

Méthodes à ensembles de niveau en analyse d'images

module Vision D9-2

Petr Dokladal

petr.dokladal@mines-paristech.fr

ENSTA

21 Octobre 2010

Plan du cours :

- Motivation
- Introduction et formalisme
 - Géométrie différentielle
 - Mise en pratique informatique (Level Set)
- Contours actifs
- Morphologie Mathématique continue
- Problèmes stationnaires

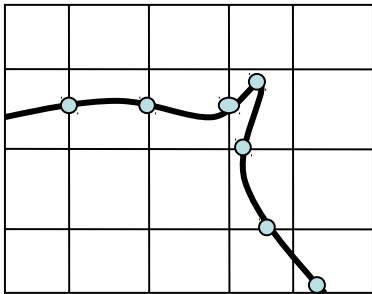
Motivation

- Introduction des EDPs permet de voir les images comme des signaux continus.
- Formalisme isotrope et indépendant de la grille de discrétisation (*précision sub pixel*)
si $h \rightarrow 0$ alors $\Delta \rightarrow \delta$
- Modélisation facile des phénomènes physiques.

Remarque : l'application des EDPs peut être vue comme une itération d'un filtre à voisinage infinitésimal.

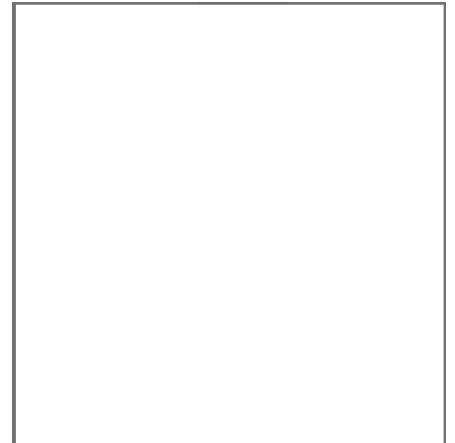
Motivation (2)

- Fonctions (images) représentées sous forme de courbes de niveau. Ces courbes ne passent pas forcément par les points de la maille de discrétisation.



$$u = u(x, y)$$

$$C(l) = \{ (x, y) : u(x, y) = l \}$$



Classification des différentes techniques aux EDPs

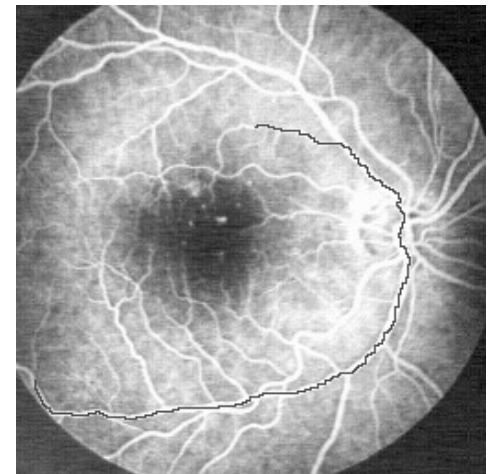
- Classification:
 - Filtres
 - Contours actifs
 - Problèmes stationnaires
- déplacement recherché est vertical.
- déplacement recherché est horizontal (suivi d'objets, ...)
- propagation d'ondes (recherche de la géodésie minimale, ...)



Filtres



Contours actifs



Problèmes stationnaires

Motivation : Contours actifs

- L'idée est de faire évoluer une courbe (snake) dans une image, afin de détecter des objets.
- La courbe évolue sous contraintes:
 - Internes : géométriques (lisse, aire, longueur, ...)
 - Externes : dépendentes de l'image (contraste local, intensité, informations statistiques, ...)
- Exemple : La courbe est initialisée grossièrement :
 - Bord de l'image
 - Contour autour de l'objet
 - Ensemble de petits cercles (disposés en échiquier)

PARTIE I.

INTRODUCTION ET FORMALISME

Formalisme : problème variationnel

- Supposons chercher l'image I tq.
$$I = \arg \min_I E$$

où E représente l'énergie calculée sur I (*approche variationnelle*).
La solution I peut prendre des formes différentes : image, courbe, ...

- Soit $F(\Phi)$ la dérivée première de E : si I doit minimiser E alors :

$$F(I) = 0.$$

- On cherche la solution de l'équation Euler :

$$E'(I)=0$$

avec $I(0) = I_0$ pour condition initiale.

Formalisme : solution

- Solution est obtenue par l'intermédiaire de la ***descente sur le gradient*** :

$$\frac{\partial I}{\partial t} = F(I)$$

jusqu'à $F(I) = 0$ (solution stable).

Remarque 1 : la solution analytique est difficile (voire impossible) à obtenir

Remarque 2 : le différentiel Δ remplace la dérivé

$$\frac{\Delta I}{\Delta t} = F(I)$$

Notions de base

- Différentes représentations d'objets géométriques

Équation analytique

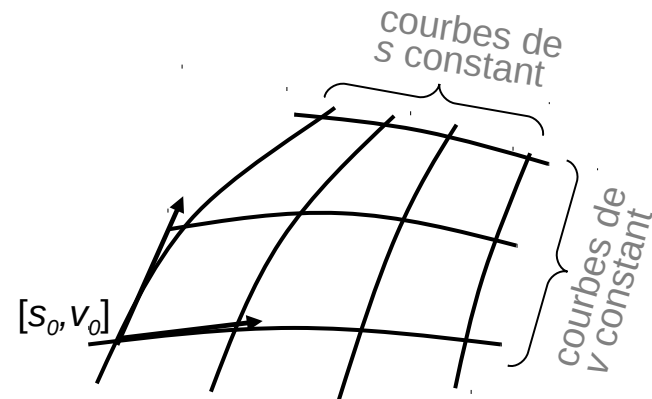
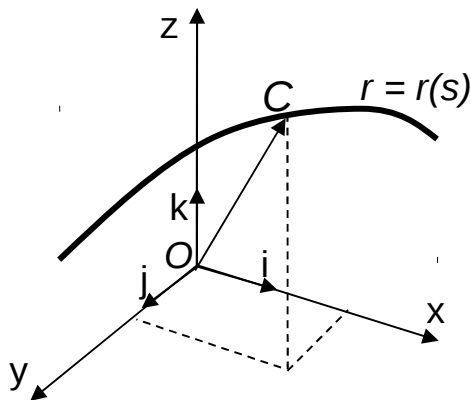
Courbe plane $C(x,y,z) = 0$

Surface $S(x,y,z) = 0$

Équation paramétrique

$x = x(s), y = y(s), z = z(s)$

$x = x(s,v), y = y(s,v), z = z(s,v) \quad (1)$



Les paramètres s (resp. s,t) sont définis sur un intervalle I (resp. domaine Ω).

Courbe/surface lisses

En général, on suppose que les fonctions x, y, z (Eq. 1)

- sont sur I (resp. Ω) **continues**.
- ont sur I (resp. Ω) **les dérivés** $x'=dx/ds, y'=dy/ds, z'=dz/ds$ **continues**, qui vérifient, à l'exception d'un nombre borné de points:

Remarque 1 : Souvent on suppose idem pour dérivés d'ordres supérieurs si nécessaire.

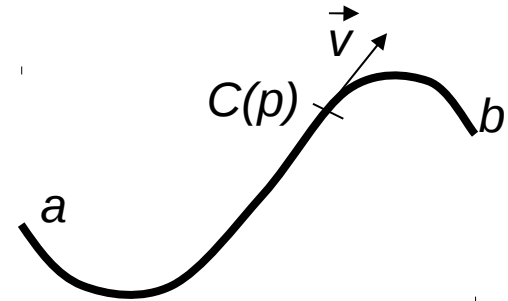
Remarque 2 : Parfois on demande Lipschitz-continue, c.à.d. pour (X, d_X) and (Y, d_Y) , la fonction $f : X \rightarrow Y$ est *Lipschitz-continue* s'il existe $K \geq 0$ tq.

$$d_Y (f(x_1), f(x_2)) \leq K d_X (x_1, x_2)$$

Géométrie différentielle

Courbe plane – frontière d'un objet plane

$$C(p) : [a,b] \in \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$$



- Si $C(a) = C(b)$ alors la courbe est **fermée**.
- Si $\exists p_0 \neq p_1, p_0, p_1 \in [a, b]$, tq. $C(p_0) = C(p_1)$ alors la courbe contient des **intersections**, sinon la courbe est **simple**.
- Le paramètre p permet de déterminer la vitesse de déplacement sur la courbe (direction tangentielle). $\frac{\partial C}{\partial p} = \vec{v}$

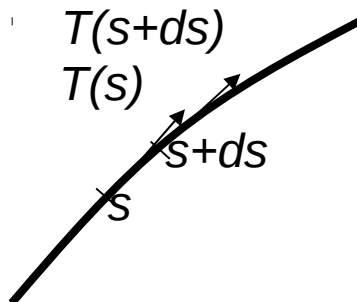
Géométrie différentielle (2)

- On définit une paramétrisation spéciale, nommée l'« *abscisse curviligne* » (ou paramétrisation euclidienne), obtenue si

$$\left\| \frac{\partial C}{\partial p} \right\| = 1$$

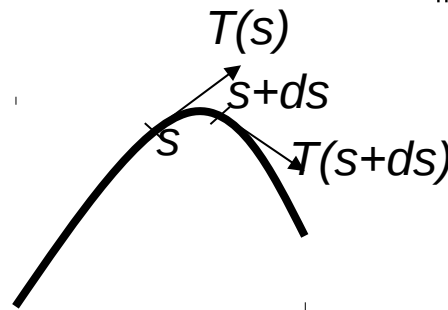
- Courbure euclidienne*
 - direction tangentielle
(p devient s)

$$\vec{T} = \frac{\partial C}{\partial s}$$



- vitesse de changement de la direction définit la courbure

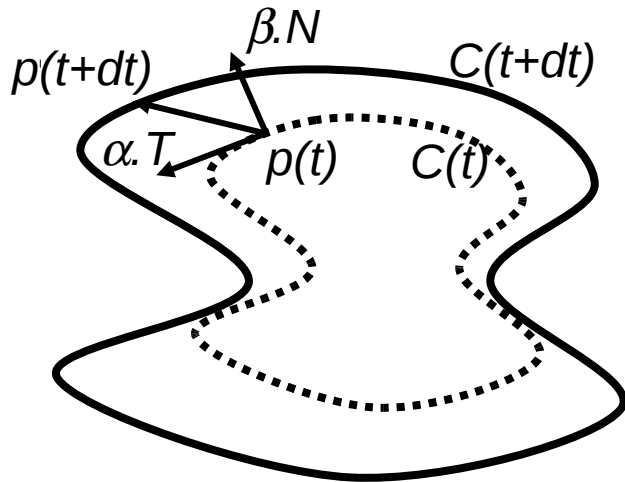
$$\left\| \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} \right\| = \kappa$$



Géométrie différentielle (3)

- Propriétés de la courbure euclidienne
 - Courbure : inverse du rayon de cercle osculaire (change de signe dans les points d'inflexion)
 - Représentation unique de la courbe, invariante par rotation et translation (la courbe peut être reconstruite à partir de $\kappa(s)$)
 - Lignes droites et cercles ont $\kappa(s) = \text{const}$
 - Courbure totale de la courbe fermée est multiple de 2π (égal à 2π si la courbe est simple)
 - Parmi toutes les courbes fermées avec longueur L , le cercle avec le rayon $L/2\pi$ représente la courbe avec la plus grande surface

Évolution des courbes



$$\frac{\partial C(s,t)}{\partial t} = \alpha(s,t) \vec{T}(s,t) + \beta(s,t) \vec{N}(s,t)$$

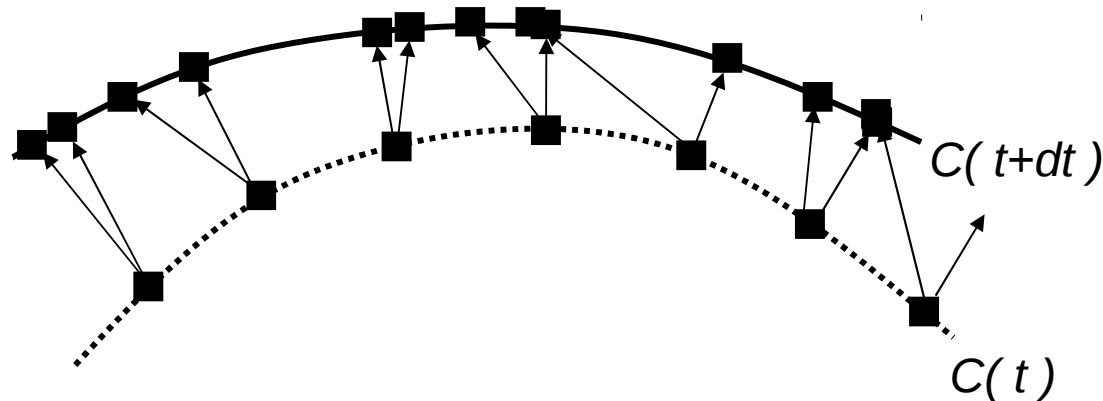
Nous cherchons à modéliser le déplacement de la courbe C indépendamment de la paramétrisation de C ,

c-à-d la vitesse α ne nous intéresse pas, car change la paramétrisation et non l'aspect géométrique.

Rq.: Pour les surfaces $\frac{\partial S(s,v,t)}{\partial t} = \beta(s,v,t) \vec{N}(s,v,t)$

Évolution des courbes (cont.)

Remarque 1: la suppression de la composante tangentielle de la vitesse d'évolution empêche la nécessité de devoir gérer la potentielle 'condensation' ou 'raréfaction' des points constituant la courbe.



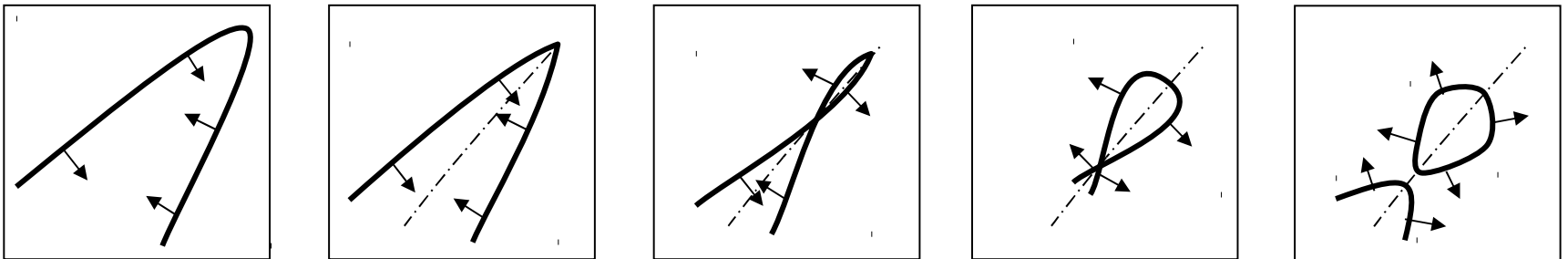
Remarque 2: Ne considérer que la composante normale revient à accéder à la courbe comme à un ensemble de points, sans avoir accès aux points individuellement.

Évolution des courbes : flux à vitesse constante

On considère le flux à vitesse constante $C_t = N$

ce flux ne change pas de direction $\frac{\partial N}{\partial t} = 0$

néanmoins, il produit des singularités.



Analogie avec le feu de prairie, un point singulier naît à la rencontre de deux ondes. Utilisation: génération des squelettes.

Rq.: On cherche un schéma numérique qui fournit une solution correcte.

Mise en pratique 1 : Splines

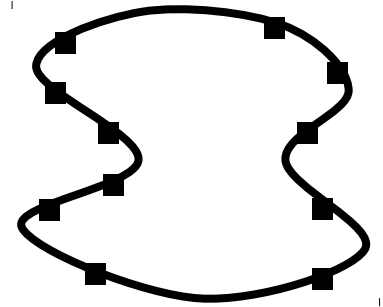
Splines – découpage d'une courbe en morceaux chacun représenté par un polynôme, connectés dans les nœuds.

Les nœuds doivent être lisses et avoir les dérivées continues.

- Intervalles entre des nœuds *identique / différente*
- Points de contrôle *appartiennent / n'appartiennent pas* à la courbe
- Moindres carrés pour détection des points de contrôle
- Changement d'un polynôme n'affecte pas le reste

B-splines (« Basis splines ») – les plus utilisés

- Degré 1 = fonction continue
- Degré 2 = fonction dérivable
- Degré 3 = fonction dérivable deux fois (pas de rupture de la courbure)



$$C_k(p) = \sum_i^n V_i B_{i,k}$$

$V_i = [x_i, y_i]$... noeuds de contrôle

$B_{i,k} = B(., p_i, p_{i+1}, \dots, p_{i+1})$... base de B - splines

Mise en pratique 2 : Level Set

- **Level Set** – modélisation implicite à l'aide d'une surface de dimension supérieure qui imbrique C en tant que son ensemble à niveau zéro

Pour $C \subset \mathbb{R}^2$, on cherche $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, tq. $C = \{(x, y) \mid f(x, y) = 0\}$,
 $x, y \in \mathbb{R}$

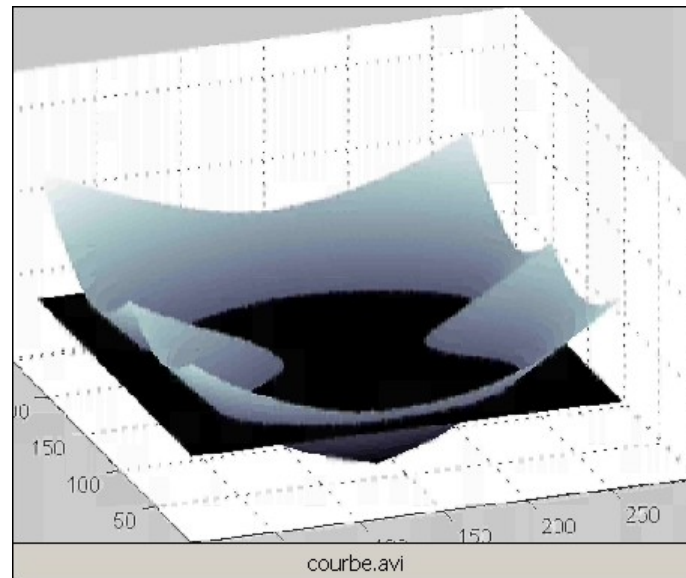
- Description implicite par la distance signée au contour initial est équivalente à la description paramétrique si :

$$\|\nabla u\| = 1$$

- Solution de l'équation Eikonale

Level Set : Remarques

- Changement topologiques de C , n'affectent pas la topologie de L , qui reste inchangée.
- Les changement topologiques de C sont observables uniquement dans L_c .



Level Set : Formulation

- Supposons que

$$\frac{\partial C(p,t)}{\partial t} = \beta(p,t) \cdot \vec{N}(p,t) = \vec{v} \text{ avec } C(p,0) = C_0(p) \quad (1)$$

- Notons par $C(p,t) : S^1 \times [0,T) \rightarrow \mathbb{R}^2$ une famille des courbes fermées et imbriquées, où t paramétrise la famille et p la courbe.
- Représentons chaque courbe par un ensemble de niveau d'une fonction

$$u(x,y,t) : \mathbb{R}^2 \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R} \text{ tq. } L_c(x,y,t) := \{(x,y,t) \in \mathbb{R}^2 \times [0,T) : u(x,y,t) = c\}$$

- Nous cherchons une telle évolution de u que $L_c(x,y,t) \equiv C(x,y,t)$.

Pour avoir cette identité il faut que $\frac{\partial L_c}{\partial t} = \beta \cdot \vec{N} = \vec{v}$ et par la suite

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta \|\nabla u\| \quad \text{qui signifie que si une fonction évolue selon Eq. 1, alors}$$

tous les niveaux évoluent de la même façon.

PARTIE II.

CONTOURS ACTIFS

Motivation

- extraction des formes (snakes dépendants du niveau de gris, *edge stopping function*)
- suivis d'objets
- lissage des formes (courbure)
- *combinaisons*



Contours actifs géométriques

[Kass, Witkin, Terzopoulos, 1988]

Modèle classique de snakes à minimisation d'énergie

$$E = \underbrace{\alpha \int_0^1 |C'(q)|^2 dq + \beta \int_0^1 |C''(q)|^2 dq}_{\text{Energie interne (dépendante de la courbe)}} - \underbrace{\lambda \int_0^1 |\nabla I(C(q))| dq}_{\text{Energie externe (dépendante de l'image)}}$$

élasticité rigidité

- ne peut pas récupérer plusieurs objets (ne peut pas changer de topologie)
- ne peut pas récupérer des objets concaves (récupère l'enveloppe convexe)
- dépend de la paramétrisation q
- $\beta \neq 0$ donne lieu aux composants d'ordres supérieurs (quatrièmes dérivés)

Détecteur des contours

- Un détecteur de contours doit attirer la courbe vers le gradient fort et s'annuler à la rencontre du maximum.

Exemple :

$$\lim_{z \rightarrow \infty} g(z) = 0.$$

$$g(|\nabla u_0(x, y)|) = \frac{1}{1 + \underbrace{|\nabla G_\sigma(x, y) * u_0(x, y)|^p}_{\text{Lissage de l'image d'origine par convolution avec une gaussienne}}}, \quad p \geq 1$$

Lissage de l'image d'origine par
convolution avec une gaussienne

Modèle indépendant de topologie

[Malladi, Sethian, Vemuri, 1993]

- Vitesse de déplacement normalisée par rapport aux valeurs de gradient

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} = |\nabla \phi| \left(-\nu + \frac{\nu}{(M_1 - M_2)} (|\nabla G_\sigma * u_0| - M_2) \right) \\ \phi(0, x, y) = \phi_0(x, y) \text{ in } [0, \infty) \times \mathbb{R}^2 \end{cases}$$

ν et une constante, M_1 et M_2 valeurs maximale et minimale du gradient

Contours actifs géodésiques

[Caselles, Kimmel, Sapiro, 1997]

Définition: Courbe géodésique suit la trajectoire de la distance minimale entre deux points donnés.

On cherche à obtenir la courbe de distance minimale pondérée entre des points donnés de l'image. Typiquement, il faut récupérer des contours donnés par des points de fort contraste, et lisser entre eux.

La longueur pénalisée par localement faible contraste ∇I est donnée par

$$L = \int_0^1 g(|\nabla I(C(q))|) |C'(q)| dq \quad (1)$$

où $g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction strictement décroissante, par exemple

$$g = \frac{1}{|\nabla I|^2 + 1}$$

favorisant ainsi le fort contraste de $\nabla I(C)$.

Contours actifs géodésiques (2)

[Caselles, Kimmel, Sapiro, 1997]

La longueur euclidienne de C est donnée par $L = \oint |C'(q)| dq = \oint ds$
on minimise donc

$$L = \int_0^{L(C)} g(|\nabla I(C(s))|) ds$$

s étant l'abscisse curviligne. Il peut être démontré (Euler-Lagrange équation de (1)) que L diminue le plus vite si $C_t = \kappa N$

La courbe $C(0) = C_0$ doit obéir à [Caselles, Kimmel et Sapiro]

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} = g(I)\kappa \vec{N} - (\nabla g \cdot \vec{N}) \vec{N}$$

La solution vérifie le principe de Fermat en sens qu'un rayon de lumière suit dans un milieu isotrope non-homogène entre deux points le chemin le plus rapide. Ici, la grande vitesse de la lumière correspond au fort contraste local ∇I .

Contours actifs géodésiques (3)

[Caselles, Kimmel, Sapiro, 1997]

Dans les termes de Level Set l'équation (2) se traduit par

$$\frac{\partial u}{\partial t} = |\nabla u| \operatorname{div} \left(g(I) \frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) + c g(I) |\nabla u|$$

équivalent au modèle général donné par

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} = g(I)(c + \kappa) \vec{N} - (\nabla g \cdot \vec{N}) \vec{N}$$

le lissage par la courbure remplace le terme de lissage d'ordre supérieur dans les contours géométriques.

Contours actifs géodésiques : Lissage des formes

- + indépendant de la paramétrisation
- + vérifie le principe de maximum
- + introduit le concept espace temps

- Nous devons donc trouver une vitesse β convenable $C_t = \beta N$.

choix naturel $\beta = \kappa$, qui conduit à la diffusion de la chaleur euclidienne $\frac{\partial C}{\partial t} = \kappa N$

Puisque $C_{ss} = \kappa N$ on peut écrire $\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial s^2}$

où s est la paramétrisation euclidienne.

- **Propriétés intéressantes:**

- toute courbe fermée non convexe devient convexe en $t < \infty$.
- converge vers un cercle qui disparaît ($r \rightarrow 0$)
- $\oint |\kappa| ds$ décroissant
- maxima locaux de κ décroissent
- minima locaux de κ s'élargissent
- nombre de changements de signe de κ décroît

} produit un lissage

Contours actifs géodésiques : Lissage des formes (2)

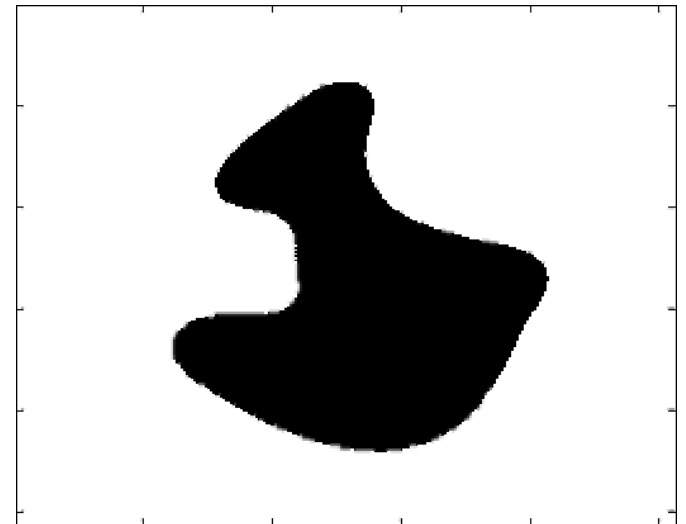
la manière la plus simple de redressement d'une courbe

$$\begin{cases} \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial^2 C}{\partial s^2} \\ C(s,0) = C_0 \end{cases}$$

ce flux est équivalent au filtrage de la fonction de la courbure du contour par un filtre gaussien.

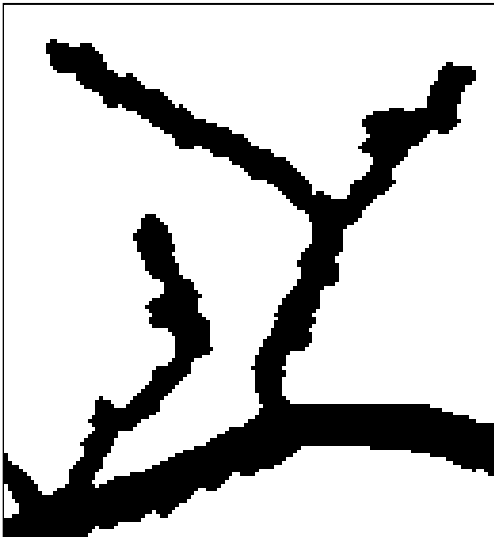
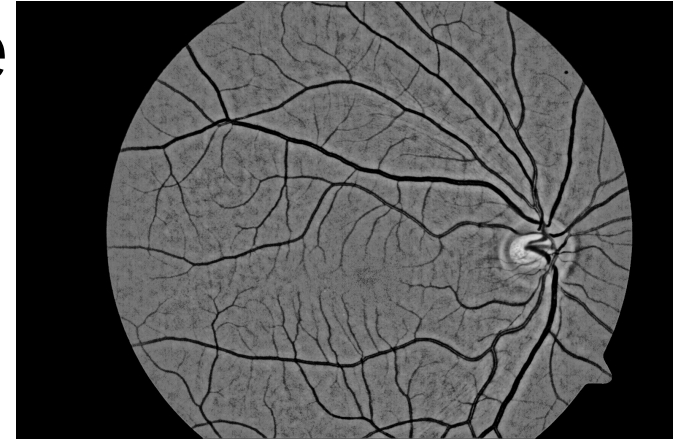
$$G(s,t) = \sqrt{\frac{1}{4\pi t}} \exp\left(-\frac{s^2}{4t}\right)$$

Rq.: Sans contraintes supplémentaires converge vers la disparition.

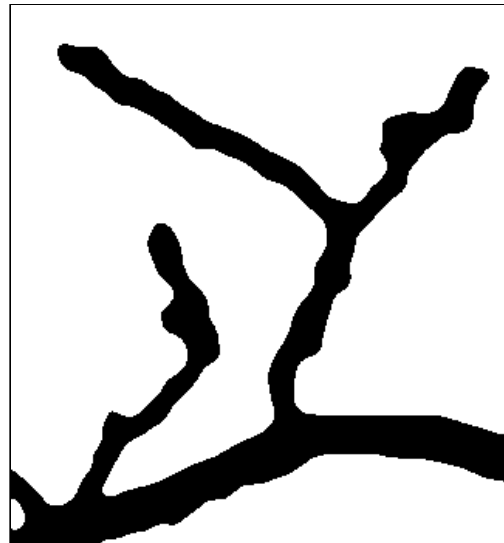


Lissage des formes (3) : Application : Lissage du réseau vasculaire

Peut être utilisé pour améliorer l'extraction d'objets très fins (à l'échelle du pixel) tels que la vascularisation rétinienne, par exemple.



Précision pixel



Précision sub-pixel
ENSTA

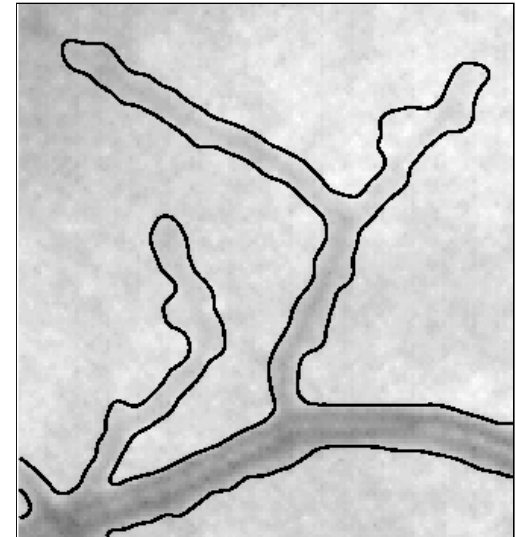


Image originale

Contours superposés
sur l'image de départ

Contours actifs géodésiques :

Application : Détection des frontières d'objets

Fonction d'évolution du contour

$$C_t = g(I)(c + \kappa)|\nabla u|$$

représentée sous termes
de Level Set

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g(I) \left(c + \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) \right) |\nabla u|$$

fonction d'arrêt au contraste fort :

$$g(I) = \frac{1}{1 + |\nabla \hat{I}|^p}$$

avec $p = 1, 2$

courbure locale

fonction d'arrêt au contraste fort
vitesse d'avancement constant
terme de lissage par courbure locale
normale à la courbe C

Avantages:

- récupère des objets concaves
- contours lisses

Inconvénients:

- choix d'un c convenable
- si $c=0$, ne convient plus aux objets concaves

Application : Détection des frontières d'objets : Exemple

On considère les flux de type

$$\beta = 1 - \varepsilon \kappa$$

1 – terme d'avancement constant

ε – poids donné à la courbure

κ – courbure (pour lissage)

On cherche une « edge-stopping » fonction dépendant des données de l'image.

Considérons

$$k_I = \frac{1}{1 + |\nabla G_\sigma * I|}$$

où $k_I \rightarrow 1$ sur zones plates de I

0 sur zones de gradient fort

$G_\sigma * I$ - terme de lissage

le flux final devenant

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \beta k_I \vec{N}$$

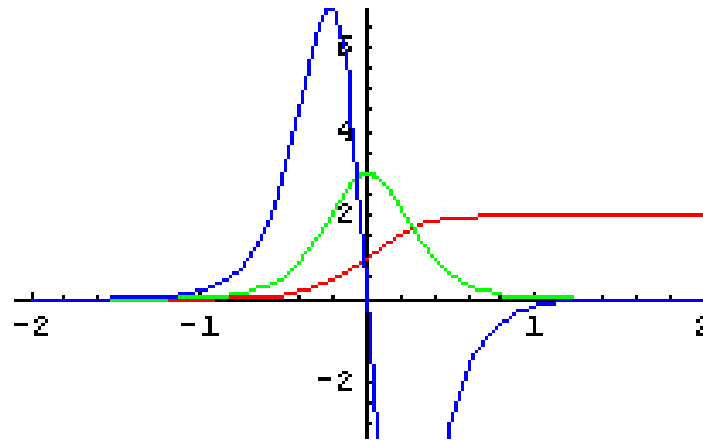
Rqs.: 1) Initialisation par un ou plusieurs marqueurs

2) Points de bruit isolés sont éliminés car entourés par le front puis réduits depuis l'extérieur

3) peut être combiné avec un filtre de type min/max

Exemple 2: Suivi des contours

Détecteur des contours de Haralick (1984), détecte les contours par le changement de signe de la dérivée seconde.



$$\Delta f(x,y) = \partial_{xx} f(x,y) + \partial_{yy} f(x,y)$$

Le Laplacien place le contour au maximum de contraste de f .

Problème : Comment utiliser le détecteur de contours de Haralick pour le suivi d'objets ?

Exemple 2: Suivi des contours (2)

Considérons l'image $I : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{Z}^+$ et ∇I le gradient de I . Nous recherchons une courbe $C \subset \mathbb{R}^2$ appartenant à la famille des courbes fermées et simples C . Nous voulons que C suive le maximum de contraste de I , c-à-d.

$$C = \max_C \oint_C \nabla I \, ds \quad (1)$$

L'éq. (1) peut être réécrite

$$C = \min_C \oint_C (-\nabla I) \, ds \quad (2)$$

Le flux qui minimise l'éq. (2) obéit

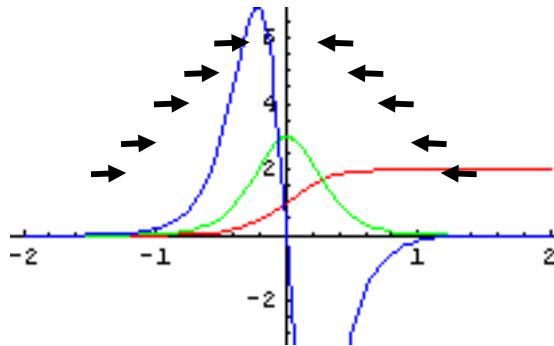
$$\beta \cdot N = \nabla^2 I = \Delta I$$

L'évolution du contour est initialisée par la position du contour C^{i-1} de la trame $i-1$.

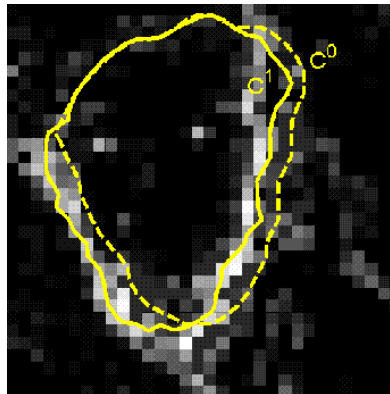
$$\frac{\partial u^i}{\partial t} = \Delta I \cdot \vec{N}$$

$$u^i(t=0) = C^{i-1}$$

Exemple 2: Suivi des contours (3)



1-D



2-D



résultat

- Rqs.: 1) La force d'attraction converge des deux cotés vers le sommet du gradient, où elle s'annule.
2) Force nulle si gradient nul.

Contours actifs sans gradient

[Chan, Vese 2001]

- Les modèles précédents utilisent une fonction de gradient g . Ils ne peuvent détecter que des objets aux contours définis par un gradient non nul.
- En pratique, le gradient peut être mal défini : flou, faible, bruité.
=> Par conséquent, le snake peut dépasser le contour de l'objet
- De plus, l'œil humain perçoit même des objets sans gradient fort. On parle de gradient perceptuel :
 - Différence de textures
 - Différences statistiques
 - ...

Contours actifs sans gradient

[Chan, Vese 2001]

- Soit $C \subset \Omega$ une courbe fermée, avec $inside(C)$ et $outside(C)$. L'intérieur et l'extérieur sont des ensembles *ouverts*.
- Soit u_0 une image formée par deux régions d'intensité à peu près constante, u_0^I et u_0^O .
- Soit u_0^I et u_0^O les couleurs de l'objet et de l'arrière-plan.

$$F_1(C) + F_2(C) = \int_{inside(C)} |u_0(x, y) - c_1|^2 dx dy \\ + \int_{outside(C)} |u_0(x, y) - c_2|^2 dx dy$$

avec c_1 et c_2 les moyennes d'intensité à l'intérieur et à l'extérieur de C .

Contours actifs sans gradient

[Chan, Vese 2001]

- Il est facile de voir que le minorant

$$\inf_C \{F_1(C) + F_2(C)\} \approx 0 \approx F_1(C_0) + F_2(C_0)$$

est obtenu pour un $C=C_0$ suivant le contour de l'objet avec c_1 et c_2 les moyennes d'intensité de l'objet et de l'arrière-plan.

- Nous considérons alors le problème d'optimisation

$$\inf_{c_1, c_2, C} F(c_1, c_2, C)$$

Contours actifs sans gradient

[Chan, Vese 2001]

- Le modèle Chan-Vese utilise le fonctionnel d'énergie suivant

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, C) = & \mu \cdot \text{Length}(C) + \nu \cdot \text{Area}(\text{inside}(C)) \\ & + \lambda_1 \int_{\text{inside}(C)} |u_0(x, y) - c_1|^2 dx dy \\ & + \lambda_2 \int_{\text{outside}(C)} |u_0(x, y) - c_2|^2 dx dy \end{aligned}$$

avec $\mu \geq 0$, $\nu \geq 0$, $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ des paramètres constant.

Contours actifs sans gradient

[Chan, Vese 2001]

- Formulation en termes de level sets avec

$$\begin{cases} C = \partial\omega = \{(x, y) \in \Omega: \phi(x, y) = 0\}, \\ \textit{inside}(C) = \omega = \{(x, y) \in \Omega: \phi(x, y) > 0\} \\ \textit{outside}(C) = \Omega \setminus \overline{\omega} = \{(x, y) \in \Omega: \phi(x, y) < 0\} \end{cases}$$

pour la courbe, et des termes auxiliaires

$$H(z) = \begin{cases} 1, & \text{if } z \geq 0 \\ 0, & \text{if } z < 0, \end{cases} \quad \delta_0(z) = \frac{d}{dz} H(z)$$

désignant la fonction de Heavyside et Dirac, ...

Contours actifs sans gradient

[Chan, Vese 2001]

nous pouvons exprimer la longueur et l'aire sous forme de

$$\begin{aligned}\text{Length}\{\phi = 0\} &= \int_{\Omega} |\nabla H(\phi(x, y))| \, dx \, dy \\ &= \int_{\Omega} \delta_0(\phi(x, y)) |\nabla \phi(x, y)| \, dx \, dy, \\ \text{Area}\{\phi \geq 0\} &= \int_{\Omega} H(\phi(x, y)) \, dx \, dy,\end{aligned}$$

Contours actifs sans gradient

[Chan, Vese 2001]

et les deux écarts-type d'intensités

$$\begin{aligned} & \int_{\phi > 0} |u_0(x, y) - c_1|^2 dx dy \\ &= \int_{\Omega} |u_0(x, y) - c_1|^2 H(\phi(x, y)) dx dy, \\ & \int_{\phi < 0} |u_0(x, y) - c_2|^2 dx dy \\ &= \int_{\Omega} |u_0(x, y) - c_2|^2 (1 - H(\phi(x, y))) dx dy. \end{aligned}$$

Contours actifs sans gradient

[Chan, Vese 2001]

- L'énergie F peut s'exprimer par

$$\begin{aligned} F(c_1, c_2, \phi) &= \mu \int_{\Omega} \delta(\phi(x, y)) |\nabla \phi(x, y)| dx dy && \leftarrow \text{longueur} \\ &+ \nu \int_{\Omega} H(\phi(x, y)) dx dy && \leftarrow \text{aire} \\ &+ \lambda_1 \int_{\Omega} |u_0(x, y) - c_1|^2 H(\phi(x, y)) dx dy && \leftarrow \text{écart-type d'intensité à l'intérieur} \\ &+ \lambda_2 \int_{\Omega} |u_0(x, y) - c_2|^2 (1 - H(\phi(x, y))) dx dy && \leftarrow \text{écart-type d'intensité à l'extérieur} \end{aligned}$$

Contours actifs sans gradient

[Chan, Vese 2001]

- Lors de la recherche numérique du minorant, nous allons considérer une version régularisée de l'image, et des deux termes auxiliaires H et δ

$$\begin{aligned} F_\varepsilon(c_1, c_2, \phi) &= \mu \int_{\Omega} \delta_\varepsilon(\phi(x, y)) |\nabla \phi(x, y)| dx dy \\ &\quad + \nu \int_{\Omega} H_\varepsilon(\phi(x, y)) dx dy \\ &\quad + \lambda_1 \int_{\Omega} |u_0(x, y) - c_1|^2 H_\varepsilon(\phi(x, y)) dx dy \\ &\quad + \lambda_2 \int_{\Omega} |u_0(x, y) - c_2|^2 (1 - H_\varepsilon(\phi(x, y))) dx dy \end{aligned}$$

- La régularisation de l'image peut être le filtrage par une gaussienne, par exemple.

Contours actifs sans gradient

[Chan, Vese 2001]

- La solution sera recherchée aux moyen de l'équation Euler-Lagrange par la descente sur le gradient de l'énergie F , en gardant c_1 et c_2 fixes.

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = \delta_\varepsilon(\phi) \left[\mu \operatorname{div} \left(\frac{\nabla \phi}{|\nabla \phi|} \right) - \nu - \lambda_1 (u_0 - c_1)^2 + \lambda_2 (u_0 - c_2)^2 \right] = 0 \text{ in } (0, \infty) \times \Omega,$$

$$\phi(0, x, y) = \phi_0(x, y) \text{ in } \Omega,$$

$$\frac{\delta_\varepsilon(\phi)}{|\nabla \phi|} \frac{\partial \phi}{\partial \vec{n}} = 0 \text{ on } \partial \Omega$$

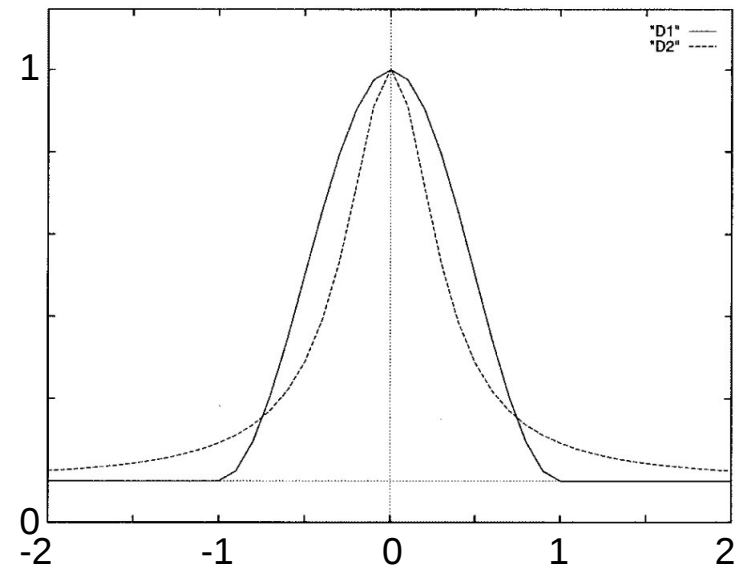
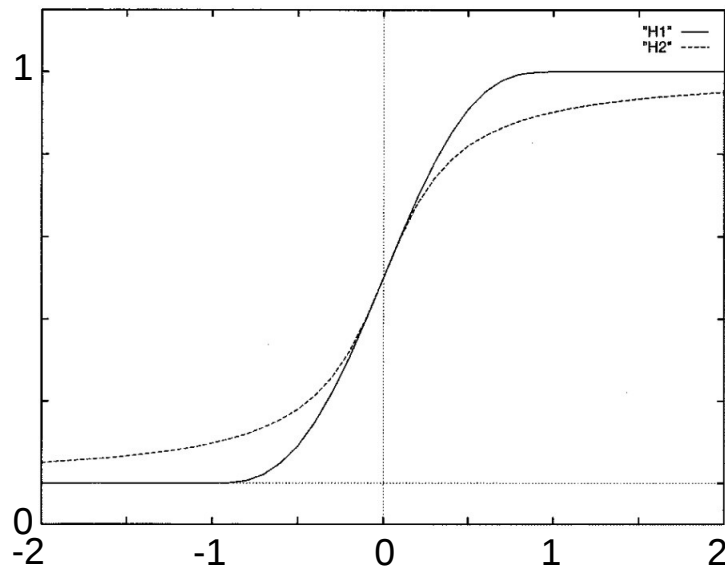
Contours actifs sans gradient

[Chan, Vese 2001]

- La régularisation utilisé pour H

$$H_{2,\varepsilon}(z) = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{2}{\pi} \arctan \left(\frac{z}{\varepsilon} \right) \right)$$

(... et pour δ obtenu par dérivation)



Contour actifs : Littérature

1. M. Kass, A. Witkin, and D. Terzopoulos, "Snakes: Active contour models," *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 1, pp. 321–331, 1988.
2. D. Mumford and J. Shah, "Optimal approximation by piecewise smooth functions and associated variational problems," *Commun. Pure Appl. Math*, vol. 42, pp. 577–685, 1989.
3. R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri, "A topology independent shape modeling scheme," in *Proc. SPIE Conf. Geometric Methods Computer Vision II*, vol. 2031, San Diego, CA, 1993, pp. 246–258.
4. V. Caselles, F. Catté, T. Coll, and F. Dibos, "A geometric model for active contours in image processing," *Numer. Math.*, vol. 66, pp. 1–31, 1993.
5. R. Malladi, J. A. Sethian, and B. C. Vemuri, "Shape modeling with front propagation: A level set approach," *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.*, vol. 17, pp. 158–175, Feb. 1995.
6. V. Caselles, R. Kimmel, and G. Sapiro, "On geodesic active contours," *Int. J. Comput. Vis.*, vol. 22, no. 1, pp. 61–79, 1997.
7. T. F. Chan, and L. A. Vese, "Active Contours Without Edges," *IEEE Trans. Image Proc*, vol. 10, no. 2, 2001
8. L. A. Vese and T. F. Chan, "A Multiphase Level Set Framework for Image Segmentation Using the Mumford and Shah Model," *Intl. J. of Comp. Vision* 50(3), 271–293, 2002

Logiciels disponibles

Matlab file exchange :

- <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23445>
Yue Wu: Code en Matlab. Plusieurs variantes de l'algorithme de Chan Vese sont disponibles.
- <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/19567-active>
Shawn Lankton: Code écrit en C, puis compilé, appelé depuis Matlab. Très rapide.

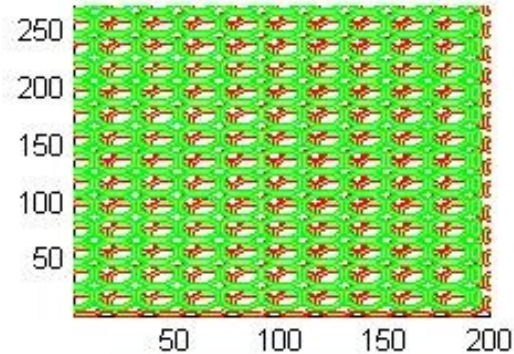
... d'autres réalisations sont disponibles sur internet. A vérifier.

Simulation

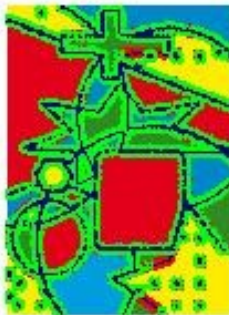
Input Image



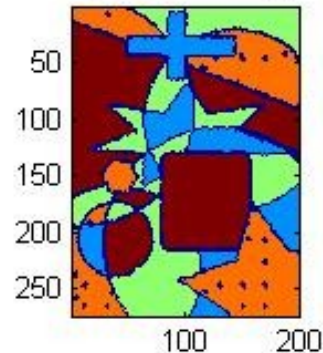
initial contour



100 Iterations

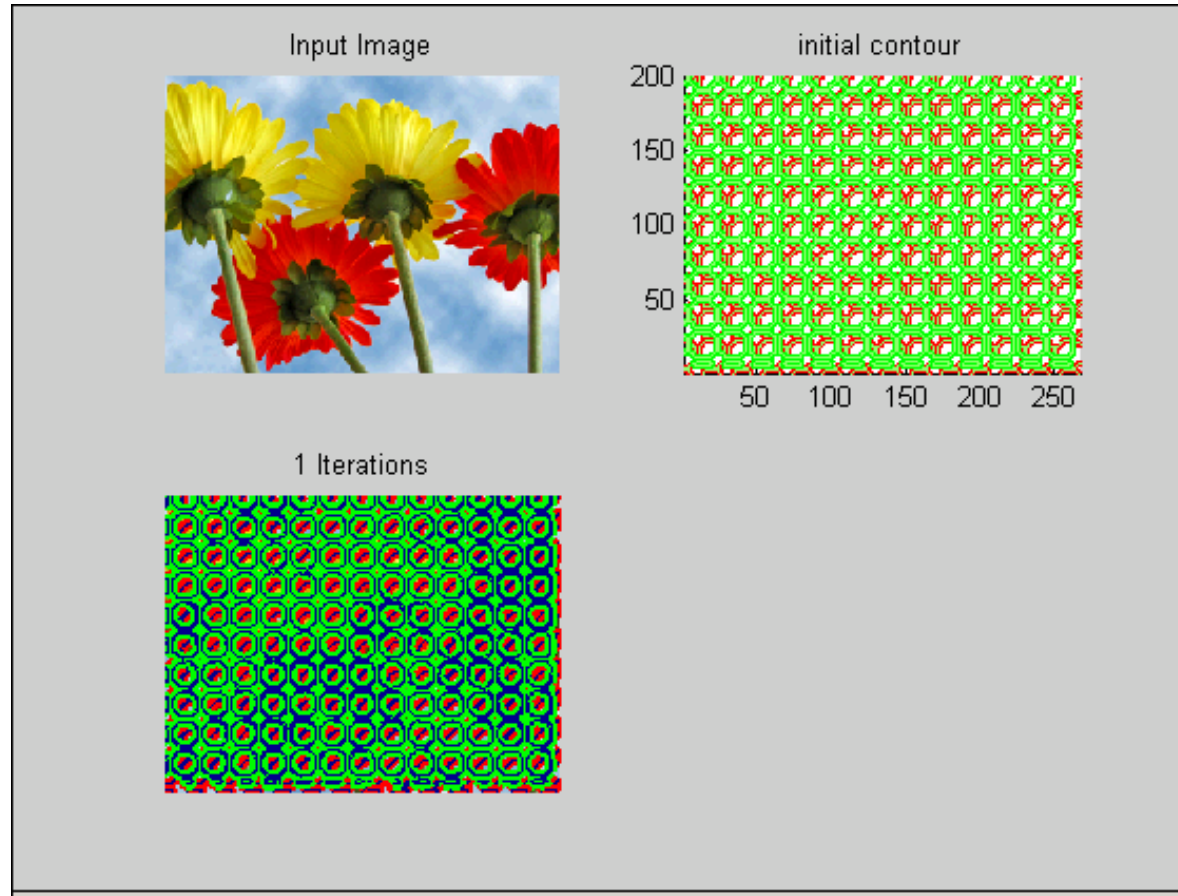


Global Region-Based Segmentation



Segmentation multiphasée (en un nombre arbitraire) de régions-couleur.
Initialisation avec des petits cercles disposés en échiquier. [Vese, Chan, 2002]

Contours actifs : Segmentation



Segmentation multiphasée (en un nombre arbitraire) de régions-couleur.
Initialisation avec des petits cercles disposés en échiquier. [Vese, Chan, 2002]

CONTOURS ACTIFS :

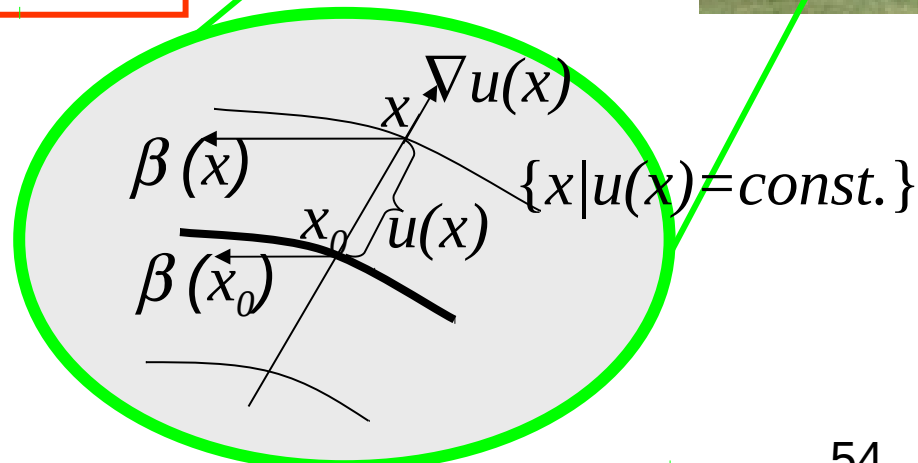
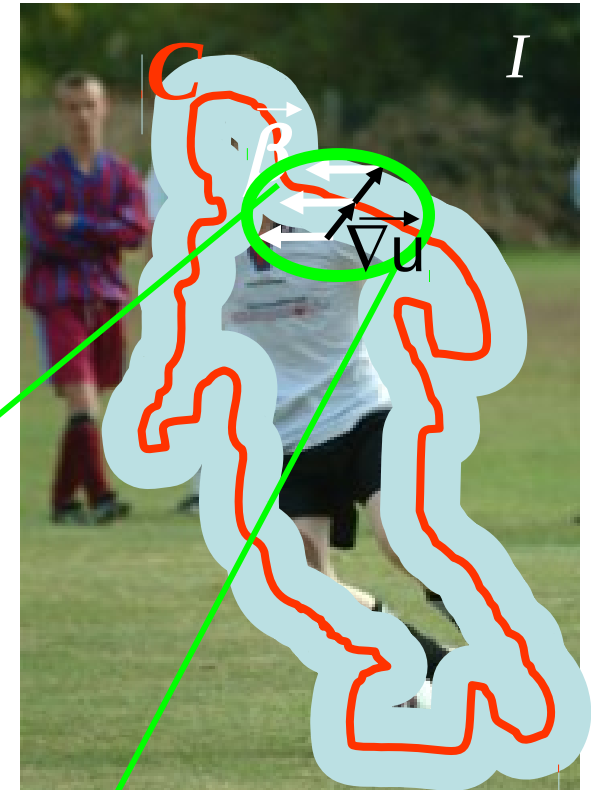
Considérations numériques

Level Set :

Consistance numérique

- La vitesse de déplacement $\beta = \delta u / \delta t$ de u : $\beta = \beta(I)$.
(Vitesse correspond à la *composante normale des mouvements du footballeur.*)
- u vérifie souvent $u = \text{dist}(C)$. (fonction distance au contour C), alors $|\nabla u| = 1$.
- Pour empêcher à u de se déformer, il faut que tous les niveaux de u se déplacent avec la même vitesse que le niveau zéro

$$\beta(x) = \beta(I(x - u(x)\nabla u(x)))$$



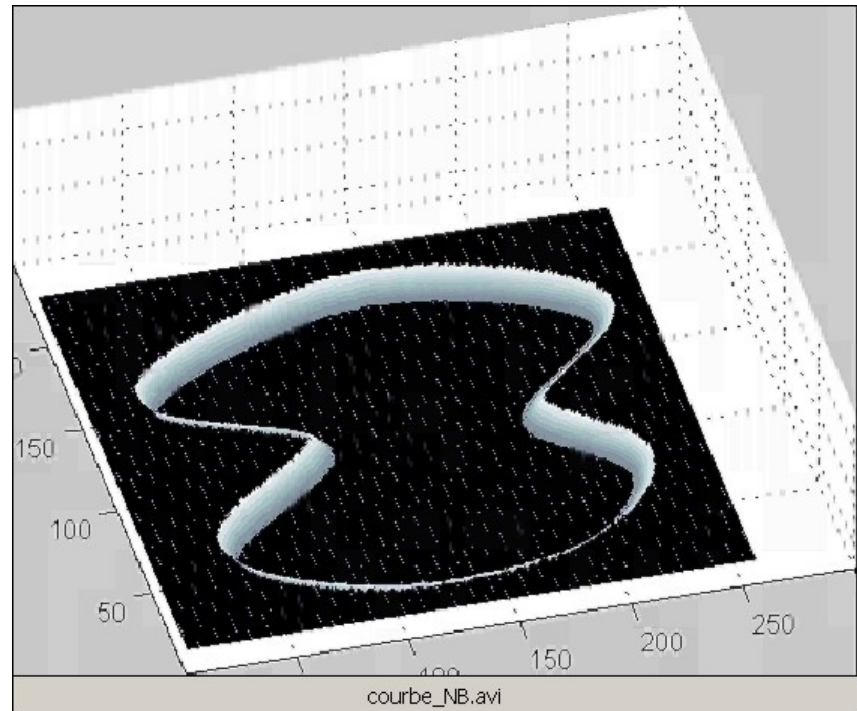
Narrow Band

- Complexité de calcul augmente d'un ordre de grandeur (Courbes 2D passage de $O(N)$ à $O(N^2)$. Surfaces 3D passage de $O(N^2)$ à $O(N^3)$.)

Procédé pour réduire la complexité. La fonction u est calculée seulement le long de l'ensemble à niveau zéro.

- 2-D: complexité réduite de $O(N^2)$ à $O(kN)$
- 3-D: complexité réduite de $O(N^3)$ à $O(kN^2)$

où k représente la largeur du Narrow Band.



Construction du Narrow Band

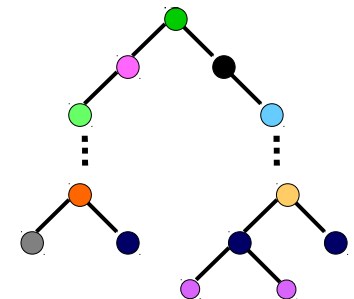
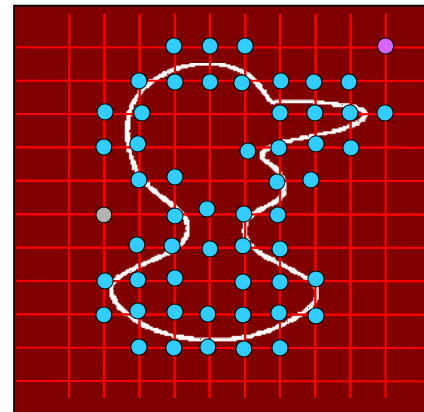
- Initialisation :
 - Fonction $\varphi(x)$ définit l'intérieur/extérieur de la courbe initiale (condition initiale)

$$\text{sign}(\varphi(x)) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \text{ à l'extérieur} \\ -1 & \text{si } x \text{ à l'intérieur} \end{cases}$$

- Initialiser la position de la courbe par interpolation (précision sub-pixel) : interpolation linéaire, ENO, WENO
 - Initialiser le reste de l'image à l'infini
- Propagation : algorithme Fast Marching (algorithme de Dijkstra)
 - Résoudre localement $\|\nabla u\| = 1/\beta$ pour le voisin du plus petit point déjà connu

$$\left[\max(D_{ij}^{-x}T, 0)^2 + \max(D_{ij}^{-y}T, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+x}T, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+y}T, 0)^2 \right]^{1/2} = 1/\beta_{ij}^2$$

- Propagation depuis les sources de manière équidistante : utilisation des structures ordonnées
 - Propagation des étiquettes possible



Implémentation numérique

- Différence finies :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{u_{i+1,j}^n - u_{i-1,j}^n}{2\Delta x}; D^{+x} = u_{i+1,j}^n - u_{i,j}^n; D^{-x} = u_{i,j}^n - u_{i-1,j}^n$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{u_{i+1,j}^n - 2u_{i,j}^n + u_{i-1,j}^n}{(\Delta x)^2}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{u_{i+1,j+1}^n + u_{i-1,j-1}^n - u_{i+1,j-1}^n - u_{i-1,j+1}^n}{4(\Delta x)^2}$$
- Courbure :
$$\kappa = \frac{u_{xx}u_y^2 - 2u_xu_yu_{xy} + u_{yy}u_x^2}{(\|\nabla u\|)^3}$$
- Méthode générale de discrétisation (pour $\beta \|\nabla u\|$ convexe)

$$u_{ij}^{n+1} = u_{ij}^n - \tau [\max(-\beta_{ij}, 0)\Delta^+ + \min(-\beta_{ij}, 0)\Delta^-]$$

$$\Delta^+ := [\max(D_{ij}^{-x}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+x}, 0)^2 + \max(D_{ij}^{-y}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{+y}, 0)^2]^{1/2}$$

$$\Delta^- := [\min(D_{ij}^{-x}, 0)^2 + \max(D_{ij}^{+x}, 0)^2 + \min(D_{ij}^{-y}, 0)^2 + \max(D_{ij}^{+y}, 0)^2]^{1/2}$$

Convergence et stabilité

- Convergence

- Considérons le résultat de l'approximation numérique à l'instant k $U_k(x,t)$ et la solution exacte $u(x,t)$. La condition de convergence s'écrit de la façon suivante :

$$\|E_k(x,t)\|_{L_p} \xrightarrow{k \rightarrow 0} 0 \quad \text{où} \quad E_k(x,t) = U_k(x,t) - u(x,t)$$

$$L_1 = \sum |E_k|$$

$$L_2 = \left(\sum E_k^2 \right)^{1/2}$$

$$L_\infty = \max E_k$$

- Stabilité globale

- Dépend de la qualité de discrétisation : le domaine numérique de dépendance doit contenir le domaine mathématique de dépendance.

Schémas numériques d'intégration

- Schéma explicite

$$u_{n+1} = u_n + \tau F(u_n)$$

- Schéma semi-implicite (nécessite la solution d'un système d'équations linéaires)

$$u_{n+1} = u_n + \tau F(u_{n+1})$$

- Schéma implicite (nécessite la solution d'un système d'équations non linéaires)

$$u_n = u_{n+1} - \tau F(u_{n+1})$$

Schéma explicite

- Schéma d'Euler

$$u_{n+1} = u_n + \tau F(u_n)$$

- Condition Courant-Friedrich-Lévy (Étant donnée la discrétisation spatiale, le pas d'intégration doit être suffisamment petit pour que l'information ait suffisamment de temps pour se propager.)

- Pour la discrétisation spatiale $h=1$

$$\tau \cdot \max(F(u_n)) \leq 1$$

- Conséquences :
 - petit pas d'intégration
 - nombre élevé d'itérations
 - effet des « marches d'escalier »

Schéma semi-implicite

- Pour filtres (J. Weickert) et plus récemment pour contours actifs (P. Smereka, 2003)
- Propagation contre l'échelle du temps $u_{n+1} = u_n + \tau F(u_{n+1}) \quad (1)$
- Vitesse F étant exprimée sous forme d'un opérateur matricielle A , l'Eq. (1) devient

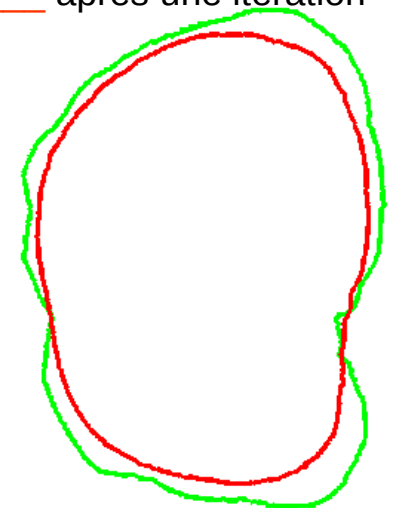
$$u^{n+1} = \frac{1}{m} \sum_{l=1}^m (\mathbf{I} - m\tau \mathbf{A}_l)^{-1} u^n$$

$m = 2$ pour 2D, $m = 3$ pour 3D

τ = pas d'intégration

- Sans contraintes de stabilité sur le pas d'intégration τ (sauf le taux d'erreur) => déplacement de plusieurs pixels dans une itération possible
- Résoudre un système linéaire d'équations

— emplacement d'origine
— après une itération



PARTIE III

MORPHOLOGIE MATHEMATIQUE CONTINUE

Morphologie Mathématique : rappel des notions de base

Les opérateurs de base de la Morphologie Mathématique, $\delta_b, \varepsilon_b: \mathbb{I}^m \rightarrow \mathbb{I}^m, B \subset \mathbb{R}^m$, sont définis :

- en termes ensemblistes: pour $X \subset \mathbb{R}^m$,

$$\delta_B(X) = \bigcap_{b \in B} \bigcap_{x \in X} x + b = x \oplus b$$

$$\varepsilon_B(X) = \bigcap_{b \in B} \bigcap_{x \in X} x - b = x \ominus b$$

- version fonctionnelle: pour $u, g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$ $\delta_g(u) = \sup_{y \in \mathbb{R}^m} \{u(x - y) + g(y)\}$
- si g plane et bornée, c.-à-d. $g = \begin{cases} 0 & \text{à l'intérieur d'un } D \text{ fini} \\ -\infty & \text{ailleurs} \end{cases}$

alors

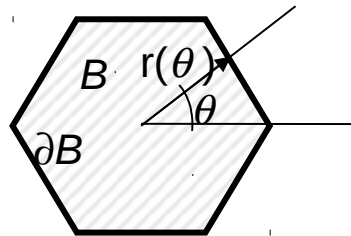
$$\delta_g(u) = \sup_{y \in D} \{u(x - y)\}$$

Morphologie Mathématique continue

On bénéficie de deux propriétés bien connues des dilations:

1. dilatation et seuillage commutent, c.-à-d. qu'une dilatation fonctionnelle peut être obtenue comme une collection des dilations binaires niveau par niveau.
2. dilations par éléments structurants convexes sont associatives.

Si B est convexe, ∂B la frontière de B ,
alors $\partial B = r(\theta): [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$.



Dilatation sera vue sous l'angle du principe de Huygens: Tout point de la courbe C est source de propagation à vitesse $r(\theta)$ dans la direction θ . Ne considérant que la composante normale, le flux correspondant est

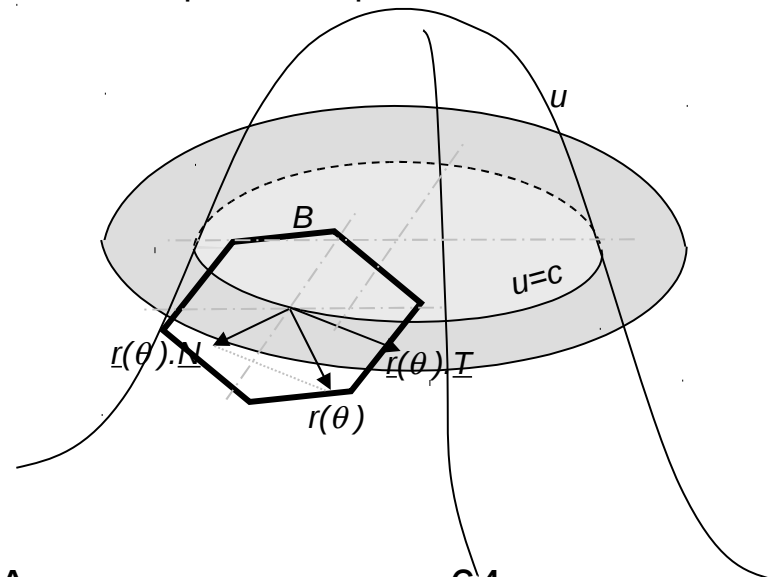
$$\beta = \sup_{\theta} \{r(\theta) \cdot N\}$$

Pour la courbe C

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \sup_{\theta} \{ \vec{r}(\theta) \cdot \vec{N} \} \vec{N}$$

Enfin, sous le formalisme du Level Set

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sup_{\theta} \{ \vec{r}(\theta) \cdot \nabla u \}$$



Morphologie Mathématique continue (2)

- Les cas couramment utilisés (cercle, carré, losange) peuvent être générés en prenant les boules unitaires générées par métriques L_p , pour $p=1, 2, \infty$.

$$\sup_{\vartheta} \{ \vec{r} \cdot \nabla u \} = \begin{cases} \|\nabla u\|_1 = |u_x| + |u_y| & \dots \text{ carré} \\ \|\nabla u\|_2 = \sqrt{(u_x)^2 + (u_y)^2} & \dots \text{ cercle} \\ \|\nabla u\|_\infty = \max(|u_x|, |u_y|) & \dots \text{ losange} \end{cases}$$

avec $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$

Implémentation numérique

- Équation générique (élément structurant : disque)

$$u^{n+1} = u^n \pm \tau g(\|\nabla u\|)$$

- Discrétisation « upwind »

$$\|\nabla u\| = [\max(g, 0)\nabla^+ + \min(g, 0)\nabla^-]$$

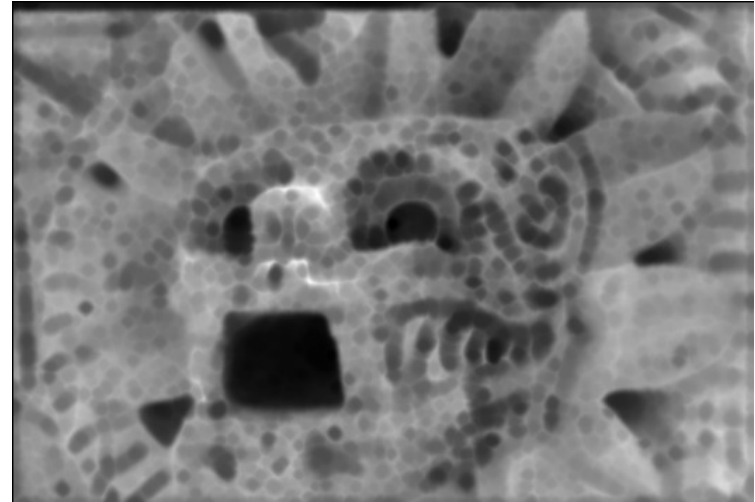
$$\nabla^+ = [\max(u_x^-, 0)^2 + \min(u_x^+, 0)^2 + \max(u_y^-, 0)^2 + \min(u_y^+, 0)^2]^{\frac{1}{2}}$$

$$\nabla^- = [\max(u_x^+, 0)^2 + \min(u_x^-, 0)^2 + \max(u_y^+, 0)^2 + \min(u_y^-, 0)^2]^{\frac{1}{2}}$$

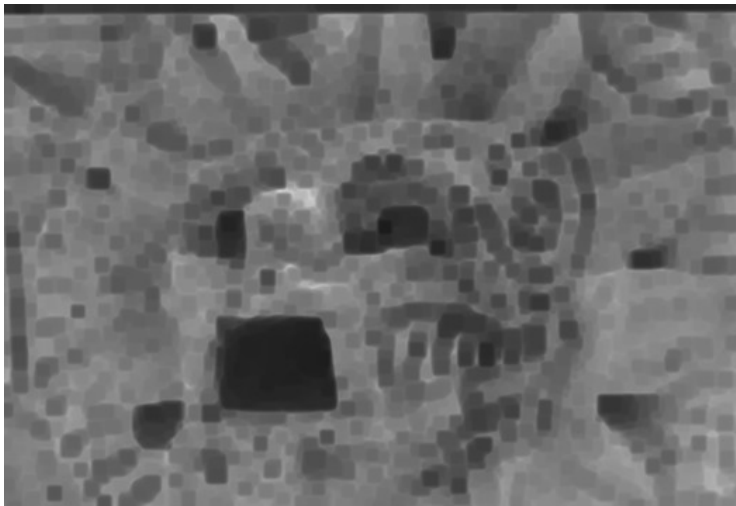
Morphologie Mathématique continue:



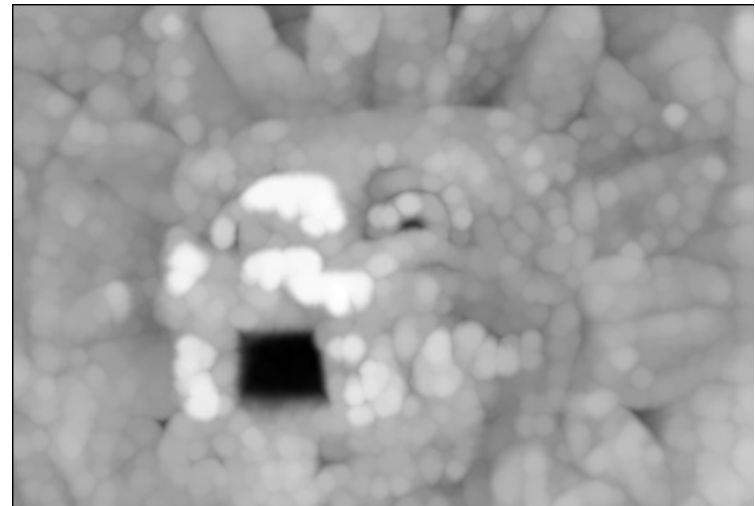
Original



Érosion par un disque



Érosion par un carré



Dilatation par un disque

Ouvertures/Fermetures

- Soit $u = \delta_B[\varepsilon_B(f)]$ l'ouverture de f par B . u peut être généré avec un B circulaire à l'échelle arbitraire (pour $r > 0$) avec

pour $t = 0$ à $t = 2r$ avec $u(x, y, 0) = u_0(x, y)$ pour condition initiale.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\max(\operatorname{sgn}(r - t), 0) \|\nabla u\|_2 + \\ + \max(\operatorname{sgn}(t - r), 0) \|\nabla u\|_2$$

Rq.:

- Cette équation agit comme érosion pour $t \in [0, r]$ et comme dilatation pour $t \in [r, 2r]$.
- La discontinuité à l'instant $t = r$ peut être gérée par un changement de l'échelle temporelle.

Reconstruction par Ouverture/Fermeture

Soit f la fonction référence (image) et g la fonction marqueur, $g \leq f$.
Considérons

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, y, t) = \|\nabla u\| \operatorname{sgn}(f(x, y) - u(x, y, t))$$

avec $u(x, y, 0) = g(x, y)$,

alors

$$u_{\infty}(x, y) = \lim_{t \rightarrow \infty} u(x, y, t)$$

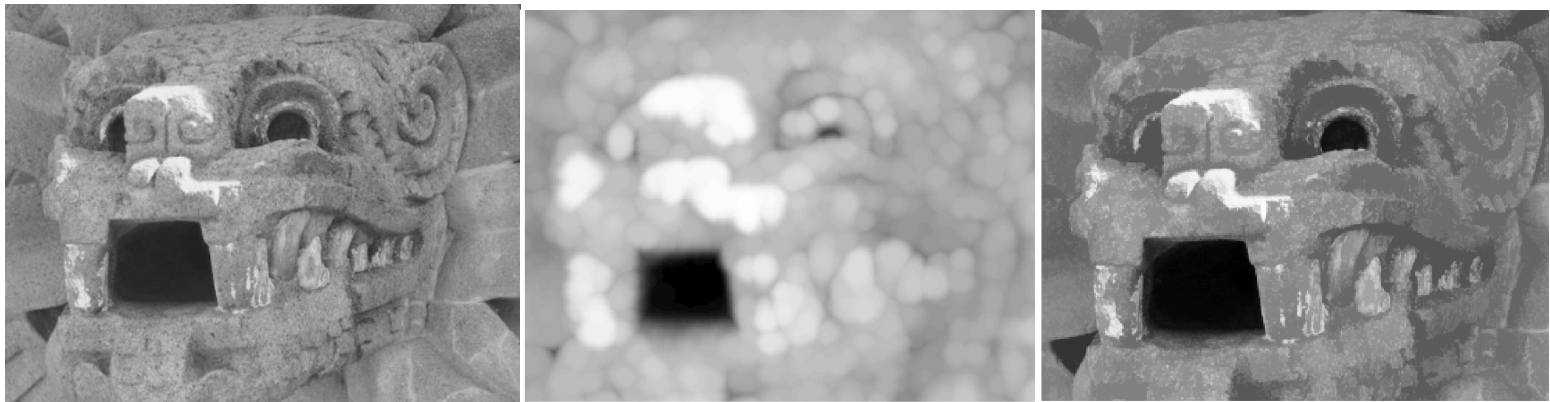
est la reconstruction par ouverture de $u_0(x, y) = u(x, y, 0)$. $\operatorname{sgn}(f - u)$ est une fonction de commutation spatio-temporelle qui contrôle la croissance à l'instant t .

Rq.: Pour la fermeture changer le signe et permuter les rôles de f et g .

Nivellements continus

- Nivellement procède par la déformation du marqueur I_M qui est contrôlée par la référence I .
- La différence entre l'évolution est la référence qui détermine le type de cette déformation : expansion ou contraction.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{sign}(I_M - u) \|\nabla u\| \text{ avec } \text{sign}(I_M - u) \begin{cases} -1 & \text{si } (I_M - u) < 0 \\ 0 & \text{si } (I_M - u) = 0 \\ 1 & \text{si } (I_M - u) > 0 \end{cases}$$



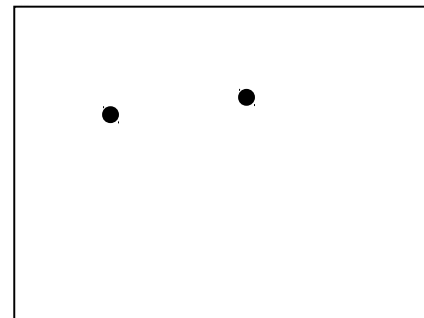
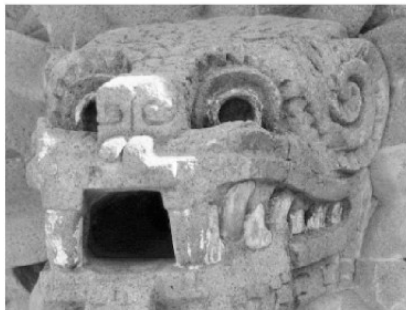
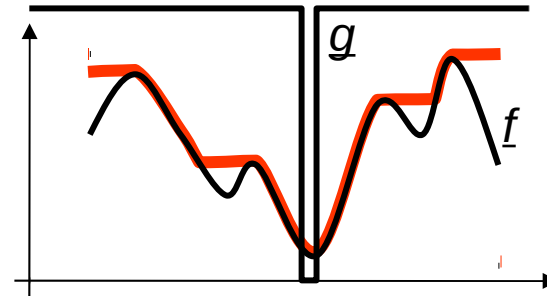
- Les déformations sont réalisées par les érosions et dilatations multi-échelle.

Swamping

Algorithme de la famille des méthodes de reconstruction d'images. La surface topographique est remodelée de façon à ce que les marqueurs deviennent les seuls minima régionaux.

Soient f fonction image et g fonction marqueur avec $g = -\infty$ à l'extérieur des marqueurs. L'EDP générant le swamping est

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\|\nabla u\| \vee f \\ u_0 = g \vee f \end{cases}$$



PARTIE IV

PROBLEMES STATIONNAIRES

Problèmes stationnaires

Les problèmes stationnaires se distinguent par l'absence de la notion de temps dans l'EDP sous-jacente (équation Eikonale).

Les applications visées sont dérivées de la notion de ***fonction distance*** (navigation robot, recherche du plus court chemin, par ex.), distance pondérée (shape from shading), et autres.

Distance pondérée

- Pour $p_1, p_2 \in X \subset \mathbb{Z}^2$, la distance
$$\text{dist}(p_1, p_2) = \min(l(C(p_1, p_2)))$$
- Pour $X \subset \mathbb{R}^2$
$$\text{dist}(p_1, p_2) = \inf \int_{p_1}^{p_2} C(s) ds$$

où s est l'abscisse curviligne.
- **Distance pondérée** par $P: X \rightarrow \mathbb{R}$
$$\text{dist}(p_1, p_2) = \inf \int_{p_1}^{p_2} P(C(s)) ds$$
- Il peut être démontré que le résultat vérifie la solution stationnaire de **l'équation Eikonale**
$$\|\nabla u\| = P$$
$$u_0 = C_0$$

avec pour condition initiale u_0 la source C_0 .

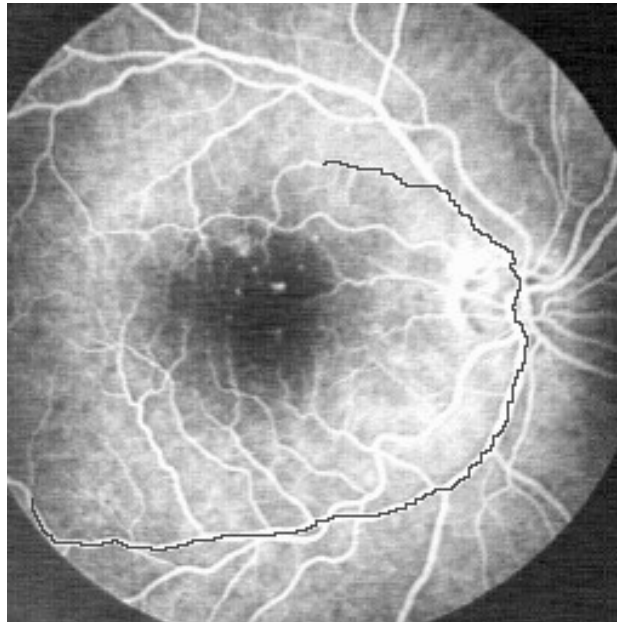
Distance pondérée (2)

Si $P: X \rightarrow \mathbb{R}^+$, la solution de l'équation $\|\nabla u\| = P$ peut être obtenue en $O(N \log N)$ avec **Fast Marching**.

Fast Marching est dérivé de l'algorithme de Dijkstra de recherche de chemin de poids minimal par propagation de solution sur graphes valués aux poids positifs.

$$\|\nabla u\| = P$$

(Maille de discrétisation de l'image est vue comme un graphe.)



LPE continue

Ligne de partage des eaux [définition par distance topographique] - complément de l'ensemble des zones d'influence par distance minimale à l'ensemble des marqueurs arbitraires.

Soit $f: D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$, fonction image, deux fois différentiable. La distance topographique

$$dist_f(p_0, p_1) = \inf_{C \in \mathcal{C}(p_0, p_1)} \int_C \|\nabla f(p(s))\| ds$$

Le bassin versant $CB(m_k)$ du minimum m_k est défini

$$CB(m_k) = \left\{ x \mid \forall j \in K \setminus k : f(m_k) + dist_f(x, m_k) < f(m_j) + dist_f(x, m_j) \right\}$$

La LPE de f

$$LPE(f) = D \cap \left(\bigcap_{k \in K} CB(m_k) \right)^c$$

LPE continue (2)

En formulation continue, la distance topographique le long d'un chemin C devient l'intégral curviligne de $\|\nabla f\|$ le long de ce chemin.

On retrouve l'équation Eikonale

$$\|\nabla u\| = P \quad (1)$$

où P est une fonction de coût.

Si $P = 1/\|\nabla f\|$ et si les sources coïncident avec les contours des minima régionaux, on retrouve dans Eq. 1 l'équivalent de la LPE par zones d'influence.

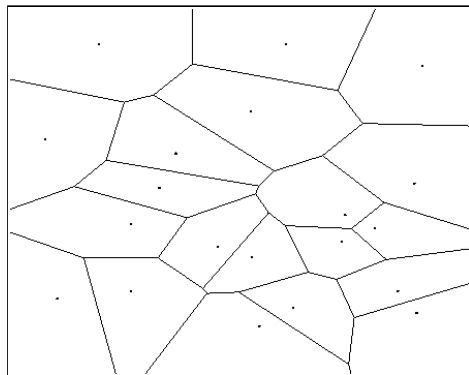
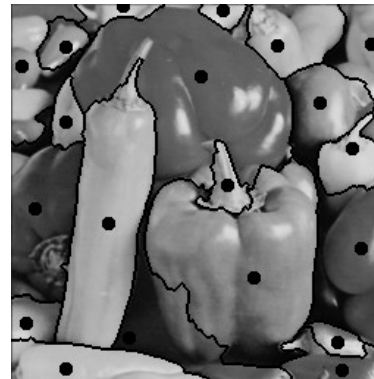


Diagramme
de Voronoï



LPE

Rq.: Si les sources ne coïncident pas avec les minima, il faut utiliser swamping pour les imposer.

Littérature :

1. Brockett R. W., Maragos P., "Evolution equations for continuous-scale morphological filtering," IEEE Trans. Signal Proc., vol. 42, no. 12, pp. 3377-3386, 1994
2. F. Cao: Geometric Curve Evolution and Image Processing. LNM 1805, Springer, Berlin, 2003.
3. P. Maragos, "Partial Differential Equations for Morphological Scale-Spaces and Eikonal Applications", The Image and Video Processing Handbook, 2nd Ed., A. Bovik, ed., Elsevier, 2005, pp.587-612.