..., \delta_k, \gamma_1, ..., \gamma_m \in \mathbb{F}$ tq
$$\vec{w} = \sum_{i=1}^{k} \delta_i \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \vec{w}_i$$
  Ainsi,
$$\begin{aligned} \vec{v} = \vec{u} + \vec{w} &= \sum_{i=1}^{k} (\alpha_i + \delta_i) \vec{v}_1 + \sum_{i=1}^{l} \beta_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \vec{w}_i \\ &\in span(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m) \end{aligned}$$

Deuxièmement, montrons que la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$ est linéairement indépendante.
Supposons que
$$\vec{0} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_1 + \sum_{i=1}^{l} \beta_i \vec{u}_i + \sum_{i=1}^{m} \gamma_i \vec{w}_i.$$
Alors,
$$\underbrace{\sum_{i=1}^{m} (-\gamma_i) \vec{w}_i}_{\in W} = \underbrace{\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \vec{v}_1 + \sum_{i=1}^{l} \beta_i \vec{u}_i}_{\in U}.$$
Par conséquent, $\sum_{i=1}^{m} (-\gamma_i) \vec{w}_i \in U \cap W$. De plus, $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k)$ est une base de $U \cap W$, ce qui implique que, $\exists \delta_1, ..., \delta_k \in \mathbb{F}$ tq $\sum_{i=1}^{m} (-\gamma_i) \vec{w}_i = \sum_{i=1}^{k} (\delta_i) \vec{v}_i$ donc $\vec{0} = \sum_{i=1}^{m} (\gamma_i) \vec{w}_i + \sum_{i=1}^{k} (\delta_i) \vec{v}_i$.
Or, $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$ base de W, donc, linéairement indépendante, ce qui implique que $\delta_i = 0, \forall i$ et $\gamma_i = 0 \forall i$.

Par conséquent, puisque $\gamma_i = 0, \forall i$, on obtient que $\sum_{i=1}^{k} (\alpha_i) \vec{v}_i + \sum_{i=1}^{l} (\beta_i) \vec{u}_i = \vec{0}$. Or, $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l)$ base de U et donc linéairement indépendante. Ce qui implique que $\alpha_i = 0, \forall i$ et $\beta_i = 0, \forall i$.
Ainsi, la liste $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_k, \vec{u}_1, ..., \vec{u}_l, \vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$ est linéairement indépendante, et donc est une base de $U + W$

Conclusion : $dim(U + W) = k + l + m = dimU + dimW - dim(U \cap W)$ cqfd

Corollaire 3.3. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soient U et W des sous-espaces vectoriels de V. Alors*
$$U + W = U \oplus W \Longleftrightarrow dim(U + W) = dimU + dimW$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons la somme $U + W$ directe. Rappelons que $U + W = U \oplus W \Leftrightarrow U \cap W = \{\vec{0}\}$. Par la proposition précédente, nous avons que :
$$dim(U + W) = dimU + dimW - \underbrace{dim(U \cap W)}_{=0} = dimU + dimW$$

$\Longleftarrow$ Supposons que $dim(U + W) = dimU + dimW$. Alors par la proposition précédente, nous avons que $dim(U \cap W) = dimU + dimW - dim(U + W) = 0$. Pour conclure, observons que si $\exists \vec{v} \in U \cap W, \vec{v} \neq 0$, alors, $dim(U \cap W) > 0$, car une base de $U \cap W$ doit contenir au moins un vecteur. Ainsi, $dim(U \cap W) = 0 \Rightarrow U \cap W = \{\vec{0}\}$ et donc la somme est directe. cqfd

Généralisons le résultat précédent,

Corollaire 3.4. *Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $m \geqslant 2$. Soient $U_1, ..., U_m$ des sous-espaces vectoriels de V. Alors,*

1. $dim(U_1 + ... + U_m) \leqslant dimU_1 + ... + dimU_m$
2. $dim(U_1 + ... + U_m) = dimU_1 + ... + dimU_m \Longleftrightarrow U_1 + ... + U_m = U_1 \oplus ... \oplus U_m$

Démonstration. Preuve par récurrence[2] : pour $n \in \mathbb{N}$ soit P_n la propriété suivante :
$$P_n : \begin{cases} \forall\ U_1, ..., U_{n+1} \text{ des sous-espaces vectoriels de V, alors} \\ dim(U_1 + ... + U_{n+1}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+1} dimU_i \text{ et} \\ dim(U_1 + ... + U_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} dimU_i \Leftrightarrow U_1 + ... + U_{n+1} = U_1 \oplus ... \oplus U_{n+1} \end{cases}$$
But : démontrer que P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$. Pour le faire, il faut montrer P_1 et montrer que $P_n \Rightarrow P_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}$.

Premièrement, montrons que P_1 est vraie,
$$P_1 : \begin{cases} \forall\ U_1, U_2 \text{ des sous-espaces vectoriels de V, alors} \\ dim(U_1 + U_2) \leqslant dimU_1 + dimU_2 \text{ et} \\ dim(U_1 + U_2) = dimU_1 + dimU_2 \Leftrightarrow U_1 + U_2 = U_1 \oplus U_2 \end{cases}$$

[2] principe de récurrence, voir annexe A

Nous avons vu que $dim(U+W) = dimU + dimW - dim(U \cap W)$ ce qui implique que $dim(U+W) \leqslant dimU + dimW$. D'autre part, nous avons que $\big(U + W = U \oplus W\big) \Leftrightarrow \big(U \cap W = \{\vec{0}\}\big) \Leftrightarrow \big((dimU \cap W) = 0\big) \Leftrightarrow \big(dim(U+W) = dimU + dimW\big)$. Ainsi, P_1 est vraie.

Par le pas de récurrence, nous allons montrer, sachant que P_1 est vraie, que $P_n \Rightarrow P_{n+1}$. Soient $U_1, ..., U_{n+1}, U_{n+2}$ des sous-espaces vectoriels de V. Observer que $U_1 + ... + U_{n+1} + U_{n+2} = \big(U_1 + ... + U_{n+1}\big) + U_{n+2}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} dim(U_1 + ...U_{n+1} + U_{n+2}) &\underset{P_1}{\leqslant} dim(U_1 + ... + U_{n+1}) + dimU_{n+2} \\ &\underset{P_n}{\leqslant} \left(\sum_{i=1}^{n+1} dimU_i\right) + dimU_{n+2} \end{aligned}$$

Et donc nous avons bien :

$$dim(U_1 + ...U_{n+1} + U_{n+2}) \leqslant \sum_{i=1}^{n+2} dimU_i$$

Il nous reste à montrer que $dim(U_1 + ... + U_{n+2}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} dimU_i \Leftrightarrow U_1 + ... + U_{n+2} = U_1 \oplus ... \oplus U_{n+2}$.

Supposons alors que $dim(U_1 + ... + U_{n+2}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} dimU_i$. Nous trouvons :

$$\sum_{i=1}^{n+2} dimU_i = dim(U_1 + ... + U_{n+1} + U_{n+2}) \underset{P_1}{\leqslant} dim(U_1 + ... + U_{n+1}) + dimU_{n+2}$$

En retirant $dimU_{n+2}$ à chaque membre de la chaîne ci-dessus, nous trouvons :

$$\underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n+2} dimU_i\right) - dimU_{n+2}}_{\sum_{i=1}^{n+1} dimU_i} \leqslant dim(U_1 + ... + U_{n+1})$$

Par ailleurs, $P_n \Rightarrow \displaystyle\sum_{i=1}^{n+1} dimU_i \geqslant dim(U_1 + ... + U_{n+1})$, ce qui prouve donc finalement l'égalité des deux expressions :

$$dim(U_1 + ... + U_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} dimU_i \tag{3.3.1}$$

Dès lors, $dim(U_1 + ... + U_{n+1} + U_{n+2}) = \displaystyle\sum_{i=1}^{n+2} dimU_i$ implique

$$dim\big((U_1 + ... + U_{n+1}) + (U_{n+2})\big) \underset{3.3.1}{=} dim(U_1 + ... + U_{n+1}) + dim(U_{n+2})$$

Ainsi, P_1 implique

$$(U_1 + ... + U_{n+1}) + (U_{n+2}) = (U_1 + ... + U_{n+1}) \oplus (U_{n+2}) \tag{3.3.2}$$

Par ailleurs, P_n et 3.3.1 impliquent

$$U_1 + ... + U_{n+1} = U_1 \oplus ... \oplus U_{n+1} \tag{3.3.3}$$

Par conséquent, 3.3.2 et 3.3.3 impliquent

$$U_1 + ... + U_{n+1} + U_{n+2} = U_1 \oplus ... \oplus U_{n+1} \oplus U_{n+2}$$

Nous avons donc montré que

$$dim(U_1 + ... + U_{n+1}) = \sum_{i=1}^{n+1} dimU_i \Rightarrow U_1 \oplus ... \oplus U_{n+1}$$

Nous devons encore montrer l'implication inverse. Supposons que

$$U_1 + ... + U_{n+1} + U_{n+2} = U_1 \oplus ... \oplus U_{n+1} \oplus U_{n+2}$$

Alors,

$$\begin{aligned} dim(U_1 + ... + U_{n+1} + U_{n+2}) &\underset{P_1}{=} dim(U_1 \oplus ... \oplus U_{n+1}) + dim(U_{n+2}) \\ &\underset{P_n}{=} \left(\sum_{i=1}^{n+1} dimU_i\right) + dimU_{n+2} \end{aligned}$$

Et donc $P_n \Longrightarrow P_{n+1} \forall n \in \mathbb{N}$. cqfd

Chapitre 4

Applications linéaires

But : Se donner un outil pour comparer des espaces vectoriels. Par exemple, $\mathbb{F}^n$, $\mathscr{F}(X, \mathbb{F})$ où $\#X = n$ et $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$ sont tous des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension égale à n. Comment décrire des relations parmi ces espaces vectoriels ?

Analogie : Pour comparer deux ensembles X et Y, comme, par exemple, vérifier si $\#X = \#Y$. Nous avons défini un application $f : X \longrightarrow Y$ et vérifié les propriétés : injectivité+ surjectivité = bijectivité, Imf, *etc...*

Observer que si V est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel, $V \neq \{\vec{0}\}$, alors $\#V = \infty$ car $\#\mathbb{R}, \#\mathbb{C} = \infty$.

Ainsi, il ne suffit pas de comparer deux espaces vectoriels au moyen d'applications quelconque. Si V, W sont des espaces vectoriels, alors les application $f : V \longrightarrow W$ que nous voulons étudier doivent tenir compte de la structure algébrique des ces espaces, i.e., de l'addition et de la multiplication par un scalaire.

4.1 Définitions et exemples

Définition 4.1. *Soient V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels, une application $\mathcal{T} : V \longrightarrow W$ est dite* linéaire *si :*

1. $\mathcal{T}(\vec{v} + \vec{v}') = \mathcal{T}(\vec{v}) + \mathcal{T}(\vec{v}'), \forall \vec{v}, \vec{v}' \in V$. *$\mathcal{T}$ est dite* additive.
2. $\mathcal{T}(\alpha \cdot \vec{v}) = \alpha \cdot \mathcal{T}(\vec{v}), \forall \vec{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F}$. *$\mathcal{T}$ est dite* homogène.

Notation :
$\mathscr{L}(V, W) = \{\mathcal{T} \in \mathscr{F}(V, W) | \mathcal{T} \text{ linéaire}\}$
$\mathscr{L}(V) = \mathscr{L}(V, V) = \{\mathcal{T} \in \mathscr{F}(V, V) | \mathcal{T} \text{ linéaire}\}$

Exemple 4.1. Quelques exemples d'applications linéaires importantes. Soient V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels.

0. L'application nulle ou "zéro" :

$$\mathbb{O}_{V,W} : V \longrightarrow W \text{ définie par } \mathbb{O}_{V,W}(\vec{v}) = \vec{0}, \forall \vec{v} \in V$$

$\mathbb{O}_{V,W}$ est une application linéaire car,
– $\forall \vec{v}, \vec{v}' \in V, \mathbb{O}_{V,W}(\vec{v} + \vec{v}') = \vec{0} = \vec{0} + \vec{0} = \mathbb{O}_{V,W}(\vec{v}) + \mathbb{O}_{V,W}(\vec{v}')$
– $\forall \vec{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \mathbb{O}_{V,W}(\alpha\vec{v}) = \vec{0} = \alpha\vec{0} = \alpha\mathbb{O}_{V,W}(\vec{v})$

1. L'application identité :

$$\mathrm{Id}_V : V \longrightarrow V \text{ définie par } \mathrm{Id}_V(\vec{v}) = \vec{v}, \forall \vec{v} \in V$$

Id_V est une application linéaire car,

– $\forall \vec{v}, \vec{v}' \in V, \mathrm{Id}_V(\vec{v} + \vec{v}') = \vec{v} + \vec{v}' = \mathrm{Id}_V(\vec{v}) + \mathrm{Id}_V(\vec{v}')$
– $\forall \vec{v} \in V, \forall \alpha \in \mathbb{F}, \mathrm{Id}(\alpha\vec{v}) = \alpha\vec{v} = \alpha\mathrm{Id}_V(\vec{v})$

2. Soit $\alpha \in \mathbb{F}$.

$$\mathcal{T}_\alpha : V \longrightarrow V \text{ définie par } \mathcal{T}_\alpha(\vec{v}) = \alpha\vec{v}$$

$\mathcal{T}_\alpha$ est une application linéaire car.
– $\forall \vec{v}, \vec{v}' \in V, \mathcal{T}_\alpha(\vec{v} + \vec{v}') = \alpha(\vec{v} + \vec{v}') = \alpha\vec{v} + \alpha\vec{v}' = \mathcal{T}_\alpha(\vec{v}) + \mathcal{T}_\alpha(\vec{v}')$
– $\forall \vec{v} \in V, \forall \zeta \in \mathbb{F}, \mathcal{T}_\alpha(\zeta\vec{v}) = \alpha(\zeta\vec{v}) = (\alpha\zeta)\vec{v} = (\zeta\alpha)\vec{v} = \zeta(\alpha\vec{v}) = \zeta\mathcal{T}_\alpha(\vec{v})$

3. Exemples analytiques[1] :

(a)

$$\frac{d}{dx} : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{R}) : p(x) \longmapsto \frac{d}{dx}p(x) = p'(x)$$

La dérivation de polynômes est une application linéaire.

(b)

$$\int_0^1 : \mathscr{P}_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} : p(x) \longmapsto \int_0^1 p(x)dx$$

L'intégration sur $[0, 1]$ de polynômes est linéaire.

Quelques exemples d'applications non-linéaires.

1. Soit $\vec{v}_0 \in V \setminus \{\vec{0}\}$.

$$f_{\vec{v}_0} : V \longrightarrow V \text{ définie par } f(\vec{v}) = \vec{v} + \vec{v}_0, \forall \vec{v} \in V$$

Alors, $f_{\vec{v}_0}$ n'est pas une application linéaire car $\vec{v}_0 \neq \vec{0}$ et

$$\begin{aligned} f_{\vec{v}_0}(\vec{v} + \vec{v}') &= (\vec{v} + \vec{v}') + \vec{v}_0 \\ f_{\vec{v}_0}(\vec{v}) + f_{\vec{v}_0}(\vec{v}') &= (\vec{v} + \vec{v}_0) + (\vec{v}' + \vec{v}_0) = (\vec{v} + \vec{v}') + 2\vec{v}_0 \end{aligned}$$

Ainsi, $f_{\vec{v}_0}(\vec{v} + \vec{v}') \neq f_{\vec{v}_0}(\vec{v}) + f_{\vec{v}_0}(\vec{v}')$.

2. Soit

$$\mu : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \text{ définie par } \mu(x, y) = x \cdot y$$

Alors μ n'est pas une application linéaire car,

$$\begin{aligned} \alpha\mu(x, y) &= \alpha(xy) \\ \mu\big(\alpha(x, y)\big) &= (\alpha x)(\alpha y) = \alpha^2 xy \end{aligned}$$

Ainsi, $\alpha\mu(x, y) = \mu\big(\alpha(x, y)\big)$ si et seulement si $\alpha = 1$ ce qui est contradictoire avec la condition 2 de la linéarité d'une application.

Proposition 4.1. ***Propriétés élémentaire des applications linéaires***
Soient V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$. Alors

1. $\mathcal{T}(\vec{0}) = \vec{0}$
2. $\mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{v}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathcal{T}(\vec{v}_i)$

Démonstration. 1. $\mathcal{T}(\vec{0}) = \mathcal{T}(\vec{0} + \vec{0}) = \mathcal{T}(\vec{0}) + \mathcal{T}(\vec{0}) \Rightarrow \mathcal{T}(\vec{0}) = \vec{0}$.

2. $\mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{v}_i\right) \underset{(a)}{=} \sum_{i=1}^n \mathcal{T}(\alpha_i\vec{v}_i) \underset{(b)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i\mathcal{T}(\vec{v}_i)$

(a) Par la condition 1 appliquée n-1 fois.
(b) Par la condition 2 à chaque sommant.

cqfd

[1] démonstrations et généralisations sont du ressort d'un cours d'analyse

4.2 Sous-espaces associés aux applications linéaires

Le noyau

Définition 4.2. *Soient V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$. Le* noyau *de $\mathcal{T}$ est*

$$Ker\mathcal{T} = \{\vec{v} \in V | \mathcal{T}(\vec{v}) = \vec{0}\} \subset V$$

Le noyau de $\mathcal{T}$ est aussi appelé kernel *ou* nullspace.

Proposition 4.2. *Soient V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$. $Ker\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de V.*

Démonstration.
1. Soient $\vec{v}, \vec{v}' \in Ker\mathcal{T}$. Rappelons que $\vec{0} \in Ker\mathcal{T}$ par la proposition 4.1 et donc $Ker\mathcal{T} \neq \emptyset$. D'ailleurs, $\mathcal{T}(\vec{v} + \vec{v}') = \mathcal{T}(\vec{v}) + \mathcal{T}(\vec{v}') = \vec{0} + \vec{0} = \vec{0}$. Ainsi, $\vec{v} + \vec{v}' \in Ker\mathcal{T}$.
2. Soit $\vec{v} \in Ker\mathcal{T}$, soit $\alpha \in \mathbb{F}$. Alors $\mathcal{T}(\alpha\vec{v}) = \alpha\mathcal{T}(\vec{v}) = \alpha\vec{0} = \vec{0}$. Ainsi, $\alpha\vec{v} \in Ker\mathcal{T}$.

Par conséquent, $Ker\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de V. cqfd

Proposition 4.3. *Soient V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$. Alors :*

$$T \text{ injective} \iff Ker\mathcal{T} = \{\vec{0}\}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons $\mathcal{T}$ injective, ce qui implique que $\mathcal{T}(\vec{v}) = \mathcal{T}(\vec{v}') \Rightarrow \vec{v} = \vec{v}'$. Soit $\vec{v} \in Ker\mathcal{T}$. Alors, $\mathcal{T}(\vec{v}) = \vec{0} = \mathcal{T}(\vec{0})$. Donc, comme $\mathcal{T}$ est injective, nous avons que $\vec{v} = \vec{0}$. Ce qui implique que $Ker\mathcal{T} = \{\vec{0}\}$.

$\Longleftarrow$ Supposons que $Ker\mathcal{T} = \{\vec{0}\}$. Soient $\vec{v}, \vec{v}' \in V$ tq $\mathcal{T}(\vec{v}) = \mathcal{T}(\vec{v}')$. Alors, $\vec{0} = \mathcal{T}(\vec{v}) - \mathcal{T}(\vec{v}') = \mathcal{T}(\vec{v} - \vec{v}')$, i.e., $\vec{v} - \vec{v}' \in Ker\mathcal{T} = \{\vec{0}\}$, donc $\vec{v} - \vec{v}' = \vec{0}$. Ce qui implique que $\vec{v} = \vec{v}'$ et donc que $\mathcal{T}$ est injective. cqfd

L'image

Rappel. Soit $f : X \longrightarrow Y$ une application, l'*image* de f est le sous-ensemble de Y défini par

$$Imf = \{y \in Y | \exists x \in X \text{ avec } f(x) = y\} \subset Y$$

De même pour une application linéaire.

Proposition 4.4. *Soient V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$. $Im\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de W.*

Démonstration.

0. $\vec{0} \in Im\mathcal{T}$ car $\mathcal{T}(\vec{0}) = \vec{0}$, donc $Im\mathcal{T} \neq \emptyset$.
1. Soient $\vec{w}, \vec{w}' \in Im\mathcal{T}$. Alors $\exists \vec{v}, \vec{v}' \in V$ tq $\vec{w} = \mathcal{T}(\vec{v})$ et $\vec{w}' = \mathcal{T}(\vec{v}')$. Par conséquent, $\vec{w} + \vec{w}' = \mathcal{T}(\vec{v}) + \mathcal{T}(\vec{v}') = \mathcal{T}(\vec{v} + \vec{v}') \in Im\mathcal{T}$.
2. Soient $\vec{w} \in Im\mathcal{T}$ et soit $\alpha \in \mathbb{F}$. Alors $\exists \vec{v} \in V$ tq $\vec{w} = \mathcal{T}(\vec{v})$. Par conséquent, $\alpha\vec{w} = \alpha\mathcal{T}(\vec{v}) = \mathcal{T}(\alpha\vec{v}) \in Im\mathcal{T}$.

Par conséquent, $Im\mathcal{T}$ est un sous-espace vectoriel de W. cqfd

Rappel. Une application $f : X \longrightarrow Y$ est surjective si et seulement $Imf = Y$. Ainsi, si $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(W, W)$ est surjective si et seulement si $Im\mathcal{T} = W$.

Résumons, soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$ alors nous associons à $\mathcal{T}$
- un sous-espace vectoriel $Ker\mathcal{T} \subset V$
- un sous-espace vectoriel $Im\mathcal{T} \subset W$

avec les propriétés suivantes :
- $\mathcal{T}$ injective $\iff Ker\mathcal{T} = \{\vec{0}\}$
- $\mathcal{T}$ surjective $\iff Im\mathcal{T} = W$

Construction plus générale des sous-espaces associés à $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$.

Soient V,W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$.

Proposition 4.5. *Soit U, un sous-espace vectoriel de V, alors $T(U) = \{\mathcal{T}(\vec{u}) | \vec{u} \in U\}$ est un sous-espace de W.*
Noter que si $U = V$, alors $\mathcal{T}(U) = Im\mathcal{T}$.

Proposition 4.6. *Soit Z, un sous-espace vectoriel de W, alors $\mathcal{T}^{-1}(Z) = \{\vec{v} \in V | \mathcal{T}(\vec{v}) \in Z\}$ est un sous-espace de V.*
Noter que si $Z = \{\vec{0}\} \subset W$, alors $\mathcal{T}^{-1}(\{\vec{0}\}) = Ker\mathcal{T}$.

Démonstration. Les preuves sont des généralisations des preuves vues pour $Im\mathcal{T}$ et $Ker\mathcal{T}$.

Exemple 4.2.

0. $\mathbb{O}_{V,W} : V \longrightarrow W : \vec{v} \longmapsto \vec{0}, \forall \vec{v} \in V$.
   $Ker\mathbb{O}_{V,W} = \{\vec{v} \in V | \mathbb{O}_{V,W}(\vec{v}) = \vec{0}\} = V$
   $Im\mathbb{O}_{V,W} = \{\mathbb{O}_{V,W}(\vec{v}) | \vec{v} \in V\} = \{\vec{0}\} \subset W$
   Observer que si $dimV < \infty$, alors $dim(Ker\mathbb{O}_{V,W}) + dim(Im\mathbb{O}_{V,W}) = dimV + 0 = dimV$

1. $\mathrm{Id}_V : V \longrightarrow W : \vec{v} \longmapsto \vec{v}, \forall \vec{v} \in V$.
   $Ker\mathrm{Id}_V = \{\vec{v} \in V | \mathrm{Id}_V(\vec{v}) = \vec{0}\} = \{\vec{0}\}$ ainsi Id_V est injective.
   $Im\mathrm{Id}_V = \{\mathrm{Id}_V(\vec{v}) | \vec{v} \in V\} = V$ ainsi Id_V est surjective.
   Observer que si $dimV < \infty$, alors $dim(Ker\mathrm{Id}_V) + dim(Im\mathrm{Id}_V) = 0 + dimV = dimV$

2. $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathscr{P}_n(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$
   Si $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} x^k$
   Calcul de $Ker\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$

$$\begin{aligned} Ker\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathscr{P}_n(\mathbb{F}) \middle| \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(x) = 0 \right\} \\ &= \left\{ p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathscr{P}_n(\mathbb{F}) \middle| a_0 \in \mathbb{F} \text{ et } a_1 = a_2 = \ldots = a_n = 0 \right\} \\ &= \mathscr{P}_0(\mathbb{F}), \text{ sous-espace de } \mathscr{P}_n(\mathbb{F}) \end{aligned}$$

Calcul de $Im\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$:

$$
\begin{aligned}
Im\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} &= \left\{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)\middle| p(x)\in\mathscr{P}_n(\mathbb{F})\right\}\\
&= \left\{\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)a_{k+1}x^k\middle|\sum_{k=0}^{n}a_kx^k\in\mathscr{P}_n(\mathbb{F})\right\}
\end{aligned}
$$

Montrons que $Im\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$,

- Nous savons que $Im\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\subset\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$ car $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$ est le codomaine de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.
- Montrons que $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})\subset Im\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$. Soit $q(x)=\sum_{k=0}^{n-1}b_kx^k\in\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$. Considérons

$$p(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{k-1}}{k}x^k\in\mathscr{P}_n(\mathbb{F})$$

Alors,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}p(x)=q(x)\Rightarrow q(x)\in Im\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$$

Par conséquent, $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})\subset Im\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$.

Ainsi, nous avons bien que $Im\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}=\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$.

Observer que $dim(Ker\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})+dim(Im\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x})=1+n=dim\mathscr{P}_n(\mathbb{F})$

Dimensions et applications linéaires

Théorème 4.1. ***Le théorème du Rang***
Soient V,W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels avec $dimV<\infty$. Soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V,W)$. Alors,

$$dimV=dim(Ker\mathcal{T})+dim(Im\mathcal{T})$$

Terminologie
- $dim(Ker\mathcal{T})$ est appelée la nullité de $\mathcal{T}$.
- $dim(Im\mathcal{T})$ est appelée le rang de $\mathcal{T}$.

Démonstration. Puisque V est de dimension finie et nous avons vu que $Ker\mathcal{T}$ est un sous-espace de V donc $Ker\mathcal{T}$ est de dimension finie et admet une base. Posons la liste $(\vec{u}_1,...,\vec{u}_m)$ une base de $Ker\mathcal{T}$. Ainsi, par le théorème du Ballon "gonfler", $\exists\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\in V$ tq $(\vec{u}_1,...,\vec{u}_m,\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ soit une base de V. En particulier, $dim(Ker\mathcal{T})=m$ et $dimV=m+n$. Il nous faut donc monter que $dim(Im\mathcal{T})=n$, i.e., il nous faut trouver une base de $Im\mathcal{T}$ formée de n vecteurs. Montrons que $\big(\mathcal{T}(\vec{v}_1),...,\mathcal{T}(\vec{v}_n)\big)$ est une base de $Im\mathcal{T}$.

- $\big(\mathcal{T}(\vec{v}_1),...,\mathcal{T}(\vec{v}_n)\big)$ est linéairement indépendante :

  Si $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathcal{T}(\vec{v}_i)=0$, alors par la linéarité de $\mathcal{T}$, nous avons $\mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i\right)=0$, i.e., $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i\in Ker\mathcal{T}$. Comme $Ker\mathcal{T}=span(\vec{u}_1,...,\vec{u}_m),\exists\beta_1,...,\beta_m\in\mathbb{F}$ tq

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i=\sum_{j=1}^{m}\beta_j\vec{u}_j\Rightarrow 0=\sum_{i=1}^{n}(-\alpha_i)\vec{v}_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\vec{u}_j$$

Or, $(\vec{u}_1,...,\vec{u}_m,\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ est une base de V par construction et est donc linéairement indépendante. Ainsi, $\alpha_i=0,\forall i$ et $\beta_j=0,\forall j$. En particulier, $\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathcal{T}(\vec{v}_i)=0\Leftrightarrow\alpha_i=0,\forall i$. Donc la liste $\big(\mathcal{T}(\vec{v}_1),...,\mathcal{T}(\vec{v}_n)\big)$ est linéairement indépendante.

- $span\big(\mathcal{T}(\vec{v}_1),...,\mathcal{T}(\vec{v}_n)\big)=Im\mathcal{T}$:

  $\subset$: $\mathcal{T}(\vec{v}_i)\in Im\mathcal{T}$ car $Im\mathcal{T}=\{\mathcal{T}(\vec{v})|v\in V\},\forall i$. Donc $span\big(\mathcal{T}(\vec{v}_1),...,\mathcal{T}(\vec{v}_n)\big)\subset Im\mathcal{T}$.

  $\supset$: Soit $\vec{w}\in Im\mathcal{T}$. Par définition, il existe $\vec{v}\in V$ tq $\mathcal{T}(\vec{v})=\vec{w}$. Comme, $(\vec{u}_1,...,\vec{u}_m,\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ est une base de V, $\exists\alpha_1,...,\alpha_n,\beta_1,...,\beta_n\in\mathbb{F}$ tq

$$v=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\vec{u}_j$$

  Par conséquent, puisque $\mathcal{T}$ est linéaire,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{T}(\vec{v}) &= \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\vec{v}_i+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\vec{u}_j\right)\\
&= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathcal{T}(\vec{v}_i)+\sum_{j=1}^{m}\beta_j\underbrace{\mathcal{T}(\vec{u}_j)}_{=0,\forall j}=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\mathcal{T}(\vec{v}_i)
\end{aligned}
$$

  Par conséquent, $\vec{w}\in span\big(\mathcal{T}(\vec{v}_1),...,\mathcal{T}(\vec{v}_n)\big),\forall v\in V$. Donc $Im\mathcal{T}\subset span\big(\mathcal{T}(\vec{v}_1),...,\mathcal{T}(\vec{v}_n)\big)$.

Ainsi, $\big(\mathcal{T}(\vec{v}_1),...,\mathcal{T}(\vec{v}_n)\big)$ est une base de $Im\mathcal{T}$, par conséquent, $dim(Im\mathcal{T})=n$ cqfd

Corollaire 4.1. *Soient V,W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V,W)$. Alors,*
1. *$dimV<dimW\Longrightarrow\mathcal{T}$ n'est pas surjective.*
2. *$dimV>dimW\Longrightarrow\mathcal{T}$ n'est pas injective.*

Démonstration. 1. $dim(Im\mathcal{T})=dimV-dim(Ker\mathcal{T})\leqslant dimV<dimW$. Ce qui implique $Im\mathcal{T}\neq W$ et donc $\mathcal{T}$ n'est pas surjective.

2. $dim(Ker\mathcal{T})=dimV-dim(Im\mathcal{T})\geqslant dimV-dimW>0$. Ce qui implique que $Ker\mathcal{T}\neq\{\vec{0}\}$ et donc que $\mathcal{T}$ n'est pas injective. cqfd

4.3 Théorie des application linéaires

Nous allons introduire une propriété universelle des applications linéaires, i.e., qui les caractérise.

Proposition 4.7. *Soient V,W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels, soit $(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ une base de V. Alors pour toute application $t:\{\vec{v}_1,...,\vec{v}_n\}\longrightarrow W$* ***il existe une unique*** *application linéaire $\mathcal{T}:V\longrightarrow W$ tq $\mathcal{T}(\vec{v}_i)=t(\vec{v}_i),\forall 1\leqslant i\leqslant n$.*

Autrement dit, toute application linéaire $\mathcal{T}:V\longrightarrow W$ est complètement déterminée pas les images des vecteurs d'une base de V, pour autant que la dimension de V soit finie.
Ainsi, pour définir une application linéaire $\mathcal{T}:V\longrightarrow W$, il suffit de définir $\mathcal{T}(\vec{v}_i),\forall 1\leqslant i\leqslant n$ si $(\vec{v}_1,...,\vec{v}_n)$ est une base de V.

Explication schématique

$$\begin{tikzcd} \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\} \arrow[r, "\forall t"] \arrow[d, hook, "i"'] & W \\ V \arrow[ur, "\exists ! \mathcal{T}"'] & \end{tikzcd}$$

– $t \in \mathscr{F}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}, W)$
– i inclusion
– $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$

Nous avons que $\mathcal{T} \circ i = t$.

Formule pour $T : V \longrightarrow W$ en terme de $t : \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\} \longrightarrow W$:

$$\mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right) \underset{def}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t(\vec{v}_i), \forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$$

Ainsi, il y a un bijection :

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}, W) & \longrightarrow & \mathscr{L}(V, W) \\ t & \longmapsto & \mathcal{T} \end{array}$$

Pour tout $\vec{v} \in V, \exists ! \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tq $\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$. Nous posons alors,

$$\mathcal{T}(\vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \underbrace{t(\vec{v}_i)}_{\in W} \in W$$

Cette définition n'est pas ambiguë, puisque la décomposition de $\vec{v}$ en combinaison linéaire des $\vec{v}_i$ est unique. Il reste à voir que :

1. $\mathcal{T}$ ainsi définie est bien une application linéaire.
2. **L' unicité de** $\mathcal{T}$, i.e., si $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V, W)$ et $\mathcal{S}(\vec{v}_i) = t(\vec{v}_i), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ alors $\mathcal{S} = \mathcal{T}$.

Démonstration. 1. Soient $\vec{v}, \vec{v}' \in V$, $\exists ! \alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_1', ..., \alpha_n' \in \mathbb{F}$, tq

$$\vec{v} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i \text{ et } \vec{v}' = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' \vec{v}_i$$

Donc

$$\vec{v} + \vec{v}' = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_i') \vec{v}_i$$

Par définition de $\mathcal{T}$, nous avons

$$\mathcal{T}(\vec{v} + \vec{v}') = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_i') t(\vec{v}_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t(\vec{v}_i) + \sum_{i=1}^{n} \alpha_i' t(\vec{v}_i) = \mathcal{T}(\vec{v}) + \mathcal{T}(\vec{v}')$$

Ainsi $\mathcal{T}$ est additive.

Soit $\vec{v} \in V$, $\exists \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tq $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i$. Soit $\zeta \in \mathbb{F}$. Alors

$$\zeta \vec{v} = \sum_{i=1}^{n} (\zeta \alpha_i) \vec{v}_i$$

et donc par définition de $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T}(\zeta \vec{v}) = \sum_{i=1}^{n} (\zeta \alpha_i) t(\vec{v}_i) = \zeta \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t(\vec{v}_i) = \zeta \mathcal{T}(\vec{v})$$

Ainsi $\mathcal{T}$ est homogène et donc linéaire.

2. Soit $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V, W)$ tq $\mathcal{S}(\vec{v}_i) = t(\vec{v}_i), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Puisque $\mathcal{S}$ est linéaire, alors $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$, nous avons,

$$\mathcal{S}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right) \underset{(a)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mathcal{S}(\vec{v}_i) \underset{(b)}{=} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i t(\vec{v}_i) \underset{(c)}{=} \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right)$$

(a) Par linéarité de $\mathcal{S}$.
(b) Par hypothèse que $\mathcal{S}(\vec{v}_i) = t(\vec{v}_i), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.
(c) Par définition de $\mathcal{T}$.

Puisque tout vecteur $\vec{v} \in V$ est une combinaison linéaire des $\vec{v}_i$, nous pouvons conclure que $\mathcal{S}(\vec{v}) = \mathcal{T}(\vec{v}), \forall \vec{v} \in V$. Et donc que $\mathcal{S} = \mathcal{T}$. cqfd

Définition 4.3. $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$ *est* l'extension linéaire *de* $t \in \mathscr{F}(\{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\}, W)$ *si* $\mathcal{T}(\vec{v}_i) = t(\vec{v}_i), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$ *où* $(\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ *est une base de V.*

Ainsi pour construire/définir une application linéaire de V vers W, il suffit de connaître une base de V, de définir une application $t : \{\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n\} \longrightarrow W$ et ensuite de prendre son extension linéaire.

Structure d'espace vectoriel de $\mathscr{L}(V, W)$

Soient V,W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Définissons les deux opérations sur $\mathscr{L}(V, W)$:

add : $\mathscr{L}(V, W) \times \mathscr{L}(V, W) \longrightarrow \mathscr{L}(V, W) : (\mathcal{S}, \mathcal{T}) \longmapsto \mathcal{S} + \mathcal{T}$ défini par :

$$(\mathcal{S} + \mathcal{T})(\vec{v}) \underset{def}{=} \mathcal{S}(\vec{v}) + \mathcal{T}(\vec{v})$$

multi : $\mathbb{F} \times \mathscr{L}(V, W) \longrightarrow \mathscr{L}(V, W) : (\alpha, \mathcal{T}) \longmapsto \alpha \cdot \mathcal{T}$ défini par :

$$(\alpha \cdot \mathcal{T})(\vec{v}) \underset{def}{=} \alpha \cdot \mathcal{T}(\vec{v})$$

Démonstration. Exercice défi !

Preuve de la structure d'espace vectoriel de $\mathscr{L}(V, W)$:

– $\mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W) \Longrightarrow \mathcal{S} + \mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$:

– $\alpha \in \mathbb{F}, \mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W) \Longrightarrow \alpha \cdot \mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W), \forall \alpha \in \mathbb{F}$:

– $\mathscr{L}(V, W)$ est un espace vectoriel :

4.4 Isomorphismes

But : Pouvoir dire précisément et formellement que deux espaces vectoriels sont les "mêmes".

Définition 4.4. *Soient V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$. Alors $\mathcal{T}$ est un* isomorphisme *s'il existe $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(W, V)$ tq*

$$\mathcal{S} \circ \mathcal{T} = Id_V \quad \text{et} \quad \mathcal{T} \circ \mathcal{S} = Id_W$$

Explication schématique

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{T}"] \arrow[rr, bend right, "Id_V"'] & W \arrow[r, "\mathcal{S}"] & V \end{tikzcd} \quad \text{et} \quad \begin{tikzcd} W \arrow[r, "\mathcal{S}"] \arrow[rr, bend right, "Id_W"'] & V \arrow[r, "\mathcal{T}"] & W \end{tikzcd}$$

Proposition 4.8. *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$. S'il existe $\mathcal{S} \in \mathscr{F}(W,V)$ tq $\mathcal{S} \circ \mathcal{T} = Id_V$ et $\mathcal{T} \circ \mathcal{S} = Id_W$, alors $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(W,V)$.*

Démonstration.
– Soient $\vec{w}, \vec{w}' \in W$. Montrons que $\mathcal{S}$ est additive. Par hypothèse, nous avons que $\mathcal{T} \circ \mathcal{S} = Id_W$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{w}+\vec{w}')\big) &= (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})(\vec{w}+\vec{w}') \\ &= \mathrm{Id}_W(\vec{w}+\vec{w}') = \vec{w}+\vec{w}' = \mathrm{Id}_W(\vec{w}) + \mathrm{Id}_W(\vec{w}') \\ &= (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})(\vec{w}) + (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})(\vec{w}') = \mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{w})\big) + \mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{w}')\big) \\ &= \mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{w}) + \mathcal{S}(\vec{w}')\big) \end{aligned}$$

Nous avons donc que $\mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{w}+\vec{w}')\big) = \mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{w}) + \mathcal{S}(\vec{w}')\big)$ et, puisque $\mathcal{T}$ est inversible, $\mathcal{T}$ est une bijection. Par conséquent, $\mathcal{S}(\vec{w}+\vec{w}') = \mathcal{S}(\vec{w}) + \mathcal{S}(\vec{w}')$. Ainsi, $\mathcal{S}$ est additive.

– Soit $\vec{w} \in W$ et soit $\alpha \in \mathbb{F}$. Montrons que $\mathcal{S}$ est homogène. $\mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\alpha\vec{w})\big) = \mathcal{T} \circ \mathcal{S}(\alpha\vec{w}) = \alpha\vec{w} = \alpha\mathcal{T} \circ \mathcal{S}(\vec{w}) = \alpha\mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{w})\big) = \mathcal{T}\big(\alpha\mathcal{S}(\vec{w})\big)$. Puisque $\mathcal{T}$ est injective, $\mathcal{S}(\alpha\vec{w}) = \alpha\mathcal{S}(\vec{w})$, Ainsi, $\mathcal{S}$ est homogène.

Nous avons donc bien que $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(W,V)$. cqfd

Proposition 4.9. *Soient U,V,W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soient $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(U,V)$ et $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$. Alors $\mathcal{T} \circ \mathcal{S} \in \mathscr{L}(U,W)$.*

Démonstration.
– Soient $\vec{u}, \vec{u}' \in U$.

$$\begin{aligned} (\mathcal{T} \circ \mathcal{S})(\vec{u}+\vec{u}') &= \mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{u}+\vec{u}')\big) = \mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{u}) + \mathcal{S}(\vec{u}')\big) \\ &= \mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{u})\big) + \mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{u}')\big) = \big(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}\big)(\vec{u}) + \big(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}\big)(\vec{u}') \end{aligned}$$

– Soit $\vec{u} \in U$ et soit $\alpha \in \mathbb{F}$

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}\big)(\alpha\vec{u}) &= \mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\alpha\vec{u})\big) = \mathcal{T}\big(\alpha\mathcal{S}(\vec{u})\big) \\ &= \alpha\mathcal{T}\big(\mathcal{S}(\vec{u})\big) = \alpha\big(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}\big)(\vec{u}) \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons bien que $\mathcal{T} \circ \mathcal{S} \in \mathscr{L}(U,W)$. cqfd

Proposition 4.10. *Soient U,V,W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soient $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(U,V)$, $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$. L'application $\mathscr{L}(U,V) \times \mathscr{L}(V,W) \longrightarrow \mathscr{L}(U,W)$: $(\mathcal{S},\mathcal{T}) \longmapsto \mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ est bilinéaire, i.e.,*

1. $(\alpha\mathcal{T} + \alpha'\mathcal{T}') \circ \mathcal{S} = \alpha(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) + \alpha'(\mathcal{T}' \circ \mathcal{S})$
2. $\mathcal{T} \circ (\beta\mathcal{S} + \beta'\mathcal{S}') = \beta(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) + \beta'(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}')$

Démonstration. Exercice défi !

Rappel. Soient $f \in \mathscr{F}(X,Y)$ et $g,\ h \in \mathscr{F}(Y,X)$. Alors si $g \circ f = Id_X = h \circ f$ et $f \circ g = Id_Y = f \circ h$ alors $g = h$, i.e., toute application inversible admet un unique inverse. En particulier, un isomorphisme $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$ admet un unique inverse $\mathcal{T}^{-1} : W \longrightarrow V$. De plus, $\mathcal{T}^{-1} \in \mathscr{L}(W,V)$.

Définition 4.5. *Soient V,W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. V et W sont dits* isomorphes *s'il existe un isomorphisme $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$.*
Nous écrivons alors, $V \cong W$.

Proposition 4.11. ***Proposition pour les paresseux.***
Soient V,W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$. Si V, W sont de dimension finie tq $dimV = dimW$, alors les conditions suivantes sont équivalentes.

1. *$\mathcal{T}$ est un isomorphisme.*
2. *$\mathcal{T}$ est injective.*
3. *$\mathcal{T}$ est surjective.*

Démonstration. Par le théorème du rang et le fait de $dimV = dimW$, nous avons que,

$$dimW = dimV = dim(Im\mathcal{T}) + dim(Ker\mathcal{T}).$$

Ainsi,

$$dimW = dim(Im\mathcal{T}) \iff dim(Ker\mathcal{T}) = 0$$

Or, $dimW = dim(Im\mathcal{T}) \Leftrightarrow \mathcal{T}$ est surjective et $dim(Ker\mathcal{T}) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}$ est injective. Ainsi, nous avons les chaînes d'équivalences suivantes :

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{T} \text{ est surjective}\big) &\iff \big(\mathcal{T} \text{ est injective et surjective}\big) \\ &\iff \big(\mathcal{T} \text{ est un isomorphisme}\big) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \big(\mathcal{T} \text{ est injective}\big) &\iff \big(\mathcal{T} \text{ est injective et surjective}\big) \\ &\iff \big(\mathcal{T} \text{ est un isomorphisme}\big) \end{aligned}$$

Nous avons bien les trois équivalences cherchées. cqfd

Remarque. Ainsi si $dimV = dimW$ et $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$, il suffit de montrer soit que $\mathcal{T}$ est injective, soit que $\mathcal{T}$ est surjective pour monter que $\mathcal{T}$ est un isomorphisme.

Proposition 4.12. *Soient U,V,W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels. Soient $\mathcal{S} : U \longrightarrow V$ et $\mathcal{T} : V \longrightarrow W$ des isomorphismes. Alors $\mathcal{T} \circ \mathcal{S} : U \longrightarrow W$ est aussi un isomorphisme. Et son inverse est $(\mathcal{T} \circ \mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1}$.*

Démonstration. Puisque $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont des isomorphismes, ils admettent des inverses :

$$\mathcal{S}^{-1} : V \longrightarrow U \text{ et } \mathcal{T}^{-1} : W \longrightarrow V$$

et $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}$ admet donc un inverse $\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1}$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\mathcal{S}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{T} \circ \mathcal{S}"'] & V \arrow[r, "\mathcal{T}"] & W \arrow[r, "\mathcal{T}^{-1}"'] \arrow[rr, bend left, "\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1}"] & V \arrow[r, "\mathcal{S}^{-1}"'] & U \end{tikzcd}$$

Montrons que $\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{T}^{-1}$ est un inverse. En effet, $(\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{T}^{-1})\circ(\mathcal{T}\circ\mathcal{S}) = \mathcal{S}^{-1}\circ(\mathcal{T}^{-1}\circ T)\circ\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}\circ(\mathrm{Id}_V)\circ\mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{S} = \mathrm{Id}_U$. De même, $(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})\circ(\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{T}^{-1}) = \mathrm{Id}_V$. Ainsi $\mathcal{T}\circ\mathcal{S}$ est inversible, donc un isomorphisme et son inverse est $\mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{T}^{-1}$, i.e., $(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})^{-1} = \mathcal{S}^{-1}\circ\mathcal{T}^{-1}$. cqfd

Exemple 4.3. Soit $V = \mathbb{F}^n$ et $W = \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$, alors $dim\mathbb{F}^n = n$ et $dimW = dim\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F}) = n$. Alors, $\mathbb{F}^n \cong \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$, i.e., il existe un isomorphisme $\mathcal{T} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$. Construisons cet isomorphisme $\mathcal{T}$.
Considérons la base standard de $\mathbb{F}^n$, $(\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n)$. Définissons,

$$t : \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\} \longrightarrow \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F}) \text{ par } t(\vec{e}_i) = x^{i-1}$$

Observons que

$$x^{i-1} = \sum_{j=0}^{i-2} 0\cdot x^j + 1\cdot x^{i-1} + \sum_{j=i}^{n-1} 0\cdot x^j$$

Soit $\mathcal{T} : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$ l'unique extension linéaire de t. Donc,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\big((\alpha_1, ..., \alpha_n)\big) &= \mathcal{T}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{e}_i\right) = \sum_{i=1}^n \alpha_i t(\vec{e}_i)\\ &= \sum_{i=1}^n \alpha_i x^{i-1} \in \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})\end{aligned}$$

Il reste à montrer que $\mathcal{T}$ est bien un isomorphisme. Pour ce faire, nous allons montrer que $\mathcal{T}$ est surjective, et par la proposition 4.11, nous pourrons conclure que $\mathcal{T}$ est bien un isomorphisme.
Soit $p \in \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Alors,

$$\mathcal{T}\big(a_0, ..., a_{n-1}\big) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k = p(x)$$

Ainsi, $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F}) \subset Im\mathcal{T}$ et par conséquent, $\mathcal{T}$ est surjective, donc il s'agit bien d'un isomorphisme.

Généralisons cet exemple :

Construction d'isomorphisme

Proposition 4.13. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel tq $dimV = n < \infty$. Alors, $V \cong \mathbb{F}^n$.*

Nous allons démonter cette proposition en introduisant une construction générale pour les isomorphisme de V vers $\mathbb{F}^n$. Ainsi, nous allons construire un isomorphisme explicite de V vers $\mathbb{F}^n$ avec son inverse. Supposons que $dimV = n$ par conséquent, il existe une base $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$. Définissons l'application suivante :

$$[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{F}^n : \vec{v} \longmapsto [\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \text{ où } \vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{v}_i.$$

Le *vecteur de coordonnée* de $\vec{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Autrement dit, la $i^{\text{ème}}$ composante de $[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ est le coefficient de $\vec{v}_i$ dans l'unique décomposition de $\vec{v}$ comme combinaison linéaire des éléments de $\mathcal{B}$.

Nous devons encore voir que $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est une application linéaire et que $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est inversible.

- Linéarité de $[\cdot]_{\mathcal{B}}$:

  Soient $\vec{v}, \vec{v}' \in V$. Alors $\exists\alpha_1, ..., \alpha_n, \alpha_1', ..., \alpha_n' \in F$ tq $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{v}_i$ et $\vec{v}' = \sum_{i=1}^n \alpha_i'\vec{v}_i$, Par conséquent, $\vec{v} + \vec{v}' = \sum_{i=1}^n (\alpha_i + \alpha_i')\vec{v}_i$. Alors,

  $$[\vec{v} + \vec{v}']_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\alpha_1 + \alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n + \alpha_n'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha_1'\\ \vdots\\ \alpha_n'\end{pmatrix} = [\vec{v}]_{\mathcal{B}} + [\vec{v}']_{\mathcal{B}}$$

  Ainsi, $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est additif.

  Soit $\vec{v} \in V$ et soit $\beta \in \mathbb{F}$. Alors $\beta\vec{v} = \sum_{i=1}^n (\beta\alpha_i)\vec{v}_i$ et donc

  $$[\beta\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\beta\alpha_1\\ \vdots\\ \beta\alpha_n\end{pmatrix} = \beta\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} = \beta[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

  Ainsi, $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est homogène et donc linéaire.

- Inversibilité de $[\cdot]_{\mathcal{B}}$:
  Puisque $dimV = dim\mathbb{F}^n$, il nous suffit de vérifier soit que $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est injective soit que $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est surjective. Montrons que $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est injective. Ainsi,

  $$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} = \sum_{i=1}^n 0\vec{v}_i = \vec{0}.$$

  Autrement dit, $Ker\big([\cdot]_{\mathcal{B}}\big) = \{\vec{0}\}$. Donc $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est injective et par la proposition 4.11, $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ est un isomorphisme.

Formule explicite pour l'inverse de $[\cdot]_{\mathcal{B}}$:

$$Real_{\mathcal{B}} : \mathbb{F}^n \longrightarrow V : \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \longmapsto Real_{\mathcal{B}}\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{v}_i = \vec{v}.$$

La *réalisation* de $\vec{v}$ par rapport à la base $\mathcal{B}$.

Il nous reste à montrer que $Real_{\mathcal{B}}$ est bien l'inverse de $[\cdot]_{\mathcal{B}}$.
Soit $\vec{v} \in V$. Alors, $\exists!\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tq $\vec{v} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{v}_i$. Alors,

$$\Big(Real_{\mathcal{B}}\circ[\cdot]_{\mathcal{B}}\Big)(\vec{v}) = Real_{\mathcal{B}}\Big([\vec{v}]_{\mathcal{B}}\Big) = Real_{\mathcal{B}}\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right\} = \sum_{i=1}^n \alpha_i\vec{v}_i = \vec{v}$$

Donc $Real_{\mathcal{B}}\circ[\cdot]_{\mathcal{B}} = Id_V$.

Soit $\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$. Alors,

$$\left([\cdot]_{\mathcal{B}} \circ Real_{\mathcal{B}}\right)\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right\} = \left[Real_{\mathcal{B}}\left\{\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}\right\}\right]_{\mathcal{B}} = \left[\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \vec{v}_i\right]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}$$

Donc $[\cdot]_{\mathcal{B}} \circ Real_{\mathcal{B}} = Id_{\mathbb{F}^n}$. Ce qui implique que $Real_{\mathcal{B}}$ est bien l'inverse de $[\cdot]_{\mathcal{B}}$. Ce qui termine la démonstration de la proposition 4.13.

Corollaire 4.2. *Soient V, W, des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimensions finies. Alors :*

$$V \cong W \iff dimV = dimW$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons que $V \cong W$, alors il existe un isomorphisme $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$. Et par le théorème du rang,

$$dimV = \underbrace{dim(\overbrace{Ker\mathcal{T}}^{=\{0\}})}_{=0} + \underbrace{dim(\overbrace{Im\mathcal{T}}^{=W})}_{=dimW} = dimW$$

$\Longleftarrow$ Supposons que $dimV = n = dimW$. Alors, la proposition 4.13 implique que $V \cong \mathbb{F}^n$ et $W \cong \mathbb{F}^n$ ainsi, il existe des isomorphismes $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(W, \mathbb{F}^n)$ et $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V, \mathbb{F}^n)$. Donc, $\mathcal{T}$ est inversible, i.e., $\exists! \mathcal{T}^{-1} \in \mathscr{L}(\mathbb{F}^n, W)$. Considérons,

$$V \xrightarrow{\mathcal{S}} \mathbb{F}^n \xrightarrow{\mathcal{T}^{-1}} W$$

Alors, $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S} \in \mathscr{L}(V, W)$. De plus, $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}$ est un isomorphisme car il admet un inverse, i.e., $\exists! \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T} : W \longrightarrow W$ tq $(\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}) \circ (\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}) = \mathrm{Id}_V$ et $(\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}) \circ (\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}) = \mathrm{Id}_W$. En effet,

$$(\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}) \circ (\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}) = \mathcal{S}^{-1} \circ \underbrace{(\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{-1})}_{\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}} \circ \mathcal{S} = \mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{S} = \mathrm{Id}_V$$

De même, $(\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{S}) \circ (\mathcal{S}^{-1} \circ \mathcal{T}) = \mathrm{Id}_W$. Ainsi, nous avons bien que $V \cong W$. cqfd

Exemple 4.4. Soit $V = \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$ et soit $\mathcal{B} = (1, x, ..., x^{n-1})$ une base de $\mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$. Soit $p \in \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$, $p(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k$. Alors,

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}a_0\\ \vdots\\ a_{n-1}\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n \text{ et } Real_{\mathcal{B}}\left\{\begin{pmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}\right\} = \sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1} x^k \in \mathscr{P}_{n-1}(\mathbb{F})$$

Chapitre 5

Matrice et applications linéaires

But : Introduire un outil qui permet de comparer toute application linéaire entre des espaces vectoriels de dimension finie à une application linéaire $\mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$ comme extension de l'isomorphisme $V \cong \mathbb{F}^n$, lorsque $dimV = n$.

5.1 Les matrices

Définition 5.1. *Une* matrice *à coefficients dans $\mathbb{F}$ et de taille $m \times n$ où $m, n \in \mathbb{Z}_+$ est un arrangement d'éléments de $\mathbb{F}$, en m lignes et n colonnes.*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \textit{avec } a_{ij} \in \mathbb{F}, \forall i, j$$

$A \in \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficient dans $\mathbb{F}$, également noté $Mat(m, n, \mathbb{F})$.

Soient $M, N \in \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$ et soit $\lambda \in \mathbb{F}$. Définissons l'addition et la multiplication par un scalaire.

$$add : \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F}) \times \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$$

$$M + N = \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \beta_{11} & \cdots & \alpha_{1n} + \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{m1} + \beta_{m1} & \cdots & \alpha_{mn} + \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

$$multi : \mathbb{F} \times \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$$

$$\lambda M = \begin{pmatrix} \lambda\alpha_{11} & \cdots & \lambda\alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda\alpha_{m1} & \cdots & \lambda\alpha_{mn} \end{pmatrix}$$

Ainsi $\mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$ est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel.

Notation.
- $(A)_{ij} = a_{ij}$: les coefficients de la matrice A.
- $\vec{c}_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^m, \forall j : j^{\text{ème}}$ colonne de A.

– $\vec{l}_i(A) = \begin{pmatrix} a_{i1} & \cdots & a_{in} \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n, \forall i : i^{\text{ème}}$ ligne de A.

Quelques observations importantes

– $\mathscr{M}(1, n, \mathbb{F}) = \mathbb{F}^n$ et $\mathscr{M}(m, 1, \mathbb{F}) = \mathbb{F}^m$.
– si $m = n$, alors il existe $I_n \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$ définie par

$$(I_n)_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ si } i = j, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}, \text{ i.e.,} I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

I_n est la *matrice identité* de taille $n \times n$
– Plus généralement si $A \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$ alors A est appelée *matrice carrée*. Nous pouvons alors définir la *diagonale principale* de A composée des coefficients $(A)_{ii}$ de A.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & * & \cdots & * \\ * & a_{22} & \cdots & * \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * & a_{nn} \end{pmatrix}$$

– Soient $m, n \in \mathbb{Z}_+$. L'élément neutre pour l'addition dans l'espace vectoriel $\mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$ est la matrice dit *matrice zéro* $\mathbb{O}_{mn}$ définie par

$$(\mathbb{O}_{mn})_{ij} = 0, \forall i, j$$

5.2 Relation entre applications linéaires et matrices

Définition 5.2. *Soient V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie. Soient $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ base de V et $\mathcal{B}' = (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$ base de W. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$. Alors la* ***matrice de $\mathcal{T}$ par rapport aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$****, notée $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \in \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$, est définie par*

$$([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}})_{ij} = \alpha_{ij} = \begin{cases} \textit{le coefficient de } \vec{w}_i \textit{ dans l'unique} \\ \textit{combinaison linéaire des vecteurs de } \mathcal{B}' \\ \textit{qui donne } \mathcal{T}(\vec{v}_j). \end{cases}$$

Avec $\mathcal{T}(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \vec{w}_i$ où $\vec{w}_i \in \mathcal{B}', \forall j$ et $\vec{v}_j \in \mathcal{B}, \forall i$.

Explications

Etant donné que $\mathcal{B}'$ est une base de W, il existe des uniques $\alpha_{1j}, ..., \alpha_{m,j} \in \mathbb{F}$, tq $\mathcal{T}(\vec{v}_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{ij} \vec{w}_i$ et cela pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$. Ainsi,

$$[\mathcal{T}(\vec{v}_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \alpha_{1j} \\ \vdots \\ \alpha_{mj} \end{pmatrix}$$

I.e., le vecteur de coordonnée de $\mathcal{T}(\vec{v}_j)$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$ de W. Ainsi,

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} [\mathcal{T}(\vec{v}_1)]_{\mathcal{B}'} & \Big| & \cdots & \Big| & [\mathcal{T}(\vec{v}_n)]_{\mathcal{B}'} \end{pmatrix}$$

et donc $\vec{c}_j([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}) = [\mathcal{T}(\vec{v}_j)]_{\mathcal{B}'}$, i.e., les colonnes de la matrice $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont les vecteurs de coordonnée des $\mathcal{T}(\vec{v}_j)$ pour tous les $\vec{v}_j \in \mathcal{B}$

Exemple 5.1. 0. Soient V,W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels et soient $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$, une base V et $\mathcal{B}' = (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$, une base de W. Soit l'application linéaire $\mathbb{O}_{V,W}$,

$$\mathbb{O}_{V,W} : V \longrightarrow W : \vec{v} \longmapsto \vec{0}, \forall \vec{v} \in V$$

Calculons $[\mathbb{O}_{V,W}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
Pour cela, calculons $\mathbb{O}_{V,W}(\vec{v}_j) = \vec{0} = 0\vec{w}_1 + ... + 0\vec{w}_m$. Ainsi,

$$[\mathbb{O}_{V,W}(\vec{v}_j)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$[\mathbb{O}_{V,W}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} = \mathbb{O}_{mn}$$

Ainsi, $[\mathbb{O}_{V,W}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \mathbb{O}_{mn}$ quelles que soient les bases des V et W.

1. Soit V un $\mathbb{F}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$, une base de V. Soit l'application identité Id_V,

$$\mathrm{Id}_V : V \longrightarrow v : \vec{v} \longmapsto \vec{v}, \forall \vec{v} \in V$$

Calculons $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$.

Pour cela, calculons $\mathrm{Id}_V(\vec{v}_j) = \vec{v}_j = \sum_{k=1}^{j-1} 0\vec{v}_k + 1\vec{v}_j + \sum_{k=j+1}^{n} 0\vec{v}_k$. Ainsi,

$$[\mathrm{Id}_V(\vec{v}_j)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{e}_j$$

Par conséquent,

$$[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \vec{e}_1 & \cdots & \vec{e}_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$$

Noter que si nous travaillons avec deux bases différentes, i.e., $\mathcal{B} \neq \mathcal{B}'$ alors $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} \neq I_n$.
En effet, si $V = \mathbb{F}^2$ et soient des bases de $\mathbb{F}^2$, $\mathcal{B} = \big((2,1), (-1,0)\big)$ et $\mathcal{B}' = (\vec{e}_1, \vec{e}_2)$. Alors, $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et une matrice 2×2 dont les colonnes sont :

$$\begin{aligned} \vec{c}_1\Big([\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\Big) &= \Big[\mathrm{Id}_V\big((2,1)\big)\Big]_{\mathcal{B}'} = \Big[(2,1)\Big]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \vec{c}_2\Big([\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}\Big) &= \Big[\mathrm{Id}_V\big((-1,0)\big)\Big]_{\mathcal{B}'} = \Big[(-1,0)\Big]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \neq I_n$$

2. Considérons l'application $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathscr{P}_3(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{P}_2(\mathbb{F})$. Soient $\mathcal{B} = (1, x, x^2, x^3)$, une base de $\mathscr{P}_3(\mathbb{F})$ et $\mathcal{B}' = (1, x, x^2)$, une base de $\mathscr{P}_2(\mathbb{F})$. Soit $p(x) = \sum_{k=0}^{3} a_k x^k$ alors $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} p(x) = \sum_{k=1}^{3} k a_k x^{k-1}$. Alors $\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \in \mathscr{M}(3, 4, \mathbb{F})$. Calculons les colonnes de cette matrice.

$$\begin{aligned}
\vec{c}_1\left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\right) &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(1)\right]_{\mathcal{B}'} = \left[0\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^3 \\
\vec{c}_2\left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\right) &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x)\right]_{\mathcal{B}'} = \left[1\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^3 \\
\vec{c}_3\left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\right) &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^2)\right]_{\mathcal{B}'} = \left[2x\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^3 \\
\vec{c}_4\left(\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\right) &= \left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(x^3)\right]_{\mathcal{B}'} = \left[3x^2\right]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^3
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left[\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\0 & 0 & 2 & 0\\0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$$

Proposition 5.1. *Soient V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie, tq $\dim V = n$ et $\dim W = m$. Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ des bases de V et W, respectivement. Alors, l'application*

$$\mathscr{L}(V, W) \longrightarrow \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F}) : \mathcal{T} \longmapsto [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

est une application linéaire et est un isomorphisme.

Démonstration. Exercice défi !

Remarque. La linéarité de l'application $\mathscr{L}(V, W) \longrightarrow \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$ implique, sous les hypothèses de la proposition 5.1, que
- $[\mathcal{T} + \mathcal{S}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} + [\mathcal{S}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$
- $[\alpha\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \alpha[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$

si $\mathcal{T}, \mathcal{S} \in \mathscr{L}(V, W)$ et $\alpha \in \mathbb{F}$.

Relation entre composition d'application et les matrices

Soient U, V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension n, m, l respectivement. Soient $\mathcal{B} = (\vec{u}_1, ..., \vec{u}_n)$ base de U, $\mathcal{B}' = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_m)$ base de V, $\mathcal{B}'' = (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_l)$ base de W. Soient $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(U, V)$ et $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$. Ainsi $\mathcal{T} \circ \mathcal{S} \in \mathscr{L}(U, W)$. Nous cherchons une relation entre $[\mathcal{S}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$, $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}$ et $[\mathcal{T} \circ \mathcal{S}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}$. Nous allons définir l'application produit matriciel,

$$\mathscr{M}(l, m, \mathbb{F}) \times \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{M}(l, n, \mathbb{F}) : (A, B) \longmapsto A \cdot B$$

tq

$$[\mathcal{T} \circ \mathcal{S}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}[\mathcal{S}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

Calculons, $\left([\mathcal{T} \circ \mathcal{S}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}\right)_{ij}$.

Rappelons que $\left([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}\right)_{ik}$ est le coefficient de $\vec{w}_i$ dans la décomposition de $\mathcal{T}(\vec{v}_k)$ en terme de la base $\mathcal{B}''$, i.e.,

$$\mathcal{T}(\vec{v}_k) = \sum_{i=1}^{l} b_{ik}\vec{w}_i \Rightarrow \left([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}\right)_{ik} = b_{ik}$$

De même que

$$\mathcal{S}(\vec{u}_j) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\vec{v}_k \Rightarrow \left([\mathcal{S}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\right)_{kj} = a_{kj}$$

Calculons maintenant $\mathcal{T} \circ \mathcal{S}(u_j)$ et exprimons le en terme des vecteurs de la base $\mathcal{B}''$ de W.

$$\begin{aligned}
\mathcal{T} \circ \mathcal{S}(\vec{u}_j) &= \mathcal{T}\left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj}\vec{v}_k\right) = \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\mathcal{T}(\vec{v}_k) \\
&= \sum_{k=1}^{m} a_{kj}\left(\sum_{i=1}^{l} b_{ik}\vec{w}_i\right) = \sum_{i=1}^{l}\sum_{k=1}^{m}(b_{ik}a_{kj})\vec{w}_i \\
&= \sum_{i=1}^{l}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}\right)\vec{w}_i
\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\left([\mathcal{T} \circ \mathcal{S}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}}\right)_{ij} = \sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj} = \sum_{k=1}^{m}\left([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}\right)_{ik}\left([\mathcal{S}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\right)_{kj}$$

Cette analyse motive la définition suivante.

Définition 5.3. *Soient $A \in \mathscr{M}(l, m, \mathbb{F})$ et $B \in \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$. Le* produit matriciel *de A et B est la matrice $A \cdot B \in \mathscr{M}(l, n, \mathbb{F})$ définie par*

$$(AB)_{ij} = \sum_{k=1}^{m}(A)_{ik}(B)_{kj}, \begin{cases} \forall 1 \leqslant i \leqslant l, \\ \forall 1 \leqslant j \leqslant n. \end{cases}$$

Remarque. Le nombre de colonnes de la matrice A doit être égal au nombre de lignes de la matrice B pour que le produit AB puisse exister. Cette condition est nécessaire.

Remarque. Nous avons défini le produit de matrice pour que,

$$[\mathcal{T} \circ \mathcal{S}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'} \cdot [\mathcal{S}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

Exemple 5.2. 1. Soit $A \in \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$. Soit $I_n \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$ la matrice identité, alors $AI_n = A$. En effet,

$$(AI_n)_{ij} = \sum_{k=1}^{n}(A)_{ik} \cdot \underbrace{(I_n)_{kj}}_{\begin{cases}1 & \text{si } k = j, \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}} = (A)_{ij} \cdot 1 = (A)_{ij}, \forall ij.$$

De même, si $I_m \in \mathscr{M}(m, m, \mathbb{F})$ alors $I_m A = A$

2. Soit
$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \pi & \pi^2 & \pi^3 \\ e & e^2 & e^3 \end{pmatrix}$ Alors,

$$AB = \begin{pmatrix} 2\pi + 0e & 2\pi^2 + 0e^2 & 2\pi^2 + 0e^3 \\ -3\pi + 1e & -3\pi^2 + 1e^2 & -3\pi^3 + 1e^3 \\ 5\pi - 2e & 5\pi^2 - 2e^2 & 5\pi^3 - 2e^3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}(3,3,\mathbb{F})$$

Application linéaire provenant d'un produit de matrices

Toute matrice $A \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$ détermine une application linéaire $\mathcal{T}_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$. En effet, si $v \in \mathbb{F}^n$ il peut être considéré comme une matrice de n lignes et une colonne.

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}(n,1,\mathbb{F})$$

Alors le produit matriciel de A et v est défini et donne une matrice à m lignes et une colonne, i.e., $Av \in \mathbb{F}^m$. Calculons explicitement ce produit, $Av \in \mathscr{M}(m,1,\mathbb{F})$ est défini par,

$$(Av)_{i1} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik} \underbrace{(v)_{k1}}_{=\alpha_k} = \sum_{k=1}^{n} (A)_{ik}\alpha_k$$

Ainsi, l'application linéaire $\mathcal{T}_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m$ est définie par $\mathcal{T}_A(\vec{v}) = A\vec{v}$. Et nous avons donc construit une application $\mathscr{M}(m,n,\mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{L}(\mathbb{F}^n,\mathbb{F}^m) : A \longmapsto \mathcal{T}_A$. Nous pouvons monter que cette application est linéaire.

Nous pouvons énoncer la proposition suivante :

Proposition 5.2. *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$. Soient $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ base de V et $\mathcal{B}' = (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$ base de W. Alors pour tout $\vec{v} \in V$.*

$$[\mathcal{T}(\vec{v})]_{\mathcal{B}'} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Démonstration. Puisque $\mathcal{B}$ est une base de V, il existe $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tq $\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \vec{v}_k$. Par conséquent,

$$[\vec{v}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

Par ailleurs, comme $\mathcal{T}$ est linéaire, nous avons

$$\mathcal{T}(\vec{v}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{T}(\vec{v}_k)$$

De même, puisque $\mathcal{B}'$ est une base de W, il existe $\beta_{1k}, ..., \beta_{mk} \in \mathbb{F}$ tq

$$\mathcal{T}(\vec{v}_k) = \sum_{i=1}^{m} \beta_{ik}\vec{w}_i$$

Par conséquent, $\Big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\Big)_{ik} = \beta_{ik}$. De plus, en substituant $\mathcal{T}(\vec{v}_k)$ dans $\mathcal{T}(\vec{v}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \mathcal{T}(\vec{v}_k)$, nous obtenons,

$$\mathcal{T}(\vec{v}) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{i=1}^{m} \beta_{ik}\vec{w}_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} (\beta_{ik}\alpha_k)\vec{w}_i$$

Et donc

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}(\vec{v})]_{\mathcal{B}'} &= \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{n}(\beta_{1k}\alpha_k) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{n}(\beta_{mk}\alpha_k) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} \beta_{11} & \cdots & \beta_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{m1} & \cdots & \beta_{mn} \end{pmatrix}}_{=[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}}_{[\vec{v}]_{\mathcal{B}}} \\ &= [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}} \end{aligned}$$

cqfd

Corollaire 5.1. *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$. Soient $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$ base de V et $\mathcal{B}' = (\vec{w}_1, ..., \vec{w}_m)$ base de W. Alors pour tout $\vec{v} \in V$,*

$$\mathcal{T}(\vec{v}) = Real_{\mathcal{B}'}\Big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}\Big)$$

Démonstration. Par la proposition 5.2, nous avons

$$[\mathcal{T}(\vec{v})]_{\mathcal{B}'} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{T}(\vec{v}) \quad = \quad \mathrm{Id}_W(\mathcal{T}(\vec{v})) = Real_{\mathcal{B}'}\Big([\mathcal{T}(\vec{v})]_{\mathcal{B}'}\Big) = Real_{\mathcal{B}'}\Big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \cdot [\vec{v}]_{\mathcal{B}}\Big)$$

cqfd

Explication schématique

Soient V et W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie tq $dimV = n$ et $dimW = m$ et soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de V et W, respectivement. Soit $A \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$. Posons $A = [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. Explication schématique du calcul de $\mathcal{T}$ à partir de la matrice A et des bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V et W.

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "\mathcal{T}"] \arrow[d, "{[\cdot]_{\mathcal{B}}}"'] & W \\ \mathbb{F}^n \arrow[r, "\mathcal{T}_A"] & \mathbb{F}^m \arrow[u, "Real_{\mathcal{B}'}"'] \end{tikzcd} \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{T} = Real_{\mathcal{B}'} \circ \mathcal{T}_A \circ [\cdot]_{\mathcal{B}}$$

Algorithme de calcul de $\mathcal{T}(\vec{v})$

Soit $\vec{v} \in V$. Nous cherchons à calculer $\vec{w} = \mathcal{T}(\vec{v})$.
- Etant donné une application linéaire $\mathcal{T} : V \longrightarrow W$, choisir des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ de V et W, respectivement.
- Calculer la matrice $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.
- Calculer le produit $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}[\vec{v}]_{\mathcal{B}}$ pour obtenir $[\mathcal{T}(\vec{v})]_{\mathcal{B}'}$.
- Réaliser $[\mathcal{T}(\vec{v})]_{\mathcal{B}'}$ par rapport à la base $\mathcal{B}'$, i.e., calculer $Real_{\mathcal{B}'}\Big([\mathcal{T}(\vec{v})]_{\mathcal{B}'}\Big)$.

Ainsi, nous avons, $\vec{w} = Real_{\mathcal{B}'}\Big([\mathcal{T}(\vec{v})]_{\mathcal{B}'}\Big)$.

Remarque. Nous verrons qu'il existe des techniques pour choisir les bases de V et W pour que la matrice $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ soit de la forme la plus simple possible et par conséquent, faciliter les calculs.

Nous sommes maintenant à même de définir l'application $Real_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$.

Définition 5.4. *Soient V et W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie tq $dimV = n$ et $dimW = m$ et soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de V et W, respectivement.*

$$Real_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} : \mathscr{M}(m,n,\mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{L}(V,W) : A \longmapsto Real_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(A)$$

Avec

$$Real_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(A)(\vec{v}) = Real_{\mathcal{B}'}(\underbrace{A\,\overbrace{[\vec{v}]_{\mathcal{B}}}^{\in\mathbb{F}^n}}_{\in\mathbb{F}^m}) \in W$$

Exemple 5.3. Si $\vec{v} = \vec{v}_i$ avec $\mathcal{B} = (\vec{v}_1, ..., \vec{v}_n)$, nous avons donc que $[\vec{v}_i]_{\mathcal{B}} = \vec{e}_i \in \mathbb{F}^n$ et donc $A[\vec{v}_i]_{\mathcal{B}} = A\vec{e}_i = \vec{c}_i(A)$. Par conséquent,

$$Real_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(A)(\vec{v}_i) = Real_{\mathcal{B}'}\big(\vec{c}_i(A)\big) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki}\vec{w}_k$$

Proposition 5.3. *Soient V et W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie tq $dimV = n$ et $dimW = m$ et soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de V et W. Alors, $Real_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ est l'inverse de l'application linéaire $[\cdot]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. Par conséquent, $[\cdot]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ et $Real_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ sont des isomorphismes.*

Démonstration. Exercice défi !

Corollaire 5.2. *Le produit de matrices est associatif. Soient $A \in \mathscr{M}(l,m,\mathbb{F})$, $B \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$ et $C \in \mathscr{M}(n,p,\mathbb{F})$. Alors,*

$$(AB)C = A(BC)$$

Pour démontrer ce corollaire, nous avons deux possibilités. Soit nous appliquons la formule du produit matriciel, soit nous appliquons la définition du produit de matrice en terme d'applications linéaires. La deuxième possibilité est plus simple et plus constructive.

Démonstration. Soient U, V, W, Z des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimensions p, n, m, l respectivement. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{B}'', \mathcal{B}'''$ des bases de U, V, W, Z respectivement. Poser
- $\mathcal{R} = Real_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}(C) : U \longrightarrow V$
- $\mathcal{S} = Real_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}(B) : V \longrightarrow W$
- $\mathcal{T} = Real_{\mathcal{B}''',\mathcal{B}''}(A) : W \longrightarrow Z$

Ainsi, nous pouvons composer $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ et la composition d'application linéaire est associative. Par conséquent nous avons,

$$(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R} = \mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})$$

Calculons les deux membres de l'équation ci-dessus. Nous avons,

$$\begin{aligned}\big[(\mathcal{T} \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{R}\big]_{\mathcal{B}''',\mathcal{B}} &= [\mathcal{T} \circ \mathcal{S}]_{\mathcal{B}''',\mathcal{B}'}[\mathcal{R}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} = \Big(\underbrace{[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}''',\mathcal{B}''}}_{=A}\underbrace{[\mathcal{S}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}}_{=B}\Big)\underbrace{[\mathcal{R}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}_{=C} \\ &= (AB)C\end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned}\big[\mathcal{T} \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{R})\big]_{\mathcal{B}''',\mathcal{B}} &= [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}''',\mathcal{B}''}[\mathcal{S} \circ \mathcal{R}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}} = \underbrace{[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}''',\mathcal{B}''}}_{=A}\Big(\underbrace{[\mathcal{S}]_{\mathcal{B}'',\mathcal{B}'}}_{=B}\underbrace{[\mathcal{R}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}}_{=C}\Big) \\ &= A(BC)\end{aligned}$$

Par conséquent, $(AB)C = A(BC)$. cqfd

5.3 Matrices inversibles

Définition 5.5. *Soit $A \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$.*
L'image de A est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}^m$

$$ImA = \{A\vec{v}|\vec{v} \in \mathbb{F}^n\} = \{\mathcal{T}_A(\vec{v})|\vec{v} \in \mathbb{F}^n\} = Im\mathcal{T}_A$$

Le noyau de A est une sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}^m$

$$KerA = \{\vec{v} \in \mathbb{F}^n|A\vec{v} = \vec{0} \in \mathbb{F}^m\} = \{\vec{v} \in \mathbb{F}^n|\mathcal{T}_A(\vec{v}) = \vec{0}\} = Ker\mathcal{T}_A$$

Définition 5.6. *Soit $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ une matrice carrée. A est dite* inversible *s'il existe une matrice $B \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ tq*

$$AB = I_n = BA$$

Proposition 5.4. *Soit $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ une matrice carrée. Si A est inversible alors l'inverse A^{-1} est unique.*

Démonstration. Soient $B, C \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ tq $AB = I_n = BA$ et $AC = I_n = CA$. Alors,

$$C = CI_n = C(AB) = (AC)B = I_nB = B$$

Ainsi, $B = C$. cqfd

Proposition 5.5. *Soit $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ une matrice carrée. Alors,*

$$A \text{ est inversible} \iff KerA = \{\vec{0}\}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons A inversible, alors il existe $B \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ tq B soit l'inverse de A. Alors $\forall \vec{v} \in \mathbb{F}^n, \vec{v} = I_n\vec{v} = (BA)\vec{v} = B(A\vec{v})$ Par conséquent, si $A\vec{v} = \vec{0}$ alors $B(A\vec{v}) = \vec{0} = \vec{v}$. Ainsi $\vec{v} = \vec{0}$ et donc $KerA = \{\vec{0}\}$.

$\Longleftarrow$ Supposons $KerA = \{\vec{0}\}$. Observer que $KerA = \{\vec{0}\}$ si et seulement si $Ker\mathcal{T}_A = \{\vec{0}\}$. Par conséquent, $\mathcal{T}_A$ est injective car $Ker\mathcal{T}_A = \{\vec{0}\}$. De plus, $\mathcal{T}_A \in \mathscr{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n)$, ce qui implique, par la proposition pour les paresseux 4.11, que $\mathcal{T}_A$ est un isomorphisme et donc $\mathcal{T}_A$ est inversible.
Soit $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^n)$ l'inverse de $\mathcal{T}_A$. Soit $\mathcal{B}$ la base canonique de $\mathbb{F}^n$. Poser $B = [\mathcal{S}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$. Observer que $A = [\mathcal{T}_A]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}$. Alors,

$$AB = [\mathcal{T}_A]_{\mathcal{B},\mathcal{B}}[\mathcal{S}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [\mathcal{T}_A \circ \mathcal{S}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = I_n$$

De même que $BA = I_n$ cqfd

Relation entre l'inversibilité d'une applications linéaires et l'inversibilité de matrices

Proposition 5.6. *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V, W)$ où $dimV = n = dimW$. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de V et W respectivement. Alors,*

$$\mathcal{T} \text{ est inversible } \iff [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}} \text{ est inversible}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons que $\mathcal{T}$ soit inversible. Alors il existe $\mathcal{T}^{-1} \in \mathscr{L}(W, V)$. Nous avons que $\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{T} = \mathrm{Id}_V$ et $\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{-1} = \mathrm{Id}_W$. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de V et W respectivement. Alors,

$$I_n = [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [\mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{T}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}} = [\mathcal{T}^{-1}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

De même que

$$I_n = [\mathrm{Id}_W]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = [\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^{-1}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}[\mathcal{T}^{-1}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Par conséquent, $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ est inversible et son inverse est $\left([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\right)^{-1} = [\mathcal{T}^{-1}]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$

$\Longleftarrow$ Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de V et W respectivement. Supposons que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$ soit inversible, ainsi il existe $A \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$ tq $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}A = I_n = A[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$. Alors, $Real_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(A) \in \mathscr{L}(W, V)$.
Montrons que $Real_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(A)$ est l'inverse de $\mathcal{T}$.

$$[\mathcal{T} \circ Real_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(A)]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}[Real_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(A)]_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = I_n = [\mathrm{Id}_W]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$$

Puisque $[\cdot]_{\mathcal{B}',\mathcal{B}'}$ est un isomorphisme, donc injectif, nous avons $\mathcal{T} \circ Real_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(A) = \mathrm{Id}_W$. De même que $Real_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(A) \circ \mathcal{T} = \mathrm{Id}_V$. Par conséquent $\mathcal{T}$ est inversible. cqfd

Chapitre 6

Matrices et systèmes d'équations linéaires

6.1 Systèmes et leurs solutions

Définition 6.1. *Un système de m équations à n variables à coefficients dans $\mathbb{F}$ est une famille d'équations,*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

où $x_1, ..., x_n$ sont les variables et où $a_{ij}, b_i \in \mathbb{F}, \forall 1 \leqslant i \leqslant m, \forall 1 \leqslant j \leqslant n$ sont les coefficients.

Nous recherchons les *solutions* d'un tel système, i.e., des vecteurs $(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{F}^n$ tq $a_{i1}\alpha_1 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant m$. Plus généralement, nous voulons caractériser l'ensemble de toutes les solutions du système, i.e., nous voulons décrire précisément,

$$\{(\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{F}^n | a_{i1}\alpha_1 + ... + a_{in}\alpha_n = b_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant m\}$$

Cas particulier, le système est dit *homogène*, lorsque $b_i = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant m$.

Pour pouvoir appliquer les outils de l'algèbre linéaire à l'étude des solutions d'un système linéaire, il faut décrire les systèmes en terme de matrices. Etant donné le système linéaire suivant,

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

Nous définissons une matrice $A \in \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$ dont les coefficients sont précisés par $(A)_{ij} = a_{ij}$, les coefficients du système. De même, posons $\vec{x} = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{F}^n$, le *vecteurs des variables*, et $\vec{b} = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{F}^m$. Alors la donnée du système est équivalente à l'équation matricielle

$$A\vec{x} = \vec{b}.$$

L'ensemble des solutions du système est dès lors,

$$\{\vec{v} \in \mathbb{F}^n | A\vec{v} = \vec{b}\}$$

En général, cet ensemble *n'est pas* un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}^n$. Mais dans le cas d'un où le système est homogène, i.e., $\vec{b} = \vec{0} \in \mathbb{F}^m$, alors l'ensemble des solutions devient,

$$\{\vec{v} \in \mathbb{F}^n | A\vec{v} = \vec{0}\} = KerA$$

qui est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{F}^n$.

Définition 6.2. *Le* rang *d'un système linéaire est le rang de la matrice A associée au système, i.e., la dimension de l'image de A.*

Nous savons que $ImA = Im\mathcal{T}_A$ et que $KerA = Ker\mathcal{T}_A$. Observer que $dim(Im\mathcal{T}_A) = dim\mathbb{F}^n - dim(Ker\mathcal{T}_A) \leqslant n$. Ainsi, le rang de A est toujours au plus égal à n.

Systèmes carrés

Un système est dit carré quand le nombre d'équations est égal au nombre de variable, i.e., n équations et n variables. Par conséquent, la matrice associée à un système linéaire carré est une matrice carrée, i.e., $A \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$.

Proposition 6.1. *Soit un système linéaire carré donné, $A\vec{x} = \vec{b}$,*

$$\text{il existe une unique solution au système } \forall \vec{b} \iff A \text{ est inversible}$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons que $\forall \vec{b} \in \mathbb{F}^m, \exists! \vec{v} \in \mathbb{F}^n$ tq $A\vec{v} = \vec{b}$. En particulier, $\exists! \vec{v} \in \mathbb{F}^n$ tq $A\vec{v} = \vec{0}$. Or $A\vec{0} = \vec{0}$ donc

$$\{\vec{v} \in \mathbb{F}^n | A\vec{v} = \vec{0}\} = \{\vec{0}\}$$

I.e., $KerA = Ker\mathcal{T}_A = \{\vec{0}\}$ et donc $\mathcal{T}_A$ est inversible, ce qui implique que A l'est aussi.

$\Longleftarrow$ Supposons que A soit inversible. Ainsi, il existe $A^{-1} \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$ tq $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$. Poser $\vec{v} = A^{-1}\vec{b}$ alors,

$$A\vec{v} = A(A^{-1}\vec{b}) = (AA^{-1})\vec{b} = I_n\vec{b} = \vec{b}$$

Ainsi, $A^{-1}\vec{b}$ est une solution su système.
Pour établir l'unicité de la solution supposons que $A\vec{v} = \vec{b} = A\vec{v}'$. Alors,

$$\begin{aligned} \vec{v} &= I_n\vec{v} = (A^{-1}A)\vec{v} = A^{-1}(A\vec{v}) = A^{-1}\vec{b} \\ &= A^{-1}(A\vec{v}') = (AA^{-1})\vec{v}' = I_n\vec{v}' = \vec{v}' \end{aligned}$$

Ainsi, $\vec{v} = \vec{v}'$. Par conséquent, la solution $A^{-1}\vec{b}$ est unique. cqfd

Systèmes non carrés

Proposition 6.2. *Soit un système linéaire quelconque donné, $A\vec{x} = \vec{b}$. Alors il y a trois possibilités*

1. *il n'y a aucune solution au système,*
2. *il y a exactement une unique solution au système,*
3. *il y a une infinité de solutions.*

Démonstration. Il nous faut voir que s'il existe $\vec{v}, \vec{v}' \in \mathbb{F}^n, \vec{v} \neq \vec{v}'$ tq $A\vec{v} = \vec{b} = A\vec{v}'$ alors, il existe une infinité de vecteurs distincts qui sont solutions du système. En effet, $A\vec{v} = A\vec{v}' \Rightarrow A\vec{v} - A\vec{v}' = \vec{0}$, donc que $\mathcal{T}_A(\vec{v}) - \mathcal{T}_A(\vec{v}') = \mathcal{T}_A(\vec{v} - \vec{v}') = A(\vec{v} - \vec{v}') = \vec{0}$. Ainsi, $A\vec{v} = A\vec{v}' \Rightarrow \vec{v} - \vec{v}' \in KerA = Ker\mathcal{T}_A$. Par ailleurs, nous avons supposé $\vec{v} \neq \vec{v}'$ et donc $\vec{v} - \vec{v}' \neq \vec{0}$.
Soit $\alpha \in \mathbb{F}$ et considérons $\vec{v} + \alpha(\vec{v} - \vec{v}') \in \mathbb{F}^n$. Ainsi, nous allons voir que $\vec{v} + \alpha(\vec{v} - \vec{v}')$ est une solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$. En effet,

$$A\big(\vec{v} + \alpha(\vec{v} - \vec{v}')\big) = A\vec{v} + A\big(\alpha(\vec{v} - \vec{v}')\big) = \underbrace{A\vec{v}}_{=\vec{b}} + \alpha \underbrace{A(\vec{v} - \vec{v}')}_{=\vec{0}} = \vec{b} + \vec{0} = \vec{b}$$

Par conséquent, il existe une infinité de solution car $\#\mathbb{F} = \infty$ et si $\alpha, \beta \in \mathbb{F}, \alpha \neq \beta$ implique que $\alpha(\vec{v} - \vec{v}') \neq \beta(\vec{v} - \vec{v}')$ car $\vec{v} - \vec{v}' \neq \vec{0}$ et par conséquent, $\vec{v} + \alpha(\vec{v} - \vec{v}') \neq \vec{v} + \beta(\vec{v} - \vec{v}')$. cqfd

Remarque. Observer que si le système admet au moins deux solutions distincte alors le système en admet une infinité.

La preuve de la proposition nous donne un moyen de calculer l'ensemble des solutions d'un système linéaire. En effet, les solutions du système $A\vec{x} = \vec{b}$ seront de la forme, $\vec{v} + \vec{w}$, où $\vec{v}$ est une *solution particulière* du système, i.e., $A\vec{v} = \vec{b}$ et où $\vec{w} \in KerA$. Ainsi la différence entre deux solutions particulières du système sera un vecteur du noyau de A. L'ensemble des solutions au système est donc,

$$\{\vec{v} + \vec{w} | \vec{w} \in KerA\}$$

Et les solutions $\vec{v} + \vec{w}$ sont appelées les *solutions générales* du système.
Ainsi, pour calculer l'ensemble des solutions du système $A\vec{x} = \vec{b}$:
- trouver une solution particulière, s'il en existe au moins une, i.e., $\vec{v}$ tq $A\vec{v} = \vec{b}$,
- calculer $KerA$,
- l'ensemble des solutions générales du système est $\{\vec{v} + \vec{w} | \vec{w} \in KerA\}$.

Proposition 6.3. *Soit un système linéaire quelconque donné, $A\vec{x} = \vec{b}$ avec $A \in \mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$.*
- *Si $n > m$, i.e., nombre de variables $>$ nombre d'équations. Alors, si le système admet au moins une solution, il en admet une infinité.*
- *Si $m > n$, i.e., nombre d'équations $>$ nombre de variables. Alors il existe $\vec{b} \in \mathbb{F}^m$ tq le système $A\vec{x} = \vec{b}$ n'admet aucune solution.*

Démonstration. **1^er^ cas $n > m$:** Le développement sur l'ensemble des solutions d'un système ci-dessus, implique que, si $A\vec{x} = \vec{b}$ admet au moins une solution $\vec{v}$, alors il en admet une infinité si et seulement si $KerA \neq \{\vec{0}\}$. En effet, $KerA \neq \{\vec{0}\} \Leftrightarrow dim(KerA) \geqslant 0$ et par conséquent, $\#KerA = \infty$.
Il nous faut maintenant montrer que $n > m$ implique que le $KerA \neq \{\vec{0}\}$. Nous avons vu que $KerA = Ker\mathcal{T}_A$ avec $\mathcal{T}_A \in \mathscr{L}(\mathbb{F}^n, \mathbb{F}^m)$. Par le théorème du rang, nous avons que

$$dim(Ker\mathcal{T}_A) + dim(Im\mathcal{T}_A) = dim\mathbb{F}^n = n$$

Par ailleurs, $dim(Im\mathcal{T}_A) \leqslant dim\mathbb{F}^m = m$. Par conséquent,

$$dim(KerA) = dim(Ker\mathcal{T}_A) = n - dim(Im\mathcal{T}_A) \geqslant n - m > 0$$

Ainsi, $KerA \neq \{\vec{0}\}$ et donc il existe une infinité de solution.

2ème cas $m > n$: Observer que :

$$\begin{aligned}\left(A\vec{x}=\vec{b} \text{ admet une solution}\right) &\iff \left(\exists \vec{v}\in\mathbb{F}^n \text{ tq } A\vec{v}=\vec{b}\right)\\ &\iff \left(\exists \vec{v}\in\mathbb{F}^n \text{ tq } \mathcal{T}_A(\vec{v})=\vec{b}\right)\\ &\iff \left(\vec{b}\in Im\mathcal{T}_A\right)\end{aligned}$$

Or, le théorème du rang implique que,

$$dim(Im\mathcal{T}_A) = dim\mathbb{F}^n - dim(Ker\mathcal{T}_A) \leqslant n < m = dim\mathbb{F}^m$$

Ainsi, $Im\mathcal{T}_A \neq \mathbb{F}^m$. Par conséquent, $m > n$ implique que $\exists\vec{b}\in\mathbb{F}^m$ tq $\vec{b}\notin Im\mathcal{T}_A$ et donc que le système $A\vec{x}=\vec{b}$ n'admet pas de solution. cqfd

6.2 Matrices élémentaires

Définition 6.3. *Soit $A\in\mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$. Il y a trois* opérations élémentaires sur les lignes *de la matrice A,*

L'opération $I_{i,j}$ *permute $\vec{l}_i(A)$ et $\vec{l}_j(A)$. Ainsi la nouvelle matrice $A'\in\mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$ est précisée par,*

$$\vec{l}_k(A') = \begin{cases}\vec{l}_i(A) & si\ k=j,\\ \vec{l}_j(A) & si\ k=i,\\ \vec{l}_k(A) & sinon.\end{cases}$$

L'opération $II_{i,\lambda}$ *multiplie $\vec{l}_i(A)$ par $\lambda\in\mathbb{F}\setminus\{0\}$. Ainsi la nouvelle matrice $A''\in\mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$ est précisée par,*

$$\vec{l}_k(A'') = \begin{cases}\lambda\vec{l}_i(A) & si\ k=i,\\ \vec{l}_k(A) & sinon.\end{cases}$$

L'opération $III_{i,j,\lambda}$ *remplace $\vec{l}_i(A)$ par $\vec{l}_i(A)+\lambda\vec{l}_j(A)$. Ainsi la nouvelle matrice $A'''\in\mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$ est précisée par,*

$$\vec{l}_k(A''') = \begin{cases}\vec{l}_i(A)+\lambda\vec{l}_j(A) & si\ k=i,\\ \vec{l}_k(A) & sinon.\end{cases}$$

Définition 6.4. *Une* matrice élémentaire *est une matrice carrée $E\in\mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ obtenue à partir de l'identité I_n par une des opérations élémentaires sur les lignes, i.e., les opérations $I_{i,j}, II_{i,\lambda}, III_{i,j,\lambda}$.*

Exemple 6.1. Les matrices élémentaires 2×2 sont :

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{I_{1,2}}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{II_{1,\lambda}}\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{II_{2,\lambda}}\begin{pmatrix}1&0\\0&\lambda\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{III_{1,2,\lambda}}\begin{pmatrix}1&\lambda\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{III_{2,1,\lambda}}\begin{pmatrix}1&0\\\lambda&1\end{pmatrix}$$

Proposition 6.4. *Si E est une matrice élémentaire de taille $m\times m$ et si $A\in\mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$. Alors, EA est une matrice obtenue de A en appliquant à A la même opération sur les lignes que celle qui a donné lieu à E à partir de I_m.*

Démonstration. Nous allons traiter les trois types d'opérations séparément.

1er cas : $I_{i,j}$ Calculons EA :

$$(EA)_{rt} = \sum_{s=1}^{m}(E)_{rs}(A)_{st}, \forall 1\leqslant r\leqslant m, 1\leqslant t\leqslant n$$

– Considérons le cas $r\neq i$ et $r\neq j$: $r\neq i$ et $r\neq j$ implique que $\vec{l}_r(E)=\vec{l}_r(I_m)$ et donc que

$$(E)_{rs} = \begin{cases}1 & \text{si } r=s,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Ainsi, $(EA)_{rt} = 1\cdot(A)_{rt} = (A)_{rt}, \forall r\neq i, r\neq j$ et donc $\vec{l}_r(EA)=\vec{l}_r(A), \forall r\neq i, r\neq j, t$.

– Considérons le cas $r=i$: observer que $\vec{l}_i(E)=\vec{l}_j(I_m)$ et donc

$$(E)_{is} = (I_m)_{js} = \begin{cases}1 & \text{si } j=s,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Par conséquent,

$$(EA)_{it} = \sum_{s=1}^{m}(E)_{is}(A)_{st} = 1\cdot(A)_{jt}, \forall t$$

Donc, $\vec{l}_i(EA)=\vec{l}_j(A)$.

– De même pour le cas $r=j$: nous avons $\vec{l}_j(EA)=\vec{l}_i(A)$.

En conclusion, EA s'obtient bien de A en appliquant l'opération $I_{i,j}$.

2ème cas : $II_{i,\lambda}$ Soit E obtenu de I_m par une opération $II_{i,\lambda}$, i.e.,

$$(E)_{rs} = \begin{cases}(I_m)_{rs} & \text{si } r\neq i,\\ \lambda(I_m)_{is} & \text{si } r=i.\end{cases}$$

Explicitons, si $r\neq i$,

$$(E)_{rs} = \begin{cases}1 & \text{si } r=s,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Alors que si $r=i$,

$$(E)_{is} = \begin{cases}\lambda & \text{si } i=s,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

Par conséquent, si $r\neq i$,

$$(EA)_{rt} = \sum_{s=1}^{m}(E)_{rs}(A)_{st} = (A)_{rt}, \forall t$$

Ainsi, $\vec{l}_r(EA)=\vec{l}_r(A)$ si $r\neq i$. Alors que si $r=i$,

$$(EA)_{it} = \sum_{s=1}^{m}(E)_{is}(A)_{st} = \lambda\cdot(A)_{it}, \forall t$$

Ainsi, $\vec{l}_i(EA)=\lambda\vec{l}_i(A)$ si $r=i$.

En conclusion, EA s'obtient bien de A en appliquant l'opération $II_{i,\lambda}$.

$3^{\text{ème}}$ **cas :** $III_{i,j,\lambda}$ Soit E obtenu de I_m par une opération $III_{i,j,\lambda}$, i.e.,

$$(E)_{rs} = \begin{cases} (I_m)_{rs} & \text{si } r \neq i, \\ (I_m)_{is} + \lambda (I_m)_{js} & \text{si } r = i. \end{cases}$$

Explicitons, si $r \neq i$,

$$(E)_{rs} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors que si $r = i$,

$$(E)_{is} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = s, \\ \lambda & \text{si } j = s, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, si $r \neq i$,

$$(EA)_{rt} = \sum_{s=1}^{m} (E)_{rs} (A)_{st} = (A)_{rt}, \forall t$$

Ainsi, $\vec{l}_r(EA) = \vec{l}_r(A)$ si $r \neq i$. Alors que si $r = i$,

$$(EA)_{it} = \sum_{s=1}^{m} (E)_{is} (A)_{st} = 1 \cdot (A)_{it} + \lambda \cdot (A)_{jt}, \forall t$$

Ainsi, $\vec{l}_i(EA) = \vec{l}_i(A) + \lambda \vec{l}_j(A)$ si $r = i$.
En conclusion, EA s'obtient bien de A en appliquant l'opération $III_{i,j,\lambda}$.

cqfd

Corollaire 6.1. *Toute matrice élémentaire est inversible et son inverse est aussi élémentaire.*

Démonstration. Toute opération sur les lignes est inversible, car :

- l'inverse de l'opération de type $I_{i,j}$ est la même opération $I_{i,j}$. Ainsi, si E s'obtient de I_m par une opération $I_{i,j}$, alors $E^2 = I_m$, i.e., E est sa propre inverse.
- l'inverse de l'opération de type $II_{i,\lambda}$ est l'opération $II_{i,\lambda^{-1}}$. Ainsi, si E s'obtient de I_m par une opération $II_{i,\lambda}$ et E' par $II_{i,\lambda^{-1}}$, alors $EE' = I_m = E'E$, i.e., $E^{-1} = E'$.
- l'inverse de l'opération de type $III_{i,j,\lambda}$ est l'opération $II_{i,j,-\lambda}$. Ainsi, si E s'obtient de I_m par une opération $III_{i,j,\lambda}$ et E' par $III_{i,j,-\lambda}$, alors$EE' = I_m = E'E$, i.e., $E^{-1} = E'$.

cqfd

6.3 L'algorithme de Gauss-Jordan

Définition 6.5. *Considérer un système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$. La matrice augmentée est le matrice de taille $m \times (n+1)$ précisée par,*

$$[A|\vec{b}] = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Définition 6.6. *Soit la matrice augmentée $[A|\vec{b}]$. Elle est en* forme échelonnée *si les trois conditions suivantes sont satisfaites,*

1. *si $\vec{l}_i([A|\vec{b}]) \neq \vec{0}$, alors son premier coefficient non-nul depuis la gauche est un 1, que l'on appelle le* pivot *de la ligne $\vec{l}_i([A|\vec{b}])$,*
2. *si $\vec{l}_i([A|\vec{b}]) = \vec{0}$, alors $\vec{l}_j([A|\vec{b}]) = \vec{0}, \forall j > i$. Autrement dit, toutes les lignes de zéros se trouvent ensemble en bas de la matrice,*
3. *si $\vec{l}_i([A|\vec{b}]) \neq \vec{0}$ et $\vec{l}_{i+1}([A|\vec{b}]) \neq \vec{0}$, avec pivots $\left([A|\vec{b}]\right)_{ij} = 1$ et $\left([A|\vec{b}]\right)_{i+1,k} = 1$, alors $j < k$. Autrement dit, le pivot de la $i^{\text{ème}}$ ligne se trouve à gauche de celui de la $(i+1)^{\text{ème}}$ ligne,*

Elle est de plus dite de forme échelonnée réduite *si, de plus, la condition suivante est vérifiée,*

4. *si $\vec{c}_j([A|\vec{b}])$ contient un pivot $\left([A|\vec{b}]\right)_{ij} = 1$, alors $\left([A|\vec{b}]\right)_{kj} = 0, \forall k \neq i$. Autrement dit, un pivot est le seul coefficient non-nul dans sa colonne.*

Notation. Pour des raisons de commodité, nous noterons,

- la Forme Echelonnée de A, la *FE* de A,
- la Forme Echelonnée Réduite de A, la *FER* de A

Remarque. L'intérêt des matrices augmentées en forme échelonnée réside dans la facilité avec laquelle nous trouvons les solutions du système linéaire associé.

Exemple 6.2. 1. Une matrice en forme échelonnée et son système associé :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 & = 5 \\ x_3 + 2x_4 & = 3 \\ 0 & = 0 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont donc les vecteurs

$$(-4 - 2s + 2t, s, 3 - 2t, t), \ \forall s, t \in \mathbb{F}$$

2. Une matrice en forme échelonnée réduite et son système associé :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -7 \end{pmatrix}$$

et

$$\begin{cases} x_1 \quad + 2x_3 + & = 5 \\ x_2 - x_3 + & = 3 \\ x_4 & = -7 \end{cases}$$

Les solutions de ce système sont donc les vecteurs

$$(3 - 2s, -2 + s, s, -7), \ \forall s \in \mathbb{F}$$

L'algorithme

Soit $A \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$.

1. Soit $j_0 = \min\{j | \vec{c}_j(A) \neq \vec{0}\}$. Autrement dit, $\vec{c}_{j_0}(A)$ est la première colonne non-nulle de A depuis la gauche. S'il n'y a pas de colonne non-nulle, alors la matrice A est la matrice zéro, qui est en forme échelonnée réduite, et l'algorithme s'arrête.
2. Si $(A)_{1j_0} = 0$, appliquer à A l'opération I_{1,i_0}, où $(A)_{i_0,j_0} \neq 0$, pour obtenir une nouvelle matrice A' tq $(A')_{1j_0} \neq 0$. (Il existe forcement un tel i_0, puisque $\vec{c}_{j_0}(A) \neq \vec{0}$.)
3. Appliquer à A' l'opération $II_{1,\lambda}$, où $\lambda = (A')^{-1}_{1j_0}$, pour obtenir une nouvelle matrice A'' tq $(A'')_{1j_0} = 1$.
4. $\forall i > 1$, appliquer à A'' l'opération $III_{i,1,\lambda_i}$, où $\lambda_i = -(A'')_{ij_0}$, pour obtenir une nouvelle matrice A''' tq $(A''')_{ij_0} = 0, \forall i > 1$.
5. Soit B la matrice de taille $(m-1) \times (n-j_0)$ obtenue de A''' en enlevant les colonnes $\vec{c}_1(A'''), ..., \vec{c}_{j_0}(A''')$ et la ligne $\vec{l}_1(A''')$.
6. Appliquer les étapes 1. à 4. à la matrice B, puis l'étape 5. à la matrice B''' qui en résulte.

Après au plus m circuits à travers les étapes 1. à 5. de l'algorithme, celui-ci s'arrête, et la matrice $\tilde{A}$ obtenue à la fin est en forme échelonnée. Si nous voulons une forme échelonnée réduite, il faut appliquer les étapes ci-dessous.

7. Soit $j_1 = \max\{j | \vec{c}_j(\tilde{A})$ contient un pivot et au moins un autre coefficient non-nul$\}$. Si toutes les colonnes contenant un pivot n'ont aucun autre coefficient non-nul, l'algorithme s'arrête.
8. Soit $(\tilde{A})_{i_1j_1} = 1$ le pivot. $\forall i < i_1$, appliquer à $\tilde{A}$ l'opération III_{i,i_1,μ_i}, où $\mu_i = -(\tilde{A})_{ij_1}$, pour obtenir une nouvelle matrice $\tilde{A}'$ tq $(\tilde{A}')_{ij_1} = 0, \forall i \neq i_1$.
9. Appliquer les étapes 7. et 8. à la matrice $\tilde{A}'$.

Après au plus n circuits à travers les étapes 7. et 8. de l'algorithme, celui-ci s'arrête, et la matrice $\hat{A}$ obtenue à la fin est en forme échelonnée réduite.

Justification de l'algorithme

Corollaire 6.2. *Soit $A\vec{x} = \vec{b}$ un système linéaire avec $A \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$. Soit E une matrice élémentaire de taille $m \times m$. Alors l'ensemble des solutions de $A\vec{x} = \vec{b}$ est égal à l'ensemble des solutions du système $(EA)\vec{x} = E\vec{b}$.*
Par conséquent, l'algorithme de Gauss-Jordan ne change pas l'ensemble des solutions du système.

Démonstration. Soit $\vec{v} \in \mathbb{F}^m$. Alors, $\vec{v}$ est une solution du système $A\vec{x} = \vec{b} \Leftrightarrow A\vec{v} = \vec{b}$. Observer que $A\vec{v} = \vec{b} \Rightarrow E(A\vec{v}) = E\vec{b}$ et donc $(EA)\vec{v} = E\vec{b}$. Par conséquent, $\vec{v}$ est aussi une solution du système $(EA)\vec{x} = E\vec{b}$. D'autre part, si $\vec{v}$ est une solution du système $(EA)\vec{x} = E\vec{b}$ alors,
$$A\vec{v} = (E^{-1}E)A\vec{v} = E^{-1}(EA)\vec{v} = E^{-1}(E\vec{b}) = (E^{-1}E)\vec{b} = \vec{b}$$

cqfd

Soit le système linéaire $A\vec{x} = \vec{b}$. Alors, les étapes de l'algorithme de Gauss-Jordan sont de la forme suivante.
$$[A|\vec{b}] \rightsquigarrow E[A|\vec{b}] = [EA|E\vec{b}]$$
La matrice augmentée $[EA|E\vec{b}]$ correspond au système linéaire $(EA)\vec{x} = E\vec{b}$. Par le corollaire ci-dessus, l'ensemble des solutions du système reste inchangé.

Application à l'inversion des matrices carrées

Lemme 6.1. *Soit $A\vec{x} = \vec{b}$ un système linéaire ou $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$. La* FER *de $[A|\vec{b}]$ est de la forme $[I_n|\vec{b}']$ si et seulement si A est inversible.*
Par conséquent, si A n'est pas inversible, la FER *de A contiendra au moins une ligne de zéros en bas de la matrice.*

Démonstration. Nous allons compter le nombre de pivots possibles. Soit A une matrice $n \times n$, alors la *FER* de A et la *FER* de $[A|\vec{b}]$ ont chacune au plus n pivots. De plus la *FER* de $[A|\vec{b}]$ est toujours de la forme $[A'|\vec{b}']$ où A' est la *FER* de A.

– Si la *FER* de A a n pivots, alors sa *FER* est aussi une matrice $n \times n$ à un pivot dans chaque colonne. Puisque de *FER* de A est échelonnée (donc les pivots doivent aller vers la droite quand on descend d'une ligne) la seule possibilité est que la *FER* de A soit la matrice identité I_n.
– Si la *FER* de A a m pivots avec $m < n$, alors cette matrice a $n-m$ colonnes sans pivot, et donc $n-m$ lignes sans pivot. Ce sont donc forcement des lignes de 0 et qui se trouvent donc en bas de la matrice.
– Si A est inversible, alors $KerA = \{\vec{0}\}$. Ce qui veut dire que $A\vec{x} = \vec{0}$ admet une solution unique.
  Soit A' la *FER* de A. Puisque l'algorithme de Gauss-Jordan ne change pas les solutions du système linéaire. Nous avons,
  $$\big(A\vec{x} \text{ admet une unique solution}\big) \iff \big(A'\vec{x} \text{ admet une unique solution}\big)$$
  Supposons par l'absurde que A' ait au moins une ligne de 0 en bas de la matrice (et donc moins de n pivots), alors $\exists \vec{v} \in \mathbb{F}^n \smallsetminus \{\vec{0}\}$ tq $A'\vec{v} = \vec{0}$. En effet, A' a moins de n pivots donc $\exists 1 \leqslant j \leqslant n$ tq $\vec{c}_j(A') = \vec{0}$. Par conséquent, $A'\vec{e}_j = \vec{0}$ ce qui implique que $\vec{e}_j$ est une solution du système $A\vec{x} = \vec{b}$, ce qui est contradictoire avec l'unicité de la solution. Ainsi,
  $$\big(A'\vec{x} \text{ admet une unique solution}\big) \iff \big(A' = I_n\big)$$
  Résumons, soit $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ et soit A', la *FER* de A. Alors soit $A' = I_n$, soit A' contient au moins une ligne de 0. Ainsi,
  $$\begin{aligned}\big(A \text{ est inversible}\big) &\iff \big(A\vec{x} \text{ admet une unique solution}\big)\\ &\iff \big(A'\vec{x} \text{ admet une unique solution}\big)\\ &\iff \big(A' = I_n\big)\end{aligned}$$
  Par conséquent, A n'est pas inversible $\iff$ A' contient au moins une ligne de 0.

cqfd

Proposition 6.5. ***Critère d'inversibilité***
Soit $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$. Alors A est inversible si et seulement s'il existe $E_1, ..., E_k \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ des matrices élémentaires tq $A = E_k \cdots E_1$

Démonstration. $\Longleftarrow$ Observer que si $B, C \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ sont inversibles, alors BC est aussi inversible et son inverse est $C^{-1}B^{-1}$. En effet,

$$(BC)(C^{-1}B^{-1}) = B(CC^{-1})B^{-1} = BI_nB^{-1} = BB^{-1} = I_n$$

De même que $(C^{-1}B^{-1})(BC) = I_n$.
En particulier, tout produit de matrices élémentaires est inversible car toute matrice élémentaire est inversible.

$\Longrightarrow$ Le lemme 6.1 implique que si A est inversible alors la *FER* de A est I_n. Puisque chaque étape de l'algorithme de Gauss-Jordan est donnée par une multiplication de A par des matrice élémentaire, il existe des matrices élémentaires

$$\tilde{E}_1, ..., \tilde{E}_k \text{ tq } \tilde{E}_k \cdots \tilde{E}_1 \cdot A = I_n$$

Ce qui implique que $A = \tilde{E}_1^{-1} \cdots \tilde{E}_k^{-1}$, qui est un produit de matrices élémentaires car l'inverse d'une matrice élémentaire est élémentaire. Nous posons donc $E_1 = \tilde{E}_k^{-1}, ..., E_k = \tilde{E}_1^{-1}$. Et nous avons bien $A = E_k \cdots E_1$. cqfd

Algorithme d'inversion

Soit $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$. Considérons la matrice augmentée $[A|I_n] \in \mathscr{M}(n,2n,\mathbb{F})$. Appliquons l'algorithme de Gauss-Jordan $[A|I_n]$. Nous obtenons,

$$[A'|E_1 \cdots E_k] \text{ où } A' = FER \text{ de A} = (E_1 \cdots E_k)A$$

Ainsi, si A est inversible, $A' = I_n$. Donc $[A'|E_1 \cdots E_k] = [I_n|A^{-1}]$

Exemple 6.3. Appliquons cet algorithme au calcul de l'inverse d'une matrice 2×2. Soit $A \in \mathscr{M}(2,2,\mathbb{F})$.

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Observer que si $a = 0 = c$, alors A n'est pas inversible car $(1,0) \in KerA$. Ainsi, si A est inversible alors soit $a \neq 0$, soit $c \neq 0$

1. Cas $a \neq 0$:
   Formons $\begin{pmatrix} a & b & | & 1 & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et appliquons l'algorithme :

$$\begin{aligned}
II_{1,\frac{1}{a}} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & | & \frac{1}{a} & 0 \\ c & d & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
III_{2,1,-c} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & | & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & \frac{ad-bc}{a} & | & -\frac{c}{a} & 1 \end{pmatrix} \\
II_{2,\frac{a}{ad-bc}} \text{ si } ad-bc \neq 0 &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & \frac{b}{a} & | & \frac{1}{a} & 0 \\ 0 & 1 & | & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix} \\
III_{1,2,-\frac{b}{a}} &\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ 0 & 1 & | & \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-bc} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   Ainsi,

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

2. Cas $a = 0$ et $c \neq 0$: nous obtenons la même formule avec $a = 0$.

Remarque. Noter que pour qu'une matrice 2×2 soit inversible il faut que

$$ad - bc \neq 0$$

6.4 Déterminants : première approche

Note du professeur :

La logique de mon approche de l'algèbre linéaire, qui est celle du livre d'Axler, veut que l'on attende la fin du cours pour définir et étudier la notion de déterminant d'une matrice. Or certains de vos autres cours l'emploient déjà !
J'ai donc décidé de présenter la définition et les propriétés essentielles du déterminant.
Nous verrons une définition plus élégante, ainsi que les preuves des propriétés du déterminant, vers la fin du cours.

Groupes et permutations

Définition 6.7. *Une* permutation *d'un ensemble S est une bijection $\sigma = S \longrightarrow S$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'ensemble de toutes les permutations de l'ensemble $\{1,2,...,n\}$ est noté $\mathfrak{S}_n$.*

Définition 6.8. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Le nombre d'inversion de σ est*

$$NI(\sigma) \underset{def}{=} \#\{(i,j) \big| i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\}$$

Si $NI(\sigma)$ est un nombre pair (respectivement impair), alors la permutation σ est dite paire *(respectivement* impaire*).*

Exemple 6.4. Considérons $\sigma \in \mathfrak{S}_4$, donnée par $\sigma(1) = 4, \sigma(2) = 3, \sigma(3) = 2, \sigma(4) = 1$. Alors, $NI(\sigma) = \#\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\} = 6$, donc σ est une permutation paire.

Remarque. Il n'est pas difficile de vérifier que $\mathfrak{S}_n$ contient $n!$ permutation distinctes.

Définition 6.9. *Un groupe est un ensemble G muni d'une opération binaire*

$$mult : G \times G \longrightarrow G : (x,y) \longmapsto xy$$

et qui vérifie les axiomes suivants :

G_1 **associativité de la multiplication** $(xy)z = x(yz), \forall x,y,z \in G$.

G_2 **existence d'un élément neutre pour la multiplication** $\exists e \in G$ *tq* $xe = x, \forall x \in G$.

G_3 **existence d'inverse multiplicatif** $\forall x \in G, \exists y \in G$ *tq*

$$xy = e = yx$$

Exemple 6.5.
1. Soit $G = \mathbb{Z}$, définissons $mult : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z} : (m,n) \longmapsto m+n$
   L'élément neutre est 0.
2. Soit $G = \mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, définissons $mult : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* : (x,y) \longmapsto xy$
   L'élément neutre est 1 et l'inverse multiplicatif est la réciproque.
3. Soit $G = \{-1,+1\}$, définissons $mult : G \times G \longrightarrow G : (x,y) \longmapsto xy$
   L'élément neutre est $+1$ et l'inverse multiplicatif est la réciproque.

Remarque. L'opération $mult : \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}^* : (x,y) \longmapsto xy$ est dite multiplication usuelle.

Proposition 6.6. *Soit $\mathfrak{S}_n$. Alors $\mathfrak{S}_n$ est un groupe, où la "mult" de permutations est donnée par leur composition, i.e.,*
$mult : \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n : (\sigma, \sigma') \longmapsto \sigma \circ \sigma'$

Cette proposition a un sens car,

$$\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n \iff \begin{cases} \sigma & : \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., n\}, \text{ une bijection,} \\ \sigma' & : \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., n\}, \text{ une bijection.} \end{cases}$$

Ainsi, nous pouvons composer σ et σ', car le domaine de σ est égal au codomaine de σ'. De plus, si σ, σ' sont des bijections alors $\sigma \circ \sigma'$ aussi une bijection.

$$\begin{tikzcd} \{1, ..., n\} \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[rr, bend right, "\sigma\circ\sigma'"'] & \{1, ..., n\} \arrow[r, "\sigma"] & \{1, ..., n\} \end{tikzcd}$$

Ainsi, la composition donne bien une application :
$mult : \mathfrak{S}_n \times \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathfrak{S}_n : (\sigma, \sigma') \longmapsto \sigma \circ \sigma'$

Démonstration. Il faut montrer que les axiomes G_1, G_2, G_3 sont vrais.

G_1 $\forall \sigma, \sigma', \sigma'' \in \mathfrak{S}_n$,

$$(\sigma\sigma')\sigma'' = (\sigma \circ \sigma') \circ \sigma'' = \sigma \circ (\sigma' \circ \sigma'') = \sigma(\sigma'\sigma'')$$

G_2 $\mathrm{Id}_{\{1,...,n\}}$ est clairement un élément neutre pour cette "multiplication".

G_3 $\sigma \in \mathfrak{S}_n \Leftrightarrow \sigma : \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$, une bijection. Ainsi, σ est inversible, $\exists \sigma^{-1} : \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$. De plus, σ^{-1} est aussi une bijection. Par conséquent, $\sigma^{-1} \in \mathfrak{S}_n$ et

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma \circ \sigma^{-1} = \mathrm{Id}_{\{1,...,n\}} = \sigma^{-1} \circ \sigma = \sigma^{-1}\sigma$$

cqfd

Terminologie. $\mathfrak{S}_n$, muni de la *mult* donnée par la composition est le groupe symétrique sur n lettres.

Proposition 6.7. *Soit l'application $par : \mathfrak{S}_n \longrightarrow \{+1, -1\}$, l'*application parité, *définie par,*

$$par(\sigma) = (-1)^{NI(\sigma)} = \begin{cases} +1 & \text{si } \sigma \text{ est paire,} \\ -1 & \text{si } \sigma \text{ est impaire.} \end{cases}$$

Alors

$$par(\sigma\sigma') = par(\sigma) \cdot par(\sigma'), \forall \sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$$

par est un homomorphisme de groupe.

Démonstration. Exercice défi !

Corollaire 6.3. *Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Alors $par(\sigma) = par(\sigma^{-1})$, i.e,*

$$(-1)^{NI(\sigma)} = (-1)^{NI(\sigma^{-1})}$$

Démonstration. Observer que $NI(\mathrm{Id}_{\{1,...,n\}}) = 0$. Ainsi, $par(\mathrm{Id}_{\{1,...,n\}}) = +1$. Par conséquent,

$$+1 = par(\mathrm{Id}_{\{1,...,n\}}) = par(\sigma\sigma^{-1}) = par(\sigma) \cdot par(\sigma^{-1}) = \begin{cases} (+1) \cdot (+1) \\ (-1) \cdot (-1) \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \begin{cases} par(\sigma) = +1 \iff par(\sigma^{-1}) = +1 \\ par(\sigma) = -1 \iff par(\sigma^{-1}) = -1 \end{cases}$$

cqfd

Définitions

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ nous allons définir une application appelée déterminant, $\det : \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$, qui joue un rôle important dans la résolution de système linéaire et dans la recherche de valeurs propres.

Définition 6.10. *Soit $A \in \mathscr{M}(n, n, F)$. Le* déterminant *de A noté* $\det A$ *ou* $|A|$ *est le scalaire donné par,*

$$\det A \underset{def}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{NI(\sigma)} (A)_{1\sigma(1)} (A)_{2\sigma(2)} \cdots (A)_{n\sigma(n)}$$

Autrement dit, pour calculer le déterminant d'une matrice $n \times n$, A, nous dressons une liste de toutes les façons de choisir n coefficient de A tel que chaque couple de coefficients choisis se trouve dans des lignes et des colonnes distinctes. Ensuite nous calculons la somme de tous les produits de tels ensembles de n coefficients, munis de signes appropriés.

Exemple 6.6. 1. si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ alors $\det A = ad - bc$.

2. si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ alors

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Nous arrêterons là notre développement explicite de la formule du déterminant, car si $A \in \mathscr{M}(4, 4, \mathbb{F})$ son déterminant contient 24 sommants, et si $A \in \mathscr{M}(5, 5, \mathbb{F})$ son déterminant contient 120 sommants, etc...

Propriétés essentielles

Proposition 6.8. *Soit $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$. Alors,*

1. $\det A = \det A^t$
2. *si A est triangulaire alors* $\det A = (A)_{11}(A)_{22}\cdots(A)_{nn}$
3. *si A est diagonale alors* $\det A = (A)_{11}(A)_{22}\cdots(A)_{nn}$, *si* $A = I_n$ *alors* $\det I_n = 1$
4. *pour tout* $\alpha \in \mathbb{F}$, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$
5. *si A a une ligne ou une colonne où il n'y a que des zéros, alors* $\det A = 0$
6. *s'il existe* $1 \leqslant i < j \leqslant n$ *et* $\alpha \in F$ *tq soit* $\vec{l}_i(A) = \alpha\vec{l}_j(A)$, *soit* $\vec{c}_i(A) = \alpha\vec{c}_j(A)$, *alors* $\det A = 0$
7. *Si A' est obtenue de A en multipliant une des lignes ou une des colonnes par* $\alpha \in \mathbb{F}$, *alors* $\det A' = \alpha \cdot \det A$
8. *Si A' est obtenue de A en permutant deux lignes ou deux colonnes, alors* $\det A' = -\det A$
9. *Si A' est obtenue de A en remplaçant une ligne (respectivement, une colonne) par sa somme avec un multiple d'une autre ligne (respectivement, d'une autre colonne), alors* $\det A' = \det A$

Remarque. A ce moment du cours, nous n'allons pas démonter toutes ces propriétés.

Démonstration. 3. Soit $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$, une matrice diagonale. Alors,

$$\det A = \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n} (-1)^{NI(\sigma)}(A)_{1\sigma(1)}(A)_{2\sigma(2)}\cdots(A)_{n\sigma(n)}$$

Observer que le fait que A soit diagonale implique $(A)_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Ainsi, $\forall\sigma \in \mathfrak{S}_n$, $(A)_{i\sigma(i)} = 0$ si $\sigma(i) \neq i$. Par conséquent, $(A)_{1\sigma(1)}(A)_{2\sigma(2)}\cdots(A)_{n\sigma(n)} = 0$, s'il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tq $\sigma(i) \neq i$. Autrement dit,

$$(A)_{1\sigma(1)}(A)_{2\sigma(2)}\cdots(A)_{n\sigma(n)} \neq 0 \iff \sigma(i) = i, \forall i$$

Or $\sigma(i) = i, \forall i \Leftrightarrow \sigma = \mathrm{Id}_{\{1,\dots,n\}}$. Par conséquent le seul sommant non nul possible dans la formule de $\det A$ est le sommant correspondant à $\sigma = \mathrm{Id}_{\{1,\dots,n\}} \in \mathfrak{S}_n$. Ainsi,

$$\det A = (-1)^{NI(\mathrm{Id})}(A)_{1\mathrm{Id}(1)}\cdots(A)_{n\mathrm{Id}(n)} = (A)_{11}\cdots(A)_{nn}$$

Si $A = I_n$ alors, $(A)_{ii} = 1, \forall i$. Par conséquent, $\det I_n = 1^n = 1$.

4. Soient $\alpha \in \mathbb{F}$ et $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$. Nous savons que $(\alpha A)_{ij} = \alpha(A)_{ij}, \forall i,j$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\det(\alpha A) &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{NI(\sigma)}\underbrace{(\alpha A)_{1\sigma(1)}}_{\alpha(A)_{1\sigma(1)}}\cdots\underbrace{(\alpha A)_{n\sigma(n)}}_{\alpha(A)_{n\sigma(n)}}\\ &= \alpha^n\left(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{NI(\sigma)}(A)_{1\sigma(1)}\cdots(A)_{n\sigma(n)}\right)\\ &= \alpha^n\cdot\det A\end{aligned}$$

6. Soient $\alpha \in \mathbb{F}$ et $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ tq $\vec{l}_i(A) = \alpha\vec{l}_j(A)$.
cas $n = 2$: $A \in \mathscr{M}(2,2,\mathbb{F})$ tq $\vec{l}_1(A) = \alpha\vec{l}_2(A)$:

$$A = \begin{pmatrix}\alpha c & \alpha d\\ c & d\end{pmatrix} \Longrightarrow \det A = \alpha cd - \alpha cd = 0$$

cas n qcq : Observer que $\vec{l}_i(A) = \alpha\vec{l}_j(A)$ implique que $(A)_{ik} = \alpha(A)_{jk}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\det A &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{NI(\sigma)}(A)_{1\sigma(1)}\cdots\underbrace{(A)_{i\sigma(i)}}_{\alpha(A)_{j\sigma(i)}}\cdots(A)_{j\sigma(j)}\cdots(A)_{n\sigma(n)}\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{NI(\sigma)}(A)_{1\sigma(1)}\cdots\alpha(A)_{j\sigma(i)}\cdots(A)_{j\sigma(j)}\cdots(A)_{n\sigma(n)}\end{aligned}$$

Ainsi, les sommants de cette somme (tenant compte du signe) vont s'annuler deux à deux. Observer que $\#\mathfrak{S}_n = n!$, qui est divisible par 2 et donc pair si $n \geqslant 2$.
Soit $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Posons

$$\tau : \{1,...,n\} \longrightarrow \{1,...,n\} : k \longmapsto \begin{cases}\sigma(j) & \text{si } k = \sigma(i),\\ \sigma(i) & \text{si } k = \sigma(j),\\ k & \text{sinon.}\end{cases}$$

Nous vérifions facilement que $\tau \in \mathfrak{S}_n$. Par conséquent $\tau\circ\sigma \in \mathfrak{S}_n$. Par ailleurs $NI(\tau)$ est impair, donc $par(\tau) = -1$ ce que implique que $par(\tau\circ\sigma) = par(\tau)par(\sigma) = -par(\sigma)$. Alors, le sommant correspondant à la permutation $\tau\circ\sigma$ est :

$$\begin{aligned}&\alpha(-1)^{NI(\tau\circ\sigma)}\underbrace{(A)_{1,(\tau\circ\sigma)(1)}}_{(A)_{1\sigma(1)}}\cdots\underbrace{(A)_{j,(\tau\circ\sigma)(i)}}_{(A)_{j\sigma(j)}}\cdots\underbrace{(A)_{j,(\tau\circ\sigma)(j)}}_{(A)_{j\sigma(i)}}\cdots\underbrace{(A)_{n,(\tau\circ\sigma)(n)}}_{(A)_{n\sigma(n)}}\\ &= -\alpha(-1)^{NI(\sigma)}(A)_{1\sigma(1)}\cdots(A)_{j\sigma(j)}\cdots(A)_{j\sigma(i)}\cdots(A)_{n\sigma(n)}\\ &= -(-1)^{NI(\sigma)}(A)_{1\sigma(1)}\cdots\underbrace{\alpha(A)_{j\sigma(i)}}_{(A)_{i\sigma(i)}}\cdots(A)_{j\sigma(j)}\cdots(A)_{n\sigma(n)}\end{aligned}$$

Observer que ce terme est l'opposé du sommant correspondant à la permutation σ. Si nous posons

$$S(\sigma) = (-1)^{NI(\sigma)}(A)_{1\sigma(1)}\cdots(A)_{i\sigma(i)}\cdots(A)_{j\sigma(j)}\cdots(A)_{n\sigma(n)}$$

Nous avons donc $S(\sigma) = -S(\tau\circ\sigma)$. Observer l'ensemble $\Delta = \{\tau\circ\sigma | \sigma \in \mathfrak{S}_n\}$. Montrons que $\Delta = \mathfrak{S}_n$:

$$\sigma \in \mathfrak{S}_n \Rightarrow \tau^{-1}\sigma \in \mathfrak{S}_n \Rightarrow \tau\tau^{-1}\sigma \in \Delta \Rightarrow \sigma \in \Delta$$

Ainsi, $\tau\sigma \in \Delta \Rightarrow \sigma \in \mathfrak{S}_n \Rightarrow \tau\sigma \in \mathfrak{S}_n$.
Alors

$$\begin{aligned}2\det A &= 2\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}S(\sigma_n)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}S(\sigma) + \sum_{\sigma\in\Delta}S(\sigma)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}S(\sigma) + \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}S(\tau\circ\sigma)\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_n}\underbrace{(S(\sigma)+S(\tau\circ\sigma))}_{=0} = 0\end{aligned}$$

Nous avons donc bien que $\det A = 0$.

Remarque. Observer que si $n > 1$, alors l'application $\det : \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ n'est pas linéaire. En effet, $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A \neq \alpha \det A, \forall\alpha \in \mathbb{F} \smallsetminus \{1\}$.

Théorème 6.1. *Soit $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$. Alors A est inversible si et seulement si* $\det A \neq 0$.

Remarque. A ce moment du cours, ce théorème est admis sans démonstration.

Théorème 6.2. *Soient* $A,\ B \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$. *Alors*

$$\det(AB) = \det A \cdot \det B$$

Remarque. A ce moment du cours, ce théorème est admis sans démonstration.

Corollaire 6.4. *Si* $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ *est inversible, alors*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Démonstration. En supposant vrai le théorème 6.2, nous avons :

$$1 = \det I_n = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1})$$

Par conséquent, $\det A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}$. cqfd

Chapitre 7

Produits scalaires

7.1 Introduction

Idée : Munir un espace vectoriel d'une structure qui nous permet de faire de la "géométrie" dans cet espace vectoriel. En d'autres termes, nous voulons pouvoir parler de notions telles que :

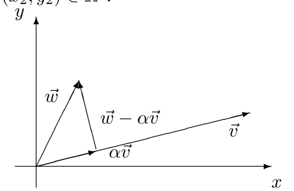
distance, longueur et *angle entre deux vecteurs*

Motivation : La géométrie euclidienne dans $\mathbb{R}^2$. Nous avons besoin d'une notion de base : la distance entre deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2) du plan.

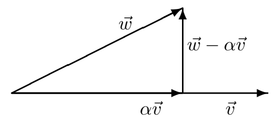
$$\mathrm{d}\Big((x_1,y_1),(x_2,y_2)\Big) = \sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}$$

Un peu de géométrie dans $\mathbb{R}^2$

Posons $\vec{v} = (x_1, y_1), \vec{w} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$.



Déterminons le scalaire α. Appliquons le théorème de Pythagore au triangle rectangle,



Notation. nous noterons $||\vec{v}||$ la longueur ou la norme du vecteur $\vec{v}$. Si $\vec{v} = (x_1, y_1)$ alors $||\vec{v}|| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$.

Alors, en terme de cette notation, le théorème de Pythagore devient,

$$||w||^2 = ||\alpha v||^2 + ||w - \alpha v||^2$$

Or, en terme de composantes, nous avons,

$$\begin{aligned}
||w||^2 &= x_2^2 + y_2^2,\\
||\alpha v||^2 &= \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 y_1^2,\\
||w - \alpha v||^2 &= x_2^2 + y_2^2 - 2\alpha x_1 x_2 - 2\alpha y_1 y_2 + \alpha^2 x_1^2 + \alpha^2 y_1^2
\end{aligned}$$

Donc, le théorème de Pythagore peut s'exprimer,

$$\begin{aligned} x_2^2+y_2^2 &= \alpha^2x_1^2+\alpha^2y_1^2+x_2^2+y_2^2-2\alpha x_1x_2-2\alpha y_1y_2+\alpha^2x_1^2+\alpha^2y_1^2 \\ 0 &= 2\alpha^2x_1^2+2\alpha^2y_1^2+x_2^2+y_2^2-2\alpha x_1x_2-2\alpha y_1y_2 \\ &= 2\alpha\big(\alpha x_1^2+\alpha y_1^2-(x_1x_2+y_1y_2)\big) \end{aligned}$$

Si $\alpha \neq 0$, nous avons que $0=\alpha(x_1^2+y_1^2)-(x_1x_2+y_1y_2)$. Nous supposons, de plus, que $v\neq 0$, pour que $||v||^2=x_1^2+y_1^2>0$. Ainsi,

$$\alpha=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_1^2+x_1^2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{||v||^2}$$

Déterminons θ :

$$\cos\theta=\frac{||\alpha v||}{||w||}=\frac{\frac{x_1x_2+y_1y_2}{||v||^2}||v||}{||w||}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{||v||\cdot||w||}$$

Par conséquent, $\cos\theta=0 \Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$. Ainsi, $\theta=\frac{\pi}{2}\Leftrightarrow x_1x_2+y_1y_2=0$. Le terme $x_1x_2+y_1y_2$ joue un rôle important en décrivant la géométrie de la structure. Nous posons,

$$\langle v,w\rangle = x_1x_2+y_1y_2$$

Où $v=(x_1,x_2)$ et $w=(y_1,y_2)$. Nous appelons ce terme le *produit scalaire euclidien* de v et w. Alors,

$$\alpha=\frac{\langle v,w\rangle}{||v||^2} \text{ et } \cos\theta=\frac{\langle v,w\rangle}{||v||\cdot||w||}$$

Remarque. Observer que cette définition du produit scalaire euclidien implique que $||v||=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

Résumons, nous avons introduit la notion de distance entre deux points de $\mathbb{R}^2$, ce qui nous a conduit à la notion de longueur, de norme et d'angle. Ces notions nous ont permis d'introduire la notion de produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Dans ce chapitre, nous allons inverser ce processus et définir d'abord la notion de produits scalaires dans un espace vectoriel abstrait et en déduire des notions de longueur, distance et orthogonalité.
Les produits scalaires abstraits vérifient des axiomes calqués sur les propriétés du produit scalaire euclidien dans $\mathbb{R}^2$. Comme par exemple,
- $\langle v,w\rangle=\langle w,v\rangle$
- $\langle\alpha v,w\rangle=\alpha\langle v,w\rangle$
- $\langle u+v,w\rangle=\langle u,w\rangle+\langle v,w\rangle$
- $v\neq 0\Rightarrow 0\neq ||v||=\sqrt{\langle v,v\rangle}$

7.2 Définitions et exemples

Suivant l'approche du livre d'Axler, notre définition de la notion de produit scalaire réunit les cas réel et complexe en un seul cas. Dans un document disponible sur la page web du cours, nous comparons cette approche à celle qui distingue les deux cas. Il est évident que les deux approches mènent à des définitions équivalentes. La différence entre les deux approches réside dans la façon de structurer les données et dans la terminologie utilisée.

Rappel. La conjugaison complexe peut-être vue comme une application

$$\mathfrak{J}:\mathbb{C}\longrightarrow\mathbb{C}:z\longmapsto\bar z$$

Avec $z=a+b\imath$ et $\bar z=a-b\imath$, où $a,b\in\mathbb{R}$. Observer que $\mathfrak{J}\Big|_{\mathbb{R}}=\mathrm{Id}_{\mathbb{R}}$. En effet, $\bar a=\overline{a+0\imath}=a-0\imath=a$.

Définition 7.1. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Une* forme *sur V est un application*

$$\varphi: V\times V\longrightarrow\mathbb{F}$$

1. *Soient $v,w\in V$. La forme φ est* symétrique *si*
$$\varphi(v,w)=\overline{\varphi(w,v)},\forall v,w\in V$$
2. *Soient $v_1,v_2,w_1,w_2\in V$ et soient $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{F}$. La forme φ est* bilinéaire *si*
$$\varphi(\alpha_1v_1+\alpha_2v_2,\beta_1w_1+\beta_2w_2)=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\alpha_i\bar\beta_j\varphi(v_i,w_j)$$
3. *Soit $v\in V$. La forme φ est* définie positive *si*
$$v\neq 0\Longrightarrow\varphi(v,v)>0 \text{ et } \varphi(v,v)=0\iff v=0$$

Un produit scalaire est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

Remarque. Soient $v,w\in V$. Alors, $\varphi(v,v)>0\Rightarrow\varphi(v,v)\in\mathbb{R}$ et $\varphi(v,w)\in\mathbb{F}$ en général.

Notation. Nous noterons le produit scalaire sur V : $\langle -,-\rangle$.

Exemple 7.1. 1. **Produit scalaire sur $\mathbb{F}^n$**
Soit $V=\mathbb{F}^n$. Soient $\mu_1,...,\mu_n\in\mathbb{F}$. Définissons une forme $\varphi:\mathbb{F}^n\times\mathbb{F}^n\longrightarrow\mathbb{F}$ par :

$$\varphi(v,w)=\sum_{i=1}^{n}\mu_iv_i\bar w_i \text{ où } v=\begin{pmatrix}v_1\\ \vdots\\ v_n\end{pmatrix}, w=\begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}\in\mathbb{F}^n$$

Sous quelles conditions sur $\mu_1,...,\mu_n$ la forme φ est-elle un produit scalaire ?

(a) symétrie : $\varphi(w,v)=\sum_{i=1}^{n}\mu_iw_i\bar v_i$ et $\overline{\varphi(w,v)}=\sum_{i=1}^{n}\bar\mu_i\bar w_iv_i=\sum_{i=1}^{n}\bar\mu_iv_i\bar w_i$.
Ainsi, la symétrie est vérifiée si et seulement si,
$$\sum_{i=1}^{n}\mu_iv_i\bar w_i=\sum_{i=1}^{n}\bar\mu_iv_i\bar w_i,\forall v,w\in\mathbb{F}^n$$
En particulier, si $v=w=e_k$, nous obtenons que $\mu_k=\bar\mu_k$. Or $\mu_k=\bar\mu_k\Leftrightarrow\mu_k\in\mathbb{R}$.
Ainsi, la symétrie de φ implique que $\mu_k\in\mathbb{R},\forall k$.
Inversement, si $\mu_k\in\mathbb{R},\forall k$, alors,
$$\varphi(v,w)=\sum_{i=1}^{n}\mu_iv_i\bar w_i=\sum_{i=1}^{n}\bar\mu_iv_i\bar w_i=\overline{\sum_{i=1}^{n}\mu_iw_i\bar v_i}=\overline{\varphi(w,v)},\forall v,w\in\mathbb{F}^n$$
Par conséquent, φ est symétrique si et seulement si $\mu_k\in\mathbb{R},\forall k$.

(b) bilinéaire : soient $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2\in\mathbb{F}$, soient $v_1,v_2,w_1,w_2\in\mathbb{F}^n$.
$$v_1=\begin{pmatrix}v_{11}\\ \vdots\\ v_{1n}\end{pmatrix},\ v_2=\begin{pmatrix}v_{21}\\ \vdots\\ v_{2n}\end{pmatrix},\ w_1=\begin{pmatrix}w_{11}\\ \vdots\\ w_{1n}\end{pmatrix},\ w_2=\begin{pmatrix}w_{21}\\ \vdots\\ w_{2n}\end{pmatrix}.$$

Alors,

$$\begin{aligned}
&\varphi(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2, \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2)\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\alpha_1 v_{1i} + \alpha_2 v_{2i})\overline{(\beta_1 w_{1i} + \beta_2 w_{2i})}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i (\alpha_1 v_{1i} + \alpha_2 v_{2i})(\bar{\beta}_1 \bar{w_{1i}} + \bar{\beta}_2 \bar{w_{2i}})\\
&= \sum_{i=1}^{n} \mu_i \Big[(\alpha_1 \bar{\beta}_1 v_{1i} \bar{w_{1i}}) + (\alpha_1 \bar{\beta}_2 v_{1i} \bar{w_{2i}}) + (\alpha_2 \bar{\beta}_1 v_{2i} \bar{w_{1i}}) + (\alpha_2 \bar{\beta}_2 v_{2i} \bar{w_{2i}})\Big]\\
&= \alpha_1 \bar{\beta}_1 \varphi(v_1, w_1) + \alpha_1 \bar{\beta}_2 \varphi(v_1, w_2) + \alpha_2 \bar{\beta}_1 \varphi(v_2, w_1) + \alpha_2 \bar{\beta}_2 \varphi(v_2, w_2)
\end{aligned}$$

Nous avons bien la bilinéarité de φ.

(c) définie positive : pour que φ soit symétrique, nous supposons au moins que $\mu_k \in \mathbb{R}, \forall k$. Soit $v \in \mathbb{F}^n$,

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

Alors, $\varphi(v, v) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i v_i \bar{v}_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \underbrace{|v_i|^2}_{\geqslant 0}$. Ainsi,

$$\varphi(v, v) \geqslant 0, \forall v \in V \iff \sum_{i=1}^{n} \mu_i |v_i|^2 \geqslant 0, \forall v \in V$$

En particulier, si $v = e_k$, nous obtenons que $\mu_k \geqslant 0, \forall k$.
Par ailleurs, il faut que $\varphi(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$. Or,

$$0 = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\mu_i}_{\geqslant 0} \underbrace{|v_i|^2}_{\geqslant 0} \iff \mu_k |v_k|^2 = 0, \forall k$$

Donc il ne faut pas qu'il existe k tel que $\mu_k = 0$, car si $\mu_k = 0$ alors, $\varphi(e_k, e_k) = \mu_k = 0$, ce qui est contradictoire avec $\varphi(v, v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$.
Ainsi, φ est définie positive si et seulement si $\mu_i > 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

Ainsi, si $\mu_1, ..., \mu_n \in \mathbb{R}_*^+$, nous appelons la forme φ définie dans cet exemple le produit scalaire euclidien généralisé à poids $\mu_1, ..., \mu_n$.

2. **Produit scalaire sur $\mathscr{P}(\mathbb{F})$**

Soit $V = \mathscr{P}(\mathbb{F})$. Si $p(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$, $p(x) = \sum_{k=O}^{n} a_k x^k$. Alors, $\bar{p}(x) = \sum_{k=O}^{n} \bar{a}_k x^k$. Définissons $\varphi : \mathscr{P}(\mathbb{F}) \times \mathscr{P}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathbb{F}$ par :

$$\varphi\big(p(x), q(x)\big) = \int_0^1 p(x)\bar{q}(x)dx \in \mathbb{F}$$

Montrons que φ définit bien un produit scalaire sur $\mathscr{P}(\mathbb{F})$:

(a) symétrie : soient $p(x), q(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$. Alors,

$$\begin{aligned}
\varphi(p, q) &= \int_0^1 p(x)\bar{q}(x)dx = \int_0^1 \overline{q(x)\bar{p}(x)}dx = \overline{\int_0^1 q(x)\bar{p}(x)dx}\\
&= \overline{\varphi(q, p)}
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est bien symétrique.

(b) bilinéaire : soient $p_1(x), p_2(x), q_1(x), q_2(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$ et soient $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{F}$. Alors,

$$\begin{aligned}
&\varphi(\alpha_1 p_1 + \alpha_2 p_2, \beta_1 q_1 + \beta_2 q_2)\\
&= \int_0^1 \Big[\big(\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)\big)\overline{\big(\beta_1 q_1(x) + \beta_2 q_2(x)\big)}\Big]dx\\
&= \int_0^1 \Big[\big(\alpha_1 p_1(x) + \alpha_2 p_2(x)\big)\big(\bar{\beta}_1 \bar{q}_1(x) + \bar{\beta}_2 \bar{q}_2(x)\big)\Big]dx\\
&= \int_0^1 \Big[\alpha_1 \bar{\beta}_1 p_1(x)\bar{q}_1(x) + \alpha_1 \bar{\beta}_2 p_1(x)\bar{q}_2(x) + \alpha_2 \bar{\beta}_1 p_2(x)\bar{q}_1(x)\\
&\qquad + \alpha_2 \bar{\beta}_2 p_2(x)\bar{q}_2(x)\Big]dx\\
&= \int_0^1 \Big[\alpha_1 \bar{\beta}_1 p_1(x)\bar{q}_1(x)\Big]dx + \int_0^1 \Big[\alpha_1 \bar{\beta}_2 p_1(x)\bar{q}_2(x)\Big]dx\\
&\qquad \int_0^1 \Big[\alpha_2 \bar{\beta}_1 p_2(x)\bar{q}_1(x)\Big]dx + \int_0^1 \Big[\alpha_2 \bar{\beta}_2 p_2(x)\bar{q}_2(x)\Big]dx\\
&= \alpha_1 \bar{\beta}_1 \varphi(p_1, q_1) + \alpha_1 \bar{\beta}_2 \varphi(p_1, q_2) + \alpha_2 \bar{\beta}_1 \varphi(p_2, q_1) + \alpha_2 \bar{\beta}_2 \varphi(p_2, q_2)
\end{aligned}$$

Ainsi, φ est bien bilinéaire.

(c) définie positive : soit $p(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$

$$\varphi(p, p) = \int_0^1 p(x)\bar{p}(x)dx = \int_0^1 |p(x)|^2 dx$$

Or, $|p(x)|^2 \geqslant 0, \forall x \in [0, 1]$. Par ailleurs, si $deg(p) = n$, alors il existe au plus n racines de $p(x)$. Ce qui implique que si $p(x)$ n'est pas le polynôme 0, il existe au plus un nombre fini de points dans l'intervalle $[0, 1]$ tels que $|p(x)|^2 = 0$, partout ailleurs, $|p(x)|^2 > 0$. Par conséquent, si $p(x)$ n'est pas le polynôme 0, alors,

$$\int_0^1 |p(x)|^2 dx > 0.$$

Ainsi, φ est bien définie positive.

Par conséquent, φ est bien un produit scalaire sur $\mathscr{P}(\mathbb{F})$.

3. **Produit scalaire sur $\mathscr{M}(m, n, \mathbb{F})$**

Rappelons que la trace d'une matrice $A \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{R})$ est définie par

$$\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii} \in \mathbb{R}$$

La *forme trace* sur $\mathscr{M}(m, n, \mathbb{R})$ est $\varphi_{\mathrm{Tr}} : \mathscr{M}(m, n, \mathbb{R}) \times \mathscr{M}(m, n, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\varphi_{\mathrm{Tr}}(A, B) = \mathrm{Tr}(A^t B), \forall A, B \in \mathscr{M}(m, n, \mathbb{R})$$

Observer que $A^t B \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$, donc la trace de cette matrice est bien définie. Montrons que φ_{Tr} définit bien un produit scalaire sur $\mathscr{M}(m, n, \mathbb{R})$:

(a) symétrie : Calculons,

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathrm{Tr}}(A, B) &= \sum_{i=1}^{n} (A^t B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (A^t)_{ij} (B)_{ji} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (A)_{ji} (B)_{ji}\\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} (A)_{ji} (B^t)_{ij} = \varphi_{\mathrm{Tr}}(B, A) = \overline{\varphi_{\mathrm{Tr}}(B, A)}
\end{aligned}$$

La forme trace est bien symétrique.

(b) bilinéaire : la bilinéarité est une conséquence du fait que, $\forall \alpha, \alpha' \in \mathbb{R}$, et $\forall A, A' \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{R})$,

$$(\alpha A + \alpha' A')_{kk} = \alpha(A)_{kk} + \alpha'(A')_{kk}$$

Nous laissons le soin au lecteur de rédiger cette preuve.

(c) définie positive : nous avons,

$$\varphi_{\mathrm{Tr}}(A,A) = \mathrm{Tr}(A^t A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(A)_{ji}^2 \geqslant 0.$$

Et,

$$\left(\varphi_{\mathrm{Tr}}(A,A) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}(A)_{ji}^2 = 0\right) \iff \left((A)_{ji}^2 = 0, \forall ij\right) \iff \left(A = \mathbb{O}_{m\times n}\right).$$

Ainsi, la forme trace est bien définie positive.

Par conséquent, la forme trace φ_{Tr} est bien un produit scalaire sur $\mathscr{M}(m,n,\mathbb{R})$.

4. **Produit scalaire sur l'espace de fonction continues et bornées** $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$
Soit V l'espace vectoriel des fonctions continues et **bornées** $f : [0,\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$.
Définissons $\varphi : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$ par :

$$\varphi(f,g) \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-t}dt$$

Nous avons montré en exercice que φ définit en effet un produit scalaire sur V.

Notation. Nous noterons parfois $\left(V, \langle -,-\rangle\right)$, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire abstrait $\langle -,-\rangle$.

Exemple 7.2. Deux exemples dans $\mathbb{R}^2$: soient $v = (v_1,v_2), w = (w_1,w_2) \in \mathbb{R}^2$

1. $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$. Ainsi, $\langle v,w\rangle_{\mu_1,\mu_2} = v_1w_2 + 2\cdot v_2w_2$.
2. $\mu_1 = 10^{17}, \mu_2 = 10^{-17}$. Ainsi, $\langle v,w\rangle_{\mu_1,\mu_2} = 10^{17}\cdot v_1w_2 + 10^{-17}\cdot v_2w_2$.

Notions géométrique dans V

Définition 7.2. *Soit* $\left(V,\langle -,-\rangle\right)$*, un* $\mathbb{F}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire abstrait* $\langle -,-\rangle$*. La* norme *associée au produit scalaire* $\langle -,-\rangle$ *sur* V *est*

$$||v|| = \sqrt{\langle v,v\rangle}$$

Observer que le fait que le produit scalaire soit défini positif implique que $||v|| = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Exemple 7.3. 1. $V = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Soit $v = (1,1) \in \mathbb{R}^2$. Calculons la norme de V associée aux produits scalaires euclidiens généralisés aux poids suivants,

(a) $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$. Ainsi,

$$\|v\|^2 = \langle v,v\rangle_{\mu_1,\mu_2} = v_1^2 + 2\cdot v_2^2 = 1+2 = 3$$

Donc, $\|v\| = \sqrt{3}$.

(b) $\mu_1 = 10^{17}, \mu_2 = 10^{-17}$. Ainsi,

$$\|v\|^2 = \langle v,v\rangle_{\mu_1,\mu_2} = 10^{17}\cdot v_1^2 + 10^{-17}\cdot v_2^2 = 10^{17} + 10^{-17}$$

Donc, $\|v\| = \sqrt{10^{17}+10^{-17}}$.

2. $V = \mathscr{M}(m,n,\mathbb{R})$

La norme, $\|A\|_{\mathrm{Tr}} = \left(\varphi_{\mathrm{Tr}}(A,A)\right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A)_{ji}^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Soit $A, B \in \mathscr{M}(2,2)$,

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\|A\|_{\mathrm{Tr}} = \left(\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(A)_{ji}^2\right)^{\frac{1}{2}} = 5\sqrt{5}$$

Un autre aspect important de la géométrie de V.

Définition 7.3. *Soit* $\left(V,\langle -,-\rangle\right)$*, un* $\mathbb{F}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire abstrait* $\langle -,-\rangle$*. Soient* $v, w \in V$*. Alors* v *et* w *sont dits* orthogonaux *si*

$$\langle v,w\rangle = 0$$

Notation. $v \perp w$

Exemple 7.4. 1. $V = \mathbb{R}^2$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Soient $v = (1,1), w = (-2,1) \in R^2$. Vérifions si ces deux vecteurs sont orthogonaux par rapport aux produits scalaires suivants,

(a) $\mu_1 = 1, \mu_2 = 2$. Ainsi,

$$\langle v,w\rangle_{\mu_1,\mu_2} = v_1w_2 + 2\cdot v_2w_2 = -2+2 = 0$$

Donc $v \perp w$ par rapport à ce produit scalaire.

(b) $\mu_1 = 10^{17}, \mu_2 = 10^{-17}$. Ainsi,

$$\langle v,w\rangle_{\mu_1,\mu_2} = 10^{17}\cdot v_1w_2 + 10^{-17}\cdot v_2w_2 = -2\cdot 10^{17} + 10^{17} \neq 0$$

Donc, v et w ne sont pas orthogonaux par rapport à ce produit scalaire.

2. $V = \mathscr{M}(m,n,\mathbb{R})$. Soit $A, B \in \mathscr{M}(2,2)$,

$$A = \begin{pmatrix} -10 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, $\varphi_{\mathrm{Tr}}(A,B) = 0$. Les matrices A et B sont donc orthogonale par rapport à la forme trace.

Théorème 7.1. ***Le Théorème de Pytagore***
Soit $\left(V,\langle -,-\rangle\right)$*, un* $\mathbb{F}$*-espace vectoriel muni d'un produit scalaire abstrait* $\langle -,-\rangle$*. Soient* $v, w \in V$ *tels que* $v \perp w$*. Alors*

$$||v||^2 + ||w||^2 = ||v+w||^2$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} ||v+w||^2 &= \langle v+w, v+w\rangle = \underbrace{\langle v,v\rangle}_{=||v||^2} + \underbrace{\langle v,w\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w,v\rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w,w\rangle}_{=||w||^2} \\ &= ||v||^2 + ||w||^2 \end{aligned}$$

Ainsi, nous avons bien que $||v||^2 + ||w||^2 = ||v+w||^2$. cqfd

7.3 Propriétés importantes de la norme

Dans ce paragraphe, nous supposons que V est toujours un $\mathbb{F}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire abstrait $\langle -, - \rangle$ et nous ne noterons que V.

Lemme 7.1. *Soit $v \in V$ et soit $\alpha \in \mathbb{F}$. Alors,*

$$||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$$

Démonstration. Rappelons que $|z| = \sqrt{z\bar{z}}, \forall z \in \mathbb{F}$. Ainsi,

$$||\alpha v||^2 = \langle \alpha v, \alpha v\rangle = \alpha\bar{\alpha}\langle v,v\rangle = |\alpha|^2 \cdot ||v||^2$$

En prenant la racine, nous avons bien que $||\alpha v|| = |\alpha| \cdot ||v||$. cqfd

Proposition 7.1. *Inégalité de Cauchy-Schwarz*
Soient $v, w \in V$. Alors,

$$\left|\langle v,w\rangle\right| \leqslant ||v|| \cdot ||w||$$

Démonstration. Deux cas, $v = 0$ et $v \neq 0$.

1. Cas $v = 0$:
   Observer que $\langle 0, w\rangle = 0$ car,
   $$\langle 0,w\rangle = \langle 0+0, w\rangle = \langle 0,w\rangle + \langle 0,w\rangle = 0$$
   Par conséquent, $\langle 0,w\rangle = 0 = 0\|w\| = \|0\| \cdot \|w\|$. Dans ce cas, l'inégalité est un égalité stricte.
2. Cas $v \neq 0$.
   Nous cherchons à écrire $w = \alpha v + u$, avec $\alpha \in \mathbb{F}$ et où $u \perp v$, afin d'appliquer le théorème de Pythagore. Observer que $w = \alpha v + u \Leftrightarrow u = w - \alpha v$. Ainsi,
   $$v \perp u \Leftrightarrow 0 = \langle v, w - \alpha v\rangle = \langle v,w\rangle - \bar{\alpha}\underbrace{\langle v,v\rangle}_{=\|v\|^2}$$
   Puisque $v \neq 0$, $\|v\| \neq 0$. Nous obtenons donc,
   $$\bar{\alpha} = \frac{\langle v,w\rangle}{\|v\|^2} \text{ et donc } \alpha = \frac{\overline{\langle v,w\rangle}}{\|v\|^2} = \frac{\langle w,v\rangle}{\|v\|^2}$$
   Ainsi, nous avons,
   $$w = \underbrace{\frac{\langle w,v\rangle}{\|v\|^2}v}_{=\alpha v} + \underbrace{\left(w - \frac{\langle w,v\rangle}{\|v\|^2}v\right)}_{=u}$$

Par ailleurs, $u \perp v$, nous pouvons donc appliquer Pythagore.

$$\|w\|^2 = \left\|\frac{\langle w,v\rangle}{\|v\|^2}v\right\|^2 + \underbrace{\|u\|^2}_{\geqslant 0 \text{ si } u\neq 0} \geqslant \frac{\left|\langle w,v\rangle\right|^2}{\|v\|^4}\|v\|^2 = \frac{\left|\langle w,v\rangle\right|^2}{\|v\|^2}$$

En multipliant les deux membres par $\|v\|^2$, nous obtenons,

$$\|v\|^2 \cdot \|w\|^2 \geqslant \left|\langle w,v\rangle\right|^2$$

Par conséquent, $\|v\| \cdot \|w\| \geqslant \left|\langle w,v\rangle\right|$.

cqfd

Remarque. S'il existe α tel que $w = \alpha v$, alors l'inégalité devient une égalité. En effet, on a $|\langle w,v\rangle| = |\langle \alpha v,v\rangle| = |\alpha\langle v,v\rangle| = \left|\alpha\|v\|^2\right| = \left|\alpha\|v\|\right| \cdot \|v\| = \|w\| \cdot \|v\|$

Exemple 7.5. Considérons le cas du produits scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[0; +\infty[$ et bornées :

$$\varphi(f,g) = \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

Dans ce contexte, Cauchy-Schwarz devient :

$$\left|\int_0^\infty f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t\right| \leqslant \left(\int_0^\infty f^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^\infty g^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

Proposition 7.2. *Inégalité du triangle*
Soient $v, w \in V$. Alors,

$$||v+w|| \leqslant ||v|| + ||w||$$

Démonstration. Calculons, $\|v+w\|^2$:

$$\|v+w\|^2 = \langle v+w, v+w\rangle = \langle v,v\rangle + \langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle + \langle w,w\rangle$$

Par ailleurs,

$$\langle v,w\rangle + \langle w,v\rangle = \langle v,w\rangle + \overline{\langle w,v\rangle} = 2\mathrm{Re}(\langle v,w\rangle)$$

Observer que si $z \in \mathbb{C}$, i.e., $z = a + b\imath$, alors, $\left|\mathrm{Re}(z)\right| = |a| = \sqrt{a^2} \leqslant \sqrt{a^2+b^2} = |z|$. Dans notre cas, nous avons,

$$2\mathrm{Re}(\langle v,w\rangle) \leqslant 2\left|\langle v,w\rangle\right| \leqslant 2\|v\| \cdot \|w\|$$

Par conséquent, $\|v+w\|^2 \leqslant \|v\|^2 + 2\|v\| \cdot \|w\| + \|w\|^2 = \left(\|v\| + \|w\|\right)^2$. Et donc, $\|v+w\| \leqslant \|v\| + \|w\|$. cqfd

Exemple 7.6. Considérons le cas du produit scalaire sur l'espace des fonctions continues sur $[0; +\infty[$ et bornées :

$$\varphi(f,g) = \int_0^\infty f(t)g(t)e^{-t}\mathrm{d}t$$

Dans ce contexte, l'inégalité du triangle nous donne :

$$\left(\int_0^\infty \left(f(t)+g(t)\right)^2 e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \left(\int_0^\infty f^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\int_0^\infty g^2(t)e^{-t}\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$$

7.4 Orthogonalité et bases orthogonales

Dans ce paragraphe, nous supposons que V est toujours un $\mathbb{F}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire abstrait $\langle -,- \rangle$ et nous ne noterons que V.

Définition 7.4. *Soit S un sous-ensemble de V. Le* complément orthogonal *de S (noté $S^\perp$) est le sous-ensemble de V,*

$$S^\perp = \{v \in V | v \perp w, \forall w \in S\}$$

Proposition 7.3. *Pour tout ensemble $S \subset V$, $S^\perp$ est un sous espace de V.*

Démonstration. 1. Montrons que $S^\perp \neq \emptyset$. En effet, $\langle 0, w\rangle = 0, \forall w \in S$. Par conséquent, $0 \in S^\perp$.

2. Soient $v_1, v_2 \in S^\perp$. Soit $w \in S$. Alors,

$$\langle v_1 + v_2, w\rangle = \langle v_1, w\rangle + \langle v_2, w\rangle = 0$$

Par conséquent, $v_1 + v_2 \in S^\perp$.

3. De même que $v \in S^\perp, \alpha \in \mathbb{F} \Rightarrow \alpha v \in S^\perp$.

Remarque. Quelques observations,

1. $S \cap S^\perp = \begin{cases} \emptyset & \text{si } 0 \notin S, \\ \{0\} & \text{si } 0 \in S. \end{cases}$

   En effet, si $w \in S \cap S^\perp$, alors $w \in S$ et $w \perp w', \forall w' \in S$. En particulier, si $w \in S \cap S^\perp$, alors
   $$\big(w \perp w\big) \Leftrightarrow \big(\langle w, w\rangle = 0\big) \Leftrightarrow \big(w = 0\big)$$

2. $S \subset \left(S^\perp\right)^\perp$. En effet,
   $$v \in \left(S^\perp\right)^\perp \Leftrightarrow v \perp u, \forall u \in S^\perp$$
   Or,
   $$u \in S^\perp \Leftrightarrow u \perp w, \forall w \in S$$
   Ainsi, $w \in S$ implique que $w \perp u, \forall u \in S^\perp$ et donc $w \in \left(S^\perp\right)^\perp$.

Bases orthogonales et orthonormales

Motivation : Considérons $\mathbb{F}^n$ muni du produit scalaire euclidien usuel, i.e.,

$$\langle v, w\rangle_{euclid} = \sum_{i=1}^n v_i w_i \text{ où } v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \end{pmatrix}$$

Soit $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ la base canonique de $\mathbb{F}^n$, un calcul très simple montre que

$$\langle e_i, e_j\rangle = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, par rapport au produit scalaire euclidien, tous les vecteurs de $\mathcal{B}$ sont de norme 1 et ils sont tous orthogonaux les uns aux autres.

Idée : Chercher des bases d'un espace vectoriel quelconque V, ayant les mêmes propriétés par rapport à un produit scalaire abstrait sur V.

Définition 7.5. *Soit une liste $(v_1, ..., v_n)$ de vecteurs de V. Cette liste est* orthogonale *si $i \neq j \Longrightarrow v_i \perp v_j$. De plus, si $||v_i|| = 1, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$, alors la liste est* orthonormale *(ou* orthonormée*).*

Théorème 7.2. *Soit $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormale de V. Alors,*

$$[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n\rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n, \forall v \in V.$$

Démonstration.

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$$

Alors,

$$\langle v, u_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i, u_j \right\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i \underbrace{\langle u_i, u_j\rangle}_{\begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}} = \alpha_j$$

Ainsi, nous avons bien que $[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n\rangle \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n, \forall v \in V.$ cqfd

Corollaire 7.1. *Soit $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormale de V. Alors, $\forall v, v' \in V$,*

$$\langle v, v'\rangle = \langle [v]_\mathcal{B}, [v']_\mathcal{B}\rangle_{euclid} \text{ et } \|v\| = \|[v]_\mathcal{B}\|_{euclid}$$

où $\|v\|$ est la norme dans V, définie en terme de son produit scalaire.

Démonstration. Le théorème 7.2 implique que

$$[v]_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \langle v, u_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v, u_n\rangle \end{pmatrix} \text{ et } [v']_\mathcal{B} = \begin{pmatrix} \langle v', u_1\rangle \\ \vdots \\ \langle v', u_n\rangle \end{pmatrix}$$

I.e.,

$$v = \sum_{i=1}^n \langle v, u_i\rangle u_i \text{ et } v' = \sum_{i=1}^n \langle v', u_i\rangle u_i$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \langle v, v'\rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^n \langle v, u_i\rangle u_i, \sum_{i=1}^n \langle v', u_i\rangle u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle v, u_i\rangle \cdot \overline{\langle v', u_j\rangle} \cdot \underbrace{\langle u_i, u_j\rangle}_{\begin{cases} 1 & \text{si } i = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}} \\ &= \sum_{i=1}^n \langle v, u_i\rangle \cdot \overline{\langle v', u_i\rangle} = \langle [v]_\mathcal{B}, [v']_\mathcal{B}\rangle_{euclid} \end{aligned}$$

Pour la norme, nous avons que

$$\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle} = \sqrt{\langle [v]_{\mathcal{B}}, [v]_{\mathcal{B}}\rangle_{euclid}} = \|[v]_{\mathcal{B}}\|_{euclid}$$

cqfd

> **Proposition 7.4.** *Soit $(v_1, ...v_n)$ une liste orthogonale de V. Alors, $(v_1, ...v_n)$ est linéairement indépendante.*

Démonstration. Si $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i = 0$, alors $\forall j$,

$$0 = \langle 0, v_j\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, v_j\rangle = \alpha_j \underbrace{\|v_j\|^2}_{\neq 0}$$

Ainsi, $\alpha_j = 0, \forall j$. cqfd

Existence de bases orthonormales

Existe-t-il toujours des bases orthonormales d'un espace vectoriel muni d'un produit scalaire ? Et comment les trouver dans le cas d'un espace vectoriel de dimension finie ? Nous allons voir une méthode de construction d'une base orthonormale à partir d'une base quelconque. Dans le cours, nous noterons parfois "base ON" pour base orthonormale.

Notation. Dans le cours, nous noterons parfois "base ON" pour base orthonormale.

Pour trouver une base orthonormale, nous avons besoin d'un outil : la *projection orthogonale* sur un sous-espace V de dimension finie.

> **Définition 7.6.** *Soit W un sous-espace de V. Soit $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_n)$ base orthogonale de W. Définir une application,*
>
> $$proj_{W,\mathcal{B}} : V \longrightarrow W \text{ définie par } proj_{W,\mathcal{B}}(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} w_i$$
>
> *Il est facile de montrer que $proj_{W,\mathcal{B}} \in \mathscr{L}(V, W)$.*

Remarque. Dans un premier temps, nous supposerons que cette projection dépend de la base orthogonale choisie, et prouverons ensuite que ce n'est pas le cas.

> **Lemme 7.2.** *Pour tout $v \in V$, $v - proj_{W,\mathcal{B}}(v) \in W^{\perp}$*

Démonstration. Soit $w \in W$, il faut monter que $\langle v - proj_{W,\mathcal{B}}(v), w\rangle = 0$.
Soit $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_n)$ une base orthogonale de W. Puisque $\mathcal{B}$ une base de W, $\exists! \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tels que $w = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i$. Alors,

$$\langle v - proj_{W,\mathcal{B}}(v), w\rangle = \langle v, w\rangle - \langle proj_{W,\mathcal{B}}(v), w\rangle = \langle v, w\rangle - \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i \langle proj_{W,\mathcal{B}}(v), w_i\rangle$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}\langle proj_{W,\mathcal{B}}(v), w_i\rangle &= \left\langle \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\frac{\langle v, w_j\rangle}{\|w_j\|^2}}_{\in \mathbb{F}} w_j, w_i \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \frac{\langle v, w_j\rangle}{\|w_j\|^2} \underbrace{\langle w_j, w_i\rangle}_{\begin{cases}\|w_i\|^2 & \text{si } i = j,\\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}} \\ &= \frac{\langle v, w_i\rangle}{\|w_i\|^2} \|w_i\|^2 = \langle v, w_i\rangle\end{aligned}$$

Nous obtenons donc,

$$\langle proj_{W,\mathcal{B}}(v), w\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i \langle proj_{W,\mathcal{B}}(v), w_i\rangle = \sum_{i=1}^{n} \bar{\alpha}_i \langle v, w_i\rangle = \langle v, w\rangle$$

Par conséquent, $\langle v - proj_{W,\mathcal{B}}(v), w\rangle = \langle v, w\rangle - \langle v, w\rangle = 0$. cqfd

> **Proposition 7.5.** *Soit W, un sous-espace vectoriel de V. Si W admet une base orthogonale $\mathcal{B}$ et donc que la $proj_{W,\mathcal{B}}$ est bien définie, alors*
>
> $$V = W \oplus W^{\perp}$$

Démonstration. Clairement, nous avons que $V = W + W^{\perp}$, car, $\forall v \in V$,

$$v = \underbrace{\left(proj_{W,\mathcal{B}}(v)\right)}_{\in W} + \underbrace{\left(v - proj_{W,\mathcal{B}}(v)\right)}_{\in W^{\perp}}$$

Par ailleurs, $0 \in W$ car W est une sous-espace. Et donc, $W \cap W^{\perp} = \{0\}$. Ce qui implique que cette somme est directe. cqfd

> **Corollaire 7.2.** *Soit W, un sous-espace de V. Alors,*
>
> $$\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$$

Démonstration. Nous avons par la proposition 7.5, que $V = U \oplus U^{\perp}$, si U est un sous-espace de V. En particulier, avec $U = W^{\perp}$ dans un premier temps,

$$V = W^{\perp} \oplus \left(W^{\perp}\right)^{\perp}$$

Et avec $U = W$ dans un deuxième temps,

$$V = W \oplus W^{\perp}$$

Puisque les sommes sont directes, nous avons,

$$dimV = dimW^{\perp} + \dim\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = dimW + dimW^{\perp}$$

Ainsi, $dimW = dim\left(W^{\perp}\right)^{\perp}$. De plus nous avons montré au début de ce paragraphe que $W \subset \left(W^{\perp}\right)^{\perp}$. Par conséquent, $\left(W^{\perp}\right)^{\perp} = W$ cqfd

Proposition 7.6. *La définition de $proj_{W,\mathcal{B}}$ ne dépend pas de la base orthogonale de W, i.e., soit $v \in V$, si $\mathcal{B} = (w_1, ..., w_n)$ et $\mathcal{B}' = (w_1', ..., w_n')$ deux bases orthogonales de W. Alors,*

$$proj_{W,\mathcal{B}}(v) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, w_i \rangle}{\|w_i\|^2} w_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle v, w_i' \rangle}{\|w_i'\|^2} w_i' = proj_{W,\mathcal{B}'}(v)$$

On notera donc dorénavant $proj_W$ sans préciser la base orthogonale.

Démonstration. On a par le théorème précédent :

$$v = \underbrace{\big(proj_{W,\mathcal{B}}(v)\big)}_{\in W} + \underbrace{\big(v - proj_{W,\mathcal{B}}(v)\big)}_{\in W^{\perp}}$$

et

$$v = \underbrace{\big(proj_{W,\mathcal{B}'}(v)\big)}_{\in W} + \underbrace{\big(v - proj_{W,\mathcal{B}'}(v)\big)}_{\in W^{\perp}}$$

De plus, puisque $V = W \oplus W^{\perp}$, cette décomposition de v est forcément unique, et donc $proj_{W,\mathcal{B}}(v) = proj_{W,\mathcal{B}'}(v)$. cqfd

7.5 Le procédé de Gram-Schmidt

Appliquons la projection orthogonale à la construction d'une base orthonormale.

Lemme 7.3. *Soit $\Big(V, \langle -, - \rangle\Big)$, et soit $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ une base de V. Posons $V_k = span(v_1, ..., v_k)$. Pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$, si V_k admet une base orthogonale, alors V_{k+1} en admet aussi une.*

Démonstration. Soit $(w_1, ..., w_k)$, une base orthogonale de V_k. Soit $proj_{V_k} : V \longrightarrow V_k$, l'application linéaire de projection orthogonale sur V_k par cette base. Alors

$$v - proj_{V_k}(v) \in V_k^{\perp}, \forall v \in V$$

En particulier, $v_{k+1} - proj_{V_k}(v_{k+1}) \in V_k^{\perp}$. Posons,

$$w_{k+1} = v_{k+1} - proj_{V_k}(v_{k+1}) \in V_k^{\perp}$$

Nous devons monter que

1. $w_{k+1} \neq 0$:
   Puisque $(v_1, ..., v_n)$ est linéairement indépendante, nous avons que $(v_1, ..., v_{k+1})$ est aussi linéairement indépendante. Et donc, $v_{k+1} \notin V_k$, ce qui implique que
   $$v_{k+1} \neq proj_{V_k}(v_{k+1}) \text{ et donc } w_{k+1} \neq 0.$$
2. $(w_1, ..., w_{k+1})$ linéairement indépendante :
   Nous avons que $w_{k+1} \in V_k^{\perp}$ et que la liste $(w_1, ..., w_k)$ est orthogonale. Par conséquent, $(w_1, ..., w_{k+1})$ est également orthogonale. Donc, puisque $w_{k+1} \neq 0$ cette liste est linéairement indépendante.

Par conséquent, $(w_1, ..., w_{k+1})$ est une base de V_{k+1} car $dimV_{k+1} = k + 1$, et de plus,

$$\left.\begin{array}{l} w_i \in V_k \subset V_{k+1}, \forall i \leqslant k \\ w_{k+1} = v_{k+1} - proj_{V_k}(v_{k+1}) \in V_{k+1} \end{array}\right\} \Longrightarrow w_i \in V_{k+1}, \forall i \leqslant k+1$$

cqfd

Appliquons cette étape de construction $(n - 1)$ fois pour trouver une base orthogonale de V. Soit $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ une base de V.

Le procédé de Gram-Schmidt

1. $V_1 = span(v_1)$, poser $w_1 = v_1$.
2. $V_2 = span(v_1, v_2)$ admet une base orthogonale (w_1, w_2) où
   $$w_2 = v_2 - proj_{V_1} v_2$$
3. $V_3 = span(v_1, v_2, v_3)$ admet une base orthogonale (w_1, w_2, w_3) où
   $$w_3 = v_3 - proj_{V_2} v_3$$
   $$\vdots$$

n. $V = V_n = span(v_1, .., v_n)$ admet une base orthogonale $(w_1, ..., w_n)$ où

$$w_n = v_n - proj_{V_{n-1}} v_n$$

Nous obtenons $(w_1, ..., w_n)$ une base orthogonale. Nous posons $u_i = \frac{1}{\|w_i\|} w_i, \forall i$. Alors la liste $(u_1, ..., u_n)$ est une base orthonormale de V.

Remarque. Observer que

$$\|u_i\| = \left\| \frac{1}{\|w_i\|} w_i \right\| = \left| \frac{1}{\|w_i\|} \right| \|w_i\| = 1, \forall i.$$

Par ailleurs, $(i \neq j)$ implique $w_i \perp w_j$. Ainsi, pour tout $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$, nous avons $(\alpha w_i) \perp (\beta w_j)$. En effet,

$$\langle \alpha w_i, \beta w_j \rangle = \alpha \bar{\beta} \langle w_i, w_j \rangle = 0$$

En particulier, $u_i \perp u_j$ si $i \neq j$ puisque u_i est un multiple de w_i et u_j est un multiple de w_j.

En explicitant la projection et en intégrant la normalisation au procédé, nous obtenons :

étape 1 : poser $u_1 = \dfrac{1}{\|v_1\|} v_1$.

$\vdots$

étape k : $w_k = \left(v_k - \displaystyle\sum_{i=1}^{k-1} \langle v_k, u_i \rangle u_i \right)$, poser $u_k = \dfrac{1}{\|w_k\|} w_k$.

$\vdots$

étape n : $w_n = \left(v_n - \displaystyle\sum_{i=1}^{n-1} \langle v_n, u_i \rangle u_i \right)$, poser $u_n = \dfrac{1}{\|w_n\|} w_n$.

Nous obtenons la liste $(u_1, ..., u_n)$ qui est une base orthonormale de V.

Remarque. Le procédé de Gram-Schmidt nous assure l'existence d'une base orthonormale pour tout espace vectoriel de *dimension finie muni d'un produit scalaire.* En effet, V de dimension finie implique que V admet une base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$. Nous pouvons par conséquent appliquer Gram-Schmidt à $\mathcal{B}$ et obtenir une base orthonormale par rapport à ce produit scalaire.

7.6 Produits scalaires et applications linéaires

Proposition 7.7. *Soit $\Big(V, \langle -,-\rangle\Big)$, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire abstrait $\langle -,-\rangle$. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$, i.e., $\mathcal{T} : V \longrightarrow V$ application linéaire. Supposons qu'il existe un base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ de V telle que $\mathcal{T}(v_k) \in V_k = span(v_1, ..., v_k)$. Alors, il existe une base orthonormale $(u_1, ..., u_k)$ de V telle que*

$$\mathcal{T}(u_k) \in V_k = span(v_1, ..., v_k) = span(u_1, ..., u_k)$$

Démonstration. Appliquons Gram-Schmidt à la base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$.
Dans la partie normalisation, à chaque étape, nous avons, $V_k = span(v_1, ..., v_k)$ et de plus, $w_k = v_k - proj_{V_{k-1}} v_k$. Par conséquent,

$$\mathcal{T}(w_k) = \mathcal{T}(v_k) - \mathcal{T}(proj_{V_{k-1}} v_k)$$

Or $\mathcal{T}(v_k) \in V_k, \forall k$.

Par ailleurs, $proj_{V_{k-1}} v_k \in V_{k-1} = span(v_1, ..., v_{k-1})$, i.e., il existe $\alpha_1, ..., \alpha_{k-i}$ tels que

$$proj_{V_{k-1}} v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i$$

Donc,

$$\mathcal{T}(proj_{V_{k-1}} v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \underbrace{\mathcal{T}(v_i)}_{\in V_i \subset V_k} \in V_k$$

Par conséquent, nous avons que $\mathcal{T}(w_k) \in V_k, \forall k$.

A l'étape de la normalisation, nous posons,

$$u_i = \frac{1}{\|w_i\|} w_i, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$$

Nous obtenons,

$$\mathcal{T}(u_k) = \frac{1}{\|w_k\|} \mathcal{T}(w_k) \in V_k, \forall k$$

Et $span(u_1, ..., u_k) = span(v_1, ..., v_k) = V_k$. Ce qui termine la preuve de la proposition. cqfd

Traduction en termes de matrices

Question : Comment traduire en termes de matrices l'existence d'une base de V telle que $\mathcal{T}(v_k) \in V_k = span(v_1, ..., v_k)$ où $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$?
Réponse : $\mathcal{T}(v_k) \in V_k, \forall k \iff \exists \alpha_{1k}, ..., \alpha_{kk} \in \mathbb{F}$ tels que

$$\mathcal{T}(v_k) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_{ik} v_i + \sum_{i=k+1}^{n} 0 v_i$$

Ainsi,

$$\big[\mathcal{T}(v_k)\big]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{1k} \\ \vdots \\ \alpha_{kk} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \iff \big[\mathcal{T}\big]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \cdots & \alpha_{1k} & \cdots & \cdots & \alpha_{1n} \\ 0 & \ddots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & \alpha_{kk} & & & \vdots \\ 0 & & 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \alpha_{nn} \end{pmatrix}$$

En résumé, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, .., v_n)$ de V telle que $\mathcal{T}(v_k) \in V_k = span(v_1, ..., v_k)$ si et seulement s'il existe une base de $\mathcal{B}$ de V telle que $\big[\mathcal{T}\big]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure.

Résumons,

Proposition 7.8. *Soit $(V, \langle -,-\rangle)$ et soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. S'il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $\big[\mathcal{T}\big]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ soit triangulaire supérieure alors il existe une base orthonormale $\mathcal{B}'$ de V telle que $\big[\mathcal{T}\big]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}$ soit également triangulaire supérieure.*

7.7 Meilleures approximations

But : Soit $(V, \langle -,-\rangle)$, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire abstrait. Soit W un sous-espace de V de dimension finie. Etant donné $v \in V$, nous cherchons un vecteur $w \in W$ tel que $\|v - w\|$ soit minimisée.

Théorème 7.3. *Soient $(V, \langle -,-\rangle)$ et W un sous-espace de dimension finie. Alors*

$$\|v - proj_W v\| < \|v - w\|, \forall w \in W \setminus \{proj_W v\}$$

Remarque. Le fait que W soit de dimension finie implique que W admet un base orthonormale par rapport à $\langle -,-\rangle$. Ainsi, $proj_W v$ a un sens.

Démonstration. Rappelons que tout vecteur de V peut s'écrire sous la forme,

$$v = \underbrace{(v - proj_W v)}_{\in W^\perp} + \underbrace{(proj_W v)}_{\in W}$$

Observer que $\forall w \in W$, nous avons

$$(v - proj_W v) \perp (proj_W v - w)$$

En effet, $v - proj_W v \in W^\perp$ et $proj_W v - w \in W$. Nous pouvons donc appliquer le théorème de Pythagore.

$$\begin{aligned} \|v - w\|^2 &= \|(v - proj_W v) + (proj_W v - w)\|^2 \\ &= \|v - proj_W v\|^2 + \underbrace{\|proj_W v - w\|^2}_{>0} \end{aligned}$$

En effet, si $w \neq proj_W v$, alors $proj_W v - w \neq 0$, ce qui implique que la norme de ce vecteur est strictement positive, i.e., $\|proj_W v - w\| > 0$. Par conséquent, nous avons que $\|v - w\|^2 > \|v - proj_W v\|^2$. Pour terminer la preuve, il nous suffit de prendre la racine carrée de chaque membre. cqfd

En résumé, la projection orthogonale de v sur W minimise la distance entre v et un vecteur de W

Application : la méthode des moindres carrés

Cadre : Soit un système linéaire $Ax = b$, avec $A \in \mathscr{M}(m, n, \mathbb{R})$, qui n'admet pas forcement des solutions.

Rappel. Le système $Ax = b$ admet une solution si et seulement si $b \in ImA = \{Av | v \in \mathbb{R}^n\}$, qui est un sous-espace de $\mathbb{R}^m$.

Nous sommes à la recherche d'un vecteur $w \in ImA$ qui soit la meilleure approximation à b par rapport au produit scalaire euclidien. Nous voulons donc minimiser $\|w-b\|_{euclid}$. En termes du théorème 7.3, nous avons,

$$\|b - proj_{ImA}b\|_{euclid} < \|b-w\|_{euclid}, \forall w \in ImA \setminus proj_{ImA}b$$

Il nous faut donc calculer $proj_{ImA}b$. Nous le ferons sans trouver un base orthogonale de ImA.

Lemme 7.4. *Le complément orthogonal de ImA par rapport au produit scalaire euclidien est le $KerA^t$:*

$$(ImA)^{\perp} = KerA^t.$$

Rappel. Il existe une application linéaire, $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n : w \longmapsto A^t w$ et $Ker(A^t) = \{w \in \mathbb{R}^m | A^t w = 0\} \subset \mathbb{R}^m$.

Démonstration. Ecrire,

$$A = \begin{pmatrix} & | & & | & \\ c_1(A) & | & \cdots & | & c_n(A) \\ & | & & | & \end{pmatrix},$$

où $c_j(A) \in \mathbb{R}^m$ est la $j^{\text{ème}}$ colonne de A. Alors, $\forall v \in \mathbb{R}^n$,

$$Av = \begin{pmatrix} & | & & | & \\ c_1(A) & | & \cdots & | & c_n(A) \\ & | & & | & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{n} v_j c_j(A) \in \mathbb{R}^m$$

Ainsi, les vecteurs de ImA sont toutes les combinaisons linéaires possibles des vecteurs colonnes de A :

$$ImA = span\big(c_1(A), ..., c_n(A)\big) \subset \mathbb{R}^m$$

– Considérons $(ImA)^{\perp}$:
$w \in (ImA)^{\perp} \Leftrightarrow w \perp z, \forall z \in ImA$. En particulier, $w \in (ImA)^{\perp}$, implique que $w \perp c_j(A), \forall j$, i.e., $\langle w, c_j(A)\rangle_{euclid} = 0$. Ainsi, si

$$c_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \text{ et } w = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix}$$

Alors, $0 = \langle w, c_j(A)\rangle = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i, \forall j$. Ainsi,

$$w \in (ImA)^{\perp} \Longrightarrow w \perp c_j(A) \forall j \iff \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_j = 0, \forall j$$

Réciproquement, si $w \perp c_j(A), \forall j$, alors, $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$, nous avons,

$$\left\langle w, \sum_{j=1}^{n} \alpha_j c_j(A) \right\rangle = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \langle w, c_j(A)\rangle = 0$$

I.e., $w \in (ImA)^{\perp}$. Par conséquent, $w \perp c_j(A) \forall j \Longrightarrow w \in (ImA)^{\perp}$, et donc

$$w \in (ImA)^{\perp} \iff w \perp c_j(A), \forall j \iff \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_j = 0, \forall j$$

– Considérons $Ker(A^t)$:

$$c_j(A) = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}, \forall j \Longrightarrow A^t = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $\forall w \in \mathbb{R}^m$,

$$A^t w = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{m1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}w_1 + \cdots + a_{m1}w_m \\ \vdots \\ a_{1n}w_1 + \cdots + a_{mn}w_m \end{pmatrix}$$

Donc, $\Big(w \in Ker(A^t)\Big) \Leftrightarrow \Big(A^t w = 0\Big) \Leftrightarrow \Big(\sum^{m} a_{ij} w_i = 0 \forall j\Big)$.

Réussissant les analyses de $(ImA)^{\perp}$ et de $Ker(A^t)$, nous obtenons,

$$w \in (ImA)^{\perp} \iff \left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_j = 0 \forall j\right) \iff w \in Ker(A^t)$$

Donc, $(ImA)^{\perp} = Ker(A^t)$. cqfd

Remarque. Plus généralement, soit $(V, \langle -,- \rangle)$ comme ci-dessus, soit $W = span(w_1, ..., w_m) \subset V$. Si $v \perp w_j, \forall j$, alors, $v \in W^{\perp}$.

Pour notre recherche d'approximation de solution au système $Ax = b$, il nous faut,

Corollaire 7.3. *Soit $A \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{R})$. Alors*

$$\underbrace{(c_1, ..., c_n)}_{\in \mathbb{R}^n} \text{ est linéairement indépendante} \iff \underbrace{A^t A}_{\in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{R})} \text{ est inversible}$$

Où $c_i = c_i(A), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$.

Démonstration. Observer que

$$\Big(v \in Ker(A^t A)\Big) \iff \Big(0 = A^t A v = A^t(Av)\Big) \iff \Big(Av \in Ker(A^t) \cap ImA\Big)$$

Or $KerA^t = (ImA)^{\perp}$, donc

$$Ker(A^t) \cap ImA = (ImA)^{\perp} \cap ImA = \{0\}$$

Donc, $v \in Ker(A^t A)$ si et seulement si $Av = 0$. Or, si

$$v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

alors $Av = \sum_{j=1}^{n} v_j c_j(A)$. Ainsi, $v \in Ker(A^t A)$ si et seulement si $\sum_{j=1}^{n} v_j c_j(A) = 0$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Big(Ker(A^t A) = \{0\}\Big) &\iff \Big(\sum_{j=1}^{n} v_j c_j(A) = 0 \Rightarrow v_j = 0, \forall j\Big) \\ &\iff \Big((c_1, ..., c_n) \text{ linéairement indépendante}\Big) \end{aligned}$$

Nous avons bien le résultat cherché. cqfd

Le système normal

But : étant donné le système linéaire, $Ax = b$, trouver v tel que

$$\|Av - b\|_{euclid} \text{ minimisée}$$

I.e., tel que $Av = proj_{ImA}b$. Rappelons que nous ne voulons pas calculer une base orthogonale de ImA.

Observer que si il existe $v \in \mathbb{R}^n$ tel que $A^tAv = A^tb$ alors

$$A^t(Av - b) = A^tAv - A^tb = 0 \text{ i.e., } Av - b \in Ker(A^t) = (ImA)^{\perp}.$$

Ainsi,

$$b = \underbrace{Av}_{\in ImA} + \underbrace{(b - Av)}_{\in (ImA)^{\perp}} = \underbrace{proj_{ImA}b}_{\in ImA} + \underbrace{b - proj_{ImA}b}_{\in (ImA)^{\perp}}$$

Il s'agit en fait de l'unique décomposition de b en vecteurs de ImA et $(ImA)^{\perp}$. Par conséquent, l'unicité de cette décomposition assure que $Av = proj_{ImA}b$.

> ***Résumons***
> *Soit le système linéaire Ax=b. Alors si v est une solution du système*
>
> $$(A^tA)x = A^tb$$
>
> *alors, $Av = proj_{ImA}b$. Le système $(A^tA)x = A^tb$ est un système $n \times n$. Il est appelé* le système normal *associé à $Ax = b$.*
> *Par ailleurs, si les colonnes de A sont linéairement indépendantes entre elles, alors A^tA est inversible et l'unique solution du système normale est*
>
> $$v = (A^tA)^{-1}A^tb$$
>
> *Par conséquent, $proj_{ImA}b = A(A^tA)^{-1}A^tb$.*

Application. Pour trouver la projection de $w \in \mathbb{R}^m$ sur un sous-espace $w = span(w_1, ..., w_n)$ où $(w_1, ..., w_n)$ est linéairement indépendante, nous formons la matrice,

$$A = \begin{pmatrix} & | & & | & \\ w_1 & | & \cdots & | & w_n \\ & | & & | & \end{pmatrix} \in \mathscr{M}(m, n, \mathbb{R})$$

et alors,

$$proj_W w = A(A^tA)^{-1}A^tw$$

Observer que dans ce cas, $ImA = W$

Chapitre 8

Valeurs propres et vecteurs propres

Dans ce chapitre, nous supposerons que V est un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie et $V \neq \{0\}$.

But : Comprendre la structure d'un opérateur linéaire. I.e., étant donné $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$, trouver une décomposition de la forme

$$V = U_1 \oplus ... \oplus U_n \text{ telle que } \mathcal{T}(U_i) \subseteq U_i, \forall i,$$

de sorte à avoir, $\mathcal{T}|_{U_i} : U_i \longrightarrow U_i$, I.e. que $\mathcal{T}|_{U_i}$ soit un opérateur sur U_i.

8.1 Définitions et exemples

> **Définition 8.1.** *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Un sous-espace $U \subseteq V$ est dit* invariant *par rapport à $\mathcal{T}$ si*
>
> $$\mathcal{T}(U) \subseteq U, \text{ i.e.}, u \in U \Rightarrow \mathcal{T}(u) \in U$$

Exemple 8.1. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Exemples d'espace invariant par rapport à $\mathcal{T}$.

0. $U = \{0\}$, car $\mathcal{T}(0) = 0 \in U$.
1. V, car $\mathcal{T}(v) \in V, \forall v \in V$.
2. $Ker(\mathcal{T})$, car si $u \in Ker\mathcal{T}$, alors $\mathcal{T}(u) = 0 \in Ker\mathcal{T}$.
3. $Im(\mathcal{T})$, car si $u \in Im\mathcal{T}$, alors $\mathcal{T}(u) \in Im\mathcal{T}$ par définition.

Nous sommes amenés à nous demander s'il existe toujours des sous-espaces invariants par rapport à $\mathcal{T}$ autres que $\{0\}$ et V.

Si $dimU = 1$, sous quelles conditions U est-il invariant par rapport à $\mathcal{T}$? Prenons $u_0 \in U$, $u_0 \neq 0$. Alors, $span(u_0) = U$.
Si U est invariant par rapport à $\mathcal{T}$,

$$\mathcal{T}(u_0) \in U \Rightarrow \exists \lambda \in \mathbb{F} \text{ tq } \mathcal{T}(u_0) = \lambda u_0$$

Réciproquement, si $\exists u_0 \neq 0$ dans U tq $\mathcal{T}(u_0) = \lambda u_0$, alors $\forall \alpha \in \mathbb{F}$

$$\mathcal{T}(\alpha u_0) = \alpha \mathcal{T}(u_0) = \alpha \lambda u_0 \in U$$

Ainsi nous avons U invariant par rapport à $\mathcal{T}$, puisque $\forall u \in U = span(u_0)$, $\exists \beta \in \mathbb{F}$ tq. $u = \beta u_0$.

Définition 8.2. *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$.*
- *Un scalaire $\lambda \in \mathbb{F}$ est une* valeur propre *de $\mathcal{T}$, si $\exists u \in V$, $u \neq 0$ tq*

$$\mathcal{T}(u) = \lambda u$$

- *Le vecteur u est alors un* vecteur propre *de $\mathcal{T}$ correspondant à la valeur propre λ si $\mathcal{T}(u) = \lambda u$.*
- *L'*espace propre *associé à la valeur propre λ est l'ensemble de tous les vecteurs propres de $\mathcal{T}$ associés à λ auquel on ajoute 0, il est noté par V_λ.*

$$V_\lambda = \{u \in V | \mathcal{T}(u) = \lambda u\} \cup \{0\}$$

- *Le* spectre *de $\mathcal{T}$, noté $spec(\mathcal{T})$, est l'ensemble des valeurs propres de $\mathcal{T}$.*

$$spec(\mathcal{T}) = \{\lambda \in \mathbb{F} | \lambda \text{ valeur propre de } \mathcal{T}\}$$

Lemme 8.1. *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors,*

$$V_\lambda = Ker\,\underbrace{(\mathcal{T} - \lambda Id_V)}_{\in \mathscr{L}(V)}$$

Ainsi, λ est une valeur propre si et seulement si $Ker(\mathcal{T} - \lambda Id_V) \neq \{0\}$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\Big(u \in V_\lambda\Big) \quad &\Longleftrightarrow \quad \Big(\mathcal{T}(u) = \lambda u\Big) \Longleftrightarrow \Big(\mathcal{T}(u) - \lambda u = 0\Big)\\ &\Longleftrightarrow \quad \Big((\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)(u) = 0\Big) \Longleftrightarrow \Big(u \in Ker\big(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V\big)\Big)\end{aligned}$$

Ainsi, $V_\lambda = Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)$. cqfd

Corollaire 8.1. *L'espace propre V_λ est un sous-espace de V.*

Démonstration. Ce corollaire est une conséquence immédiate du fait que le noyau de toute application linéaire est un sous-espace vectoriel, en particulier pour l'application $(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)$.

Exemple 8.2.
0. $\mathbb{O} \in \mathscr{L}(V)$, $\mathbb{O}(v) = 0, \forall v \in V$. Alors, 0 est la seule valeur propre de $\mathbb{O}$. Ainsi, $spec(\mathbb{O}) = \{0\}$ et $V_{\lambda=0} = V$.
1. $\mathrm{Id}_V \in \mathscr{L}(V)$, $\mathrm{Id}_V(v) = v, \forall v \in V$. Alors, 1 est la seule valeur propre de Id_V. Ainsi, $spec(\mathrm{Id}_v) = \{1\}$ et $V_{\lambda=1} = V$.
2. $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$ définie par $\mathcal{T}(z, w) = (-z, w), \forall (z, w) \in \mathbb{R}^2$. Alors $\mathcal{T}$ est une rotation de $\frac{\pi}{2}$ dans le sens trigonométrique et $spec(\mathcal{T}) = \emptyset$.
3. $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$ définie par $\mathcal{T}(z, w) = (-z, w), \forall (z, w) \in \mathbb{C}^2$. Dans ce cas, $spec(\mathcal{T}) = \{\imath, -\imath\}$.
En effet, $\exists (w, z) \in \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{T}(w, z) = \lambda(w, z) \Leftrightarrow (-z, w) = (\lambda w, \lambda z) \Rightarrow -z = \lambda^2 z \Rightarrow \lambda = \pm\imath$
Donc $\{\lambda | \lambda \text{ valeur propre de } \mathcal{T}\} = spec(\mathcal{T}) \subset \{\pm\imath\}$.
Par ailleurs, $\imath \in spec(\mathcal{T})$ si et seulement s'il existe $(w, z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que

$$\begin{cases} -z = \imath w \\ w = \imath z \end{cases} \Leftrightarrow w = \imath z \Leftrightarrow (w, z) \in span(\imath, 1) = \mathbb{C}(\imath, 1)$$

De façon analogue, $-\imath \in spec(\mathcal{T})$ si et seulement s'il existe $(w, z) \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ tel que

$$\begin{cases} -z = -\imath w \\ w = -\imath z \end{cases} \Leftrightarrow w = -\imath z \Leftrightarrow (w, z) \in span(1, \imath) = \mathbb{C}(1, \imath)$$

En résumé, $spec(\mathcal{T}) = \{\imath, -\imath\}$ et les espaces propres associés sont

$$V_{\lambda=\imath} = \mathbb{C}(\imath, 1) \text{ et } V_{\lambda=-\imath} = \mathbb{C}(1, \imath)$$

Si $v_1 \in V_{\lambda=\imath} \setminus \{0\}$ et $v_2 \in V_{\lambda=-\imath} \setminus \{0\}$. Alors, la liste (v_1, v_2) est linéairement indépendante.

Théorème 8.1. *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ et soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des valeurs propres de $\mathcal{T}$. Si $v_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}, \forall 1 \leqslant i \leqslant m$, alors la liste $(v_1, ..., v_m)$ est linéairement indépendante.*

Démonstration. Supposons que la liste est linéairement dépendante. Par le lemme 3.2, il existe $j \in \{1, ..., m\}$ tel que $v_j \in span(v_1, ..., v_{j-1})$. Soit k le plus petit des j. Alors, $v_k \in span(v_1, ..., v_{k-1})$ et $(v_1, ..., v_{k-1})$ est linéairement indépendante. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_{k-1} \in \mathbb{F}$ tels que $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i$.
Nous appliquons $\mathcal{T}$ au vecteur v_k, nous obtenons,

$$\lambda_k v_k = \mathcal{T}(v_k) = \mathcal{T}(\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \mathcal{T}(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \lambda_i v_i$$

D'autre part, $v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i \Rightarrow \lambda_k v_k = \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_k \alpha_i v_i$

Ainsi,

$$0 = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \underbrace{(\lambda_k - \lambda_i)}_{\neq 0} v_i$$

Alors, $\alpha_i = 0, \forall i$ puisque $(v_1, ..., v_{k-1})$ est linéairement indépendante. Par conséquent, $v_k = 0$ ce qui est contradictoire. cqfd

Corollaire 8.2. *Un opérateur linéaire $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ admet au plus $dim(V)$ valeurs propres distinctes. I.e., $\#spec(\mathcal{T}) \leqslant dimV$.*

Démonstration. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m \in spec(\mathcal{T})$ avec $i \neq j \Rightarrow \lambda_i \neq \lambda_j$. Soient $v_i \in V_{\lambda_i} \setminus \{0\}, \forall 1 \leqslant i \leqslant m$. Alors, la proposition précédente implique que la liste $(v_1, ..., v_m)$ est linéairement indépendante. Alors par le théorème de la Borne (théorème 3.1), nous avons, $m \leqslant dimV$. cqfd

Notation. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$
1. $\mathcal{T}^m = \mathcal{T} \circ \mathcal{T} \cdots \mathcal{T}$
2. $\mathcal{T}^0 = \mathrm{Id}_V$
3. Si $\mathcal{T}$ est inversible, $\mathcal{T}^{-m} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{T}^{-1} \cdots \mathcal{T}^{-1}$

Définition 8.3. *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ est soit $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_m t^m \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$. Alors,*

$$p(\mathcal{T}) = a_0 Id_V + a_1\mathcal{T} + ... + a_m\mathcal{T}^m \in \mathscr{L}(V)$$

Cela définit en fait une application linéaire

$$ev_{\mathcal{T}} : \mathscr{P}(\mathbb{F}) \longrightarrow \mathscr{L}(V), ev_{\mathcal{T}}(p) = p(\mathcal{T})$$

Remarque. 1. $(pq)(\mathcal{T}) = p(\mathcal{T}) \circ q(\mathcal{T})$ (composition dans $\mathscr{L}(V)$)

Démonstration. Posons $p(x) = \sum_{i=0}^{m} a_i x^i$ et $q(x) = \sum_{j=0}^{n} b_j x^j$. Alors,

$$(p \cdot q)(x) = p(x) \cdot q(x) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} a_i x^i \cdot b_j x^j$$

On observe donc que

$$(p \cdot q)(\mathcal{T}) = \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=0}^{n} (a_i\mathcal{T}^i) \circ (b_j\mathcal{T}^j) = p(\mathcal{T}) \circ q(\mathcal{T})$$

2. $p(\mathcal{T})q(\mathcal{T}) = q(\mathcal{T})p(\mathcal{T})$

Démonstration. En utilisant le résultat ci-dessus : $p(\mathcal{T})q(\mathcal{T}) = (pq)(\mathcal{T}) = (qp)(\mathcal{T}) = q(\mathcal{T})p(\mathcal{T})$

Théorème 8.2. *Soit $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors $\mathcal{T}$ possède au moins une valeur propre.*

Démonstration. Soit $n = dim(V)$ et $v \in V - \{0\}$. Ainsi, la liste $(v, \mathcal{T}(v), ..., \mathcal{T}^n(v))$ est linéairement dépendante. Alors, il existe $\alpha_0, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ pas tous nuls, tels que

$$0 = \alpha_0 v + ... + \alpha_n \mathcal{T}^n(v)$$

Soit m tel que $\alpha_m \neq 0$ mais $\alpha_k = 0 \forall k > m$, posons $p(t) = a_0 + a_1 t + ... + a_m t^m \in \mathscr{P}(\mathbb{C})$. Par le théorème fondamental de l'algèbre, $\exists \lambda_1, ..., \lambda_m, c \in \mathbb{C}$:

$$p(t) = c(t - \lambda_1)\cdots(t - \lambda_m)$$

Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= \alpha_0 v + ... + \alpha_m\mathcal{T}^m(v) = \big(\alpha_0 \mathrm{Id}_v + ... + \alpha_m\mathcal{T}^m\big)(v) = \big(p(\mathcal{T})\big)(v) \\ &= \left[c\prod_{i=1}^{m}(t - \lambda_i)\right](\mathcal{T})(v) = \left(c\prod_{i=1}^{m}(\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V)\right)(v) \\ &= c \cdot \big(\mathcal{T} - \lambda_1 \mathrm{Id}_V\big)\cdots\big(\mathcal{T} - \lambda_m \mathrm{Id}_V\big)(v) \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $j \in \{1, ..., m\}$ tel que $\mathcal{T} - \lambda_j \mathrm{Id}_V$ n'est pas injectif. Alors

$$Ker(\mathcal{T} - \lambda_j \mathrm{Id}_V) \neq \{0\}$$

Par conséquent, λ_j est une valeur propre de $\mathcal{T}$. cqfd

Théorème 8.3. *Soit $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors, il existe une base $(v_1, ..., v_n)$ de V telle que $span(v_1, ..., v_k)$ est invariant par rapport à $\mathcal{T}, \forall k$.*

Rappel. Pour $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ et $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ une base de V, $span(v_1, ..., v_k)$ est invariant par rapport à $\mathcal{T}, \forall k$ si et seulement si $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ est triangulaire supérieure.

Démonstration. Par récurrence sur $dimV$

1^er pas : Si $dimV = 1$, le résultat est clair.

Hypothèse de récurrence : Supposons que le théorème vrai pour tous les V tels que $dimV < n$.

A voir : Montrons que le résultat reste vrai pour V avec $dimV = n$.
Soit $dim(V) = n$ et $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Par le théorème précédent, il existe $\lambda \in spec(\mathcal{T})$. Posons $U = Im(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)$. Comme $\lambda \in spec(\mathcal{T})$, alors $(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)$ n'est pas injectif. Par conséquent, $(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)$ n'est pas surjectif. Ainsi $U \subsetneqq V \Rightarrow dimU < dimV$.
Par ailleurs, U est invariant par rapport à $\mathcal{T}$. En effet si $u \in U$, alors,

$$\mathcal{T}(u) = \big(\mathcal{T}(u) - \lambda u\big) + \lambda u = (\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)(u) + \lambda u \in U$$

Par conséquent, $\mathcal{T}\big|_U \in \mathscr{L}(V)$. Par l'hypothèse de récurrence, il existe une base $(u_1, ..., u_m)$ de U telle que $span(u_1, ..., u_j)$ est invariant par rapport à $\mathcal{T}|_U, \forall j \leqslant m$.
Etendons $(u_1, .., u_m)$ à une base $(u_1, ..., u_m, v_1, .., v_{n-m})$ de V. Soit $1 \leqslant k \leqslant n - m$, alors,

$$\mathcal{T}(v_k) = \mathcal{T}(v_k) - \lambda v_k + \lambda v_k = \underbrace{(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)(v_k)}_{\in U} + \lambda v_k$$

Par conséquent, $\mathcal{T}(v_k) \in span(u_1, ..., u_m, v_k)$, et donc, nous avons que

$$\mathcal{T}(v_k) \in span(u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_k)$$

Ainsi, $span(u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_k)$ est invariant par rapport à $\mathcal{T}$. En conclusion, la base $(u_1, ..., u_m, v_1, ..., v_{n-m})$ de V est une base qui satisfait la propriété demandée. cqfd

Corollaire 8.3. *Soit $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ soit triangulaire supérieure.*

Démonstration. Par le théorème, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ tq $\forall i, \mathcal{T}(v_i) \in span(v_1, ..., v_i)$. Par définition, $([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}})_{i,j}$ est le $i-$ème coefficient de $\mathcal{T}(v_j)$ dans l'unique décomposition en termes des vecteurs de $\mathcal{B}$. Or, $\mathcal{T}(v_j) \in span(v_i, ..., v_j)$ implique que $([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}})_{i,j} = 0$ si $i > j$. Ainsi, la matrice est triangulaire supérieure.

8.2 Calcul de $spec(\mathcal{T})$

But : Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ et V est un $\mathbb{F}$ espace vectoriel de dimension finie. Nous allons voir une façon de calculer $spec(\mathcal{T})$, étant donné une bonne base de V.

Proposition 8.1. ***Caractérisation des opérateurs linéaires inversibles***
Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Soit $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ une base de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ soit triangulaire supérieure. Poser $t_i = ([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}})_{ii}$. Alors,

$$\mathcal{T} \text{ est inversible} \iff t_i \neq 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons que $\mathcal{T}$ est inversible et supposons par l'absurde qu'il existe $k \in [1, n]$ tel que $t_k = 0$. Par conséquent, $\mathcal{T}(v_k) \in span(v_1, ..., v_{k-1}) = V_{k-1}$, puisque

$$[\mathcal{T}(v_k)]_{\mathcal{B}} = c_k([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{k-1} \\ t_k \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \text{ où } \mathcal{T}(v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i v_i + t_k v_k.$$

Donc, $t_k = 0$ implique que $\mathcal{T}(v_k) \in span(v_1, ..., v_{k-1})$. Par conséquent, si $V_k = span(v_1, ..., v_k)$, alors, $\mathcal{T}(V_k) \subset V_{k-1}$, i.e., $Im(\mathcal{T}|_{V_k}) \subset V_{k-1}$. Or, le théorème du Rang (théorème 4.1) implique que

$$dim\big(Ker(\mathcal{T}|_{V_k})\big) + dim\big(Im(\mathcal{T}|_{V_k})\big) = dimV_k$$

Or, $dim\big(Im(\mathcal{T}|_{V_k})\big) \leqslant dimV_{k-1} = k-1$ et $dimV_k = k$. Ainsi,

$$dim\big(Ker(\mathcal{T}|_{V_k})\big) \geqslant 1.$$

Autrement dit, $\exists v \in V_k \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{T}(v) = 0$ et donc $\mathcal{T}$ ne peut pas être inversible, car un opérateur linéaire et inversible si et seulement si son noyau est $\{0\}$. Ainsi,

$$\mathcal{T} \text{ inversible} \Longrightarrow t_k \neq 0, \forall 1 \leqslant k \leqslant n$$

$\Longleftarrow$ Supposons que $t_k \neq 0, \forall 1 \leqslant k \leqslant n$. De nouveau, argumentons par l'absurde : supposons que $\mathcal{T}$ soit non inversible.

Alors, $\exists v \in V \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{T}(v) = 0$. Soit $\mathcal{B}$ une base de V, alors $\exists! \alpha_1, ..., \alpha_n$ tels que $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$. Posons,

$$k = \max \underbrace{\{i | \alpha_i \neq 0\}}_{\neq \emptyset \text{ car } v \neq 0} \qquad \Big| \text{ noter que k peut être n.}$$

Ainsi, $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$ et

$$0 = \mathcal{T}(v) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \mathcal{T}(v_i) = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \mathcal{T}(v_i) + \alpha_k \mathcal{T}(v_k)$$

Ce qui implique que

$$\alpha_k \mathcal{T}(v_k) = -\sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i \mathcal{T}(v_i)$$

et donc,

$$\mathcal{T}(v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} -\frac{\alpha_i}{\alpha_k} \mathcal{T}(v_i)$$

Par conséquent, puisque $\mathcal{T}(v_i) \in span(v_1, ..., v_i) = V_i, \forall i$, et puisque $V_i \subset V_{i+1}, \forall i$, nous obtenons que,

$$\mathcal{T}(v_k) = \sum_{i=1}^{k-1} -\frac{\alpha_i}{\alpha_k} \underbrace{\mathcal{T}(v_i)}_{\in V_i \subset V_{k-1}} \in V_{k-1} = span(v_1, ..., v_{k-1})$$

Ainsi, tous les coefficients de $[\mathcal{T}(v_k)]_{\mathcal{B}}$ sont nul à partir du $k^{\text{ème}}$ coefficient qui est t_k. Donc, en particulier, $t_k = 0$. Ainsi, $\mathcal{T}$ non inversible implique qu'il existe $k \in [1, n]$ tel que $t_k = 0$. I.e., $t_k \neq 0, \forall k$ implique que $\mathcal{T}$ est inversible. cqfd

Corollaire 8.4. *Soit V, un $\mathbb{F}$ espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Soit $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ une base de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit triangulaire supérieure. Poser $t_i = ([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}})_{ii}$. Alors,*

$$spec(\mathcal{T}) = \{t_i | 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

I.e., $\lambda \in \mathbb{F}$ valeur propre de $\mathcal{T} \iff \exists i$ tel que $t_i = \lambda$.

Démonstration.

$$\lambda \text{ valeur propre de } \mathcal{T} \iff Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V) \neq \{0\} \iff \mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V \text{ non inversible}$$

Par la proposition 8.1, il existe $k \in [1, n]$ tel que $([\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V]_{\mathcal{BB}})_{kk} = 0$.
Rappelons que $[\cdot]_{\mathcal{BB}} : \mathscr{L}(V) \longrightarrow \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F}) : \mathcal{S} \longmapsto [\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}}$ est linéaire. Ainsi,

$$[\alpha \mathcal{S} + \alpha' \mathcal{S}']_{\mathcal{BB}} = \alpha [\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}} + \alpha' [\mathcal{S}']_{\mathcal{BB}}$$

En particulier, $[\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V]_{\mathcal{BB}} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} - \lambda [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{BB}} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} - \lambda I_n$.

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} - \lambda I_n = \begin{pmatrix} t_1 - \lambda & * & \cdots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & * \\ 0 & \cdots & 0 & t_n - \lambda \end{pmatrix}$$

Ainsi, $([\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V]_{\mathcal{BB}})_{kk} = 0 \Leftrightarrow t_k - \lambda = 0$. Par conséquent, λ est une valeur propre de $\mathcal{T}$, si et seulement s'il existe $k \in [1, n]$ tel que $t_k = \lambda$. cqfd

Algorithme de calcul de $spec(\mathcal{T})$, $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$

1. Trouver une base $\mathcal{B}$ de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit triangulaire supérieure.
2. $Spec(\mathcal{T}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{F} \Big| \exists k \in [1, n] \text{ tel que } \lambda = ([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}})_{kk}\Big\}$.

8.3 Diagonalisation

Nous allons étudier la cas spécial des matrices diagonales. Rappelons qu'une matrice $D \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$ est diagonale s'il existe $d_1, ..., d_n \in \mathbb{F}$ tq :

$$\begin{cases} (D)_{ij} = d_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Nous cherchons une base $\mathcal{B}$ de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit diagonale où $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Cette recherche est motivée par le résultat suivant,

Proposition 8.2. *Soit $D \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ une matrice diagonale. Soient $A \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$ et $B \in \mathscr{M}(n,p,\mathbb{F})$. Alors,*

$$AD = \begin{pmatrix} | & & | \\ d_1\vec{c}_1(A) & | \cdots | & d_n\vec{c}_n(A) \\ | & & | \end{pmatrix}$$

$$DB = \begin{pmatrix} & d_1\vec{l}_1(B) & \\ - & ------ & - \\ & \vdots & \\ - & ------ & - \\ & d_n\vec{l}_n(B) & \end{pmatrix}$$

En particulier,

$$D^k = \begin{pmatrix} d_i^k & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & d_n^k \end{pmatrix}$$

Les puissances élevées de matrices diagonales sont donc faciles à calculer.

Par conséquent, si $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ et $\mathcal{B}$ une base de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit diagonale. Alors,

$$[\mathcal{T}^k]_{\mathcal{BB}} = [\mathcal{T}]^k_{\mathcal{BB}}$$

Nous obtenons donc une description de $\mathcal{T}^k$ facile à calculer.

Définition 8.4. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors, $\mathcal{T}$ est* diagonalisable *s'il existe une base de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit diagonale.*

De manière analogue, une matrice $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ est diagonalisable *si $\mathcal{T}_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n : v \longmapsto Av$ est diagonalisable.*

Remarque. Nous avons déjà vu que si $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ est la base standard de $\mathbb{F}^n$, alors, $[\mathcal{T}_A]_{\mathcal{BB}} = A$. Par ailleurs, si $\mathcal{B}'$ une autre base de $\mathbb{F}^n$, alors,

$$\begin{aligned} [\mathcal{T}_A]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} &= [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n} \circ \mathcal{T}_A \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \cdot [\mathcal{T}_A]_{\mathcal{BB}} \cdot [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{BB}'} \\ &= [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \cdot A \cdot [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{BB}'} \end{aligned}$$

Observer que $[\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} \cdot [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{BB}'} = [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n} \circ \mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = I_n$. De même que, $[\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{BB}'} \cdot [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = I_n$.
Ainsi, posons $P = [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$. Alors, P est inversible est sont inverse $P^{-1} = [\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{BB}'}$. P est appelée la *matrice de passage* de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$. Nous avons donc,

$$[\mathcal{T}_A]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} = PAP^{-1}$$

Par conséquent, A est diagonalisable si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que PAP^{-1} soit diagonale.

Théorème 8.4. ***Caractérisation des opérateurs diagonalisables***
Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes ;

1. *$\mathcal{T}$ diagonalisable.*
2. *V admet une base formée de vecteurs propres de $\mathcal{T}$.*
3. *Si $spec(\mathcal{T}) = \{\lambda_1, ..., \lambda_m\}$, alors $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_m}$, où $V_{\lambda_i} = Ker(\mathcal{T} - \lambda_i Id_V)$.*
4. *$dimV = dimV_{\lambda_1} + ... + dimV_{\lambda_m}$.*

Pour démontrer les équivalences, nous allons procéder de la manière suivante,

$$\begin{tikzcd} (1) \arrow[r, Leftrightarrow] & (2) \arrow[d, Rightarrow] \\ (4) \arrow[ur, Rightarrow] & (3) \arrow[l, Rightarrow] \end{tikzcd}$$

Démonstration. *(1.)* $\Longleftrightarrow$ *(2.)* Nous avons la chaîne d'équivalences suivante,

$$\begin{aligned} \mathcal{T} \text{ est diagonalisable} &\Longleftrightarrow \exists \text{ une base } \mathcal{B}(v_1, ..., v_n) \text{ de V telle que} \\ &\qquad [\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} d_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & d_n \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow [\mathcal{T}(v_i)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ d_i \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \forall i \Longleftrightarrow \mathcal{T}(v_i) = d_i v_i, \forall i \\ &\Longleftrightarrow v_i \text{ est un vecteur propre de } \mathcal{T}. \end{aligned}$$

Ainsi, V admet bien une base formée de vecteurs propres.
(2.) $\Longrightarrow$ *(3.)* Nous savons que $V_{\lambda_i} \subset V, \forall 1 \leqslant i \leqslant m$, et donc $V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_m} \subset V$.
Par ailleurs, cette somme est directe car si $v_1 + ... + v_m = 0$, où $v_i \in V_{\lambda_i}, \forall i$, alors, $v_i = 0, \forall i$. En effet, toute liste de vecteurs non nuls provenant d'espaces propres distincts est linéairement indépendante. Ainsi, pour montrer que $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_m}$, il suffit de monter que $V \subset V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_m}$.
Supposons que V admette une base $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$ formée de vecteurs propres de $\mathcal{T}$. Ainsi, $\forall i, \exists \lambda_{k_i} \in spec(\mathcal{T})$ telle que $v_i \in V_{\lambda_{k_i}} \subset V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_m}$. Par conséquent, $span(v_1, ..., v_n) = V \subset V_{\lambda_1} + ... + V_{\lambda_m}$. Ainsi, nous avons bien $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_m}$.
(3.) $\Longrightarrow$ *(4.)* Rappelons que $dim(U_1 \oplus ... \oplus U_k) = \sum_{i=1}^{k} dimU_i$. En particulier, $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_m}$ implique que $dimV = \sum_{i=1}^{m} dimV_{\lambda_i}$. D'où le résultat.
(4.) $\Longrightarrow$ *(2.)* Soit $\mathcal{B}_i = (v_{i_1}, ..., v_{i_{n_i}})$ une base de V_{λ_i}. Donc, $dimV_{\lambda_i} = n_i$. Poser

$$\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_m) = (v_{11}, ..., v_{1n_1}, ..., v_{m1}, ..., v_{mn_m})$$

Alors, la longueur de $\mathcal{B}$ est $\sum_{i=1}^{m} n_i = \sum_{i=1}^{m} dimV_{\lambda_i} = dimV$. Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une base de V si et seulement si elle est linéairement indépendante. Pour voir que $\mathcal{B}$ est linéairement indépendante, supposons que,

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}v_{ij}=0$$

Alors puisque, $V_{\lambda_1}+...+V_{\lambda_m}$ est une somme directe, cela implique que

$$\sum_{j=1}^{n_i}\alpha_{ij}v_{ij}=0,\forall i$$

Or, $(v_{i1},...,v_{in_i})$ est une base de V_{λ_i}, donc linéairement indépendante. Ainsi, $\alpha_{ij}=0,\forall i,j$.
Par conséquent $\mathcal{B}$ est une base de V formée de vecteurs propres de $\mathcal{T}$. cqfd

Remarque.

1. En écrivant l'égalité $spec(\mathcal{T})=\{\lambda_1,...,\lambda_m\}$, nous supposons que $\mathcal{T}$ admette m valeurs propres distinctes, i.e., $\lambda_i\neq\lambda_j$ si $i\neq j$.
2. La somme $V_{\lambda_1}+...+V_{\lambda_m}$ est toujours directe si $\lambda_1,...,\lambda_m$ sont des valeurs propres distinctes de $\mathcal{T}$.

Lien avec la diagonisabilité de matrices

Soit $A\in\mathscr{M}(n,n.\mathbb{F})$. Soit $\mathcal{B}'=(v_1,...,v_n)$ une base de $\mathbb{F}^n$ formée de vecteurs propres de A, i.e., $\forall 1\leqslant i\leqslant n,\exists\lambda_i\in\mathbb{F}$ tel que $Av_i=\lambda_iv_i$.

Poser $Q=\begin{pmatrix}v_1&\cdots&v_n\end{pmatrix}\in\mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$. Alors,

$$\begin{aligned}AQ&=\begin{pmatrix}Av_1&\cdots&Av_n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda_1v_1&\cdots&\lambda_nv_n\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}v_1&\cdots&v_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1&&0\\&\ddots&\\0&&\lambda_n\end{pmatrix}\\&=QD\end{aligned}$$

Par ailleurs, Q est inversible car $Q=[\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ où $\mathcal{B}$ est la base standard de $\mathbb{F}^n$, car $v_i=[\mathrm{Id}_{\mathbb{F}^n}(v_i)]_{\mathcal{B}}$.
Donc l'égalité $AQ=QD$ implique que $Q^{-1}AQ=D$. Nous avons donc diagonalisé la matrice A.

8.4 Un bref aperçu du cas réel

Voir le livre d'Axler pour les preuves.

Théorème 8.5. *Soit V, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$. Alors, il existe un sous-espace $U\subset V$ tel que $dimU\leqslant 2$ et tel que $\mathcal{T}(U)\subset U$.*

Théorème 8.6. *Soit V, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie tel que dimV soit impaire. Soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$. Alors, $\mathcal{T}$ admet au moins un vecteur propre non nul.*

Chapitre 9

Opérateurs linéaires et produits scalaires

But : Etudier les implications pour la recherche d'une base de V formée de vecteurs propres d'un opérateur $T\in\mathscr{L}(V)$ donné, de l'existence d'un produit scalaire sur V. Nous verrons en particulier quand il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres.

Dans ce chapitre, V,W sont toujours des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels munis de produits scalaires, noté soit $\langle -,-\rangle$ soit $\langle -,-\rangle_V$ et $\langle -,-\rangle_W$.

9.1 L'adjoint d'une application linéaire

Définition 9.1. *Le* dual de V *est l'espace vectoriel $\mathscr{L}(V,\mathbb{F})$, noté souvent $V^{\#}$. Les éléments $\varphi\in V^{\#}=\mathscr{L}(V,\mathbb{F})$ sont appelés* fonctionnels linéaires.

Théorème 9.1. *Soient V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel et $V^{\#}=\mathscr{L}(V,\mathbb{F})$. Alors,*

1. *$\forall w\in V,\exists\varphi_w\in V^{\#}$ définie par $\varphi_w(v)=\langle v,w\rangle,\forall v\in V$.*
2. *si $dimV<\infty$, alors, l'application $\delta:V\longrightarrow V^{\#}:w\longmapsto\varphi_w$ admet un inverse.*

Ainsi, $dimV<\infty$ implique que $\delta:V\longrightarrow V^{\#}$ est une bijection.
De plus, $\delta(w+w')=\delta(w)+\delta(w')$ et $\delta(\alpha v)=\bar{\alpha}\delta(v)$. Donc, δ est aussi linéaire à conjugaison complexe près.

Démonstration.

1. Soient $v,v'\in V$. Alors

$$\varphi_w(v+v')=\langle v+v',w\rangle=\langle v,w\rangle+\langle v',w\rangle=\varphi_w(v)+\varphi_w(v'),\forall v,v'\in V$$

Soit $v\in V$ et soit $\alpha\in\mathbb{F}$. Alors

$$\varphi_w(\alpha v)=\langle\alpha v,w\rangle=\alpha\langle v,w\rangle=\alpha\varphi_w(v),\forall v\in V,\alpha\in\mathbb{F}$$

Ainsi, φ_w est linéaire. Par conséquent, il existe bien $\varphi_w\in\mathscr{L}(V,\mathbb{F})=V^{\#},\forall w\in V$.

2. Si $dimV<\infty$ alors il existe une base orthonormée $(u_1,...,u_n)$ de V. Définissons une application,

$$\varepsilon:V^{\#}\longrightarrow V\text{ définie par }\varepsilon(\varphi)=\sum_{i=1}^{n}\overline{\varphi(u_i)}u_i$$

Il faut vérifier que $\varepsilon\circ\delta=\mathrm{Id}_V$ et $\delta\circ\varepsilon=\mathrm{Id}_{V^{\#}}$.

– Montrons que $\varepsilon \circ \delta = \mathrm{Id}_V$. Soit $w \in V$. Alors,

$$\begin{aligned}\big(\varepsilon \circ \delta\big)(w) = \varepsilon(\varphi_w) &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi_w(u_i)}u_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle u_i, w\rangle}u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle w, u_i\rangle u_i \underset{(a)}{=} w \\ &\quad (a) \text{ par le théorème 7.2}\end{aligned}$$

Donc, $\varepsilon \circ \delta = \mathrm{Id}_V$.

– Montrons que $\delta \circ \varepsilon = \mathrm{Id}_{V^\#}$. Soit $\varphi \in V^\#$. Alors,

$$\big(\delta \circ \varepsilon\big)(\varphi) = \delta\left(\sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(u_i)}u_i\right)$$

Ce qui implique que, $\forall v \in V$,

$$\begin{aligned}\Big(\big(\delta \circ \varepsilon\big)(\varphi)\Big)(v) &= \left\langle v, \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(u_i)}u_i \right\rangle = \sum_{i=1}^{n} \varphi(u_i)\langle v, u_i\rangle \\ &= \varphi\left(\underbrace{\sum_{i=1}^{n} \langle v, u_i\rangle u_i}_{=\ v \text{ thm } 7.2}\right) = \varphi(v)\end{aligned}$$

Donc, $\delta \circ \varepsilon = \mathrm{Id}_{V^\#}$.

Par conséquent, δ est bien inversible. cqfd

Nous noterons désormais ε comme étant l'inverse de δ, i.e., δ^{-1}. Ainsi,
– $\delta(w) = \varphi_w, \forall w \in V$.
– $\delta^{-1}(\varphi) = \sum_{i=1}^{n} \overline{\varphi(u_i)}u_i, \forall \varphi \in V^\#$.

Définition 9.2. *Soient V, W, des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie, munis de produits scalaires $\langle -, -\rangle_V$ et $\langle -, -\rangle_W$.*
*L'*application d'adjonction *est l'application définie par,*

$$adj : \mathscr{L}(V, W) \longrightarrow \mathscr{L}(W, V) : \mathcal{T} \longmapsto \mathcal{T}^*$$

où $\mathcal{T}^* : W \to V$ est définie par

$$\mathcal{T}^*(w) = \sum_{i=1}^{n} \langle w, \mathcal{T}(u_i)\rangle_W u_i$$

où $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$, une base orthonormale de V.

Remarque. Il est clair de $\mathcal{T}^*(w) \in V, \forall w \in W$ puisque $(u_1, ..., u_n)$ est une base de V. Par

ailleurs, $\mathcal{T}^*$ est bien linéaire car,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}^*(\alpha w + \alpha' w') &= \sum_{i=1}^{n} \langle \alpha w + \alpha' w', \mathcal{T}(u_i)\rangle_W u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \big(\alpha\langle w, \mathcal{T}(u_i)\rangle_W + \alpha'\langle w', \mathcal{T}(u_i)\rangle_W\big)u_i \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n} \langle w, \mathcal{T}(u_i)\rangle_W u_i + \alpha' \sum_{i=1}^{n} \langle w', \mathcal{T}(u_i)\rangle_W u_i \\ &= \alpha\mathcal{T}^*(w) + \alpha'\mathcal{T}^*(w')\end{aligned}$$

Par conséquent, le codomaine de *adj* est bien $\mathscr{L}(W, V)$.

Terminologie. $\mathcal{T}^*$ est appelé l'*adjoint* de $\mathcal{T}$.

Proposition 9.1. ***Caractérisation de $\mathcal{T}^*$***
Soient V, W, des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimension finie, munis de produits scalaires $\langle -, -\rangle_V$ et $\langle -, -\rangle_W$. Alors, $\forall w \in W$, $\mathcal{T}^*(w) \in V$ est l'unique vecteur de V tel que,

$$\langle \mathcal{T}(v), w\rangle_W = \langle v, \mathcal{T}^*(w)\rangle_V, \forall v \in V$$

Démonstration. Considérons la composition d'applications linéaires suivante,

$$V \xrightarrow{\mathcal{T}} W \xrightarrow{\varphi_w} \mathbb{F} : v \longmapsto \mathcal{T}(v) \longmapsto \langle \mathcal{T}(v), w\rangle_W$$

Cette composition donne un fonctionnel linéaire sur V, i.e., $\varphi_w \circ \mathcal{T} \in V^\#$. Calculons $\delta^{-1}(\varphi_w \circ \mathcal{T}) \in V$, étant donné $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de V. En utilisant la formule de l'adjoint en fonction d'une base orthonormée, nous obtenons,

$$\begin{aligned}\delta^{-1}(\varphi_w \circ \mathcal{T}) &= \sum_{i=1}^{n} \overline{\big(\varphi_w \circ \mathcal{T}(u_i)\big)}u_i = \sum_{i=1}^{n} \overline{\langle \mathcal{T}(u_i), w\rangle_W}u_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \langle w, \mathcal{T}(u_i)\rangle_W u_i = \mathcal{T}^*(w) \in V\end{aligned}$$

Quelle est l'importance de ce vecteur de V associé à w ? Calculons, $\delta \circ \delta^{-1} = \mathrm{Id}_{V^\#}$, donc $\big(\delta \circ \delta^{-1}\big(\varphi_w \circ \mathcal{T}\big)\big) = \varphi_w \circ \mathcal{T}$. Or, $\forall v' \in V$,

$$\delta(v') = \varphi_{v'} : V \longrightarrow \mathbb{F} : v \longmapsto \langle v, v'\rangle_V$$

Par conséquent, $\forall v \in V$,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{T}(v), w\rangle_W &= \varphi_w \circ \mathcal{T}(v) = \big(\delta \circ \delta^{-1}\big(\varphi_w \circ \mathcal{T}\big)\big)(v) \\ &= \langle v, \delta^{-1}(\varphi_w \circ \mathcal{T})\rangle_V = \left\langle v, \sum_{i=1}^{n} \langle w, \mathcal{T}(u_i)\rangle_W \right\rangle_V \\ &= \langle v, \mathcal{T}^*(w)\rangle_V\end{aligned}$$

L'unicité de $\mathcal{T}^*(w)$ provient du fait que δ et δ^{-1} sont des bijections.
Ainsi, $\forall \varphi \in V^\#$, $\exists! v' \in V$ tel que $\varphi = \delta \circ \underbrace{\delta^{-1}(\varphi)}_{v'} = \varphi_{v'}$. cqfd

Proposition 9.2. ***Propriétés élémentaires des adjoints***
Soient U, V, W des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimensions finies munis de produits scalaires. Alors,

1. $\forall \mathcal{S}, \mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$, $(\mathcal{S}+\mathcal{T})^* = \mathcal{S}^* + \mathcal{T}^*$,
2. $\forall \mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W), \forall \alpha \in \mathbb{F}$, $(\alpha\mathcal{T})^* = \bar{\alpha}\mathcal{T}^*$,
3. $(Id_V)^* = (Id_V)$,
4. $(\mathcal{T}^*)^* = \mathcal{T}$,
5. $\forall \mathcal{S} \in \mathscr{L}(U,V)$ *et* $\forall \mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$, $(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})^* = \mathcal{S}^*\circ\mathcal{T}^*$.

Démonstration.

1. Appliquons la caractérisation des adjoints. Ainsi, $\forall w \in W, \mathcal{S}^*(w), \mathcal{T}^*(w)$ sont les uniques vecteurs de V tels que $\langle v, \mathcal{S}^*(w)\rangle_V = \langle \mathcal{S}(v), w\rangle_W$ et $\langle v, \mathcal{T}^*(w)\rangle_V = \langle \mathcal{T}(v), w\rangle_W$. Par conséquent,
$$\begin{aligned}\langle v, \mathcal{S}^*(w)+\mathcal{T}^*(w)\rangle_V &= \langle v, \mathcal{S}^*(w)\rangle_V + \langle v, \mathcal{T}^*(w)\rangle_V\\ &= \langle \mathcal{S}(v), w\rangle_W + \langle \mathcal{T}(v), w\rangle_W = \langle \mathcal{S}(v)+\mathcal{T}(v), w\rangle_W\\ &= \langle \big(\mathcal{S}+\mathcal{T}\big)(v), w\rangle_W = \langle v, \big(\mathcal{S}+\mathcal{T}\big)^*(w)\rangle_V\end{aligned}$$
Par conséquent, $\mathcal{S}^*(w)+\mathcal{T}^*(w) = \big(\mathcal{S}+\mathcal{T}\big)^*(w)$.
2. Appliquons la caractérisation des adjoints. Ainsi $\forall w \in W$, $\mathcal{T}^*(w)$ est l'unique vecteur de V tel que,
$$\langle v, \mathcal{T}^*(w)\rangle_V = \langle \mathcal{T}(v), w\rangle_W, \forall v \in V$$
Par conséquent, $\forall \alpha \in \mathbb{F}$,
$$\begin{aligned}\langle v, \bar{\alpha}\mathcal{T}^*(w)\rangle_V &= \alpha\langle v, \mathcal{T}^*(w)\rangle_V = \alpha\langle \mathcal{T}(v), w\rangle_W = \langle \alpha\mathcal{T}(v), w\rangle_W\\ &= \langle \big(\alpha\mathcal{T}\big)(v), w\rangle_W = \langle v, \big(\alpha\mathcal{T}\big)^*(w)\rangle_V\end{aligned}$$
Par conséquent, $\bar{\alpha}\mathcal{T}^*(w) = \big(\alpha\mathcal{T}\big)^*(w)$.
3. Appliquons la formule de l'adjoint en fonction d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ de V. Alors,
$$\begin{aligned}\big(\mathrm{Id}_V\big)^*(w) &= \sum_{i=1}^{n}\langle v, \mathrm{Id}_V(u_i)\rangle_V u_i = \sum_{i=1}^{n}\langle v, u_i\rangle_V u_i\\ &= v = \mathrm{Id}_V(v), \forall v \in V\end{aligned}$$
Par conséquent, $\big(\mathrm{Id}_V\big)^* = \mathrm{Id}_V$.
4. Appliquons la caractérisation des adjoints, ainsi $\forall w \in W, \mathcal{T}^*(w)$ est l'unique vecteur de W tel que $\langle v, \mathcal{T}^*(w)\rangle_V = \langle \mathcal{T}(v), w\rangle_W$ donc,
$$\langle \mathcal{T}^*(w), v\rangle_V = \overline{\langle v, \mathcal{T}^*(w)\rangle_V} = \overline{\langle \mathcal{T}(v), w\rangle_V} = \langle w, \mathcal{T}(v)\rangle_V, \forall v \in V, w \in W$$
Par conséquent, $\mathcal{T}(v)$ est l'unique vecteur tel que,
$$\langle \mathcal{T}^*(w), v\rangle_V = \langle w, \mathcal{T}(v)\rangle_W, \forall w \in W$$
Or, $\langle \mathcal{T}^*(w), v\rangle_V = \langle w, \big(\mathcal{T}^*\big)^*(v)\rangle_W$ et donc $\mathcal{T}(v) = \big(\mathcal{T}^*\big)^*(v)$.
5. Appliquons la caractérisation des adjoints.
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\mathcal{S}"] \arrow[rr, bend right, "\mathcal{T}\circ\mathcal{S}"'] & V \arrow[r, "\mathcal{T}"] & W \end{tikzcd}$$
Ainsi, $\forall w \in W$, $\big(\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\big)^*(w)$ est l'unique vecteur de U tel que
$$\langle v, (\mathcal{T}\circ\mathcal{S})^*(w)\rangle_V = \langle(\mathcal{T}\circ\mathcal{S})(v), w\rangle_W$$

Par ailleurs, nous avons que
$$\langle u, \mathcal{S}^*(v)\rangle_V = \langle \mathcal{S}(u), v\rangle_V \qquad \text{et} \qquad \langle v, \mathcal{T}^*(w)\rangle_V = \langle \mathcal{T}(v), w\rangle_W$$
Si nous appliquons la deuxième égalité à $v = \mathcal{S}(u)$, nous obtenons que
$$\langle \mathcal{S}(u), \mathcal{T}^*(w)\rangle_V = \langle \mathcal{T}\circ\mathcal{S}(u), w\rangle_W$$
Si nous appliquons la première équation à $v = \mathcal{T}^*(w)$, nous obtenons que
$$\langle u, \mathcal{S}^*\big(\mathcal{T}^*(w)\big)\rangle_U = \langle \mathcal{S}(u), \mathcal{T}^*(w)\rangle_V$$
Par conséquent, $\langle u, \mathcal{S}^*\circ\mathcal{T}^*(w)\rangle_U = \langle \mathcal{T}\circ\mathcal{S}(u), w\rangle_W$, $\forall u \in U, w \in W$. Cela implique que $\big(\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\big)^*(w) = \mathcal{S}^*\circ\mathcal{T}^*(w)$, $\forall w \in W$. Ainsi, $\big(\mathcal{T}\circ\mathcal{S}\big)^* = \mathcal{S}^*\circ\mathcal{T}^*$. cqfd

Rappel. Si $A \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{R})$, alors, $KerA^t = (ImA)^{\perp}$, où $(ImA)^{\perp}$ est le complément orthogonal par rapport au produit scalaire euclidien.

Lemme 9.1. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel muni d'un produit scalaire abstrait $\langle -, -\rangle$. Soient $w, w' \in V$. Si $\langle v, w\rangle = \langle v, w'\rangle, \forall v \in V$ alors, $w = w'$.*
En particulier, si $\langle v, w\rangle = 0, \forall v \in V$ alors, $w = 0$.

Démonstration. Si $w, w' \in V$, alors, $\langle v, w\rangle = \langle v, w'\rangle, \forall v \in V$ implique que $\langle v, w - w'\rangle = 0$, $\forall v \in V$.
En particulier l'équation ci-dessus est vérifiée pour $v = w - w'$
$$0 = \langle w - w', w - w'\rangle = \|w - w'\|^2$$
Ce qui implique que $w - w' = 0$, ainsi, $w = w'$.
Par ailleurs si $\langle v, w\rangle = 0$, $\forall v \in V$, alors en particulier avec $v = w$, nous avons que
$$0 = \langle w, w\rangle = \|w\|^2$$
Ce qui implique que $w = 0$. cqfd

Proposition 9.3. *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$. Alors,*
$$Ker\mathcal{T}^* = (Im\mathcal{T})^{\perp}$$
où $(Im\mathcal{T})^{\perp}$ est le complément orthogonal par rapport au produit scalaire dans W, i.e., $\langle -, -\rangle_W$

Remarque. Nous pouvons nous demander si le fait de comparer $Ker\mathcal{T}^*$ avec $(Im\mathcal{T})^{\perp}$ à un sens. Si $\mathcal{T} : V \longrightarrow W$ alors $\mathcal{T}^* : W \longrightarrow V$ et donc $Ker\mathcal{T}^*$ est un sous-espace de W. Par ailleurs, $Im\mathcal{T}$ est aussi un sous-espace de W. Donc cela un en effet un sens.

Démonstration. Soit $w \in Ker\mathcal{T}^*$.
$$\begin{aligned} w \in Ker\mathcal{T}^* &\iff \mathcal{T}^*(w) = 0 \iff \langle v, \mathcal{T}^*(w)\rangle_V = 0, \forall v \in V\\ &\iff \langle \mathcal{T}(v), w\rangle_W = 0, \forall v \in V \iff w \perp \mathcal{T}(v), \forall v \in V\\ &\iff w \in (Im\mathcal{T})^{\perp}\end{aligned}$$
Par conséquent, nous avons bien que $Ker\mathcal{T}^* = (Im\mathcal{T})^{\perp}$. cqfd

Pour expliquer le lien entre l'adjonction d'applications linéaires et les matrices associées, nous avons besoin du théorème suivant.

Théorème 9.2. *Soient V et W, des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels munis des produits scalaires abstraits $\langle -,- \rangle_V$ et $\langle -,- \rangle_W$ respectivement. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases orthonormées de V, W respectivement. Alors,*

$$\Big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\Big)_{ij} = \overline{\Big([\mathcal{T}^*]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\Big)_{ji}}$$

$\forall 1 \leqslant i \leqslant dimV, \forall 1 \leqslant j \leqslant dimW$.

Démonstration. Soient $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ base orthonormée de V et $\mathcal{B}' = (u'_1, ..., u'_m)$ base orthonormée de W. Nous avons donc

$$c_k\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\big) = [\mathcal{T}(u_k)]_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{T}(u_k), u'_1 \rangle_W \\ \vdots \\ \langle \mathcal{T}(u_k), u'_m \rangle_W \end{pmatrix}, \forall 1 \leqslant k \leqslant n$$

et

$$c_l\big([\mathcal{T}^*]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\big) = [\mathcal{T}^*(u'_l)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \langle \mathcal{T}^*(u'_l), u_1 \rangle_V \\ \vdots \\ \langle \mathcal{T}^*(u'_l), u_n \rangle_V \end{pmatrix}, \forall 1 \leqslant l \leqslant m$$

Explicitons le coefficient ij de la matrice $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$:

$$\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}\big)_{ij} = \langle \mathcal{T}(u_j), u'_i \rangle_W = \langle u_j, \mathcal{T}^*(u'_i) \rangle_V = \overline{\langle \mathcal{T}^*(u'_i), u_j \rangle_V} = \overline{\big([\mathcal{T}^*]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}\big)_{ji}}$$

Ce qui termine la démonstration. cqfd

Ce résultat motive la définition suivante,

Définition 9.3. *Soit $A \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$.* L'adjoint de A *est la matrice $A^* \in \mathscr{M}(n,m,\mathbb{F})$ définie par $(A^*)_{ij} = \overline{(A)_{ji}}$.*

Remarque. Observer que si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$, alors, $A^* = A^t$.

Le théorème 9.2 nous garantit que si $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V,W)$ et si $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ sont des bases orthonormées alors,

$$[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [\mathcal{T}]^*_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Exemple 9.1. Soit $A \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{F})$, considérons

$$\mathcal{T}_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^m : v \longmapsto Av$$

Calculons $(\mathcal{T}_A)^*$ par rapport au produit scalaire euclidien sur $\mathbb{F}^n$ et $\mathbb{F}^m$. Soient $\mathcal{B} = (e_1, ..., e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e_1, ..., e_m)$, les bases orthonormées usuelles de $\mathbb{F}^n$ et $\mathbb{F}^m$.
Alors la formule de l'adjoint nous donne que $\forall w \in \mathbb{F}^m$,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_A^*(w) &= \sum_{i=1}^n \langle w, \mathcal{T}_A(e_i) \rangle_{euclid} e_i = \sum_{i=1}^n \langle w, Ae_i \rangle_{euclid} e_i \\ &= \sum_{i=1}^n \langle w, c_i(A) \rangle_{euclid} e_i \end{aligned}$$

Nous avons déjà vu que $[\mathcal{T}_A]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = A$, et donc, le théorème 9.2 implique que

$$[\mathcal{T}_A^*]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = [\mathcal{T}_A]^*_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} = A^* = [\mathcal{T}_{A^*}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$$

et donc que $(\mathcal{T}_A)^* = \mathcal{T}_{A^*}$.

Corollaire 9.1. *Soient V et W, des $\mathbb{F}$-espaces vectoriels de dimensions finies munis des produits scalaires abstraits $\langle -,- \rangle_V$ et $\langle -,- \rangle_W$ respectivement. Alors*

$$dim\big(Im(\mathcal{T})\big) = dim\big(Im(\mathcal{T}^*)\big)$$

Démonstration. On a d'une part

$$\begin{aligned} dimW &= dim(Im(\mathcal{T}^*)) + dim(Ker(\mathcal{T}^*)) \\ &= dim(Im(\mathcal{T}^*)) + dim(Im(\mathcal{T})^{\perp}) \end{aligned}$$

et d'autre part, puisque $W = Im(\mathcal{T}) \oplus Im(\mathcal{T})^{\perp}$, que

$$dimW = dim(Im(\mathcal{T})) + dim(Im(\mathcal{T})^{\perp})$$

Ainsi, $dim(Im(\mathcal{T}^*)) + dim(Im(\mathcal{T})^{\perp}) = dim(Im(\mathcal{T})) + dim(Im(\mathcal{T})^{\perp})$, d'où le résultat. cqfd

Remarque. Soit $A \in \mathscr{M}(m,n,\mathbb{R})$. Alors A et A^t sont de même rang. En effet,

$$\text{rang}(A) = dim(Im(\mathcal{T}_A)) = dim(Im(\mathcal{T}_A^*)) = dim(Im(\mathcal{T}_{A^*})) = dim(Im(\mathcal{T}_{A^t})) = \text{rang}(A^t)$$

En particulier, si A est une matrice carrée $n \times n$, alors les colonnes de A sont linéairement indépendantes si et seulement si le rang de A vaut n, ce qui est vrai si et seulement si le rang de A^t vaut n, ce qui est équivalent à dire que les colonnes de A^t sont linéairement indépendantes, ou encore que les lignes de A le sont.

9.2 Opérateurs auto-adjoints et normaux

Pour la suite de ce chapitre, fixons V comme $\Big(V, \langle -,- \rangle\Big)$, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire abstrait $\langle -,- \rangle$. De plus, nous devrons souvent distinguer les cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ et $\mathbb{F} = \mathbb{R}$.
Lors du paragraphe précédent, nous avons vu que $\text{Id}_V = (\text{Id}_V)^*$. Ce cas particulier motive la recherche d'opérateurs $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ tels que $\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$.

Définition 9.4. *Un opérateur $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ est dit* auto-adjoint *si*

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}^*$$

Analysons les conséquences de cette définition sur la matrice associée à $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ un opérateur auto-adjoint. Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormées de V. Alors,

$$\Big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\Big)_{ij} = \Big([\mathcal{T}^*]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\Big)_{ij} = \overline{\Big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\Big)_{ji}}$$

Par conséquent, $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ est symétrique (à une conjugaison près dans le cas $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) par rapport à la diagonale principale.
Si $i \neq j$ alors, $\Big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\Big)_{ij} = \overline{\Big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\Big)_{ji}}$.
Si $i = j$ alors, $\Big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\Big)_{ii} \in \mathbb{R}$. La diagonale principale est donc composée uniquement de valeurs réelles.

Terminologie. – Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ la matrice associée à un opérateur auto-adjoint est appelée une matrice *hermitienne*.

– Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ la matrice associée à un opérateur auto-adjoint est appelée une matrice *symétrique*.

Exemple 9.2. Considérons des exemple de matrices associées à des opérateurs auto-adjoints.

$\begin{pmatrix} 2 & \imath & 2+\imath \\ -\imath & 0 & 4 \\ 2-\imath & 4 & -3 \end{pmatrix}$ matrice hermitienne associée à un opérateur auto-adjoint sur un $\mathbb{C}$-espace vectoriel.

$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix}$ matrice symétrique associé à un opérateur auto-adjoint sur un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

Proposition 9.4. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. Si $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ est un opérateur auto-adjoint alors, spec$(\mathcal{T}) \subset \mathbb{R}$.*
I.e., toutes les valeurs propres de $\mathcal{T}$ sont réelles même lorsque V est un espace vectoriel complexe.

Démonstration. Soit $\lambda \in spec(\mathcal{T})$. Soit $v \in V \smallsetminus \{0\}$, un vecteur propre associé à la valeur propre λ. Alors,

$$\begin{aligned} \lambda\|v\|^2 &= \lambda\langle v, v\rangle = \langle \lambda v, v\rangle = \langle \mathcal{T}(v), v\rangle = \langle v, \mathcal{T}^*(v)\rangle \\ &= \langle v, \mathcal{T}(v)\rangle = \langle v, \lambda v\rangle = \bar{\lambda}\langle v, v\rangle = \bar{\lambda}\|v\|^2 \end{aligned}$$

Ainsi, $\lambda = \bar{\lambda}$. Par conséquent, $\lambda \in \mathbb{R}$.
Nous avons utilisé le fait que $\|v\| \neq 0$ si et seulement si $v \neq 0$. cqfd

Quelques propriétés arithmétiques, le cas complexe

Lemme 9.2. *Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ quelconque. Soit $v, w \in V$ alors,*

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{T}(v), w\rangle &= \frac{1}{4}\Big[\big\langle \mathcal{T}(v+w), v+w\big\rangle - \big\langle \mathcal{T}(v-w), v-w\big\rangle\Big] \\ &+\frac{1}{4}\imath\Big[\big\langle \mathcal{T}(v+\imath w), v+\imath w\big\rangle - \big\langle \mathcal{T}(v-\imath w), v-\imath w\big\rangle\Big] \end{aligned}$$

Remarque. Il est nécessaire que $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Cette formule est importante car elle permet d'exprimer le produit scalaire $\langle \mathcal{T}(v), w\rangle$ comme une somme de termes de la forme $\langle \mathcal{T}(u), u\rangle$.

Démonstration. Calculons,

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\Big[\big\langle \mathcal{T}(v+w), v+w\big\rangle - \big\langle \mathcal{T}(v-w), v-w\big\rangle\Big] \\ &\quad+\frac{1}{4}\imath\Big[\big\langle \mathcal{T}(v+\imath w), v+\imath w\big\rangle - \big\langle \mathcal{T}(v-\imath w), v-\imath w\big\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[\big\langle \mathcal{T}(v), v\big\rangle + \big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle + \big\langle \mathcal{T}(w), v\big\rangle + \big\langle \mathcal{T}(w), w\big\rangle \\ &\qquad - \big\langle \mathcal{T}(v), v\big\rangle + \big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle + \big\langle \mathcal{T}(w), v\big\rangle - \big\langle \mathcal{T}(w), w\big\rangle\Big] \\ &\quad+\frac{1}{4}\imath\Big[\big\langle \mathcal{T}(v), v\big\rangle - \imath\big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle + \imath\big\langle \mathcal{T}(w), v\big\rangle + \big\langle \mathcal{T}(w), w\big\rangle \\ &\qquad - \big\langle \mathcal{T}(v), v\big\rangle - \imath\big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle + \imath\big\langle \mathcal{T}(w), v\big\rangle - \big\langle \mathcal{T}(w), w\big\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[2\big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle + 2\big\langle \mathcal{T}(w), v\big\rangle\Big] + \frac{1}{4}\imath\Big[-2\imath\big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle + 2\imath\big\langle \mathcal{T}(w), v\big\rangle\Big] \\ &= \big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle \end{aligned}$$

La formule est donc vérifiée. cqfd

Lemme 9.3. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ quelconque. Si $\langle \mathcal{T}(v), v\rangle = 0$, $\forall v \in V$, alors, $\mathcal{T} = \mathbb{O}_V$*

Démonstration. Observer que si $\langle \mathcal{T}(v), v\rangle = 0$, $\forall v \in V$. Alors dans la formule de lemme 9.2, nous obtenons $\langle \mathcal{T}(u), w\rangle = 0$, $\forall u, w \in V$. Par conséquent, $\mathcal{T}(u) = 0, \forall u \in V$. et donc $\mathcal{T} = \mathbb{O}_V$. cqfd

Le cas réel

Lemme 9.4. *Soit V un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ auto-adjoint. Soit $v, w \in V$ alors,*

$$\langle \mathcal{T}(v), w\rangle = \frac{1}{4}\Big[\big\langle \mathcal{T}(v+w), v+w\big\rangle - \big\langle \mathcal{T}(v-w), v-w\big\rangle\Big]$$

Démonstration. Calculons

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4}\Big[\big\langle \mathcal{T}(v+w), v+w\big\rangle - \big\langle \mathcal{T}(v-w), v-w\big\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[\big\langle \mathcal{T}(v), v\big\rangle + \big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle + \big\langle \mathcal{T}(w), v\big\rangle + \big\langle \mathcal{T}(w), w\big\rangle \\ &\qquad - \big\langle \mathcal{T}(v), v\big\rangle + \big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle + \big\langle \mathcal{T}(w), v\big\rangle - \big\langle \mathcal{T}(w), w\big\rangle\Big] \\ &= \frac{1}{4}\Big[2\big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle + 2\big\langle \mathcal{T}(w), v\big\rangle\Big] \end{aligned}$$

Calculons maintenant,

$$\big\langle \mathcal{T}(w), v\big\rangle \underset{(a)}{=} \big\langle \mathcal{T}^*(w), v\big\rangle \underset{(b)}{=} \big\langle w, \mathcal{T}(v)\big\rangle \underset{(c)}{=} \big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle$$

(a) par $\mathcal{T}^* = \mathcal{T}$, (b) par $(\mathcal{T}^*)^* = \mathcal{T}$, (c) par la symétrie du produit scalaire.

On obtient donc

$$\frac{1}{4}\Big[2\big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle + 2\big\langle \mathcal{T}(w), v\big\rangle\Big] = \frac{1}{4}\Big[2\big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle + 2\big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle\Big] = \big\langle \mathcal{T}(v), w\big\rangle$$

La formule est donc vérifiée. cqfd

Lemme 9.5. *Soit V, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ auto-adjoint. Si $\langle \mathcal{T}(v), v\rangle = 0$, $\forall v \in V$, alors, $\mathcal{T} = \mathbb{O}_V$*

Démonstration. Soient $u, w \in V$. Nous avons par le lemme 9.4 que si $\langle \mathcal{T}(v), v\rangle = 0, \forall v \in V$ alors, $\langle \mathcal{T}(u), w\rangle = 0$ parce que

$$\langle \mathcal{T}(u-w), u-w\rangle = 0 = \langle \mathcal{T}(u+w), u+w\rangle, \forall u, w \in V$$

En particulier, $\forall u \in V$. $\langle \mathcal{T}(u), \mathcal{T}(u)\rangle = 0$ ce qui implique que $\mathcal{T}(u) = 0$ car le produit scalaire est défini positif. Par conséquent, $\mathcal{T} = \mathbb{O}_V$. cqfd

Résumons

- Si $\mathbb{F}=\mathbb{C}$, $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$ quelconque et $\langle\mathcal{T}(v),v\rangle=0,\forall v\in V$.
- Si $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$ auto-adjoint et $\langle\mathcal{T}(v),v\rangle=0,\forall v\in V$.

Alors, $\mathcal{T}=\mathbb{O}_V$

Proposition 9.5. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$. Alors,*

$$\mathcal{T} \text{ est auto-adjoint} \iff \langle\mathcal{T}(v),v\rangle\in\mathbb{R},\forall v\in V$$

Démonstration. Pour montrer que $\langle\mathcal{T}(v),v\rangle\in\mathbb{R}$, nous montrerons que

$$\langle\mathcal{T}(v),v\rangle=\overline{\langle\mathcal{T}(v),v\rangle}$$

$\Longrightarrow$ Supposons que $\mathcal{T}$ auto-adjoint. Alors,

$$\langle\mathcal{T}(v),v\rangle=\langle\mathcal{T}^*(v),v\rangle=\langle v,\mathcal{T}(v)\rangle=\overline{\langle\mathcal{T}(v),v\rangle}$$

Par conséquent, $\langle\mathcal{T}(v),v\rangle\in\mathbb{R}$.

$\Longleftarrow$ Supposons maintenant que $\langle\mathcal{T}(v),v\rangle\in\mathbb{R},\forall v\in V$. Il nous faut montrer que $\mathcal{T}=\mathcal{T}^*$. Or $\mathcal{T}=\mathcal{T}^*\Leftrightarrow\mathcal{T}-\mathcal{T}^*=\mathbb{O}_V$. Par conséquent, il nous faut voir que

$$\Big\langle\big(\mathcal{T}-\mathcal{T}^*\big)(v),v\Big\rangle=0,\forall v\in V$$

Le lemme 9.3 impliquera que $\mathcal{T}-\mathcal{T}^*=\mathbb{O}_V$. Calculons,

$$\begin{aligned}\Big\langle\big(\mathcal{T}-\mathcal{T}^*\big)(v),v\Big\rangle &= \langle\mathcal{T}(v),v\rangle-\langle\mathcal{T}^*(v),v\rangle=\langle\mathcal{T}(v),v\rangle-\langle v,\mathcal{T}(v)\rangle\\ &= \langle\mathcal{T}(v),v\rangle-\underbrace{\overline{\langle\mathcal{T}(v),v\rangle}}_{\in\mathbb{R}}=\langle\mathcal{T}(v),v\rangle-\langle\mathcal{T}(v),v\rangle=0\end{aligned}$$

Par conséquent, $\mathcal{T}$ est bien auto-adjoint. cqfd

Bonne source d'opérateurs auto-adjoints

Soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$ quelconque. Alors, $\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*$ sont auto-adjoints. En effet,

- $\big(\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}\big)^*=\mathcal{T}^*\circ\big(\mathcal{T}^*\big)^*=\big(\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}\big)$.
- De même pour $\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*$.

Observer que si $\mathcal{T}$ est auto-adjoint alors, $\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}=\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*$ car $\mathcal{T}^*=\mathcal{T}$. Par conséquent, $\mathcal{T}$ auto-adjoint implique que $\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}=\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*$. Par contre, $\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}=\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*$ n'implique pas forcément que $\mathcal{T}$ est auto-adjoint.

Motivation pour la définition suivante,

Définition 9.5. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel. $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$ est* normal *si*

$$\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}=\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*.$$

L'observation ci-dessus veut dire en termes de la définition 9.5 que tout opérateur auto-adjoint est normal mais que le contraire n'est pas vrai en général. Nous allons expliciter ce fait dans l'exemple ci-dessous.

Exemple 9.3. Pour montrer que si $\mathcal{T}$ normal alors $\mathcal{T}$ n'est pas forcément auto-adjoint, considérons $V=\mathbb{F}^2$, muni du produit scalaire euclidien usuel.

Soit $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\mathscr{M}(2,2,\mathbb{F})$. Considérons

$$\mathcal{T}_A:\mathbb{F}^n\Longrightarrow\mathbb{F}^m:v\longmapsto Av$$

Nous avons vu que $\mathcal{T}_A$ est auto-adjoint si et seulement si $A=A^*$, i.e.,

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\bar a&\bar b\\\bar c&\bar d\end{pmatrix}\iff b=\bar c \text{ et } a,b\in R$$

Analysons ce qu'il en est pour $\mathcal{T}_A$ normal. Nous avons vu que $\mathcal{T}_A^*=\mathcal{T}_{A^*}$. Par conséquent, $\mathcal{T}_A$ est normal si et seulement si $A^*A=AA^*$. Calculons,

$$\begin{aligned}A^*A&=\begin{pmatrix}\bar a&\bar c\\\bar b&\bar d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\bar a+c\bar c&\bar ab+\bar cd\\a\bar b+c\bar d&b\bar b+d\bar d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|a|^2+|c|^2&\bar ab+\bar cd\\a\bar b+c\bar d&|b|^2+|d|^2\end{pmatrix}\\AA^*&=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar a&\bar c\\\bar b&\bar d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\bar a+b\bar b&a\bar c+b\bar d\\\bar ac+\bar bd&c\bar c+d\bar d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}|a|^2+|b|^2&a\bar c+b\bar d\\\bar ac+\bar bd&|c|^2+|d|^2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Par conséquent, $A^*A=AA^*$ si et seulement si $|b|^2=|c|^2$ et $a\bar c+b\bar d=\bar ab+\bar cd$. Observer que les conditions pour qu'un opérateur soit normal sont bien moins restrictives que celles pour qu'un opérateur soit auto-adjoint.

Par exemple :

$A=\begin{pmatrix}3&1+\imath\\\sqrt2&3\end{pmatrix}$ $\mathcal{T}_A$ est normal mais A n'est pas hermitienne, par conséquent, $\mathcal{T}_A$ n'est pas auto adjoint

Propriétés importantes des opérateurs normaux

Proposition 9.6. ***Caractérisation géométrique des opérateurs normaux***
Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel, soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$. Alors,

$$\mathcal{T} \text{ normal} \iff \|\mathcal{T}(v)\|=\|\mathcal{T}^*(v)\|,\forall v\in V$$

Démonstration. Rappelons que

- si $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ et que $\langle\mathcal{T}(v),v\rangle=0,\forall v\in V$, alors, $\mathcal{T}=\mathbb{O}_V$.
- si $\mathbb{F}=\mathbb{R}$, que $\mathcal{T}$ auto-adjoint et que $\langle\mathcal{T}(v),v\rangle=0,\forall v\in V$, alors, $\mathcal{T}=\mathbb{O}_V$

Par ailleurs, puisque $\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}$ et $\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*$ sont auto-adjoints, alors, $\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}-\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*$ est aussi auto adjoint. Par conséquent, nous avons que,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}\text{ normal}&\iff\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*=\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}\iff\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}-\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*=\mathbb{O}_V\\&\iff\Big\langle\big(\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}-\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*\big)(v),v\Big\rangle=0,\forall v\in V\\&\iff\Big\langle\big(\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}\big)(v),v\Big\rangle=\Big\langle\big(\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*\big)(v),v\Big\rangle,\forall v\in V\\&\iff\langle\mathcal{T}(v),\mathcal{T}(v)\rangle=\langle\mathcal{T}^*(v),\mathcal{T}^*(v)\rangle,\forall v\in V\\&\iff\|\mathcal{T}(v)\|^2=\|\mathcal{T}^*(v)\|^2,\forall v\in V.\end{aligned}$$

Pour terminer la preuve, il suffit de prendre la racine carrée et nous avons bien le résultat cherché. cqfd

Corollaire 9.2. *Si $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$ est normal. Alors, $\forall\lambda\in\mathbb{F}$,*

$$Ker(\mathcal{T}-\lambda Id_V)=Ker(\mathcal{T}^*-\bar\lambda Id_V)$$

Démonstration. Observer tout d'abord que $\mathcal{T}$ normal implique que $\mathcal{T}-\lambda\mathrm{Id}_V$ également normal. En effet,

$$\begin{aligned}(\mathcal{T}-\lambda \mathrm{Id}_V)\circ(\mathcal{T}-\lambda \mathrm{Id}_V)^* &= (\mathcal{T}-\lambda \mathrm{Id}_V)\circ(\mathcal{T}^*-\bar{\lambda}\mathrm{Id}_V^*)\\ &= \mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*-\lambda\mathrm{Id}_V\circ\mathcal{T}^*-\bar{\lambda}\mathcal{T}\circ\mathrm{Id}_V+\lambda\bar{\lambda}\mathrm{Id}_V\circ\mathrm{Id}_V\\ &= \mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*-\lambda\mathcal{T}^*-\bar{\lambda}\mathcal{T}+\lambda\bar{\lambda}\mathrm{Id}_V=\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}-\lambda\mathcal{T}^*-\bar{\lambda}\mathcal{T}+\lambda\bar{\lambda}\mathrm{Id}_V\\ &= (\mathcal{T}^*-\bar{\lambda}\mathrm{Id}_V)\circ((\mathcal{T}-\lambda\mathrm{Id}_V)=(\mathcal{T}-\lambda\mathrm{Id}_V)^*\circ(\mathcal{T}-\lambda\mathrm{Id}_V)\end{aligned}$$

La proposition 9.6 implique que

$$\left\|(\mathcal{T}-\lambda\mathrm{Id}_V)(v)\right\| = \left\|(\mathcal{T}^*-\bar{\lambda}\mathrm{Id}_V)(v)\right\|$$

Ainsi, nous obtenons

$$\begin{aligned} v\in Ker(\mathcal{T}-\lambda\mathrm{Id}_V) &\iff \left\|(\mathcal{T}-\lambda\mathrm{Id}_V)(v)\right\|=0 \iff \left\|(\mathcal{T}^*-\bar{\lambda}\mathrm{Id}_V)(v)\right\|=0\\ &\iff v\in Ker(\mathcal{T}^*-\bar{\lambda}\mathrm{Id}_V)\end{aligned}$$

D'où l'égalité $Ker(\mathcal{T}-\lambda\mathrm{Id}_V)=Ker(\mathcal{T}^*-\bar{\lambda}\mathrm{Id}_V)$. cqfd

Corollaire 9.3. *Si $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$ est normal alors,*

$$spec(\mathcal{T}^*)=\{\bar{\lambda}|\lambda\in spec(\mathcal{T})\}$$

Démonstration. Pour cette preuve nous utiliserons le corollaire 9.2. Par conséquent,

$$\begin{aligned}\lambda\in spec(\mathcal{T}) &\iff \exists v\in Ker(\mathcal{T}-\lambda\mathrm{Id}_V)\smallsetminus\{0\}\\ &\iff \exists v\in Ker(\mathcal{T}^*-\bar{\lambda}\mathrm{Id}_V)\smallsetminus\{0\}\\ &\iff \bar{\lambda}\in spec(\mathcal{T}^*)\end{aligned}$$

D'où le résultat. cqfd

Corollaire 9.4. *Soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$ normal. Si v est un vecteur propre de $\mathcal{T}$, alors v est un vecteur propre de $\mathcal{T}^*$, et réciproquement.*

Démonstration. Conséquence directe du corollaire 9.2 cqfd

Corollaire 9.5. *Si $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$ est normal, si $\lambda,\lambda'\in spec(\mathcal{T})$ avec $\lambda\neq\lambda'$ et $v\in Ker(\mathcal{T}-\lambda Id_V)$ et $v'\in Ker(\mathcal{T}-\lambda' Id_V)$. Alors, $v\perp v'$.*

Démonstration. La caractérisation des adjoints nous donne $\langle\mathcal{T}(v),v'\rangle=\langle v,\mathcal{T}^*(v')\rangle$. Par ailleurs, $\mathcal{T}(v)=\lambda v$ et $\mathcal{T}^*(v')=\bar{\lambda}'v'$, car λ et λ' sont des valeurs propres de $\mathcal{T}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned}0 &= \langle\mathcal{T}(v),v'\rangle-\langle v,\mathcal{T}^*(v')\rangle=\langle\lambda v,v'\rangle-\langle v,\bar{\lambda}'v'\rangle=\lambda\langle v,v'\rangle-\lambda'\langle v,v'\rangle\\ &= (\lambda-\lambda')\langle v,v'\rangle\end{aligned}$$

Par conséquent, $\langle v,v'\rangle=0$ car $\lambda\neq\lambda'$ par hypothèse. Ainsi, $v\perp v'$. cqfd

9.3 Théorèmes spectraux

Théorème 9.3. ***Le théorème spectral complexe***
Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$. Alors,

il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de V formée de vecteurs propres de $\mathcal{T}$ $\iff$ *$\mathcal{T}$ normal*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $\mathcal{B}=(u_1,...,u_n)$ une base orthonormée de V formée de vecteurs propres de $\mathcal{T}$. Ainsi, $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ est diagonale. Par conséquent, $[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}]^*_{\mathcal{BB}}$ est aussi diagonale.

$$[\mathcal{T}]^*_{\mathcal{BB}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}^*=\begin{pmatrix}\bar{\lambda}_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n\end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$[\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}]^*_{\mathcal{BB}}[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$$

Or, puisque $[\mathcal{T}]^*_{\mathcal{BB}}$ et $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ sont diagonales, $[\mathcal{T}]^*_{\mathcal{BB}}[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}[\mathcal{T}]^*_{\mathcal{BB}}$. Par conséquent, reprenons notre calcul,

$$[\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}]^*_{\mathcal{BB}}[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}[\mathcal{T}]^*_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}$$

Ce qui implique que $\mathcal{T}^*\circ\mathcal{T}=\mathcal{T}\circ\mathcal{T}^*$, car l'application

$$[\cdot]_{\mathcal{BB}}:\mathscr{L}(V)\longrightarrow\mathscr{M}(n,n,\mathbb{C}):\mathcal{S}\longmapsto[\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}}$$

est un isomorphisme. I.e., $\mathcal{T}$ est normal.

$\Longleftarrow$ Puisque V est une $\mathbb{C}$-espace vectoriel, il existe une base $\mathcal{B}'$ de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}$ soit triangulaire supérieure. Nous avons vu que nous pouvons appliquer le procédé de Gram-Schmidt pour obtenir une base orthonormée $\mathcal{B}$ de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit toujours triangulaire supérieure. Nous allons montrer que les vecteurs de la base $\mathcal{B}$ sont des vecteurs propres de $\mathcal{T}$ ce qui est équivalent à dire que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ est diagonale.
Posons $\mathcal{B}=(u_1,...,u_n)$. $\mathcal{B}$ est orthonormée $\Longrightarrow[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}]^*_{\mathcal{BB}}$, et donc

$$\left([\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}\right)_{ij}=\overline{\left([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}\right)_{ji}}$$

Par ailleurs, $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ est triangulaire supérieure. Par conséquent,

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}=\begin{pmatrix}* & \cdots & *\\ & \ddots & \vdots\\ 0 & & *\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}=\begin{pmatrix}* & & 0\\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & *\end{pmatrix}$$

Nous allons utiliser le fait que puisque $\mathcal{T}$ est normal, nous avons v vecteur propre de $\mathcal{T}$ si et seulement si v vecteur propre de $\mathcal{T}^*$ (corollaire 9.4).
L'observation de la première colonne de la matrice $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ permet d'affirmer que u_1 est un vecteur propre de $\mathcal{T}$, et donc aussi de $\mathcal{T}^*$. Par conséquent, toutes les entrées de la première colonne de $[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}$ sauf la première sont nulles. Ainsi, toutes les entrées de la première ligne de $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ sont nulles sauf la première.

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}=\begin{pmatrix}* & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & * & * & * & \cdots & *\\ 0 & 0 & * & * & \cdots & *\\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * & *\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & *\end{pmatrix}\qquad\text{et}\qquad[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}=\begin{pmatrix}* & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & * & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & * & * & 0 & \cdots & 0\\ 0 & * & * & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & * & 0\\ 0 & * & * & \cdots & * & *\end{pmatrix}$$

Il suffit de poursuivre ce raisonnement par récurrence sur les lignes de $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$. Supposons que les k premières lignes de $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit nulles à l'exception des entrées de la diagonale principale. Alors, puisque la matrice est triangulaire supérieure, la seule entrée de la $k+1$ème colonne est $([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}})_{(k+1)(k+1)}$, et donc u_{k+1} est un vecteur propre de $\mathcal{T}$, donc de $\mathcal{T}^*$, ce qui implique que la $k+1$ème colonne de $[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}$ soit nulle à l'exception de l'entrée sur la diagonale principale, et donc que la seule entrée non-nulle de la $k+1$ème ligne de $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ est $([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}})_{(k+1)(k+1)}$.
Arrivé à $k=n$, nous avons prouvé que la matrice est diagonale, donc que $(u_1,...,u_n)$ forme bien une base orthonormée de vecteurs propres. cqfd

Théorème 9.4. ***Le théorème spectral réel***
Soit V, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$. Alors,

il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de V formée de vecteurs propres de $\mathcal{T}$ $\iff$ *$\mathcal{T}$ auto-adjoint*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $\mathcal{B}=(u_1,...,u_n)$ une base orthonormée de V formée de vecteurs propres de $\mathcal{T}$. Ainsi, $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ est diagonale. Par conséquent, $[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}]^*_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}]^t_{\mathcal{BB}}$ est aussi diagonale. Or la matrice transposée d'une matrice diagonale est égale à cette dernière. En effet,

$$[\mathcal{T}]^t_{\mathcal{BB}}=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}^t=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n\end{pmatrix}=[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$$

Ainsi,

$$[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}}=[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$$

Ce qui implique que $\mathcal{T}^*=\mathcal{T}$, car l'application

$$[\cdot]_{\mathcal{BB}}:\mathscr{L}(V)\longrightarrow\mathscr{M}(n,n,\mathbb{C}):\mathcal{S}\longmapsto[\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}}$$

est un isomorphisme. I.e., $\mathcal{T}$ est auto-adjoint.
$\Longleftarrow$ Pour la preuve de la réciproque, voir le livre d'Axler.

Conséquences des théorèmes spectraux

Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$. Si $\mathbb{F}=\mathbb{C}$ et $\mathcal{T}$ normal ou si $\mathbb{F}=\mathbb{R}$ et $\mathcal{T}$ auto-adjoint alors, $\mathcal{T}$ est diagonalisable et la base de vecteurs propres est orthonormée. Par conséquent, il existe $\lambda_1,...,\lambda_k\in\mathbb{F}$ tels que

$$V=Ker(\mathcal{T}-\lambda_1\mathrm{Id}_V)\oplus...\oplus Ker(\mathcal{T}-\lambda_k\mathrm{Id}_V)$$

Nous appelons cette décomposition de V la *décomposition spectrale.*

9.4 Opérateurs normaux sur $\mathbb{R}$-espaces vectoriels

Pour décrire les opérateurs normaux sur $\mathbb{R}$-espaces vectoriels, nous avons besoin de

Définition 9.6. *Une matrice $A\in\mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ est dite* diagonale en blocs *s'il existe $k\in[1,n]$ et $A_1\in\mathscr{M}(n_1,n_1,\mathbb{F}),...,A_k\in\mathscr{M}(n_k,n_k,\mathbb{F})$, tels que $n_1+...+n_k=n$ et*

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k\end{pmatrix}$$

Exemple 9.4. 1. **Les cas extrêmes :**
– Toute matrice diagonale est diagonale en blocs où tous les blocs sont des matrices de tailles 1×1.
– Toute matrice carrée est une matrice diagonale en blocs composée d'un unique bloc de taille $n\times n$.

2. **Un exemple concret** : $A\in\mathscr{M}(5,5,\mathbb{R})$,

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&2&2&0&0&0\\0&2&2&0&0&0\\0&0&0&3&3&3\\0&0&0&3&3&3\\0&0&0&3&3&3\end{pmatrix}\text{ où }\quad A_1=(1),\ A_2=\begin{pmatrix}2&2\\2&2\end{pmatrix}\text{ et }A_3=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}.$$

Lemme 9.6. *Soient $A,B\in\mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ des matrices diagonales en blocs,*

$$A=\begin{pmatrix}A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad B=\begin{pmatrix}B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & B_k\end{pmatrix}$$

où $A_i,B_i\in\mathscr{M}(n_i,n_i,\mathbb{F})$. Alors,

$$AB=\begin{pmatrix}A_1B_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_kB_k\end{pmatrix}$$

Théorème 9.5. *Soit V, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $\mathcal{T}\in\mathscr{L}(V)$. Alors,*

$\mathcal{T}$ normal $\iff$ *il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de V tel que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit diagonale en blocs.*

Où chaque bloc est soit de taille 1×1, soit de 2×2 et de la forme

$$\begin{pmatrix}a_i & -b_i\\ b_i & a_i\end{pmatrix}\text{ où }a_i,b_i\in\mathbb{R},\ b_i>0.$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ La preuve est similaire à la preuve du théorème spectral.

$\Longleftarrow$ Supposons que $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ base orthonormée de V telle que

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \text{ où } \forall i, \begin{cases} A_i = (a_i), a_i \in \mathbb{R} \\ \text{ou} \\ A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix} \text{ où } a_i, b_i \in \mathbb{R}, b_i > 0 \end{cases}$$

Par ailleurs, $\mathcal{B}$ est une base orthonormée. Par conséquent, nous avons que,

$$[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}} = [\mathcal{T}]^*_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} A_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & A_k^* \end{pmatrix}$$

Observer que si

- $A_i = (a_i)$ alors $A_i^* = (a_i)$. Par conséquent,

$$A_i A_i^* = (a_i^2) = A_i^* A_i$$

- $A_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ alors $A_i^* = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ -b_i & a_i \end{pmatrix}$. Par conséquent

$$A_i A_i^* = \begin{pmatrix} a_i^2 + b_i^2 & 0 \\ 0 & a_i^2 + b_i^2 \end{pmatrix} = A_i^* A_i$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} [\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}} &= [\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} [\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}} \\ &= \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & A_k^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1 A_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & A_k A_k^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A_1^* A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k^* A_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^* & & \\ & \ddots & \\ & & A_k^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \\ &= [\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}} [\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} = [\mathcal{T}^* \circ \mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{T} \circ \mathcal{T}^* = \mathcal{T}^* \circ \mathcal{T}$. Par conséquent, $\mathcal{T}$ est normal. cqfd

Remarque. Soit V, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ normal.

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix}$$

Nous pouvons interpréter les blocs de la matrice de la manière suivante,

- si $A_i = (a_i)$ alors, $a_i \in spec(\mathcal{T})$, i.e., a_i est une valeur propres réelle de $\mathcal{T}$,
- si $A_j = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix}$ alors, $a_j \pm \imath b_j$ seraient des valeurs propres complexes de $\mathcal{T}$, vu comme un opérateur complexe.

Un exemple s'impose pour illustrer cela.

Exemple 9.5. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}(2, 2, \mathbb{R})$, $\mathcal{T}_A \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^2)$.

Soit $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, Alors v est un vecteur propre si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathcal{T}_A \left[\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} -v_2 \\ v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda v_1 \\ \lambda v_2 \end{pmatrix}$$

Par conséquent, $v_1 = \lambda v_2 = -\lambda^2 v_1$. Puisque $v_1 \neq 0$, alors $\lambda^2 = -1$. De même que $v_2 = \lambda v_1 = -\lambda^2 v_2$, et, puisque $v_2 \neq 0$, alors $\lambda^2 = -1$. Ainsi, puisqu'il n'existe pas de tel $\lambda \in \mathbb{R}$, il n'existe pas $v \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{T}_A(v)$ soit colinéaire à v. Par conséquent, $\mathcal{T}_A$ n'admet pas de valeur propre réelle.

Par contre, si nous considérons $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}(2, 2, \mathbb{C})$, $\mathcal{T}_A \in \mathscr{L}(\mathbb{C}^2)$. Alors dans ce cas, $\mathcal{T}_A$ admet deux valeurs propres complexes $\lambda = \pm\imath = 0 \pm 1\imath$. Observer qu'il s'agit exactement des coefficients de la matrice A.

9.5 Isométries

But : Etudier des opérateurs linéaires sur un espace vectoriel muni d'un produit scalaire qui "préservent" la géométrie de l'espace vectoriel.

Définition 9.7. $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ *est une* isométrie *si*

$$\|\mathcal{T}(v)\| = \|v\|, \forall v \in V$$

Ainsi, une isométrie préserve la longueur d'un vecteur.

Exemple 9.6. 1. **Rotation dans $\mathbb{R}^2$ pour un angle θ.**

La rotation préserve la longueur d'un vecteur et est donc une isométrie car c'est une application linéaire $Rot_\theta : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ la base orthonormée standard de $\mathbb{R}^2$. En terme de matrices :

$$[Rot_\theta(e_1)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \text{ et } [Rot_\theta(e_2)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$[Rot_\theta]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

Soit $v = (a, b) \in \mathbb{R}^2$. Ainsi,

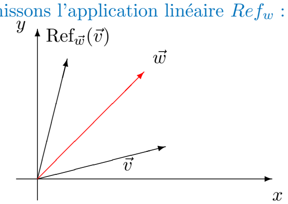
$$[Rot_\theta(v)]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a\cos\theta - b\sin\theta \\ a\sin\theta + b\cos\theta \end{pmatrix}$$

Montrons que Rot_θ est bien une isométrie.

$$\begin{aligned} \|Rot_\theta(v)\|^2 &= (a\cos\theta - b\sin\theta)^2 + (a\sin\theta + b\cos\theta)^2 \\ &= a^2\cos^2\theta - ab\cos\theta\sin\theta + b^2\sin^2\theta + a^2\sin^2\theta \\ &\quad + ab\cos\theta\sin\theta + b^2\cos^2\theta \\ &= a^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) + b^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = a^2 + b^2 \\ &= \|v\|^2 \end{aligned}$$

2. **Réflexion dans $\mathbb{R}^2$ par rapport à un vecteur w.**

Définissons l'application linéaire $Ref_w : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$.



$$\begin{aligned} Ref_w(v) &= proj_w v + (proj_w v - v) \\ &= 2proj_w v - v \end{aligned}$$

Montrons que Ref_w est bien une isométrie.

$$\begin{aligned}\|Ref_w(v)\|^2 &= \|proj_w v\|^2 + \|proj_w v - v\|^2 = \|proj_w v\|^2 + \|v - proj_w v\|^2 \\ &= \|proj_w v + v - proj_w v\|^2 = \|v\|^2\end{aligned}$$

Lemme 9.7. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Alors, nous avons les deux formules suivantes.*

– *Si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ alors,*

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right)$$

– *Si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ alors,*

$$\langle v, w\rangle = \frac{1}{4}\left(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\right) + \frac{\imath}{4}\left(\|v+\imath w\|^2 - \|v-\imath w\|^2\right)$$

Théorème 9.6.

Caractérisation géométrique et algébrique des isométries

Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes pour $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V)$.

1. *$\mathcal{S}$ est un isométrie.*
2. *$\langle \mathcal{S}(v), \mathcal{S}(v')\rangle = \langle v, v'\rangle, \forall v, v' \in V$.*
3. *$\mathcal{S}^* \circ \mathcal{S} = Id_V$.*
4. *Pour toute liste orthonormée $(u_1, ..., u_k)$ de V, la liste $\big(\mathcal{S}(u_1), ..., \mathcal{S}(u_k)\big)$ est aussi orthonormée.*
5. *Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ de V telle que $\big(\mathcal{S}(u_1), ..., \mathcal{S}(u_n)\big)$ soit une base orthonormée de V.*
6. *$\mathcal{S}^*$ est un isométrie.*
7. *$\langle \mathcal{S}^*(v), \mathcal{S}^*(v')\rangle = \langle v, v'\rangle, \forall v, v' \in V$.*
8. *$\mathcal{S} \circ \mathcal{S}^* = Id_V$.*
9. *Pour toute liste orthonormée $(u_1, ..., u_n)$ de V, la liste $\big(\mathcal{S}^*(u_1), ..., \mathcal{S}^*(u_n)\big)$ est aussi orthonormée.*
10. *Il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ de V telle que $\big(\mathcal{S}^*(u_1), ..., \mathcal{S}^*(u_n)\big)$ soit une base orthonormée de V.*

Démonstration. Pour cette démonstration nous allons procéder en trois temps.

– Dans un premier temps, nous allons démontrer le "cycle",

$$1. \Rightarrow 2. \Rightarrow 3. \Rightarrow 4. \Rightarrow 5. \Rightarrow 1.$$

– Dans un deuxième temps, pour démontrer les propositions *6.* à *10.*, il nous suffira de remplacer $\mathcal{S}$ par $\mathcal{S}^*$ et utiliser le fait que $(\mathcal{S}^*)^* = \mathcal{S}$.
– Pour conclure, il nous suffira de montrer que *1.* $\Longleftrightarrow$ *6.* pour terminer la démonstration.

1.* $\Longrightarrow$ *2. Supposons que $\mathcal{S}$ soit une isométrie, i.e., $\|\mathcal{S}(v)\| = \|v\|, \forall v \in V$. Soient $v, w \in V$ alors, si $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ nous avons,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{S}(v), \mathcal{S}(w)\rangle &= \frac{1}{4}\Big(\|\mathcal{S}(v) + \mathcal{S}(w)\|^2 - \|\mathcal{S}(v) - \mathcal{S}(w)\|^2\Big) \\ &= \frac{1}{4}\Big(\|\mathcal{S}(v+w)\|^2 - \|\mathcal{S}(v-w)\|^2\Big) = \frac{1}{4}\Big(\|v+w\|^2 - \|v-w\|^2\Big) \\ &= \langle v, w\rangle\end{aligned}$$

Cas complexe similaire.

2.* $\Longrightarrow$ *3. Supposons que $\langle \mathcal{S}(v), \mathcal{S}(w)\rangle = \langle v, w\rangle, \forall v, w \in V$. Alors,

$$0 = \underbrace{\langle \mathcal{S}(v), \mathcal{S}(w)\rangle}_{\langle \mathcal{S}^* \circ \mathcal{S}(v), w\rangle} - \langle v, w\rangle = \langle \mathcal{S}^* \circ \mathcal{S}(v) - v, w\rangle = \big\langle \big(\mathcal{S}^* \circ \mathcal{S} - \mathrm{Id}_V\big)(v), w\big\rangle$$

Par conséquent, $\mathcal{S}^* \circ \mathcal{S} - \mathrm{Id}_V = \mathbb{O}_V$, et donc, $\mathcal{S}^* \circ \mathcal{S} = \mathrm{Id}_V$.

3.* $\Longrightarrow$ *4. Supposons que $\mathcal{S}^* \circ \mathcal{S} = \mathrm{Id}_V$. Soit $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_k)$ une liste orthonormée de V. Alors, $\forall i, j$,

$$\langle u_i, u_j\rangle = \langle \mathcal{S}^* \circ \mathcal{S}(u_i), u_j\rangle = \langle \mathcal{S}(u_i), \mathcal{S}(u_j)\rangle$$

Ainsi, puisque si $i \neq j$ alors $u_i \perp u_j$, nous avons que si $i \neq j$, $\mathcal{S}(u_i) \perp \mathcal{S}(u_j)$. De même $\|\mathcal{S}(u_i)\|^2 = \langle \mathcal{S}(u_i), \mathcal{S}(u_i)\rangle = \langle u_i, u_i\rangle = 1, \forall i$. Par conséquent, la liste $\big(\mathcal{S}(u_1), ..., \mathcal{S}(u_k)\big)$ est bien une liste orthonormée.

4.* $\Longrightarrow$ *5. Il existe nécessairement une base orthonormée $(u_1, ..., u_n)$ de V, par Gram-Schmidt. Or, par *4*, la liste $\big(\mathcal{S}(u_1), ..., \mathcal{S}(u_n)\big)$ est une liste orthonormée de V. Puisque cette liste est orthonormée, elle est en particulier linéairement indépendante. Puisque sa longueur correspond à la dimension de V, c'est une base orthonormée.

5.* $\Longrightarrow$ *1. Soit $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de V telle que $\mathcal{B}' = \big(\mathcal{S}(u_1), ..., \mathcal{S}(u_n)\big)$ soit une base orthonormée. Alors il nous faut voir que $\|v\| = \|\mathcal{S}(v)\|, \forall v \in V$. Soit $v \in V$, alors $\exists! \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{F}$ tels que $v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\|\mathcal{S}(v)\|^2 &= \left\|\mathcal{S}\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right)\right\|^2 = \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i \mathcal{S}(u_i)\right\|^2 = \Big\|[\alpha_1, ..., \alpha_n]\Big\|^2_{euclid} = \Big\|[v]_{\mathcal{B}}\Big\|^2_{euclid} \\ &= \left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i u_i\right\|^2 = \|v\|^2\end{aligned}$$

Nous avons bien le résultat cherché.

1.* $\Longleftrightarrow$ *6. Rappelons que si $\mathcal{S} : V \longrightarrow V$ linéaire. Alors $dim(Ker\mathcal{S}) + dim(Im\mathcal{S}) = dimV$. Donc,

$$\mathcal{S} \text{ injectif} \Leftrightarrow Ker\mathcal{S} = \{0\} \Leftrightarrow Im\mathcal{S} = V \Leftrightarrow \mathcal{S} \text{ surjectif}$$

Par conséquent $\mathcal{S}$ injectif $\Leftrightarrow$ $\mathcal{S}$ est un isomorphisme.
Revenons à notre démonstration, nous avons vu que $\mathcal{S}$ est une isométrie si et seulement si $\mathcal{S}^* \circ \mathcal{S} = \mathrm{Id}_V$. Par ailleurs, si $\mathcal{S}^* \circ \mathcal{S} = \mathrm{Id}_V$ alors, $\mathcal{S}$ est injectif. Par conséquent, $\mathcal{S}$ est un isomorphisme. Calculons $\mathcal{S}^{-1}$ l'inverse de $\mathcal{S}$. Alors,

$$\mathcal{S}^{-1} = \mathrm{Id}_V \circ \mathcal{S}^{-1} = (\mathcal{S}^* \circ \mathcal{S}) \circ \mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^* \circ (\mathcal{S} \circ \mathcal{S}^{-1}) = \mathcal{S}^* \circ \mathrm{Id}_V = \mathcal{S}^*$$

Ainsi, $\mathcal{S}^* \circ \mathcal{S} = \mathrm{Id}_V$ implique que $\mathcal{S}$ est inversible et $\mathcal{S}^{-1} = \mathcal{S}^*$. Par conséquent,

$$\mathcal{S}^* \circ \mathcal{S} = \mathrm{Id}_V \Longrightarrow \mathcal{S} \circ \mathcal{S}^* = \mathrm{Id}_V$$

Nous avons donc la proposition *8.* Or, nous avons l'équivalence entre *6.* et *8.* et donc, $\mathcal{S} \circ \mathcal{S}^* = \mathrm{Id}_V$ implique $\mathcal{S}^*$ isométrie.
De même, $\mathcal{S} \circ \mathcal{S}^* = \mathrm{Id}_V$ implique $\mathcal{S}$ est une isométrie.
Résumons, $\mathcal{S}$ est une isométrie si et seulement si $\mathcal{S}^*$ est une isométrie.

cqfd

Conséquences du théorème 9.6

Si $\mathcal{S}$ est une isométrie et $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de V, alors, $\big(\mathcal{S}(u_1), ..., \mathcal{S}(u_n)\big)$ est aussi une base orthonormée de V. Par conséquent, nous avons que

$$\Big(\big[\mathcal{S}(u_1)\big]_{\mathcal{B}}, ..., \big[\mathcal{S}(u_n)\big]_{\mathcal{B}}\Big)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{F}^n$ par rapport au produit scalaire euclidien. Or $\left[\mathcal{S}(u_j)\right]_{\mathcal{B}} = c_j\left([\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}}\right)$ et donc

$$\left(c_1\left([\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}}\right), ..., c_n\left([\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}}\right)\right)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{F}^n$ par rapport au produit scalaire euclidien.
De même, comme nous avons que $\mathcal{S}$ est une isométrie si et seulement si $\mathcal{S}^*$ est une isométrie. Alors,

$$\left(c_1\left([\mathcal{S}^*]_{\mathcal{BB}}\right), ..., c_n\left([\mathcal{S}^*]_{\mathcal{BB}}\right)\right)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{F}^n$ par rapport au produit scalaire euclidien. Par ailleurs, $[\mathcal{S}^*]_{\mathcal{BB}} = \overline{[\mathcal{S}]^t_{\mathcal{BB}}}$, i.e., $c_j\left([\mathcal{S}^*]_{\mathcal{BB}}\right) = \overline{l_j\left([\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}}\right)}$. Par conséquent,

$$\left(\overline{l_1\left([\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}}\right)}, ..., \overline{l_n\left([\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}}\right)}\right)$$

est une base orthonormée de $\mathbb{F}^n$ par rapport au produit scalaire euclidien.

Exemple 9.7. Soit $A \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$. Quand est-ce que $\mathcal{T}_A : \mathbb{F}^n \longrightarrow \mathbb{F}^n : v \longmapsto Av$ est-elle une isométrie par rapport au produit scalaire euclidien usuel ?
Soit $\mathbb{F} = \mathbb{R}$. Alors $(\mathcal{T}_A)^* = \mathcal{T}_{A^*} = \mathcal{T}_{A^t}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_A \text{ isométrie} \quad &\iff \quad (\mathcal{T}_A)^* \circ \mathcal{T}_A = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \iff \mathcal{T}_{A^t} \circ \mathcal{T}_A = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \iff \mathcal{T}_{A^tA} = \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^n} \\ &\iff \quad A^tA = I_n \iff A \text{ est inversible et } A^{-1} = A^t\end{aligned}$$

On dit que la matrice $A \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{R})$ est orthogonale si $A^tA = I_n$.
Observer que $A^tA = I_n$ si et seulement si

$$\langle c_i(A), c_j(A)\rangle_{euclid} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et cela si et seulement si $\Big(c_1(A), ..., c_n(A)\Big)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ par rapport au produit scalaire euclidien.
Aussi, $A^tA = I_n$ si et seulement si $AA^t = I_n$ si et seulement si

$$\langle l_i(A), l_j(A)\rangle_{euclid} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$$

et cela si et seulement si $\Big(l_1(A), ..., l_n(A)\Big)$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}^n$ par rapport au produit scalaire euclidien.
Soit $\mathbb{F} = \mathbb{C}$. Alors $(\mathcal{T}_A)^* = \mathcal{T}_{A^*}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_A \text{ isométrie} \quad &\iff \quad (\mathcal{T}_A)^* \circ \mathcal{T}_A = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} \iff \mathcal{T}_{A^*} \circ \mathcal{T}_A = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} \iff \mathcal{T}_{A^*A} = \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^n} \\ &\iff \quad A^*A = I_n \iff A \text{ est inversible et } A^{-1} = A^*\end{aligned}$$

On dit que la matrice $A \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{C})$ est unitaire si $A^*A = I_n$.
Même analyse que dans le cas réel,

$$A \text{ unitaire} \begin{cases} \iff \Big(c_1(A), ..., c_n(A)\Big) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{C}^n. \\ \iff \Big(l_1(A), ..., l_n(A)\Big) \text{ est une base orthonormée de } \mathbb{C}^n.\end{cases}$$

Les valeurs propres d'une isométrie

Nous avons que si $\mathcal{S}$ est une isométrie alors $\mathcal{S}$ est un opérateur normal car

$$\mathcal{S}^* \circ \mathcal{S} = \mathrm{Id}_V = \mathcal{S} \circ \mathcal{S}^*$$

Le cas complexe

Dans le cas d'un espace vectoriel complexe, nous pouvons appliquer les théorème spectral complexe pour préciser les valeurs propres de $\mathcal{S}$ ainsi que le forme de la matrice de $\mathcal{S}$ par rapport à une bonne base.

Théorème 9.7. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V)$. Alors $\mathcal{S}$ est une isométrie si et seulement si il existe une base orthonormée de V formée de vecteurs propres de $\mathcal{S}$, $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ telle que $\mathcal{S}(u_i) = \lambda_i u_i$, où $|\lambda_i| = 1$, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Si $\mathcal{S}$ est une isométrie alors, $\mathcal{S}$ est normal et donc, par le théorème spectral complexe 9.3, il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ formée de vecteurs propres de $\mathcal{S}$. Ainsi, $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \exists \lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $\mathcal{S}(u_i) = \lambda_i u_i$. Or,

$$|\lambda_i| = |\lambda_i| \cdot \|u_i\| = \|\lambda_i u_i\| = \|\mathcal{S}(u_i)\| = \|u_i\| = 1$$

Par conséquent, $|\lambda_i| = 1$

$\Longleftarrow$ Soit $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ une base orthonormée de V telle que $\forall 1 \leqslant i \leqslant n, \exists \lambda_i \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda_i| = 1$ et $\mathcal{S}(u_i) = \lambda_i u_i$. Pour montrer que $\mathcal{S}$ est une isométrie, nous allons montrer que la liste $\Big(\mathcal{S}(u_1), ..., \mathcal{S}(u_n)\Big)$ est orthonormée, ce qui satisfait la condition *5.* du théorème 9.6. Ainsi, $\forall i, j$,

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{S}(u_i), \mathcal{S}(u_j)\rangle &= \langle \lambda_i u_i, \lambda_j u_j\rangle = \lambda_i \bar{\lambda}_j \langle u_i, u_j\rangle \\ &= \begin{cases} \lambda_i\bar{\lambda}_j & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

Par conséquent, la liste $\Big(\mathcal{S}(u_1), ..., \mathcal{S}(u_n)\Big)$ est bien orthonormée. cqfd

Remarque. Analysons le sens géométrique de ce théorème. $|\lambda| = 1$ signifie que λ est un point du cercle unité dans le plan complexe. λ correspond donc à un certain angle θ tel que la multiplication par λ de devienne une rotation par cet angle θ.

Le cas réel

Dans le cas d'un espace vectoriel réel, nous pouvons appliquer le théorème 9.5. De plus, nous pouvons préciser la forme des blocs.

Théorème 9.8. *Soit V, un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V)$. Alors $\mathcal{S}$ est une isométrie si et seulement si il existe une base orthonormée de V, $\mathcal{B} = (u_1, ..., u_n)$ telle que*

$$[\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k\end{pmatrix}$$

où $\forall 1 \leqslant i \leqslant k$ les blocs A_i sont de la forme :
- *soit $A_i = (1)$,*
- *soit $A_i = (-1)$,*
- *soit $\exists \theta \in]0, \pi[$ tel que $A_i = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Supposons $\mathcal{S}$ une isométrie. Par le théorème 9.5, nous avons l'existence d'une base orthonormée de V telle que

$$[\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \text{ où, soit } A_i = (a_i), \text{ soit } A_i = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \text{ avec } b_i > 0$$

Puisque toute permutation d'une base orthonormée est toujours une base orthonormée, nous pouvons supposer sans perte de généralité qu'$\exists j \in [1, k]$ tel que

$$\begin{cases} \text{si } i \leqslant j \Longrightarrow A_i = (a_i) \\ \text{si } i > j \Longrightarrow A_i = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{B} = (u_1, ..., u_j, v_{j+1}, w_{j+1}, ..., v_k, w_k)$$

Où $\mathcal{S}(u_i) = a_i u_i$ si $A_i = (a_i)$, et si $i > j$, on a avec $\mathcal{B}_i = (v_i, w_i)$ que,

$$A_i = \begin{pmatrix} a_j & -b_j \\ b_j & a_j \end{pmatrix} = \Big([\mathcal{S}(v_i)]_{\mathcal{B}_i} \big| [\mathcal{S}(w_i)]_{\mathcal{B}_i} \Big)$$

Et donc, $S(v_i) = a_i v_i + b_i w_i$ et $S(w_i) = -b_i v_i + a_i w_i$. Or $\mathcal{S}$ est une isométrie donc $\|\mathcal{S}(v)\| = \|v\|, \forall v \in V$. En particulier,

$$|a_i| = \|a_i u_i\| = \|\mathcal{S}(u_i)\| = \|u_i\| = 1 \Rightarrow a_i = \pm 1$$

De même que,

$$\begin{aligned} 1 &= \|v_i\|^2 = \|\mathcal{S}(v_i)\|^2 = \|a_i v_i + b_i w_i\|^2 = \|a_i v_i\|^2 + \|b_i w_i\|^2 \\ &= a_i^2 \|v_i\|^2 + b_i^2 \|w_i\|^2 = a_i^2 + b_i^2 \end{aligned}$$

Par conséquent, (a_i, b_i) est un point de l'hémicercle unité positif dans le plan complexe, il existe donc $\theta \in]0, \pi[$ tel que $a_i = \cos\theta$ et $b_i = \sin\theta$.

$\Longleftarrow$ Supposons l'existence d'une telle base $\mathcal{B}$ telle que la matrice $[\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}}$ ait la forme recherchée. Pour montrer que $\mathcal{S}$ est une isométrie, nous utiliserons le fait que s'il existe une base orthonormée $(u_1, ..., u_n)$ telle que $\Big(\mathcal{S}(u_1), ..., \mathcal{S}(u_n)\Big)$ soit aussi une base orthonormée, cela implique que $\mathcal{S}$ est une isométrie.
Sans perte de généralité nous pouvons supposer que

$$\mathcal{B} = (u_1, ..., u_j, v_{j+1}, w_{j+1}, ..., v_k, w_k)$$

Avec les blocs comme précédemment. Alors, $\forall 1 \leqslant i \leqslant j$, nous avons $\|\mathcal{S}(u_i)\| = \|\pm u_i\| = \|u_i\|$ et $\forall j+1 \leqslant i \leqslant n$, nous avons

$$\|\mathcal{S}(v_i)\|^2 = \|\cos\theta v_i + \sin\theta w_i\|^2 = \cos^2\theta \|v_i\|^2 + \sin^2\theta \|w_i\|^2 = 1 = \|v_i\|^2$$

de même que

$$\|\mathcal{S}(w_i)\|^2 = \|-\sin\theta v_i + \cos\theta w_i\|^2 = \sin^2\theta \|v_i\|^2 + \cos^2\theta \|w_i\|^2 = 1 = \|w_i\|^2$$

Il reste donc à vérifier que la liste

$$\Big(\mathcal{S}(u_1), ..., \mathcal{S}(u_j), \mathcal{S}(v_{j+1}), \mathcal{S}(w_{j+1}), ..., \mathcal{S}(v_k), \mathcal{S}(w_k)\Big)$$

et bien une liste orthogonale.

- $\forall 1 \leqslant i, l \leqslant j, i \neq l : \mathcal{S}(u_i) \perp \mathcal{S}(u_l)$ car $\mathcal{S}(u_i) = \pm u_i$, $\mathcal{S}(u_l) = \pm u_l$ et $u_i \perp u_l$.

- $\forall 1 \leqslant i \leqslant j, \forall j+1 \leqslant l \leqslant n : \mathcal{S}(u_i) \perp \mathcal{S}(v_l)$ car $\mathcal{S}(u_i) = \pm u_i$, $\mathcal{S}(v_l) = \cos\theta v_l + \sin\theta w_l$ et $u_i \perp v_l$, $u_i \perp w_l$.
- De même que $\forall 1 \leqslant i \leqslant j, \forall j+1 \leqslant l \leqslant n : \mathcal{S}(u_i) \perp \mathcal{S}(w_l)$.
- $\forall j+1 \leqslant i, l \leqslant n, i \neq l : \mathcal{S}(v_i) \perp \mathcal{S}(v_l)$ car $\mathcal{S}(v_i) \in span(v_i, w_i)$, $\mathcal{S}(v_l) \in span(v_l, w_l)$ et $v_i \perp v_l$, $v_i \perp w_l$, $w_i \perp v_l$, $w_i \perp w_l$.
- De même que $\forall j+1 \leqslant i, l \leqslant n, i \neq l : \mathcal{S}(v_i) \perp \mathcal{S}(w_l)$, $\mathcal{S}(w_i) \perp \mathcal{S}(w_l)$.
- $\forall j+1 \leqslant i \leqslant n$ $\mathcal{S}(v_i) \perp \mathcal{S}(w_i)$ car

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{S}(u_i), \mathcal{S}(w_i) \rangle &= \langle \cos\theta v_i + \sin\theta w_i, -\sin\theta v_i + \cos\theta w_i \rangle \\ &= -\cos\theta\sin\theta \langle u_i, u_i \rangle + \cos^2\theta \langle u_i, w_i \rangle - \sin^2\theta \langle u_i, w_i \rangle + \cos\theta\sin\theta \langle w_i, w_i \rangle \\ &= -\cos\theta\sin\theta \cdot 1 + \cos^2\theta \cdot 0 - \sin^2\theta \cdot 0 + \cos\theta\sin\theta \cdot 1 = 0 \end{aligned}$$

et donc $v_i \perp w_i$.

Resumons, la liste $\Big(\mathcal{S}(u_1), ..., \mathcal{S}(u_j), \mathcal{S}(v_{j+1}), \mathcal{S}(w_{j+1}), ..., \mathcal{S}(v_k), \mathcal{S}(w_k)\Big)$ est bien une base orthonormée. Par conséquent, $\mathcal{S}$ est une isométrie. cqfd

Chapitre 10

Les opérateurs complexes

Dans ce chapitre nous travaillerons uniquement sur des $\mathbb{C}$-espaces vectoriels. De plus, nous ne supposerons pas l'existence d'un produit scalaire.

Motivation : Nous savons que si V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie tel que $dimV = n$ et si $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$, alors il existe forcément une base telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit triangulaire supérieure et $spec(\mathcal{T}) = \left\{ \left([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}\right)_{ii} \middle| 1 \leqslant i \leqslant n \right\}$.
Par ailleurs, $\mathcal{T}$ est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit diagonale. Or $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ est diagonale si et seulement si $\mathcal{B}$ est une base formée de vecteurs propres.
Or il existe *des opérateurs qui ne sont pas diagonalisables*. Dans ce chapitre, nous allons analyser ce qui de passe dans le cas de tels opérateurs.

Exemple préparatoire : Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Considérons $A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}(2, 2, \mathbb{C})$ que donne l'application $\mathcal{T}_A : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2 : v \longmapsto Av$
Calculer $Ker(\mathcal{T}_A - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})$, l'espace propre associé à la valeur propre λ. Alors,

$$\begin{aligned} Ker(\mathcal{T}_A - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}) &= Ker(\mathcal{T}_A - \lambda I_{\mathbb{C}^2}) = Ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) \\ &= span(e_1) = \left\{ \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \mu \in \mathbb{C} \right\} \end{aligned}$$

Observer que

$$\begin{aligned} Ker(\mathcal{T}_A - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})^2 &= Ker(\mathcal{T}_A - \lambda I_{\mathbb{C}^2})^2 = Ker\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}^2\right) \\ &= Ker(\mathbb{O}_{2\times 2}) = \mathbb{C}^2 \end{aligned}$$

Nous avons donc que

$$Ker(\mathcal{T}_A - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}) \subsetneq Ker(\mathcal{T}_A - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})^2 = \mathbb{C}^2$$

Ainsi, si nous itérons l'opérateur $\mathcal{T}_A - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}$ et ensuite nous calculons le noyau du nouvel opérateur, nous obtenons tout l'espace $\mathbb{C}^2$ comme "espace propre généralisé" associé à la valeur propres λ.

But : Nous allons généraliser cette démarche aux opérateurs non diagonalisables quelconques. Nous obtiendrons que
– pour tout opérateur $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \qquad \forall i, \exists \lambda_i \in \mathbb{C} \text{ tel que } A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

– pour tout opérateur $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$, il existe un polynôme $c_{\mathcal{T}}(x)$ tel que les racines de ce polynôme soient les valeurs propres de $\mathcal{T}$.

10.1 Vecteurs propres généralisés

Rappel. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors, $\forall k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{T}^k = \underbrace{\mathcal{T} \circ \mathcal{T} \circ \cdots \circ \mathcal{T}}_{k \text{ fois}}$ et $\mathcal{T}^0 = \mathrm{Id}_V$.

Définition 10.1. *Soit V $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Soit $\lambda \in spec(\mathcal{T})$. Un vecteur $v \in V$ est un vecteur propre généralisé de $\mathcal{T}$ par rapport à la valeur propre λ si $\exists k \geqslant 0$ tel que $v \in Ker(\mathcal{T} - \lambda Id_V)^k$.*

Exemple 10.1. 1. Soit v un vecteur propre de $\mathcal{T}$ par rapport à la valeur propre λ. Alors v est un vecteur propre généralisé car,

$$v \in Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)^{k=1}$$

2. Soit $A \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Calculons les vecteurs propres généralisés de $\mathcal{T}_A$ par rapport à λ.
$Ker(\mathcal{T}_A - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2}) = span(e_1)$, donc e_1 est un vecteur propre de $\mathcal{T}_A$ par rapport à λ.
$Ker(\mathcal{T}_A - \lambda \mathrm{Id}_{\mathbb{C}^2})^2 = \mathbb{C}^2$, donc tout vecteur de $\mathbb{C}^2$ est un vecteur propre généralisé de $\mathcal{T}_A$ par rapport à λ.

3. Considérons $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathscr{P}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{C})$.
Soit $p(x) = a_0 \in \mathscr{P}(\mathbb{C})$. Alors, $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(p(x)\big) = 0$. Ainsi $0 \in spec\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)$.
Calculons les vecteurs propres généralisés associés à $\lambda = 0$. Soit $p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i \in \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$. Nous obtenons

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n+1}\big(p(x)\big) = 0$$

Ainsi, $p(x) \in Ker\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n+1} = Ker\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} - 0 \cdot \mathrm{Id}_{\mathscr{P}_n(\mathbb{C})}\right)^{n+1}$, $\forall p(x) \in \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$. Ainsi, tout polynôme de $\mathscr{P}_n(\mathbb{C})$ est vecteur propre généralisé de $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ pour la valeur propre $\lambda = 0$.
Observer que $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ est un exemple d'opérateur nilpotent.

Remarque. Soit $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V)$, observer que $\forall k \in \mathbb{N}$, $Ker\mathcal{S}^k \subset Ker\mathcal{S}^{k+1}$. En effet, si $v \in Ker\mathcal{S}^k$ alors, $\mathcal{S}^{k+1}(v) = \mathcal{S}\big(\mathcal{S}^k(v)\big) = S(0) = 0$.

Proposition 10.1. *Soit $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V)$. Si $Ker\mathcal{S}^k = Ker\mathcal{S}^{k+1}$, alors $Ker\mathcal{S}^k = Ker\mathcal{S}^{k+l}, \forall l > 0$.*

Démonstration. Supposons que $Ker\mathcal{S}^k = Ker\mathcal{S}^{k+1}$ et montrons que cela implique que $Ker\mathcal{S}^{k+l} = Ker\mathcal{S}^{k+l+1}$ ce qui impliquera que $Ker\mathcal{S}^k = Ker\mathcal{S}^{k+l}, \forall l > 0$. Nous avons déjà vu que $Ker\mathcal{S}^{k+l} \subset Ker\mathcal{S}^{k+l+1}$. Il nous faut donc montrer que $Ker\mathcal{S}^{k+l+1} \subset Ker\mathcal{S}^{k+l}$. Soit $v \in Ker\mathcal{S}^{k+l+1}$, alors, $0 = \mathcal{S}^{k+l+1}(v) = \mathcal{S}^{k+1}\big(\mathcal{S}^l(v)\big)$, i.e., $\mathcal{S}^l(v) \in Ker\mathcal{S}^{k+1} = Ker\mathcal{S}^k$. Et donc, $0 = \mathcal{S}^k\big(\mathcal{S}^l(v)\big) = \mathcal{S}^{k+l}(v)$. Par conséquent, $Ker\mathcal{S}^k = Ker\mathcal{S}^{k+l}, \forall l > 0$. cqfd

Lien avec les vecteurs propres généralisés

Si λ est une valeur propre d'un opérateur $\mathcal{T}$ sur V, i.e., $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$, alors il existe une suite d'inclusions

$$0 \subset Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V) \subset Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)^2 \subset \dots$$

où v un vecteur propre généralisé de $\mathcal{T}$ associé à la valeur propre λ si et seulement si $\exists k$ tel que $v \in Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)^k$.

Proposition 10.2. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie où $dimV = n$. Soit $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V)$. Alors $Ker\mathcal{S}^n = Ker\mathcal{S}^{n+1}$ et donc $Ker\mathcal{S}^n = Ker\mathcal{S}^{n+l}, \forall l > 0$.*

Ainsi, la suite d'inclusion se stabilise toujours au plus lorsque la puissance de S est égale à la dimension de V (pour autant que V soit de dimension finie).

Démonstration. Si $Ker\mathcal{S}^n \neq Ker\mathcal{S}^{n+1}$ alors l'inclusion $Ker\mathcal{S}^n \subsetneq Ker\mathcal{S}^{n+1}$ est stricte. Par conséquent, $Ker\mathcal{S}^k \subsetneq Ker\mathcal{S}^{k+1}, \forall k \leqslant n$ car autrement la suite d'inclusions

$$0 \subset Ker(\mathcal{S}) \subset Ker(\mathcal{S})^2 \subset \dots$$

se serait déjà stabilisée avant d'arriver à $Ker\mathcal{S}^n$ et nous aurions forcément $Ker\mathcal{S}^n = Ker\mathcal{S}^{n+1}$. Nous avons donc une suite d'inclusions strictes

$$0 \subsetneq Ker(\mathcal{S}) \subsetneq Ker(\mathcal{S})^2 \subsetneq \dots \subsetneq Ker\mathcal{S}^n \subsetneq Ker\mathcal{S}^{n+1} \dots$$

Par conséquent, $0 < dim(Ker\mathcal{S}) < \dots < dim(Ker\mathcal{S}^n) < dim(Ker\mathcal{S}^{n+1})$ ce qui implique que $dim(Ker\mathcal{S}^k) \geqslant k, \forall k \leqslant n+1$. En particulier $dim(Ker\mathcal{S}^{n+1}) \geqslant n+1$. Ce qui est contradictoire car $Ker\mathcal{S}^{n+1}$ est un sous-espace de V et $dimV = n$. Par conséquent, nous avons forcément que $Ker\mathcal{S}^n = Ker\mathcal{S}^{n+1}$ si $dimV = n$. cqfd

Remarque. La suite d'inclusion peut se stabiliser au "rang" $k < n$ si $dimV = n$. Mais par la proposition 10.2, nous savons au moins qu'elle se stabilise pour $dimV = n$.

Corollaire 10.1. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie où $dimV = n$. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$, $\lambda \in Spec(\mathcal{T})$. Alors,*

$$dim\Big[Ker(\mathcal{T} - \lambda Id_V)^n\Big] = dim\Big[Ker(\mathcal{T} - \lambda Id_V)^{n+l}\Big], \forall l > 0.$$

Définition 10.2. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie où $dimV = n$. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$, $\lambda \in Spec(\mathcal{T})$. Alors,*

$$Ker(\mathcal{T} - \lambda Id_V)^n$$

*est l'*espace propre généralisé *de $\mathcal{T}$ associé à la valeur propre λ.*

Remarque. Soit v, un vecteur propre généralisé pour la valeur propre λ. Alors,

$$v \in Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)^{dimV}$$

En effet, $\exists k > 0$ tel que $v \in Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)^k$. Si $k < dimV$ alors,

$$Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)^k \subset Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)^{dimV}$$

et si $k \geqslant dimV$ alors,

$$Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)^k = Ker(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)^{dimV}$$

Considérons maintenant les images d'opérateurs itérés ainsi. Soit $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V)$. Alors $Im\mathcal{S}^k \supset Im\mathcal{S}^{k+1}, \forall k > 0$. En effet, si $v \in Im\mathcal{S}^{k+1}$ alors, $\exists w \in V$ tel que $v = \mathcal{S}^{k+1}(w) = \mathcal{S}^k\big(\mathcal{S}(w)\big) \in Im\mathcal{S}^k$. Nous avons donc la suite d'inclusions,

$$V \supset Im\mathcal{S} \supset \dots \supset Im\mathcal{S}^k \supset Im\mathcal{S}^{k+1}.$$

Proposition 10.3. *Soit $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V)$. Si $Im\mathcal{S}^k = Im\mathcal{S}^{k+1}$ alors, $Im\mathcal{S}^k = Im\mathcal{S}^{k+l}, \forall l > 0$.*

Démonstration. Par récurrence sur l.
Le cas l=1 est vrai par hypothèse. Supposons que $Im\mathcal{S}^k = Im\mathcal{S}^{k+l}, \forall l > L, l \geqslant 2$. Il nous faut montrer que $Im\mathcal{S}^k = Im\mathcal{S}^{k+L}$. Nous avons déjà vu que $Im\mathcal{S}^{k+L} \subset Im\mathcal{S}^k$. Il nous reste donc à voir que $Im\mathcal{S}^k \subset Im\mathcal{S}^{k+L}$.
Puisque $Im\mathcal{S}^k = Im\mathcal{S}^{k+L-1}$, $\forall v \in V$, $\exists w \in V$ tel que $\mathcal{S}^k(v) = \mathcal{S}^{k+L-1}(w) = \mathcal{S}^{L-1}\big(\mathcal{S}^k(w)\big)$.
Or $\mathcal{S}^k(w) \in Im\mathcal{S}^{k+1}$, donc $\exists w' \in V$ tel que $\mathcal{S}^k(w) = \mathcal{S}^{k+1}(w)$. Par conséquent,

$$\mathcal{S}^k(v) = \mathcal{S}^{L-1}\big(\mathcal{S}^{k+1}(w')\big) = \mathcal{S}^{k+1+L-1}(w') = \mathcal{S}^{k+L}(w') \in Im\mathcal{S}^{k+L}$$

Donc, $Im\mathcal{S}^k \subset Im\mathcal{S}^{k+L}$, ce qui termine la preuve. cqfd

Corollaire 10.2. *Soit $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V)$. Alors, si $dimV = n$,*

$$Im\mathcal{S}^n = Im\mathcal{S}^{n+1}$$

Ainsi, comme pour les noyaux, la suite d'inclusion se stabilisé toujours au plus lorsque la puissance de S est égale à la dimension de V (pour autant que V soit de dimension finie).

Démonstration. Rappelons le théorème du Rang, si $S \in \mathscr{L}(V)$, alors, $dimV = dim(Ker\mathcal{S}) + dim(Im\mathcal{S})$. Par conséquent,

$$dim(Im\mathcal{S}^n) = dimV - dim(Ker\mathcal{S}^n) = dimV - dim(Ker\mathcal{S}^{n+1}) = dim(Im\mathcal{S}^{n+1})$$

Et donc puisque $Im\mathcal{S}^{n+1} \subset Im\mathcal{S}^n$, nous obtenons que $Im\mathcal{S}^{n+1} = Im\mathcal{S}^n$. cqfd

10.2 Le polynôme caractéristique

Dans ce paragraphe fixons $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ un opérateur sur V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie.

Définition 10.3. *Soit $\lambda \in Spec(\mathcal{T})$. La* multiplicité *de λ, notée m_λ ou $mult(\lambda)$, est*

$$m_\lambda = dim\Big[Ker(\mathcal{T} - \lambda Id_V)^{dimV}\Big]$$

Définition 10.4. *Le* polynôme caractéristique *de T, noté $c_\mathcal{T}$ est*

$$c_\mathcal{T}(x) = (x - \lambda_1)^{m_{\lambda_1}}(x - \lambda_2)^{m_{\lambda_2}} \cdots (x - \lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$$

où $Spec(\mathcal{T}) = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$.

Exemple 10.2. 0. Considérons

$$\mathcal{T} = \mathbb{O}_V : V \longrightarrow V : v \longmapsto 0, \forall v \in V$$

Alors, $spec(\mathcal{T}) = 0$ et $Ker(\mathcal{T} - 0 \cdot \mathrm{Id}_V) = V$. Ainsi, $m_{\lambda=0} = dimV$. Par conséquent,

$$c_{\mathbb{O}_V}(x) = (x-0)^{dimV} = x^{dimV}$$

1. Considérons

$$\mathcal{T} = \mathrm{Id}_V V \longrightarrow V : v \longmapsto v, \forall v \in V$$

Alors, $spec(\mathcal{T}) = 1$ et $Ker(\mathcal{T} - 1 \cdot \mathrm{Id}_V) = V$. Ainsi, $m_{\lambda=1} = dimV$. Par conséquent,

$$c_{\mathrm{Id}_V}(x) = (x-1)^{dimV}$$

2. Considérons

$$\mathcal{T} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{C})$$

Alors, $spec(\mathcal{T}) = 0$ et $Ker(\mathcal{T} - 0 \cdot \mathrm{Id}_{\mathscr{P}_n(\mathbb{C})})^{n+1} = \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$. Ainsi, $m_{\lambda=0} = n+1$. Par conséquent,

$$c_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}(x) = (x-0)^{n+1} = x^{n+1}$$

Remarque. Ces exemples illustrent que si $c_{\mathcal{T}} = c_{\mathcal{T}'}$ alors nous ne pouvons pas conclure que $\mathcal{T} = \mathcal{T}'$.

Théorème 10.1. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Soit $\mathcal{B}$ base de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit triangulaire supérieure. Soit $\lambda \in Spec(\mathcal{T})$. Alors*

$$\#\left\{i \middle| \left([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}\right)_{ii} = \lambda\right\} = dim\left[Ker(\mathcal{T} - \lambda Id_V)^{dimV}\right]$$

Démonstration. Par récurrence sur $dimV$.

Corollaire 10.3. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors,*

$$dimV = \sum_{\lambda \in Spec(\mathcal{T})} m_\lambda$$

Démonstration. Si $dimV = n$. Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{C})$ soit triangulaire supérieure. Par ailleurs,

$$\sum_{\lambda \in Spec(\mathcal{T})} m_\lambda = \sum_{\lambda \in Spec(\mathcal{T})} \#\left\{i \middle| \left([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}\right)_{ii} = \lambda\right\}$$

Poser $I_\lambda = \left\{i \middle| \left([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}\right)_{ii} = \lambda\right\}$. Observer que si $\lambda \neq \lambda'$ alors, $I_\lambda \cap I_{\lambda'} = \emptyset$ et $\forall 1 \leqslant i \leqslant n$, $\left([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}\right)_{ii} \in Spec(\mathcal{T})$ donc $\exists \lambda \in Spec(\mathcal{T})$ tel que $i \in I_\lambda$. Par conséquent,

$$\sum_{\lambda \in Spec(\mathcal{T})} m_\lambda = n$$

cqfd

Corollaire 10.4. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Il existe une base $\mathcal{B}$ de V tel que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit triangulaire supérieure.*

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}$$

Alors, $c_{\mathcal{T}}(x) = (x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n)$.

Démonstration. Rappelons, $\beta_i \in Spec(\mathcal{T}), \forall i$.

$$\#\left\{i | \beta_i = \lambda\right\} = mult(\lambda) = m_\lambda, \forall \lambda \in Spec(\mathcal{T})$$

Ce qui implique que

$$(x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n) = (x-\lambda_1)^{m_{\lambda_1}}\cdots(x-\lambda_k)^{m_{\lambda_k}} = c_{\mathcal{T}}(x)$$

où $Spec(\mathcal{T}) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$. cqfd

Théorème 10.2. ***Théorème de Cayley-Hamilton***
Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors

$$c_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) = \mathbb{O}_V$$

Démonstration. Nous avons $Spec(\mathcal{T}) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ et

$$d_i = mult(\lambda_i) = dim\left[Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{dimV}\right]$$

Alors, $c_{\mathcal{T}}(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_k)^{d_k}$. Soit $\mathcal{B} = (v_1, ..., v_n)$, une base de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit triangulaire supérieure. Alors, $c_{\mathcal{T}}(x) = (x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n)$ et donc

$$c_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) = (\mathcal{T} - \beta_1 \mathrm{Id}_V)\cdots(\mathcal{T} - \beta_n \mathrm{Id}_V)$$

Affirmation : poser $V_k = span(v_1, ..., v_k)$. Alors $\left(\mathcal{T} - \beta_1 \mathrm{Id}_V\right) \circ \cdots \circ \left(\mathcal{T} - \beta_k \mathrm{Id}_V\right)(v) = 0, \forall v \in V_k, \forall 1 \leqslant k \leqslant n$. Cette affirmation implique que $c_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) = \mathbb{O}_V$. Montrons que l'affirmation est vraie par récurrence sur k.
Premier pas : $k = 1$, $V_1 = span(v_1) \subset Ker(\mathcal{T} - \beta_1 \mathrm{Id}_V)$. Alors,

$$\left(\mathcal{T} - \beta_1 \mathrm{Id}_V\right)(v_1) = \mathcal{T}(v_1) - \beta_1 v_1 = \beta_1 v_1 - \beta_1 v_1 = 0$$

Pas de récurrence : Supposons maintenant que $\left(\mathcal{T} - \beta_1 \mathrm{Id}_V\right) \circ \cdots \circ \left(\mathcal{T} - \beta_j \mathrm{Id}_V\right)(v) = 0, \forall v \in V_j, \forall j < k$. Soit $v \in V_k$. Alors, puisque $V_k = V_{k-1} \oplus span(v_k)$, $\exists v' \in V_{k-1}$ et $\alpha \in \mathbb{F}$ tq. $v = v' + \alpha v_k$. Noter que α et v' peuvent être nuls.
Posons $P_{k-1}(T) = \left(\mathcal{T} - \beta_1 \mathrm{Id}_V\right) \circ \cdots \circ \left(\mathcal{T} - \beta_{k-1} \mathrm{Id}_V\right)$
Il vient alors

$$\left(\mathcal{T} - \beta_1 \mathrm{Id}_V\right) \circ \cdots \circ \left(\mathcal{T} - \beta_k \mathrm{Id}_V\right)(v) = P_{k-1}(T) \circ \left(\mathcal{T} - \beta_k \mathrm{Id}_V\right)(v) = P_{k-1}(T)(T(v) - \beta_k v)$$

$$= P_{k-1}(T)(T(v' + \alpha v_k) - \beta_k(\alpha v_k + v')) = P_{k-1}(T)(T(v') + \alpha T(v_k) - \beta_k \alpha v_k - \beta_k v')$$

En observant que $T(v_k) = \beta_k v_k + w$ avec un certain $w \in V_{k-1}$, il reste

$$P_{k-1}(T)\Big(T(v') + \underbrace{\alpha T(v_k) - \beta_k \alpha v_k}_{=\alpha w} - \beta_k v'\Big) = P_{k-1}(T)\Big(\underbrace{T(v') + \alpha w - \beta_k v'}_{\in V_{k-1}}\Big) = 0$$

cqfd

Exemple 10.3. 0. Considérons

$$\mathcal{T} = \mathbb{O}_V : V \longrightarrow V : v \longmapsto 0, \forall v \in V$$

Alors, $c_{\mathbb{O}_V}(x) = x^{dimV}$. Il est clair que $c_{\mathbb{O}_V}(x) = \mathbb{O}_V^{dimV} = \mathbb{O}_V$. Observer que si $q(x) = x$, nous avons aussi que $q(\mathbb{O}_V) = \mathbb{O}_V$.

1. Considérons

$$\mathcal{T} = \mathrm{Id}_V : V \longrightarrow V : v \longmapsto v, \forall v \in V$$

Alors, $c_{\mathrm{Id}_V}(x) = (x-1)^{dimV}$. Ainsi $c_{\mathrm{Id}_V}(\mathrm{Id}_V) = (\mathrm{Id}_V - \mathrm{Id}_V)^{dimV} = \mathbb{O}_V$. De nouveau, il existe un polynôme $q(x) = x - 1$ tel que

$$q(\mathrm{Id}_V) = \mathrm{Id}_V - \mathrm{Id}_V = \mathbb{O}_V$$

2. Considérons

$$\mathcal{T} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} : \mathscr{P}_n(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathscr{P}(\mathbb{C})$$

Alors, $c_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}(x) = (x-0)^{n+1} = x^{n+1}$. Ainsi, $c_{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right) = \mathbb{O}_{\mathscr{P}_n(\mathbb{C})}$, car

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{n+1} p(x) = 0, \forall p(x) \in \mathscr{P}_n(\mathbb{C})$$

Mais $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{k} \neq \mathbb{O}_{\mathscr{P}_n(\mathbb{C})}$ si $k < n+1$, car $\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\right)^{k} x^n \neq 0, \forall k < n+1$. Si $q(x) = x^k$, $k < n+1$, alors $q(\mathcal{T}) \neq \mathbb{O}_{\mathscr{P}(\mathbb{C})}$.

10.3 Le polynôme minimal

Terminologie. Un polynôme $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x_k \in \mathscr{P}_n(\mathbb{F})$ est dit *unitaire* ou *monic* si le coefficient $a_n = 1$.

Définition 10.5. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors le* polynôme minimal *de $\mathcal{T}$, noté $q_{\mathcal{T}}(x)$ est le polynôme unitaire de degré minimal tel que $q_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) = \mathbb{O}_V$*

Cette définition comporte deux parties, l'existence et l'unicité du polynôme minimal. En effet,

– Existence : considérons le polynôme caractéristique

$$c_{\mathcal{T}}(x) = (x-\lambda_1)^{m_{\lambda_1}} \cdots (x-\lambda_k)^{m_{\lambda_k}}$$

le théorème le Cayley-Hamilton implique que $c_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) = \mathbb{O}_V$. Ainsi, $\{p(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F}) | p(\mathcal{T}) = \mathbb{O}_V\} \neq \emptyset$.

– Unicité : supposons que

$$q(x) = x^m + \sum_{k=0}^{m-1} \alpha_k x^k,\ q'(x) = x^m + \sum_{k=0}^{m-1} \beta_k x^k \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$$

soient deux polynômes minimaux de $\mathcal{T}$. Alors, le polynôme $q(x) - q'(x) = \sum_{k=0}^{m-1} (\alpha_k - \beta_k) x^k$ est de degré inférieur à m, donc par le fait que le degré de $q(x)$ et $q'(x)$ est minimal par définition, nous avons soit $q(x) - q'(x)$ n'annule pas $\mathcal{T}$, soit $q(x) - q'(x) = 0$. Or, nous avons que $q(\mathcal{T}) - q'(\mathcal{T}) = \mathbb{O}_V - \mathbb{O}_V = \mathbb{O}_V$. Par conséquent, $q(x) = q'(x)$.

Lemme 10.1. *Observer que $deg\big(q_{\mathcal{T}}(x)\big) = 1$ si et seulement si $\exists \alpha \in \mathbb{F}$ tel que $\mathcal{T} = \alpha Id_V$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ $q_{\mathcal{T}}(x) = x - \alpha_0$, $\alpha_0 \in \mathbb{F}$ et $q_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) = \mathcal{T} - \alpha_0 \mathrm{Id}_V = \mathbb{O}_V$. Par conséquent, $\mathcal{T} = -\alpha_0 \mathrm{Id}_V$. Posons $\alpha = -\alpha_0$ et nous obtenons $\mathcal{T} = \alpha \mathrm{Id}_V$

$\Longleftarrow$ Construisons le polynôme, $0 = \mathcal{T} - \alpha \mathrm{Id}_V = \underbrace{(x-a)}_{q_{\mathcal{T}}(x)}(\mathcal{T})$. cqfd

Remarque. En général, $deg\big(q_{\mathcal{T}}(x)\big) \leqslant (dimV)^2$. En effet, comme la liste $\big(\mathrm{Id}_V, \mathcal{T}, \mathcal{T}^2, ..., \mathcal{T}^{(dimV)^2}\big)$ est linéairement dépendante dans $\mathscr{L}(V)$, il existe $a_0, ..., a_{(dimV)^2}$ tq $0 = a_0 \mathrm{Id}_V + ... + a_{(dimV)^2} \mathcal{T}^{(dimV)^2}$, ce qui donne bien un polynôme annulateur de degré $(dimV)^2$.

Mieux, si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, nous avons $c_{\mathcal{T}}(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{C})$ et $c_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) = \mathbb{O}_V$. Donc $deg\big(q_{\mathcal{T}}(x)\big) \leqslant deg\big(c_{\mathcal{T}}(x)\big) = dimV$.

Exemple 10.4. Soit $V = \mathbb{C}^2, \mathcal{T} = \mathrm{Id}_V$. Alors, nous avons vu que $c_{\mathcal{T}}(x) = (x-1)^2$ et $q_{\mathcal{T}}(x) = x - 1$.

Définition 10.6. *Soient $p(x), q(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$. $p(x)$* divise *$q(x)$ s'il existe $s(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$ tel que*

$$q(x) = s(x) \cdot p(x)$$

Notation. $p(x) \Big| q(x)$

Proposition 10.4. *Soient $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ et $p(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$. Alors*

$$p(\mathcal{T}) = \mathbb{O}_V \iff q_{\mathcal{T}}(x) \Big| p(x)$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $p(\mathcal{T}) = \mathbb{O}_V$. Alors, $deg\big(p(x)\big) \geqslant deg\big(q_{\mathcal{T}}(x)\big)$. Donc $\exists s(x), r(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$ tels que

$$p(x) = s(x) \cdot q_{\mathcal{T}}(x) + r(x)$$

De plus $deg\big(r(x)\big) < deg\big(q_{\mathcal{T}}(x)\big)$. Or, $\mathbb{O}_V = p(\mathcal{T}) = s(\mathcal{T}) \circ q_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) + r(\mathcal{T}) = r(\mathcal{T})$. Par définition de $q_{\mathcal{T}}$, nous avons forcément que $r(x) = 0$. Ainsi, $p(x) = s(x) \cdot q_{\mathcal{T}}(x)$,

$\Longleftarrow$ Par définition du fait de $q_{\mathcal{T}}(x)$ divise $p(x)$ nous avons que $\exists s(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$ tel que $p(x) = s(x) \cdot q_{\mathcal{T}}(x)$. Donc $p(\mathcal{T}) = s(\mathcal{T}) \circ q_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) = \mathbb{O}_V$. cqfd

Nous avons vu qu'il y avait un lien entre le polynôme caractéristique et les valeurs propres d'un opérateur. Qu'en est-il pour le polynôme minimal ?

Théorème 10.3. *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors,*

$$Spec(\mathcal{T}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{F} \Big| q_{\mathcal{T}}(\lambda) = 0\Big\}$$

Démonstration. "$\subset$" Soit $\lambda \in Spec(\mathcal{T})$ et soit $v \in V \setminus \{0\}$ tel que $\mathcal{T}(v) = \lambda v$. Soit $q_{\mathcal{T}}(x) = \sum_{i=0}^{k} a_i x^i$. Nous avons $\mathcal{T}^k(v) = \lambda^k v, \forall k > 0$. Or

$$\begin{aligned} 0 = q_{\mathcal{T}}(\mathcal{T})(v) &= \left(\sum_{i=0}^{k} a_i x^i\right)(\mathcal{T})(v) = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \mathcal{T}^i\right)(v) \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i v = \left(\sum_{i=0}^{k} a_i \lambda^i\right) v = q_{\mathcal{T}}(\lambda) v \end{aligned}$$

Par conséquent, $q_{\mathcal{T}}(\lambda) = 0$.

"$\supset$" Supposons $q_{\mathcal{T}}(\lambda) = 0$, alors, $q_{\mathcal{T}}(x) = (x-\lambda)p(x)$ où $p(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$. Or, $q_{\mathcal{T}}(\mathcal{T}) = \mathbb{O}_V = (\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)p(\mathcal{T})$. Ainsi, $\left[(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V)p(\mathcal{T})\right](v) = 0, \forall v \in V$. Or comme $deg\big(p(x)\big) < deg\big(q_{\mathcal{T}}(x)\big)$, nous avons que $p(\mathcal{T}) \neq \mathbb{O}_V$, i.e., $\exists w \in V \setminus \{0\}$ tel que $p\big(\mathcal{T}\big)(w) \neq 0$. Par conséquent, en posant $u = p(\mathcal{T})(w)$, il vient $\big(\mathcal{T} - \lambda \mathrm{Id}_V\big)\big(\underbrace{p(\mathcal{T})(w)}_{=u\neq 0}\big) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{T}(u) = \lambda u$, donc λ est une valeur propre de $\mathcal{T}$. cqfd

Remarque. Soient $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Si $deg\big(q_{\mathcal{T}}(x)\big) = dimV$, alors, puisque $deg\big(c_{\mathcal{T}}(x)\big) = dimV$, nous avons,

$$c_{\mathcal{T}}(x) = q_{\mathcal{T}}(x)$$

10.4 Décomposition d'opérateur

But : Pour V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel, et $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(\mathbb{F})$, montrer que V se décompose en une somme directe des sous-espaces invariants qui consistent en les vecteurs propres généralisés par rapport à $\mathcal{T}$.

> **Lemme 10.2.** *Soit $\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$. Soient $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ et $p(x) \in \mathscr{P}(\mathbb{F})$. Alors, $Ker\Big(p(\mathcal{T})\Big)$ est invariant par rapport à $\mathcal{T}$.*

Démonstration. Soit $v \in Ker\big(p(\mathcal{T})\big)$. Alors, $p(\mathcal{T})\big(\mathcal{T}(v)\big) = \mathcal{T}\big(p(\mathcal{T})(v)\big) = \mathcal{T}(0) = 0$. Ainsi, $\mathcal{T}(v) \in Ker\big(p(\mathcal{T})\big)$. cqfd

> **Théorème 10.4.** *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des valeurs propres distinctes de $\mathcal{T}$ et soient*
>
> $$U_i = Ker(\mathcal{T} - \lambda_i Id_V)^{dimV}, \forall 1 \leqslant i \leqslant m$$
>
> *les espaces propres généralisés associés à chaque valeur propre λ_i. Alors,*
> 1. *chaque U_i est invariant par rapport à $\mathcal{T}$,*
> 2. *chaque $(\mathcal{T} - \lambda_i Id_V)\big|_{U_i}$ est niloptent,*
> 3. *$V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$.*

Démonstration. 1. Poser $p_i(x) = (x - \lambda_i)^{dimV} \in \mathscr{P}(\mathbb{C})$. Alors, $U_i = Ker\big(p_i(\mathcal{T})\big)$ car $p_i(\mathcal{T}) = (\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{dimV}$. Ainsi, par le lemme, nous avons que U_i est invariant par rapport à $\mathcal{T}$.

2. $u \in U_i = Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{dimV}$ si et seulement si $(\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{dimV}(u) = 0$. Par conséquent, $(\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V)\big|_{U_i}$ est nilpotent.
3. Comme $dimU_i = mult(\lambda_i)$, nous avons,

$$dimV = \sum_{i=1}^{k} mult(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} dimU_i$$

Ainsi, pour montrer que $V = U_1 \oplus ... \oplus U_k$ il suffit donc de montrer que $V = U_1 + ... + U_k$. Posons $U = U_1 + ... + U_k$. Alors, puisque chaque U_i est invariant par rapport à $\mathcal{T}$, U est invariant par rapport à $\mathcal{T}$. Posons maintenant, $\mathcal{S} = \mathcal{T}\big|_U \in \mathscr{L}(V)$. Alors, $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ ont les mêmes valeurs propres de même multiplicité, car tout tous les vecteurs propres généralisés de $\mathcal{T}$ sont en fait contenu dans U par construction. Par conséquent,

$$dimU = \sum_{i=1}^{k} mult(\lambda_i) = \sum_{i=1}^{k} dimU_i$$

Nous avons donc, $U = U_1 \oplus ... \oplus U_k$. Comme $dimV = dimU$, il vient que $V = U = U_1 \oplus ... \oplus U_k$. cqfd

> **Corollaire 10.5.** *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des valeurs propres distinctes de $\mathcal{T}$. Alors V admet une base de vecteurs propres généralisés de $\mathcal{T}$.*

Démonstration. Il suffit de prendre la concaténation des bases des U_i. cqfd

Remarque. Par rapport à une telle base de V, $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ est diagonale en blocs.

$$\begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_k \end{pmatrix} \qquad \text{où chaque bloc } A_i \text{ est de taille } mult(\lambda_i)$$

> **Lemme 10.3.** *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{N} \in \mathscr{L}(V)$ un opérateur nilpotent, alors il existe une base $\mathcal{B}$ de V tq,*
>
> $$[\mathcal{N}]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix}$$

Démonstration. Observer que si $\mathcal{N}$ est nilpotent alors, $Spec(\mathcal{N}) = \{0\}$, car si $\mathcal{T}(v) = \lambda v$ avec $\lambda \neq 0$ et $v \neq 0$, alors

$$\mathcal{N}^k(v) = \lambda^k v \neq 0, \forall k \in \mathbb{N}$$

Comme $\mathbb{F} = \mathbb{C}$, il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que

$$[\mathcal{N}]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}$$

Or, $\mathcal{N}$ est nilpotent alors $\beta_i = 0, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$. Par conséquent, $[\mathcal{N}]_{\mathcal{BB}}$ est bien de la forme recherchée. cqfd

Théorème 10.5. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_m$ des valeurs propres distinctes de $\mathcal{T}$. Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ telle que,*

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix} \text{ où } A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Démonstration. Poser $U_i = Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{dimV}$. Comme $(\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V)\big|_{U_i}$ est nilpotent, nous avons par le lemme qu'il existe une base de $\mathcal{B}_i$ de U_i telle que

$$\left[(\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V)\big|_{U_i}\right]_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} 0 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & 0 \end{pmatrix} \Longrightarrow \left[\mathcal{T}\big|_{U_i}\right]_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} \lambda_i & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Par conséquent, puisque U_i est invariant par rapport à $\mathcal{T}, \forall i$, nous avons,

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \left[\mathcal{T}\big|_{U_1}\right]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \left[\mathcal{T}\big|_{U_k}\right]_{\mathcal{B}_k\mathcal{B}_k} \end{pmatrix}$$

cqfd

Exemple 10.5. Soit V, un $\mathbb{C}$ espace vectoriel, supposons que $dimV = 2$. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors,

- soit $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ la valeur propre de $\mathcal{T}$ et $\mu \in \mathbb{C}$ quelconque.
- soit $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$ les valeurs propres de $\mathcal{T}$.

10.5 Bases de Jordan

Définition 10.7. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Une base $\mathcal{B}$ de V est une* Base de Jordan *par rapport à $\mathcal{T}$ si*

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_m \end{pmatrix} \text{ où } A_i = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix}$$

De plus, $\lambda_1, ..., \lambda_m$ sont les valeurs propres (non-nécessairement distinctes) de $\mathcal{T}$.

Exemple 10.6. Un petit exemple concret de matrice de Jordan,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ où } \begin{array}{l} A_1 = (2),\ A_2 = (1) \text{ et} \\ A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\ A_4 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}. \end{array}$$

Lemme 10.4. *Soit V, un $\mathbb{F}$-espace vectoriel ($\mathbb{F} = \mathbb{C}$ ou $\mathbb{R}$) et soit $\mathcal{N} \in \mathscr{L}(V)$ un opérateur nilpotent. Alors, $\exists v_1, ..., v_k \in V$ et $m_1, ..., m_k \in \mathbb{N}$ tels que la liste*

$$\left(v_1, \mathcal{N}(v_1), ..., \mathcal{N}^{(m_1)}(v_1), ..., v_k, \mathcal{N}(v_k), ..., \mathcal{N}^{(m_k)}(v_k)\right)$$

est une base de V et tel que $\left(\mathcal{N}^{(m_1)}(v_1), ..., \mathcal{N}^{(m_k)}(v_k)\right)$ est une base de $Ker\mathcal{N}$.

Démonstration. Récurrence sur $dimV$.

Base de la récurrence : supposons $dimV = 1$ et $\mathcal{N}$ nilpotent. Nous avons vu que la seule valeur propre de $\mathcal{N}$ était $\lambda = 0$. Par conséquent, $\mathcal{N}(v) = 0, \forall v \in V$. Ainsi, toute base de V est de la forme voulue.

Hypothèse de récurrence : supposons l'énoncé vrai pour tout V de dimension inférieure à n, i.e., $dimV < n$. Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel tel que $dimV = n$. Soit $\mathcal{N} \in \mathscr{L}(V)$ nilpotent. Observer que si $\mathcal{N}$ est nilpotent, alors $Ker\mathcal{N} \neq \{0\}$ et $dim(Ker\mathcal{N}) > 0$, et donc $dim(Im\mathcal{N}) = dimV - dim(Ker\mathcal{N}) < n$. Par ailleurs, $Im\mathcal{N}$ est un sous-espace de V invariant par rapport à $\mathcal{N}$ car, si $w \in Im\mathcal{N}$ alors $\mathcal{N}(w) \in Im\mathcal{N}$. Nous pouvons donc appliquer l'hypothèse de récurrence à

$$\mathcal{N}\big|_{Im\mathcal{N}} : Im\mathcal{N} \longrightarrow Im\mathcal{N}$$

De plus, $\mathcal{N}\big|_{Im\mathcal{N}}$ est nilpotent car $\mathcal{N}$ nilpotent.
Ainsi, il existe une base

$$\left(v_1, \mathcal{N}(v_1), ..., \mathcal{N}^{(n_1)}(v_1), ..., v_j, \mathcal{N}(v_j), ..., \mathcal{N}^{(n_j)}(v_j)\right)$$

de $Im\mathcal{N}$ où $\left(\mathcal{N}^{(n_1)}(v_1), ..., \mathcal{N}^{(n_j)}(v_j)\right)$ est une base de $Ker\left(\mathcal{N}\big|_{Im\mathcal{N}}\right) = Ker\mathcal{N} \cap Im\mathcal{N}$.
En particulier, $\forall 1 \leqslant i \leqslant j$, $v_i \in Im\mathcal{N}$ donc $\exists u_i \in V$ tel que $v_i = \mathcal{N}(u_i)$. Fixons $u_1, ..., u_j \in V$ tels que $\mathcal{N}(u_i) = v_i$ et $m_i = n_i + 1$ pour chaque i.
Comme $Im\mathcal{N} \cap Ker\mathcal{N} \subseteq Ker\mathcal{N}$, il existe $W \subseteq Ker\mathcal{N}$ tel que

$$Ker\mathcal{N} = (Im\mathcal{N} \cap Ker\mathcal{N}) \oplus W$$

Soit $(u_{j+1}, ..., u_k)$ une base de W et $m_{j+1} = ... = m_k = 0$. Donc la liste

$$\left(\mathcal{N}^{(n_1)}(v_1), ..., \mathcal{N}^{(n_j)}(v_j), u_{j+1}, ..., u_k\right) = \left(\mathcal{N}^{(m_1)}(u_1), ..., \mathcal{N}^{(m_j)}(u_j), u_{j+1}, ..., u_k\right)$$

est une base de $Ker\mathcal{N}$.
Affirmation : la liste $(u_1, ..., u_k)$ et $m_1, ..., m_k$ satisfont les propriétés demandées.

- La liste
$$\left(v_1, \mathcal{N}(u_1), ..., \mathcal{N}^{(m_1)}(u_1), ..., v_k, \mathcal{N}(u_k), ..., \mathcal{N}^{(m_k)}(u_k)\right)$$
est linéairement indépendante. En effet, supposons que
$$0 = \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=0}^{m_i} a_{rs} \mathcal{N}^s(u_r)$$
où $a_{rs} \in \mathbb{F}, \forall r, s$. Appliquons $\mathcal{N}$ aux deux côtés de cette équation. Puisque $\forall 1 \leqslant i \leqslant j$, $\mathcal{N}(u_i) = v_i$ et $\forall j+1 \leqslant i \leqslant k$, $\mathcal{N}(u_i) = 0$, il vient :
$$0 = \sum_{r=1}^{k} \sum_{s=0}^{m_i} a_{rs} \mathcal{N}^{s+1}(u_r) = \sum_{r=1}^{j} \sum_{s=0}^{m_i} a_{rs} \mathcal{N}^{s}(v_r)$$

Puisque $\forall 1 \leqslant i \leqslant j$, $\mathcal{N}^{(m_i)}(v_i) = \mathcal{N}(\underbrace{\mathcal{N}^{(n_i)}(v_i)}_{\in Ker(\mathcal{N})}) = 0$, il reste

$$0 = \sum_{r=1}^{j}\sum_{s=0}^{n_i} a_{rs}\mathcal{N}^s(v_r)$$

Comme la liste $\Big(v_1, \mathcal{N}(v_1), ..., \mathcal{N}^{(n_1)}(v_1), ..., v_j, \mathcal{N}(v_j), ..., \mathcal{N}^{(n_j)}(v_j)\Big)$ est une base de $Im(\mathcal{N})$, nous avons que $a_{rs} = 0, \forall 1 \leqslant r \leqslant j, 0 \leqslant s \leqslant n_i$. Il nous reste donc de la première somme,

$$0 = a_{1,m_1}\mathcal{N}^{m_1}(u_1) + ... + a_{j,m_j}\mathcal{N}^{m_j}(u_j) + a_{j+1,0}u_{j+1} + ... + a_{k,0}u_k$$

Or, $\Big(\mathcal{N}^{(m_1)}(u_1), ..., \mathcal{N}^{(m_j)}(u_j), u_{j+1}, ..., u_k\Big)$ est une base de $Ker\mathcal{N}$, et donc $a_{rs} = 0, \forall r, s$.

– Cette liste est génératrice. En effet, comme $dim(Ker\mathcal{N}) = dim(Im\mathcal{N} \cap Ker\mathcal{N}) + dimW$, nous avons que

$$\begin{aligned} dimV &= dim(Im\mathcal{N}) + dim(Ker\mathcal{N}) = dim(Im\mathcal{N}) + dim(Im\mathcal{N} \cap Ker\mathcal{N}) + dimW \\ &= \left(\sum_{i=1}^{j}(n_i+1)\right) + j + (k-j) = \left(\sum_{i=1}^{j}(n_i+2)\right) + (k-j) \underset{(*)}{=} \sum_{i=1}^{k} m_i + 1 \\ &= \#\Big\{v_1, \mathcal{N}(v_1), ..., \mathcal{N}^{(m_1)}(v_1), ..., v_k, \mathcal{N}(v_k), ..., \mathcal{N}^{(m_k)}(v_k)\Big\} \end{aligned}$$

$(*)$ Nous avons utilisé le fait que $m_{j+1} = ... = m_k = 0$ pour faire entrer $(k-j)$ dans la somme.

– Comme vu plus haut, la liste

$$\Big(\mathcal{N}^{(n_1)}(v_1), ..., \mathcal{N}^{(n_j)}(v_j), u_{j+1}, ..., u_k\Big)$$

est bien une base de $Ker\mathcal{N}$. cqfd

> **Théorème 10.6.** *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel et soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors V admet une base de Jordan par rapport à $\mathcal{T}$.*

Démonstration. Nous allons d'abord montrer l'existence d'une base de Jordan par rapport à un opérateur nilpotent $\mathcal{N}$, puis utiliser ce résultat pour montrer d'existence d'une telle base pour tout opérateur $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$.

Cas particulier, $\mathcal{N} \in \mathscr{L}(V)$ un opérateur nilpotent. Le lemme 10.4 implique l'existence d'une base de V,

$$\mathcal{B} = \Big(v_1, \mathcal{N}(v_1), ..., \mathcal{N}^{(m_1)}(v_1), ..., v_k, \mathcal{N}(v_k), ..., \mathcal{N}^{(m_k)}(v_k)\Big)$$

où la liste $\Big(\mathcal{N}^{(m_1)}(v_1), ..., \mathcal{N}^{(m_k)}(v_k)\Big)$ est une base de $Ker\mathcal{N}$. Poser $\mathcal{B}_i = (\mathcal{N}^{m_i}(v_i), ..., \mathcal{N}(v_i), v_i)$ et $V_i = span\mathcal{B}_i$. Observer que V_i est invariant par rapport à $\mathcal{N}$, car

$$\mathcal{N}\Big(\mathcal{N}^k(v_k)\Big) = \begin{cases} \mathcal{N}^{k+1}(v_i) & \text{si } 1 \leqslant k \leqslant m-1, \\ 0 & \text{si } k \geqslant m_i \end{cases}$$

Nous pouvons donc considérer $\mathcal{N}\big|_{V_i}$ comme un opérateur sur V_i, i.e., $\mathcal{N}\big|_{V_i} \in \mathscr{L}(V_i)$. Par ailleurs, par inspection,

$$\Big[\mathcal{N}\big|_{V_i}\Big]_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

Par conséquent,

$$[\mathcal{N}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \Big[\mathcal{N}\big|_{V_1}\Big]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Big[\mathcal{N}\big|_{V_k}\Big]_{\mathcal{B}_k\mathcal{B}_k} \end{pmatrix}$$

est une matrice en forme de Jordan où $\lambda_i = 0, \forall i$. Ainsi, $\mathcal{B}$ est bien une base de Jordan par rapport $\mathcal{N}$.

Cas général, $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ un opérateur quelconque sur V. Soit $spec(\mathcal{T}) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$. Poser $V_{\lambda_i} = Ker\big(\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V\big)^{dimV}$, le sous-espace propre généralisé associé à λ_i.
Alors, $V = V_{\lambda_1} \oplus ... \oplus V_{\lambda_k}$ et chaque V_{λ_i} est invariant par rapport à $\mathcal{T}$. Ainsi, $\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}}$ peut être vu comme un opérateur de V_{λ_i}, i.e., $\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}} \in \mathscr{L}(V_{\lambda_i})$. Observer alors que $\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{V_{\lambda_i}}$ est un opérateur nilpotent sur V_{λ_i} car

$$\Big(\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V\Big)^{dimV}(v) = 0, \forall v \in V_{\lambda_i}$$

Par conséquent, nous pouvons utiliser le cas particulier étudié précédemment et dire qu'il existe une base $\mathcal{B}_i$ de V_{λ_i} qui est une base de Jordan par rapport à $\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{V_{\lambda_i}}$ où tous les coefficients de la diagonale de $\Big[\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{V_{\lambda_i}}\Big]_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i}$ sont nuls.

$$\Big[\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{V_{\lambda_i}}\Big]_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i} = \begin{pmatrix} A_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{il_i} \end{pmatrix} \text{ où } A_{i_j} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix} \forall 1 \leqslant j \leqslant l_i$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \Big[\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}}\Big]_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i} &= \Big[\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{V_{\lambda_i}}\Big]_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i} + \Big[\lambda_i \mathrm{Id}_{V_{\lambda_i}}\Big]_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i} \\ &= \begin{pmatrix} A_{i1} & & \\ & \ddots & \\ & & A_{il_i} \end{pmatrix} \text{ où } A_{ij} = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & \lambda_i \end{pmatrix} \forall 1 \leqslant j \leqslant l_i \end{aligned}$$

Ainsi, $\mathcal{B}_i$ est une base de Jordan de V_{λ_i} par rapport a $\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}}$.
Soit $\mathcal{B}$ la base de V formée de la concaténation des base $\mathcal{B}_1, ..., \mathcal{B}_k$ de $V_{\lambda_1}, ..., V_{\lambda_k}$. Alors,

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \Big[\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_1}}\Big]_{\mathcal{B}_1\mathcal{B}_1} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \Big[\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_k}}\Big]_{\mathcal{B}_k\mathcal{B}_k} \end{pmatrix}$$

Puisque chaque bloc $\Big[\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}}\Big]_{\mathcal{B}_i\mathcal{B}_i}$ est en forme de Jordan, la matrice $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ l'est aussi.
En conclusion, $\mathcal{B}$ est bien une base de Jordan par rapport à $\mathcal{T}$. cqfd

Calcul de la base de Jordan

Observer que les preuves du théorème 10.6 et du lemme 10.4 sont assez constructives et nous donnent un piste pour la recherche de base de Jordan par rapport à $\mathcal{T}$.

1. Trouver $spec(\mathcal{T})$.

2. Calculer $V_{\lambda_i} = Ker(\mathcal{T} - \lambda_i \mathrm{Id}_V)^{dimV}$ pour toutes les valeurs propres λ_i.
3. Calculer $Ker(\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}} - \lambda_i \mathrm{Id}_{V_{\lambda_i}})$, en trouver une base et l'étendre en une base de V_{λ_i}, comme dans la preuve du lemme. Ainsi, $\mathcal{B}_i$ est une base de Jordan de V par rapport à $\mathcal{T}\big|_{V_{\lambda_i}}$.
4. La concaténation de toutes les bases $\mathcal{B}_i$ est alors une base de Jordan de V par rapport à $\mathcal{T}$.

Chapitre 11

La trace et le déterminant d'un opérateur complexe

But Définir une application $\det : \mathscr{L}(V) \longrightarrow \mathbb{C}$, où V est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, qui étend la notion de déterminant déjà vue pour les matrices à la section 6.4.

Problème Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Nous voulons que $\det(\mathcal{T}) = \det\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\big)$ pour une base $\mathcal{B}$ de V quelconque. Autrement dit, $\forall \mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ bases de V, il faut que

$$\det\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\big) = \det\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}\big)$$

Changement de bases

Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie ($dimV = n$). Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases de V. Poser $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$, la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ vers la base $\mathcal{B}'$.
Si Id_V est inversible, alors, $P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$ est inversible est $P^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ car,

$$P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}_V \circ \mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n$$

Ce calcul justifie la proposition suivante,

Proposition 11.1. *Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ des bases que V. Alors,*

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = P^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}}$$

Démonstration.

$$P^{-1}_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'} [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'} P_{\mathcal{B}'\mathcal{B}} = [\mathrm{Id}_V \circ \mathcal{T} \circ \mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$$

cqfd

11.1 La trace

Définition 11.1. *La* trace *d'une matrice carrée $A \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$*

$$Tr(A) = \sum_{i=1}^{n} (A)_{ii}$$

Proposition 11.2. *Soient $A, B \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$. Alors $Tr(AB) = Tr(BA)$.*

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(AB) &= \sum_{i=1}^{n}(AB)_{ii} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(A)_{ij}(B)_{ji} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(B)_{ji}(A)_{ij} \\ &= \sum_{j=1}^{n}(BA)_{jj} = \mathrm{Tr}(BA)\end{aligned}$$

cqfd

Corollaire 11.1. *Soient $A, B \in \mathscr{M}(n, n, \mathbb{F})$. Si B est inversible, alors*

$$Tr(B^{-1}AB) = Tr(A)$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}\mathrm{Tr}(B^{-1}AB) &= \mathrm{Tr}(B^{-1}(AB)) = \mathrm{Tr}((AB)B^{-1}) = \mathrm{Tr}\big(A(BB^{-1})\big) \\ &= \mathrm{Tr}(AI_n) = \mathrm{Tr}(A)\end{aligned}$$

cqfd

Définition 11.2. *Deux matrices A et A' sont dites* semblables *s'il existe une matrice inversible B telle que*

$$A' = B^{-1}AB$$

Alors, le fait que A, A' sont semblables implique que $Tr(A) = \mathcal{T}(A')$.

Cette définition implique que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ et $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}$ sont semblables, $\forall \mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ et pour tout choix de bases $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ de V. Par conséquent, $\mathrm{Tr}\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\big) = \mathrm{Tr}\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}\big)$, et donc nous pouvons définir :

Définition 11.3. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors la* trace de l'opérateur $\mathcal{T}$ *est définie par l'application linéaire $Tr : \mathscr{L}(V) \longrightarrow \mathbb{F}$ avec*

$$Tr(\mathcal{T}) = Tr\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\big)$$

où $\mathcal{B}$ est une base quelconque de V.

Interprétation en termes de $spec(\mathcal{T})$ et $c_{\mathcal{T}}(x)$

Pour tout $\mathbb{C}$-espace vectoriel V, il existe une base $\mathcal{B}$ de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ soit triangulaire supérieure. Ainsi,

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\beta_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n\end{pmatrix} \quad \text{où } \beta_i \in spec(\mathcal{T}), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$$

Rappelons que $mult(\lambda) = \#\{i | \beta_i = \lambda\}$, $\forall \lambda \in spec(\mathcal{T})$. Par conséquent,

$$\mathrm{Tr}(\mathcal{T}) = \mathrm{Tr}\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\big) = \sum_{i=1}^{n}\beta_i = \sum_{\lambda \in spec(\mathcal{T})} mult(\lambda)\cdot\lambda$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}c_{\mathcal{T}}(x) &= (x-\beta_1)\cdots(x-\beta_n) = x^n - (\beta_1 + \ldots + \beta_n)x^{n-1} + \ldots \\ &= x^n - \mathrm{Tr}(\mathcal{T})x^{n-1} + \ldots\end{aligned}$$

11.2 Le déterminant d'un opérateur

Définition 11.4. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Le* déterminant d'un opérateur $\mathcal{T}$ *est l'application* det $: \mathscr{L}(V) \longrightarrow \mathbb{C}$ *définie par*

$$\det(\mathcal{T}) = (-1)^n c_{\mathcal{T}}(0)$$

Analysons cette définition. Si $spec(\mathcal{T}) = \{\lambda_1, ..., \lambda_k\}$ et $d_i = mult(\lambda_i)$, alors,

$$c_{\mathcal{T}}(x) = (x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_k)^{d_k}$$

Par conséquent,

$$c_{\mathcal{T}}(0) = (0-\lambda_1)^{d_1}\cdots(0-\lambda_k)^{d_k} = (-1)^{\sum_{i=1}^{k} d_i}\lambda_1^{d_1}\cdots\lambda_k^{d_k} = (-1)^n\lambda_1^{d_1}\cdots\lambda_k^{d_k}$$

Donc, $\det(\mathcal{T}) = \lambda_1^{d_1}\cdots\lambda_k^{d_k}$. Nous avons donc une définition équivalente de $c_{\mathcal{T}}$,

Proposition 11.3. *Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors,*

$$c_{\mathcal{T}}(x) = \det(xId_v - \mathcal{T})$$

Démonstration. Observer que $spec(x\mathrm{Id}_V - \mathcal{T}) = \{x - \lambda | \lambda \in spec(\mathcal{T})\}$ et que $mult(x-\lambda) = mult(\lambda)$. En effet, soit $\mathcal{B}$ une base de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}$ soit triangulaire supérieure.

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\beta_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n\end{pmatrix}$$

Alors,

$$[x\mathrm{Id}_V - \mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = x\cdot I_n - [\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}}\begin{pmatrix}x-\beta_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & x-\beta_n\end{pmatrix}$$

Donc, $\big(\lambda \in spec(\mathcal{T})\big) \Leftrightarrow \big(\exists i \text{ tq } \beta_i = \lambda\big) \Leftrightarrow \big(\exists i \text{ tq } x-\beta_i = x-\lambda\big) \Leftrightarrow \big(x-\lambda \in spec(x\mathrm{Id}_V - \mathcal{T})\big)$. Et $mult(\lambda) = \#\{i|\beta_i = \lambda\} = \#\{i|x-\beta_i = x-\lambda\} = mult(x-\lambda)$. Par conséquent, la formule pour le déterminant en fonction des valeurs propres implique que

$$\det(x\mathrm{Id}_V - \mathcal{T}) = (x-\lambda_1)^{d_1}\cdots(x-\lambda_k)^{d_k} = c_{\mathcal{T}}(x)$$

avec $d_i = mult(\lambda_i) = mult(x - \lambda_i)$. cqfd

Exemple 11.1. 0. Considérons $\mathbb{O}_V : V \longrightarrow V$. Soit $\mathcal{B}$, une base quelconque de V. Alors $[\mathbb{O}_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \mathbb{O}_{n\times n}$. Nous avons donc $\mathrm{Tr}(\mathbb{O}_V) = 0$ et $\det(\mathbb{O}_V) = 0$.

1. Considérons $\mathrm{Id}_V : V \longrightarrow V$. Soit $\mathcal{B}$, une base quelconque de V. Alors $[\mathrm{Id}_V]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = I_n$. Nous avons donc $\mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_V) = n$ et $\det(\mathrm{Id}_V) = 1^n = 1$.
2. Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$ un opérateur normal. Il existe donc une base $\mathcal{B}$ orthonormée de V telle que

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \begin{pmatrix}\beta_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n\end{pmatrix} \quad \text{où } \beta_i \in spec(\mathcal{T}), \forall 1 \leqslant i \leqslant n$$

Et donc,

$$[\mathcal{T}^*]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} \bar{\beta}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ (*) & & \bar{\beta}_n \end{pmatrix}$$

Par conséquent, la trace de l'adjoint est donnée par,

$$\operatorname{Tr}(\mathcal{T}^*) = \sum_{i=1}^{n} \bar{\beta}_i = \overline{\sum_{i=1}^{n} \beta_i} = \overline{\operatorname{Tr}(\mathcal{T})}$$

et le déterminant de l'adjoint est donnée par,

$$\det(\mathcal{T}^*) = \bar{\beta}_1 \cdots \bar{\beta}_n = \overline{\beta_1 \cdots \beta_n} = \overline{\det(\mathcal{T})}$$

3. Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'un produit scalaire. Soit $\mathcal{S} \in \mathscr{L}(V)$ une isométrie. Alors, il existe une base $\mathcal{B}$ orthonormée de V tel que

$$[\mathcal{S}]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix} \text{ où } |\beta_i| = 1, \forall 1 \leqslant i \leqslant n$$

Par conséquent $|\det(\mathcal{S})| = |\beta_1 \cdots \beta_n| = |\beta_1| \cdots |\beta_n| = 1$.

Proposition 11.4. ***Critère d'inversibilité***
Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Alors,

$$\mathcal{T} \text{ est inversible} \iff \det(\mathcal{T}) \neq 0$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \Big(\mathcal{T} \text{ inversible}\Big) &\iff \Big(Ker\mathcal{T} = \{0\}\Big) \iff \Big(v \neq 0 \Rightarrow \mathcal{T}(v) \neq 0\Big) \\ &\iff \Big(0 \notin spec(\mathcal{T})\Big) \iff \Big(\det(\mathcal{T}) \neq 0\Big) \end{aligned}$$

En effet, puisque $\det(\mathcal{T}) = \lambda_1^{d_1} \cdots \lambda_k^{d_k}$, alors : $\exists\ 1 \leqslant i \leqslant k$ tel que $\lambda_i = 0 \iff \det(\mathcal{T}) = 0$. cqfd

Lien avec la notion du déterminant d'une matrice

Rappelons que nous avons vu au paragraphe 6.4 que par définition, le déterminant d'une matrice $A \in \mathscr{M}(n,n,F)$, noté $\det A$ ou $|A|$ est le scalaire donné par,

$$\det A \underset{def}{=} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} (-1)^{NI(\sigma)} (A)_{1\sigma(1)} (A)_{2\sigma(2)} \cdots (A)_{n\sigma(n)}$$

Où $\mathfrak{S}_n$ est le groupe de toutes les permutations de l'ensemble $\{1, 2, ..., n\}$.

Théorème 11.1. *Soient $A,\ B \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$. Alors*

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$$

Corollaire 11.2. *Soient $A,\ B \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$. Alors*

$$\det(AB) = \det(BA)$$

Démonstration. Par le théorème 11.1, nous avons,

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) = \det(B) \cdot \det(A) = \det(BA)$$

cqfd

Corollaire 11.3. *Si $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ est inversible, alors*

$$\det(A)^{-1} = \frac{1}{\det(A)}$$

Démonstration. Par le théorème 11.1, nous avons :

$$1 = \det(I_n) = \det(AA^{-1}) = (\det A)(\det A^{-1})$$

Par conséquent, $\det(A)^{-1} = \dfrac{1}{\det(A)}$. cqfd

Corollaire 11.4. *Si $A, A' \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{C})$ sont deux matrices semblables, alors,*

$$\det(A) = \det(A')$$

Démonstration. A et A' sont semblables, i.e., $\exists B \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{C})$ inversible telle que $A' = B^{-1}AB$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} \det(A') &= \det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})\det(A)\det(B) = \det(A)\det(B)\det(B^{-1}) \\ &= \det(A)\det(BB^{-1}) = \det(A)\det(I_n) = \det(A) \end{aligned}$$

cqfd

Application aux opérateurs complexes

Soit V, un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Soit $\mathcal{T} \in \mathscr{L}(V)$. Soient $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases quelconques de V. Alors $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ et $[\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}$ sont semblables donc $\det\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}\big) = \det\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}\big)$. Supposons que $\mathcal{B}$ soit une base de V telle que $[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}$ soit triangulaire supérieure.

$$[\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}} = \begin{pmatrix} \beta_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}$$

Rappelons que si $A \in \mathscr{M}(n,n,\mathbb{F})$ est triangulaire supérieure alors, $\det(A) = (A)_{11} \cdots (A)_{nn}$. Par conséquent,

$$\det\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}\big) = \big([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}\big)_{11} \cdots \big([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}\big)_{nn} = \beta_1 \cdots \beta_n = \det(\mathcal{T})$$

Par ailleurs, puisque $\det\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{BB}}\big) = \det\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}\big)$ quelque soit la base $\mathcal{B}'$ de V, nous avons bien que pour toute base $\mathcal{B}'$ de V,

$$\det\big([\mathcal{T}]_{\mathcal{B}'\mathcal{B}'}\big) = \det(\mathcal{T}).$$

Annexes

A La récurrence

Le principe de récurrence

Soit $A \subset \mathbb{Z}_+$ *tq* $1 \in A$.
Et si, $\begin{cases} \textit{soit } n-1 \in A \Longrightarrow n \in A, \\ \textit{soit } [1, n-1] \cap \mathbb{Z}_+ \subset A \Longrightarrow n \in A. \end{cases}$
Alors $A = \mathbb{Z}_+$

Démonstration. Par l'absurde, supposons que $A \neq \mathbb{Z}_+$. Ainsi, $\mathbb{Z}_+ \setminus A \neq \emptyset$. Soit $m = \min(\mathbb{Z}_+ \setminus A) \geqslant 2$. Par conséquent, $j < m$ implique $j \in A$. En particulier $m - 1 \in A$ et $[1, m-1] \cap \mathbb{Z}_+ \subset A$. Donc par hypothèse $m \in A$, ce qui est contradictoire car $m \in \mathbb{Z}_+ \setminus A$. Ainsi, $A = \mathbb{Z}_+$. cqfd

Application à la construction d'une preuve

Soit $\{P_n | n \in \mathbb{Z}_+\}$, une famille des propriétés mathématiques à démonter. Poser $A = \{n \in \mathbb{Z}_+ | P_n \text{ vraie}\}$. Alors,

- P_1 vraie $\Longleftrightarrow 1 \in A$.
- $\big[P_{n-1} \text{ vraie } \Longrightarrow P_n \text{ vraie}\big] \Longleftrightarrow \big[n-1 \in A \Longrightarrow n \in A\big]$.

Ainsi, si nous démontrons,

- P_1 vraie
- P_{n-1} vraie $\Longrightarrow P_n$ vraie $\forall n$

Alors, $1 \in A$ et $\big[n-1 \in A \Longrightarrow n \in A\big]$ donc par le principe de récurrence $A = \mathbb{Z}_+$. Autrement dit, P_n vraie $\forall n \in \mathbb{Z}_+$.

B Déterminants : quelques suppléments

Les Cofacteurs

La règle de Carmer

Déterminants & valeurs propres