Feuille de TD n.3 de IPD, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 1. Pont Brownien

Définition 1. . *Soit W_t un mouvement brownien standard. Le pont brownien entre* 0 *et* 1 *est le processus $B^{0,1} = (B_t^{0,1})_{t\in[0,1]}$ défini pour tous $t \in [0,1]$ par*

$$B_t^{0,1} = W_t - tW_1.$$

Pour simplifier la notation dans ce qui suit on notera simplement B le pont brownien $B^{0,1}$ défini ci-dessus.
1. *Caractéristiques du pont brownien entre* 0 *et* 1.
(a) Montrer que B est un processus gaussien à trajectoires continues vérifiant $\mathbb{E}(B_t) = 0$ et $Cov(B_t, B_s) = s(1-t)$ pour $s \leq t$. En déduire la loi de B_t pour $t \in [0,1]$.
(b) Montrer que B_t est indépendant de W_1.
(c) Trouver la loi conditionnelle de W_t sachant $W_1 = 0$ et la comparer avec la loi de B_t.
2. *Pont Brownien sur* $[u,v]$. Soient $0 \leq u \leq v$, on définit le processus $B^{u,v} = (B_t^{u,v})_{t\in[u,v]}$ par : pour tout $t \in [u,v]$

$$B_t^{u,v} = (W_t - W_u) - \frac{t-u}{v-u}(W_v - W_u).$$

(a) Montrer que $B^{u,v}$ est un processus Gaussien centré, à trajectoires continues, indépendant de $\sigma(W_s, 0 \leq s \leq u)$ et de $\sigma(W_s, v \leq s)$.
(b) Soient $a, b \in \mathbb{R}$ montrer que W_t sachant $W_u = a$ et $W_v = b$ est de loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de paramètres

$$\mu = a + \frac{t-u}{v-u}(b-a), \ \sigma^2 = \frac{(v-t)(t-u)}{v-u}$$

3. *Simulation de* $\max_{0\leq u\leq t} W_u$ *par la méthode du pont Brownien.*
Soit $M_t = \max_{0\leq u\leq t} W_u$. On verra (on admet pour le moment ce résultat) que

$$P(M_t \geq y | W_t = x) = \exp\left(-2\frac{y(y-x)}{t}\right)$$

(a) Proposer une méthode de simulation de W_t sur $[0,T]$.
(b) Simuler M_t par inversion.

Exercice 2. Continuité Hölderienne des trajectoires du Brownien
On admet le lemme (déterministe) suivant dû à Garsia-Rodemich-Rumsey :

Lemme 2. *Pour toute fonction continue f si on pose*

$$A_f = \int_0^1 \int_0^1 \frac{|f(s) - f(u)|^\gamma}{|s-u|^{m+2}} \, dsdu,$$

avec $m > 0$ et $\gamma > 0$ alors pour tous $s, t \in [0,1]$ l'inégalité suivante est vérifiée

$$|f(t) - f(s)| \leq 8A_f^{1/\gamma}\frac{m+2}{m}|t-s|^{m/\gamma}.$$

Soit (W_t) un mouvement Brownien standard.
1. Donner une condition suffisante sur m et γ pour que la variable aléatoire A_W prenne presque surement des valeurs finies.
2. En déduire que pour tout $\alpha < 1/2$ il existe une variable aléatoire C_α (positive et finie) telle que pour tous $s, t \in [0,1]$

$$|W_t - W_s| \leq C_\alpha |t-s|^\alpha.$$