Feuille de TD n.7 de IPD, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 1. Fin de la preuve de la proposition 5.8.
Soient W un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S. et $H = (H_t)_{t\geq 0} \in \Pi_0^2$ de la forme

$$H_t = \Phi \cdot \mathbf{1}_{]u,v]}(t) \tag{1}$$

où $0 \leq u < v$ et Φ une v.a. $\mathcal{F}_u$-mesurable, de carré intégrable. On rappelle que l'**intégrale d'Itō** de H par W est le processus $I(H) = (I_t(H))_{t\geq 0}$ défini par $\forall t \geq 0$

$$I_t(H) = \Phi \cdot (W_{v\wedge t} - W_{u\wedge t}).$$

Montrer que le processus $(I_t^2(H) - \int_0^t H_s^2\, ds)_{t\geq 0}$ est une $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-martingale à trajectoires continues.
Exercice 2. Soient B un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S., $a \in \mathbb{R}$ et $0 < s \leq t$. On définit

$$I_{s,t} = aB_s + B_s(B_t - B_s).$$

Parmi les affirmations qui suivent lesquelles sont exactes ou pas? Justifiez avec soin chacune de vos réponses.

1. $I_{s,t} - I_{s,s}$ est indépendant de $\mathcal{F}_s$.
2. $I_{s,t} - I_{s,s}$ est de loi gaussienne. (Indication : si $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ alors $\mathbb{E}(Z^4) = 3\sigma^4$).
3. $\mathbb{E}(I_{s,t}|\mathcal{F}_s) = I_{s,s}$
4. $\mathbb{E}(I_{s,t}^2 - a^2 s - B_s^2(t-s)|\mathcal{F}_s) = I_{s,s}^2 - a^2 s$.

Exercice 3. Soient B et W deux $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-M.B.S. On suppose B et W indépendants. Calculer leur covariation quadratique (en donnant les détails du calcul)

$$\langle B, W\rangle_t.$$