硬解定理

一、椭圆

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ y=kx+m \end{cases} \Rightarrow \left(a^2k^2+b^2\right)x^2+2a^2kmx+a^2\left(m^2-b^2\right)=0$$

令 $A=a^2k^2+b^2$,则:

$$x_1+x_2=\frac{-2a^2km}{a^2k^2+b^2}=\frac{-2a^2km}{A}, x_1x_2=\frac{a^2\left(m^2-b^2\right)}{a^2k^2+b^2}=\frac{a^2\left(m^2-b^2\right)}{A}.$$

$$y_1+y_2=\frac{2b^2m}{a^2k^2+b^2}=\frac{2b^2m}{A}, y_1y_2=\frac{b^2\left(m^2-a^2k^2\right)}{a^2k^2+b^2}=\frac{b^2\left(m^2-a^2k^2\right)}{A}.$$

$$x_1y_2+x_2y_1=\frac{-2a^2b^2k}{a^2k^2+b^2}=\frac{-2a^2b^2k}{A}$$

$$\Delta=4a^2b^2\left(a^2k^2+b^2-m^2\right)=4a^2b^2\left(A-m^2\right)$$

$$|x_1-x_2|=\frac{2ab\sqrt{a^2k^2+b^2-m^2}}{a^2k^2+b^2}=\frac{\sqrt{\Delta}}{A}=\frac{2ab\sqrt{A-m^2}}{A}$$

$$\Delta>0 \Leftrightarrow a^2k^2+b^2-m^2>0 \Leftrightarrow A-m^2>0$$

交换上式中的a,b 可以得到焦点在 y 轴上的椭圆:

$$x_1+x_2=\frac{-2b^2km}{A}, x_1x_2=\frac{b^2\left(m^2-a^2\right)}{A}, |x_1-x_2|=\frac{2ab\sqrt{A-m^2}}{A}$$

$\Delta>0 \Leftrightarrow A-m^2>0$,其中 $A=a^2+b^2k^2$

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \\ x=my+t \end{cases} \Rightarrow \left(a^2+b^2m^2\right)y^2+2b^2mty+b^2\left(t^2-a^2\right)=0$$

令 $A=a^2+b^2m^2$,则:

$$y_1+y_2=\frac{-2b^2mt}{a^2+b^2m^2}=\frac{-2b^2mt}{A}, y_1y_2=\frac{b^2\left(t^2-a^2\right)}{a^2+b^2m^2}=\frac{b^2\left(t^2-a^2\right)}{A}$$

$$\Delta=4a^2b^2\left(a^2+b^2m^2-t^2\right)$$

$$|y_1-y_2|=\frac{2ab\sqrt{a^2+b^2m^2-t^2}}{a^2+b^2m^2}==\frac{2ab\sqrt{A-t^2}}{A}$$

$$\Delta>0 \Leftrightarrow a^2+b^2m^2-t^2>0 \Leftrightarrow A-t^2>0$$

交换上式中的a,b可以得到焦点在 y轴上的椭圆:

$$y_1+y_2=\frac{-2a^2mt}{A}, y_1y_2=\frac{a^2\left(t^2-b^2\right)}{A}, |y_1-y_2|=\frac{2ab\sqrt{A-t^2}}{A}$$

$\Delta>0 \Leftrightarrow A-t^2>0$ ，其中 $A=a^2m^2+b^2$

二、双曲线

焦点在 x 轴上的双曲线:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \\ x=my+t \end{cases} \Rightarrow \left(b^2-a^2k^2\right)x^2-2a^2kmx-a^2\left(b^2+m^2\right)=0$$

令 $A=b^2-a^2k^2$,则:

$$x_1+x_2=\frac{2a^2km}{b^2-a^2k^2}=\frac{2a^2km}{A}, x_1x_2=\frac{-a^2\left(b^2+m^2\right)}{b^2-a^2k^2}=\frac{-a^2\left(b^2+m^2\right)}{A}$$

$$|x_1-x_2|=\frac{2ab\sqrt{b^2-a^2k^2+m^2}}{b^2-a^2k^2}=\frac{2ab\sqrt{A+m^2}}{A}$$

$\Delta>0 \Leftrightarrow b^2-a^2k^2+m^2 \Leftrightarrow A+m^2>0$

用 $-b^2$ 代替 $a^2, -a^2$ 代替 b^2 可以得到焦点在 y 轴上的双曲线:

$$x_1+x_2=\frac{-2b^2km}{A}, x_1x_2=\frac{b^2\left(m^2-a^2\right)}{A}, |x_1-x_2|=\frac{2ab\sqrt{A+m^2}}{A}$$

$\Delta>0 \Leftrightarrow A+m^2>0$, 其中 $A=b^2k^2-a^2$