Feuille de TD n.5 de IPD, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 1 Propriété de Markov Forte.
1. Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S. et τ un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-temps d'arrêt fini $\mathbb{P}$-p.s.
pour tout $u \in \mathbb{R}$ et $t \geq 0$ on pose $M_t^u = \exp(iuW_t + u^2 t/2)$.

1.1. Quelle est la nature du processus $(M_t^u)_{t\geq 0}$?

1.2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\tau_n = \tau \wedge n$ en utilisant le théorème d'arrêt montrer que presque sûrement

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(iu(W_{\tau_n+t} - W_{\tau_n})\right)|\mathcal{F}_{\tau_n}\right] = \exp(-u^2 t/2).$$

1.3. Montrer que pour tout $A \in \mathcal{F}_\tau$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(iu(W_{\tau+t} - W_\tau)\right)\mathbf{1}_{A\cap\{\tau\leq n\}}\right] = \exp(-u^2 t/2)\mathbb{P}(A \cap \{\tau \leq n\}).$$

1.4. Conclure que presque sûrement

$$\mathbb{E}\left[\exp\left(iu(W_{\tau+t} - W_\tau)\right)|\mathcal{F}_\tau\right] = \exp(-u^2 t/2).$$

2. Pour tout $t \geq 0$ on pose $B_t = W_{\tau+t} - W_\tau$ et pour tout $u \in \mathbb{R}$ on pose $N_t^u = \exp(iuB_t + u^2 t/2)$

2.1. Montrer que pour tout $0 \leq s < t$ on a presque sûrement

$$\mathbb{E}(N_t^u|\mathcal{F}_{\tau+s}) = N_s^u$$

2.2. En déduire que $B = (B_t)_{t\geq 0}$ est un $(\mathcal{F}_{\tau+t})_{t\geq 0}$-M.B.S. indépendant de $\mathcal{F}_\tau$.

Exercice 2. Principe de Réflexion.
Soit $(W_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien standard. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on pose $\tau_y = \inf\{t : W_t = y\}$.
1. Montrer que τ_y est un temps d'arrêt presque sûrement fini.
2. En déduire que $B_t := W_{\tau_y+t}$ est un mouvement brownien issu de y indépendant de $\sigma(W_s,\ s \leq \tau_y)$.
Pour tout ce qui suit suppose $y \geq 0$ et $x \leq y$,
3. montrer que

$$\mathbb{P}(\tau_y \leq t, W_t \leq x) = \mathbb{P}(\tau_y \leq t, W_t \geq 2y - x).$$

4. On pose $M_t = \max_{0\leq u\leq t} W_u$

$$\mathbb{P}(M_t \geq y, W_t < x) = \mathbb{P}(W_t \geq 2y - x).$$

5. En déduire que

$$P(M_t \geq y|W_t = x) = \exp\left(-2\frac{y(y-x)}{t}\right)$$

6. Montrer également que

$$\mathbb{P}(M_t \geq y) = \mathbb{P}(|W_t| \geq y).$$

Exercice 3. Temps de sortie d'un intervalle.
Soient $a < 0 < b$ deux réels et (W_t) un M.B.S. Pour tout $y \in \mathbb{R}$ on note $\tau_y = \inf\{t : W_t = y\}$.
On pose $T = \tau_a \wedge \tau_b$.
1. Montrer que T est un temps d'arrêt presque sûrement fini.
2. Montrer que $\mathbb{E}(W_T) = 0$.
3. En déduire $\mathbb{P}(\tau_a < \tau_b)$.

4. Montrer que $\mathbb{E}(W_T^2) = \mathbb{E}(T)$ et en déduire $\mathbb{E}(T)$.