

RISQUE DE TAUX

Caroline Hillairet, ENSAE Paris
caroline.hillairet@ensae.fr

Novembre -Décembre 2024



PLANNING

- ▶ Objectifs du cours :
 - Modélisation mathématique et financière pour le marché des taux d'intérêt.
 - Version mathématique du cours de "Marchés financiers et théorie financière" (Lozeve/ De Langhe).
- ▶ Cours joint CH (Partie Zero-coupon/option) et Nicole El Karoui (Partie swap/swaptions et contrat à terme).
- ▶ 6 (voire 7) séances en amphi Astier
 - Mardi 5 et 12 novembre 9h-12h30 : CH
 - Mardi 19 et 26 novembre 9h-12h30 : NEK
 - Mardi 3 décembre 9h-12h30 : CH
 - Mardi 10 décembre 9h-12h30 : NEK
 - Mardi 17 décembre 9h-12h30 : revision
- ▶ Evaluation (sujet écrit de 2h) qui compte autant que l'évaluation de Huyêñ Pham "Stochastic modelling and derivatives in traditional markets"



PLAN

1 LES TAUX DE MARCHÉ

2 OBLIGATIONS ET CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX

3 LES DIFFÉRENTS TAUX

LE RISQUE DE TAUX



Comment se prémunir contre le risque de taux qui affecte les différents secteurs d'activité de l'économie et des banques en particulier?

- ▶ Analyse du risque qui affecte les différents produits
 - Méthode actuarielle : taux actuariel et duration
 - Méthodes issues de l'arbitrage : sensibilité aux déformations de la courbe des taux
- ▶ Développement des marchés dérivés de taux, avec les futurs, les swaps, caps et floors, swaptions, pour ne citer que les plus classiques: 80 % des dérivés OTC sont aujourd'hui des dérivés de taux!
- ▶ La gestion de ces produits exige une bonne connaissance de stratégies de couverture, robuste par rapport aux déformations de la courbe des taux
- ▶ Internationalisation des positions sur les différents marchés, qui combine risque de taux et risque de change.

LES PRINCIPAUX TAUX DE MARCHE



► Les taux directeurs de la BCE

Le taux directeur (dit aussi taux de refinancement ou taux refi) est le taux d'intérêt au **jour le jour** fixé par la BCE,

- rémunère les excédents de liquidités des banques et institutions financières placés auprès de la banque centrale,
- taux de refinancement auquel elles peuvent emprunter auprès de la banque centrale.

► Les Bons du Trésor

Les bons du Trésor à taux fixe (BTF) sont des fonds d'Etat qui constituent l'instrument de gestion de trésorerie de l'Etat. La maturité des BTF à l'émission est de moins d'un an. Ce besoin de trésorerie provient pour l'essentiel du décalage entre le rythme d'encaissement des recettes et celui du paiement des dépenses, et de l'échéancier d'amortissement de la dette publique.

LES TAUX DU MARCHÉ INTERBANCAIRE



- ▶ Le marché interbancaire est un compartiment du marché monétaire où les banques se refinancent à court ou à très court terme, et où la banque centrale intervient pour apporter ou reprendre des liquidités. Les taux s'établissent en fonction de l'offre et de la demande, avec un impact de la politique des banques centrales.
- ▶ Les références des taux du marché interbancaire ont subi de grands changements récemment: disparition d'indices et apparition de nouveaux indices.

LES TAUX DU MARCHÉ INTERBANCAIRE



Les ANCIENS taux du marché interbancaire en Euro

Les principaux taux de ce marché interbancaire étaient :

- ▶ l'Euro Overnight Index Average (EONIA) : taux calculé par la BCE et publié par EMMI (European Money Markets Institute). Il résulte de la moyenne pondérée des prêts au jour le jour non garantis réalisés par les banques sur le marché interbancaire (volumes échangés transmis par les banques)
- ▶ l'Euro Interbank Offered Rate (EURIBOR) : taux interbancaire offert entre banques de meilleures signatures pour la rémunération de dépôts dans la zone euro (déclarations des capacités d'emprunt - 50 banques contributrices). taux publié par EMMI



UN PEU D'HISTOIRE....

Dans le monde anglo-saxon, les taux équivalents étaient le LIBOR et l'OIS (Overnight Indexed Swaps).

► LIBOR

- Créé en 1986, et géré par la British Bankers' Association (puis par ICE Intercontinental exchange)
- 7 maturités (1w, 1m, 2m, 3m, 6m, 12m) et 5 monnaies
- Devises du LIBOR : en 1986, 3 devises: Dollars, Livre Sterling, Yen. S'est ensuite ajouté l'Euro et le Franc suisse. EuroLibor : différent de Euribor

► **Calcul du Libor: Ce n'était pas un taux de transaction.** Entre 8 et 16 banques contribuaient, en indiquant le taux auquel elles pouvaient se financer dans le marché interbancaire. Les 25% plus hauts et plus bas sont éliminés, et la moyenne est calculée sur les 50% restants.

► **La signification du LIBOR .** C'était le plus important benchmark des taux court terme, la référence de nombreux produits de taux, mais aussi de prêts, d'emprunts. influence sur les taux d'environ 360.000 milliards de dollars en prêts et en swaps de défaut (Credit Default Swaps CDS). En principe très surveillé....

MANIPULATION DU LIBOR (2012)

Le scandale et les procès (plus pratique "courante" que cas isolé).

Titres de journaux :

- ▶ Libor : comprendre ce scandale qui fait trembler les banques. Deutsche Bank vient d'être condamnée à payer une lourde amende de 2,5 milliards de dollars pour manipulation du Libor.
- ▶ Scandale du Libor : Deutsche Bank, Citi et HSBC paient 132 millions de dollars
- ▶ Taux Libor: deux cadres de la Société générale inculpées aux États-Unis
- ▶ Manipulation du Libor : quatre ex-banquiers de Barclays condamnés à de la prison
- ▶ Manipulation de l'Euribor : onze traders en procès



TRANSITION DU LIBOR

Transition du LIBOR vers des taux sans risque alternatifs

- ▶ Juillet 2017 : dans son discours, Andrew Bailey (CEO de la FCA: Financial Conduct Authority) a annoncé que le LIBOR n'était plus viable et qu'il serait abandonné fin de 2021.
- ▶ Transition vers des taux alternatifs sans risque, qui sont des taux overnight basés sur les transactions, comme taux de référence.
- ▶ FCA, Mars 2021: cessation du LIBOR au 31/12/2021.
- ▶ Mai 2021: "Life after LIBOR" speech de Andrew Bailey: "...transition to the most robust overnight rates, underpinned by deep underlying markets, will support a stronger more transparent financial system and ultimately benefit all market participants".

NOUVEAUX INDICES



- ▶ Adoption en juin 2016 du Règlement " Benchmark " européen : définition des nouvelles exigences pour les indices de référence
- ▶ Principale règle: Utilisation des volumes de transactions réelles et non plus estimées.
- ▶ ESTR (Euro Short term rate) remplace l'EONIA
 - Administrateur BCE
 - Volumes de transactions observées sur le marché. Moyenne des taux les 50 % les moins extrêmes.
 - Publication en T+1 à 8h.
 - Début de l'historique : aout 2016
 - Phase de transition (2 octobre 2019 à 2 janvier 2022) : Publication EONIA et ESTR

$$EONIA = ESTR + spread(8, 5bps)$$

TRANSITION EONIA VERS ESTER

Chart 2 (EONIA vs. €STR)

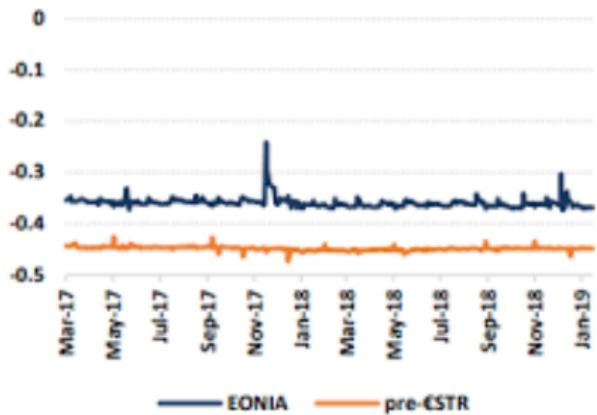


FIGURE: Source Mondovisione

NOUVEAUX INDICES TAUX OVERNIGHT DANS D'AUTRES MONNAIES



Taux overnight

- ▶ SOFR Secured Overnight Financing Rate (devise USD),
- ▶ SONIA Sterling Over Night Index Average (devise GBP),
- ▶ TONAR Tokyo Overnight Average Rate (devise JPY),
- ▶ SARON Swiss Average Rate Overnight (devise CHF).

Les taux à terme sont ensuite calculés en composant les taux au jour le jour.

NOUVEAU EURIBOR



► Révision du calcul de l'Euribor

- L'EMMI reste l'administrateur de l'EURIBOR et a proposé une méthodologie hybride reposant sur trois niveaux de calcul en fonction des volumes de transaction: se baser autant que possible sur les transactions effectives + prise en compte de jugements d'experts lorsque les données relatives aux transactions effectives ne sont pas/peu disponibles.
- Cette méthodologie a été validée en juillet 2020 et permet de continuer à utiliser l'EURIBOR
- Méthodologie basée sur des transactions, avec plus de contributeurs. (cf. Banque de France)

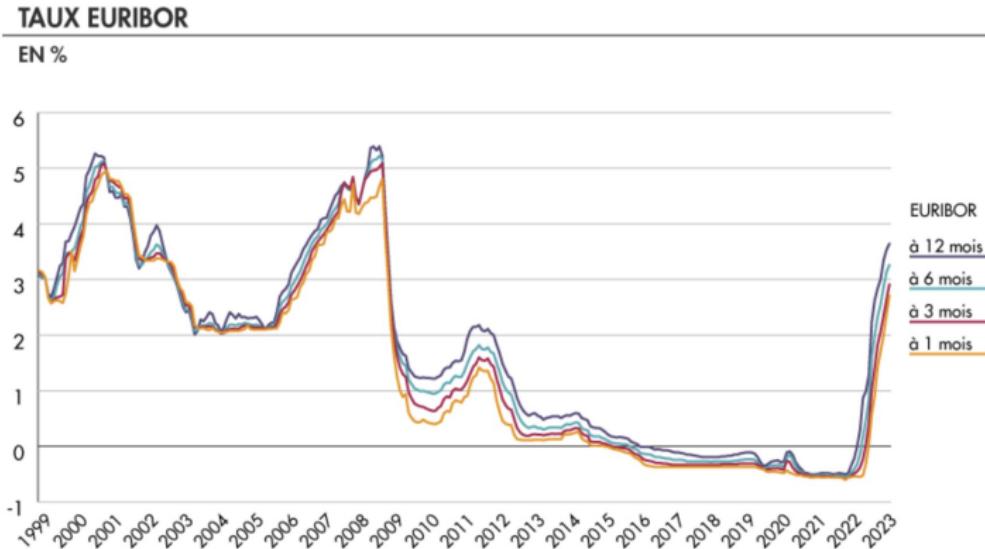
taux interbancaire offert entre banques de meilleures signatures pour la rémunération de dépôts dans la zone euro. Il est calculé en effectuant une moyenne quotidienne des taux prêteurs sur 13 échéances communiqués par un échantillon de 57 établissements bancaires les plus actifs de la zone Euro. Il est calculé sur la base de 360 jours et est diffusé à 11h le matin si au moins 50% des établissements constituant l'échantillon ont effectivement fourni une contribution. La moyenne est effectuée après élimination des 15% de cotations extrêmes et exprimée avec trois décimales.

- 5 maturités : 1 semaine, 1, 3, 6 et 12 mois

<https://www.emmi-benchmarks.eu/benchmarks/euribor/>

COURBES EURIBOR

Courbes EURIBOR pour différentes maturités



Source : lafinancepourtous.com d'après Banque de France





PLAN

1 LES TAUX DE MARCHÉ

2 OBLIGATIONS ET CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX

3 LES DIFFÉRENTS TAUX



OBLIGATIONS

Les emprunteurs les plus importants sont les Etats. En France, les emprunts d'Etat s'appellent OAT.

OAT : Obligations Assimilables du Trésor

- ▶ la façon dont l'état se finance: emprunt sur le marché obligataire
- ▶ A l'origine de la motivation de plusieurs modèles

Une **obligation**

- ▶ est un emprunt qui verse des coupons c_i à des dates fixes T_i et qui rembourse le nominal N à la fin:

$$P_0 = \sum_{T_i \leq T = T_n} c_i B(0, T_i) + N B(0, T_n)$$

- ▶ L'obligation est **au pair** si sa valeur est égale à celle du nominal:

$$P_0 = N$$



OBLIGATIONS À TAUX FIXES

- ▶ Obligations: échéanciers de paiements théoriques (coupons + **nominal**)

Caractéristiques d'une obligation "bullet" typique de nominal N:

- ▶ Dates de tombées de coupons T_1, \dots, T_n
- ▶ Montant du k -ième coupon versé: c_k , $k = 1, \dots, n$.
- ▶ Fréquence de paiement : f
- ▶ **Taux de rendement actuariel (Yield To Maturity) : noté y**
c'est le rendement qui vérifie que la valeur de l'obligation (cotée) est égale à celle du nominal (obligation au pair): analogue à la volatilité implicite.

CLEAN/DIRTY PRICES

- ▶ **Clean Price** (clean =dirty) de l'obligation, juste après une tombée de coupon ($t = T_{k_0}$):

$$P_t = \sum_{k=k_0+1}^n \frac{c_k}{(1+y/f)^{k-k_0}} + \frac{N}{(1+y/f)^{n-k_0}}$$

- ▶ Dirty price de l'obligation, entre deux tombées de coupons ($T_{k_0} < t < T_{k_0+1}$)

$$\hat{P}_t = \sum_{k=k_0+1}^n \frac{c_k}{(1+y/f)^{k-k_0-1+\pi}} + \frac{N}{(1+y/f)^{n-k_0-1+\pi}}$$

avec $\pi \simeq \frac{T_{k_0+1}-t}{T_{k_0+1}-T_{k_0}}$

- ▶ **Dirty price** de l'obligation, entre deux tombées de coupons = clean price + accrued interest $(1-\pi)c_{k_0+1}$

$$\text{clean price } P_t = \pi \frac{c_{k_0+1}}{(1+y/f)^\pi} + \sum_{k=k_0+2}^n \frac{c_k}{(1+y/f)^{k-k_0-1+\pi}} + \frac{N}{(1+y/f)^{n-k_0-1+\pi}}$$

SPREADS DE CRÉDIT (OBLIGATIONS RISQUES)

Cas des obligations risquées (cf. cours du S2)

- ▶ The Yield To Maturity y est un taux annuel. Il dépend de la maturité T de l'obligation.
- ▶ La différence entre le YTM d'une obligation risquée et le YTM d'une obligation "non risquée" = the yield spread. Il mesure la prime de risque de l'émetteur.
- ▶ Problème de la référence : trouver des obligations "vraiment" sans risque est de plus en plus hypothétique...
- ▶ Variante : structure par terme des taux sans risque \Rightarrow concept de "Zéro volatility" spread (Z-spread), la marge constante à ajouter à la courbe des taux sans risque, pour obtenir le prix de marché: en temps continu,

$$P_t = \sum_{k=1}^n c_k B(t, T_k) \exp(-(T_k - t)s_{Z,t}) + B(t, T_n) \exp(-(T_n - t)s_{Z,t})$$



SENSIBILITÉ ET DURATION

Mesure actuarielle du risque d'un petit déplacement parallèle de la courbe (shift du rendement actuariel y)

$$P_0 = \sum_{T_i \leq T = T_n} c_i B(0, T_i) + N B(0, T_n) = \sum_{i=1}^n \frac{c_i}{(1+y/f)^i} + \frac{N}{(1+y/f)^n}$$

- ▶ **Sensibilité** $S = -\frac{\partial P_0 / \partial y}{P_0}$
- ▶ **Duration** $D = S(1+y/f) = \sum_{i \leq n} c_i B(0, T_i) \textcolor{blue}{T_i} + N B(0, T_n) \textcolor{blue}{T_n}$
moyenne des maturités de chacun des flux pondérée par le poids de chaque flux dans le prix de l'obligation. La duration sert à mesurer la durée de vie moyenne d'une obligation ou son délai moyen de remboursement
 - une obligation à coupon a une duration inférieure à sa durée
 - la duration est d'autant plus grande que le coupon est plus faible
 - la duration croît avec la durée, mais à un taux décroissant (dérivée seconde négative)
 - la duration diminue lorsque les taux d'intérêt augmentent sur le marché.

CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX



Problèmes opérationnels

- ▶ Les zéro-coupons ne sont pas négociés directement sur le marché des taux, sauf pour des maturités inférieures à un an. Il faut donc "stripper" les produits linéaires de taux à coupons (les obligations) pour en extraire les prix zéro-coupons.
- ▶ C'est en fait une opération assez complexe qui affecte un très grand nombre d'opérations financières dans la banque
- ▶ L'importance d'une procédure robuste a été montrée pendant la crise, notamment l'importance du choix des instruments de stripping.

Les nouveaux enjeux de la régulation

- ▶ Un enjeu majeur pour les intervenants de marché
- ▶ Rendu crucial par la régulation, notamment en assurance vie (Solvency II) pour simuler des courbes dans le très long terme
- ▶ D'où la nécessité d'avoir des méthodologies communes

BOOTSTRAPPING OU STRIPPING

Linéarisation au plus proche voisin à partir des OAT

- ▶ Méthode récursive qui calcule les taux zéro-coupon de proche en proche à partir des OAT.
 - OAT coupon constant annuel:

$$N = \sum_{T_i \leq T = T_n} cB(0, T_i) + NB(0, T_n) = \sum_{i=1}^n \frac{c}{(1+y(n))^i} + \frac{N}{(1+y(n))^n}$$

- L'obligation est au pair aux dates de paiement de coupon si le taux de coupon est égal au taux actuariel YTM (ie $c_i = y(n)N$)
- Considérer la courbe des taux actuariels (YTM) $y(\theta)$ obtenue par approximation linéaire entre les taux actuariels des actifs du marché.
- Initialisation : le taux actuariel de maturité un an = taux ZC de même maturité
- $B(0, 2)$ est obtenu en résolvant l'équation (OAT maturité 2 ans au pair)

$$1 = y(2)B(0, 1) + (y(2) + 1)B(0, 2)$$

- De proche en proche

$$1 = \sum_{i=1}^n y(n+1)B(0, i) + (y(n+1) + 1)B(0, n+1)$$

BOOTSTRAPPING OU STRIPPING

Linéarisation au plus proche voisin à partir des OAT :

Inconvénients de la procédure:

- ▶ Les ZC dépendent fortement du taux actuariel de l'obligation la plus courte, obligation qui est en général très peu liquide et donc dont le prix ne reflète pas vraiment le taux de marché pour cette maturité. Cette erreur sur le premier taux zéro-coupon se propage ensuite par itération sur toute la courbe.
- ▶ forte dépendance du résultat par rapport aux caractéristiques de chaque obligation utilisée dans la procédure

CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX



Qu'est ce qu'une bonne courbe

- ▶ Redonner les prix les plus liquides des bonds dans le marché
- ▶ Produire une courbe forward régulière
- ▶ Robuste car elle sert comme input dans le pricing des dérivés de taux

Les méthodes d'interpolation-lissage

- ▶ Une fois choisis les instruments de stripping, et "retrouvé" une famille finie de ZC, et donc les taux associés, on doit utiliser des méthodes d'interpolation pour générer les taux manquants
- ▶ En général, on utilise des méthodes de type splines cubiques, mais très sensibles au choix des inputs: exemple Nelson-Siegel
- ▶ Les contraintes à respecter sont: la régularité de la courbe en dehors des crises et sa dérivation

CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX



Paramétrisation fonctionnelle

- ▶ Une Analyse en Composantes Principales (ACP) sur un historique de courbes de taux zéro-coupon a montré que trois facteurs expliquent la quasi-totalité des déformations de ces courbes.
 - un premier facteur de niveau : correspond à des déplacements parallèles de la courbe des taux R_∞
 - un deuxième facteur de pente $S = R_\infty - R(0)$
 - un troisième facteur de courbure γ
- ▶ Méthode de reconstitution de la courbe des taux zéro-coupon
 - rechercher des fonctionnelles de la maturité dépendant de manière linéaire de ces 3 paramètres
 - caler ensuite ces paramètres sur les données du marché.
 - cf. la courbe des taux dans le modèle de Vasicek

COURBE DES TAUX

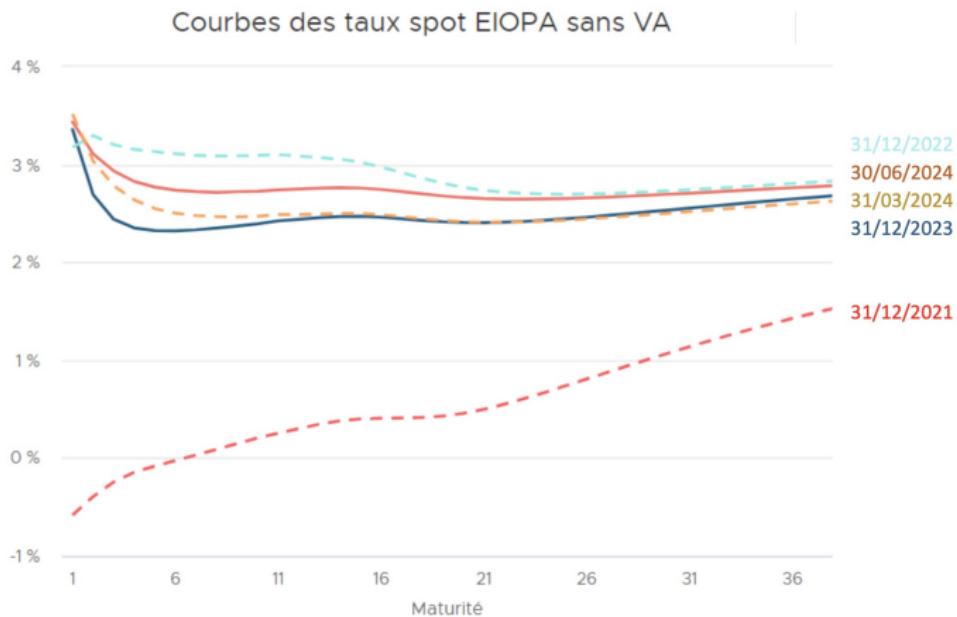


Figure 1 - Comparaison des courbes des taux spot EIOPA entre le 31/12/2021 et le 30/06/2024 (sans correction pour volatilité)

FIGURE: Source : EIOPA



PLAN

1 LES TAUX DE MARCHÉ

2 OBLIGATIONS ET CONSTRUCTION DE LA COURBE DES TAUX

3 LES DIFFÉRENTS TAUX

TAUX SPOT

Taux spot fixés en t le début de la période $[t, T]$ pour laquelle ils sont utilisés (le même t !).

- ▶ **La brique de base** : Le zéro-coupon d'échéance T :
 $B(t, T)$ est le prix en t de 1 Euro payé en T . $B(t, T)$ est parfois appelé aussi discount facteur (facteur d'actualisation) parce qu'il représente la valeur à la date t du montant 1 à la date T .
- ▶ **Le taux (continu)** en t d'une durée θ , $R(t, \theta)$: taux "annualisé" d'un placement de 1 Euros pour la période $[t, t + \theta]$ (régime de capitalisation composée)

$$R(t, \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln(B(t, t + \theta)) \quad \text{i.e.} \quad B(t, t + \theta) = \exp(-\theta R(t, \theta))$$

La courbe des taux à la date t est la fonction (structure par terme)

$$\theta \rightarrow R(t, \theta)$$

TAUX SPOT (SUITE)

- ▶ Taux actuel (composé annuellement)

$$Y(t, \theta) := \frac{1}{B(t, t + \theta)^{1/\theta}} - 1 \quad \text{i.e.} \quad B(t, t + \theta)(1 + Y(t, \theta))^\theta = 1$$

- ▶ Si la maturité θ est ≤ 1 , on utilise le **taux linéaire** (régime de capitalisation simple)

$$L(t, \theta) = \frac{1 - B(t, t + \theta)}{\theta B(t, t + \theta)} \quad \text{i.e.} \quad B(t, t + \theta)(1 + \theta L(t, \theta)) = 1$$

Cela concerne tous les taux de moins d'un an des différents marchés

- ▶ Le **taux court** est le taux de placement pour un temps très petit:
 $\frac{dS_t^0}{S_t^0} = r_t dt$, $S_0^0 = 1$, $S_t^0 = \exp(\int_0^t r_s ds)$ est le résultat du placement de 1 euro au taux instantané r_t

$$r_t = -\partial_T(\ln(B(t, T)))|_{T=t}$$

$$r_t = \lim_{\theta \rightarrow 0} R(t, \theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} L(t, \theta) = \lim_{\theta \rightarrow 0} Y(t, \theta).$$



TAUX FORWARD

Taux forward fixés à l'instant t pour une période future $[T, T + \theta]$.

Ils correspondent à des opérations à terme.

Notation avec 3 dates

- ▶ en indice, date aujourd'hui,
- ▶ dans la parenthèse à gauche: date de départ de l'opération
- ▶ autre symbole: date finale de l'opération, ou durée du taux (lettre grecque)
- ▶ **Un zéro-coupon forward** est le prix fixé par contrat en t , que l'on payera en T pour 1 Euro payé en $T + \theta$. Par AOA,

$$B_t(T, T + \theta) = \frac{B(t, T + \theta)}{B(t, T)}$$

- ▶ Le **taux forward** de maturité θ est le taux de cette opération $R_t(T, \theta)$,

$$B_t(T, T + \theta) = \exp(-\theta R_t(T, \theta)).$$

- ▶ le **taux forward linéaire** de maturité θ

$$B_t(T, T + \theta) = \frac{1}{1 + \theta L_t(T, \theta)}$$

LES TAUX FORWARD INSTANTANÉS



- ▶ $f(t, T) = -\partial_T \ln B(t, T)$ et $B(t, T) := \exp(-\int_t^T f(t, v)dv)$
- ▶ Un taux $R(t, \theta)$ peut être vu comme une moyenne de taux instantanés

$$R(t, \theta) = \frac{1}{\theta} \int_0^\theta f(t, t+u)du \text{ où } f(t, T) = \partial_T(T-t)R(t, T-t)$$

- ▶ $r_t = \lim_{T \rightarrow t} f(t, T).$



AUTRES PRODUITS

Cf. partie NEK.

- ▶ **Forward rate agreement (FRA)** : contrat financier qui donne à son acheteur un versement à l'instant $T + \theta$ calculé au taux variable simple $L(T, \theta)$, fixé en T pour la période $[T, T + \theta]$, contre le paiement à cette même date $T + \theta$ d'un montant calculé au taux fixe simple K pour la période $[T, T + \theta]$
- ▶ **Swap** taux fixe contre taux variable: échange de taux à différentes dates de paiement T_i . Il n'y a **pas d'échange de flux** en 0 (à la différence des obligations)
- ▶ **Swaption**
- ▶ **Cap et Floor**