极值点偏移

一、对称构造法

1.已知函数$f(x)=e^x-ax+a$的两零点为x_1,x_2.

求证: $f'(\sqrt{x_1x_2})<0$

解: $f'(x)=e^x-a$ 易知$f'(x)$在$\mathbb{R}$上单调递增,且极值点为$x=lna$

则$f'(\sqrt{x_1x_2})<f'(\frac{x_1+x_2}{2})<f'(lna)=0$

即证$\frac{x_1+x_2}{2}<lna \Longleftrightarrow x_2<2lna-x_1$

即证$f(x_2)=f(x_1)<f(2lna-x_1)$

令$g(x)=f(x)-f(2lna-x)$ 易知$g'(x)>0$

故$g(x)<g(lna)=0$

证毕!

先翻译为极值点偏移(与极值点之间的关系)

2.已知函数$f(x)=x^2-4x+5-\frac{a}{e^x}$设$g(x)=e^xf(x)$.

当$m\geqslant 1$时,$g(x_1)+g(x_2)=2g(m)$ 且$x_1<m<x_2$ 求证: $x_1+x_2<2m$

解: $g'(x)=e^x(x-1)^2\geqslant 0$

$g(x_1)+g(x_2)=2g(m)\Longleftrightarrow g(x_1)-g(m)+g(x_2)-g(m)=0$

令$F(x)=g(x)-g(m)$ 则$F(x_1)+F(x_2)=0$

又$F'(x)=g'(x)=e^x(x-1)^2\geqslant 0$ 故$F(x)$在$\mathbb{R}$上单调递增

故$x_1+x_2<2m \Longleftrightarrow x_1<2m-x_2 \Longleftrightarrow F(2m-x_2)>F(x_1)=-F(x_2)$

令$G(x)=F(2m-x)+F(x)\ (x>m)$

则$G'(x)=e^{-x}\left[e^{2x}(x-1)^2-e^{2m}(-2m+x+1)^2\right]>0$

故$G(x)$在$(m,+\infty)$上单调递增

故$G(x)>G(m)=0$

证毕!

直接构造新函数与新极值点

二、比值(差值)换元

1.已知函数$f(x)=lnx-ax$有的两根为x_1,x_2,且$x_1<x_2$.

若不等式$e^{1+\lambda}<x_1x_2^{\lambda}\,(\lambda>0)$恒成立.求$\lambda$的取值范围

解: $e^{1+\lambda}<x_1x_2^{\lambda}\Longleftrightarrow 1+\lambda<lnx_1+\lambda lnx_2=a\left(x_1+\lambda x_2\right)\Longleftrightarrow a>\dfrac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$

由$\begin{cases}lnx_1-ax_1=0\\lnx_2-ax_2=0\end{cases}$ 得 $a=\dfrac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}$

故只证 $\dfrac{ln\frac{x_1}{x_2}}{x_1-x_2}>\dfrac{1+\lambda}{x_1+\lambda x_2}$

令 $t=\dfrac{x_1}{x_2}\in(0,1)$ 则 $lnt<\dfrac{(1+\lambda)\,(t-1)}{t+\lambda}$ 在$(0,1)$上恒成立,后端点效应即可.

作差后代入消参,转化为$\dfrac{x_1}{x_2}$的不等式

2.已知函数$f(x)=e^x-x^2-ax$有两个极值点x_1,x_2,且$x_1<x_2$.

求证: $e^{x_1}+e^{x_2}>4$

解: $f'(x)=e^x-2x-a$

由$f'(x_1)=f'(x_2)$ 得 $e^{x_1}-e^{x_2}=2\left(x_2-x_1\right)$

令 $t=x_2-x_1>0$ 则 $x_2=x_1+t$ 故 $e^{x_1}=\dfrac{2t}{e^t-1}$, $e^{x_2}=\dfrac{2te^t}{e^t-1}$

故只证 $2t\left(1+\dfrac{1}{e^t-1}\right)>4.$

后略.

作差后设参消去x_1与x_2,转化为x_1-x_2的不等式

三、极值点偏移的六种做法

例:已知函数$f(x)=e^x-ax$有两个零点x_1,x_2.

求证: $x_1+x_2>2$

解:法一:$f(x)=e^x-ax=0\Longleftrightarrow\dfrac{e^x}{x}=a$,令$\varphi(x)=\dfrac{e^x}{x}$

则$f(x_1)=f(x_2)=0\Longleftrightarrow\varphi(x_1)=\varphi(x_2),\varphi'(x)=\dfrac{(x-1)\,e^x}{x^2}$

因此$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,不妨设$0<x_1<1<x_2$

则$x_1+x_2>2\Longleftrightarrow x_2>2-x_1$,注意到$2-x_1>1\Longleftrightarrow\varphi(x_2)>\varphi(2-x_1)$

注意到$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)\Longleftrightarrow\varphi(x_1)>\varphi(2-x_1)$,其中$0<x_1<1$

令$g(x)=\varphi(x)-\varphi(2-x),(0<x<1)$

则$g'(x)=-\dfrac{4(x-1)^2e^x}{x^2(x-2)^2}<0$

所以$g(x)$在$(0,1)$上单调递减

故$g(x)>g(1)=0$

证毕!

法二: 由$\begin{cases}e^{x_1}=mx_1\\e^{x_2}=mx_2\end{cases}$ 取对数得: $\begin{cases}x_1=lnm+lnx_1\\x_2=lnm+lnx_2\end{cases}$ 作差得: $x_1-x_2=lnx_1-lnx_2$

由对数平均不等式:$\dfrac{x_1+x_2}{2}>\dfrac{x_1-x_2}{lnx_1-lnx_2}=1$,即$x_1+x_2>2$

法三: 由$\begin{cases}e^{x_1}=mx_1\\e^{x_2}=mx_2\end{cases}$ 分别相加,相减得 : $\begin{cases}m(x_1+x_2)=e^{x_1}+e^{x_2}\\m(x_1-x_2)=e^{x_1}-e^{x_2}\end{cases}$

不妨设$x_1>x_2$,联立上式消去m 得 :

$x_1+x_2=\dfrac{(x_1-x_2)(e^{x_1}+e^{x_2})}{e^{x_1}-e^{x_2}}=\dfrac{(x_1-x_2)(e^{x_1-x_2}+1)}{e^{x_1-x_2}-1}$

令$t=x_1-x_2>0$则$x_1+x_2=\dfrac{t(e^t+1)}{e^t-1}>2.$

其中运用不等式:当$t>0$时,$t>\dfrac{2(e^t-1)}{e^t+1}$.

法四: 不妨设$x_1 > x_2$,令$t = x_1 - x_2 > 0$

则 $x_1 = x_2 + t$,又$\dfrac{e_1^x}{x_1} = \dfrac{e_2^x}{x_2}$,联立,得: $\begin{cases} x_1 = \frac{te^t}{e^t-1} \\ x_2 = \frac{t}{e^t-1} \end{cases}$

故 $x_1 + x_2 = \dfrac{t(e^t+1)}{e^t-1} > 2$

法五: 不妨设$x_1 > x_2$,令$k = \dfrac{x_1}{x_2} > 1$

则$x_1 = kx_2$,又$\dfrac{e^{x_1}}{x_1} = \dfrac{e^{x_2}}{x_2}$,联立,得:$\begin{cases} x_1 = \frac{klnk}{k-1} \\ x_2 = \frac{lnk}{k-1} \end{cases}$

故$x_1 + x_2 = \dfrac{(k+1)lnk}{k-1} > 2.$

其中运用不等式:当$k > 1$时,$lnk > \dfrac{2(k-1)}{k+1} \Longleftrightarrow t > \dfrac{2(e^t-1)}{e^t+1}.$

法六: 先确定a的取值范围:

$f(x) = e^x - ax = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{e^x}{x} = a$

令$\varphi(x) = \dfrac{e^x}{x}, \varphi'(x) = \dfrac{e^x(x-1)}{x^2}$

故$\varphi(x)$在$(0,1)$上单调递减,在$(1,+\infty)$上单调递增,$\varphi(x)_{min} = \varphi(1) = e$

故$a > e, lna > 1.$

接下来证明:$x_1 + x_2 > 1 + lna$

$f(x) = e^x - ax = 0 \Longleftrightarrow e^x = ax$ 取对数得:$x = lna + lnx$,不妨设$0 < x_1 < 1 < x_2$

注意到$\begin{cases} lnx < \frac{2(x-1)}{x+1}(0 < x < 1) \\ lnx > \frac{2(x-1)}{x+1}(x > 1) \end{cases}$

故$x_1 = \ln a + \ln x_1 < \ln a + \dfrac{2(x_1-1)}{x_1+1} \Longleftrightarrow x_1^2 - (\ln a + 1)x_1 + (2 - \ln a) < 0$

同理有 $x_2^2 - (\ln a + 1)x_2 + (2 - \ln a) > 0$

作差得 $(x_1 + x_2)(x_1 - x_2) - (\ln a + 1)(x_1 - x_2) < 0$

又$x_1 - x_2 < 0$,故$x_1 + x_2 > 1 + \ln a > 2.$

四、补充

若极值点被放缩过

已知函数$f(x)=\ln x-ax\left(0<a<\dfrac{1}{e}\right)$.设$x_1,x_2\,(x_1<x_2)$是函数 $f(x)$ 的两个零点,

求证:$\dfrac{1}{\ln x_1^e}+\dfrac{1}{\ln x_2^e}>2a$.

虽然本题显然可以用比值换元轻松解决,但还是有必要探索一下它和标准偏移的关系.

把它换成两根之和大于二倍极值点的形式.

$\ln x_1=ax_1,\ln x_2=ax_2$

$\dfrac{1}{\ln x_1^e}+\dfrac{1}{\ln x_2^e}>2a\Longleftrightarrow\dfrac{1}{e\ln x_1}+\dfrac{1}{e\ln x_2}>2a\Longleftrightarrow\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>2a^2e$

令$t=\dfrac{1}{x}$,则$\ln t_1+\dfrac{1}{t_1}=\ln t_2+\dfrac{1}{t_2}=0$

令$F(t)=\ln t+\dfrac{1}{t}$,则$F'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{1}{t^2}=\dfrac{t-1}{t^2}$,令$F'(t)=0$则$t=1$.故$0<t_1<1<t_2$,

$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>2a^2e\Longleftrightarrow t_1+t_2>2a^2e$

又$a<\dfrac{1}{e}$,故只证$t_1+t_2>2a\Longleftrightarrow t_1>2a-t_2\Longleftrightarrow F\left(t_1\right)=F\left(t_2\right)<F\left(2a-t_2\right)$

后略.

原不等式还有以下变形:$\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}>\dfrac{2}{e}>2a^2e\Longleftrightarrow e\left(x_1+x_2\right)>2x_1x_2$

常规变形

已知函数$f(x)=e^x-ax+a$.设x_1,x_2是函数 $f(x)$ 的两个零点,

求证:$x_1+x_2>x_1x_2$

$x_1+x_2>x_1x_2\Longleftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)<0\Longleftrightarrow x_1x_2-(x_1+x_2)+1<1$

$\Longleftrightarrow\left(x_1-1\right)\left(x_2-1\right)<1$

令$t=x-1$.则$f(t)=e^{t+1}-at$.

故只证$t_1t_2<1$

后略.

对数-平均值不等式(A-L-G不等式)

对$\forall a,b>0,a\neq b$,有$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{lna-lnb}<\dfrac{a+b}{2}$.

它等价于 $\dfrac{2(x-1)}{x+1}<\ln x<\sqrt{x}-\sqrt{\dfrac{1}{x}}(x>1)$在该式中令$x=\dfrac{b}{a}$即可得到对数平均不等式.

(该式左边可以用来估值)

对数平均不等式的证明:

证明: (1)先证明右边. 不妨设$a>b$, $t=\dfrac{a}{b}>1$

$$\frac{a-b}{\ln a-\ln b}<\frac{a+b}{2}\Longleftrightarrow\frac{2(a-b)}{(a+b)}<\ln a-\ln b\Longleftrightarrow\ln\frac{a}{b}>\frac{2\left(\frac{a}{b}-1\right)}{\frac{a}{b}+1}\Longleftrightarrow\ln t>\frac{2(t-1)}{t+1}$$

令 $f(x)=\ln t-\dfrac{2(t-1)}{t+1},t>1$.则$f'(t)=\dfrac{1}{t}-\dfrac{4}{(t+1)^2}=\dfrac{(t-1)^2}{t(t+1)^2}>0$

所以$f(t)$在$(1,+\infty)$上单调递增,$f(t)>f(1)=0$,右边得证.

(2)再证明左边.不妨设 $a>b,m=\sqrt{\dfrac{a}{b}}>1$

$$\sqrt{ab}<\frac{a-b}{\ln a-\ln b}\Longleftrightarrow\ln a-\ln b<\frac{a-b}{\sqrt{ab}}\Longleftrightarrow\ln\frac{a}{b}<\frac{\frac{a}{b}-1}{\sqrt{\frac{a}{b}}}\Longleftrightarrow 2\ln m<\frac{m^2-1}{m}$$

令 $g(m)=2\ln m-\dfrac{m^2-1}{m},m>1$ 则 $g'(m)=\dfrac{2}{m}-\dfrac{m^2+1}{m^2}=\dfrac{-(m-1)^2}{m^2}<0$

所以$g(m)$在$(1,+\infty)$上单调递减,$g(m)<g(1)=0$,左边得证.

综上所述,对$\forall a,b>0,a\neq b$,有$\sqrt{ab}<\dfrac{a-b}{\ln a-\ln b}<\dfrac{a+b}{2}$.