

# Processus Stochastiques et Applications Financières (PSAF)

## Introduction et Chapitre 1

Pierre Etoré

Ensimag

2025-2026

# Pierre Etoré

pierre.etore@univ-grenoble-alpes.fr

<http://www-ljk.imag.fr/membres/Pierre.Etore/>

Tel : 04 57 42 17 35

- Chercheur au Laboratoire Jean Kuntzmann, équipe IPS
- Domaine de recherche : étude des processus stochastiques et de leur simulation, lien avec les EDP, statistiques pour les processus stochastiques, ...
- Bureau 142, bâtiment IMAG.
- Enseigne les probas/stats en 1A tronc commun et en IF 2A (par le passé aussi en 3A IF et en MSIAM 2).

# Objectifs et plan (gros grain) du cours

**But du cours :** Présenter la notion de processus stochastique, développer des exemples en *temps discret*. Puis présenter leurs applications à la finance ; ce faisant on introduira des notions et concepts qui se retrouveront dans les modèles en temps continu (IPD au sem. 8, cours de 3A IF...).

- Chap. 1 : Rappels d'intégration et de probabilités.
- Chap. 2 : Espérance conditionnellement à une tribu.
- Chap. 3 : Processus stochastiques, exemple des chaînes de Markov.
- Chap. 4 : Martingales à temps discret
- Chap. 5 : Modèles financiers à temps discret [ex : Cox-Ross-Rubinstein ...]

## Evaluation / Examen

- Examen sur table :
  - Durée 3h
  - Compte pour 3/4 de la note
  - Documents autorisés : poly, fiches de TD, notes de cours et TD, DM de l'année et sa correction.
- DM
  - Posé vers la fin du cours, en décembre  
(VOUS SEREZ TENUS AU COURANT !)
  - A faire en individuel.
  - Compte pour 1/4 de la note.

**Autres :** il y a deux groupes de TD ; il y aura des séances de “Office hours” (pas encore placées dans ADE).

# Chapitre 1 : rappels d'intégration et de probabilités

**But du chapitre :** Rappeler la définition et les propriétés de

$$\int_E f \, d\mu$$

où  $f$  est une fonction et  $\mu$  une *mesure*, et l'intégrale est comprise "au sens de Lebesgue".

**Intérêt :** 1) Une mesure de probabilités c'est une mesure ! Par exemple si  $X$  v.a.r.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{\Omega} X(\omega) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} X d\mathbb{P} = \int_{\mathbb{R}} x \mathbb{P}_X(dx)$$

(à la dernière égalité on a utilisé le théorème de transfert et  $\mathbb{P}_X$  désigne la loi de  $X$ ).

2) Si  $f$  est Riemann-intégrable,  $\int f(x)dx = \int fd\lambda$  où  $\lambda$  est la "mesure de Lebesgue", mais l'intégrale de Lebesgue est plus souple à manipuler.

Par exemple si  $f(x) = \mathbf{1}_{\mathbb{Q}}(x)$  que dire de

$$\int_0^1 f d\lambda \quad ?$$

(NB :  $f$  n'est pas continue, pas même continue par morceaux, pas Riemann-intégrable)

Grâce aux propriétés de l'intégrale de Lebesgue on trouvera facilement la valeur de cette intégrale (cf Exemple 1.4.1 à venir).

## 1.1 Tribus, fonctions mesurables, mesures

### Définition (1.1.1)

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathcal{E}$  un ensemble de parties de  $E$ . On dit que  $\mathcal{E}$  est une tribu si

- i) On a  $E \in \mathcal{E}$ .
- ii) Pour tout  $A \in \mathcal{E}$  on a  $A^c \in \mathcal{E}$ .
- iii) Pour toute suite  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  d'éléments de  $\mathcal{E}$  on a  $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{E}$ .

**Exemples (1.1.1) :** 1) La tribu grossière  $\mathcal{E} = \{E, \emptyset\}$ ; c'est la tribu la moins fine qu'on peut mettre sur  $E$ .

2) La tribu la plus fine qu'on peut mettre sur  $E$  c'est  $\mathcal{P}(E)$ , l'ensemble de toutes les parties de  $E$

3) Soit  $\mathcal{C} \subset \mathcal{P}(E)$ , l'ensemble  $\mathcal{C}$  n'étant pas forcément une tribu. On note  $\sigma(\mathcal{C})$  la tribu engendrée par  $\mathcal{C}$ , i.e. la plus petite tribu qui contient  $\mathcal{C}$  (en ce sens que si  $\mathcal{Y}$  est une tribu t.q.  $\mathcal{C} \subset \mathcal{Y}$  alors  $\sigma(\mathcal{C}) \subset \mathcal{Y}$ ). Sur l'existence de  $\sigma(\mathcal{C})$  cf l'Exercice 1 de la Feuille de TD1. Un exemple important est :

**Exemple (1.1.2) :** la tribu des boréliens  $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ . Il s'agit de la tribu engendrée par les ouverts de  $\mathbb{R}$ . Notons que  $\mathcal{B}(\mathbb{R}) \subsetneq \mathcal{P}(\mathbb{R})$ .

Notons que par passage au complémentaire on peut par exemple remplacer de façon équivalente dans la définition 1.1.1

i) par i')  $\emptyset \in \mathcal{E}$

... D'autres variantes de la définition 1.1.1 sont possibles (cf Remarques 1.1.1 et 1.1.2 du poly).

## Définition (1.1.2)

Soient  $(E_1, \mathcal{E}_1)$  et  $(E_2, \mathcal{E}_2)$  deux espaces mesurables (i.e. munis chacun d'une tribu). Une fonction  $f : E_1 \rightarrow E_2$  est dite mesurable si  $\forall B \in \mathcal{E}_2$ , on a  $f^{-1}(B) \in \mathcal{E}_1$ .

Si  $(E_i, \mathcal{E}_i) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ ,  $i = 1, 2$  on parle de fonction boréienne.

**Exemple (1.1.3) :** Si  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est continue alors elle est boréienne.

[Preuve au tableau]

## Propriété (1.1.1)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables de  $(E, \mathcal{E})$  vers  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .  
Alors les fonction  $\inf_n f_n$ ,  $\sup_n f_n$ ,  $\liminf_n f_n$  et  $\limsup_n f_n$  sont mesurables.

Passons maintenant à la notion de mesure.

## Définition (1.1.3)

Soit  $(E, \mathcal{E})$  un espace mesurable. Une mesure sur  $(E, \mathcal{E})$  est une application  $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$  qui vérifie  $\mu(\emptyset) = 0$  et est  $\sigma$ -additive, i.e. si  $(A_n)$  est une suite d'éléments disjoints de  $\mathcal{E}$  alors  $\mu(\bigcup_n A_n) = \sum_n \mu(A_n)$ .

## Proposition (1.1.1)

Soit  $\mu$  une mesure sur  $(E, \mathcal{E})$ . On a pour toute suite croissante  $(A_n)$  d'éléments de  $\mathcal{E}$  (i.e.  $A_n \subset A_{n+1}$  pour tout  $n$ ),  $\lim_n \mu(A_n) = \mu(\bigcup_n A_n)$ .

## 1.2 Intégration contre une mesure

Dans ce qui suit on a  $(E, \mathcal{E}, \mu)$  un espace mesuré.

On considère d'abord les fonctions étagées  $f : E \rightarrow [0, \infty]$  i.e. de la forme

$$f(x) = \sum_{i=1}^n r_i \mathbf{1}_{A_i}(x) \quad (*)$$

où  $r_i \in [0, \infty]$  et  $A_i \in \mathcal{E}$  pour tout  $i = 1, \dots, n$ .

Fonction étagée sous forme "canonique" : c'est quand les  $A_i$  sont disjoints et les valeurs de  $r_i$  distinctes. On a alors  $f^{-1}(r_i) = A_i$ ,  $\forall i$  et la mesurabilité des fonctions étagées en découle naturellement...

Versions canoniques : parfois commode mais pas indispensable...

### Définition (1.2.1)

Soit  $f$  étagée (sous la forme  $(*)$ ). On note  $\int_E f d\mu$  ou  $\int_E f(x) \mu(dx)$ , ou plus rarement  $\int_E f(x) d\mu(x)$  la quantité

$$\sum_{i=1}^n r_i \mu(A_i) \in \overline{\mathbb{R}}_+$$

Puis on passe aux fonctions mesurables positives.

### Définition (1.2.2)

*Soit  $f : E \rightarrow [0, \infty]$  mesurable. On appelle intégrale de  $f$  contre  $\mu$  et on note  $\int_E f d\mu$  la quantité*

$$\sup \left\{ \int_E \varphi d\mu, \text{ avec } \varphi \text{ étagée vérifiant } \varphi \leq f \right\} \in \overline{\mathbb{R}}_+.$$

La  $\sigma$ -additivité de  $\mu$  permet de montrer le lemme suivant.

### Lemme (1.2.1)

*Soient  $f, g : E \rightarrow [0, \infty]$  mesurables.*

- i) Pour  $a, b \in \mathbb{R}$ , on a  $\int_E (af + bg) d\mu = a \int_E f d\mu + b \int_E g d\mu$ .
- ii) Si  $f \leq g$  alors

$$\int_E f d\mu \leq \int_E g d\mu.$$

## Théorème (1.2.1, Beppo-Levi)

Soit  $(f_n)$  une suite croissante de fonctions mesurables positives ( $f_n : E \rightarrow [0, \infty]$  pour tout  $n$ ). Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E [\lim_{n \rightarrow \infty} f_n] d\mu.$$

De Beppo-Levi on tire :

## Théorème (1.2.2, Lemme de Fatou)

Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables positives. Alors

$$\int_E [\liminf_n f_n] d\mu \leq \liminf_n \int_E f_n d\mu.$$

Preuve : [au tableau]

## Définition (1.2.3)

Soit  $P(x)$  une propriété dépendant de  $x \in E$ . On dit que  $P(x)$  est vraie presque partout (p.p.), ou pour presque tout  $x$ , si l'ensemble  $\{x \in E : P(x) \text{ n'est pas vraie}\}$  est négligeable, i.e. inclus dans  $B \in \mathcal{E}$  avec  $\mu(B) = 0$ .

## Proposition (1.2.1)

i) Pour  $A \in \mathcal{E}$  on a

$$\int_E (+\infty \mathbf{1}_A) d\mu = \begin{cases} 0 & \text{si } \mu(A) = 0 \\ +\infty & \text{si } \mu(A) > 0 \end{cases}$$

ii) Pour  $f : E \rightarrow [0, \infty]$  on a  $\int_E f d\mu = 0$  si et seulement si  $f(x) = 0$  p.p.  
De plus si  $\int_E f d\mu < \infty$  alors  $f(x) < \infty$  p.p.

Preuve : [au tableau]

On passe maintenant aux fonctions à valeurs réelles.

Pour toute fonction à valeurs réelles  $f$  on rappelle qu'on note  $f_+$  et  $f_-$  les fonctions définies respectivement par  $x \mapsto \max(f(x), 0)$  et  $x \mapsto \max(-f(x), 0)$  (ce sont les parties positive et négative de la fonction  $f$ ).

### Définition (1.2.4)

Soit  $f : E \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$  mesurable ( $\overline{\mathbb{R}}$  est muni de  $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}})$ ).

On a la décomposition  $f = f_+ - f_-$ . On dit que  $f$  est intégrable si

$\int_E f_+ d\mu < +\infty$  et  $\int_E f_- d\mu < +\infty$  (ce qui équivaut à  $\int_E |f| d\mu < +\infty$ ).

On note alors

$$\int_E f d\mu := \int_E f_+ d\mu - \int_E f_- d\mu.$$

On a le résultat suivant.

### Théorème (1.2.3)

1) (*Fatou pour les fonctions réelles*). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables avec  $f_n(x) \geq m(x)$  pour  $\mu$ -p.t.  $x \in E$ , pour tout  $n$ , avec  $m$  mesurable et intégrable. Alors

$$\int_E [\liminf_n f_n] d\mu \leq \liminf_n \int_E f_n d\mu.$$

1') : variante borne supérieure [cf poly]

2) (*Théorème de convergence dominée de Lebesgue*). Soit  $(f_n)$  une suite de fonctions mesurables avec :

i) Pour  $\mu$ -p.t.  $x \in E$ ,  $f_n(x) \rightarrow f(x)$  quand  $n \rightarrow \infty$

ii) Il existe  $h$  mesurable positive et intégrable telle que pour tout  $n$ , on a  $|f_n(x)| \leq h(x)$   $\mu$ -p.p.

Alors  $f$  est intégrable et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_E f_n d\mu = \int_E f d\mu.$$

Le théorème de convergence dominée (CVD) a par exemple pour conséquence le résultat suivant.

### Théorème (1.2.4)

[*Dérivation sous le signe somme*] Soit  $I$  un intervalle de  $\mathbb{R}$  non réduit à un point et  $f : E \times I \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  vérifiant :

- i) Il existe  $t_0 \in I$  t.q.  $f(\cdot, t_0) : x \mapsto f(x, t_0)$  est intégrable.
- ii) Pour tout  $t \in I$  la fonction  $f(\cdot, t)$  est mesurable.
- iii) Pour tout  $t \in I$ , la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial t}$  existe et  $\left| \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \right| \leq h(x)$   $\mu$ -p.p. avec  $h$  positive mesurable intégrable.

Alors pour tout  $t \in I$ , les fonctions  $f(\cdot, t)$  et  $\frac{\partial f}{\partial t}(\cdot, t)$  sont intégrables et la fonction

$$F(t) = \int_E f(x, t) \mu(dx)$$

est dérivable avec

$$\forall t \in I, \quad \frac{d}{dt} F(t) = \int_E \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) \mu(dx).$$

On aura parfois besoin du résultat suivant.

### Théorème (1.2.5, Théorème de Fubini)

*Soit  $(F, \mathcal{F}, \nu)$  un autre espace mesuré. On note  $\mu \otimes \nu$  la mesure produit définie sur  $(E \times F, \mathcal{E} \otimes \mathcal{F})$  (ici  $\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}$  désigne la plus petite tribu sur  $E \times F$  contenant toutes les parties du type  $A \times B$  avec  $A \in \mathcal{E}$  et  $B \in \mathcal{F}$ ). Cette mesure vérifie*

$$\forall A \in \mathcal{E}, \forall B \in \mathcal{F}, \quad \mu \otimes \nu(A \times B) = \mu(A)\nu(B).$$

*Soit  $f : E \times F \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$  mesurable qui est, soit à valeurs dans  $[0, \infty] = \overline{\mathbb{R}}_+$ , soit intégrable.*

*Alors,*

$$\int_{E \times F} f d(\mu \otimes \nu) = \int_E \left( \int_F f(x, y) \nu(dy) \right) \mu(dx) = \int_F \left( \int_E f(x, y) \mu(dx) \right) \nu(dy).$$

### 1.3 Exemples de mesure, mesure de Lebesgue

On considère  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ .

On a vu en TD que  $\delta_{x_0}$  définie par  $\delta_{x_0}(A) = \mathbf{1}_A(x_0)$ ,  $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  est une mesure sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  (pour  $x_0 \in \mathbb{R}$ ).

Un deuxième exemple, en quelque sorte "orthogonal" au premier, est celui de la mesure de Lebesgue.

#### Théorème (1.3.1)

*Il existe une unique mesure  $\lambda$  sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ , appelée "mesure de Lebesgue", telle que  $\forall I \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$  intervalle (i.e.  $I = [a, b]$ ,  $I = [a, b)$ ,  $I = (a, b]$  ou  $I = (a, b)$ ) on a  $\lambda(I) = |I|$  (où  $|I| = b - a$  est la "longueur" de  $I$ ).*

**Idée de la preuve :** On définit  $\hat{\lambda} : \{\text{intervalles}\} \rightarrow \mathbb{R}$ , puis on "étend"  $\hat{\lambda}$  en  $\lambda$  définie sur  $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$  par le théorème de Carathéodory...

Notons qu'on a en particulier  $\lambda(\{a\}) = \lambda([a, a]) = a - a = 0$ .

A retenir : "La mesure de Lebesgue attribue la masse nulle aux singletons".

### Définition (1.3.1)

Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures sur l'espace mesurable  $(E, \mathcal{E})$ . On dit que  $\nu$  est absolument continue par rapport à  $\mu$ , et on note  $\nu << \mu$ , si pour tout  $N \in \mathcal{E}$  t.q.  $\mu(N) = 0$  on a  $\nu(N) = 0$ .

### Théorème (1.3.2, Théorème de Radon-Nikodym)

Soient  $\mu$  et  $\nu$  deux mesures finies sur  $(E, \mathcal{E})$ . Il y a équivalence entre

- i) On a  $\nu << \mu$
- ii) Il existe  $f : E \rightarrow [0, \infty]$  mesurable et intégrable t.q.  
 $\nu(A) = \int_A f d\mu, \quad \forall A \in \mathcal{E}$ .

## 1.4 Lien avec l'intégrale de Riemann

### Théorème (1.4.1)

*Si  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  est Riemann intégrable et mesurable alors elle est Lebesgue intégrable et on a*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b fd\lambda.$$

Mais l'intégrale de Lebesgue est plus souple à manipuler...

**Exemple 1.4.1 :** La fonction  $\mathbf{1}_{\mathbb{Q}}$  n'est pas Riemann-intégrable sur  $[0, 1]$ .  
Mais avec l'intégrale de Lebesgue on a simplement

$$\int_0^1 \mathbf{1}_{\mathbb{Q}} d\lambda = 0$$

[au tableau].

## 1.5 Rappels de probabilités

Un espace de probabilités  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  est donné. C'est un espace mesuré avec  $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .

### Définition (1.5.1)

*Une variable aléatoire (v.a.) définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ , à valeurs dans  $E$  (muni d'une tribu  $\mathcal{E}$ ), c'est une application  $X : \Omega \rightarrow E$ , mesurable de  $(\Omega, \mathcal{F})$  vers  $(E, \mathcal{E})$ .*

Pour  $X$  v.a. à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  et  $B \in \mathcal{E}$  on note

$$\{X \in B\} = X^{-1}(B) = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\} \in \mathcal{F}.$$

On note  $\mathbb{P}_X$  la mesure image de  $\mathbb{P}$  par  $X$ , définie sur  $(E, \mathcal{E})$  par

$$\forall B \in \mathcal{E}, \quad \mathbb{P}_X(B) := \mathbb{P}(X \in B).$$

La mesure  $\mathbb{P}_X$  est appelée la loi de  $X$ . Notons que c'est à son tour une mesure de probabilités (sur  $(E, \mathcal{E})$ ).

Soit  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$  t.q.  $\int_{\Omega} |f(X(\omega))| \mathbb{P}(d\omega) < +\infty$ . On note

$$\mathbb{E}(f(X)) = \int_{\Omega} f(X(\omega)) \mathbb{P}(d\omega) = \int_{\Omega} f(X) d\mathbb{P} = \int_E f(x) \mathbb{P}_X(dx) = \int_E f d\mathbb{P}_X.$$

Notons qu'on a utilisé ici le théorème de transfert.

On note  $\sigma(X)$  la plus petite tribu sur  $\Omega$  qui rend mesurable  $X$ , i.e.  $\sigma(X) \subset \mathcal{F}$ ,  $X$  est mesurable de  $(\Omega, \sigma(X))$  vers  $(E, \mathcal{E})$ , et  $\sigma(X)$  est le plus petite sous-tribu de  $\mathcal{F}$  qui réalise cela (cf Feuille de TD 2 Exercice 3).

## Définition (1.5.2)

On dit qu'une propriété  $P(\omega)$  est vraie presque sûrement (p.s.), ou pour presque tout  $\omega$ , si il existe  $A \in \mathcal{F}$  avec  $\mathbb{P}(A) = 0$  et  $P(\omega)$  vraie pour tout  $\omega \in A^c$ .

On dit par exemple que  $(X_n)$  suite de v.a. définies sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  converge p.s. vers  $X$  définie sur le même espace (et à valeurs dans le même espace), et on note

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} X,$$

si et seulement si il existe  $A \in \mathcal{F}$  t.q.  $\mathbb{P}(A) = 0$  et

$$\forall \omega \in A^c, \quad X_n(\omega) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X(\omega).$$

On a des versions probabilistes des théorèmes de convergence vus à la section 1.2.

### Théorème (1.5.1)

1) Soit  $(X_n)$  une suite de v.a. positives tendant en croissant vers  $X$ . Alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right).$$

2) Soit  $(X_n)$  suite de v.a. positives on a

$$\mathbb{E}\left(\liminf_n X_n\right) \leq \liminf_n \mathbb{E}(X_n).$$

3) Si  $X_n \rightarrow X$  p.s. quand  $n \rightarrow \infty$ , et s'il existe  $Y$  v.a. positive intégrable (i.e. dans  $L^1(\mathbb{P})$ , i.e.  $\mathbb{E}|Y| < \infty$ ) t.q.  $|X_n| \leq Y$  p.s., alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(X_n) = \mathbb{E}\left(\lim_{n \rightarrow \infty} X_n\right).$$

## Rappel : les modes de convergence des v.a.

- i) Convergence en probabilité : [cf poly]
- ii) Convergence  $L^p$  : [cf poly]
- iii) Convergence p.s. : [déjà vu]
- iv) Convergence en loi :

### Définition (1.5.3)

Soit  $(X_n)$  suite de v.a. à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$  (chaque  $X_n$  est définie sur  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n)$ ). Pour tout  $n$  on note  $\mathbb{P}_{X_n}$  la loi de  $X_n$  sur  $(E, \mathcal{E})$ . Soit  $X$  v.a. à valeurs dans  $(E, \mathcal{E})$ , définie sur  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ .

On dit que  $(X_n)$  converge en loi vers  $X$ , et on note  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ,  $n \rightarrow \infty$  si  $\mathbb{P}_{X_n} \rightarrow \mathbb{P}_X$ ,  $n \rightarrow \infty$ , i.e.  $\forall f \in C_b(E)$  on a  $\int_E f d\mathbb{P}_{X_n} \rightarrow \int_E f d\mathbb{P}_X$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**NB** : Si  $(\Omega_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}_n) = (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\forall n$ , la condition ci-dessus peut s'exprimer comme "on a  $\mathbb{E}(f(X_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(X))$ ",  $\forall f \in C_b(E)$ ".

Notons que dans le cas de v.a.. réelles (v.a.r.) on a la variante :

## Définition (1.5.4)

*Soient  $(X_n)$  suite de v.a.r et  $X$  v.a.r. On dit que  $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ ,  $n \rightarrow \infty$ , si  $F_{X_n}(x) \rightarrow F_X(x)$  en tout point de continuité de  $F_X$ .*

Pour finir :

## Théorème (1.5.2, Loi forte des grands nombres)

*Soit  $(X_n)$  suite de v.a. dans  $L^1$ , indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.). Alors*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n X_k \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{p.s.}} \mathbb{E}(X_1).$$

## Théorème (1.5.3, TCL)

*Soit  $(X_n)$  suite i.i.d. de v.a.r. dans  $L^2$ . Posons  $\sigma^2 = \text{Var}(X_1)$ . Alors*

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma} (\bar{X}_n - \mathbb{E}(X_1)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, 1),$$

où  $\mathcal{N}(0, 1)$  désigne la loi normale centrée réduite.