# 函数零点探寻之极限放缩法

## 一、方法

在极限的情况下,保留对多项式影响最大的项,放缩除去其他项.

## 二、实例分析

1.(16年国I改编) $f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2$ 有两个零点,求 $a$ 取值范围.

**解:** 易知$a\leqslant 0$ 时,不符题意,且$a>0$ 时$f(1)=-e<0 f(2)=a>0$.

故只需寻找一个小于1的$x$,使$f(x)>0$.

观察该函数, $x\to-\infty$ 时, $(x-2)e^x\to 0$, $a(x-1)^2\to+\infty$ .

因此 $a(x-1)^2$ 对函数值产生主要影响,所以仅保留该项,放缩除去 $(x-2)e^x$ .

下面是完整答题步骤:

设 $y=(x-2)e^x$ , 则 $y'=(x-1)e^x$ , 故$x=1$ 时, $y$取最小值$-e$ 即 $y\geqslant -e$ .

故$f(x)=(x-2)e^x+a(x-1)^2>-e+a(x-1)^2$.

因为要和$a$ 相乘抵消，所以令 $x_0-1=\dfrac{-e}{\sqrt{a}}$ (这里分子取大点就行，无所谓)

即 $x_0=\dfrac{-e}{\sqrt{a}}+1<1$

故$f\left(x_0\right)>e^2-e>0$

**Q.E.D.**

2.(17年国I改编) $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x$.

当 $0<a<1$ 时，找到一个 $x$ ,使 $x>-lna$,且 $f(x)>0$.

**析:** 当 $x\to+\infty$ 时,起主要影响的是 $ae^{2x}$,故直接把其他项放缩成最简单的形式.

结尾的$x$把它变成 $e^x$,就能提出来一个 $e^x$ 从而合并同类项了.

**解:** $f(x)=ae^{2x}+(a-2)e^x-x>ae^{2x}+(a-2)e^x-e^x=e^x\left(ae^x+a-3\right)$.

令 $e^x\left(ae^x+a-3\right)=0$ ,得 $x=\ln\dfrac{3-a}{a}=\ln(3-a)-\ln a>-\ln a$

令 $x_0=\ln\dfrac{3-a}{a}$ ,则 $f\left(x_0\right)>0$

**Q.E.D.**

3. $f(x)=e^x-a(x+\cos x)-\dfrac{2x+1}{x+1},a>0.$

找到一个 $x_0\in(-1,0)$ ,使 $f\left(x_0\right)>0.$

**析:** 当$x\to -1$ 时, $-\dfrac{2x+1}{x+1}\to +\infty$,占主要影响，于是把其他的全部放缩掉.

**解:** $f(x)=e^x-a(x+\cos x)-\dfrac{2x+1}{x+1}>e^{-1}-a(x+1)-\dfrac{2x+1}{x+1}.$

而 $e^{-1}-a(x+1)-\dfrac{2x+1}{x+1}=e^{-1}+\dfrac{1-a(x+1)^2-2(x+1)}{x+1}.$

由于 $e^{-1}>0$ ,所以只需要 $\dfrac{1-a(x+1)^2-2(x+1)}{x+1}>0$

令 $1-a(x+1)^2-2(x+1)=0$ , 解得 $x=\dfrac{1+\sqrt{1+a}}{-a}-1$ 或 $x=\dfrac{1-\sqrt{1+a}}{-a}-1.$

显然 $-1<\dfrac{1-\sqrt{1+a}}{-a}-1<0$ ,所以令 $x_0=\dfrac{1-\sqrt{1+a}}{-a}-1$

则$f\left(x_0\right)>0$

**Q.E.D.**