Feuille de TD n.1 de IPD, Ensimag 2A IF

H. Guiol

Exercice 1.1 Transformation de Box-Muller
Soient R de loi exponentielle (1/2) et Θ indépendante de loi uniforme sur $[0, 2\pi]$. Montrer que $\sqrt{R}\sin(\Theta)$ et $\sqrt{R}\cos(\Theta)$ sont deux v.a. normales centrée réduites indépendantes.

Exercice 1.2 Loi log-Normale
Soit $X = e^Y$ où Y est de loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. On dit que X est de loi Log-Normale.
1) Trouver :

- a) la fonction de densité f de la v.a. X;
- b) $\mathbb{E}(X)$ et $\mathrm{Var}(X)$.

2) Montrer que si $X_1, ..., X_n$ sont indépendantes de loi Log-Normale alors leur produit est aussi de loi Log-Normale.

Exercice 1.3 Queues de distribution de la loi Normale
Montrer que pour $Z \sim \mathcal{N}(0, 1)$

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \leq \mathbb{P}(|Z| > x) \leq \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{x}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

En déduire des équivalents pour $\mathbb{P}(|Z| > x)$ et $\mathbb{P}(Z > x)$.

Exercice 1.4 Densité d'un vecteur Gaussien
Soit X un vecteur gaussien dans $\mathbb{R}^d$ non dégénéré de loi $N(\mu, \Sigma)$, on se propose de montrer que X possède une densité f

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{d/2}(\det\Sigma)^{1/2}}\exp\left(-\frac{(x-\mu)^T\Sigma^{-1}(x-\mu)}{2}\right) \quad \forall x \in \mathbb{R}^d.$$

1. Soient $Y_1, ..., Y_d$, d variables aléatoires indépendantes gaussiennes réelles centrées et réduites. Ecrire la densité du vecteur $Y = (Y_1, ..., Y_d)$.
2. Trouver une matrice M symétrique définie positive de taille $d \times d$ et un vecteur b de taille d, tel que $MY + b$ ait même loi que X.
3. En déduire que X a la densité annoncée.

Exercice 1.5 Processus Gaussien
Un processus stochastique $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ est dit gaussien si et seulement si pour tout $k \geq 1$ et tout choix $0 \leq t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ le vecteur aléatoire $(X_{t_1}, ..., X_{t_k})$ est gaussien.
1. Soient $f_1, ..., f_n$, n fonctions de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ et $G_1, ..., G_n$, n gaussiennes centrées réduites et indépendantes. Montrer que le processus $X = (X_t)_{t\in\mathbb{R}^+}$ défini par $X_t = \sum_{i=1}^n f_i(t)G_i$ est un processus gaussien et calculer ses fonctions de moyenne $\mu(t) = \mathbb{E}(X_t)$ et de covariance $K(s, t) = \mathrm{Cov}(X_s, X_t)$.
2. Montrer que si $(X_n)_{n\geq0}$ est une suite de processus gaussiens convergeant vers le processus X en probabilité, alors X est gaussien et la convergence a lieu aussi dans L^2.