Feuille de TD n.6 de IPD, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 1. Intégrale du Brownien par le Brownien.
Soit $B = (B_t)_{t\geq 0}$ un $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-MBS. On cherche à calculer $\int_0^T B_s\, dB_s$. Pour tout entier $n > 0$, on considère la subdivision régulière $(kT/n)_{0\leq k\leq n}$ de $[0,T]$ et on pose

$$B_t^n = \sum_{k=0}^{n-1} B_{kT/n}\ \mathbf{1}_{I_k}(t),$$

où l'ensemble des $I_k = [kT/n, (k+1)T/n[$ constitue une subdivision de $[0,T]$. On note $\Pi_2^2[0,T]$ l'ensemble des processus $H = (H_t)_{t\geq 0}$, continus à droite, $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$-adaptés vérifiant

$$\mathbb{E}\left[\int_0^T H_s^2\ ds\right] < +\infty.$$

1. Montrer que B et $(B_t^n)_{0\leq t\leq T}$ sont des processus de $\Pi_2^2[0,T]$.
2. Montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\left[\int_0^T (B_s^n - B_s)^2\ ds\right] = 0.$$

Par définition on pose

$$\int_0^T B_s^n\ dB_s = \sum_{k=0}^{n-1} B_{kT/n}\ (B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n}).$$

On montrera dans le cours que tout processus H de $\Pi_2^2[0,T]$ vérifie l'isométrie d'Ito : $\forall t \in [0,T]$

$$\mathbb{E}\left[\left(\int_0^t H_s\ dB_s\right)^2\right] = \mathbb{E}\left[\int_0^t H_s^2\ ds\right].$$

3. En déduire que $\int_0^T B_s\ dB_s$ s'écrit comme la limite dans $L^2(\Omega)$ de

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{kT/n}\ (B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n}).$$

4. Calculer

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{Var}\left(\sum_{k=0}^{n-1}(B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})^2\right).$$

5. En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1}(B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})^2$ converge dans $L^2(\Omega)$ vers T.

6. Calculer la limite dans $L^2(\Omega)$ de $\sum_{k=0}^{n-1} B_{kT/n}(B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n})$ à l'aide des questions précédentes.
Indication : on pourra utiliser l'identité $2ab = -(b-a)^2 + a^2 + b^2$.

7. Calculer la valeur de $\int_0^T B_s\ dB_s$ et vérifier que c'est bien une martingale.

8. En vous inspirant des questions précédentes, calculer la limite dans $L^2(\Omega)$ de

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_{(k+1)T/n}(B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n}).$$

9. En vous inspirant des questions précédentes, calculer la limite dans $L^2(\Omega)$ de

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{B_{(k+1)T/n} + B_{kT/n}}{2}\ (B_{(k+1)T/n} - B_{kT/n}).$$