

Les obligations

Le financement obligataire

L'évaluation des obligations

Connecting
talents

Le financement obligatoire

Introduction

- Les fonds de private equity rachètent des entreprises à fort potentiel de croissance non cotées en Bourse et financent ce rachat grâce à de la dette (LBO).
- Le recours à l'endettement joue un effet de levier qui améliore la rentabilité, au prix d'une augmentation des risques financiers supportés par l'entreprise rachetée et le fonds de private equity.
- Grâce à l'environnement macroéconomique favorable entre 2003 et 2008 (taux d'intérêt faibles, primes de risques peu élevées, crédits facilement octroyés par les banques), les fonds de private equity ont racheté des centaines d'entreprises (Chrysler, RJR Nabisco, Picard, Orangina...)

Introduction

- Au-delà des fonds de private equity, toutes les entreprises utilisent l'endettement à moyen ou long terme pour financer leurs projets d'investissement, ainsi que les États et les collectivités territoriales.
- Emprunts : bancaires et obligataires

Introduction

- Contrairement aux emprunts indivis contractés auprès d'un prêteur unique, l'emprunt obligataire met en rapport un emprunteur et un ensemble de prêteurs, les « obligataires ».
- Qui émet des obligations (en France) ?
 - L'État est le premier émetteur de titres de dette (OAT)
 - Les entreprises
- Qui détient des obligations ?
 - Les intermédiaires financiers : 60 %
 - Les ménages : 2 %
 - Les entreprises : 2 %
 - Les non-résidents : 35 %

Plan

- Les obligations privées (« corporate »)
- Titrisation et Asset-Backed Securities
- Les obligations souveraines
- Les clauses de sauvegarde (covenants)
- Remboursement d'un emprunt obligataire
- Les titres hybrides

Obligation Renault

- Valeur nominale
- Prix d'émission et valeur de remboursement
- Périodicité des coupons
- Taux de coupon (fixe, variable, révisable, indexé...)
- Date de jouissance
- Échéance du titre

Lieu de l'émission	Paris (<i>programme Euro Medium Term Note</i>)
Marché secondaire	Euronext Paris
Montant et monnaie d'émission	1 000 millions d'euros
Prix d'émission	99,319 %
Valeur nominale	100 000 €
Date d'émission	24 juin 2019
Date d'échéance	24 juin 2025
Coupon	1,25 % fixe, coupon annuel
Valeur de remboursement	100 %
Séniorité	Dette senior sans collatéral
Note des obligations	BBB (S&P), Baa3 (Moody's), perspective stable
Clauses de sauvegarde	<i>Cross default, pari passu, engagement de ne pas faire (maintien du rating, negative pledge)</i>
Teneurs de livre	Crédit Agricole CIB, Commerzbank, HSBC, BBVA
Représentant de la masse	Association de représentation des masses de titulaires de valeurs mobilières

Le placement des obligations privées

- Placement **privé** : pas d'appel public à l'épargne ; les titres sont intégralement placés auprès d'un petit groupe d'investisseurs, réputés « qualifiés ».
 - Les formalités sont peu contraignantes et peu coûteuses (pas de frais d'enregistrement auprès des autorités de place).
- Émission **publique** : publication d'un prospectus d'émission, visé par l'AMF, détaillant les éléments pertinents relatifs à cette émission : caractéristiques techniques des titres, facteurs de risque, modalités de rémunération des créanciers, etc.

Obligations au porteur et obligations nominatives

Obligation au porteur, coupons attachés, émise en 1906.



Source: Finance d'Entreprise, Ed. Pearson, J. Berk, P. DeMarzo, G. Capelle Blanchard, N. Couderc

Obligations seniors et obligations juniors

- Hiérarchie entre les créanciers de la société, définie par leur rang de priorité (ou de séniorité)
- C'est l'ordre dans lequel ils seront remboursés en cas de faillite de l'émetteur.
 - dette senior, dette junior / subordonnée.
- En échange du risque accru pris par les créanciers juniors, ces derniers bénéficient d'une rémunération plus attractive.

Obligations domestiques, étrangères et internationales

- Obligations **domestiques** : émises par une entreprise dans le pays où elle est basée et libellées dans la devise locale, mais potentiellement achetées par des investisseurs étrangers à ce pays.
- Obligations **étrangères** : émises par une entreprise dans un pays qui lui est étranger, dans la devise et à destination des investisseurs de ce pays.
- **Euro-obligations** : obligations internationales, libellées dans une monnaie différente du pays dans lequel elles sont émises (et qui peut également être différente de la nationalité de l'émetteur).

Titrisation et Asset-Backed Securities

- La **titrisation** transforme des actifs en titres financiers susceptibles d'être achetés ou vendus sur un marché financier.
- Ces titres sont adossés aux actifs sous-jacents, d'où leur nom : titres adossés à des actifs ou, en anglais, **Asset-Backed Securities** (ABS).
- Les actifs les plus fréquemment utilisés pour créer de tels ABS sont des **crédits hypothécaires** souscrits par des ménages américains : on parle dans ce cas de **Mortgage-Backed Securities**.

Crédits subprime, CDO et crise financière

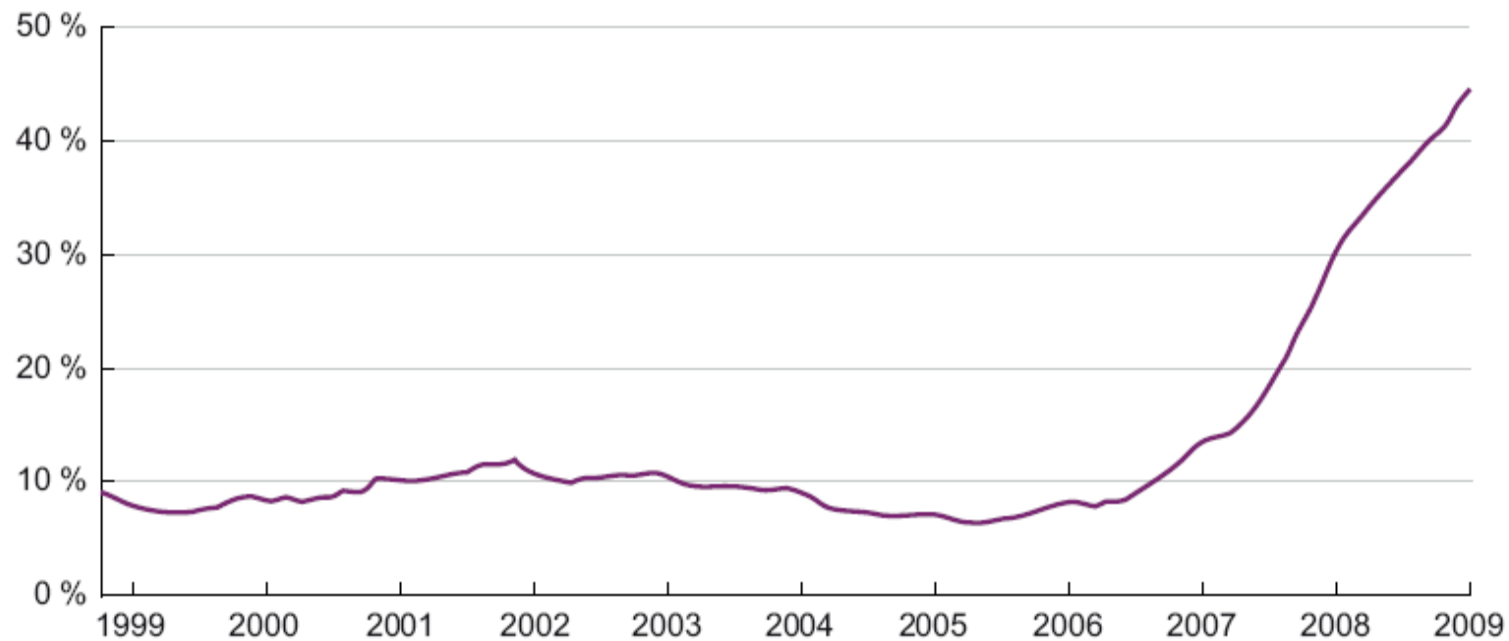
- Pourquoi les banques prêtaient-elles aussi facilement aux emprunteurs « subprime » ?
- Tout simplement parce que, grâce à la titrisation, elles pouvaient transformer les crédits risqués en Mortgage-Backed Securities, susceptibles d'être vendues sur les marchés financiers.
- Grâce à ces opérations, les banques ont ainsi pu faire supporter une grande partie des risques qu'elles prenaient à d'autres agents.

Crédits subprime, CDO et crise financière

- Plusieurs milliers de crédits subprime étaient assemblés en un MBS (**pooling**), puis le produit était découpé en plusieurs tranches de séniorités différentes (**tranching**). Il était ainsi possible de créer des tranches moins risquées que les crédits de départ.
 - La tranche de séniorité maximale, remboursée prioritairement, était ainsi exposée à un risque réduit : les détenteurs de cette tranche ne subissaient leurs premières pertes éventuelles qu'après que les détenteurs des autres tranches eurent tout perdu.
- Pour diluer le risque des tranches junior, les banques ont ajouté une couche de titrisation fonctionnant sur le même principe pour créer des CDO (**collateralised debt obligation**).

Crédits subprime, CDO et crise financière

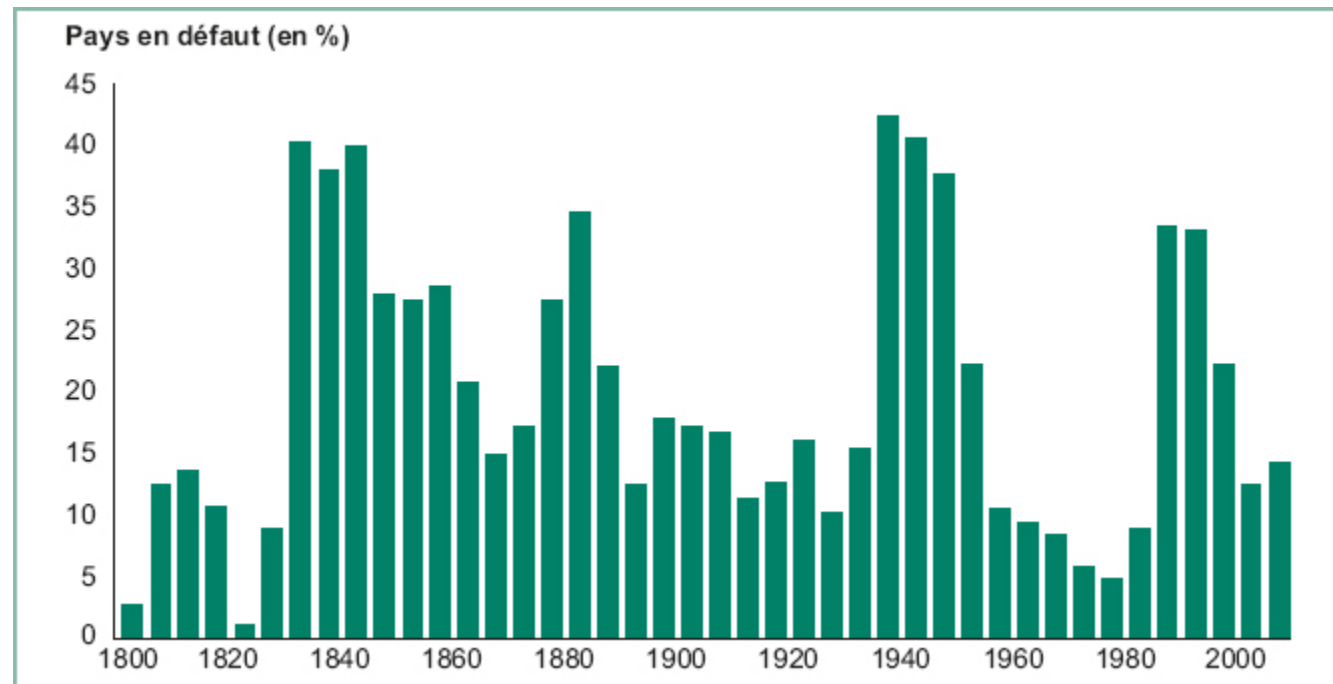
Taux de défaillance (retard de plus de 60 jours)



Les obligations souveraines

- Dette souveraine **domestique** : capitaux empruntés en monnaie domestique
- Dette souveraine **externe** : capitaux empruntés en monnaie étrangère (risque de change...)
 - En particulier dans les pays émergents
- Un marché en expansion constante, « grâce » à l'explosion des déficits publics

Les obligations souveraines



Les obligations assimilables du Trésor

- Équivalent des T-bonds américains
- Durées initiales : comprises entre 7 et 50 ans (durée de référence : 10 ans)
- Coupons :
 - OAT « classiques » à taux fixe
 - OAT à taux variable (OAT TEC 10)
 - OAT indexé sur l'inflation (OATi ou OAT€i).
- Mécanisme de l'assimilation :
 - l'AFT émet périodiquement de nouvelles obligations présentant des caractéristiques identiques (maturité résiduelle, coupon,...) aux OAT déjà sur le marché.
 - Une seule ligne d'OAT subsiste donc, les nouvelles obligations étant assimilées aux anciennes, et cette ligne bénéficie d'une liquidité accrue.

Exemple - Calcul du coupon d'une OAT€i

Le 25 juillet 2001, l'Agence France Trésor a émis la toute première OAT€i, indexée sur l'indice d'inflation européen (IPCH), d'échéance 25 juillet 2012 et de taux de coupon 3 %. La valeur nominale du titre est de 1 €. À l'émission, l'IPCH était de 92,98 (base 100 en 2005). En juillet 2010, l'IPCH était de 108,68. Quelle est la valeur du coupon qui a été détaché ce mois-là ?

Solution

Entre la date d'émission et juillet 2010, l'IPCH a augmenté de $108,68 / 92,98 - 1 = 16,89$ %. La valeur nominale de l'OAT€i a donc été ajustée à 1,1689 €. Le coupon versé en juillet 2010 était ainsi de $3 \% \times 1,1689 \text{ €} = 3,51$ centimes d'euros.

Les titres de dette publique française

Titre	Intérêts	Maturité	Encours (en milliards d'euros)	
			Fin 2000	Fin 2019
Bon du Trésor à taux fixe et à intérêt précompté (BTF)	Intérêt précompté	Inférieure à 1 an	43	110
Obligation assimilable du Trésor (OAT)	Intérêt annuel postcompté	2 à 50 ans	573	1 705

Source : Agence France Trésor.

En 2023: encours BTF = 169 Md euros; encours OAT = 2260 Md euros

Le placement des titres par l'Agence France Trésor

- Adjudications régulières (2 ou 4 fois par mois)
- Enchères « à la hollandaise » (ou « au prix demandé » ou « à prix multiples ») : les offres dont les prix sont les plus élevés sont servies en premier, puis celles de prix plus faible, jusqu'à placer tous les titres proposés à la vente.
- Les acheteurs de titres de dette publique sur le marché primaire paient donc des prix différents, correspondant exactement à ceux qu'ils ont demandés.
- Cela permet à l'État de payer le taux d'intérêt le plus faible possible sur sa dette.

Le placement des titres par l'Agence France Trésor

- Les **spécialistes en valeurs du Trésor**, ou SVT sont des banques (de réseau ou spécialisées) qui conseillent l'Agence France Trésor ; ils sont une vingtaine.
- Les SVT doivent informer l'AFT sur la demande qu'ils anticipent pour les titres publics, participer aux adjudications périodiques et assurer activement la liquidité du marché secondaire.
- Ils jouent donc le rôle de teneurs de marché sur le marché des titres de dette publique, affichant en permanence un cours acheteur et un cours vendeur sur chaque ligne de titre.

Les clauses de sauvegarde (covenants)

- Inscrites dans les prospectus d'émission.
- Limitent l'autonomie de l'emprunteur après l'émission pour empêcher que celui-ci n'adopte des comportements contraires aux intérêts des créanciers.
 - Exemples : les créanciers insèrent presque toujours dans les contrats de prêt (obligataires et indivis) des clauses **limitant les dividendes**, empêchant l'entreprise de s'endetter au-delà d'un certain seuil ou définissant une borne supérieure au BFR.
- Si l'émetteur enfreint l'une des clauses de sauvegarde, cela peut entraîner une augmentation du coût de l'emprunt, une exigibilité immédiate du principal, voire un remboursement anticipé avec pénalité.

Les clauses de sauvegarde (covenants)

- Clause **d'engagement de faire** : vente d'actif stratégique, information régulière du créancier...
- Clause **d'engagement de ne pas faire** : contrôle sur les investissements, limites à ne pas dépasser pour certains ratios financiers...
- Clause de **pari passu** : obligeant l'entreprise à faire bénéficier les obligataires des garanties supplémentaires que l'entreprise accordera à l'avenir à des créanciers de même rang.
- Clause de **cross default** : le non-remboursement par l'entreprise d'un autre crédit provoque le défaut immédiat de ses obligations, dont le remboursement peut être exigé immédiatement.

Le remboursement d'un emprunt obligataire

- L'émetteur peut racheter ses obligations avant leur maturité sur le marché (si elles sont négociables), même si les obligations sont à remboursement in fine.
- D'autres modalités de remboursement existent, par exemple le remboursement par séries égales ou annuités égales.
- Le contrat obligataire peut également autoriser explicitement l'émetteur à un rachat anticipé des obligations à un prix prédéterminé : obligations à **clause de remboursement anticipé**, ou obligations « **callables** ».

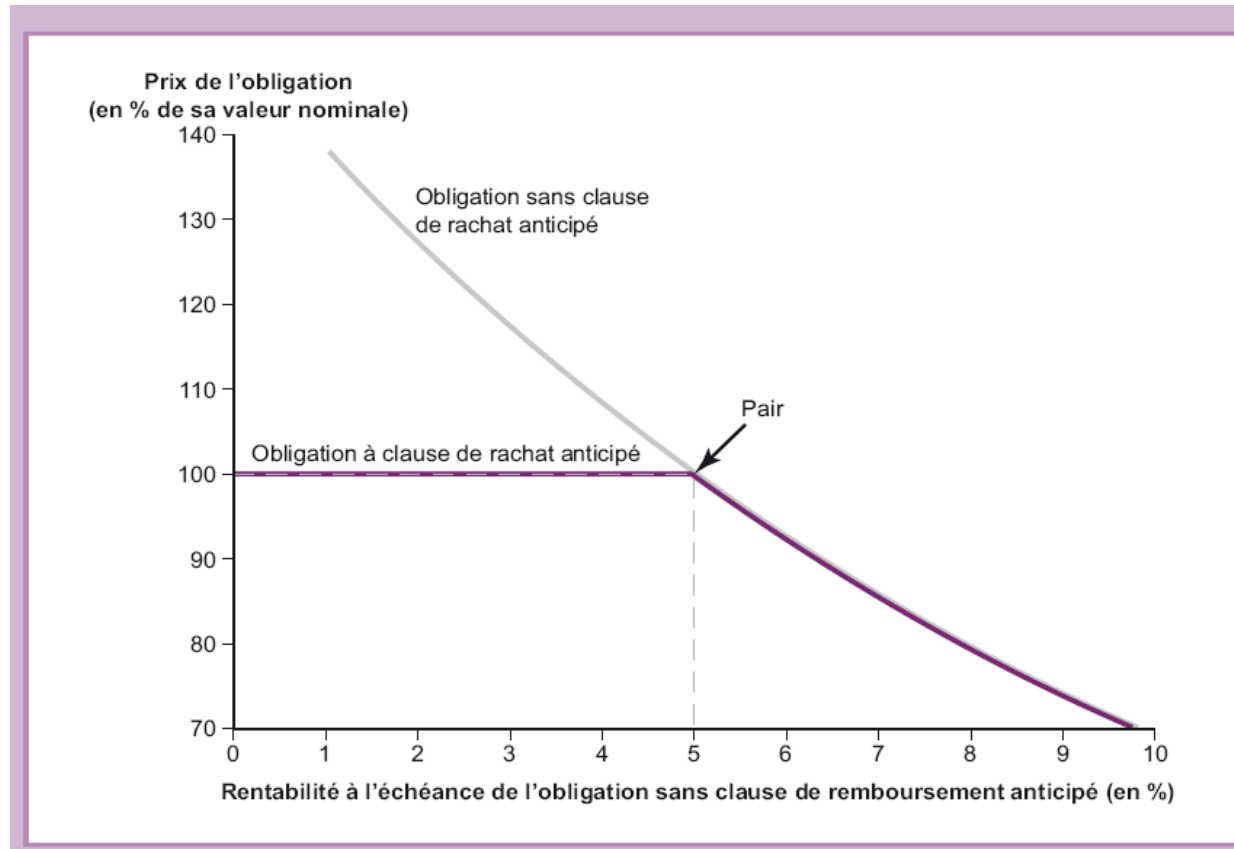
Obligations remboursables par séries ou annuités égales

- L'entreprise qui a émis des obligations peut mettre en place un **fonds d'amortissement**, qu'elle abondera régulièrement.
- Le rythme auquel les obligations sont remboursées est défini dans le prospectus d'émission :
 - Remboursement par séries égales (le même nombre d'obligations est remboursé tous les ans)
 - Remboursement par annuités égales (les annuités versées par l'entreprise sont égales, ce qui signifie que le nombre d'obligations remboursées varie chaque année)
 - Remboursement à un rythme librement défini par l'entreprise

Les obligations à clause de remboursement anticipé

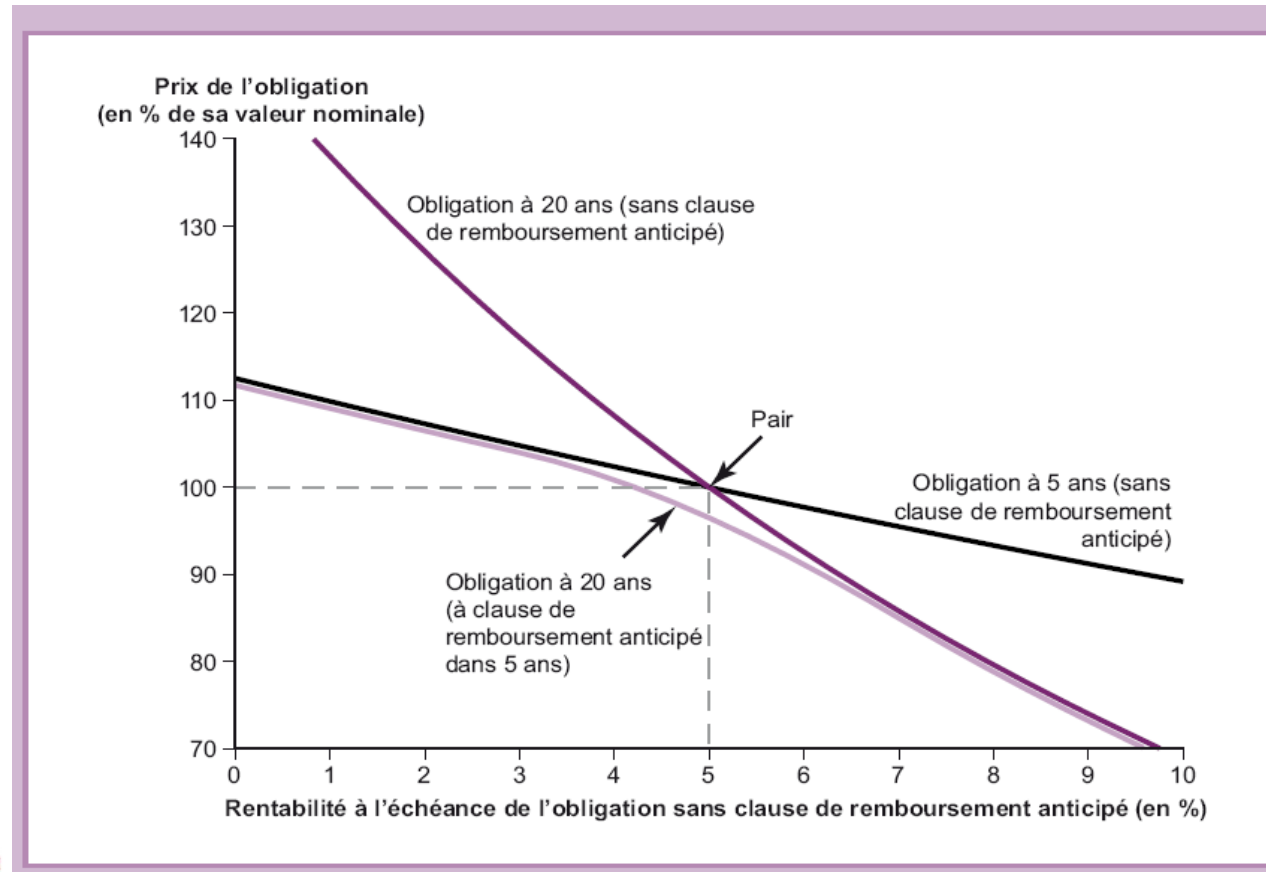
- Une clause de remboursement anticipé donne le **droit** (mais non l'obligation) à l'émetteur de racheter ses obligations à une certaine date ou à partir de cette date (la date d'exercice) à un prix spécifié à l'avance (le prix d'exercice).
- L'émetteur n'a intérêt à exercer l'option de remboursement anticipé que si le taux d'intérêt prévalant actuellement sur le marché est plus faible que le taux de coupon de l'obligation à clause de remboursement anticipé.

Prix à la date d'exercice de la CRA



Taux de coupon de 5%.

Prix avant la date d'exercice de la CRA



Exemple - Rentabilité à l'échéance avec clause de remboursement anticipé

Gamma vient d'émettre une obligation d'échéance cinq ans à clause de remboursement anticipé (prix de remboursement anticipé égal au pair). Le taux de coupon est de 8 %. Le remboursement anticipé sera possible à chaque date de détachement de coupon. L'obligation cote actuellement 103 % de son nominal. Quelle est la rentabilité à l'échéance de cette obligation ? Quelle est sa rentabilité avec exercice de la clause de remboursement anticipé ?

Solution

Le diagramme des flux de l'obligation, si l'on néglige la clause de remboursement anticipée, est :



La rentabilité à l'échéance r de l'obligation est donc :

$$103 = \frac{8}{r} \left(1 - \frac{1}{(1+r)^5} \right) + \frac{100}{(1+r)^5}$$

On obtient $r = 7,26 \%$. Si la clause est exercée à la première occasion, le diagramme des flux se simplifie :



Le « **yield to call** », ou rentabilité à l'échéance avec exercice de la clause de remboursement anticipé, r^* , est donc :

$$103 = \frac{108}{1+r^*} \Rightarrow r^* = 4,85 \%$$

Les titres hybrides

- Certains types d'obligations permettent, à l'initiative de l'émetteur ou du détenteur de l'obligation, de transformer un titre de dette en titre de capital. On qualifie ces obligations de titres hybrides.
- Parmi ceux-ci, on retrouve les obligations convertibles (en actions), les obligations remboursables (en actions) et les obligations à bon de souscription (d'actions).

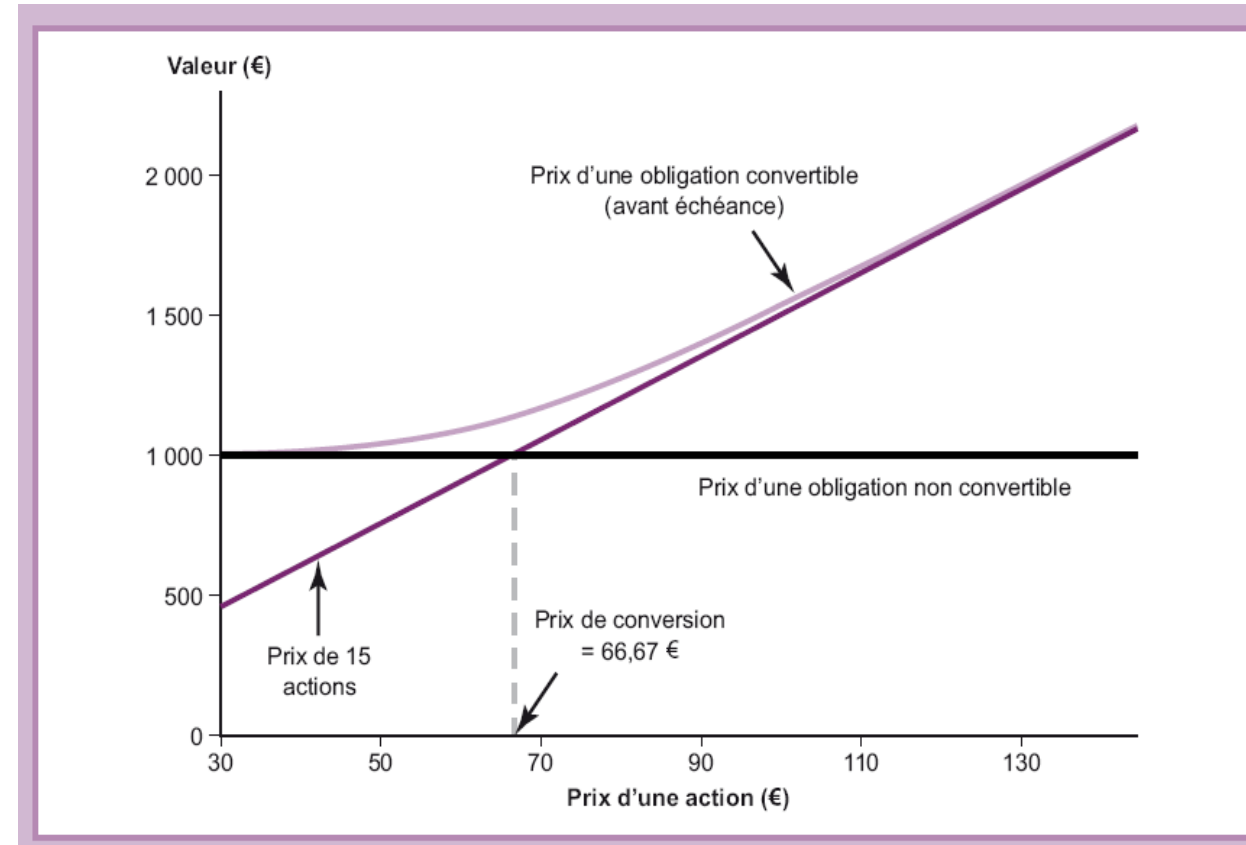
Les obligations convertibles

- Les obligations convertibles permettent à l'investisseur, s'il le désire, de demander leur conversion en actions : l'obligataire devient alors actionnaire.
 - En général, la conversion est possible n'importe quand jusqu'à la date de maturité de l'obligation.
- La conversion se fait à un taux déterminé à l'émission, le taux de conversion, qui définit le nombre d'actions que l'investisseur obtient pour chacune de ses obligations.
 - Apparues en France en 1969, représentent aujourd'hui environ 20 % des obligations émises par les entreprises.
- Une OC n'est autre qu'une obligation à taux fixe à laquelle s'ajoute une option d'achat (call) sur un nombre déterminé d'actions de l'émetteur.

Prix d'une OC

Prix d'exercice = valeur nominale de l'obligation convertible divisée par le taux de conversion. Ce prix d'exercice s'appelle le prix de conversion.

À titre d'exemple, une obligation convertible, de nominal 1 000 € et de taux de conversion 15, permet à son propriétaire de choisir entre 15 actions de l'émetteur ou 1 000 €. La conversion donne donc un prix implicite de l'action de $1\,000 / 15 = 66,67$ €. Le détenteur de l'obligation ne demandera la conversion que si le cours de l'action sur le marché est supérieur au prix de conversion, c'est-à-dire si l'action vaut plus de 66,67 €. Sinon, il préférera encaisser le nominal. Par conséquent, la valeur d'une obligation convertible est égale au maximum de sa valeur faciale (1 000 €) et du prix de 15 actions.



Les obligations remboursables en action (ORA)

- Qu'il le souhaite ou non, le détenteur d'ORA est in fine remboursé en actions (émises par le même émetteur ou par une autre entreprise du groupe) et non en espèces.
- C'est un risque supplémentaire par rapport à la détention d'obligations classiques, puisque le remboursement se fait sous forme d'actions dont le cours évolue.
- Dans certains cas, l'émetteur conserve le choix de rembourser le principal sous forme d'actions ou en espèces ; on parle alors d'obligations à option de remboursement en actions ou numéraire (ORANE).
 - Lafarge dans le cadre de son OPA sur Blue Circle : il était prévu qu'en cas de succès, les obligations seraient remboursées en actions et que dans le cas contraire, elles seraient remboursées en espèces.

Les obligations à bons de souscription d'actions (OBSA)

- Les OBSA, autorisées en France depuis 1983 (Loi Delors), sont des titres constitués d'une obligation standard et d'un bon de souscription.
- Les bons de souscription ne sont pas des options de conversion comme dans le cas des OC, mais simplement des options d'achat qui permettent à l'investisseur, s'il le désire, d'acheter des actions (OBSA) à des conditions prédéfinies.
- On trouve également des obligations à bons de souscription d'obligations (OBDO), ainsi que des bons de souscription attachés à des actions (ABDO ou ABSA).

Les titres hybrides : quel intérêt pour les émetteurs ?

- Ces titres permettent de reporter la dilution des fonds propres et d'en diminuer le coût.
 - Le prix auquel seront (éventuellement) obtenues les actions est, dans la grande majorité des cas, supérieur au prix actuel.
- L'entreprise signale à la communauté financière sa volonté d'améliorer son ratio dettes/fonds propres.
- Intéressant pour les start-up dont les possibilités d'endettement sont faibles, compte tenu de leur faible assise financière, et qui ne souhaitent pas émettre des fonds propres à un prix qu'elles considèrent comme sous-évalué.

Les titres hybrides : quel intérêt pour les souscripteurs ?

- L'avantage des OC et des OBSA est qu'elles allient la sécurité d'un placement obligataire (revenu fixe, périodique et garanti sauf défaillance de l'émetteur) à la possibilité de réaliser des plus-values en cas de hausse du titre sous-jacent, le tout en étant protégé contre une baisse du cours de ce titre, ce qui n'est pas le cas des ORA.
 - Les émissions d'OC ou d'OBSA sont beaucoup plus nombreuses que les émissions d'ORA.
- L'acheteur d'un titre hybride anticipe une hausse du cours des actions de l'émetteur.

L'évaluation des titres hybrides

- Le prix des titres hybrides évolue non seulement en fonction des taux d'intérêt, mais également en fonction du prix des actions de l'entreprise émettrice.
- La valeur d'une ORA s'évalue comme la valeur actuelle des intérêts et de l'action lors du remboursement.
- Le prix des OC et des OBSA s'obtient comme la somme du prix de l'obligation « nue » et du prix de l'option (de conversion pour les premières, d'achat pour les autres).
- Contrairement aux options de conversion, les bons de souscription peuvent être détachés et échangés sur le marché de façon indépendante.

Connecting
talents

L'évaluation des obligations

Évaluation des obligations (à taux fixe)

- Dans le cas des obligations à taux fixe, si on suppose que le risque de défaut est nul, alors tous les paramètres nécessaires à l'évaluation sont connus avec certitude, à l'exception du taux d'actualisation.
- La difficulté dans l'évaluation d'une obligation à taux fixe classique réside dans la connaissance du taux d'actualisation à retenir.

Flux monétaires, prix et rentabilité des obligations

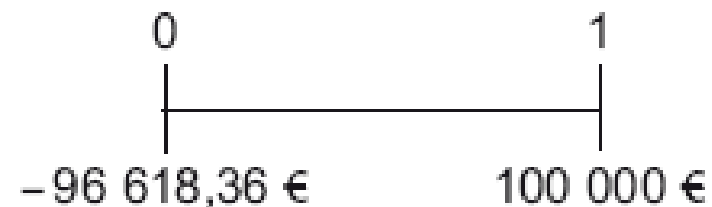
- Caractéristiques générales des obligations
- Une obligation est un titre de créance qui donne généralement droit à deux types de flux : le paiement des intérêts (coupons) et le remboursement de l'emprunt, le plus souvent à l'échéance.
- La valeur nominale (ou valeur faciale ou principal) d'une obligation est le montant de référence utilisé pour le calcul des intérêts.

Détermination du coupon

- Par convention, le taux de coupon C est exprimé sous la forme d'un **taux annuel proportionnel** (TAP)
 - $C = (\text{Taux de coupon} / \text{Nombre de coupons versés dans l'année}) \times \text{Nominal}$
- Exemple : une obligation de nominal 1 000 € et de taux de coupon 10 % qui verse des coupons semestriels donne droit à $1\,000\,€ \times 10\% / 2 = 50\,€$ tous les six mois.

Obligations zéro-coupon

- Aucun coupon durant la vie de l'obligation.
- La valeur actuelle d'un flux étant, par nature, inférieure au flux en question, les obligations zéro-coupon s'échangent avec une décote (prix d'émission < valeur nominale)



- Exemple : bons du Trésor à taux fixe et à intérêts précomptés (BTF) émis par l'Agence France Trésor.

Rentabilité à l'échéance d'une obligation zéro-coupon

- La **rentabilité à l'échéance (taux actuariel)** d'une obligation est le taux d'actualisation qui égalise la valeur actuelle des flux futurs espérés et le prix courant de l'obligation.

Rentabilité à l'échéance d'une obligation zéro-coupon de maturité N

$$TRE_N = (VN / P)^{1/N} - 1$$

Rentabilité à l'échéance d'une obligation zéro-coupon

- Rentabilité à l'échéance d'une obligation zéro-coupon de maturité un an, émise au prix de 96 618,36 € et de valeur nominale 100 000 € :
- $96\,618,36 = 100\,000 / (1 + \text{TRE})$
- $\Rightarrow \text{TRE} = (100\,000 / 96\,618,36) - 1 = 3,5 \%$

Exemple : Rentabilités pour différentes maturités

Quelle est la rentabilité à l'échéance des obligations zéro-coupon de valeur nominale 100 € dont les prix et les maturités sont les suivants ?

Maturité	1 an	2 ans	3 ans	4 ans
Prix	96,62 €	92,45 €	87,63 €	83,06 €

Solution

Maturité	1 an	2 ans	3 ans	4 ans
TRE	$(100 / 96,62) - 1$ = 3,50 %	$(100 / 92,45)^{1/2} - 1$ = 4,00 %	$(100 / 87,63)^{1/3} - 1$ = 4,50 %	$(100 / 83,06)^{1/4} - 1$ = 4,75 %

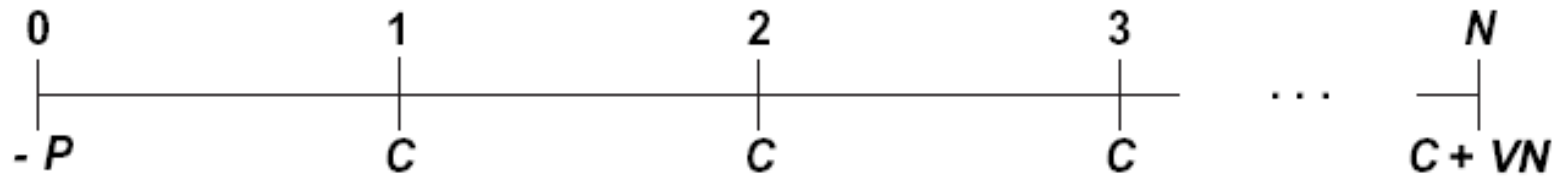
Taux d'intérêt sans risque

- Il existe autant de taux d'intérêt sans risque r_N que de maturités.
- Ces taux d'intérêt sans risque r_N peuvent être déterminés à partir d'obligations zéro-coupon sans risque de défaut.

Taux d'intérêt sans risque de maturité N

$$r_N = TRE_N$$

Obligations couponnées



$$P = \frac{C}{(1+TRE)^1} + \frac{C}{(1+TRE)^2} + \frac{C}{(1+TRE)^3} + \dots + \frac{C+VN}{(1+TRE)^N}$$

N termes

$$= C \times \sum_{t=1}^N \frac{1}{(1+TRE)^t} + \frac{VN}{(1+TRE)^N}$$

Rentabilité à l'échéance d'une obligation couponnée

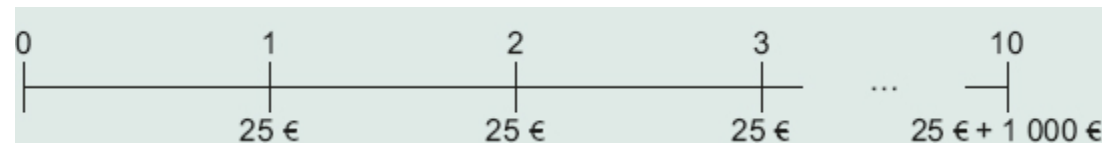
$$P = C \times \frac{1}{TRE} \left(1 - \frac{1}{(1+TRE)^N} \right) + \frac{VN}{(1+TRE)^N}$$

Exemple : Obligations couponnées

- L'Agence France Trésor vient d'émettre une OAT de maturité initiale dix ans et de valeur nominale un euro.
- Les coupons sont annuels et la rentabilité à l'échéance est de 2,5 %.
- *Quels sont les paiements versés à l'obligataire qui détient 1 000 OAT et les conserve jusqu'à l'échéance ?*

Solution

- Les obligataires reçoivent tous les ans $1 \text{ €} \times 2,5 \% = 0,025 \text{ €}$, soit pour 1 000 obligations 25 €. L'échéancier est :



- Le dernier flux a lieu dans 10 ans. Les obligataires reçoivent alors, pour chaque obligation détenue, un dernier coupon égal à 0,25 € et le remboursement du principal de 1 €.

Exemple : Rentabilité à l'échéance d'une obligation couponnée

Le Trésor américain vient d'émettre une obligation à cinq ans, de valeur nominale 1 000 \$. Les coupons sont semestriels et le taux de coupon est de 5 % (TAP). Cette obligation est émise au prix de 957,35 \$.

- *Quelle est la rentabilité à l'échéance ?*

Solution

- L'obligataire recevra 10 coupons semestriels de $1\,000 \$ \times 5 \% / 2 = 25 \$$ jusqu'à l'échéance de l'obligation. La rentabilité à l'échéance est donc :

$$957,35 = 25 \times \frac{1}{TRE} \left(1 - \frac{1}{(1 + TRE)^{10}} \right) + \frac{1\,000}{(1 + TRE)^{10}}$$

- Comme les coupons sont semestriels, cette rentabilité porte sur une période de six mois. Pour obtenir un taux en base annuelle, il convient de le multiplier par le nombre de coupons versés au cours d'une année (ici, deux). La rentabilité à l'échéance de cette obligation, exprimée sous forme d'un taux annuel proportionnel, est donc de 6 %.

Exemple : Prix d'une obligation à partir de la rentabilité à l'échéance

Une obligation de valeur nominale 1 000 \$, de taux de coupon 5 % versant des coupons semestriels voit sa rentabilité à l'échéance passer à 6,30 % (taux annuel proportionnel).

- Quel est le prix de l'obligation ?

Solution

- Un taux annuel proportionnel de 6,30 % correspond à un taux semestriel de 3,15 %. Le nouveau prix de l'obligation est donc :

$$P = 25 \times \frac{1}{0,0315} \left(1 - \frac{1}{(1 + 0,0315)^{10}} \right) + \frac{1\,000}{(1 + 0,0315)^{10}} = 944,98 \$$$

	A	B	C	D	E	F	G	H
4			N	TAUX	VA	F	VF	Formule Excel
5		Sachant	10	3,1500%		25	1 000	
6		Résoudre VA			-944,98			=VA(0,0315,10,25,1000)

Dynamique du prix des obligations

- Pair et cotation des obligations

Lorsque le prix de l'obligation est...	supérieur à sa valeur nominale	égal à sa valeur nominale	inférieur à sa valeur nominale
... les obligations sont échangées...	au-dessus du pair	au pair	au-dessous du pair
Cela se produit lorsque le taux de coupon est...	> au TRE	= au TRE	< au TRE

Exemple : Taux de coupon et rentabilité à l'échéance

- Trois obligations A, B et C de valeur nominale 100 €, de maturité 30 ans détachent un coupon annuel.
- Le taux de coupon est de 10 %, 5 % et 3 % respectivement pour les obligations A, B et C.
- La rentabilité à l'échéance de chaque obligation constatée sur le marché est identique : 5 %.
- Quel est le prix de marché de ces obligations ? Quelle obligation est échangée au-dessus du pair ? Au-dessous du pair ? Au pair ?

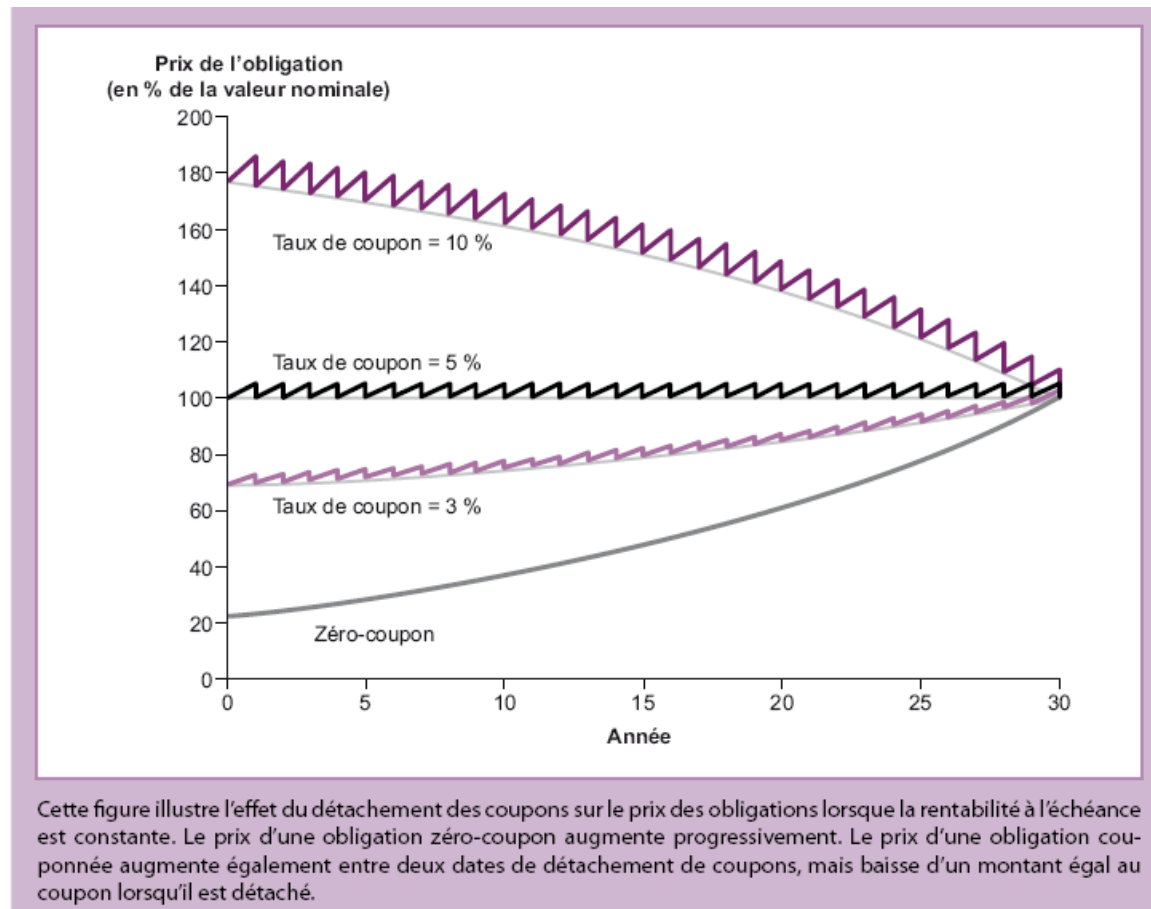
Solution

- Le prix des obligations est :

$$P_A = 10 \times \frac{1}{0,05} \left(1 - \frac{1}{1,05^{30}} \right) + \frac{100}{1,05^{30}} = 176,86 \text{ €}$$
$$P_B = 5 \times \frac{1}{0,05} \left(1 - \frac{1}{1,05^{30}} \right) + \frac{100}{1,05^{30}} = 100,00 \text{ €}$$
$$P_C = 3 \times \frac{1}{0,05} \left(1 - \frac{1}{1,05^{30}} \right) + \frac{100}{1,05^{30}} = 69,26 \text{ €}$$

- L'obligation A est échangée au-dessus du pair, l'obligation B au pair et l'obligation C au-dessous du pair.

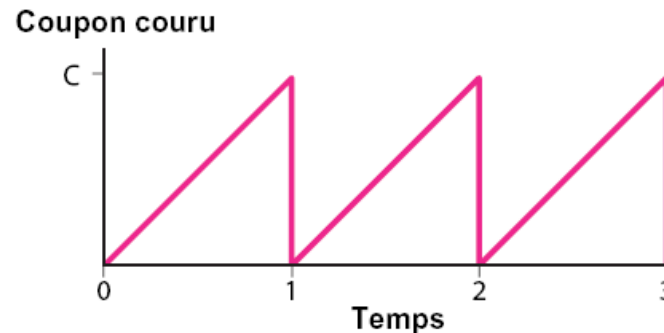
Effet du détachement de coupon sur le prix des obligations



Source: Finance d'Entreprise, Ed. Pearson, J. Berk, P. DeMarzo, G. Capelle Blanchard, N. Couderc

Coupon couru et pied du coupon

- Prix au pied de coupon (clean price)
= Prix coupon couru – Coupon couru
- Coupon couru = Coupon
× Nombre de jours depuis le détachement du dernier coupon /
Nombre de jours entre deux détachements de coupon



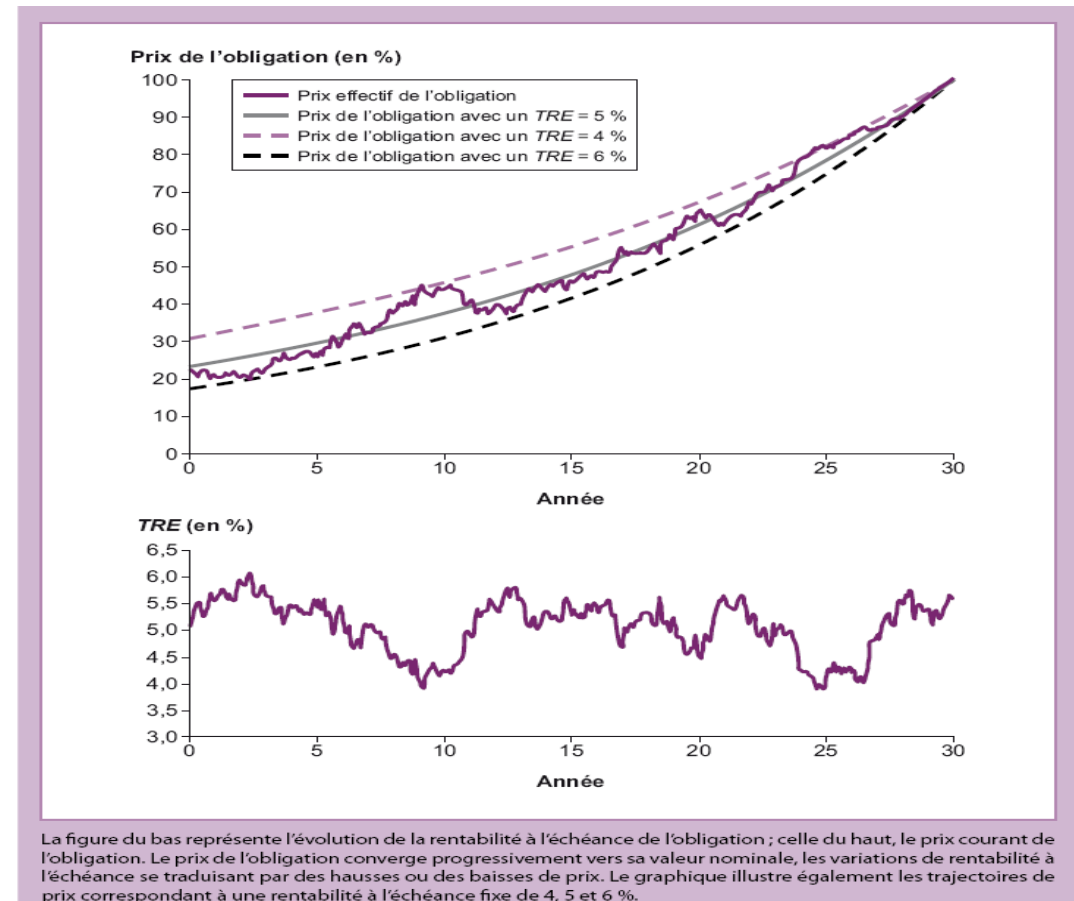
Variations des taux d'intérêt et prix des obligations

- Lorsque le taux d'intérêt et la rentabilité à l'échéance des obligations augmentent, leur prix diminue, et vice versa (effet balançoire).
- **Exemple** : Considérons par exemple une obligation zéro coupon à 30 ans, de valeur nominale 100 € et de rentabilité à l'échéance de 5 %. Celle-ci s'échange au prix suivant :
 - $P(TRE = 5 \%) = 100 / 1,05^{30} = 23,14 \text{ €}$
- Si les taux d'intérêt augmentent de 1 point, les investisseurs exigeront une rentabilité à l'échéance de 6 %. Cette variation de la rentabilité provoque une baisse immédiate du prix de l'obligation :
 - $P(TRE = 6 \%) = 100 / 1,06^{30} = 17,41 \text{ €}$

Rentabilité à l'échéance

Rentabilité à l'échéance et fluctuations du prix d'une obligation zéro-coupon de maturité initiale 30 ans

La figure représente l'évolution de la rentabilité à l'échéance de l'obligation ; celle du haut, le prix de l'obligation. Le prix de l'obligation converge progressivement vers sa valeur nominale, les variations de rentabilité à l'échéance se traduisant par des hausses ou des baisses de prix. Le graphique illustre également les trajectoires de prix correspondant à une rentabilité à l'échéance fixe de 4, 5 et 6 %.



Exemple : Sensibilité des obligations au taux d'intérêt

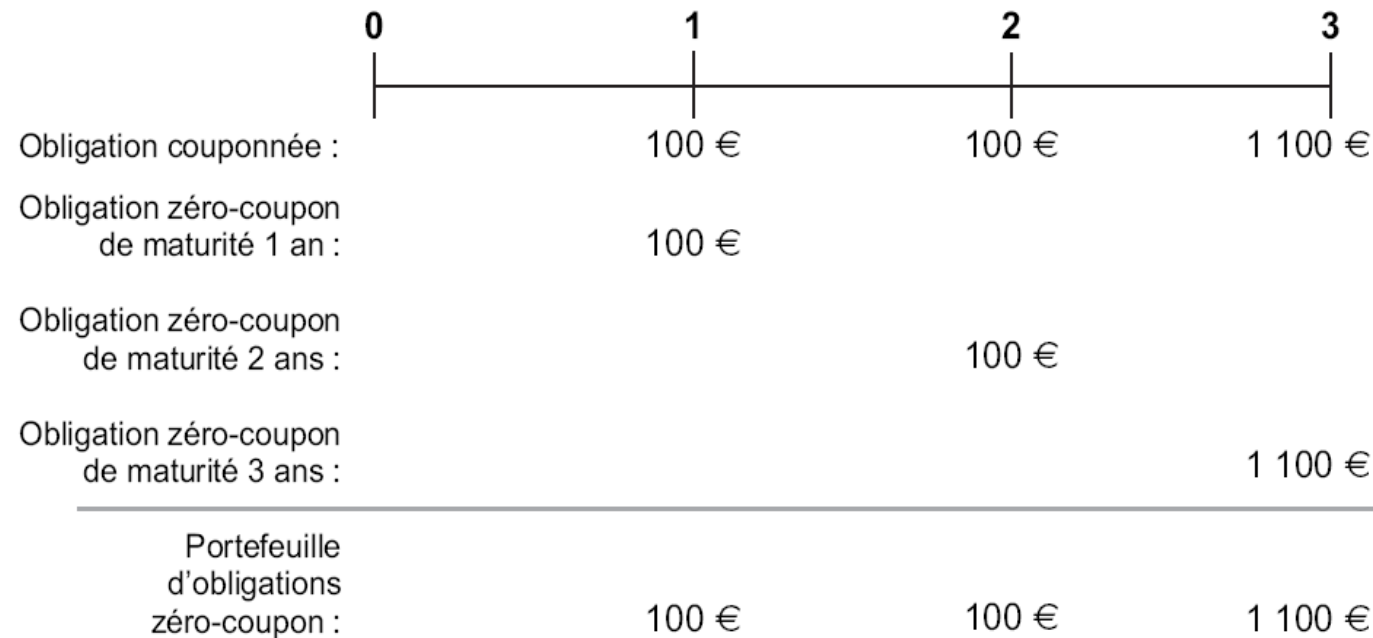
- Sur le marché, on trouve une obligation zéro-coupon d'échéance 15 ans et une obligation couponnée d'échéance 30 ans et de taux de coupon (annuel) 10 %. *Quel est le pourcentage de variation du prix de chaque obligation si la rentabilité à l'échéance passe de 5 % à 6 % ?*

TRE	Obligation zéro-coupon d'échéance 15 ans	Obligation couponnée (10 %) d'échéance 30 ans
5 %	$100 / 1,05^{15} = 48,10 \text{ €}$	$10 \times \frac{1}{0,05} \left(1 - \frac{1}{1,05^{30}} \right) + \frac{100}{1,05^{30}} = 176,86 \text{ €}$
6 %	$100 / 1,06^{15} = 41,73 \text{ €}$	$10 \times \frac{1}{0,06} \left(1 - \frac{1}{1,06^{30}} \right) + \frac{100}{1,06^{30}} = 155,06 \text{ €}$
Variation du prix (en %)	$(41,73 - 48,10) / 48,10 = -13,2 \%$	$(155,06 - 176,86) / 176,86 = -12,3 \%$

Source: Finance d'Entreprise, Ed. Pearson, J. Berk, P. DeMarzo,
G. Capelle Blanchard, N. Couderc

Courbe des taux et arbitrage obligataire

- La réplication d'une obligation couponnée



La réplcation d'une obligation couponnée

Rentabilité et prix des obligations zéro-coupon (nominal = 100)

Échéance	1 an	2 ans	3 ans	4 ans
TRE	3,50 %	4,00 %	4,50 %	4,75 %
Prix	96,62 €	92,45 €	87,63 €	83,06 €

À partir de ces données, il est possible de calculer le coût de constitution du portefeuille de zéro-coupon :

Zéro-coupon	Valeur nominale	Coût
1 an	100 €	96,62 €
2 ans	100 €	92,45 €
3 ans	1 100 €	11 × 87,63 €
Coût total		1 153,00 €

L'évaluation d'une obligation couponnée à partir de la rentabilité à l'échéance de zéro-coupon

Prix d'une obligation couponnée

$$P = VA(\text{Flux futurs de l'obligation}) = \frac{C}{1 + TRE_1} + \frac{C}{(1 + TRE_2)^2} + \dots + \frac{C + VN}{(1 + TRE_N)^N}$$

Exemple : en utilisant l'exemple précédent, le prix d'une obligation de valeur nominale 1 000 € de taux de coupon annuel 10 % est égale à :

$$P = \frac{100}{1,035} + \frac{100}{1,04^2} + \frac{100 + 1\,000}{1,045^3} = 1\,153$$

Les obligations privées

- La rentabilité espérée de l'obligation (« corporate »), égale au coût de la dette de l'entreprise, est inférieure à sa rentabilité à l'échéance lorsque la probabilité de défaut est non nulle.
- Une rentabilité à l'échéance plus élevée ne signifie pas nécessairement une rentabilité espérée plus élevée.

Exemple : La rentabilité à l'échéance des obligations privées

- La rentabilité à l'échéance d'une obligation zéro-coupon, **sans risque**, d'échéance un an, est égale à 4 %.
- L'entreprise Avat émet des obligations zéro-coupon d'échéance identique et de valeur nominale 1 000 €.
- Quels sont le prix et la rentabilité à l'échéance de cette obligation ?

La rentabilité à l'échéance des obligations privées

- Risque de défaut nul :
- Défaut certain : les investisseurs juge que l'entreprise fera défaut et ne sera en mesure de rembourser que 90 % du principal, soit 900 €.
- La rentabilité espérée : $(900 / 865,38) - 1 = 4 \%$

$$P = \frac{1\,000}{1 + TRE_1} = \frac{1\,000}{1,04} = 961,54 \text{ €}$$

$$P = \frac{900}{1 + TRE_1} = \frac{900}{1,04} = 865,38 \text{ €}$$

$$TRE = (VN / P) - 1 = (1\,000 / 865,38) - 1 = 15,56 \%$$

La rentabilité à l'échéance des obligations privées

- Même exemple, mais probabilité que l'entreprise rembourse intégralement le principal = probabilité qu'elle ne rembourse que 900 € = 50%.
- On suppose que la **prime de risque exigée par les investisseurs** est de 1,1 %.
- $P = (1000 \times 0,5 + 900 \times 0,5) / 1,051 = 903,90 \text{ €}$
- $TRE = (VN/P) - 1 = (1\ 000 / 903,90) - 1 = 10,63 \%$
- Rentabilité ex post si défaut: $900 / 903,90 - 1 = -0,43 \%$
- La **rentabilité espérée** par les investisseurs est donc égale *ex ante* à $0,5 \times (10,63 \%) + 0,5 \times (-0,43 \%) = 5,1 \%$

La rentabilité à l'échéance des obligations privées

- Prix et rentabilités en fonction de la probabilité de défaut

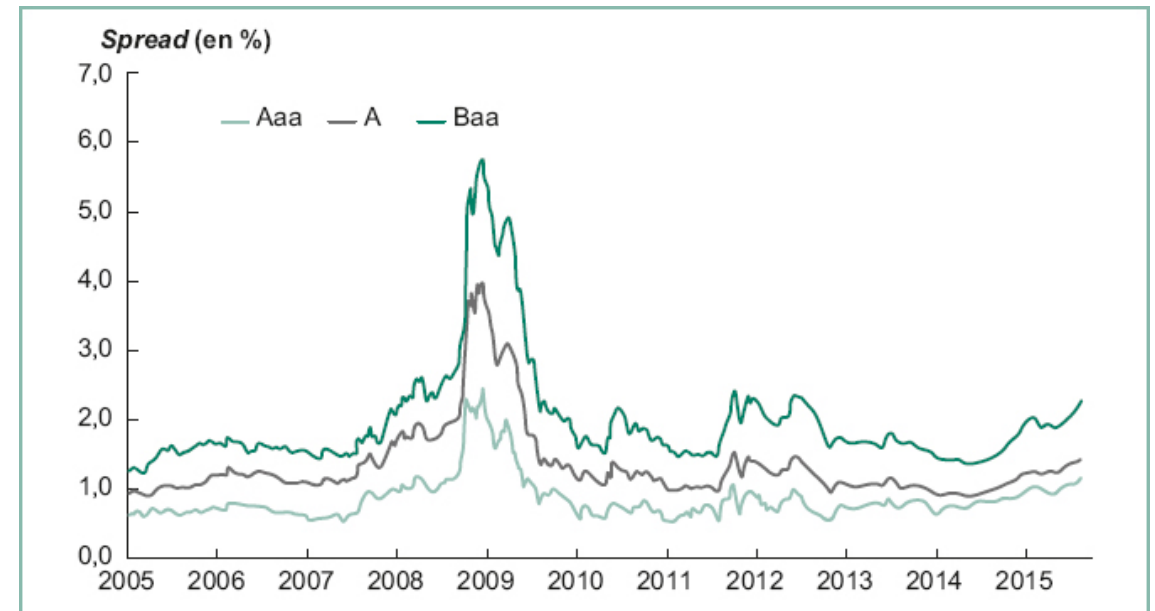
Obligation zéro-coupon d'échéance 1 an	Probabilité de défaut = 0 %	Probabilité de défaut = 50 %	Probabilité de défaut = 100 %
Prix de l'obligation	961,54 €	903,90 €	865,38 €
TRE	4,00 %	10,63 %	15,56 %
Rentabilité espérée	4 %	5,1 %	4 %

La notation des obligations

Moody's	Standard & Poor's ou Fitch	Signification	Exemple (au 1 ^{er} janvier 2019)
Catégorie placement			
Aaa	AAA	Meilleure qualité possible. Risque de crédit faible, voire nul.	Allemagne, Microsoft
Aa	AA	Grande qualité, très faible risque de crédit.	France, Google
A	A	Au-dessus de la moyenne, faible risque de crédit.	EDF
Baa	BBB	Qualité moyenne, risque de crédit modéré.	Renault, Lafarge
Catégorie « spéculatif »			
Ba	BB	Caractère spéculatif, risque de crédit significatif.	Afrique du Sud
B	B	Caractère spéculatif, risque de crédit élevé.	Grèce, Égypte
Caa	CCC ou CC	Caractère très spéculatif, risque de crédit très élevé.	Congo
Ca	C	Caractère hautement spéculatif, très proche du défaut. Un certain potentiel de récupération du principal et des intérêts existe.	Senvion
C	D	Catégorie la plus basse. En défaut. Potentiel de récupération du principal et des intérêts limité.	Venezuela

Les spreads de taux pendant la crise de 2008

- Les spreads de taux entre les titres de dette risqués (obligations à 30 ans émises par des entreprises) et les titres de dette sans risque (obligations à 30 ans émises par le Trésor)
 - Ils ont fortement augmenté pendant la crise de 2008, reflétant les craintes des investisseurs sur les marchés et le repli vers les titres jugés les plus sûrs.
 - « *Flight to quality* »



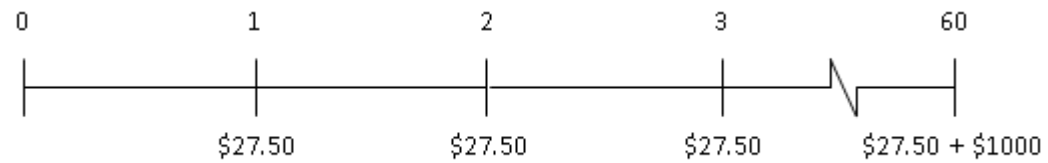
Connecting
talents

Exercices

-
- Une obligation d'échéance 30 ans et de valeur nominale 1 000 € détache un Taux Annuel Proportionnel (TAP) égal à 5,5 % de la valeur nominale. Quel est le coupon ? Quel est l'échéancier des flux ?



$$\frac{0.055 \times \$1000}{2} = \$27.50.$$



Rentabilité à l'échéance d'obligations de maturité identique

On connaît la rentabilité à l'échéance des obligations zéro-coupon suivantes :

Maturité	1 an	2 ans	3 ans	4 ans
TRE d'une obligation zéro-coupon	3,50 %	4,00 %	4,50 %	4,75 %



Ces obligations sont sans risque.

1. Quelle est la rentabilité à l'échéance d'une obligation zéro-coupon d'échéance trois ans ?
2. D'une obligation de taux de coupon annuel 4 % et d'échéance trois ans ?
3. D'une obligation de taux de coupon annuel 10 % et d'échéance trois ans ?

Solution

- (1): 4,5%
- (2)
 - Pour calculer la rentabilité à l'échéance de l'obligation couponnée, il faut d'abord calculer son prix :

$$P = \frac{40}{1,035} + \frac{40}{1,04^2} + \frac{40 + 1000}{1,045^3} = 986,98$$

- Sa rentabilité à l'échéance est solution de l'équation suivante :

$$986,98 = \frac{40}{(1 + TRE)} + \frac{40}{(1 + TRE)^2} + \frac{40 + 1000}{(1 + TRE)^3}$$

- À l'aide d'un tableur ou par interpolation linéaire, on trouve $TRE = 4,47 \%$.
- (3) Pour taux nominal 10%: $TRE = 4,44\%$

- Une obligation détache un coupon semestriel. Ses flux sont :



- Quelle est la maturité de l'obligation ? Quel est son taux de coupon ? Quelle est sa valeur nominale ?

-
- 10 ans.
 - $(20/1000) \times 2 = 4\%$
 - Nominal = \$1000.

-
- Le tableau ci-dessous fournit le prix de plusieurs obligations zéro-coupon de valeur nominale 100 € sans risque de défaut :

Maturité (années)	1	2	3	4	5
Prix	95,51 €	91,05 €	86,38 €	81,65 €	76,51 €



- Quelle est la rentabilité à l'échéance de chaque obligation ?
Quelle est la courbe des taux zéro-coupon ? Quelle est la forme de la courbe des taux ?

$$1 + \text{YTM}_n = \left(\frac{\text{FV}_n}{P} \right)^{1/n}$$

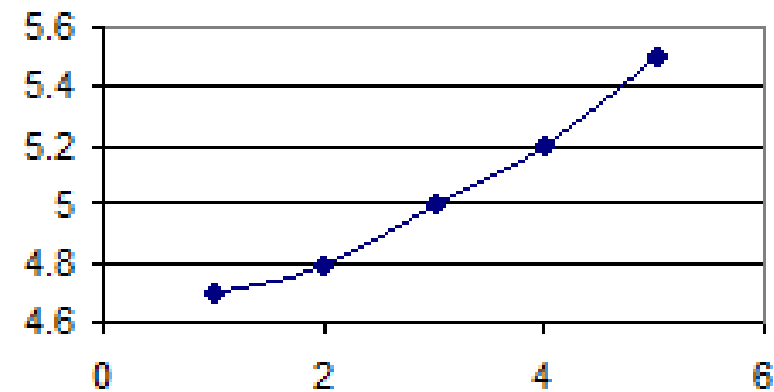
$$1 + \text{YTM}_1 = \left(\frac{100}{95.51} \right)^{1/1} \Rightarrow \text{YTM}_1 = 4.70\%$$

$$1 + \text{YTM}_1 = \left(\frac{100}{91.05} \right)^{1/2} \Rightarrow \text{YTM}_1 = 4.80\%$$

$$1 + \text{YTM}_3 = \left(\frac{100}{86.38} \right)^{1/3} \Rightarrow \text{YTM}_3 = 5.00\%$$

$$1 + \text{YTM}_4 = \left(\frac{100}{81.65} \right)^{1/4} \Rightarrow \text{YTM}_4 = 5.20\%$$

$$1 + \text{YTM}_5 = \left(\frac{100}{76.51} \right)^{1/5} \Rightarrow \text{YTM}_5 = 5.50\%$$



- La courbe des taux zéro-coupon sans risque indique :

Maturité (années)	1	2	3	4	5
TRE	5,00 %	5,50 %	5,75 %	5,95 %	6,05 %

- Quel est le prix d'une obligation zéro-coupon de valeur nominale 100 € sans risque et d'échéance deux ans ? Et si l'échéance est de quatre ans ? Quel est le taux d'intérêt sans risque à cinq ans ?

-
- Une obligation d'échéance 10 ans et de valeur nominale 1 000 € offre un taux de coupon de 8 % et des coupons semestriels. Cette obligation s'échange actuellement au prix de 1 034,74 €.
 - Quelle est la rentabilité à l'échéance de l'obligation (en taux annuel proportionnel) ?
 - La rentabilité à l'échéance de l'obligation passe brutalement à 9 %. Quel est le nouveau prix de l'obligation ?





$$\$1,034.74 = \frac{40}{(1 + \frac{YTM}{2})} + \frac{40}{(1 + \frac{YTM}{2})^2} + \dots + \frac{40 + 1000}{(1 + \frac{YTM}{2})^{20}} \Rightarrow YTM = 7.5\%$$

$$PV = \frac{40}{\left(1 + \frac{0.09}{2}\right)} + \frac{40}{\left(1 + \frac{0.09}{2}\right)^2} + L + \frac{40 + 1000}{\left(1 + \frac{0.09}{2}\right)^{20}} = \$934.96.$$

-
- Une obligation d'échéance cinq ans et de valeur nominale 1 000 € détache un coupon annuel. Cette obligation s'échange actuellement au prix de 900 €. Sa rentabilité à l'échéance est de 6 %. Quel est son taux de coupon ?

Des zéro-coupon échangés au-dessus du pair

- Le 9 décembre 2008, la rentabilité à l'échéance des T-bills est passée en dessous de zéro.
- Pour investir 1 million de dollars en bons du Trésor à 3 mois, il fallait payer : 1 000 025,56 \$

=> taux = $-0,01\%$

- Pourquoi une telle opportunité d'arbitrage ?



-
- Pourquoi la rentabilité d'une obligation échangée en-dessous du pair est-elle supérieure à son taux de coupon ?



-
- Les obligations négociées avec une décote génèrent un rendement à la fois en recevant les coupons et en recevant une valeur nominale supérieure au prix payé pour l'obligation.
 - Par conséquent, le rendement à l'échéance des obligations à décote est supérieur au taux du coupon.

-
- Sitex émet aujourd'hui des obligations de maturité 10 ans, de valeur nominale 1 000 € et de coupon annuel 7 %. La rentabilité à l'échéance de ces titres est de 6 %.
 - Quel est le prix d'une obligation à l'émission ?
 - Si la rentabilité à l'échéance reste constante, quel sera le prix de l'obligation juste avant le versement du premier coupon ?
 - Et juste après ?





$$P = \frac{70}{(1+0.06)} + \dots + \frac{70+1,000}{(1+0.06)^{10}} = \$1,073.60.$$

$$P = 70 + \frac{70}{(1+0.06)} \dots + \frac{70+1,000}{(1+0.06)^9} = \$1,138.02.$$

$$P = \frac{70}{(1+0.06)} \dots + \frac{70+1,000}{(1+0.06)^9} = \$1,068.02.$$

-
- Un investisseur a acheté il y a 10 ans une obligation émise par l'état d'échéance 30 ans de coupon annuel 5 %, émise au pair. La rentabilité à l'échéance des obligations sans risque est actuellement de 7 % (TAE, taux annuel effectif).
 - S'il décide de revendre l'obligation aujourd'hui, quel sera le TRI de son investissement ?
 - Et s'il décide de conserver l'obligation jusqu'à l'échéance ?
 - La comparaison des deux TRI peut-elle aider à faire le bon choix (vendre ou conserver l'obligation) ?

- 3.17%
- 5%
- Nous ne pouvons pas nous contenter de comparer les TRI. En ne vendant pas l'obligation à son prix actuel de 78,81 \$, nous obtiendrons le rendement actuel du marché de 7 % sur ce montant à l'avenir.

		3.17%
5		-100
5		5
5		5
5		5
5		5
5		5
5		5
5		5
5		5
5		5
5		83.81 €
5		
5		
5		
5		
5		
5		
5		
5		
105		
78.81 €		

-
- Quel est le prix d'une obligation d'échéance deux ans, de valeur nominale 1 000 €, sans risque de défaut et de taux de coupon annuel 6 % ? Cette obligation est-elle échangée au pair, au-dessus ou au-dessous du pair ?

-
- Quel est le prix d'une obligation d'échéance trois ans, sans risque de défaut, de valeur nominale 1 000 € et de taux de coupon annuel 4 % ? Quelle est la rentabilité à l'échéance de cette obligation ?

-
- Une obligation d'échéance quatre ans, sans risque de défaut, dont les coupons sont annuels et dont la valeur nominale est de 1 000 €, est échangée au pair. Quel est le taux de coupon de cette obligation ?

-
- Une obligation d'échéance cinq ans, sans risque de défaut et de coupon annuel 5 % a une valeur nominale de 1 000 €. Sans faire de calculs, déterminez si cette obligation s'échange au-dessus ou au-dessous du pair. Quelle est la rentabilité à l'échéance de cette obligation ? La rentabilité à l'échéance de cette obligation augmente à 5,2 % : quel est son nouveau prix ?

- Les prix d'obligations zéro-coupon, sans risque de défaut et de valeur nominale 1 000 €, sont résumés dans le tableau :

Maturité (années)	1	2	3
Prix	970,87 €	938,95 €	904,46 €



- Une obligation d'échéance trois ans, sans risque de défaut, de taux de coupon annuel 10 % et de valeur nominale 1 000 €, s'échange actuellement au prix de 1 183,50 €. Y a-t-il une opportunité d'arbitrage ?
- Si oui, comment en profiter ? Sinon, pourquoi ?

$$970.87 = \frac{1000}{(1+YTM_1)} \rightarrow YTM_1 = 3.0\%$$

$$938.95 = \frac{1000}{(1+YTM_2)^2} \rightarrow YTM_2 = 3.2\%$$

$$904.56 = \frac{1000}{(1+YTM_3)^3} \rightarrow YTM_3 = 3.4\%$$

$$\frac{100}{(1+.03)} + \frac{100}{(1+.032)^2} + \frac{100+1000}{(1+.034)^3} = \$1186.00.$$

Acheter 10 Ob. Coup.

Vte à déc. 1 Obl. 1 année 0-C

Vte à déc. 1 Obl. 2 années 0-C

Vte à déc. 11 Obl. 1 3 années 0-C

Flux net

Today	1 Year	2 Years	3 Years
-11835.00	+1000	+1000	+11,000
+970.87	-1000		
+938.95		-1000	
+9950.16			-11,000
+24.98	0	0	0

- Les prix et les flux futurs de quatre obligations sans risque de défaut sont :

(En euros)		Flux futurs		
Obligation	Prix (aujourd'hui)	Année 1	Année 2	Année 3
A	934,58	1 000	0	0
B	881,66	0	1 000	0
C	1 118,21	100	100	1 100
D	839,62	0	0	1 000

- Y a-t-il des opportunités d'arbitrage ? Si oui, comment en profiter ?

-
- Pourquoi la rentabilité espérée d'une obligation risquée n'est-elle pas égale à sa rentabilité à l'échéance ?





- L'entreprise Grumon vient d'émettre des obligations zéro-coupon de maturité cinq ans. Les analystes estiment que la probabilité de défaut est de 20 % et, en cas de défaut, l'entreprise ne sera en mesure de rembourser que la moitié de ce qu'elle doit. Les investisseurs exigent une rentabilité de 6 % pour ce type d'actif. Quel est le prix et la rentabilité à l'échéance de l'obligation ?

$$=(100*0.8+50*0.2)/1.06^5=67,25$$

$$\left(\frac{100}{67.25}\right)^{1/5} - 1 = 8.26\%$$

- Le tableau détaille les rentabilités à l'échéance d'obligations zéro-coupon d'échéance un an :

Obligation	Rentabilité à l'échéance (%)
Obligation souveraine AAA	3,1
Obligation <i>corporate</i> AAA	3,2
Obligation <i>corporate</i> BBB	4,2
Obligation <i>corporate</i> B	4,9

- Quel est le prix (en pourcentage de la valeur nominale) d'une obligation corporate AAA ? Quel est le spread de taux de ces obligations ? Et pour les obligations B ? Comment varie le spread de taux avec la notation ? Pourquoi ?

-
- Une entreprise envisage d'émettre une obligation d'échéance 30 ans, offrant un coupon annuel de 7 % et de valeur nominale 1 000 €. L'entreprise estime pouvoir obtenir la note A de la part de Standard & Poor's. Néanmoins, de récents problèmes financiers rencontrés par l'entreprise conduisent Standard & Poor's à avertir celle-ci d'une possible dégradation de sa note à BBB. La rentabilité à l'échéance des obligations notées A est de 6,5 % et celle des obligations BBB de 6,9 %. Quel est le prix de l'obligation si l'entreprise demeure notée A ? Et si elle est dégradée ?

-
- La rentabilité à l'échéance des obligations d'échéance cinq ans notées BBB est 8,2 % (TAP), tandis que celle des obligations sans risque de même échéance est de 6,5 %. Les obligations offrent des coupons semestriels, leur taux de coupon est de 7 %. Quel est le prix de chaque obligation, en pourcentage de sa valeur nominale ? Quel est le spread de taux pour les obligations BBB ?

-
- La société Jeumout vient juste d'émettre des obligations zéro-coupon d'échéance cinq ans à un prix de 74 €. Vous avez acheté une obligation et envisagez de la détenir jusqu'à l'échéance, où elle sera remboursée au pair.
 - Quelle est la rentabilité à l'échéance de cette obligation ?
 - Quelle est la rentabilité espérée si la probabilité de défaut est nulle ?
 - Quelle est la rentabilité espérée si la probabilité de défaut est de 100 % et que vous êtes certain de recevoir 90 % de la valeur nominale de l'obligation ?
 - Quelle est la rentabilité espérée si la probabilité de défaut est de 50 %, qu'elle est plus élevée lorsque la conjoncture est mauvaise, et que vous recevrez 90 % de la valeur faciale de l'obligation en cas de défaut ?
 - Que peut-on dire à propos du taux sans risque à cinq ans dans chacun des cas ?

a. $\left(\frac{100}{74}\right)^{1/5} - 1 = 6.21\%$

b. In this case, the expected return equals the yield to maturity.

c. $\left(\frac{100 \times 0.9}{74}\right)^{1/5} - 1 = 3.99\%$

d. $\left(\frac{100 \times 0.9 \times 0.5 + 100 \times 0.5}{74}\right)^{1/5} - 1 = 5.12\%$

e. Risk-free rate is 6.21% in b, 3.99% in c, and less than 5.12% in d.