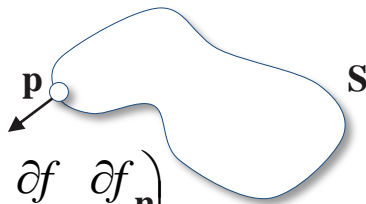


Implicit Surfaces

Overview

$$\forall \mathbf{p} \in S, \mathbf{n} = -\nabla f(\mathbf{p}) / \|\nabla f(\mathbf{p})\|$$



The diagram shows a blue, irregularly shaped surface labeled 'S'. A point 'p' is marked on the surface with a small circle. A vector 'n' originates from 'p' and points outwards, perpendicular to the surface, representing the normal vector.

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \quad \Omega = \{ \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) > 0 \}$$

From mathematics ...

... to the screen



Applications

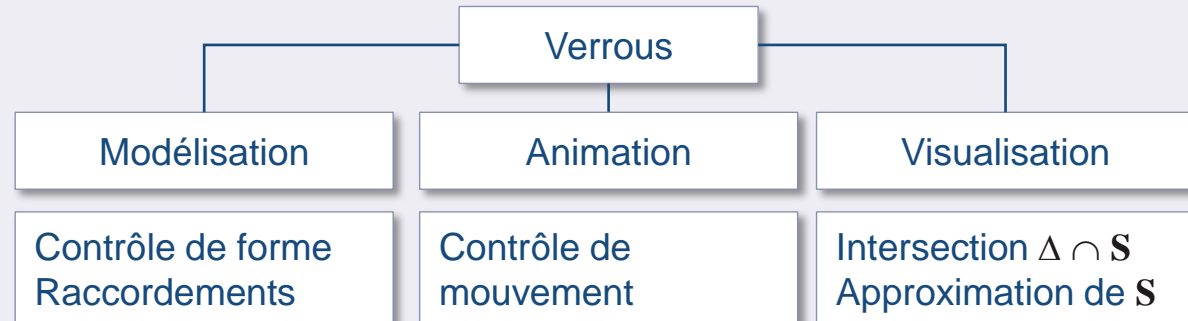
Représentation mathématique adaptée à la modélisation de volumes (de géométrie et de topologie changeante)



Terminator 2 Judgment day

Verrous scientifiques et techniques

Grande variété de formes avec une représentation compacte



Définition

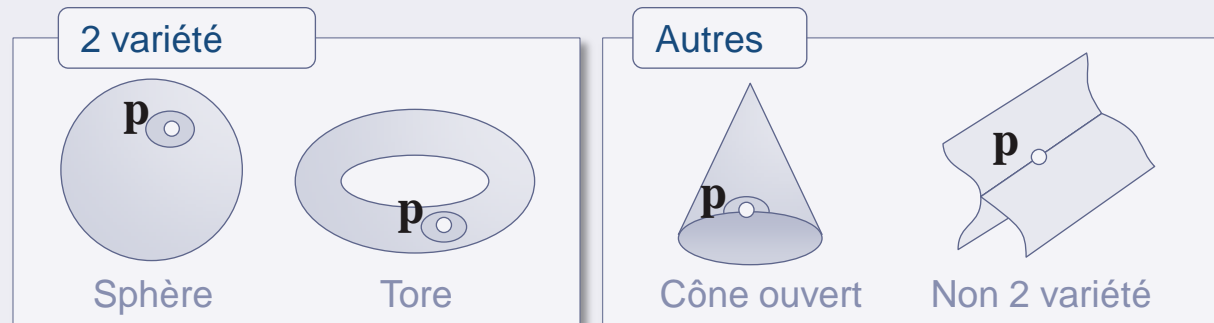
Caractérisation indirecte de la surface $S = \{ \mathbf{p} \in \mathbf{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0 \}$

Propriétés

Les surfaces implicites sont des formes géométriques à 2 dimensions dans \mathbf{R}^3

Une surface implicite est une 2 variété

Le voisinage autour de tout point \mathbf{p} de la surface est équivalent à un disque (difféomorphisme)



Surfaces Eulériennes

Formule d'Euler pour les maillages

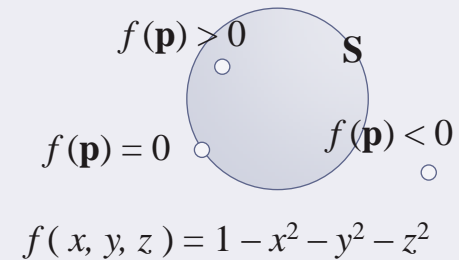
$$V - E + F = 2 - 2H$$

Théorème des fonctions implicites

Si 0 est une valeur régulière de f , alors la surface implicite $f^{-1}(0)$ est une 2 variété

Théorème de séparation

Une 2 variété sépare l'espace \mathbf{R}^3 en une surface et 2 sous domaine connexes : une région finie dans la surface \mathbf{S} et une région infinie dehors

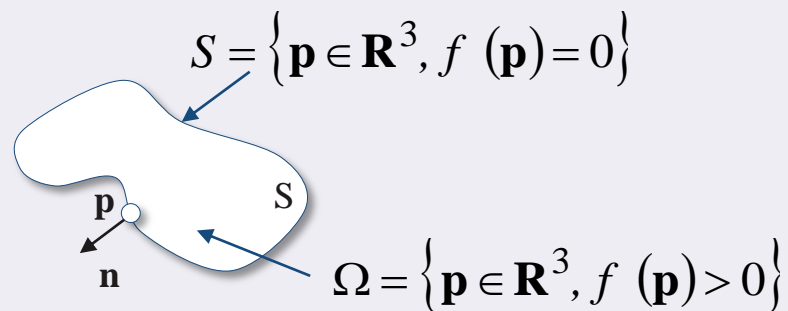


Définition et propriétés

Intérieur de la surface

Gradient

$$\nabla f(\mathbf{p}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$



Approximation numérique des dérivées

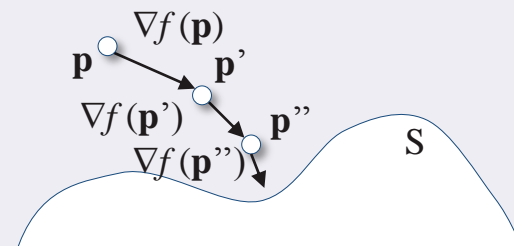
$$\frac{\partial f}{\partial x} \approx \frac{f(x + \varepsilon, y, z) - f(x - \varepsilon, y, z)}{2\varepsilon}$$

Normale à la surface

$$\forall \mathbf{p} \in S, \mathbf{n} = -\nabla f(\mathbf{p}) / \|\nabla f(\mathbf{p})\|$$

Suivi de gradient

Algorithme fondamental de projection d'un point sur la surface



Matrice Hessienne

La matrice hessienne de f est la matrice carrée $\mathbf{H}(f)$ de ses dérivées partielles secondes

$$\mathbf{H}_{ij}(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$\mathbf{H}_{ij}(f) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

Pour f de classe C^2 définie sur un ouvert Ω de \mathbf{R}^3 , cette matrice est bien définie et symétrique

Applications

Nature des points critiques de la fonction f (annulation de ∇f)

Un point critique \mathbf{p} de f est dégénéré si $\det(\mathbf{H}(f(\mathbf{p}))) = 0$

Classification par analyse du signe
des valeurs propres $\lambda_k(\mathbf{H}(f))$

$\mathbf{H}(f)$ définie positive,
la fonction f atteint un
minimum local

$\mathbf{H}(f)$ définie négative,
la fonction f atteint un
maximum local

$\mathbf{H}(f)$ a des valeurs
propres positives et
négatives : point col

Propriétés

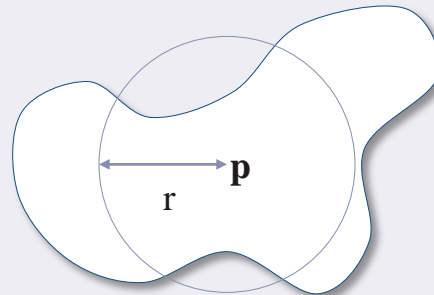
La fonction f doit être au moins de classe C^0

Les fonctions f de classe C^1 ou C^2 sont plus régulières

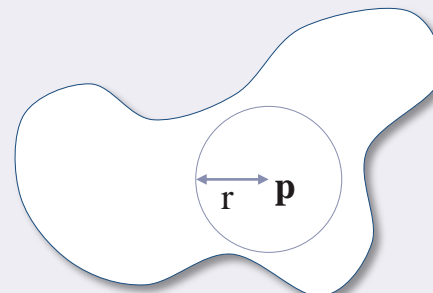
Fonctions Lipschitziennes

Par définition

$$\exists \lambda > 0 \quad \forall (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \Omega \times \Omega \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \lambda |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$



$$|f(\mathbf{p})| < \lambda r$$



$$|f(\mathbf{p})| > \lambda r$$

Apport des surfaces implicites

Caractérisation volumique des matériaux

Lissage de la surface par convolution

Représentation implicite des rochers



Structure de données

Caractérisation volumique des matériaux en piles de matière

Lissage de la surface par convolution

$$S = \left\{ \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3, f(\mathbf{p}) = 0 \right\}$$

Fonction de potentiel

Convolution sur un support compact cubique

$$f(\mathbf{p}) = \frac{i(\mathbf{p})}{4\sigma^3} - 1 \quad i(\mathbf{p}) = (g * h)(\mathbf{p}) = \int_{\mathbb{R}^3} g(\mathbf{p}) h(\mathbf{p} - \mathbf{q}) d\mathbf{q}$$

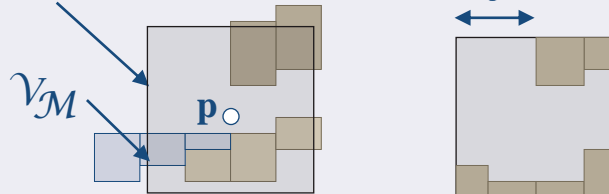
Squelette

$$g(\mathbf{p}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{p} \in M \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Noyau

$$h(\mathbf{q}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \|\mathbf{q}\|_{\infty} < \sigma \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Support de convolution Ω



$$f(\mathbf{p}) = \frac{i(\mathbf{p})}{4\sigma^3} - 1 = 2 \frac{V_M}{V_{\Omega}} - 1$$

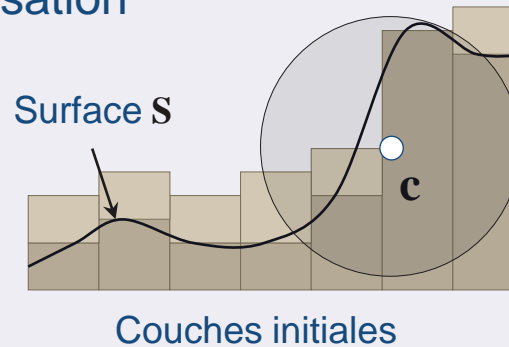
Combinaison des modèles implicites et discrets

Créer une primitive avec un centre c

Mélange avec la primitive implicite

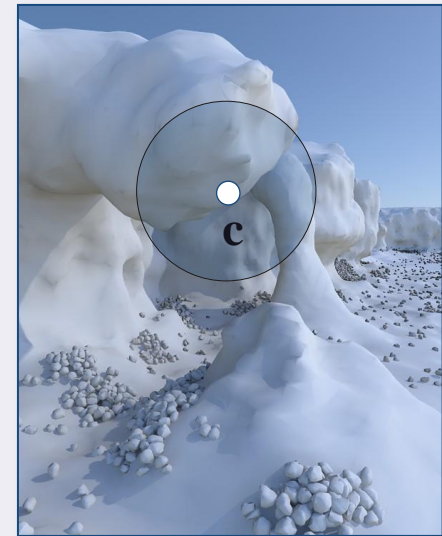
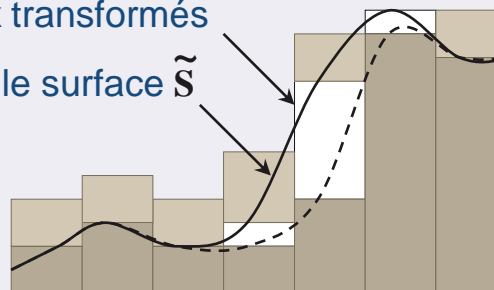
Discrétisation de la surface implicite en piles

Stabilisation



Matériaux transformés

Nouvelle surface \tilde{S}



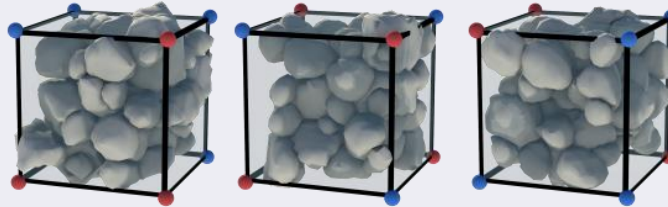
Sculpture

Génération de surplombs et de gorges



Principe de la méthode

Pavage apériodique de motifs tridimensionnels



Génération d'un ensemble de configuration cubiques C_k

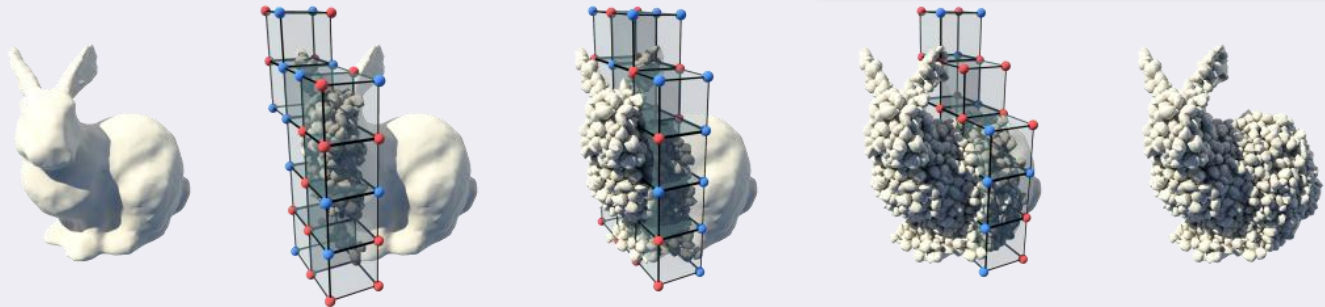
Distribution cohérente de centres c_j dans les cubes C_k

Construction des cellules de Voronoï V_j pour les nuages $\{c_j\}$

Erosion locale des cellules V_j pour définir les rochers

Instanciation

Seuls les rochers dont les centres c sont à l'intérieur d'un volume de référence Ω sont instanciés



A. Peytavie, E. Galin, J. Grosjean, S. Mérillou. Procedural generation of rock piles using aperiodic tiling. *Computer Graphics Forum (Proceedings of Pacific Graphics)*, **28**(7), 1801-1809, 2009.

Génération de la forme des rochers

Introduction

Overview

Tile Generation

► Volume Generation

Erosion Process

Instantiation

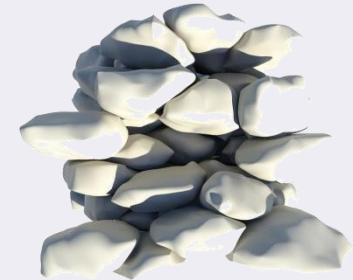
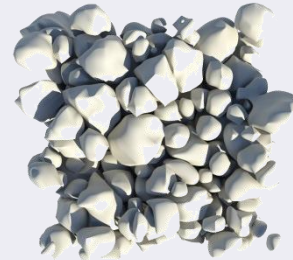
Results

Conclusion

Génération

Volumes des cellules de Voronoï aux points \mathbf{p}_k

Distance anisotrope pour contrôler la forme et l'orientation



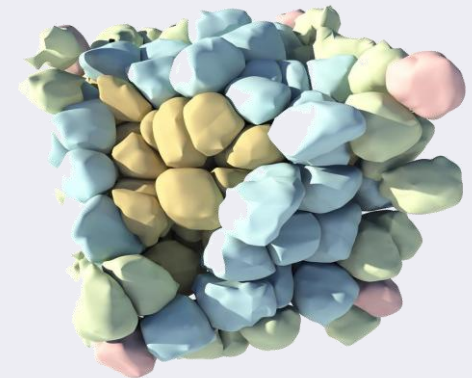
$$d_k(\mathbf{p}) = \frac{1}{g_k} f_k(\mathbf{p})$$

g_k et \mathbf{n}_k contrôlent la taille des blocs
 $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ orientation des rochers
 $\alpha_k, \beta_k, \gamma_k$ facteur d'échelle

$$f_k(\mathbf{p}) = \alpha_k((\mathbf{p} - \mathbf{p}_k)\mathbf{x})^2 + \beta_k((\mathbf{p} - \mathbf{p}_k)\mathbf{y})^2 + \gamma_k((\mathbf{p} - \mathbf{p}_k)\mathbf{z})^2$$

Erosion

Erosion des volumes de Voronoï
Atténuation de l'érosion aux points
de contact



Sculpture

Création automatique de rochers en contact sur des formes quelconques



Génération procédurale

Création automatique d'empilements de rochers



Génération procédurale

Création automatique d'empilements de rochers

