Compléments à voir comme des exercices

La diffusion du modèle SABR

Le modèle pour les taux forward

Le modèle "SABR" général étudié par Patrick Hagan s'écrit :

$$dL_t = \alpha_t C\left(L_t\right) dW_t^1, \quad d\alpha_t = \nu \alpha_t dW_t^2, \quad d\left\langle W^1, W^2 \right\rangle_t = \rho dt$$

Les paramètres

- La fonction $C(L_t)$ est souvent prise égale à L^β
- La volatilité est log-normale, de volatilité de la volatilité ν
- C'est la corrélation qui génère le smile

Deux types de volatilités implicites

La vol Black

$$\mathbb{E}^{Q_T}\left[(L_T - K)_+\right] = L_0 N\left(\frac{\ln\left(\frac{L_0}{K}\right) + \frac{\Sigma_B(K,T)^2}{2}T}{\Sigma_B(K,T)\sqrt{T}}\right)$$
$$-KN\left(\frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) - \frac{\Sigma_B(K,T)^2}{2}T}{\Sigma_B(K,T)\sqrt{T}}\right)$$

La vol Normale

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{Q_T}\left[(S_T - K)_+\right] &\simeq C_N\left(L_0, K, \Sigma_N(K,T), T\right) \\
&= (L_0 - K)\, N\left(\frac{L_0 - K}{\Sigma_N(K,T)\sqrt{T}}\right) \\
&+ \Sigma_N(K,T)\sqrt{T}\, N'_x\left(\frac{S_0 - K}{\Sigma_N(K,T)\sqrt{T}}\right)
\end{aligned}$$

P.Hagan Approximation du Smile

Smile Normal

$$\Sigma_N(T,K) = \frac{\alpha_0(L_0-K)}{\int_K^{L_0}\frac{dx}{C(x)}}\Big(\frac{\zeta}{\hat{x}(\zeta)}\Big)\{1+\Psi_N\}$$

$$\Psi_N = \left[\frac{2\gamma_2-\gamma_1^2}{24}\alpha_0^2C^2\left(f_{av}\right)+\frac{1}{4}\rho\nu\,\alpha_0\gamma_1 C(f_{av})+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right]T+..$$

Smile Black

$$\Sigma_B T,K) = \frac{\alpha_0\log(\frac{L_0}{K})}{\int_K^{L_0}\frac{dx}{C(x)}}\Big(\frac{\zeta}{\hat{x}(\zeta)}\Big)\,\{1+\Psi_B\}$$

$$\Psi_B = \left[\frac{2\gamma_2-\gamma_1^2+\frac{1}{f_{av}^2}}{24}\alpha_0^2C^2\left(f_{av}\right)+\frac{1}{4}\rho\nu\alpha_0\gamma_1 C\left(f_{av}\right)+\frac{2-3\rho^2}{24}\nu^2\right]T$$

P.Hagan Approximation du Smile

$$f_{av} = \sqrt{S_0 K}, \quad \gamma_1 = \frac{C'(f_{av})}{C(f_{av})}$$
$$\gamma_2 = \frac{C''(f_{av})}{C(f_{av})} \quad \zeta = \frac{\nu}{\alpha_0} \frac{L_0 - K}{C(f_{av})}$$
$$\hat{x}(\zeta) = \log\left(\frac{\sqrt{1 - 2\rho\zeta + \zeta^2} - \rho + \zeta}{1 - \rho}\right)$$

et cela marche

Espérance et anticipations dans les modèles gaussiens

Moins important en pratique.

Les 13 slides jusqu'à "correction de convexité" peuvent être sautés en première lecture

Exemples de fonctions de volatilité

Le cas unidimensionnel, pour les browniens

- **Volatilités de Vasicek et Ho et Lee**

$$\text{Vasicek} \quad \Gamma_V^a(t, t+\theta) = \sigma \frac{1 - e^{-a\theta}}{a}, \quad \theta \geq 0$$

La limite de cette fonction lorsque a tend vers 0 est la volatilité du modèle de Ho et Lee en temps continu, $\Gamma_{Ho.Lee}(t, t+\theta) = \sigma\theta$.

- L'une des propriétés remarquables de cette volatilité est que:

$$\Gamma_V^a(u, t+\theta) - \Gamma_V^a(u, t) = \Gamma_V^a(0, \theta) e^{-a(t-u)} \qquad (u \leq t).$$

La représentation des taux se simplifie

$$R(t, \theta) = R_0(t, \theta) + \Phi^a(t, \theta) - \Gamma_V^a(0, \theta) \int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u$$

$\Phi^a(t, \theta)$ est une fonction que l'on peut expliciter à partir des calculs précédents, mais nous verrons que c'est rarement nécessaire.

Exemple

Des tests empiriques faits à partir de prix d'OAT montrent que sur le marché français, des valeurs raisonnables de a sont entre $0,1$ et 2 et pour σ entre $0,8$ et 4.

- **Volatilité de CIR**

  La fonction de volatilité est une fonction du taux spot, définie sur $\mathbb{R}^+$ par

  $$\Gamma_{CIR}(t, t+\theta) = \sigma\sqrt{r_t}G(T-t)$$

  où G est une fonction, solution d'une certaine équation différentielle de type Ricatti. Dans cet exemple la fonction de volatilité est aléatoire.

- **Volatilité de type Vasicek vectoriel**

  Deux sources de bruit perturbent les prix. La fonction de volatilité est supposée de la forme

  $$\begin{aligned}\Gamma(u,t)_1 &= \frac{1-e^{-a(t-u)}}{a}\sigma_{11} + \frac{1-e^{-\alpha(t-u)}}{\alpha}\sigma_{21}\\ \Gamma(u,t)_2 &= \frac{1-e^{-a(t-u)}}{a}\sigma_{12} + \frac{1-e^{-\alpha(t-u)}}{\alpha}\sigma_{22}\end{aligned}$$

Par les mêmes calculs que précédemment, il vient

$$R(t,\theta) = F_0(t,\theta) + \widehat{\Phi}(t,\theta) - \frac{1-e^{-a\theta}}{a}[\int_0^t e^{-a(t-u)}\sigma_{11}dW_u^1 + \sigma_{12}dW_u^2]$$
$$-\frac{1-e^{-\alpha\theta}}{\alpha}[\int_0^t e^{-\alpha(t-u)}\sigma_{21}dW_u^1 + \sigma_{22}dW_u^2]$$

Analyse en termes de variance-covariance

Hyp: La volatilité des taux est déterministe, ainsi que le vecteur λ des primes de risque.

- Les prix des zéro-coupons ont une distribution **log-normale**
- Les taux des différentes maturités sont gaussiens.
- L'étude de la matrice de variance-covariance permet de quantifier le risque de taux et de préciser les corrélations entre les taux de diverses dates et de diverses maturités.
- Le rang de la matrice donne le nombre de liaisons affines existant entre des taux de diverses maturités.
- comme conséquence de l'arbitrage, nous voyons que les espérances se calculent uniquement à partir de la matrice de variance covariance des taux, des primes de risque et bien sûr des taux forwards lus sur la courbe des taux aujourd'hui.

Etudes des corrélations

La matrice de variance-covariance des taux de différentes dates et de différentes maturités est donnée par :

$$
\begin{aligned}
K_{t,s}(\theta, \tilde{\theta}) &= \operatorname{cov}(R(t,\theta), R(s,\tilde{\theta})) \\
&= \frac{1}{(\theta\tilde{\theta})} \int_0^{t\wedge s} [\Gamma(u, t+\theta) - \Gamma(u,t)][\Gamma(u, s+\tilde{\theta}) - \Gamma(u,s)]^* ds
\end{aligned}
$$

où $t \wedge s$ désigne le minimum de t et de s.

- Lorsque les primes de risque sont déterministes, les taux sont gaussiens dans l'univers historique comme dans l'univers risque-neutre. La matrice de variance-covariance est alors la même dans les deux univers.
- **Exemple:** La volatilité de Vasicek. Si $\Gamma_V(t, t+\theta) = \sigma \frac{1-e^{-a\theta}}{a}$,
  - tous les taux ont des parties aléatoires proportionnelles à une même variable gaussienne

$$\int_0^t e^{-a(t-u)} dW_u$$

- le coefficient de proportionnalité est $\sigma\frac{1-e^{-a\theta}}{a\theta}$.
- La variance var$[R(t,\theta)]$ est donnée par :

$$\mathrm{var}(R(t,\theta) = \sigma^2\left(\frac{1-e^{-a\theta}}{a\theta}\right)^2\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right)$$

- Les taux de même date de maturités différentes sont parfaitement corrélés.
- Les taux associés à des dates d'observation différentes sont corrélés de manière toujours positive,

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}[R(t,\theta),R(t+h,\tilde{\theta})] &= \sigma^2\left(\frac{1-e^{-a\theta}}{a\theta}\right)\left(\frac{1-e^{-a\tilde{\theta}}}{a\tilde{\theta}}\right)\times e^{-ah}\left(\frac{1-e^{-2at}}{2a}\right)\\ &= e^{-ah}\mathrm{cov}[R(t,\theta),R(t,\tilde{\theta})]\end{aligned}$$

Remarque: Ce n'est pas l'hypothèse d'un brownien unique faite dans cet exemple, qui implique que les taux sont complétement corrélés entre eux, mais le choix de la fonction de volatilité

- Si la fonction de volatilité est une fonction quadratique de la maturité restante,

$$\Gamma(t, t+\theta) = \sigma[(\theta-\alpha)^2 - \alpha^2] \quad \text{et donc } \gamma(t, t+\theta) = 2\sigma(\theta-\alpha)$$

et $|\Gamma(t,s)| = \mathrm{vol}(t,T)$

- Les corrélations des taux courts sont de

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}[r(t,\theta), r(t+h,\tilde{\theta})] &= \int_0^t \gamma(u, t+\theta)\gamma(u, t+h+\tilde{\theta})du \\ &= 4\sigma^2 \int_0^t (t+\theta-\alpha-u)(t+h+\tilde{\theta}-\alpha-u)du \\ &= 4\sigma^2[(\theta-\alpha)(\tilde{\theta}-\alpha)t + (\theta+\tilde{\theta}+h-2\alpha)\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{1}{3}t^3] \end{aligned}$$

- Les taux ne sont pas complétement corrélés et les covariances ne sont pas toujours positives si $\theta < \alpha < \tilde{\theta}$. En particulier, elles sont négatives pour t petit.

- Dans le cas d'un mouvement brownien vectoriel, il est aisé de trouver des structures de corrélations de cette forme. Pour des fonctions de volatilités bien choisies, on peut garder à la fois cette richesse dans les corrélations et une certaine facilité dans la mise en oeuvre.

Exemple: Volatilité de type Vasicek vectoriel

- Les taux sont maintenant des combinaisons affines de deux processus gaussiens de base, centrés et corrélés

$$\begin{array}{rcl} \widehat{Z}_t^1 & = & \int_0^t e^{-a(t-u)}\sigma_{11} d\widehat{W}_u^1 + \sigma_{12} d\widehat{W}_u^2 \\ \widehat{Z}_t^2 & = & \int_0^t e^{-\alpha(t-u)}\sigma_{21} d\widehat{W}_u^1 + \sigma_{22} d\widehat{W}_u^2 \\ \mathrm{Cov}[\widehat{Z}_t^1, \widehat{Z}_t^2] & = & \sigma_{11}\sigma_{21}A_{2a}(t) + \sigma_{12}\sigma_{22}A_{2\alpha}(t) \\ \text{où } A_a(t) & = & \frac{1-e^{-a\theta}}{a} \end{array}$$

- Comme la partie stochastique de $R(t,\theta)$ est $-A_a(t)\widehat{Z}_t^1 - -A_\alpha(t)\widehat{Z}_t^2$ la matrice de variance covariance des taux s'en déduit aisément.