Les marchés à terme de taux et leur produits dérivés

Nicole El Karoui

Complément au Cours de V.Loeze, C.De Langhe

Les slides de leurs cours doivent être étudiés attentivement.

- Taux d'intérêt et définitions et notions actuarielles
- Briques de base, les zéro-coupons $B(t, T)$ et la courbe des taux
- Produits monétaires et obligataires
- Produits Dérivés simples (FRAs, Futures, Swaps, FX Swaps, XCcy Swaps)
- Sensibilité / Risk Management
- Produits Dérivés optionnels

Différentes prises en compte du risque de taux

1) **Les méthodes classiques**

- Méthode actuarielle : taux actuariel et duration
- Méthodes issues de l'arbitrage : sensibilité aux déformations de la courbe des taux.

2) **Développement des marchés dérivés de taux**, avec les futurs, les swaps, caps et floors, swaptions, pour ne citer que les plus classiques

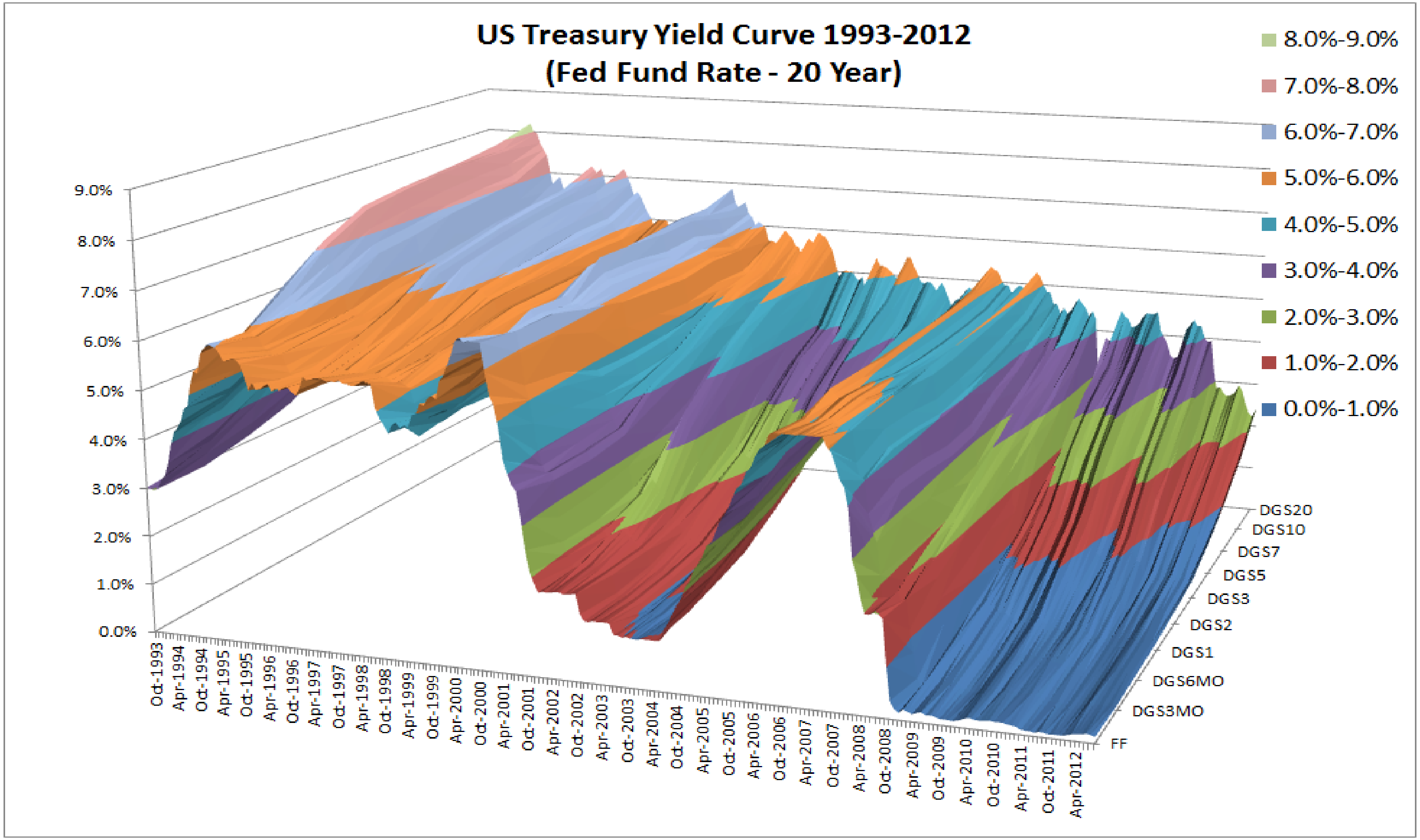
3) La **gestion de ces produits** exige en contrepartie

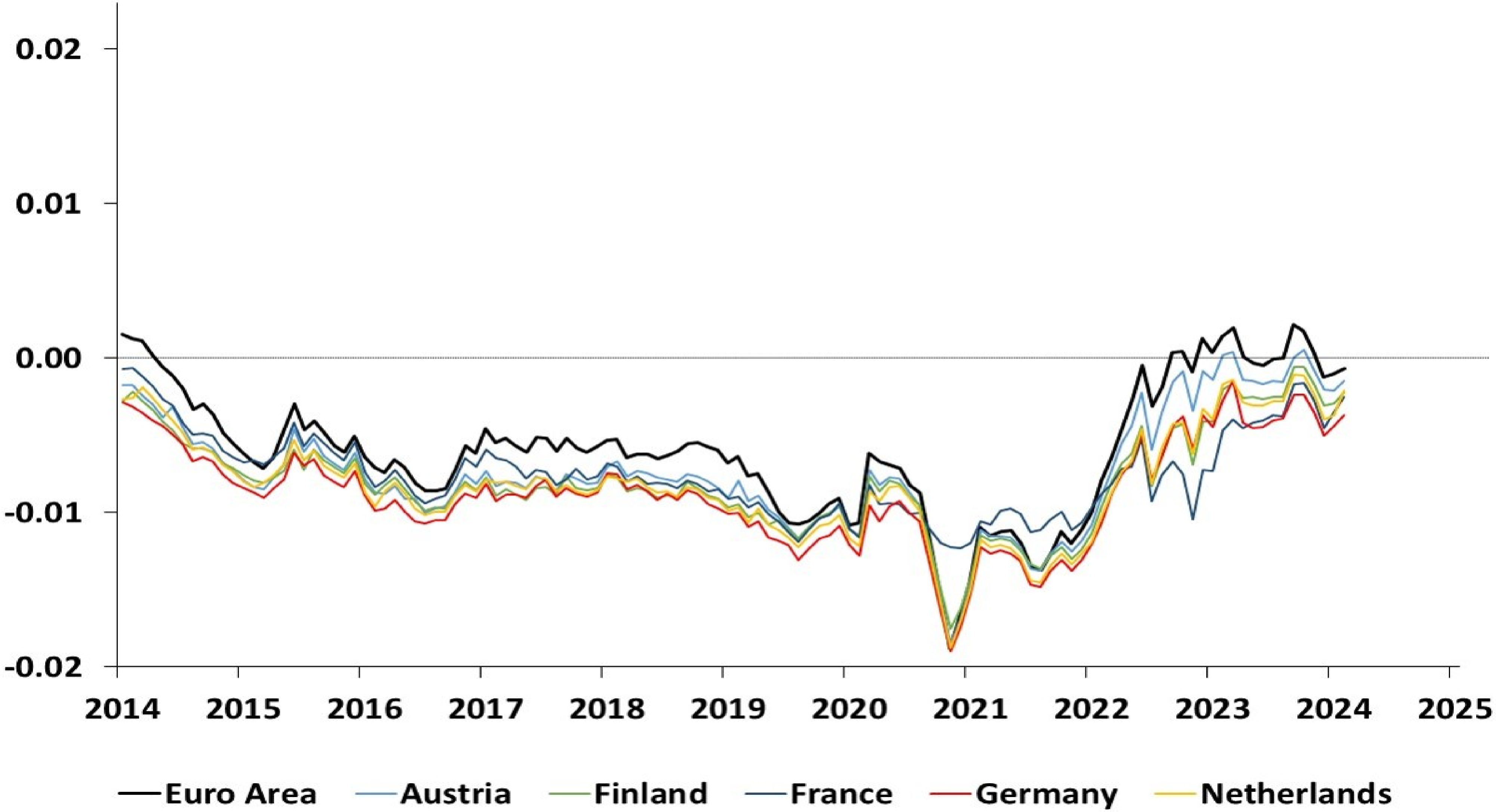
- une bonne connaissance de stratégies de couverture,
- robuste par rapport aux déformations de la courbe des taux

4) Le dernier point est l'**internationalisation** des positions sur les différents marchés, qui au risque de taux dans chaque pays adjoint le risque de change

Courbes de taux

Rouge=3M, Jaune=2Y, Vert=5Y, Bleu=10Y, Violet=30 ans





Courbes des taux Euro/ d'après Eurostat/ Taux négatifs

Les Marchés organisés de taux

Historique

- Chicago, 1973
  - 15 Août 1971, Nixon annonce
  - la fin de la garantie or du Dollar
  - Dérégulation des famentaux économie
- Paris 1986, MATIF, Puis en 1986 Euronext
- Mais aussi, NY, Londres, Singapour, Hongkong, Tokyo..
- Nov 2024, Premier marché à terme du Maghreb

Les avantages des marchés à terme

- Transactions dématérialisées,
- sécurisées par une chambre de compensation (CCP)
- très grands volumes de transaction

Les opérations à terme

Les contrats forwards sur un sous-jacent

Definition

- Sous-jacents: un actif, une commodity (récolte, minerai) X_T
- Une échéance: le terme du contrat T
- A la date de début du contrat, on fixe le prix de la transaction à l'échéance

Notation avec 2 dates

- en indice, date aujourd'hui, t
- dans la parenthèse à gauche: date de départ de l'opération
- ensuite le titre sous-jacent X_T
- Prix forward en t, $F_t(T, X_T)$ (payé à l'échéanceen T)

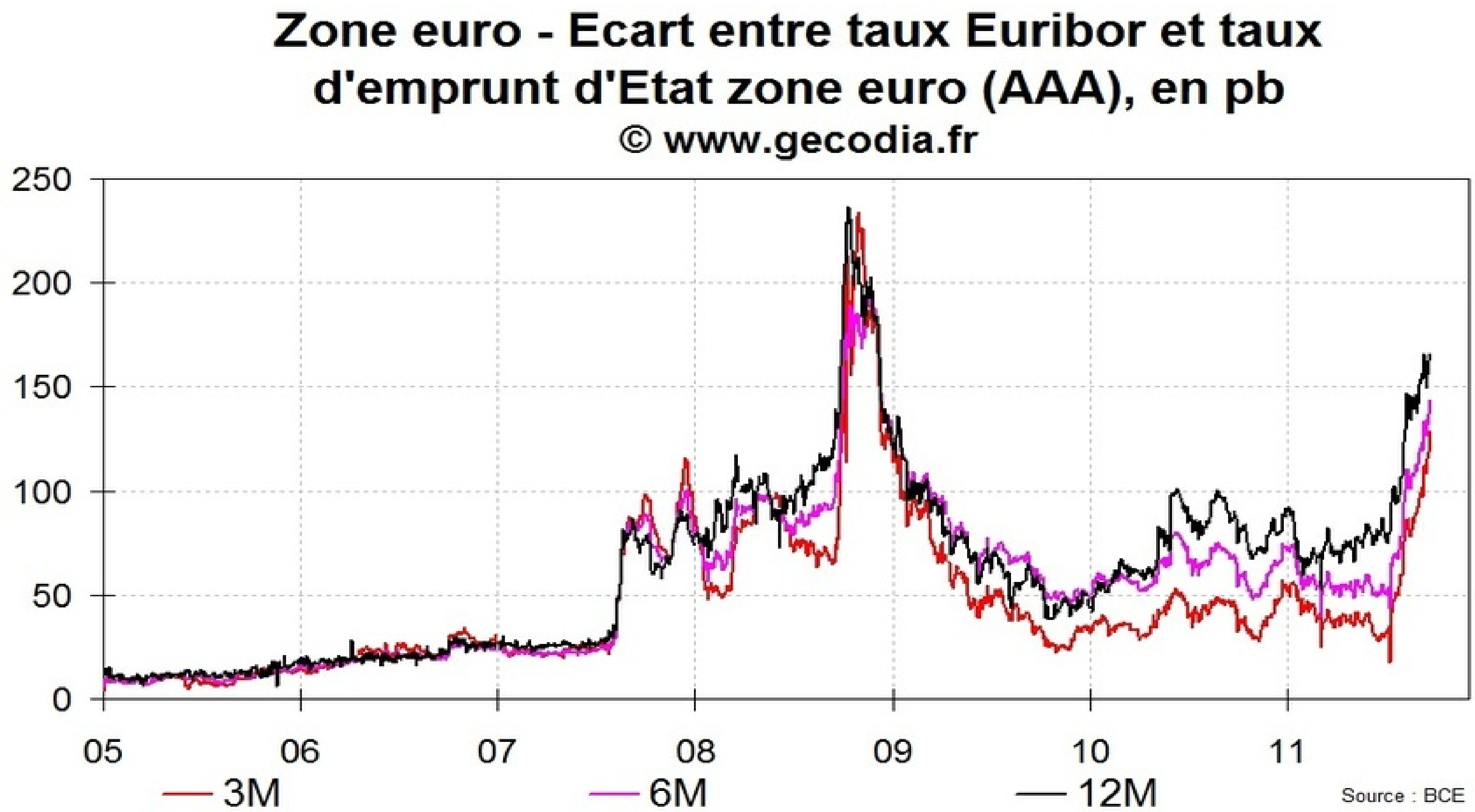
Les taux forwards

Les zéro-coupon forwards(ZC)

- *Un zéro-coupon forward* est contrat forward sur ZC que l'on payera en T pour 1 Euro reçu en $T + \theta$.
- Par AOA, avec une notation spécifique, $\mathbf{B_t(T, T + \theta) = \frac{B(t,T+\theta)}{B(t,T)}}$
- Le *taux forward* de maturité θ est le taux de cette opération $\mathbf{R_t(T, \theta)}$, $B_t(T, T + \theta) = \exp(-\theta R_t(T, \theta))$.
- Le spot *taux forward* $f(t, T) = -(\partial_\theta \text{Ln}(B_t(T, T + \theta))_{\theta=0}$
- Notation avec 3 dates
  - en indice, date aujourd'hui,
  - dans la parenthèse à gauche: date de départ de l'opération
  - autre symbôle: date finale de l'opération, ou si c'est une lettre grecque durée du taux

Le LIBOR

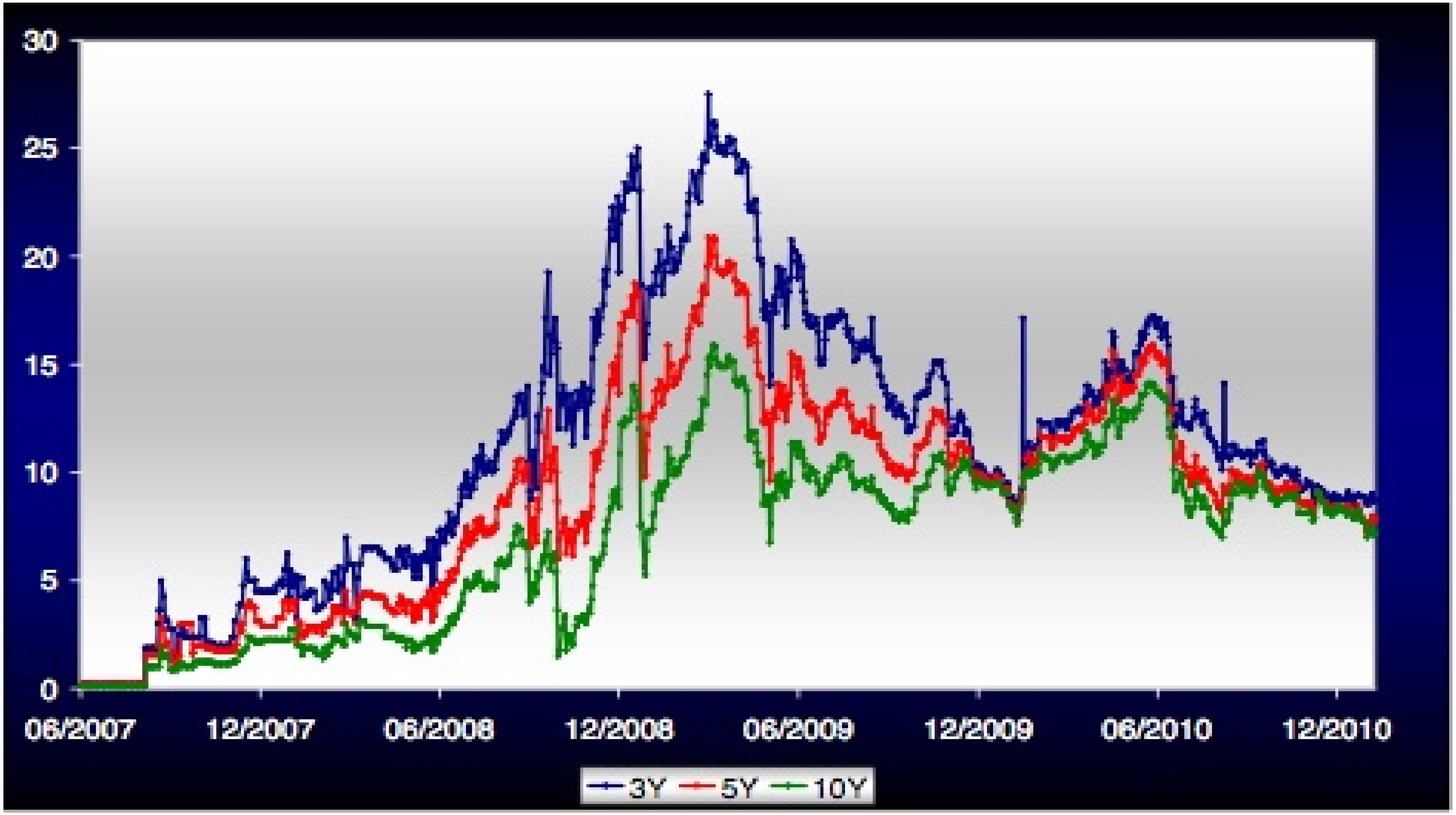
- *LIBOR* est calculé pour 7 maturités(1w,1m,2m,3m,6m,12m) et 5 monnaies. Il a été créé en1986, et géré par la Bristish Bankers' Association
- *Calcul du Libor*: Ce n'est pas un taux de transaction. Entre 8 et 16 banques contribuent, en indiquant le taux auquel elles peuvent se financer dans le marché interbancaire. Les 25 % plus hauts et plus bas sont éliminés, et la moyenne est calculée sur les 50% restants.
- *La signification du LIBOR* . Il est vu comme le plus important benchmark pour les taux court terme. C'est la réfèrence de nombreux produits de taux, mais aussi de prêts, d'emprunts. Il influence les taux d'environ 360.000 milliards de dollars en prêts et en swaps de défaut (credit default swaps, CDS). En principe très surveillé.
- Voir les derniers slides sur les changements récents



Ecart Euribor et Taux Etats en bp

Les swaps

- **Un swap** taux fixe contre taux variable est un échange de taux à différentes dates de paiement.
- Il n'y a pas d'échange de flux en 0, signature du contrat.
- Si entre deux dates T_{i-1} et T_i telles que $T_i - T_{i-1} = \delta$ le taux d'intérêt est $L(T_{i-1}, \delta)$, les opérations financières, emprunter 1 Euro en T_{i-1} et rembourser $1 + \delta L(T_{i-1}, \delta)$ en T_i se compensent.
- Par en AOA, le taux de swap vaut: $\delta\, IRS_t^{swap} = \dfrac{1 - B(t, T_N)}{\sum_{i=1}^{N} B(t, T_i)}$



TxSwaps Libor(3m) Differentes maturités

Bref rappel du Heath-Jarrow-Morton framework d'après les cours précèdents sur les taux

Le modèle

Pour modéliser la dynamique des prix, nous avons besoin

- l'ensemble Ω de tous les états du monde possibles.
- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, la famille de tribus qui représentent la structure d'information disponible sur le marché à la date t.
- une probabilité $\mathbb{P}$. C'est **la probabilité historique ou objective** (qui apparaît en particulier dans les tests statistiques).

En absence d'arbitrage, l'excès de rendement des actifs par rapport au taux sans risque instantané r_t est proportionnel à la volatilité

Hypothèse : *Il existe un vecteur de primes de risque λ_t tel que la dynamique des $B(t,T)$ est donnée par*

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t\, dt + < \Gamma(t,T), d\widehat{W}_t + \lambda_t dt >, \qquad B(T,T) = 1.$$

- $(\widehat{W}_t)$ est un d -mouvement brownien, le produit est un produit scalaire.

- r_t est le taux instantané "sans risque" (entre t et $t + dt$)
- $\Gamma(t, T)$ est la famille des vecteurs de volatilités paramètrée par les dates d'échéance T.
- On fait la convention que $\Gamma(t, T) = 0,\ t \geq T$, soit que le coupon de 1 Euro est réinvesti au taux sans risque r_t.

Interprétation des primes de risque

- Soit un portefeuille partant de 1 Euro dont la volatilité est le vecteur des primes de risque λ_t . C'est le " numéraire de marché ".
- Son prix N_t vérifie $\dfrac{dN_t}{N_t} = r_t dt + |\lambda|_t^2 dt + < \lambda_t, d\widehat{W}_t >, \quad N_0 = 1.$
- La prime de terme locale $< \Gamma(t, T), \lambda_t >$ s'interprète comme

$$\mathrm{Cov}_{\mathbf{t}}\left(\frac{\mathbf{dN_t}}{\mathbf{N_t}}, \frac{\mathbf{dB(t,T)}}{\mathbf{B(t,T)}}\right).$$

- Seule la fraction du zéro-coupon "explicable" par le numéraire de marché est rémunérée.

Equation structurelle des taux

Convention d'écriture pour la semi-martingale: $d\widehat{W}_t + \lambda_t dt = \mathbf{dW_t}$

Par arbitrage, HJM donne les liens structurels dynamiques entre les taux des différentes maturités.

Taux zéro-coupon (ZC) et conditions initiales

- Le prix en t d'un ZC d'échéance T est donné par la formula exponentielle

$$B(t,T) = B(0,T)\exp[\int_0^t r_s ds + \int_0^t < \Gamma(s,T), dW_s > -\frac{1}{2}\int_0^t \|\Gamma(s,T)\|^2 ds]$$

- L'élimination du taux court et $B(t,t) = 1$ conduit à :

$$B(t,T) = \frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp[\int_0^t < \Gamma(s,T) - \Gamma(s,\mathbf{t}), dW_s > -\frac{1}{2}\int_0^t (\|\Gamma(s,T)\|^2 - \|\Gamma(s,\mathbf{t})\|^2$$

- La dérivée de $(\Gamma(t,T)\,;\ t \le T)$ par rapport à l'échéance T est notée $\partial_T\Gamma(t,T) = \partial_2\Gamma(t,T) = \gamma(t,T)$

Equations intégrales des taux

- La représentation des taux courts forward (IFR) $(f(t,T))$dans le futur est :

$$f(t,T) = f(0,T) - \int_0^t < \gamma(s,T), dW_s > + \int_0^t < \gamma(s,T), \Gamma(s,T) > ds$$

- En particulier, la représentation du taux court est :

$$r_t = f(0,t) - \int_0^t < \gamma(s,T), dW_s > + \int_0^t < \gamma(s,T), \Gamma(s,T) > ds$$

- La représentation des taux continus (de type exponentiel) est donnée par :

$$R(t,\theta) = R_0(t,\theta) - \int_0^t < \frac{\Gamma(s,t+\theta) - \Gamma(s,t)}{\theta}, dW_s > + \frac{1}{2} \int_0^t \frac{\|\Gamma(s,t+\theta)\|^2 - \|\Gamma(s,t}{\theta}$$

- $\Rightarrow R_0(t,\theta) = \frac{1}{\theta}[\mathrm{Ln}B(0,t) - \mathrm{Ln}B(0,t+\theta)]$ est le **taux forward** vu de 0, pour l'échéance t, de maturité θ. Ce taux est lu sur la courbe des taux aujourd'hui.

Ces équations sont connues comme le modèle de **H-J-M** en 1987 .

Equations différentielles des taux

- Le plus facile est d'étudier les taux spots forward

$$f(t,T) = f(0,T) - \int_0^t < \gamma(s,T), dW_s > + \int_0^t < \gamma(s,T), \Gamma(s,T) > ds$$

- La dynamique de $f(t,T)$ est donnée par:

$$df(t,T) = - < \gamma(t,T), dW_t > + < \gamma(t,T), \Gamma(t,T) > ds$$

- Soit $r(t,\theta) = f(t, t+\theta)$. Supposons $f(t,T)$ dérivable par rapport à T, avec dérivée bornée par un processus unif. intégrable.

$$dr(t,\theta) = \partial_\theta r(t,\theta) dt - < \gamma(t, t+\theta), dW_t > + < \gamma(t,t+\theta), \Gamma(t,t+\theta) > dt$$

- Comme $\Gamma(t, t+0) = 0$, le taux court a une dynamique de la forme

$$\mathbf{dr_t = \partial_\theta r(t,0) dt - \gamma(t,t).dW_t}$$

M.Musiela en 1992 est le premier à avoir montré l'importance de cette EDP stochastique dans la modélisation des courbes de taux