邻域思想

一、结论

对于函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 (只要区间有一个端点可取到就行，此取闭区间是为了一次性说明) , 若有 $f(x) \geqslant g(x)$,且 $f(a)=g(a)$, 则有 $f'(x) \geqslant g'(x)$. 若有 $f(x) \geqslant g(x)$,且 $f(b)=g(b)$, 则有 $f'(x) \leqslant g'(x)$.

二、实例分析

1.已知函数 $f(x)=\dfrac{x}{ax+1}+\dfrac{1}{e^x}-1$($e$ 为自然对数的底数,a 为实数).

当 $x \geqslant 0$ 时, $f(x) \geqslant 0$. 求实数 a 的取值范围.

解: 法一 (洛必达法则) : 当$x \geqslant 0$时, $f(x)=\dfrac{x}{ax+1}+\dfrac{1}{e^x}-1 \geqslant 0$.

当$x=0$时, 左右两边都等于0, 此时不等式成立.

因此当$x>0$, $\dfrac{x}{ax+1} \geqslant 1-\dfrac{1}{e^x} \Rightarrow ax+1 \leqslant \dfrac{xe^x}{e^x-1}$.

分离参数,得: $a \leqslant \dfrac{xe^x-e^x+1}{x\left(e^x-1\right)}=\dfrac{e^x(x-1)+1}{x\left(e^x-1\right)}$,

注意到右侧函数在$x=0$处为“$\dfrac{0}{0}$”型的不定式,下面应用洛必达法则 :

$$a \leqslant \frac{e^x(x-1)+1}{x\left(e^x-1\right)}=\frac{xe^x}{e^x(x+1)-1}=\frac{e^x(x+1)}{e^x(x+2)}=\frac{1}{2}.$$

法二 (邻域思想) : 当$x \geqslant 0$时,

$$f(x)=\frac{x}{ax+1}+\frac{1}{e^x}-1 \geqslant 0 \Rightarrow \frac{x}{ax+1} \geqslant 1-\frac{1}{e^x},$$

当$x=0$时, 左右两边都等于0, 此时不等式成立

因此当$x \geqslant 0$, $\left(\dfrac{x}{ax+1}\right)' \geqslant \left(1-\dfrac{1}{e^x}\right)' \Rightarrow \dfrac{1}{(ax+1)^2} \geqslant \dfrac{1}{e^x} \Rightarrow e^{\frac{x}{2}} \geqslant ax+1$

当$x=1$时, 左右两边都等于0, 此时不等式成立

因此当$x \geqslant 0$, $\left(e^{\frac{x}{2}}\right)' \geqslant (ax+1)' \Rightarrow a \leqslant \left(\dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{2}\right)_{\min}=\dfrac{e^{\frac{0}{2}}}{2}=\dfrac{1}{2}$

由于上面法一、法二给出的都是a的上界,下面给出a的下界 :

由于$\dfrac{x}{ax+1} \geqslant 1-\dfrac{1}{e^x} \geqslant 0 \Rightarrow ax+1>0 \Rightarrow a>-\dfrac{1}{x}$.

因为 $\lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{x}=0$ 故$a \geqslant 0$.

综上所述, $a \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right]$.

我们可以注意到上面法一使用了洛必达法则两次,法二一样的对邻域思想也用了两次, 且使用洛必达法则时求的是当 $x\to 0$ 的极限, 邻域思想也是在 $x=0$的邻域内讨论. 由此我们不由得可以发现它们具有相关联的地方.

这里用(2017 全国二卷理)这题为例来说明:

2.(2017 全国二卷) 设函数$f(x)=\left(1-x^2\right)e^x$

当$x\geqslant 0$时, $f(x)\leqslant ax+1$,求实数a的取值范围.

解: 由于$f(x)\leqslant ax+1$在$x\geqslant 0$时恒成立,

当$x=0$时,左右两边都等于1,此时不等式成立.

因此当$x\geqslant 0,\ [f(x)]'\leqslant (ax+1)'$,即 : $f'(x)\leqslant a$.从而$a\geqslant\left(-x^2-2x+1\right)e^x$.

构造$g(x)=\left(-x^2-2x+1\right)e^x, g'(x)=\left(-x^2-4x-1\right)e^x$.

当$x>0$时, $g'(x)=\left(-x^2-4x-1\right)e^x<0$,

故$a\geqslant g(0)=1>g(x), x\in[0,+\infty)$,

故$a\in[1,+\infty)$.

在完全分离参数前,有当$x\geqslant 0,\ ax\geqslant(1-x^2)\,e^x-1$

我们知道在完全分离参数之后, “$\frac{0}{0}$” 型的极限是在当$x=0$ 时取得;同样,这里的取等条件也是 $x=0$.

洛必达法则对除式的分子分母分别求导,邻域思想对左侧右侧函数分别求导,依据求导的基本法则,参数(常数)a 可以提出来.

还有就是参数 a 后面的函数的正负,无论是在完全分离参数后使用洛必达法则，还是在未完全分参运用邻域思想,它对不等号的方向都有着直接的影响.由上述.我们可以知道，邻域思想是洛必达法则“$\frac{0}{0}$” 型未定式极限的一个特殊情形.

只不过邻域思想提供了一个更容易被人接受的“增长率”作为切入口.

更容易被理解以及实际的解题书写运用.

三、关于洛必达法则的使用

很多高中生都喜欢问,高考能不能用洛必达法则,会扣分吗?

对此我想说:用不用是你的事,用的有没有技巧性更是另一回事(如果能学会邻域思想，我觉得是可以完全取代高中范围对洛必达法则的需求的),至于扣分的问题,一旦你把那几个字写出来,我想是个老师看到都会扣分的,下面给出一种简易的证明方法(来自百度):

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)}{\lim_{x\to a}g(x)}=\frac{\lim_{x\to a}f(x)-f(a)}{\lim_{x\to a}g(x)-g(a)}=\frac{\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\lim_{x\to a}\frac{g(x)-g(a)}{x-a}}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

这里只是应用了导数的定义,没超纲.

另外要注意使用洛必达法则的前提以及失效的条件.