HEATH-JARROW-MORTON: LES ZÉRO-COUPONS COMME ACTIFS

Caroline Hillairet, ENSAE Paris
caroline.hillairet@ensae.fr

Novembre -Décembre 2024

Dans ce cours

- But: Modéliser les déformations futures de la courbe des taux
- Hypothèse de base *Pas d'arbitrage sur le marché des taux*
- Liaison forte entre taux de différentes maturités: les déformations futures ne peuvent pas affecter de manière quelconque la structure par terme des taux.

Plan

1. Théorie de Heath Jarrow Morton
2. Evaluation forward
3. Libor Market Model (LMM)

Heath-Jarrow-Morton (1987-1993)

Théorie de Heath Jarrow Morton : Les zéro-coupon comme actifs

Modéliser les déformations futures de la courbe des taux, en parfaite adéquation avec la courbe des taux aujourd'hui

- la courbe des taux aujourd'hui devient une donnée initiale de la modélisation (et non seulement la valeur du taux court)
- $\rightarrow$ problème de modélisation de dimension infinie:
  - représenter la dynamique de la courbe des taux dans le futur,
  - tout en respectant l'absence d'opportunité d'arbitrage.

Hypothèse fondamentale: Absence d'opportunité d'arbitrage

LE MODÈLE

Pour modéliser la dynamique des prix, on se place dans un espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$ avec:

- l'ensemble Ω de tous les états du monde possibles.
- $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$, la filtration de l'information disponible sur le marché.
- une probabilité $\mathbb{P}$. C'est la probabilité historique ou objective (qui apparaît en particulier dans les tests statistiques).
- $(\widehat{W}_t)$ un $((\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, \mathbb{P})$-mouvement brownien de dimension d.

En absence d'arbitrage, l'excès de rendement des actifs par rapport au taux sans risque instantané r_t est proportionnel à la volatilité:

Hypothèse : *Il existe un vecteur de primes de risque λ_t tel que la dynamique des $B(t,T)$ est donnée par*

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t\,dt + \Gamma(t,T).[d\widehat{W}_t + \lambda_t dt], \qquad B(T,T) = 1.$$

$$\frac{dB(t,T)}{B(t,T)} = r_t\,dt + \Gamma(t,T).[d\widehat{W}_t + \lambda_t dt], \qquad B(T,T) = 1. \qquad (1)$$

$$= r_t\,dt + \Gamma(t,T).dW_t, \qquad B(T,T) = 1. \qquad (2)$$

- $(\widehat{W}_t)$ est un d mouvement brownien sous $\mathbb{P}$ proba historique.
- (W_t) est un d mouvement brownien sous $\mathbb{Q}$ proba risque neutre.
- r_t est le taux instantané sans risque (entre t et $t+dt$)
- $\Gamma(t,T)$ est la famille des vecteurs de volatilités paramétrée par les dates d'échéance T. ($\Gamma(.,T)$ processus aléatoire)
- On fait la convention que $\Gamma(t,T) = 0, \ t \geq T$.

Equation structurelle des taux

Peut-on décrire les liens structurels entre les taux des différentes maturités?

Taux zéro-coupon et conditions initiales

- Le prix en t d'un zéro-coupon d'échéance T est donné par

$$B(t,T) = B(0,T)\exp\left[\int_0^t r_s ds + \int_0^t \Gamma(s,T).dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\Gamma(s,T)\|^2 ds\right]$$

- L'élimination du taux court conduit à :

$$\begin{aligned}
B(t,T) &= \frac{B(0,T)}{B(0,t)}\exp\left[\int_0^t [\Gamma(s,T)-\Gamma(s,t)].dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t [\|\Gamma(s,T)\|^2 - \|\Gamma(s,t)\|^2] ds\right] \\
B_t(t,T) &= B_0(t,T)\exp\left[\int_0^t [\Gamma(s,T)-\Gamma(s,t)].(dW_s - \Gamma(s,t)ds)\right] \\
& \exp\left[-\frac{1}{2}\int_0^t [\|\Gamma(s,T)-\Gamma(s,t)\|^2] ds\right]
\end{aligned}$$

Equations intégrales des taux

On suppose $(\Gamma(t,T)\,;\ t \leq T)$ dérivable par rapport à l'échéance T, de dérivée notée $\partial_T \Gamma(t,T) = \partial_2 \Gamma(t,T) = \gamma(t,T)$ (supposée bornée)

- La représentation des taux courts forward (IFR) dans le futur est donnée par :

$$f(t,T) = f(0,T) - \int_0^t \gamma(s,T) dW_s + \int_0^t \gamma(s,T)\Gamma(s,T)^* ds$$

- Si on veut donner moins d'importance à la courbe des taux aujourd'hui et plus au taux spot

$$f(t,T) = r_T + \int_t^T \gamma(s,T) dW_s - \int_t^T \gamma(s,T)\Gamma(s,T)^* ds$$

- En particulier, la représentation du taux court est :

$$r_t = f(0,t) - \int_0^t \gamma(s,t) dW_s + \int_0^t \gamma(s,t)\Gamma(s,t)^* ds$$

Equations intégrales des taux

- La représentation des taux continus est donnée par :

$$R(t,\theta) = R_0(t,\theta) - \int_0^t \frac{\Gamma(s,t+\theta) - \Gamma(s,t)}{\theta} dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\|\Gamma(s,t+\theta)\|^2 - \|\Gamma(s,t)\|^2}{\theta} ds$$

- $\Rightarrow R_0(t,\theta) = \frac{1}{\theta}[\mathrm{Ln}B(0,t) - \mathrm{Ln}B(0,t+\theta)]$ est le taux forward vu de 0, pour l'échéance t, de maturité θ. Ce taux est lu sur la courbe des taux aujourd'hui.

Ces équations sont connues comme le modèle de H-J-M en 1987 .

Les taux longs ne peuvent que croître

$$R(t,\theta) = R_0(t,\theta) - \int_0^t \frac{\Gamma(s,t+\theta)-\Gamma(s,t)}{\theta} dW_s + \frac{1}{2}\int_0^t \frac{\|\Gamma(s,t+\theta)\|^2 - \|\Gamma(s,t)\|^2}{\theta} ds$$

Quand θ tend vers l'infini

- si la martingale a une limite non nulle, $\frac{\Gamma(s,t+\theta)}{\theta}$ converge (vers une limite non nulle), donc $\frac{\|\Gamma(s,t+\theta)\|^2}{\theta}$ tend vers l'infini et $R(t,\infty) = \infty$.
- Si $\frac{\|\Gamma(s,t+\theta)\|^2}{\theta}$ tend vers une limite $\alpha^2(s,\infty)$, alors la martingale tend vers 0 et $R(t,\infty)$ est donné par $R(t,\infty) = R_0(t,\infty) + \frac{1}{2}\int_0^t \alpha^2(s,\infty) ds$.
  L' écart au forward est toujours croissant

Equations différentielles des taux

- Le plus facile est d'étudier les taux spots forward

$$f(t,T) = f(0,T) - \int_0^t \gamma(s,T)dW_s + \int_0^t \gamma(s,T)\Gamma(s,T)^* ds$$

- La dynamique de $f(t,T)$ est donnée par:

$$df(t,T) = -\gamma(t,T)dW_t + \gamma(t,T)\Gamma(t,T)^* dt$$

- Soit $r(t,\theta) = f(t,t+\theta)$. Supposons $f(t,T)$ dérivable par rapport à T, avec dérivée bornée par un processus unif. intégrable.

$$dr(t,\theta) = \partial_\theta r(t,\theta)dt - \gamma(t,t+\theta)dW_t + \gamma(t,t+\theta)\Gamma(t,t+\theta)^* dt$$

- Comme $\Gamma(t,t+0) = 0$, le taux court a une dynamique de la forme

$$dr_t = \partial_\theta r(t,0)dt - \gamma(t,t).dW_t$$

EDS DES TAUX DE MATURITÉ GLISSANTE (MUSIELA).

- L'équation différentielle du taux actuariel de maturité θ tient compte de la courbe des taux forward de même maturité :

$$dR(t,\theta) = \frac{1}{\theta}[r(t,\theta) - r(t)]dt + \frac{1}{2\theta}\|\Gamma(t,t+\theta)\|^2 dt - \frac{1}{\theta}\Gamma(t,t+\theta)dW_t$$

- $\frac{1}{\theta}[r(t,\theta) - r(t)]$ s'interprète comme

$$\partial_T R_t(T,\theta)_{T=t} = \frac{1}{\theta}[r(t,\theta) - r_t]dt$$

M.Musiela en 1992 est le premier à avoir montré l'importance de ces relations dans la modélisation des déformations de la courbe des taux, en notant en particulier que structurellement le système différentiel qui dirige la déformation de la courbe des taux est de dimension infinie.

Exemples de fonctions de volatilité

Vol déterministe (HJM Gaussien)

- Vasicek ($a > 0$ et $\sigma > 0$)

$$
\begin{aligned}
\Gamma_V^a(t, t+\theta) &= \sigma \frac{1 - e^{-a\theta}}{a}, \quad \theta \geq 0 \\
\gamma_V^a(t, t+\theta) &= \sigma e^{-a\theta} \\
f_V^a(t, T) &= f(0, T) + \frac{\sigma^2}{a} \int_0^t e^{-a(T-u)}(1 - e^{-a(T-u)})du - \sigma \int_0^t e^{-a(T-u)} dW_u \\
r_t &= f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2}(1 - e^{-at})^2 - \sigma \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u
\end{aligned}
$$

Modèle de Vasicek Hull-White étendu du taux court, calibré à la courbe initiale des taux ZC $(f(0, t))_t$.

Exemples de fonctions de volatilité

Vol déterministe (HJM Gaussien)

- Ho et Lee: limite de Vasicek lorsque a tend vers 0

$$\begin{aligned}
\Gamma_{Ho.Lee}(t, t+\theta) &= \sigma\theta \\
\gamma_{Ho.Lee}(t, t+\theta) &= \sigma \\
f_{Ho.Lee}(t, T) &= f(0, T) + \sigma^2 \int_0^t (T-u)du - \sigma W_t \\
r_t &= f(0, t) + \frac{1}{2}\sigma^2 t^2 - \sigma W_t \\
dr_t &= (\partial_t f(0, t) + \sigma^2 t)dt - \sigma dW_t
\end{aligned}$$

Modèle de Ho-Lee du taux court, calibré à la courbe des taux ZC initiale du marché à travers $(\partial_t f(0, t) + \sigma^2 t)$

Exemples de fonctions de volatilité

Vol stochastique

- Cox Ingersoll Ross (CIR)

$$\Gamma_{CIR}(t, t+\theta) = \sigma\sqrt{r_t}G(\theta) \tag{3}$$

où G est une fonction déterministe solution d'une certaine équation différentielle de type Ricatti.

- Modèle faiblement stationnaire

$$\Gamma(t, t+\theta) = G(\theta)\sigma_t \ ; \quad \gamma(t, t+\theta) = g(\theta)\sigma_t \, ; \quad g(0) = 1$$

avec (σ_t) processus aléatoire et $G(\theta)$ de dérivée $g(\theta)$

  - Les équations des taux se simplifient un peu en

$$dR(t,\theta) = \frac{1}{\theta}[r(t,\theta) - r_t]dt + \frac{1}{2\theta}G^2(\theta)|\sigma_t|^2 dt - \frac{1}{\theta}G(\theta)\sigma_t dW_t$$

  - En particulier, dans le cas stationnaire, (σ indépendant du temps),

$$f(t,T) = f(0,T) - \int_0^t g(T-s)\sigma dW_s + \frac{|\sigma|^2}{2}[G^2(T) - G^2(T-t)]$$

Plan

MARCHÉ À TERME

Marché à terme est un engagement d'acheter ou de vendre un actif à un **prix fixé au moment de la transaction**, mais pour une **livraison ET un règlement à une date ultérieure**.

- Evaluation risque neutre en 0 d'un flux aléatoire X_T versé en T ($\pi_0(X_T)$ est payé en 0)

$$\pi_0(X_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r_s ds} X_T]$$

- Evaluation risque neutre en 0 d'un contrat forward sur X_T ($F_0(T, X_T)$ fixé en 0 mais payé en T)

$$F_0(T, X_T) = \frac{\pi_0(X_T)}{B(0,T)} \tag{4}$$

Evaluation d'un contrat forward

Evaluation d'un contrat forward sur X_T:

$$F_0(T, X_T) = \frac{\pi_0(X_T)}{B(0,T)} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}[e^{-\int_0^T r_s ds} X_T]}{B(0,T)} = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}[X_T] \tag{5}$$

- Evaluation sous la probabilité T-forward neutre $\mathbb{Q}^T$: avec
$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} = \frac{e^{-\int_0^T r_s ds}}{B(0,T)}.$$
- Changement de probabilité = Changement de numéraire : la probabilité T-forward neutre est la probabilité risque neutre attachée au choix de l'argent en T comme numéraire, dont la valeur en t est $B(t,T)$.

Evaluation forward $\rightarrow$ Changement de probabilité/numéraire

NUMÉRAIRE

- La probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$ est associée au numéraire $(S_t^0)_{t\geq 0}$

$$S_t^0 = \exp\left(\int_0^t r_u du\right)$$

qui représente l'actif sans risque (avec taux stochastique).

- Il est parfois judicieux de remplacer ce numéraire par un autre : un numéraire est un processus de prix (p.s.) strictement positif.
- Cette procédure s'appelle changement de numéraire: elle est notamment utilisée pour calculer les prix des dérivées dans des modèles financiers pour obtenir des formules plus simples.

Changement de Numéraire

Pricing sous différents numéraires

- Payoff H_T, de valeur H_t en t (par ex. en euros)
- Soit un numéraire $(N_t)_t$ associé à une proba risque neutre $\mathbb{Q}^N$
- Sous $\mathbb{Q}^N$, H/N est une martingale locale
- Expression pour la valeur à la date t

$$\frac{H_t}{N_t} = \mathbb{E}^N\left[\frac{H_T}{N_T}|\mathcal{F}_t\right]$$

Formule de Changement de Numéraire

- La valeur en t doit être indépendante du choix du numéraire

$$\begin{aligned} N_t\,\mathbb{E}^N\left[\frac{H_T}{N_T}|\mathcal{F}_t\right] &= M_t\,\mathbb{E}^M\left[\frac{H_T}{M_T}|\mathcal{F}_t\right] \\ \mathbb{E}^N\left[G_T|\mathcal{F}_t\right] &= \frac{M_t}{N_t}\,\mathbb{E}^M\left[G_T\frac{N_T}{M_T}|\mathcal{F}_t\right] \end{aligned}$$

Probabilités forward

Rappel: Formule de Bayes (formule changement de numéraire)

- Soient $\mathbb{Q}_1$ et $\mathbb{Q}_2$ deux probabilités équivalentes sur $\mathcal{F}$, $\mathbb{Q}_2 \sim \mathbb{Q}_1$. On note pour tout t la densité de Radon-Nikodym correspondante:

$$\frac{d\mathbb{Q}_2}{d\mathbb{Q}_1}\Big|_{\mathcal{F}_t} =: Z_t \left(= \frac{N_t}{M_t} \right),$$

- $(Z_t)_{t\geq 0}$ est une $\mathbb{Q}_1$-martingale t.q. $Z_t > 0$ (p.s.) et $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t] = 1$, pour tout t.

- Pour un t fixé, soit X une v.a. $\mathcal{F}_t$-measurable et t.q. $\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[X] < \infty$. Alors, on a pour tout $s \leq t$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_2}[X|\mathcal{F}_s] = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t X|\mathcal{F}_s]}{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t|\mathcal{F}_s]} = \frac{\mathbb{E}^{\mathbb{Q}_1}[Z_t X|\mathcal{F}_s]}{Z_s}. \qquad (6)$$

PROBABILITÉS FORWARD

- Sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$, pour chaque échéance $T > 0$, le processus actualisé du prix ZC

$$\left(\frac{B(t,T)}{S_t^0} = \frac{B(t,T)}{e^{\int_0^t r_u du}}\right)_{t \leq T} \quad \text{est} \quad \mathbb{Q} - \text{martingale.}$$

- On fixe une échéance $T > 0$. Par la propriété martingale sous $\mathbb{Q}$

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{B(T,T)}{B(0,T)S_T^0}\right] = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[\frac{1}{B(0,T)S_T^0}\right] = \frac{B(0,T)}{B(0,T)S_0^0} = 1$$

- on peut définir une nouvelle probabilité $\mathbb{Q}^T$ sur $\mathcal{F}_T$, $\mathbb{Q}^T \sim \mathbb{Q}$, par la densité de Radon-Nikodym

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} = \frac{B(T,T)}{B(0,T)S_T^0} = \frac{e^{-\int_0^T r_u du}}{B(0,T)} \tag{7}$$

PROBABILITÉS FORWARD

- Pour tout $t \leq T$, la restriction sur la tribu $\mathcal{F}_t$ est donnée par

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \mathbb{E}\left[\frac{B(T,T)}{B(0,T)S_T^0}\Big|\mathcal{F}_t\right] = \frac{B(t,T)}{B(0,T)S_t^0} \tag{8}$$

- $\mathbb{Q}^T$ probabilité T-forward : associée au ZC $B(\cdot,T)$ comme numéraire.

- Propriété fondamentale de la probabilité forward $\mathbb{Q}^T$:
  le prix du ZC d'échéance $S = T + \theta$ actualisé par le ZC d'échéance T comme numéraire

$$\left(\frac{B(t,T+\theta)}{B(t,T)}\right)_{t\leq T} \quad \text{est} \quad \mathbb{Q}^T - \text{martingale.}$$

- Rk: $\frac{B(t,T+\theta)}{B(t,T)}$ est le prix forward en t de l'actif $B(\cdot,T+\theta)$ dans un contrat forward d'échéance T, d'où le nom probabilité T-forward pour $\mathbb{Q}^T$.

PROBABILITÉ FORWARD NEUTRE ET GIRSANOV

Dans la théorie HJM, on peut obtenir les expressions explicites de la densité de Radon-Nikodym et des prix des ZC forward.

- Densité de Radon-Nikodym

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} &= \frac{e^{-\int_0^T r_s ds}}{B(0,T)} = \exp(-\int_0^T (r_s - f(0,s))ds) \\
&= \exp(\int_0^T \Gamma(s,T)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^T \|\Gamma(s,T)\|^2 ds) \\
\left.\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\right|_{\mathcal{F}_t} &= \exp(\int_0^t \Gamma(s,T)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\Gamma(s,T)\|^2 ds) =: Z_t^T
\end{aligned}$$

- $(Z_t^T)_{0\le t\le T}$ est une $\mathbb{Q}$-martingale (exponentielle).
- $W_t^T = W_t - \int_0^t \Gamma(s,T)ds$ est un $\mathbb{Q}^T$- mouvement brownien (Girsanov).

PRIX FORWARD SOUS HJM

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp\Big(\int_0^t \Gamma(s,T)dW_s - \frac{1}{2}\int_0^t \|\Gamma(s,T)\|^2 ds\Big) = Z_t^T$$

- Sous la probabilité $\mathbb{Q}^T$, la dynamique des prix des contrats forwards sont des $\mathbb{Q}^T$-martingales.
- En particulier $\frac{B(t,T+\theta)}{B(t,T)} = B_t(T, T+\theta)$ est $\mathbb{Q}^T$-martingale de volatilité

$$\Gamma(s,T,T+\theta) := \Gamma(s,T+\theta) - \Gamma(s,T)$$

- Le taux court forward est une $\mathbb{Q}^T$-martingale.

$$df(t,T) = -\gamma(t,T)dW_t^T, \quad f(T,T) = r_T$$

LIEN ENTRE DEUX PROBABILITÉS FORWARD

- Pour chaque échéance $T > 0$, on peut définir une probabilité forward $\mathbb{Q}^T$ associée au numéraire $B(\cdot, T)$

- Soient T et S deux échéances, $T \neq S$. Le lien entre deux probabilités forward $\mathbb{Q}^T$ et $\mathbb{Q}^S$, associées aux numéraires $B(\cdot, T)$ et $B(\cdot, S)$ respectivement, est donné par

$$\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,S)B(0,T)}{B(t,T)B(0,S)}$$

Avec HJM

$$\frac{d\mathbb{Q}^S}{d\mathbb{Q}^T}\Big|_{\mathcal{F}_t} = \exp(\int_0^t \Gamma(s,T,S)dW_s^T - \frac{1}{2}\int_0^t \|\Gamma(s,T,S)\|^2 ds).$$

RÉSUMÉ

X_T pay-off, $\mathcal{F}_T$-measurable et intégrable .

- **Probabilité risque-neutre:** $\mathbb{Q}$, numéraire $(S_t^0 = e^{\int_0^t r_u du})_{t \geq 0}$.
  Prix payé en t du payoff X_T:

$$\pi_t(X_T) = S_t^0 \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left[\frac{X_T}{S_T^0} | \mathcal{F}_t \right]$$

- **Probabilité forward sur $\mathcal{F}_T$:** $\mathbb{Q}^T$, numéraire ZC d'échéance T $(B(t,T))_{0 \leq t \leq T}$.
  Prix en t du contrat forward sur X_T (donc payé en T):

$$F_t(T, X_T) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T} [X_T | \mathcal{F}_t] = \frac{\pi_t(X_T)}{B(t,T)}$$

- **Densité de Radon-Nikodym:**

$$\frac{d\mathbb{Q}^T}{d\mathbb{Q}} \Big|_{\mathcal{F}_t} = \frac{B(t,T)}{B(0,T) S_t^0}, \quad 0 \leq t \leq T$$

Pricing de dérivés de taux

- **Objectif**: Pricing de dérivés de taux
- **Astuce** : essayer de se ramener à des modèles plus simples (type Black-Scholes - formules fermées).
- **Outil** : la probabilité forward neutre!
  - Attention aux hyp pour formule Black-Scholes : sous-jacent martingale de dynamique log-normal, avec taux et vol déterministes.
  - Si maturité de option est T : Passage à la probabilité T-forward permet de faire disparaitre le terme d'actualisation $e^{-\int_0^T r_u du}$ dans l'espérance.
  - Bien identifier le sous-jacent à considérer sous $\mathbb{Q}^T$: il doit être une $\mathbb{Q}^T$-martingale, par ex le ZC forward $(B_t(T, T+\theta))_{t \leq T}$.
    Besoin de connaitre sa vol ($\rightarrow$ modèles de taux).
  - Etape préliminaire parfois nécessaire : transformée du pay-off (ex: caplet (floorlet)) en pay-off d'une option put (call) sur un ZC. Ainsi pour évaluer les prix des caplet/floorlet il suffit de connaitre les prix des options put/call sur des ZC.

PRICING D'UN CALL SUR ZC

Option call européenne d'échéance T et de strike K sur une obligation ZC d' échéance $T+\theta$

- Payoff en T est
$$(B(T,T+\theta)-K)^+$$
- Prix en t sous proba risque neutre $\mathbb{Q}$
$$\pi^{call}(t,T,T+\theta) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s ds}(B(T,T+\theta)-K)^+|\mathcal{F}_t\right]$$
- Prix en t sous proba T forward neutre $\mathbb{Q}^T$
$$\pi^{call}(t,T,T+\theta) = B(t,T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[(B_T(T,T+\theta)-K)^+|\mathcal{F}_t\right]$$
- Modèle Black (Black Scholes sans taux) avec **sous jacent le ZC forward** $B_t(T,T+\theta)$ qui sous $\mathbb{Q}^T$ est un Brownien géométrique de volatilité $\Gamma(s,T,T+\theta)$.

Pricing d'un Call sur ZC (suite)

$$\pi^{call}(t,T,T+\theta) = B(t,T)\,\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[(B_T(T,T+\theta)-K)^+|\mathcal{F}_t\right]$$

- Modèle Black avec **sous jacent le ZC forward** $B_t(T,T+\theta)$ qui sous $\mathbb{Q}^T$ est un Brownien géométrique de volatilité $\Gamma(s,T,T+\theta)$.
- Dans le modèle HJM **gaussien** (ie vol Γ déterministe): le ZC forward $B_t(T,T+\theta)$ a une dynamique log-normale

$$\pi^{call}(t,T,T+\theta) = B(t,T+\theta)\mathcal{N}(d_1) - KB(t,T)\mathcal{N}(d_2)$$

avec $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition d'une $N(0,1)$ et

$$d_{1,2} = \frac{\ln\frac{B(t,T+\theta)}{KB(t,T)} \pm \frac{1}{2}\int_t^T \|\Gamma(s,T,T+\theta)\|^2 ds}{\sqrt{\int_t^T \|\Gamma(s,T,T+\theta)\|^2 ds}}.$$

- Couverture avec des ZC de maturité T et $T+\theta$: $B(.,T)$ et $B(.,T+\theta)$.

Transformée des pay-offs des caplets/floorlets

- On considère un caplet d'échéance $T+\theta$ et de strike K sur un taux linéaire (simplement composé) $L(T,\theta)$, fixé en T pour la période $[T, T+\theta]$. Son pay-off, payé en $T+\theta$, est donné par

$$\theta(L(T,\theta)-K)^{+}.$$

- Réécriture du payoff en utilisant la définition de $L(T,\theta)$:

$$\theta\left(\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{B(T,T+\theta)}-1\right)-K\right)^{+} = \left(\frac{1}{B(T,T+\theta)}-(1+\theta K)\right)^{+} = \left(\frac{1}{B(T,T+\theta)}-\tilde{K}\right)^{+}$$

payé en $T+\theta$, avec $\tilde{K} := 1+\theta K$.

- Ce pay-off est $\mathcal{F}_T$-measurable, c'est-à-dire il est connu déjà en T.

Transformée des pay-offs des caplets/floorlets

- En utilisant le facteur d'actualisation $B(T, T+\theta)$, ce pay-off est équivalent au pay-off **payé en** T.

$$
\begin{aligned}
B(T, T+\theta) \left(\frac{1}{B(T, T+\theta)} - \tilde{K} \right)^{+} & \\
&= \left(1 - \tilde{K} B(T, T+\theta)\right)^{+} \\
&= \tilde{K} \left(\frac{1}{\tilde{K}} - B(T, T+\theta) \right)^{+}.
\end{aligned}
$$

Transformée des pay-offs des caplets/floorlets

- En conclusion, le pay-off du caplet payé en $T+\theta$,

$$\theta(L(T,\theta)-K)^+,$$

est équivalent au pay-off de $\tilde{K}$ options put d'échéance T et de strike $\frac{1}{\tilde{K}}$ sur le ZC $B(T,T+\theta)$

$$\tilde{K}\left(\frac{1}{\tilde{K}}-B(T,T+\theta)\right)^+$$

payé en T, avec $\tilde{K}:=1+\theta K$.

- $\Rightarrow$ Résultat analogue pour un floorlet et une option call sur le ZC correspondant.

EDP d'évaluation pour options sur ZC

Les formules fermées n'existent pas toujours $\rightarrow$ EDP d'évaluation

- On considère une option de maturité T et de flux à l'échéance égal à $\Phi(B(T,T+\theta))$, où Φ est une fonction donnée.
- On cherche un portefeuille de réplication autofinançant avec des ZC de maturités T et $T+\theta$

$$V_t := \delta_t^0 B(t,T) + \delta_t B(t,T+\theta).$$

- **On se place sous** $\mathbb{Q}^{\boldsymbol{T}}$, avec V_t^F la valeur Forward du portefeuille

$$V_t^F = \frac{V_t}{B(t,T)}.$$

- Relation d'autofinancement (invariante par changement de numéraire)

$$dV_t^F = \delta_t dB_t(T,T+\theta).$$

EDP d'évaluation pour options sur ZC

EDP évaluation d'une option de maturité T et de payoff $\Phi(B(T, T+\theta))$:

- Relation d'autofinancement

$$dV_t^F = \delta_t dB_t(T, T+\theta).$$

- Si il existe une solution régulière v au problème parabolique

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t,x) + \frac{1}{2}x^2(\Gamma(t,T+\theta) - \Gamma(t,T))^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}(t,x) = 0, \\ v(T,x) = \Phi(x). \end{cases}$$

  alors $B(t,T)v(t, B_t(T, T+\theta))$ est la valeur d'un portefeuille autofinançant réplicant l'option.

  - $\delta_t = v_x(t, B_t(T, T+\theta))$ sur $B(t, T+\theta)$
  - $\delta_t^0 = v(t, B_t(T, T+\theta)) - \delta_t B_t(T, T+\theta)$ sur $B(t,T)$

Exercice: put sur obligation

On considère dans un modèle de Vasicek une obligation à coupons versant les quantités positives déterministes $(c_1, \dots, c_n)$ aux dates $(T_1, \dots, T_n)$.

- Quel est le prix de cette obligation à la date $T < T_1$?
- Écrire le payoff d'un put de strike K de maturité T sur cette obligation.
- On rappelle que sous le modèle de Vasicek, le prix en t du zero-coupon est donné par une fonction Φ telle que $B(t, T) = \Phi(r_t, T - t)$. Montrer qu'il existe une valeur fictive du taux spot r^* telle que $\sum_{i=1}^{n} c_i \Phi(r^*, T_i - T) = K$.
- En déduire que le prix en $t = 0$ de cette option peut s'exprimer en fonction de puts sur zéro-coupons.

Correction exercice: put sur obligation

On considère dans un modèle de Vasicek une obligation à coupons versant les quantités positives déterministes $(c_1, \ldots, c_n)$ aux dates $(T_1, \ldots, T_n)$.

- Prix de cette obligation à la date $T < T_1$:

$$O_T := \sum_{i=1}^{n} c_i B(T, T_i)$$

- Payoff du put de strike K de maturité T sur cette obligation:

$$(K - O_T)^+ = (K - \sum_{i=1}^{n} c_i B(T, T_i))^+$$

- Dans le modèle de Vasicek, le prix en t du zero-coupon est donné par une fonction Φ telle que $B(t, T) = \Phi(r_t, T - t)$ avec
  - $r \to \Phi(r, T - t)$ bijection décroissante continue de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$
  - Il en est donc de même pour la fonction $r \to \sum_{i=1}^{n} c_i \Phi(r, T_i - T)$.
  - par suite il existe une (unique) valeur fictive du taux spot r^* telle que $\sum_{i=1}^{n} c_i \Phi(r^*, T_i - T) = K$.

Correction exercice: put sur obligation

- On réécrit le payoff avec r^*:

$$
\begin{aligned}
(K - \sum_{i=1}^{n} c_i B(T, T_i))^+ &= (\sum_{i=1}^{n} c_i \Phi(r^*, T_i - T) - \sum_{i=1}^{n} c_i \Phi(r_T, T_i - T))^+ \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i (\Phi(r^*, T_i - T) - \Phi(r_T, T_i - T))^+ \\
&= \sum_{i=1}^{n} c_i (K_i - \sum_{i=1}^{n} B(T, T_i))^+
\end{aligned}
$$

  avec $K_i := \Phi(r^*, T_i - T)$.

- On reconnait la somme pondérée (par les c_i) de n Puts de maturités T sur ZC d'échéance T_i et de strike K_i, $i = 1, \cdots, n$.

Correction exercice: put sur obligation

- Le prix en $t < T$ de cette option put sur obligation est

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \left(B(t,T)K_i\mathcal{N}(-d_1^i) - B(t,T_i)\mathcal{N}(-d_2^i)\right)$$

avec $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition d'une $N(0,1)$ et

$$d_{1,2}^i = \frac{\ln \frac{B(t,T_i)}{K_i B(t,T)} \pm \frac{1}{2}\int_t^T \|\Gamma(s,T,T_i)\|^2 ds}{\sqrt{\int_t^T \|\Gamma(s,T,T_i)\|^2 ds}}.$$

- Couverture avec des ZC de maturités $(T, T_1, \cdots, T_n)$.
- Remark : le pay-off d'une option put sur obligation est équivalent au pay-off d'une option basket sur un panier d'obligations ZC. On peut également montrer qu'il est équivalent au pay-off d'une swaption.

Généralisation : décomposition de Jamshidian

Même put que précédemment mais dans un modèle HJM

$$\Pi^{put,c_i}(t,T,K) = B(t,T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[(K - \sum_{i=1}^{n} c_i B_T(T,T_i))^+ | \mathcal{F}_t\right]$$

- Sous $\mathbb{Q}^T$:

$$B_t(T,T_i) = B_0(T,T_i)\,\mathcal{E}xp(Y_t^{T,T_i})$$

  avec $Y_t^{T,T_i} := \int_0^t \Gamma(u,T,T_i)dW_u^T$.
  - Dans un modèle HJM gaussien (Γ déterministe), Y_t^{T,T_i} est va gaussienne sous $\mathbb{Q}^T$
- **Sous hyp de volatilité séparable (H1)** : $\gamma(t,T) = \zeta(t)\psi(T)$

$$\Gamma(u,T,T_i) = \zeta(u)\int_T^{T_i}\psi(s)ds = \zeta(u)\Psi(T,T_i)$$

  et $Y_t^{T,T_i} = \Psi(T,T_i)\int_0^t \zeta(u)dW_u^T = \Psi(T,T_i)Y_t^T$, avec Y_t^T qui ne dépend pas de T_i.

Décomposition de Jamshidian (suite)

$$\Pi^{put,c_i}(t,T,K) = B(t,T)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^T}\left[(K - \sum_{i=1}^{n} c_i e^{\mu(T,T_i)+\Psi(T,T_i)Y_T^T})^+ | \mathcal{F}_t \right]$$

- L'intégrale ci-dessus est calculée par rapport à la loi de probabilité d'une seule variable aléatoire Y_T^T, ce qui réduit la dimension de l'intégration à 1.
- Cependant, la recherche du sous-ensemble sur lequel le payoff est non nulle est plus difficile à calculer (recours au numérique)

DÉCOMPOSITION DE JAMSHIDIAN (SUITE)

On fait l'hyp (H2) que $\Psi(T, T+\theta) < 0$ ie que les prix des ZC sont décroissants en le facteur Y_t^T

- c'est le cas par ex dans Vasicek car $\Psi^V(T, T+\theta) = \frac{\sigma}{a} e^{-aT}(e^{-a\theta} - 1)$
- Comme précédemment, $f : y \to \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu(T,T_i)+\Psi(T,T_i)y}$ est bijection continue décroissante de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}^+$: il existe un unique y^* tq $f(y^*) = K$
- Soit $K_i := c_i e^{\mu(T,T_i)+\Psi(T,T_i)y^*} = f_i(y^*)$, on a $\sum_{i=1}^n K_i = K$
- par décroissance des f_i et de f, $f_i(y) \leq K_i \Leftrightarrow f(y) \leq K \Leftrightarrow y \geq y^*$

$$\begin{aligned}
(K - \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu(T,T_i)+\Psi(T,T_i)y})^+ &= (K - \sum_{i=1}^n c_i e^{\mu(T,T_i)+\Psi(T,T_i)y})\mathbf{1}_{y \geq y^*} \\
&= \sum_{i=1}^n (K_i - c_i e^{\mu(T,T_i)+\Psi(T,T_i)y})\mathbf{1}_{y \geq y^*} \\
&= \sum_{i=1}^n (K_i - c_i e^{\mu(T,T_i)+\Psi(T,T_i)y})^+
\end{aligned}$$

- payoff est équivalent à une somme d'options put sur ZC de maturités T_i $\to$ formule explicite dans modèle HJM gaussien

Extension aux modèles de taux court affines

- Cette méthode peut être utilisée pour déterminer le prix des options sur les obligations à coupon /swaptions dans n'importe quel modèle où les prix des obligations s'écrivent sous la forme de fonctions croissantes/décroissantes d'un facteur commun.
- En particulier, cela est vrai pour tous les modèles où les prix des obligations sont exponentiel- affines d'un certain facteur commun, de sorte que l'hypothèse (H2) est vraie.
- Dans un modèle de taux courts affine :

$$B(t,T) = e^{m(t,T) - n(t,T) r_t}$$

avec m et n fonctions déterministes. La méthode de Jamshidian est alors valide dès que $n(t,T) > 0$ (ou bien $n(t,T) < 0$) pour tout $t < T$

Plan

Introduction au LMM

- L'idée principale du modèle de marché Libor est de modéliser directement les taux Libor à terme $L_t(T, T+\theta)$ - qui sont les taux sous-jacents pour les caps/floors -sous les mesures forward correspondantes.
- En supposant des volatilités déterministes, les prix des caplets/floorlets dans ce modèle sont donnés par la formule de Black, qui est la formule utilisée par les marchés (d'où le nom de "modèle de marché").
- Le modèle a été proposé pour la première fois dans les articles de Brace, Gatarek et Musiela (1997) (modèle BGM) et Miltersen, Sandmann et Sondermann (1997) fournit un cadre théorique justifiant l'utilisation de la formule de Black pour les prix des caplets/floorlets
- Caveat : Compte tenu de la réforme des taux interbancaires (Libor, Euribor et autres), les modèles existants sont en cours de révisions afin de tenir compte de la situation actuelle.

  Cf. A. Lyashenko et F. Mercurio (2019). Looking forward to backward-looking rates : A modeling framework for term rates replacing LIBOR. Preprint (disponible à l'adresse https://doi.org/10.2139/ssrn.3330240)

BLACK FORMULA

- On considère un caplet d'échéance $T_{k+1} = T_k + \theta_k$ et de strike K dont le payoff en T_{k+1} est :

$$\theta_k (L_{T_k}(T_k, T_{k+1}) - K)^+.$$

- En supposant que la dynamique des taux Libor est donnée par

$$dL_t(T_k, T_{k+1}) = L_t(T_k, T_{k+1})\sigma dW_t$$

sous "une" mesure de pricing, alors le caplet est pricé directement par la formule de Black

$$\pi^{caplet}(t, T_k, T_{k+1}) = \theta_k B(t, T_{k+1})(L_t(T_k, T_{k+1})\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2))$$

avec $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition d'une $N(0,1)$ et

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{L_t(T_k, T_{k+1}))}{K} \pm \frac{1}{2}\sigma^2(T_k - t)}{\sqrt{\sigma^2(T_k - t)}}.$$

- MAIS dans les modèles de taux d'intérêt gaussiens standard tels que Vasicek,HJM gaussien, l'hypothèse ci-dessus sur la dynamique du taux Libor à terme n'est pas satisfaite

Model LMM

- Dans le modèle LMM (avec des volatilités déterministes), les taux Libor à terme ont en effet une dynamique log-normale sous les mesures forward correspondantes et la formule de Black peut s'appliquer
- On commence par spécifier la dynamique du taux Libor le plus éloigné $L_t(T_{n-1}, T_n)$ sous $\mathbb{Q}^{T_n}$

$$dL_t(T_{n-1}, T_n) = L_t(T_{n-1}, T_n)\lambda(t, T_{n-1})dW_t^{T_n}$$

- Par Girsanov, le MB sous $\mathbb{Q}^{T_{n-1}}$ est

$$dW_t^{T_{n-1}} = dW_t^{T_n} - \ell(t, T_{n-1})\lambda(t, T_{n-1})dt$$

avec $\ell(t, T_{n-1}) = \frac{\theta_{n-1}L_t(T_{n-1},T_n)}{1+\theta_{n-1}L_t(T_{n-1},T_n)}$

Model LMM

- On itère la procédure
  - dynamique du taux Libor $L_t(T_k, T_{k+1})$ sous $\mathbb{Q}^{T_{k+1}}$

$$dL_t(T_k, T_{k+1}) = L_t(T_k, T_{k+1})\lambda(t, T_k)dW_t^{T_{k+1}}$$

  - avec le MB sous $\mathbb{Q}^{T_{k+1}}$

$$dW_t^{T_{k+1}} = dW_t^{T_n} - \sum_{i=k+1}^{n-1} \ell(t, T_i)\lambda(t, T_i)dt \text{ où } \ell(t, T_i) = \frac{\theta_i L_t(T_i, T_{i+1})}{1 + \theta_i L_t(T_i, T_{i+1})}$$

- La construction garantit que les ZC forward $B_t(T_k, T_j)$ sont des martingales sous $\mathbb{Q}^{T_k}$ (cf Lemma 11.2 in Filipovic (2009))
- Le prix d'un actif contingent de payoff X en T_k est alors donné par

$$B(t, T_k)\mathbb{E}^{\mathbb{Q}^{T_k}}[X|\mathcal{F}_t].$$

- Pricing du caplet directement par la formule de Black

$$\pi^{caplet}(t, T_k, T_{k+1}) = \theta_k B(t, T_{k+1})(L_t(T_k, T_{k+1})\mathcal{N}(d_1) - K\mathcal{N}(d_2))$$

$$d_{1,2} = \frac{\ln \frac{L_t(T_k, T_{k+1}))}{K} \pm \frac{1}{2}\int_t^{T_k} |\lambda(s, T_k)|^2 ds}{\sqrt{\int_t^{T_k} |\lambda(s, T_k)|^2 ds}}.$$