Cours 6 "Processus stochastiques et produits dérivés"

emmanuel.gobet@polytechnique.edu

PLAN DU COURS

Rappel : Marché complet

Théorème (de valorisation). Supposons

i) $k = d$ et σ_t inversible

ii) la prime de risque λ_t est bornée

iii) $\mathbb{E}\left(e^{-c\int_0^T r_s \mathrm{d}s}\right) < +\infty$ pour tout $c > 0$

Alors le marché est complet : tout flux financier Ψ_T (à la date T) de carré intégrale sous $\mathbb{P}$ est réplicable par une stratégie admissible, avec $(e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} V_t)_t$ $\mathbb{Q}$-martingale :

$$\mathbf{C_t(\Psi_T, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_t^T r_s ds}\Psi_T \mid \mathcal{F}_t\right).}$$

Portefeuilles markoviens, EDP de valorisation

Supposons que les actifs négociables $S = (S^1, \cdots, S^d)$ aient une volatilité markovienne :

$$\mathrm{d}S_t^i = S_t^i \ \left(b_t^i \ \mathrm{d}t + \sum_{j=1}^{k} \sigma_j^i(t, S_t)\mathrm{d}\widehat{W}_t^j\right),$$

que chaque actif verse un taux de dividende $q^i(t, S_t)$ et que le taux sans risque r_t est markovien de S ($r_t = r(t, S_t)$).
Posons $\Sigma_{i,j}(t, S) = S^i \sigma_j^i(t, S) = [\mathrm{Diag}(S)\sigma(t, S)]_{i,j}$ de sorte à avoir vectoriellement $\mathrm{d}S_t = \cdots \mathrm{d}t + \Sigma(t, S_t)\mathrm{d}\widehat{W}_t$. Notons

$$Lu(t, S) = \sum_{i=1}^{d}(r(t, S) - q^i(t, S))S^i \partial_{S^i} u(t, S) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} [\Sigma\Sigma^\top(t, S)]_{i,j} \partial^2_{S^i,S^j} u(t, S).$$

Théorème. S'il existe une solution régulière à l'EDP (pour $S \in (\mathbb{R}^+)^d$ et $0 < t < T$) $\boxed{u(T, S) = \Phi(S), \qquad \partial_t u(t, S) + Lu(t, S) - r(t, S)u(t, S) = 0,}$ alors le prix du contrat versant $\Phi(S_T)$ en T est $u(t, S_t)$.

La couverture dans les actifs négociables est $\delta_t^i = \partial_{S^i} u(t, S_t)$, le reste étant investi dans le cash.

EDP en fonction des facteurs de marché

Supposons que les d actifs de base s'expliquent par d facteurs $(X_t^1, ...X_t^d)$ dont la dynamique est celle d'une diffusion markovienne

$$\mathrm{d}X_t^j = \mu^j(t, X_t)\mathrm{d}t + \sum_{l=1}^{k} \gamma_l^j(t, X_t)\mathrm{d}W_t^l$$

sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ et que $r_t = r(t, X_t)$, $q_t^i = q^i(t, X_t)$. On suppose que $S_t^j = H^j(t, X_t)$ pour une fonction H^j régulière. On pose

$$L^X H(t, x) = \sum_{i=1}^{d} \mu_i(t, x)\partial_{x^i} H(t, x) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{d} [\gamma\gamma^*(t, x)]_{i,j} \partial^2_{x^i,x^j} H(t, x).$$

Exercice. Montrer que

$$\boxed{\partial_t H^j(t, x) + L^X H^j(t, x) - (r(t, x) - q^j(t, x))H^j(t, x) = 0.}$$

EDP en fonction des facteurs de marché (suite)

Théorème. Supposons ∇H inversible (bijection entre S et X).

S'il existe une solution régulière à l'EDP

$$\boxed{v(T,x) = \phi(x) \text{ pour tout } x,\ \partial_t v + L^X v - rv = 0 \text{ pour tout } (t,x),}$$

alors le prix du contrat versant $\phi(X_T)$ en T est $v(t, X_t)$.

La couverture δ_t^i dans les actifs négociables vérifie $\delta_t^\top \nabla H(t, X_t) = \nabla v(t, X_t)$, le reste étant investi dans le cash.

Le cas de plus d'instruments de couverture que de risques

— d actifs et k risques avec $d > k$.
— Ex : structure par terme d'instruments sur un même marché (taux d'intérêt, matières premières, ...)
— On suppose que $\mathrm{rang}(\sigma_t) = k$.

Théorème. 2 stratégies de couverture conduisent au même flux ssi

$$V_0^{(1)} = V_0^{(2)}$$

et

$$\sigma_t^\top (\delta^{(1)} S)_t = \sigma_t^\top (\delta^{(2)} S)_t.$$

Choisir les bons instruments de couverture requiert d'examiner :
— la liquidité de chaque instrument
— les sensibilités (gammas, vegas...)
—

IV.5 Changement de numéraire et applications

Définition. Un numéraire est une réf. monétaire dont la valeur en € est un proc. d'Itô, adapté, continu et positif :

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{X_t} = b_t^X \mathrm{d}t + \sigma_t^X \mathrm{d}\widehat{W}_t.$$

Si Y_t est un prix en € , le prix dans ce numéraire est noté $Y_t^X = Y_t/X_t$: prix dans le X-marché.

Proposition.

a) la notion de stratégie autofinançante est invariante par changement de numéraire

b) une stratégie d'arbitrage dans un numéraire est aussi une stratégie d'arbitrage dans n'importe quel autre numéraire

Résultats techniques

Proposition.

1. $\frac{\mathrm{d}(U_t V_t)}{U_t V_t} = \frac{\mathrm{d}U_t}{U_t} + \frac{\mathrm{d}V_t}{V_t} + \frac{\mathrm{d}\langle U, V\rangle_t}{U_t V_t}$
2. $\frac{\mathrm{d}(U_t/V_t)}{U_t/V_t} = \frac{\mathrm{d}U_t}{U_t} - \frac{\mathrm{d}V_t}{V_t} - \langle \frac{\mathrm{d}V_t}{V_t}, \frac{\mathrm{d}U_t}{U_t} - \frac{\mathrm{d}V_t}{V_t}\rangle$
3. la volatilité (comme vecteur) de UV est $\sigma_t^U + \sigma_t^V$
4. la volatilité (comme vecteur) de U/V est $\sigma_t^U - \sigma_t^V$

Théorème (Chgt de proba vs chgt de numéraire). On suppose que X est la valeur d'un portefeuille admissible.

i) $L_t^X = \frac{e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} X_t}{X_0}$ définit une nouvelle probabilité

$$\mathbb{Q}^X \big| \mathcal{F}_T := L_T^X \quad \mathbb{Q}\big|_{\mathcal{F}_T}$$

ii) $W_t^X = W_t - \int_0^t (\sigma_s^X)^\top \mathrm{d}s$ est une $\mathbb{Q}^X$-MB

iii) Si S a pour dynamique

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = r_t \mathrm{d}t + \sigma_t^S \mathrm{d}W_t,$$

alors

$$\frac{\mathrm{d}S_t^X}{S_t^X} = (\sigma_t^S - \sigma_t^X)\mathrm{d}W_t^X.$$

Corollaire. En marché complet, tout flux Ψ_T réplicable a pour prix dans le X-marché

$$\frac{C_t(\Psi_T, T)}{X_t} =: C_t^X(\Psi_T, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}^X}\left(\frac{\Psi_T}{X_T} \mid \mathcal{F}_t\right),$$

définissant une $\mathbb{Q}^X$-martingale.

Exemples.

1. $X_t = e^{\int_0^t r_s \mathrm{d}s}$: numéraire cash, $\mathbb{Q}^X = \mathbb{Q}$
2. $X_t = B(t,T)$: $C_t^X(\Psi_T, T) =$ prix forward de la date T
3. $X_t = S_t$: numéraire sous-jacent
4. ...

Résultats techniques

Proposition. Soit

$$\tilde{\mathbb{Q}}|\mathcal{F}_T := L_T \quad \mathbb{Q}|_{\mathcal{F}_T}$$

avec $L_t > 0$, $\mathbb{Q}$-martingale, avec $L_0 = 1$.

1. Si Z_T est $\mathcal{F}_T$-mesurable, et $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(|Z_T|) < +\infty$, alors
$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\frac{|Z_T|}{L_T}\right) < +\infty.$$
2. (formule de Bayes généralisée)
$$\mathbb{E}_{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\frac{Z_T}{L_T} \mid \mathcal{F}_t\right) = \frac{1}{L_t}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(Z_T \mid \mathcal{F}_t\right).$$
3. M est $\mathbb{Q}$-martingale si et seulement si $\frac{M}{L}$ est $\tilde{\mathbb{Q}}$-martingale

Applications

Généralisation de la formule de Black-Scholes avec des taux aléatoires

Théorème (Formule de Black). Si la volatilité du prix à terme (prix forward) $F_t = F_t(S_T; T)$ est déterministe, alors le prix se calcule par la formule de Black :

$$\begin{aligned} F_t((S_T - K)_+; T) = {} & F_t \mathcal{N}\left(\frac{1}{\int_t^T |\sigma_s^F|^2 \mathrm{d}s} \ln(F_t/K) + \frac{1}{2}\sqrt{\int_t^T |\sigma_s|^2 \mathrm{d}s}\right) \\ & - K\mathcal{N}\left(\frac{1}{\int_t^T |\sigma_s^F|^2 \mathrm{d}s} \ln(F_t/K) - \frac{1}{2}\sqrt{\int_t^T |\sigma_s|^2 \mathrm{d}s}\right), \end{aligned}$$

et la couverture consiste en l'achat de $\mathcal{N}(d_1(...))$ actifs $C_t(S_T, T)$ et la vente de $\mathcal{N}(d_0(..))$ zéro-coupons $B(., T)$.

Permet de dépasser le cas restreint de taux déterministe

IV.6 Marchés avec Future

Définition (Future). Contrat échangé sur un marché organisé, sans risque de contrepartie, via des appels de marge (Eurex, Euronext...)

1. $\mathrm{Fut}(\Psi_T; T)$ = prix en t de Ψ_T livré en T. A maturité T, pour un détenteur de Future, livraison du sous-jacent (physical settlement) ou règlement de l'équivalent en cash (cash settlement).
2. Différent du prix forward : les 2 parties payent (via la plateforme) les variations de prix au fur et à mesure.

Définition (autofinancement).

1. Une seule ligne en cash.
2. Si δ_t^F est le nombre de Future, alors

$$\mathrm{d}V_t = r_t V_t \mathrm{d}t + \delta_t^F \mathrm{dFut}_t,$$
$$\mathrm{d}(e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} V_t) = e^{-\int_0^t r_s \mathrm{d}s} \delta_t^F \mathrm{dFut}_t.$$

Corollaire. $\mathrm{Fut}_t(\Psi_T; T)$ est une $\mathbb{Q}$-martingale locale qui vaut Ψ_T en T :

$$\mathrm{Fut}_{\mathbf{t}}(\mathbf{\Psi_T}; \mathbf{T}) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\mathbf{\Psi_T} \mid \mathcal{F}_{\mathbf{t}}\right).$$

Théorème. Si Φ_T et les taux d'intérêt sont indépendants, alors prix forward et prix future coincident :

$$\mathrm{Fut}_{\mathbf{t}}(\mathbf{\Psi_T}; \mathbf{T}) = \mathbf{F_t}(\mathbf{\Psi_T}; \mathbf{T}).$$

Remarque. Sur les marchés organisés, $T = March, June, Sept, Dec$. Plusieurs futures pour hedger le même type de risque.

EURO STOXX® Banks Futures (FESB)

Statistics | Prices/Quotes | Specifications | Trading Hours | Trading Calendar | Transaction Fees | Order Book

Trading date 06.11.2020

Traded contracts:	Open interest (adj.):	Product type:	Stock exchange:	Underlying closing price:
271,156	1,872,766	F	n/a	57.03

Delivery month	Opening price	Daily high	Daily low	Last price	Settlem. price	Traded contracts	Open interest	Open interest (adj.)
Dec 20	57.50	58.70	56.70	56.90	56.90	261,133	1,919,404	1,862,751
Mar 21	57.30	57.60	56.80	56.80	56.60	10,023	20,015	10,015
Jun 21	0.00	0.00	0.00	0.00	55.80	0	0	0
Total						271,156	1,939,419	1,872,766

IV.7 Diffusion implicite à la Dupire

Modèle d'actif négociable :

$$dS_t = S_t(b_t^i dt + \sigma(t, S_t) d\widehat{W}_t).$$

Taux sans risque r constant, taux de dividende q constant (pour simplifier).

EDP de valorisation en variables backward (t, S)

On note $Lu(t,S) = (r-q)S\partial_S u(t,S) + \frac{1}{2}[S\sigma(t,S)]^2 \partial^2_{S,S} u(t,S)$.

Théorème. S'il existe une solution régulière à l'EDP $\boxed{u(T,S) = \Phi(S) \text{ pour } S > 0,\ \partial_t u + Lu - ru = 0 \text{ pour } 0 < t < T \text{ et } S > 0,}$ alors le prix du contrat versant $\Phi(S_T)$ en T est $u(t, S_t)$.

Autant de contrat $\Phi^{T,K}(S) = (S-K)_+$ que d'EDP à résoudre ➥ **Calibration longue**.

Question : une EDP pour $(T, K) \mapsto u(0, S_0, T, K)$?

Symétrie du Payoff $(S-K)_+$:

- Call en S (avec strike K)
- Put en K (avec strike S)

EDP de valorisation en variables forward (T, K)

Théorème (EDP à la Dupire). Les prix de Call $(T,K) \mapsto \mathcal{C}(T,K) = u(0, S_0, T, K)$ satisfont à l'EDP d'évaluation forward (pour $T > 0, K > 0$)

$$\begin{cases} \partial_T \mathcal{C}(T,K) & = -q\mathcal{C}(T,K) - (r-q)K\partial_K \mathcal{C}(T,K) + \frac{1}{2}\sigma^2(T,K)K^2\partial^2_{K,K}\mathcal{C}(T,K), \\ C(0,K) & = (S_0 - K)_+ \qquad \text{(Put de strike } S_0). \end{cases}$$

Corollaire. La résolution de l'EDP de Dupire donne les prix de Call pour tous les Maturités/Strikes à la fois (à Spot fixé).

☺ 1 seule EDP à résoudre numériquement

Corollaire (Modèle de diffusion implicite de Dupire). Etant donnée une surface de prix de marché $(T, K) \mapsto \mathcal{C}^{\texttt{Market}}(T, K)$, il existe un modèle de volatilité locale consistant avec ces prix de marché, et il est nécessairement de la forme

$$\sigma^2(T, K) = 2\frac{\partial_T \mathcal{C}^{\texttt{Market}}(T, K) + q\mathcal{C}^{\texttt{Market}}(T, K) + (r - q)K\partial_K \mathcal{C}^{\texttt{Market}}(T, K)}{K^2 \partial^2_{K,K} \mathcal{C}^{\texttt{Market}}(T, K)}.$$

- Modèle à vol locale cohérent avec le pricing d'option vanille
- Quid des exotiques ?
- Le modèle dépend des conditions initiales $(0, S_0)$: même modèle demain ? ? robustesse, stabilité de la calibration ? ?

Projection Markovienne (Ref : Gyöngy'86, Piterbarg '06)

Quel modèle peut être calibré aux options vanilles ?

Théorème (Gyöngy'86). Considérons deux processus stochastiques X and Y de dynamique de la forme

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = s_t \mathrm{d}W_t + m_t \mathrm{d}t, \\ \mathrm{d}Y_t = \sigma(t, Y_t)\mathrm{d}W_t + \mu(t, Y_t)\mathrm{d}t, \end{cases}$$

les deux processus partant de la valeur initiale $X_0 = Y_0$.
Si $\sigma(t, y) = (\mathbb{E}(s_t s_t^\top | X_t = y))^{1/2}$ et $\mu(t, y) = \mathbb{E}(m_t | X_t = y)$, Y_t a la même loi que X_t.

Y est la Projection Markovienne de X.

— Cela dépend de X_0 à la date de projection.
— Les prix d'options vanille sur X et Y coincident (au facteur d'actualisation près)
— Cela n'implique pas que les prix d'option exotiques soient les mêmes

Corollaire (Projection de modèle à vol. stochastique sur un modèle à vol. locale.). Si

$$\mathrm{d}S_t = S_t\sqrt{V_t}\mathrm{d}W_t$$

et $\sqrt{V}$ est une vol. stochastique, alors les prix vanilles coincident avec le modèle à vol. locale $\sigma(\mathbf{t},\mathbf{x}) = \sqrt{\mathbb{E}(\mathbf{V_t}|\mathbf{S_t}=\mathbf{x})}$.

Attention :

— Pour que le modèle à vol stochastique soit cohérent avec les prix de marché des calls/puts, alors on doit avoir en plus

$$\sigma(t,x) = \sigma^{\texttt{Dupire}}(t,x).$$

— Rien n'est dit sur les options path-dependent : les prix peuvent être différents (pas de structure de dépendance préservée).

— **Point de vue dynamique :** aucun.... pas de hedge, smile dynamique...

— **Utilisations intéressantes.** Formules fermées dans des modèles compliquées (Piterbarg '06)

Modèle à volatilité locale et stochastique calibrée au marché

Ref : Lipton '02, Guyon et Henry-Labordère '12

Théorème. Tous les modèles à volatilité locale et stochastique de la forme (risque-neutre)

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{S_t} = (r-q)\mathrm{d}t + \sigma^{\texttt{Dupire}}(t,S_t)\frac{f(Y_t)}{\sqrt{\mathbb{E}\left[f^2(Y_t)\mid S_t\right]}}\mathrm{d}W_t$$

sont automatiquement calibrés au marché.

— Nombreux degrés de liberté dans le choix de f et du processus Y.

— Simulation du modèle par méthodes particulaires Monte Carlo

Robustesse de la formule de Black-Scholes

Ref : El Karoui, Jeanblanc, Shreve '98

Théorème. Supposons qu'un trader couvre un call avec un modèle de Dupire calibré à $t = 0$. Alors son P&L en T est

$$P\&L_T = V_T - (S_T - K)_+ = e^{rT} \int_0^T e^{-rt} \frac{1}{2} S_t^2 \partial_x^2 u(t, S_t)((\sigma^{\texttt{Dupire}})^2(t, S_t) - \sigma_t^2)\mathrm{d}t$$

avec σ_t la vol. instantanée de S et u la fonction de pricing utilisée.

Moyenne trajectorielle entre la différence des variances calibrées et réalisées pondérée par les gammas

Remarque (Propagation de convexité). Dans un modèle à volatilité locale, u hérite de la convexité en x du payoff ➠ $\partial_x^2 u(t, S_t) \geq 0$