大学基础

Chevey

August 21, 2023

目录

第 1 章 集合与映射

1.1 集合的概念和运算

集合是数学最基本的一个概念，关于集合没有一个**严谨的**数学定义，只有一个描述性的说明.
集合中的元素具有: **确定性、互异性、无序性**
集合的主要表示方法: **列举法、描述法**
集合的类型: **有限集、无限集**

$\mathbb{Z}$ 表示所有整数全体组成的集合
$\mathbb{Q}$ 表示所有有理数全体组成的集合
$\mathbb{R}$ 表示所有实数全体组成的集合
$\mathbb{C}$ 表示所有复数全体组成的集合
$\mathbb{N}$ 表示所有自然数全体组成的集合

如果 B 是 A 的子集, 且存在 A 中的一个元素不属于 B, 则称 B 是 A 的**真子集**, 记作 $B \subset A$, .
如果 A 、B 两集合含有完全相同的元素，则称 A 与 B **相等**, 记作 $A = B$. 即 $\forall A \subseteq B$ 且 $B \subseteq A$.

差集 $A \backslash B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B\}$
补集 $B \subseteq A, B^C = A \backslash B$

交换律 $A \cap B = B \cap A$ ， $A \cup B = B \cup A$
结合律 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ ， $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
分配律 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ ， $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
德摩根律 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ ， $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

定义 1.1 (笛卡尔积)
集合 A 和 B 的笛卡尔积 $C = A \times B$ 表示所有有序对 (a, b) 的集合, 其中 $a \in A, b \in B$. 也就是

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ 且} b \in B\} \tag{1.1}$$

♣

注 $A \times B \neq B \times A$, $\quad A \times \phi = \phi$. $\quad$ 若 $A = C, B = D$ 则 $A \times B = C \times D$.
若 $A \times B = C \times D$ 则 $\frac{A}{C} = \frac{D}{B}$.

证明 $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$
先证 $A \times (B \cup C) \subseteq (A \times B) \cup (A \times C)$
$\forall (a, x) \in A \times (B \cup C), a \in A, x \in B \cup C$
当 $x \in B$ 时 $(a, x) \in A \times B$，当 $x \in C$ 时 $(a, x) \in A \times C$
即 $(a, x) \in (A \times B) \cup (A \times C)$
再证 $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$
$\forall (a, x) \in (A \times B) \cup (A \times C), (a, x) \in A \times B$或$(a, x) \in A \times C$
即 $a \in A, x \in B \cup C$, 所以 $(a, x) \in A \times (B \cup C)$.

练习 1.1 证明德摩根律 $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$ ， $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

解 设 $x \in (A \cap B)^c$, 则 $x \notin A \cap B$, 则 $x \notin A$ 或 $x \notin B$, 所以 $x \in A^c$ 或 $x \in B^c$, 即 $x \in A^c \cup B^c$, 故 $(A \cap B)^c \subseteq A^c \cup B^c$
设 $x \in A^c \cup B^c$, 则 $x \in A^c$ 或 $x \in B^c$, 则 $x \notin A$ 或 $x \notin$B , 所以 $x \notin A \cap B$, 即 $x \in (A \cap B)^c$, 故 $A^c \cup B^c \subseteq (A \cap B)^c$

综上 $(A\cap B)^c=A^c\cup B^c$

设 $x\in(A\cup B)^c$, 则 $x\notin A\cup B$, 则 $x\notin A$ 且 $x\notin B$, 所以 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$, 即 $x\in A^c\cap B^c$, 故 $(A\cup B)^c\subseteq A^c\cap B^c$ 设 $x\in A^c\cap B^c$, 则 $x\in A^c$ 且 $x\in B^c$, 则 $x\notin A$ 且 $x\notin B$, 所以 $x\notin A\cup B$, 即 $x\in(A\cup B)^c$, 故 $A^c\cap B^c\subseteq(A\cup B)^c$ 综上 $(A\cup B)^c=A^c\cap B^c$

练习 1.2 $A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$ 是否成立?

解 $x\in A\times(B\cap C)$

$\Leftrightarrow x=(a,b),a\in A,b\in B\cap C$

$\Leftrightarrow x=(a,b),a\in A,b\in B$ 且$b\in C$

$\Leftrightarrow x=(a,b)\in A\times B$ 且$x=(a,b)\in A\times C$

$\Leftrightarrow x\in(A\times B)\cap(A\times C)$.

1.2 映射的概念和运算

定义 1.2 (映射)

设 A,B 是非空集合, f 为一个对应法则, 若 f 对于 A 中每个元素 a, 都有 B 唯一一个确定的元素 b 与它对应, 则称 f 为 A 到 B 的一个映射, 记作 $f:A\to B$ 或 $A\xrightarrow{f}B$.

称 b 为 a 在 f 下的象, a 为 b 在 f 下的原象, 记作 $f(a)=b$ 或 $f:a\mapsto b$ ♣

注 称 A 为映射 f 的定义域.

称集合 $f(A)=\{f(a)\mid a\in A\}$ 为 A 在映射 f 下的象.

笔记 A 是一个集合, 定义 $1_A:1_A(a)=a,\forall a\in A$ 即 1_A 把 A 上的元素映射到它自身, 1_A 是一个映射, 称为 A 上的恒等映射或单位映射.

集合 A 到集合 A 上的映射不一定是恒等映射.

设 f 为 A 到 B 的一个映射, 定义 B 到 A 对应法则 g 为:$g(b)=a$

其中 a 为 b 在 f 下的原象, 则 g 不一定是 B 到 A 的映射。

定义 1.3 (映射相等)

设映射 $f:A\to B,g:A\to B$, 若对任意 $a\in A$, 有 $f(a)=g(a)$ 则称 f 与 g 相等, 记作 $f=g$。 ♣

定理 1.1

设 $f:A\to B$ 是映射, $X\subseteq A,Y\subseteq A$ 则有

$f(X\cup Y)=f(X)\cup f(Y);f(\mathrm{X}\cap\mathrm{Y})\subseteq f(X)\cap f(Y)$ ♡

定义 1.4 (映射的复合)

映射 $f:A\to B,g:B\to C$ 复合 (乘积) $g\circ f:A\to C$ 定义为 $(g\circ f)(a)=g(f(a)),a\in A$ ♣

注 (1) 对于任意映射 $f:A\to B$, 有 $1_B\circ f=f=f\circ 1_A$

(2) 设映射 $f:A\to B,g:B\to C,h:C\to D$ 有 $(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$

笔记 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},f(x)=x^2,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R},g(x)=1+x$, 则

$(g\circ f)(x)=g(f(x))=1+x^2,(f\circ g)(x)=f(g(x))=(1+x)^2$

注 设映射 $f:A\to B,g:B\to A$, 一般 $f\circ g\neq g\circ f$

1.3 映射的分类

设映射 $f : A \to B$

定义 1.5 (满射)

若 $f(A) = B$, 则称 f 是 A 到 B 的一个满射,
i.e. $\forall b \in B, \exists a \in A$, s.t. $f(a) = b$.

定义 1.6 (单射)

若 A 中不同元素的象也不同，则称 f 是 A 到 B 的一个单射,
i.e. $\forall a_1, a_2 \in A$, 若 $a_1 \neq a_2$, 则 $f(a_1) \neq f(a_2)$, (或 $\forall a_1, a_2 \in A$, 若 $f(a_1) = f(a_2)$, 则 $a_1 = a_2$).

定义 1.7 (双射)

若 f 既是单射，又是满射，则称 f 为双射，(或称 f 为 $1-1$ 对应)。

定理 1.2

设映射 $f : A \to B, g : B \to C$，则有
(1) 如果 $g \circ f$ 是满射，那么 g 也是满射;
(2) 如果 $g \circ f$ 是单射，那么 f 也是单射;
(3) 如果 g, f 都是双射，那么 $g \circ f$ 也是双射。

证明 (1) 任取 $c \in C$. 因为 $g \circ f$ 是满射, 所以 $\exists a \in A$, 使得 $(g \circ f)(a) = c$.
令 $f(a) = b$ 则 $b \in B$, 使得 $g(b) = (g \circ f)(a) = c$.
(2) 设 $a_1, a_2 \in A$, 且 $f(a_1) = f(a_2)$ 则 $(g \circ f)(a_1) = (g \circ f)(a_2)$
因为 $g \circ f$ 是单射, 则 $a_1 = a_2$.

定理 1.3

两个有限集之间存在 $1-1$ 对应的充要条件是它们所含元素的个数相同。

注 对于有限集 A 及其子集 B，若 $B \neq A$ (即 B 为 A 的真子集)，则 A、B 之间不可能存在 $1-1$ 对应; 但是对于无限集未必如此. (如:$A = \mathbb{Z}, B = 2\mathbb{Z}, g : g(n) = 2n$), g 是 $1-1$ 对应，但 $2\mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的真子集.

定义 1.8 (可逆映射)

设映射 $f : A \to B$，若有映射 $g : B \to A$，使得

$$g \circ f = 1_A, f \circ g = 1_B \tag{1.2}$$

则称 f 为可逆映射，g 为 f 的逆映射，记作 f^{-1}.

注 (1) 若 $f(a) = b$，则 $f^{-1}(b) = a$. (2) $1_A^{-1} = 1_A$.

定理 1.4

设 f 为映射，则有
(1) 映射 f 为可逆映射的充要条件是 f 为 $1-1$ 对应.
(2) 映射 f 的逆映射是唯一的.
(3) 若 f 为可逆映射，则 f^{-1} 也为可逆映射，且 $\left(f^{-1}\right)^{-1} = f$.

定义 1.9 (等势的集合)

如果存在两个集合 A 与 B 之间的双射, 则称 A 与 B 等势。

注 (1) $\mathbb{Z}$ 和 $2\mathbb{Z}$ 是等势的。

($f:\mathbb{Z}\to 2\mathbb{Z}, f(n)=2n$ 是双射)

(2) $\mathbb{R}^+$ 与集合 $S=(0,1)$ 是等势的。($S\subset\mathbb{R}^+$)

(可定义双射 $f:\mathbb{R}^+\to \mathrm{S}, f(x)=\frac{x}{1+x}$)

第 2 章 函数及其基本性质

2.1 函数的概念

定义 2.1 (函数)

设数集 $D \subseteq R$，则称映射 $f : D \to R$ 为定义在 D 上的函数，记作

$$y = f(x), \quad x \in D$$

其中 x 称为自变量，y 称为应变量，D 称为定义域.

♣

注 构成函数的三个基本要素为：定义域、值域和对应法则，遵守以下几点:

(1) 对每个 $x \in D$，按对应法则 f，总有唯一确定的值 y 与之对应.

(2) 对每个 $y \in f(X)$, y 的原像不一定是唯一的.

2.1.1 几个特殊函数

符号函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

取整函数

$$y = [x] = n \quad (n \le x < n+1, n \in \mathbb{Z})$$

Dirichlet 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in Q \\ 0, & x \in Q^c \end{cases}$$

由于有理数和无理数在实数集内是稠密的，**所以无法画出 Dirichlet 的图像**

2.1.2 函数的四则运算

给定两个函数 f, g，如果 $D = D_f \cap D_g \ne \varnothing$，则定义这两个函数的下列运算:

(1) 和差 $f \pm g \quad (f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), x \in D$

(2) 积 $f \cdot g \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x), x \in D$

(3) 商 $\frac{f}{g} \quad \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, x \in D \backslash \{x \mid g(x) = 0, x \in D\}$

定义 2.2 (复合函数)

设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 D_f，函数 $u = g(x)$ 的定义域为 D_g，且其值域 $R_g \subseteq D_f$，则由下式确定的函数 $y = f[g(x)], x \in D_g$ 称为函数 $u = g(x)$ 与函数 $y = f(u)$ 构成的复合函数，记为: $f \circ g$，即

$$(f \circ g)(x) = f[g(x)], x \in D_g$$

这里变量 u 称为中间变量.

♣

注 必须满足 $R_g \subseteq D_f$, 否则不能构成复合函数.

如: 1.$y = f(u) = \ln u$ 的定义域 $D_f = (0, +\infty), u = g(x) = -x^2$ 的值域为 $R_g = (-\infty, 0]$.

显然 $R_g \not\subset D_f$，故 g 与 f 不能构成复合函数.

2. $y=f(u)=\sqrt{u}$ 的定义域 $D_f=(0,+\infty), u=g(x)=1-x^2$ 的值域为 $R_g=(-\infty,1]$.
同样因为 $R_g \not\subset D_f, g$ 与 f 不能构成复合函数.

定义 2.3 (反函数)

设函数 $f: D \rightarrow f(D)$ 是单射，则它存在一新映射 $f^{-1}: f(D) \rightarrow D$，使对 $\forall y \in f(D)$，唯一的 $x \in D$，满足 $f^{-1}(y)=x$，其中 $x=f(y)$, 称此映射 f^{-1} 为 f 的反函数

注 $y=f(x)$ 的反函数是$x=f^{-1}(y)$
例如: 函数 $y=x^3, x \in R$ 是单射，其反函数为 $x=y^{\frac{1}{3}}, y \in R$

定义 2.4 (限制与延拓)

设函数 $f(x), x \in X_1$ 和 $g(x), x \in X_2$，满足 $X_1 \subset X_2$ 且 $f(x)=g(x)$，$x \in X_1$，则称 $f(x)$ 是 $g(x)$ 在 X_1 上的限制，而 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 X_2 上的延拓.

注 已知 $f(x), x \in(0,+\infty)$，若 $g(x)=\begin{cases} f(x), x \in(0,+\infty) \\ -f(-x), x \in(-\infty, 0)\end{cases}$ 由定义，$f(x)$ 是 $g(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上的限制，而 $g(x)$ 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的延拓。因为 $g(x)$ 是奇函数，所以称此延拓为奇延拓；如果是偶函数，则称为偶延拓.

2.2 函数的性质

函数的基本特性有: 有界性、单调性、奇偶性、周期性及凹凸性

2.2.1 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，数集 $X \subseteq D$，对任一 $x \in X$，如果都
存在数 K_1，使得 $f(x) \leq K_1$，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有上界，K_1 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个上界。
存在数 K_2, 使得 $f(x) \geq K_2$，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有下界 K_2 称为函数 $f(x)$ 在 X 上的一个下界。
上、下界不唯一。如 $\sin x \leq 1<2$, 那么 1 和 2 都是上界

注 如果对任一 $x \in X$，都存在正数 M，使得 $|f(x)| \leq M$，那么称函数 $f(x)$ 在 X 上有界。
如果这样的 M 不存在，则称 $f(x)$ 在 X 上无界。
即如果对于任何正数 M，总存在 $x_1 \in X$，使 $\left|f\left(x_1\right)\right|>M$，那么称 $f(x)$ 在 X 上无界。

定理 2.1

函数 $f(x)$ 在 X 上有界当且仅当它在 X 上既有上界又有下界。

证明 $\Rightarrow f(x)$ 在 X 上有界，即 $\forall x \in X, \exists M>0$，成立 $|f(x)| \leq M$
上式等价于 $-M \leq f(x) \leq M$
$\therefore f(x)$ 在 X 上既有上界 (M) 又有下界 $(-M)$
$\Leftarrow f(x)$ 在 X 上既有上界又有下界，
即 $\forall x \in X, \exists K_1, K_2$，成立 $K_2 \leq f(x) \leq K_1$.
取 $M=\max \left\{\left|K_1\right|,\left|K_2\right|\right\}$，有 $-M \leq K_2 \leq f(x) \leq K_1 \leq M$
即 $|f(x)| \leq M$
$\therefore f(x)$ 在 X 上有界

注 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$

在 $(0,1)$ 内：由 $\frac{1}{x}>1$，可知有下界

$$但 \because \forall M>0，总存在 x=\frac{1}{M+1}，有 \frac{1}{x}=M+1>M$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{x} 在 (0,1) 内没有上界。$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{x} 在 (0,1) 内无界。$$

在 $(1,2)$ 内: $\because \left|\frac{1}{x}\right|\leq 1$ $\therefore f(x)=\frac{1}{x}$ 在 $(1,2)$ 内有界。

函数的有界性一定要关注到区间

2.2.2 单调性

单调函数必存在反函数，且反函数的单调性与原函数的单调性相同。

若函数 $y=f(u)$ 在 D 上单调递减，$u=g(x)$ 在 I 上单调递增且 $R(g)\subseteq D$, 则 $y=f(g(x))$ 在 I 上单调递减.

2.2.3 凹凸性

设 $f(x)$ 在区间 I 上连续，如果对于 I 上任意两点 x_1,x_2 恒有:

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 称 $f(x)$ 为 I 上的凹函数。

$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$, 称 $f(x)$ 为 I 上的凸函数。

2.2.4 奇偶性

设函数 $f(x)$ 的定义域 D 关于原点对称，如果对于任一 $x\in D$，

$f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为偶函数.

$f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数.

证明 定义在 $(-l,l)$ 上的任意函数 $f(x)$ 一定可以表示成定义在 $(-l,l)$ 上的一个奇函数与一个偶函数之和。

假设已经找到这两个函数：奇函数是 $g(x)$ 、偶函数是 $h(x)$

$$\begin{cases} f(x)=h(x)+g(x) \\ f(-x)=h(-x)+g(-x)=h(x)-g(x) \end{cases}$$

求解上面方程组，得

$$h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

取 $h(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}$ $g(x)=\frac{f(x)-f(-x)}{2}$ 容易得 $h(x)$ 是偶函数，$g(x)$ 是奇函数，

且 $h(x)+g(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2}=f(x)$

证毕.

2.2.5 周期性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果存在一个正数 l，

使得对于 $\forall x\in D$ 有 $(x\pm l)\in D$ 且 $f(x+l)=f(x)$ 成立，那么 $f(x)$ 为周期函数，l 称为 $f(x)$ 的一个周期。

周期函数不一定存在最小周期。

两个周期函数之和不一定是周期函数。

周期函数的定义域不一定为 $\mathbb{R}$

如 Dirichlet 函数: $D(x)=\begin{cases}1, & x\in Q\\ 0, & x\in Q^c\end{cases}$

$l\in Q$：当 $x\in Q(x+l)\in Q$ ， $f(x+l)=1=f(x)$

当 $x\in Q^c(x+l)\in Q^c$ $f(x+l)=0=f(x)$

$\therefore$ 任意有理数 l 为 Dirichlet 函数的周期

$l\in Q^c$ $\because$ 无理数与无理数的和差可能为有理数也有可能为无理数，

$\therefore f(x+l)$ 不一定等于 $f(x)$，故不是周期。

因为没有最小正有理数，所以此函数没有最小正周期。

2.3 初等函数

在中学数学中，已经讲过以下几类函数，它们称为基本初等函数.

常值函数 $y=c$ (c 为实数)

幂函数 $y=x^{\alpha}(\alpha\neq 0)$

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq 1)$

对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq 1)$ (特别当 $a=e$ 时，记为 $y=\ln x$)

正弦函数 $y=\sin x$

余弦函数 $y=\cos x$

正切函数 $y=\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

余切函数 $y=\cot x=\frac{\cos x}{\sin x}=\frac{1}{\tan x}$

正割函数 $y=\sec x=\frac{1}{\cos x}$

余割函数 $y=\csc x=\frac{1}{\sin x}4$

反正弦函数 $y=\arcsin x$

反余弦函数 $y=\arccos x$

反正切函数 $y=\arctan x$

反余切函数 $y=\operatorname{arccot} x$

反正割函数 $y=\operatorname{arcsec} x$

反余割函数 $y=\operatorname{arccsc} x$

$$x^n-y^n=(x-y)\left(x^{n-1}+x^{n-2}y+\cdots+xy^{n-2}+y^{n-1}\right)$$

第 3 章 三角公式

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\sec^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} = \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

二倍角公式　$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

倍角公式　$(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha$

三倍角公式　$\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$

积化和差公式

$$\begin{aligned}
\sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)] \\
\cos\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)] \\
\cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) + \cos(\alpha-\beta)] \\
\sin\alpha\sin\beta &= -\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta) - \cos(\alpha-\beta)]
\end{aligned}$$

和差化积公式

$$\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2} \\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} \\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}$$

万能公式

$$\sin\alpha = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\tan\alpha = \tan\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$proof: \sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{1}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{\sec^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$proof: \cos\alpha = \cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}} = \frac{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} - \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{\alpha}{2} + \sin^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$$

第 4 章 反三角函数

反三角函数是指三角函数的反函数。具体而言，它们是正弦余弦、正切、余切、正割、余割的逆函数。

4.1 反正弦函数与反余弦函数

定义 4.1 (反正弦函数)

在区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上研究正弦函数 $y = \sin(x)$ 的反函数：对于任意的 $y \in [-1, 1]$，都在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 上存在唯一的 x 使得它的正弦值等于 y, 记为 $x = \arcsin(y)(-1 \leq y \leq 1)$。

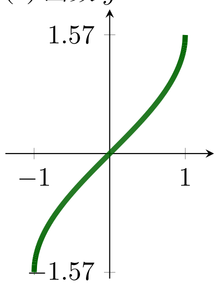
由于书写的习惯，通常用 x 表示自变量。因此，正弦函数在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 的反函数为: $y = \arcsin(x), x \in [-1, 1]$ ♣

反正弦函数 $y = \arcsin(x)$ 具有下述基本性质:

(1) 反正弦函数的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$。

(2) 在区间 $[-1, 1]$ 上，$y = \arcsin(x)$ 单调递增。

(3) 函数 $y = \arcsin(x)$ 是奇函数。



定义 4.2 (反余弦函数)

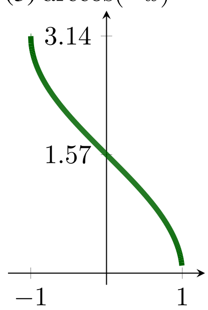
在区间 $[0, \pi]$ 上研究余弦函数 $y = \cos(x)$ 的反函数：对于任意的 $y \in [-1, 1]$, 都在闭区间 $[0, \pi]$ 上存在唯一的 x，使得它的余弦值等于 y，记为 $x = \arccos(y)(-1 \leq y \leq 1)$, 通常写作: $y = \arccos(x)(-1 \leq x \leq 1)$ ♣

反余弦函数 $y = \arccos(x)$ 具有下述基本性质:

(1) 反余弦函数的定义域为 $[-1, 1]$, 值域为 $[0, \pi]$。

(2) 在区间 $[-1, 1]$ 上，$y = \arccos(x)$ 单调递减。

(3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos(x)$



4.2 反正切函数与反余弦函数

定义 4.3 (反余切函数)

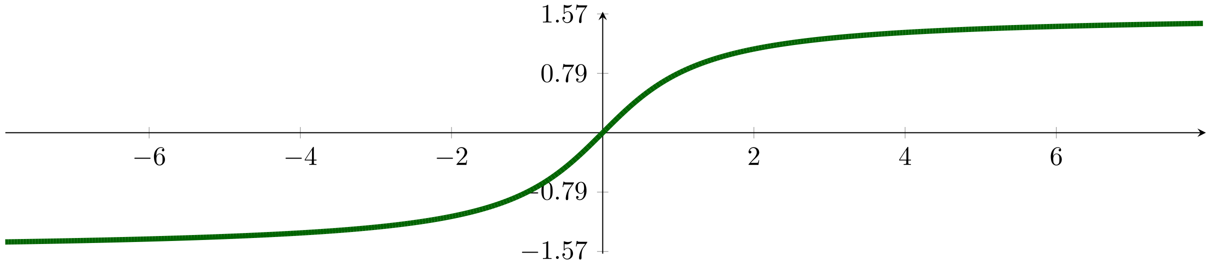
在区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上研究正切函数 $y=\tan(x)$ 的反函数：对任意的 $y \in R$, 都在开区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上存在唯一的 x, 使得它的正切值等于 y , 记为 $x=\arctan(y), y \in R$ 。通常写作: $y=\arctan(x), x \in R$ ♣

反正切函数 $y=\arctan(x)$ 具有下述基本性质:

(1) 反正切函数 $y=\arctan(x)$ 的定义域为 R, 值域为 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 。

(2) 在区间 R 上，$y=\arctan(x)$ 单调递增。

(3) 函数 $y=\arctan(x)$ 是奇函数。



定义 4.4 (反余切函数)

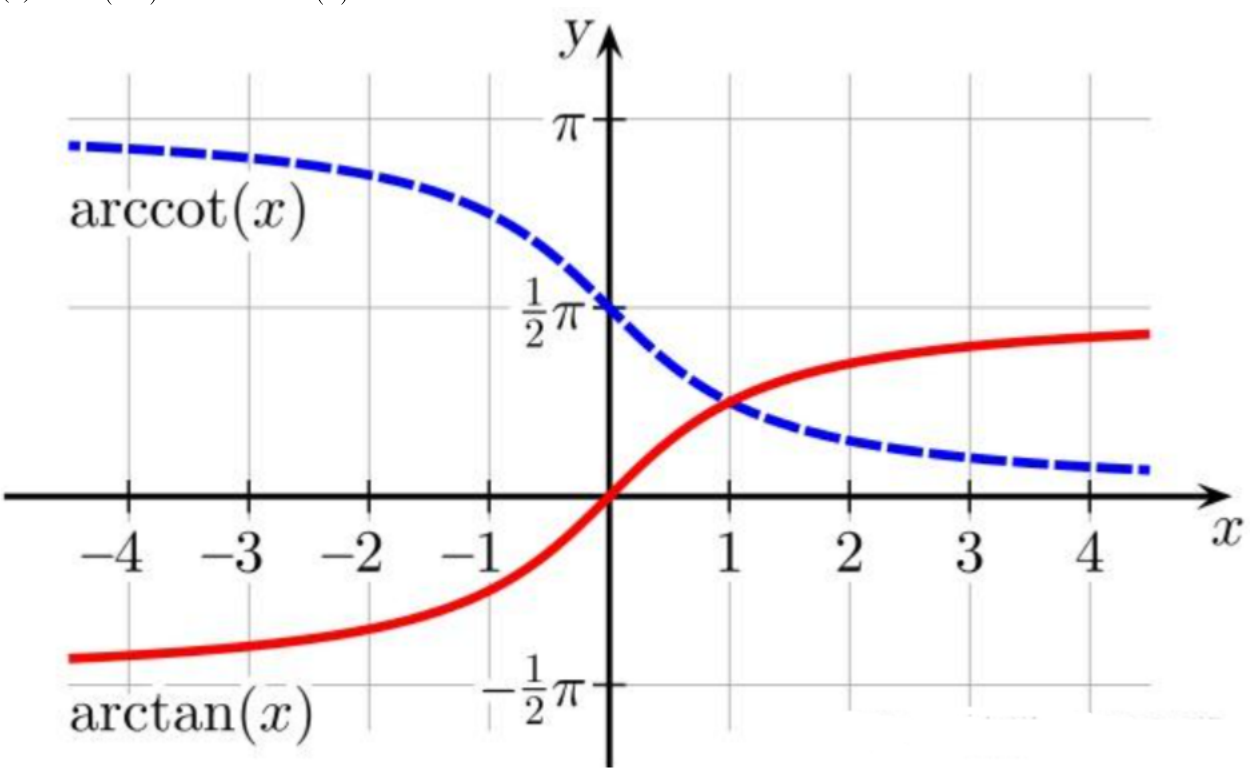
在区间 $(0, \pi)$ 上研究余切函数 $y=\cot(x)$ 的反函数：对任意的 $y \in R$, 都在开区间 $(0, \pi)$ 上存在唯一的 x , 使得它的余切值等于 y ， 记为 $x=\operatorname{arccot}(y), y \in R$ 。通常写作: $y=\operatorname{arccot}(x), x \in R$ ♣

反余切函数 $y=\operatorname{arccot}(x)$ 具有下述基本性质:

(1) 反余切函数 $y=\operatorname{arccot}(x)$ 的定义域为 R, 值域为 $(0, \pi)$ 。

(2) 在区间 R 上，$y=\operatorname{arccot}(x)$ 单调递减。

(3)$\operatorname{arccot}(-x)=\pi-\operatorname{arccot}(x)$



4.3 反三角函数的相关定理与性质

余角定理

$$\arcsin(x)+\arccos(x)=\frac{\pi}{2}$$
$$\arctan(x)+\operatorname{arccot}(x)=\frac{\pi}{2}$$
$$\operatorname{arcsec}(x)+\operatorname{arccsc}(x)=\frac{\pi}{2}$$

反正弦函数与三角函数之间的关系

$$\sin(\arcsin(x))=x$$
$$\cos(\arcsin(x))=\sqrt{1-x^2}$$
$$\tan(\arcsin(x))=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

反余弦函数与三角函数之间的关系

$$\sin(\arccos(x))=\sqrt{1-x^2}$$
$$\cos(\arccos(x))=x$$
$$\tan(\arccos(x))=\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$$

反正切函数与三角函数之间的关系

$$\sin(\arctan(x))=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\cos(\arctan(x))=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\tan(\arctan(x))=x$$

反余切函数与三角函数之间的关系

$$\sin(\operatorname{arccot}(x))=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\cos(\operatorname{arccot}(x))=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$
$$\tan(\operatorname{arccot}(x))=\frac{1}{x}$$

反正割函数与三角函数之间的关系

$$\sin(\operatorname{arcsec}(x))=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$
$$\cos(\operatorname{arcsec}(x))=\frac{1}{x}$$
$$\tan(\operatorname{arcsec}(x))=\sqrt{x^2-1}$$

反余割函数与三角函数之间的关系

$$\sin(\operatorname{arccsc}(x))=\frac{1}{x}$$
$$\cos(\operatorname{arccsc}(x))=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$$
$$\tan(\operatorname{arccsc}(x))=\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

第 5 章 极坐标与参数方程

5.1 极坐标

定义 5.1 (极坐标)

在平面上取一个定点 O,，条从顶点出发的射线 OX 、一个长度单位以及一个计算角度的正方向（一般取逆时针方向为正方向），所有这些合称一个极坐标系。

平面上任意一点 M 的位置可以由 OM 的长度 r 和 OX 到 OM 的角度 θ 来刻画。这个数对 (r, θ) 称为点 M 在这个极坐标系中的极坐标。通常，我们称 r 为极径坐标，θ 为角坐标，O 为极点，OX 为极轴。 ♣

注 点 M 的极径坐标 r 总是一个非负数。当 $r=0$ 时，点 M 就与极点 O 重合，所以极点的特点是 $r=0$ 。

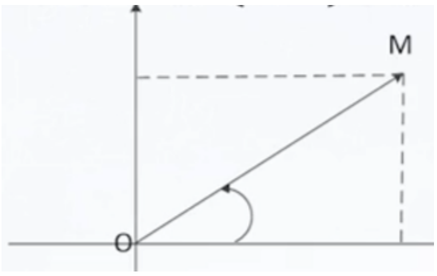
由于绕极点 O 按逆时针方向旋转一周的角度为 2π，因此在极坐标中 (r, θ) 与 $(r, \theta+2k\pi)$ 代表同一个点。由此可见，**平面上的点与它的极坐标不是一对一的关系**。

如果 M 不是极点 O，则当我们限定 $\theta \in (-\pi, \pi]$ 时，θ 就被 M 唯一确定。如果极径坐标相同，则点 M 也被 θ 唯一确定。

5.1.1 极坐标与直角坐标的关系

设在平面上已经建立了一个直角坐标系，我们按照如下方式定义一个极坐标系: 取 x 轴的右半轴为极轴，原点 O 为极点，y 轴上半轴为 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 的射线。

平面上的任意一点 M 的直角坐标 (x, y) 与极坐标 (r, θ) 之间有下列关系: $\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \end{cases}$



从直角坐标 (x, y) 变换到极坐标 (r, θ) 的换算关系如下:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$

$$\theta=\begin{cases} \arctan\frac{y}{x}, & x>0 \\ \arctan\frac{y}{x}+\pi, & x<0, y\geq 0 \\ \arctan\frac{y}{x}-\pi, & x<0, y<0 \\ \frac{\pi}{2}, & x=0, y>0 \\ -\frac{\pi}{2}, & x=0, y<0 \\ 0, & x=0, y=0 \end{cases}$$

5.1.2 平面曲线的极坐标方程

设给定平面上的一个极坐标系，设有方程 $F(r, \theta)=0$，如果平面曲线 Γ 上每个点的极坐标 (r, θ) 都满足方程 $F(r, \theta)=0$，且极坐标 (r, θ) 满足方程 $F(r, \theta)=0$ 的点都在曲线 Γ 上，则称 $F(r, \theta)=0$ 为曲线 Γ 的极坐标方程。

5.1.3 常见的几种极坐标方程

直线的极坐标方程，设极点 O 到平面上一条直线 L 的距离为 d，过极点 O 并与这条直线垂直的直线与极轴所成的角为 α

$$r\cos(\alpha-\theta)=d$$

特殊情况，过极点 O 且倾斜角为 α 的射线方程可以表示为:

$$\theta=\alpha$$

在极坐标系中，圆心在 (r_0,α) 半径为 R 的圆的一般方程为:

$$r^2-2rr_0\cos(\theta-\alpha)+r_0^2=R^2$$

特殊情况，其圆心与极点重合时，圆的极坐标方程为:

$$r=R$$

圆极坐标方程的推导过程

设圆的半径为 R, 圆心的极坐标为 (r_0,α) ，将其变化为直角坐标为 $(r_0\cos\alpha,r_0\sin\alpha)$ 。圆上的点的直角坐标系方程为:

$$(x-r_0\cos\alpha)^2+(y-r_0\sin\alpha)^2=R^2$$

设圆上点的极坐标为 (r,θ), 则 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$

$$r^2-2rr_0(\sin\theta\sin\alpha+\cos\theta\cos\alpha)+r_0^2=R^2$$

隐若设圆雉曲线的焦点为 F ，准线为 l ，离心率为 e ，设过焦点 F 且垂直于准线 l 的直线为 FN 。取焦点 F 为极点，极轴与直线 Fx 重合。若设 M_0 是过焦点 F 且平行于准线 l 的直线与圆锥曲线的交点，记 l_0 为 FM_0 的长度，l_0 称为圆锥曲线的焦参数或半正焦弦，则该圆雉曲线的极坐标方程为:

$$\rho=\frac{l_0}{1-e\cos\theta}$$

5.2 参数方程

设 a,b 为两个实数 $(b>a\geq 0)$ ，又设一质点的运动规律为:

$$\begin{cases} x=f(t) \\ y=g(t) \end{cases},t\in[a,b]$$

其中，f 与 g 都是时间变量 t 的函数。对每一时刻 t ，上式得到一数对 (x,y) ，点 $M(x,y)$ 就是质点在时刻 t 的位置。

定义 5.2 (参数方程)

设在平面上定义一个直角坐标系，将平面曲线 Γ 上点 M 的横坐标 x 和纵坐标 y 都表示成变量 t 的函数表达式。如果对于 $t\in[a,b]$ 的每一个值所确定的点 $M(x,y)$ 都在曲线 Γ 上，而且曲线 Γ 上的每一点都可以由 t 的某个值 t_0 代入而获得，则称上式为平面曲线 Γ 的参数方程。♣

5.2.1 常见平面曲线的参数方程

平面直线方程: 通过已知点 (x_0,y_0), 且方向向量为 (l,m) 的直线参数方程为:

$$\begin{cases} x=x_0+l\times t \\ y=y_0+m\times t \end{cases},t\in\mathbb{R}$$

圆的参数方程: 圆心为 (x_0, y_0) ，半径为 R 的圆形参数方程为:

$$\begin{cases} x = x_0 + R \times \cos(t) \\ y = y_0 + R \times \sin(t) \end{cases}, t \in [0, 2\pi]$$

椭圆的参数方程

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1 \Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + a \times \cos(t) \\ y = y_0 + b \times \sin(t) \end{cases}$$

第 6 章 线性方程组求解

形如

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

称为 n 元线性方程组。

定义 6.1 (二阶行列式)

定义由四个数排成二行二列（横排称行、竖排称列）的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$$

对应的数值 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$ 称为数表 $\begin{smallmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{smallmatrix}$ 的二阶行列式，并记作 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 即

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

♣

记

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}$$

当 $D \neq 0$ 时, 有唯一的解

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 \end{cases}$$

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{D_1}{D} \quad x_2 = \frac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} = \frac{D_2}{D}$$

定义 6.2 (三阶行列式)

$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ 称为数表 $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$ 所确定的三阶行列式.

♣

记 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3; \end{cases} \quad D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

$$\text{则三元线性方程组的解为: } x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

对线性方程组进行消元即对增广矩阵作初等行变换

(1) 交换两行;

(2) 把某一行的倍数加到另一行上;

(3) 某一行乘以一个非零常数。

第 7 章 复数与向量

7.1 复数与平面向量

定义 7.1 (复数)

形如 $z=x+iy(x,y\in R)$ 的数称为复数。

这里 i 是一个符号，称为虚数单位

x 称为 z 的实部，记为 $Re(z)$ y 称为 z 的虚部，记为 $Im(z)$ ♣

复数的全体所组成的集合称为复数集，记为 $C=\{x+iy\mid x,y\in R\}$

$i^2=-1$

当 $Im(z)=0$ 时，复数 $z=x+i0=x$，即此时复数 z 是实数，由此我们得出 $R\subset C$

当 $Re(z)=0$ 时，复数 $z=0+iy=iy$，此时称复数 z 为纯虚数

当 $Re(z)=Im(z)=0$ 时，复数 $z=0$

当 $Re(z)=a, Im(z)=1$ 时，复数 $z=a+i$

对于任意的两个复数 $z_1,z_2,z_1=z_2$ 当且仅当 $Re(z_1)=Re(z_2), Im(z_1)=Im(z_2)$

性质 共轭复数的性质

1. $\overline{\overline{z}}=z$. 特别地，实数的共轭复数是其本身；反之，如果 $z=\overline{z}$，则复数 z 为实数.
2. $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$; $\quad\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$; $\quad\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
3. $z\cdot\overline{z}=[Re(z)]^2+[Im(z)]^2$
4. $z+\overline{z}=2Re(z),\quad z-\overline{z}=2iIm(z)$

$z\cdot\overline{z}=x^2+y^2=|z|^2$

复数 ∞ 的模为 $+\infty$

包括 ∞ 的复平面称为扩充复平面，记为 $\bar{C}$

证明 $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2\left(|z_1|^2+|z_2|^2\right)$

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1+z_2}\right)\quad=(z_1+z_2)\left(\overline{z_1}+\overline{z_2}\right)\\&=z_1\overline{z_1}+z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2+z_2\overline{z_2}\\&=|z_1|^2+|z_2|^2+\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)\end{aligned}$$

同理

$$|z_1-z_2|^2=|z_1|^2+|z_2|^2-\left(z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2\right)$$

两式相加，得

$$|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$$

证毕

$z\neq 0$ 时，以正实轴为始边，以表示 z 的向量 $\overrightarrow{OP}$ 为终边的角的弧度数 θ 称为 z 的辐角，记作 $Argz=\theta$

由定义有:

1. $\tan(Argz)=\frac{y}{x}$

2. 任何一个复数 $z\neq 0$ 有无穷多个辐角，相互之间相差 2π 的整数倍我们把取值在 $(-\pi,\pi]$ 的辐角称为辐角主值，记为 $\arg z$. 那么有: $Argz=argz+2k\pi, k$ 为任意整数

3. 特别地，规定复数零的辐角是任意的；∞ 的辐角无意义

7.1.1 复数的三角表示式及指数表示式

利用直角坐标和极坐标的关系:

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

复数 z 可以表示为 (三角表示式):

$$z = x + iy = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

再由欧拉 (Euler) 公式:

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

复数 z 又可以表示为 (指数表示式):

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta) = re^{i\theta}$$

7.1.2 欧拉公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

上面那个欧拉公式建立了三角函数与指数函数之间的联系，

从而所有的三角函数问题都可以转化为指数函数问题加以解决。

令 $\theta = \pi$，则得下面的欧拉公式:

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

这个公式将数学中最重要的五个常数 $(e, \pi, i, 1, 0)$ 联系在一起

7.2 空间向量与 n 维向量

7.2.1 空间向量

零向量 $\vec{0}$ 与任何向量平行

若 $k(\geq 3)$ 个向量经平移可移到同一个平面上，则称此 k 个向量共面

设有两个非零向量 $\vec{a}, \vec{b}$，任取空间一点 O，做 $\overrightarrow{OA} = \vec{a}, \overrightarrow{OB} = \vec{b}$,

则称 $\varphi = \angle AOB (0 \leq \varphi \leq \pi)$ 为向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角，记作 $(\overrightarrow{\vec{a}, \vec{b}}) = \varphi$

7.2.2 n 维向量

n 维向量 $\overrightarrow{OP}$ 就是由 n 个数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 组成的有序数组，即

$$\overrightarrow{OP} = (x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$$

若起点 $M_1\,(x_1, \cdots, x_n)$，终点 $M_2\,(y_1, \cdots, y_n)$，则 n 维向量

$$\overrightarrow{M_1M_2} = (y_1 - x_1, \cdots, y_n - x_n)$$

$$|\overrightarrow{M_1M_2}| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

n 维零向量 $\vec{0} = (0, 0, \cdots, 0)$

n 维向量在不同的数学领域，有不同的称呼. 例如在线性代数中，称其为行向量

所有 n 维向量构成 n 维空间，记为

$$R^n = \{(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

我们熟知的平面是 2 维空间，表示为

$$R^2 = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$$

我们所处的空间是 3 维空间，表示为

$$R^3 = \{(x, y, z) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, z \in \mathbb{R}\}$$

7.3 向量的运算

$|\vec{a}+\vec{b}|^2 + |\vec{a}-\vec{b}|^2 = 2|\vec{a}|^2 + 2|\vec{b}|^2$

$|\vec{a}\cdot\vec{b}| \leq |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$，当且仅当 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行时等号成立

柯西不等式 $|a_1b_1+\cdots+a_nb_n| \leq \sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}\cdot\sqrt{b_1^2+\cdots+b_n^2}$

7.3.1 向量积

如果向量 $\vec{c}$ 满足:

(1) 大小: $|\vec{c}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\theta$

(2) 方向: $\vec{c}$ 的方向垂直于 $\vec{a}, \vec{b}$

$\vec{c}$ 的指向按右手法则从 $\vec{a}$ 转向 $\vec{b}$ 来确定

称 $\vec{c}$ 为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积 (也称叉积、外积)，记作 $\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b}$

运算规律

(1) $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$

(2) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b} = \lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

(3) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$

坐标形式

设 $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)\,, \vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$, 则

$$\vec{c} = \vec{\boldsymbol{a}}\times\vec{\boldsymbol{b}} = \begin{vmatrix} \vec{\boldsymbol{i}} & \vec{\boldsymbol{j}} & \vec{\boldsymbol{k}} \\ \boldsymbol{a}_x & \boldsymbol{a}_y & \boldsymbol{a}_z \\ \boldsymbol{b}_x & \boldsymbol{b}_y & \boldsymbol{b}_z \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\vec{c} = \vec{a}\times\vec{b} &= \left(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\right)\times\left(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\right) \\
&= a_xb_x\vec{i}\times\vec{i}+a_xb_y\vec{i}\times\vec{j}+a_xb_z\vec{i}\times\vec{k} \\
&+ a_yb_x\vec{j}\times\vec{i}+a_yb_y\vec{j}\times\vec{j}+a_yb_z\vec{j}\times\vec{k} \\
&+ a_zb_x\vec{k}\times\vec{i}+a_zb_y\vec{k}\times\vec{j}+a_zb_z\vec{k}\times\vec{k} \\
&= a_xb_y\vec{k} = a_xb_z\vec{j}-a_yb_x\vec{k}+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}-a_zb_y\vec{i} \\
&= (a_yb_z-a_zb_y)\,\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\,\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\,\vec{k} \\
&= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

第 8 章 常用不等式

8.1 绝对值不等式

$$
\begin{aligned}
& -|a| \leq a \leq |a| \\
\Rightarrow \quad & |x| \leq a \Leftrightarrow -a \leq x \leq a \quad (a \geq 0) \\
\Rightarrow \quad & |a_n - a| < \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon < a_n - a < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0)
\end{aligned}
$$

8.2 三角不等式

$$
\begin{gathered}
||\boldsymbol{a}| - |\boldsymbol{b}|| \leq |\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}| \leq |\boldsymbol{a}| + |\boldsymbol{b}| \\
||\vec{a}| - |\vec{b}|| \leq |\vec{a} + \vec{b}| \leq |\vec{a}| + |\vec{b}|
\end{gathered}
$$

8.3 基本不等式

$$
\begin{array}{ll}
a^2 + b^2 \geq 2ab & \left(\Leftarrow (a-b)^2 \geq 0\right) \\
a + b \geq 2\sqrt{ab} & (a, b \geq 0) \\
\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} & (a, b \geq 0)
\end{array}
$$

8.4 平均值不等式

$$
\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \geq \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}
$$

$(a_i > 0, i = 1, 2, \cdots n)$，当且仅当$a_1 = a_2 = \cdots = a_n$时取等号。

8.5 带三角函数的不等式

$$
\begin{gathered}
|\sin x| \leq |x| (x \in R) \\
|\sin x| \leq |x| \leq |\tan x| \quad (x \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}))
\end{gathered}
$$

8.6 Young 不等式

$$
\begin{gathered}
\left(a \cdot b \leq \frac{a^2 + b^2}{2}\right) \\
a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1; a, b > 0; p, q > 1\right)
\end{gathered}
$$

8.7 柯西不等式

$$\vec{a}=(a_1,a_2,\cdots,a_n),\vec{b}=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$$
$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\Rightarrow|\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b}|^2\leq|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2\Rightarrow$$
$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leq\left(a_1^2+a_2{}^2+\cdots+a_n{}^2\right)\left(b_1{}^2+b_2{}^2+\cdots+a_nb_2+\cdots+a_nb_n\right)$$

当且仅当 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 平行即 $\vec{a}=\lambda\vec{b}$ 时，等号成立。

即:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\right)^2\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k{}^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n}b_k{}^2\right)$$

或:

$$\sum_{k=1}^{n}a_kb_k\leq\left(\sum_{k=1}^{n}a_k^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}b_k^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

第 9 章 数列极限

9.1 数列的有界性

称 $\{a_n\}$ 有界: 若 $\exists M > 0$, s.t. 对任意 n 满足: $|a_n| \leq M$.
称 $\{a_n\}$ 有上界: 若 $\exists M \in R$, s.t. 对任意 n 满足: $a_n \leq M$.
称 $\{a_n\}$ 有下界: 若 $\exists K \in R$, s.t. 对任意 n 成立: $a_n \geq K$.
称 $\{a_n\}$ 无界: 若对 $\forall M > 0, \exists n_0 \in N^+$s.t. $|a_{n_0}| > M$. (n_0 一般依赖于 M 。)

9.2 数列收敛和发散

定义 9.1 (数列收敛)

通俗定义：当 n 无限增大时，a_n 无限接近于一个常数 a ，则称数列 $\{a_n\}$ 收玫且收玫于 a.
精确定义: 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ ，当 $n > N$ 时，有: $|a_n - a| < \varepsilon$, 则称 a_n 收敛且收玫于 a.
记作: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ (或 $a_n \to a (n \to \infty)$)

♣

注 上面定义中是先任意给定一个 $\varepsilon > 0$，再确定自然数 N , 所以 N 一般与 ε 有关。

定义 9.2 (数列发散)

a 为一固定常数，若 $\exists \varepsilon_0 > 0$, s.t. 对 $\forall N, \exists n > N$, 满足:$|a_n - a| > \varepsilon_0$, 则称 $\{a_n\}$ 不收玫于 a.
若对任意的常数 a, $\{a_n\}$ 不收玫于 a, 则称 $\{a_n\}$ 发散.

♣

注 若 a_n 无界，则 $\{a_n\}$ 发散.

9.3 数列收敛判别方法

定理 9.1 (单调有界收敛定理)

若 $\{a_n\}$ 是单调数列且有界，则 $\{a_n\}$ 收敛。

♡

注 若 $\{a_n\}$ 单调上升且有上界，则 $\{a_n\}$ 收敛。若 $\{a_n\}$ 单调下降且有下界，则 $\{a_n\}$ 收敛。

定理 9.2 (夹逼定理)

若 $a_n \leq b_n \leq c_n$ 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$, 则: $\lim_{n\to\infty} b_n = A$.

♡