Équations différentiels stochastiques

On considère $(X_t)_{t\in[0,T]}$ une solution forte de l'EDS

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s)dW_s. \tag{EDS}$$

Théorème Si b et σ sont fonctions continues et Lipschitz en x uniformément en t, i.e. il existe $L \geq 0$ tel que

$$\begin{gathered}|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leq L|x-y|, \\ |b(t,0)| + |\sigma(t,0)| \leq L.\end{gathered}$$

Alors il existe une unique solution forte $(X_t)_{t\in[0,T]}$ de (EDS) $(\mathcal{F}_t)$-adoptée et $\mathbb{P}$-p.s. continue.

Théorème (contrôle de moments) Soit b et σ sont boréliennes et

$$|b(t,x)| + \|\sigma(t,x)\| \leq C_T(1+|x|).$$

Alors pour tout $p > 0$ il existe $C_{T,p}$ telle que

$$\| \sup_{t\in[0,T]} |X_t| \|_p \leq C_{T,p}(1 + \|X_0\|_p).$$

Théorème Sous les hypothèses d'existence et d'unicité de solution à l'EDS, il existe une constante C telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[t,T]} |X_s^{t,x} - X_s^{t,y}|^2\right] \leq Ce^{CT}|x-y|$$

Équations différentiels stochastiques contrôlées

Pour l'EDS contrôlée

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(s, X_s, \alpha_s)ds + \int_0^t \sigma(s, X_s, \alpha_s)dW_s.$$

où $(\alpha_t)_{t\in[0,T]}$ est $\mathbb{F}$-progressif à valeurs dans $A \subset \mathbb{R}^q$. On suppose que

$$\begin{gathered}|b(t,x,a) - b(t,x',a')| + |\sigma(t,x,a) - \sigma(t,x',a')| \leq L(|x-x'| + |a-a'|), \\ |b(t,x,a)| + |\sigma(t,x,a)| \leq L(1+|x|+|a|).\end{gathered}$$

Théorème Pour $p \geq 1$ il existe une constante C_p telle que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[t,T]}|X_s^{t,x,\alpha}|^p\right] \leq C_p(1+|x|^p)$$
$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[t,T]}|X_s^{t,x,\alpha}-X_s^{t,x',\alpha}|^p\right] \leq C_p|x-x'|^p$$
$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[t,T]}|X_s^{t,x,\alpha}-X_s^{t',x,\alpha}|^p\right] \leq C_p|t-t'|^{\frac{p}{2}}(1+|x|^p)$$
$$\mathbb{E}\left[\sup_{s\in[t,T]}|X_s^{t,x,\alpha}-X_s^{t,x,\alpha'}|^p\right] \leq C_p\mathbb{E}\left[\int_t^T|\alpha_s-\alpha'_s|^p ds\right]$$

Lien avec les EDPs

Le générateur pour la diffusion (EDS) est défini par

$$\mathcal{L}\varphi(t,x) = \left(\partial_t\varphi + \nabla\varphi\cdot b + \frac{1}{2}\mathrm{Tr}\left(\nabla^2\sigma\sigma^T\right)\right)(t,x).$$

On considère l'EDP

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}v - kv + f)(t,x) &= 0,\\ v(T,x) &= g(x).\end{aligned} \tag{EDP}$$

Théorème (Feynman-Kac) Soit $b(t,x)$ et $\sigma(t,x)$ vérifient les conditions du théorème d'existence et d'unicité de solution forte. Supposons que $k(t,x)$ est bornée à l'inférieure et $f(t,x)$ est à croissance quadratique uniformément en t. On pose

$$v(t,x) = \mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-\int_t^s k(u,X_u^{t,x})du} f(s,X_s^{t,x})ds + e^{-\int_t^T k(u,X_u^{t,x})du} g(X_T^{t,x})\right].$$

Alors

1. Si $v(t,x)\in C^{1,2}$ alors elle est une solution de (EDP).
2. Si $w(t,x)\in C^{1,2}([0,T[\times\mathbb{R}^d)\cap C([0,T]\times\mathbb{R}^d)$ une solution de (EDP) à croissance quadratique uniformément en t alors $w(t,x)=v(t,x)$.

Équation de programmation dynamique

Les fonctions de récompense $f(x,a)$ et $g(x)$ sont supposées être localement Lipschitz et à croissance polynomiale.

La fonction valeur est définie par

$$v(t,x) = \sup_{\alpha\in\mathcal{A}_t}\mathbb{E}\left[\int_t^T e^{-\int_t^s k(u,X_u^{t,x,\alpha})du} f(X_s^{t,x,\alpha},\alpha_s)ds + e^{-\int_t^T k(u,X_u^{t,x,\alpha})du} g(X_T^{t,x,\alpha})\right]$$

Théorème (PPD) Soit $\{\vartheta_\alpha\}_{\alpha\in\mathcal{A}_t}$ une famille de temps d'arrêt à valeurs dans $[t,T]$ pour (t,x) fixé. Alors

$$v(t,x) = \sup_{\alpha \in \mathcal{A}_t} \mathbb{E}\left[\int_t^{\vartheta_\alpha} e^{-\int_t^s k(u, X_u^{t,x,\alpha})du} f(X_s^{t,x,\alpha}, \alpha_s) ds + e^{-\int_t^{\vartheta_\alpha} k(u, X_u^{t,x,\alpha})du} v(\vartheta_\alpha, X_{\vartheta_\alpha}^{t,x,\alpha})\right].$$

L'équation de Hamilton–Jacobi–Bellman est donnée par

$$\begin{aligned} \sup_{a \in A} \{(\mathcal{L}^a v - kv + f)(t,x,a)\} &= 0, \\ v(T,x) &= g(x) \end{aligned} \tag{HJB}$$