Options sur multi-taux

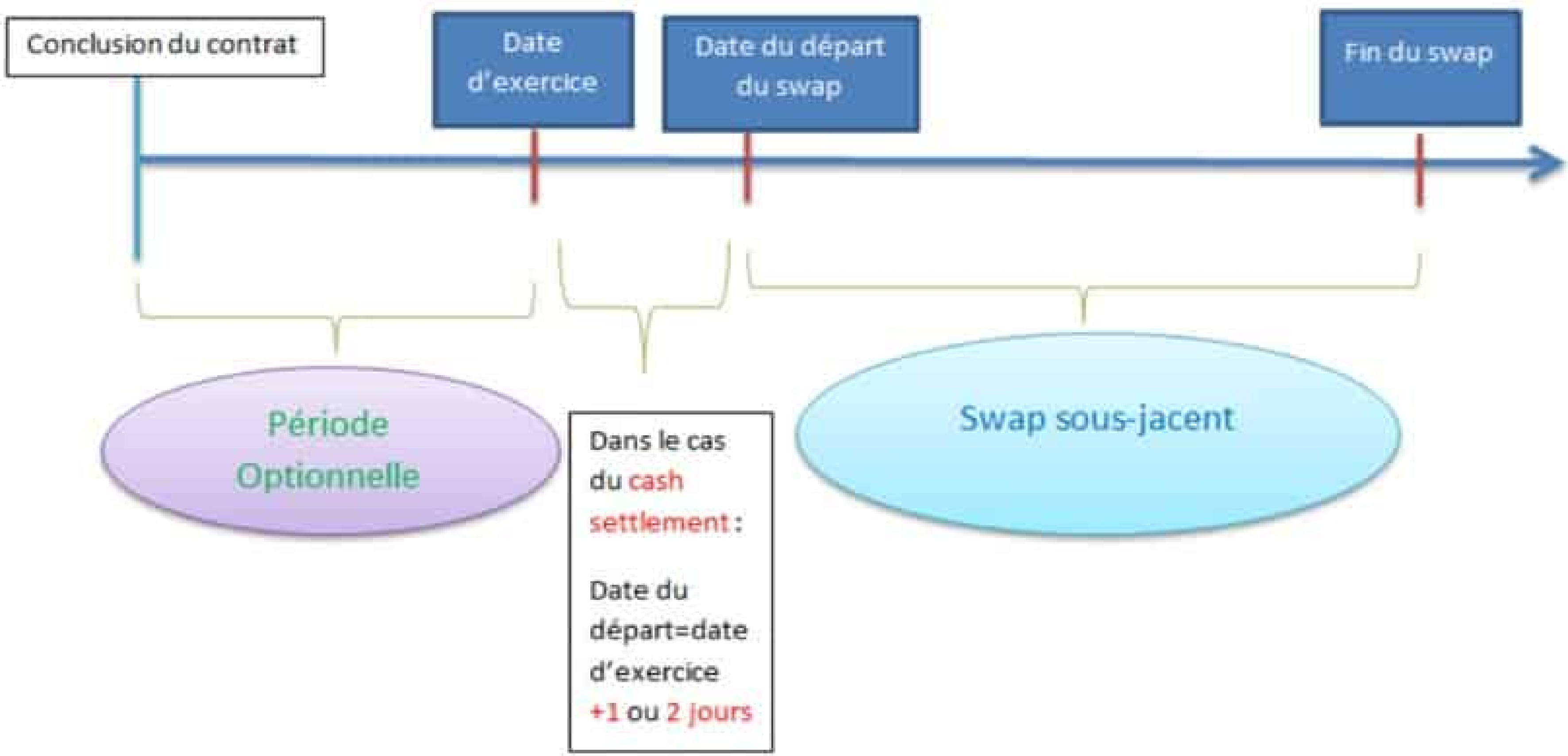
Le marché des Swaptions

Les Swaptions

Un investisseur désire rentrer dans un swap dans le futur. Moyennant une prime, il veut se garantir contre une variation excessive du taux de swap, en achetant une option sur taux de swap ou swaption

- Pour une protection à la hausse, il entre dans une option "d'achat" sur taux de swap, qui lui garantit un taux fixe plafonné. Cette swaption est appellée une **swaption payeuse.** Ce taux est souvent proche du taux de Swap forward.
- Suivant sa position dans le Swap, il peut être plutôt intéressé par une option de vente. On parle alors de **swaption receveuse.** En cas d'exercice, ce sont tous les paiements futurs qui seront affectés par l'option.
  - Pay-off d'une swaption receveuse, de taux de swap en T_C, $ISW(T_C, T_N)$

$$(ISW(T_C, T_N) - K)^+ \sum_{i=1}^{N} \delta_i B(T, T_i)$$



Fonctionnement d'une swaption D'après GoogleImages

Exemple de Swaptions

- une 1.5% $1Y \mapsto 5Y$ (1 into 5) swaption receveuse donne le droit de recevoir 1.5% sur un swap 5 ans partant dans 1 an
- Plus precisément, le détenteur de l'option peut l'exercer dans un an, et rentrer dans un swap dont le taux fixe est fixé à $1,5\%$.
- La durée totale de l'opération est $1 + 5$ ans
- Rappelons que la branche variable est au pair

Contrat de Swap

- Le taux de Swap forward (ISW) de ténor δ est donné par

$$\delta\, ISW_t(T,\delta,T_f) = \frac{1 - B_t(T,T_f)}{\sum_{i=1}^{N} B_t(T,T_i)}$$

- Posons $\text{Level}_{\mathbf{t}}(\mathbf{T},\mathbf{T_f}) = \delta \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{B_t}(\mathbf{T},\mathbf{T_i})$. $\text{Level}_t ou \text{Annuity}_t$ est un portefeuille de zéro-coupons qui peut être utilisé comme numéraire.

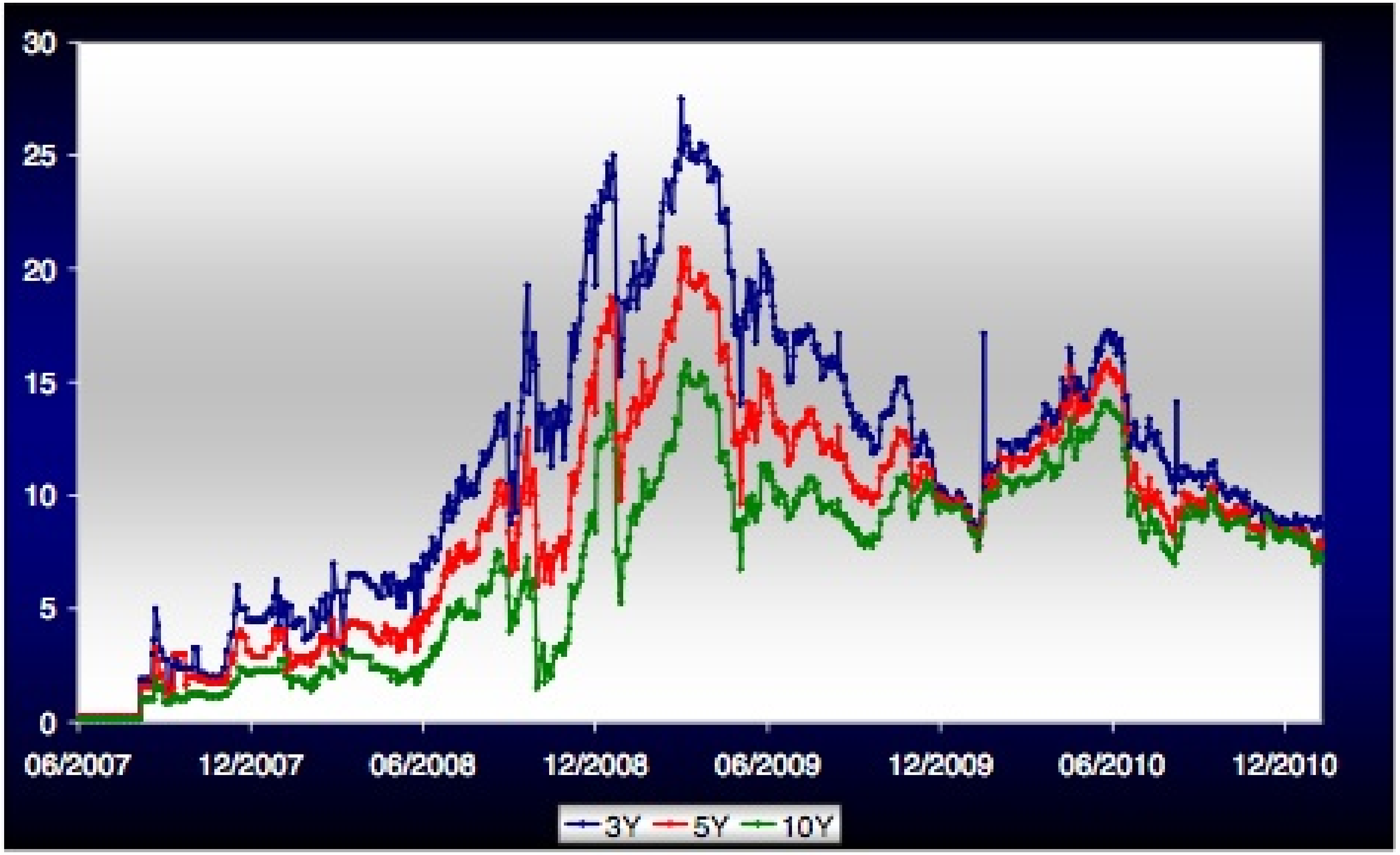
- Sous la probabilité Level $\mathsf{Q}^{\text{Level}}$, $ISW_t(T,T_f)$ est une martingale

- Un autre point de vue est que $1 - B_t(T,T_f)$ est le prix de la branche variable,

$$1 - B_t(T,T_f) = \delta \sum_{i=1}^{N} L_t(T_i,\delta) B_t(T,T_{i+\delta})$$

- Cette représentation permet d'écrire le taux de swap comme un basket de forwards

US Swap Curves



Libor Market Model and Swaptions

Le taux de swap comme basket de forwards

Une observation très importante dans tout ce qui suit est la suivante, où $L_t^i = L_t(T + i\delta)$

$$ISW_t(T, T_N) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i(t) L_t^i$$

où les poids $\omega_i(t) = \frac{\delta B(t,T_{i+1})}{Level_t(T;T_N)}$ qui sont aléatoires ont une volatilité testée dans le marché beaucoup plus faible que celle des taux forwards.

- Le taux de swap apparaît alors comme un basket de taux Libor forwards
- Double difficulté : Options sur Basket+ Evaluation sous la proba Level.
- Comment simplifier ? Réponse du marché: premier niveau

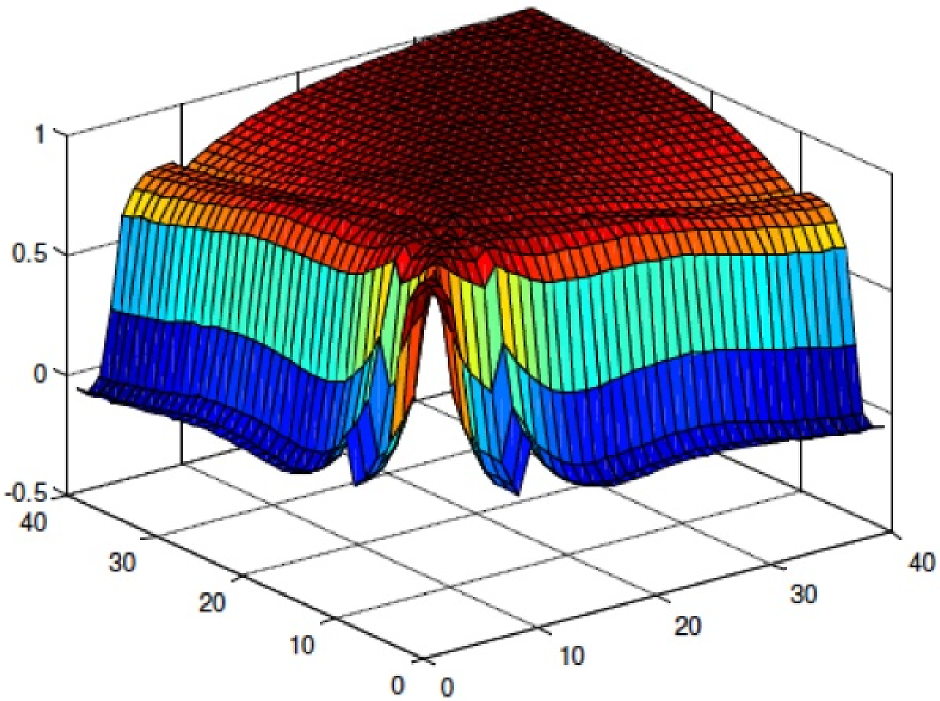
Le taux de swap comme basket de forwards, (suite)

- Les dates T_i sont fixées, et sont des multiples du ténor. et $L_t^i = L_t(T + i\delta)$
- En première approximation, on ignore les caractères aléatoires des poids et l'effet du changement de proba, d'où une option sur panier standard, mais avec un brownien multidimensionnel.
- Rebonato teste l'approximation de volatilité

$$\mathrm{Vol}_{ISW}(T, T_N) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i(0)\omega_j(0) L_0^i L_0^j \, \frac{1}{Swap_0^2(T, N)} \times \int_0^T (\kappa_t^{\cdot}(\kappa_t^{\cdot})^*)_{i,j} dt$$

- Dans la matrice $\kappa_t^{\cdot}(\kappa_t^{\cdot})^{\star}$, on distingue les volatilités, et la matrice des corrélations $\rho^{i,j}$.

Volatilités des Swaptions



Calibration de la volatilité :

d' après Andrew Lesniewski

Compléments

Les options vanilles de références

- LA COURBE DES TAUX FORWARD ET LE MODÉLE DE PRICING DES SWAPS
  - la courbe forward est représentée par une suite de N Libors forward $L_0^j, j = 1, ..., N$.
  - ces taux sont utilisés pour calibrer le modèle et comme valeur initiale pour le modèle de diffusions des taux Libor
- STRIPPER DES VOLATILITÉS À PARTIR DE PRIX DE CAPS ET FLOORS. Les données du stripper de cap est une suite de N volatilités de Caplet. Elles sont utilisées pour calibrer la volatilité du modèle.
- MODÈLE DE PRICING DES SWAPTIONS Les volatilités de Swaptions sont utilisées aussi pour calibrer le modèle

Paramétrisation des volatilités instantanées

Différentes formes

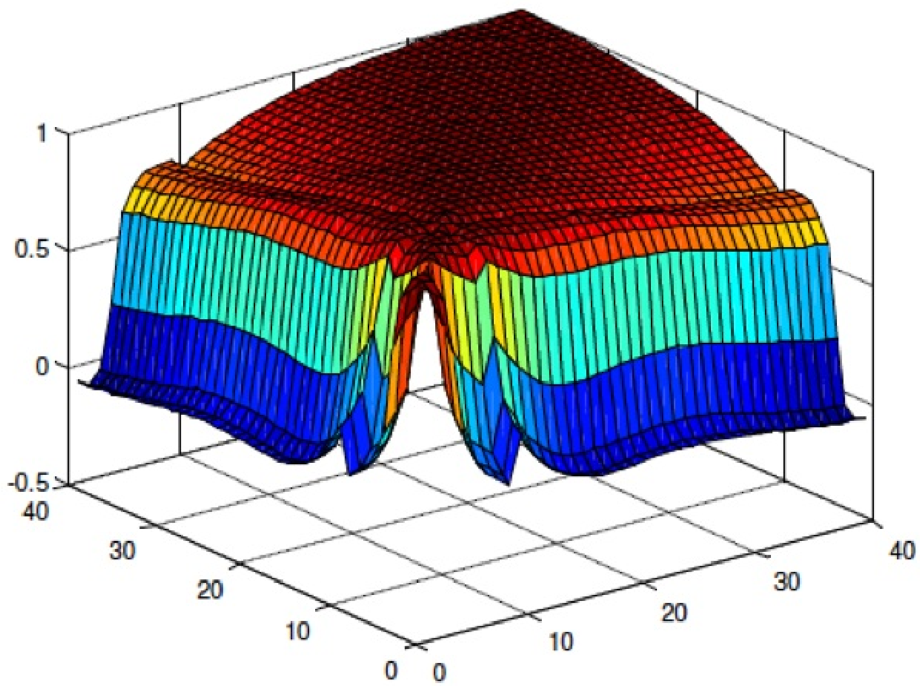
- Volatilité locale : Normal, Log normal, CEV, Log normal shifted avec paramètres dépendant du temps $\sigma^j(t)$: $\sigma^j(t)C(L_t^j)$
- $\sigma^j(t)$, constant par morceaux sur T_a, T_{a+1}
- Pour la maturité 30 years, 7140 parametres $\Longrightarrow$ surparametrés.
- hypothèse stationnaire : $\sigma^j(T_i) = \sigma^j(T_{j-i})$
- Nécessité d'un modèle calibré $K(\tau, \lambda)$ with $K^{j,i} = \exp(-\lambda^j(T_j - T_i))$

Volatilité des Swaps

Dimension

- Sur 30 ans, il y a 120 quarterly Libor forwards (i.e. 120 stochastic factors).
- Sévères problèmes d'implémentation: Le problème de la dimension conduit à des performances de lenteur inacceptable
- Les paramètres du modèle sont sévèrement indéterminés et la calibration est instable
- On a besoin d'un petit nombre de browniens indépendants $W_a(t), a = 1, ..., d, \mathbb{E}[dW_a(t)dW_b(t)] = \delta_{ab}\, dt$
- Typically, $d = 1, 2, 3$, or 4.

Volatilités des Swaptions



US Swap Black Volatility Dynamics

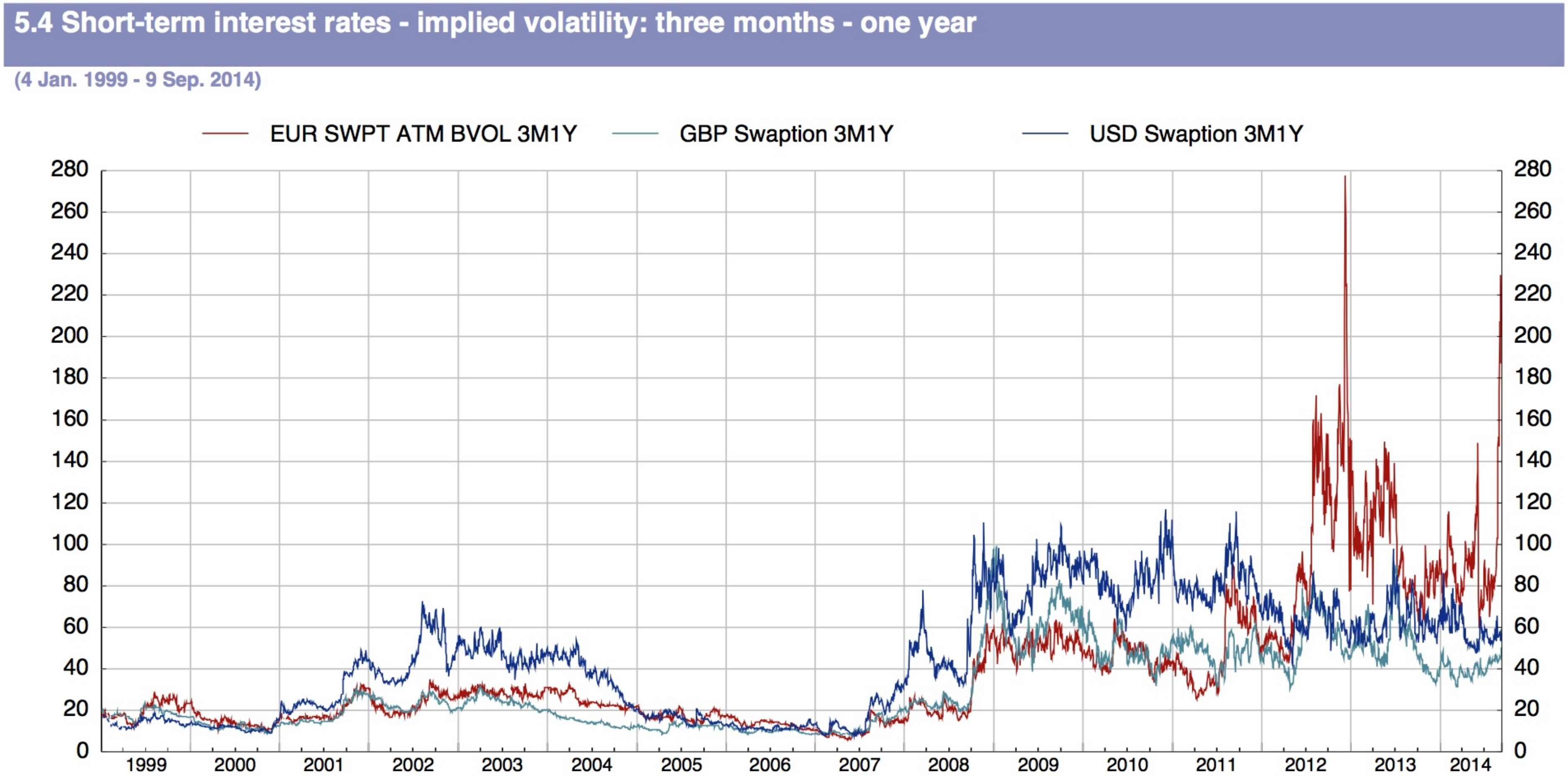
Vol ImpliedVolatility 3mois-10ansDynamics

5.5 Long-term interest rates - implied volatility: three months - ten years

(4 Jan. 1999 - 9 Sep. 2014)

Source: Bloomberg.
Note: Volatility is implied by at-the-money swaption prices observed in the market.

Vol ImpliedVolatility 3mois-1an Dynamics



Source: Bloomberg.
Note: Volatility is implied by at-the-money swaption prices observed in the market.

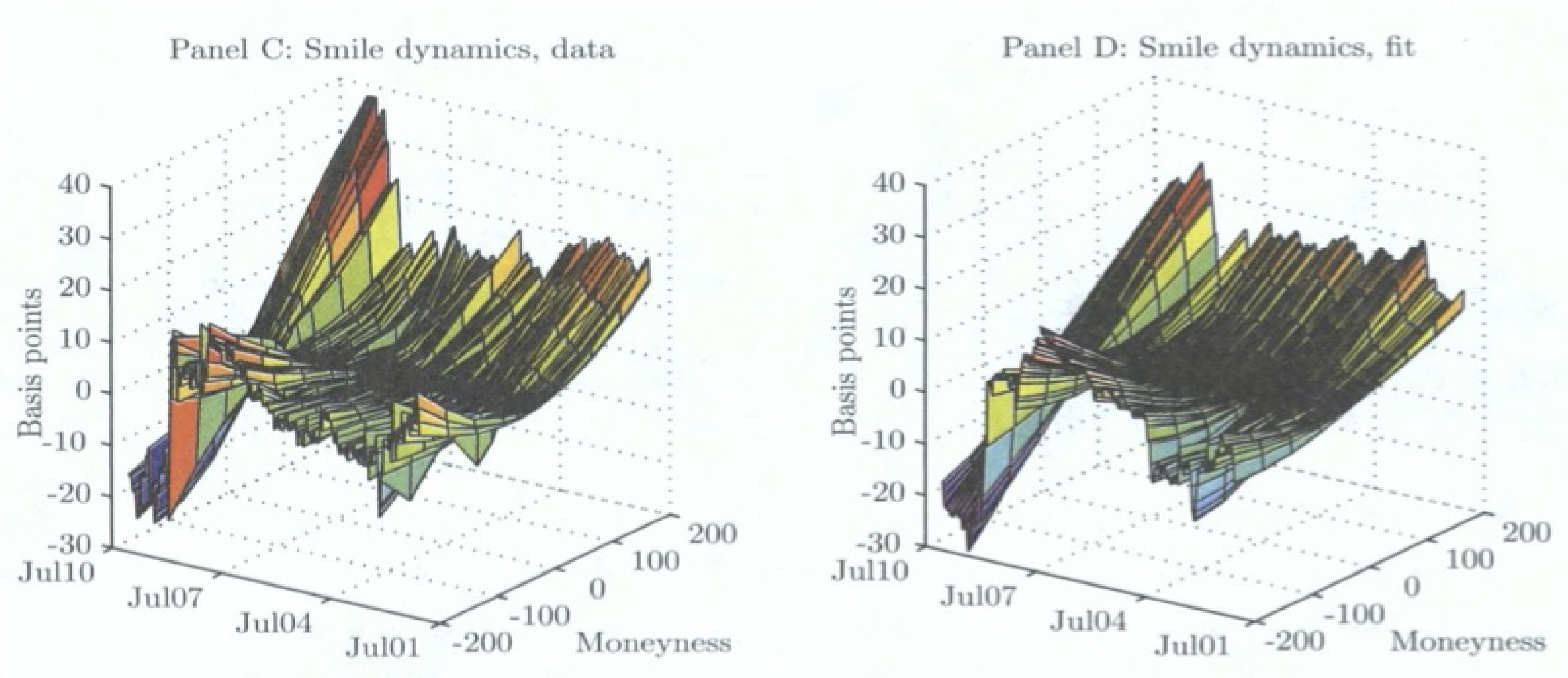


Figure 4
Fit to volatility and skewness in the USD market
For each combination of swap maturity (tenor) and option expiry, Panel A (Panel B) shows the fraction of variation in conditional volatility (skewness) that is explained by the model. Conditional volatility and skewness is under the annuity measure $\mathbb{A}$. Panel C (Panel D) shows the actual (fitted) time series of the USD implied volatility smile of the 1-year option on the 10-year swap rate. The smiles are the differences between the normal implied volatilities for different strikes and the ATM normal implied volatility, and the units are basis points. The sample period is from December 19, 2001 to January 27, 2010 (419 weekly observations).

Vol Implied Swaptions

Corrélations instantanées

Un imput important est la matrice de corrélations instantannées $\rho = (\rho_{j,k})$, $0 \leq j, k \leq N - 1$.

Le nombre de coefficients de ρ est $N(N + 1)/2$, posant un vrai problème de calibration stable .

Des stratégies possibles incluent:

- Semi-definite programming. Essayer d'implémenter une matrice de corrélation à partir des cap / floor et swaptions du marché.
  Donne parfois des résultats non-intuitifs.

- Données historiques. This approach, in conjunction with the principal component analysis leads to stable correlation structure. It may not reflect the current market correlations.

- PARAMETERIZED CORRELATIONS. May be the best choice.
  $\rho_{ik} = \rho_\infty + (1-\rho_\infty)\exp\big(-\lambda\frac{|T_j-T_k|}{1+\eta\min(T_j,T_k)}\big)$, δ the short end.
- Warning The matrix ρ is only approximately definite positive.
- **Advandages** Easy to interpretate, ρ_∞ measures the overall level of correlations, λ the decay rate , η the sort end decorrelation
- Easy to calibrate: only tree parameters
- Perturbing the parameters is used in risk management.

L'approximation du drift

- Le drift pour une probabilité terminale est de la forme
  $\beta_t^k = -\kappa_t^k \sum_{j=k+1}^{N-1} f(L_t^j)\kappa_t^j$ avec $f(x) = \frac{x}{1-x}$
- **Approximation au premier ordre** : on remplace L_t^j par L_0^j. Assez grossier
- **Stochastic approximation** On developpe $Z_t^k = f(L_t^k)$ par Itô, et on utilise la bijection entre Z^k and L^k
  $dZ_t^k =: A_k(t, [Z^{k,N-1}])dt + B_k(t, [Z^{k,N-1}])dW_t$
- On traite cela comme un systeme d'equations à résoudre par une approximation de Picard, dont la première étape est $Z_0 = Z^0$
- La seconde qu'on retient est définie par
  $$d\hat{Z}_t^k =: A_k(t, [Z_0^{k,N-1}])dt + B_k(t, [Z_0^{k,N-1}])dW_t$$
- $\hat{Z}_t^k$ est un vecteur gaussien.

- Quand on le reporte dans le terme $\beta_k(t)$
on se retrouve avec une approximation **lognormale** pour les libor sous les differentes probabilites de Pricing.
- Comme les lois sont connues à chaque temps t, cela gagne beaucoup de temps pour les simulations

Autres approximations du drift

- **Petites perturbations** de l'approximation deterministe de $G_t^k = \log L_t^k$ de drift $\hat{\beta}^k$,

$$dG^{\epsilon,k} = \epsilon(\hat{\beta}^{\epsilon,k} dt + \kappa^k(t) dW_t$$

- Approximation stochastique $\mathbf{T}G^{\epsilon,k} = G(0,T_k) + \epsilon(\partial_\epsilon G^{\epsilon,k})_{\epsilon=0} =: G(0,T_k) + \epsilon Y_t^k$

$$dY_t^k = \hat{\beta}^k(t, Z_0) + \kappa_t dW_s$$

- Procédure systématique, qui peut être appliquée à des situations plus complexes, vol sto.....
- la performance empirique est trés bonne
- l'inconvenient est qu'elle est basée sur des simulations de MC , donc time consuming.

Swaptions exotiques

Options sur Swaps CMS

CMS Swap

- Un Swap CMS paye le taux de Swap $ISW(T, T_f)$ exactement au temps T.
- Pour calculer la correction de convexité, le marché utilise une approximation du processus $\text{Level}_t(t, T_f)$ comme fonction J du taux de swap $\text{ISW}_t(T, T_f)$
- La fonction J est donnée en pensant le taux de swap comme un taux actuariel (courbe plate)

$$\text{Level}_t \sim J(\text{ISW}_t(T, T_f))^{-1} = \frac{1}{\text{ISW}_t(T, T_f)}\Big(1 - (\frac{1}{1 + \delta\text{ISW}_t(T, T_f)})^{T_f - T}\Big)$$

- L'approximation est valide si la maturité résiduelle est suffisamment grande

Options sur Swaps CMS

- **Convexity Correction**

$$\mathbb{E}_t^{\mathsf{Q}_T}\left[\mathbf{ISW}(T,T_f)\right] \sim L_t(T,T^f)\mathbb{E}_t^{\mathsf{Q}^{\mathbf{L}}}\left[J(\mathbf{ISW}(T,T_f))\mathbf{ISW}(T,T_f)\right]$$

- La correction peut être calculée ? partir de la distribution smilée du taux de swap, par une formule de replication statique (formule de Carr-Madan)
- Nécessité de tronquer l'intégrale dans la representation avec des Calls et Puts
- Gros problèmes depuis la crise
- La pente de la surface de volatilité induit des queues plus épaisses
- qui peuvent avoir de l'effet sur la correction de convexité.
- **Options sur CMS**

$$\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}_T}\left[(\mathbf{ISW}(T,T_f)-K)^+\right]$$
$$= \mathrm{Level}_t(T,T^f)\mathbb{E}_t^{\mathbb{Q}^{\mathrm{Level}}}\left[J(\mathbf{ISW}(T,T_f))(\mathbf{SW}(T,T_f)-K)^+\right]$$

Options on Swaps CMS (suite)

- Lorsque c'est possible, le marché est intêressé par la vol sto du taux CMS définie par

$$dCMS_t(T,T_f) = CMS_t(T,T_f)\left[\sigma_t^{CMS_t(T,T_f)} dW_t^T\right]$$

⇒ Puisque le $CMS_t(T,T_f)$ est une " combinaison" linéaire d' options Call and Put, la volatilité est celle d'une combinaison convexe CMS d' options à volatilité stochastique

⇒ Pour retrouver la formule de Black, le marché utilise une volatilité implicite équivalente, comme si le forward ne dépendait pas aussi de la volatilité.

CMS Spread Options

Depuis 2005, il y a un marché très actif des CMS spreads options, écrites sur les spreads de taux swap de maturité 10 ans moins deux ans.
Ce sont des produits sur lesquels jouent

- La correction de convexité pour chacun des CMS
- La corrélation des taux 10 ans et deux ans
- Nombreux débats sur le risque de modèle pour ces produits

Depuis qu'il y a un marché liquide, on couvre avec d'autres options, mais les surprises ont été brutales pendant la crise

Swaptions exotiques

- **Swaptions Bermuda**, où l'investisseur peut choisir le moment où il rentre dans une swaption. S'il rentre après le début de l'option, la maturité du Swap sera réduite d'autant.
- Les **flex-caps** ont également rencontré un succès certain, par la possibilité qu'ils offrent de choisir les caplets du Cap qui seront excercés (en nombre fixé dans le contrat)
- **Options corridor ou Boost**, qui parient sur la stabilité des taux : moyennant une prime, on reçoit un montant proportionnel au nombre de jours passés par le taux de référence à l'intérieur d'un corridor.
- **Caps CMS** échangent périodiquement un taux de Swap de maturité fixé dans le contrat contre un taux fixe, si l'opération est favorable à celui qui a payé la prime.