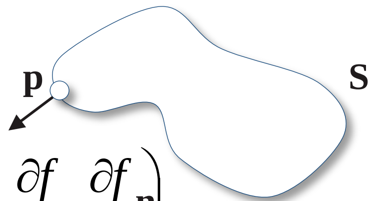
# Implicit Surfaces
## *Lancer de rayon*

$$\forall \mathbf{p} \in S, \mathbf{n} = -\nabla f(\mathbf{p}) / \| \nabla f(\mathbf{p}) \|$$




$$\nabla f(\mathbf{p}) = \left( \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)_{\mathbf{n}}$$

$$\Omega = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) > 0 \right\}$$

From mathematics …

… to the screen


Université Lumière Lyon 2

eric.galin@liris.cnrs.fr

http://liris.cnrs.fr/~egalin

# Lancer de rayon



## Lancer de rayon

- Méthodes analytiques [Wyvill1990, Nishita1994]
- Echantillonnage : analyse d'intervalle [Snyder 1992] ou par condition de Lipschitz [Karla1989]

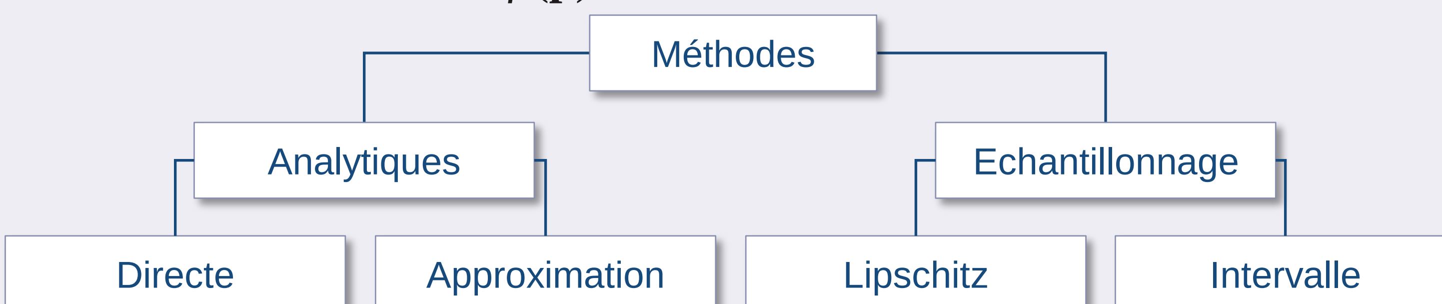
## Résolution

- Soit $\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}\,t$ l'équation d'un rayon et $f(\mathbf{p}) = 0$ l'équation définissant la surface implicite
- On cherche les solutions en $t$ du système

$$f(t) = f \circ \mathbf{p}(t) = 0$$

## Classification

- Selon la nature de $f(\mathbf{p})$




LIRIS
Université Lumière Lyon 2
gamagora
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

# Solutions analytiques



## Résolution analytique

Lorsque l'équation de $f(\mathbf{p})$ est algébrique, $f(\mathbf{p}(\mathrm{t}))$ est un polynôme en $\mathrm{t}$ de même degré que $f$

Si $f(\mathbf{p}(\mathrm{t}))$ de degré inférieur ou égal à $4$, il existe des solutions analytiques

## Exemple

Equation de la sphère $(\mathbf{p}(t)-\mathbf{c})^2 - r^2 = 0$

Equation du rayon $\mathbf{p}(t) = \mathbf{o} + \mathbf{d}t$

Substitution de l'équation du rayon dans l'équation de la sphère et résolution d'une équation du second degré en t

$$\mathbf{d}^2 t^2 + 2(\mathbf{o}-\mathbf{c})\cdot\mathbf{d}\,t^2 + (\mathbf{o}-\mathbf{c})^2 - r^2 = 0$$

Université Lumière Lyon 2

eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

# Solutions analytiques

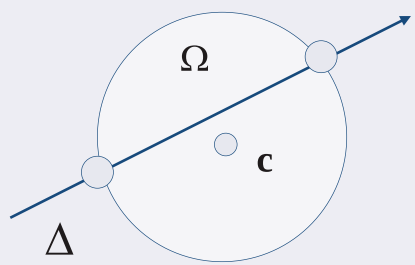


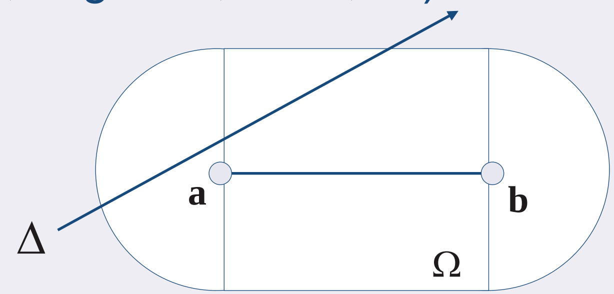
## Blobs à squelettes

Fonction potentiel : $f(\mathbf{p}) = \sum_{0 \le i < n} f_i(\mathbf{p}) - T$ avec $f_i(\mathbf{p}) = g_i \circ d_i(\mathbf{p})$

Le long du rayon : $f \circ \mathbf{p}(t) = \sum_{0 \le i < n} g_i \circ d_i \circ \mathbf{p}(t) - T$

$d_i \circ \mathbf{p}(t)$ est une équation polynomiale en $t$ pour certains **squelettes (cylindre**, point, segment, cube, …)




$$d^2(\mathbf{p}, \Delta) = (\mathbf{p} - \mathbf{c})^2 \qquad d^2(\mathbf{p}, \Delta) = \|\mathbf{p} - \mathbf{a}\|^2 - ((\mathbf{p} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u})^2$$

Point $d^2(\mathbf{p}(t), \Delta) = \mathbf{d}^2 t^2 + (\mathbf{o} - \mathbf{c}) \cdot \mathbf{d}t + (\mathbf{o} - \mathbf{c})^2$

Segment $d^2(\mathbf{p}(t), \Delta) = (\mathbf{o} + \mathbf{d}t - \mathbf{a})^2 - ((\mathbf{o} + \mathbf{d}t - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u})^2$

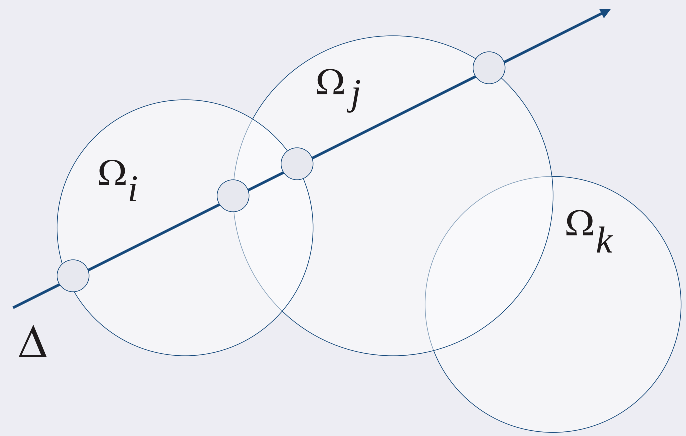

Université Lumière Lyon 2
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

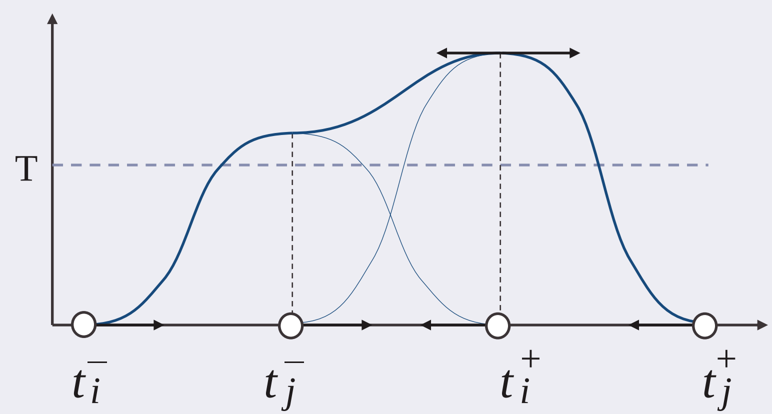
# Solutions analytiques



## Algorithme

### Résolution analytique par morceaux




Construction des intervalles où les éléments i ont une influence
$\Omega_i \cap \Delta$

↓

Calcul de l'équation du potentiel le long du rayon
$f_i\ (t) = f_i\,(\,d_i\,(\,\mathbf{p}(t)\,)\,)$

↓

Pour tous les sous intervalles résoudre l'équation
$\Sigma\ f_i\ (t) = 0$

Si $g(r)$ est de degré $n$, l'équation du potentiel le long du rayon est de degré $2n$

Université Lumière Lyon 2
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

# Méthodes par approximation

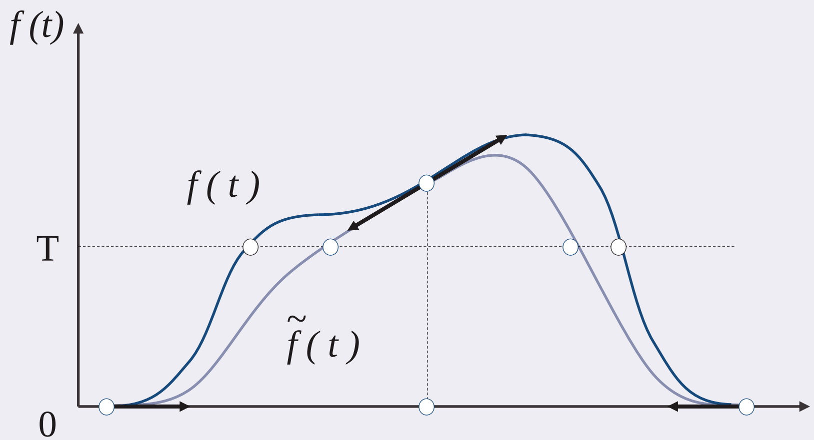


## Cas général

On ne peut pas calculer $f\,(\mathbf{p}(t))$

Echantillonnage du potentiel et du gradient le long du rayon

Approximation de $f\,(\mathbf{p}(t))$ par des polynômes d'Hermite




Résolution de $\tilde{f}\,(\,t\,) = 0$

Construction des intervalles où les éléments i ont une influence $\Omega_i \cap \Delta$

↓

Approximation de l'équation du potentiel le long du rayon $\tilde{f}_i\ (t)$ par échantillonnage

↓

Pour tous les sous intervalles résoudre l'équation $\Sigma\ \tilde{f}_i\ (t) = 0$


LIRIS
Université Lumière Lyon 2
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

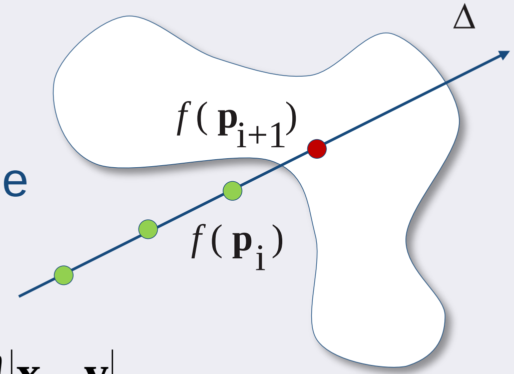
# Méthodes par échantillonnage



## Progression le long du rayon

Avancer le long de $\Delta$ tant que $\operatorname{sign}\left(f\left(\mathbf{p}_i\right)\right)=\operatorname{sign}\left(f\left(\mathbf{p}_{i+1}\right)\right)$

Erreurs selon le choix du pas $\varepsilon$



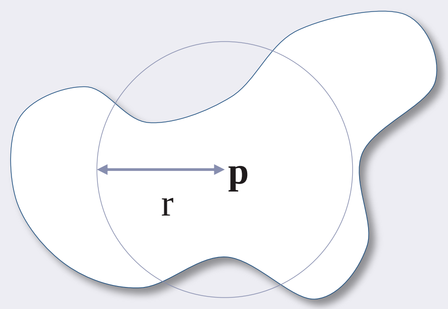

## Fonctions Lipschitziennes

Critère d'exclusion de région de recherche

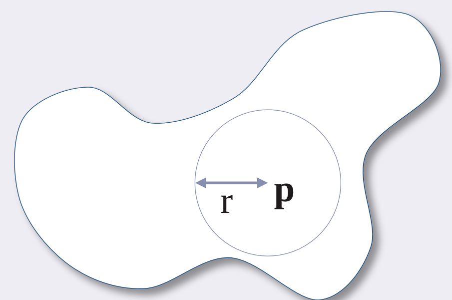
Bornes sur les dérivées successives

Par définition :

$$\exists \lambda > 0 \quad \forall (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega \quad \left|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})\right| < \lambda \left|\mathbf{x}-\mathbf{y}\right|$$




$$\left|f(\mathbf{p})\right| < \lambda r$$




$$\left|f(\mathbf{p})\right| > \lambda r$$

Critère d'autant plus performant que la constante $\lambda$ est précise

D. Kalra, A. Barr. Guaranteed Ray Intersections with Implicit Surfaces. *Siggraph'89 Proceedings*, **23**(3): 297 – 306, July 1989
J. Hart. Sphere Tracing: a Geometric Method for the Antialiased Ray Tracing of Implicit Surfaces. *The Visual Computer*, **12**(10): 527 – 545, December 1996.

Université Lumière Lyon 2

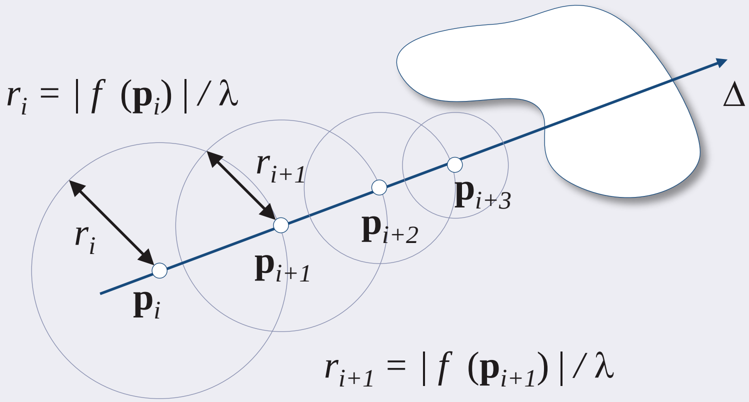
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

# Méthodes par échantillonnage


Surfaces implicites
Modélisation
Animation
Visualisation
Etat de l'art
Lancer de rayon
Maillage
Nuages de points
Textures
Conclusion


## Algorithme

Progression le long de $\Delta$ avec un pas $\varepsilon$ adaptatif




Calculer le potentiel au point $\mathbf{p}(t)$ $f(t) = f(\mathbf{p}(t))$ et le rayon de la sphère vide $r = |f(t)|/\lambda$

Si $f(t) > \varepsilon$ alors avancer d'un incrément $r$ sinon arrêter

## Limitations

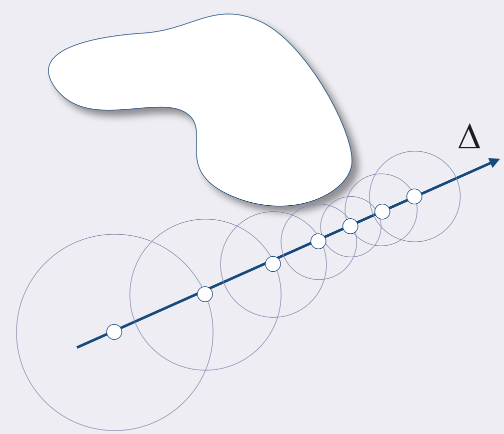
Critère d'intersection non garanti

Ralentissement au voisinage de la silhouette

## Améliorations

Critère de Lipschitz portant sur la dérivée seconde

$$\exists \gamma > 0 \quad \forall (\mathbf{x},\mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega \quad |f'(\mathbf{x}) - f'(\mathbf{y})| < \gamma |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$





Université Lumière Lyon 2
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

# Analyse d'intervalle



## Approximation de l'image d'un intervalle

On note *f([a , b])* l'image d'un intervalle *[a , b]* par *f*

On encadre *f([a , b])* par une approximation facile à calculer

## Propriétés

Si *f* est croissante, alors *f([a , b]) = [f(a) , f(b)]*

Dans le cas général, on utilise l'arithmétique d'intervalle pour évaluer *f([a , b])*

$$[a,b]+[a',b']=[a+a',b+b']$$

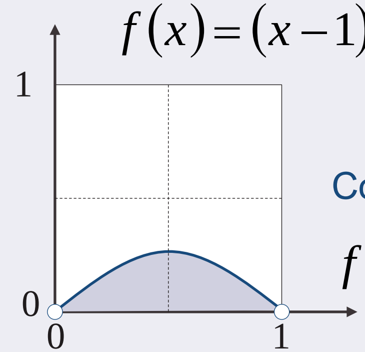
$$[a,b]\times[a',b']=[\min(aa',ab',ca',bb'),\max(aa',ab',ca',bb')]$$

## Limitations

L'arithmétique d'intervalle peut être peu précise

| Fonction | Combinaison d'intervalle |
|---|---|
| $x$ | $[0,1]$ |
| $1-x$ | $1-[0,1]=[0,1]$ |
| $(1-x)^2$ | $(1-[0,1])\times[0,1]=[0,1]$ |

$$f(x)=(x-1)^2$$




$$f([0,1])=[0,1]$$

Combinaison d'intervalle

$$f([0,1])=[0,0.25]$$

Image exacte

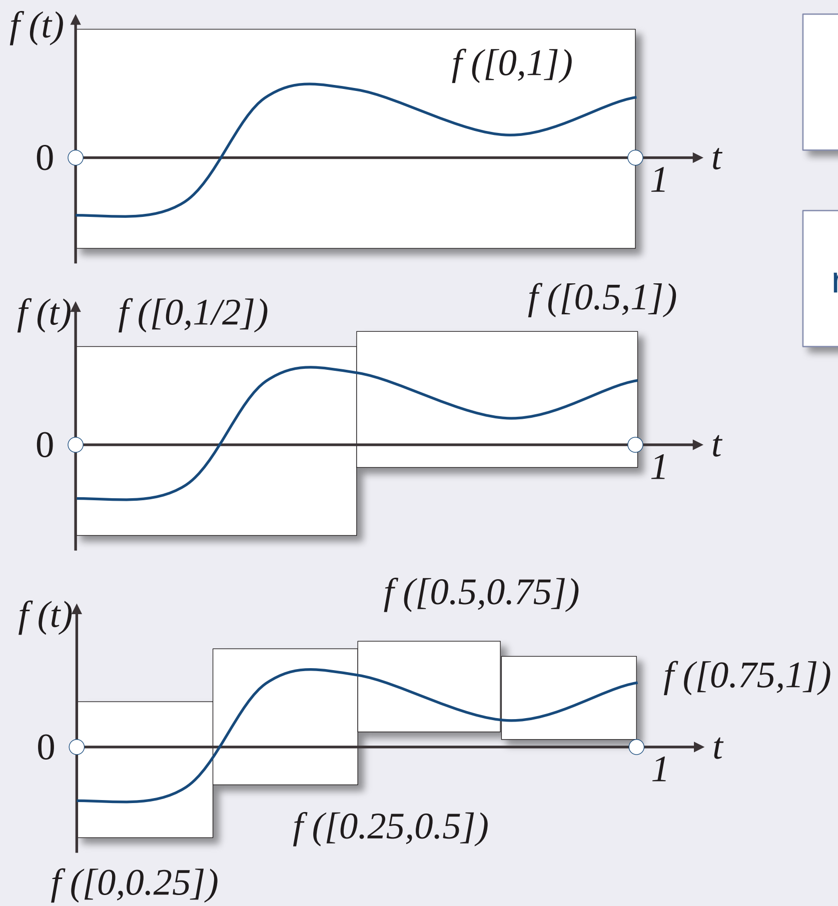

LIRIS
Université Lumière Lyon 2
gamagora
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

# Analyse d'intervalle



## Algorithme

Analyse d'intervalle sur un interval réel $[a, b]$ le long de $\Delta$




Résolution de $f(t) = 0$

Calculer un encadrement de $f([a, b])$ par analyse d'intervalle

Si $0 \notin f([a, b])$, il n'existe pas de racine, sinon subdiviser $[a, b]$ et itérer la recherche

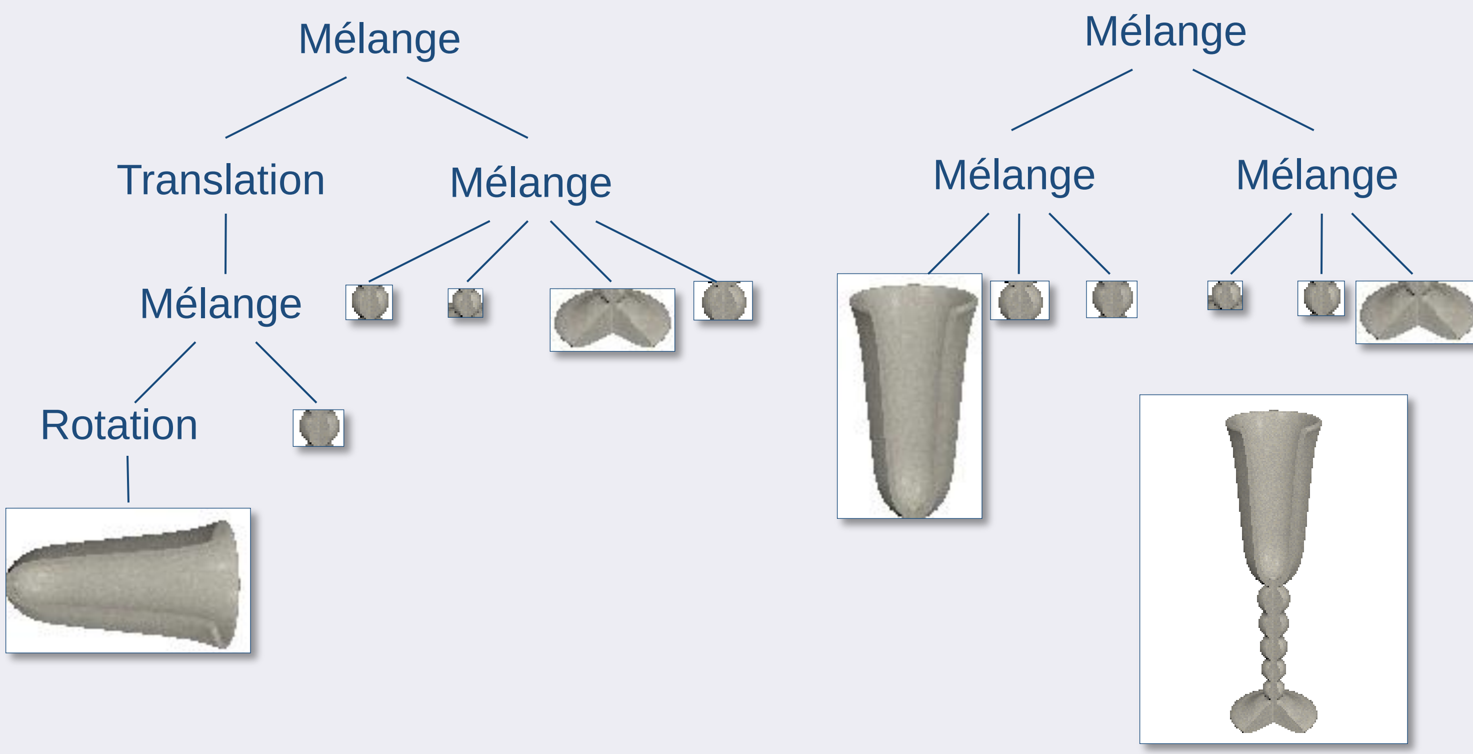

Université Lumière Lyon 2
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin

# Optimisation du lancer de rayon



## Équilibrage de l'arbre de construction

Réécriture et simplification pour accélérer le calcul de $f(\mathbf{p})$




## Accélération des calculs de distance

Optimisations du calcul de la distance aux squelettes complexes (cônes, sphères, rectangles, maillages)


Université Lumière Lyon 2
eric.galin@liris.cnrs.fr
http://liris.cnrs.fr/~egalin