



Présentation et objectifs du cours

La *morphologie mathématique* est une théorie de traitement *non linéaire* de l'information apparue en France dans les années 60 (G. Matheron & J. Serra, Ecole des Mines de Paris), et qui est aujourd'hui très largement utilisée en *analyse d'images*.

Contrairement au traitement linéaire des images, la morphologie mathématique ne s'appuie pas sur le traitement du signal, mais repose sur la *théorie des ensembles*, ce qui en fait une discipline relativement « auto-contenue » et formant un tout cohérent.

L'objectif de ce cours est de *fournir les bases*, mais aussi de présenter *les techniques les plus récentes* du traitement morphologique des images. On s'efforcera de préserver un *équilibre* entre les *concepts* et les *algorithmes*, en développant autant que possible les problèmes d'implantation numérique posés.

Plan du cours

CHAPITRE 1 : Principes de base & opérateurs élémentaires

CHAPITRE 2 : Opérateurs complexes et filtres morphologiques

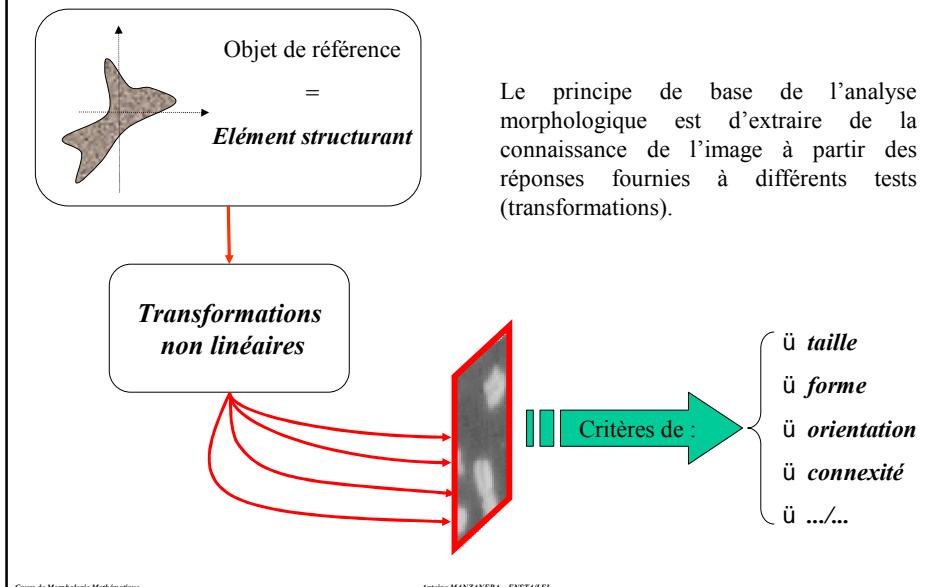
CHAPITRE 3 : Opérateurs connexes et géodésie

CHAPITRE 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

Chapitre 1 : Introduction & principes – Opérateurs de base

- Principes et fondements de la morphologie mathématique.
- Structures et concepts de base.
- Opérateurs de base sur les ensembles.
- Opérateurs de base sur les fonctions.
- Algorithmique : calcul des opérateurs de base.

L'approche morphologique du traitement d'images



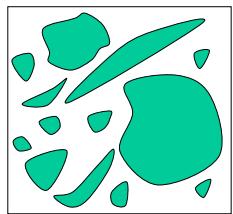
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

5

L'approche morphologique du traitement d'images

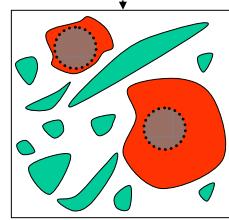
Exemple :



Elément structurant 1



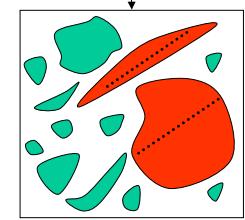
Test : « contient »



Elément structurant 2



Test : « contient »



Taille, forme, orientation,...

↓
Analyse quantitative, spatiale,...

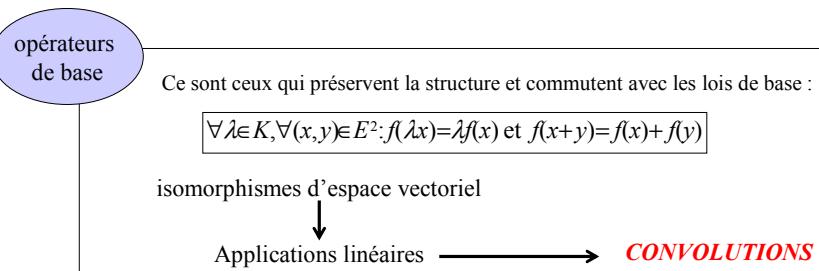
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

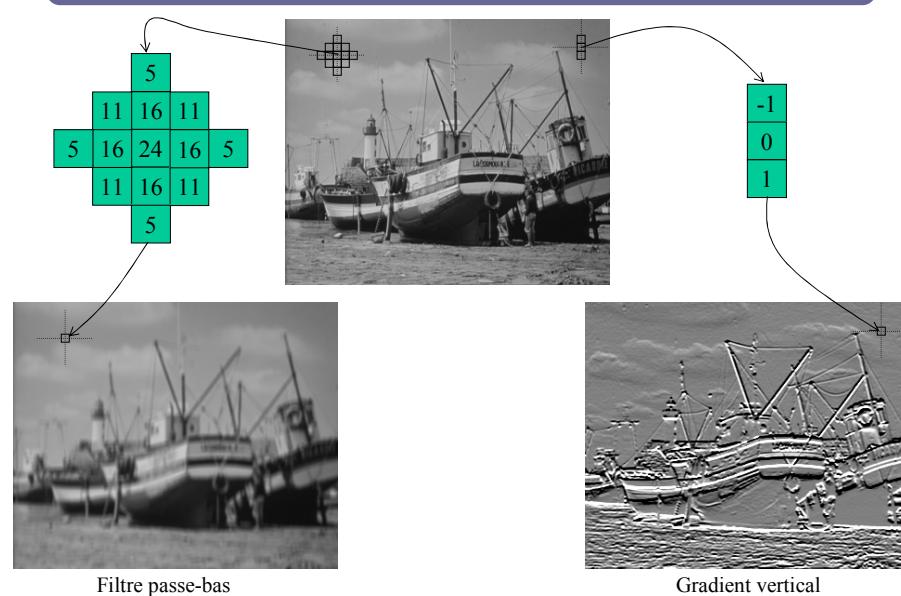
6

Traitement d'images linéaire : structure fondamentale

Dans le cas du traitement d'images linéaire, la structure fondamentale est celle d'***espace vectoriel***.



Traitement linéaire : convolutions



Morphologie mathématique : structure fondamentale

Dans le cas de la morphologie mathématique, la structure fondamentale est celle de **treillis complet**.

structure de base

TREILLIS COMPLET

(1) Ensemble ordonné (E, \leq)

$$\leq \begin{cases} \text{REFLEXIVE} & x \leq x \\ \text{ANTI-SYMETRIQUE} & x \leq y \text{ et } y \leq x \Rightarrow x = y \\ \text{TRANSITIVE} & x \leq y \text{ et } y \leq z \Rightarrow x \leq z \end{cases}$$

(2) Toute partie P de E admet :

- une borne sup
- une borne inf

Sup : plus petit des majorants $\vee P$

Inf : plus grand des minorants $\wedge P$

Morphologie mathématique : opérateurs de base

opérateurs de base

Ceux qui préservent la structure...

$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$$

CROISSANCE

...et commutent avec les lois de base :

$$\begin{array}{ccc} \text{sup} & \longrightarrow & \parallel \Phi(\vee\{x_i\}) = \vee\{\Phi(x_i)\} \\ \text{inf} & \longrightarrow & \parallel \Psi(\wedge\{x_i\}) = \wedge\{\Psi(x_i)\} \end{array}$$

DILATATION

EROSION

Exemples de treillis complets

Treillis des formules booléennes	<ul style="list-style-type: none"> • éléments : formules booléennes f, g, h • relation d'ordre : implication $f \rightarrow g$ • sup : OU logique • inf : ET logique 	<ul style="list-style-type: none"> • éléments extrêmes :
Treillis ensembliste	<ul style="list-style-type: none"> • éléments : les parties d'un ensemble S • relation d'ordre : inclusion \subset • sup : Union \cup • inf : Intersection \cap 	<ul style="list-style-type: none"> • éléments extrêmes :
Treillis des nombres	<ul style="list-style-type: none"> • éléments : nombres réels (ou nombres entiers) • relation d'ordre : \leq (ordre total) • sup : max • inf : min 	<ul style="list-style-type: none"> • éléments extrêmes :

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

11

Exemples de treillis complets

Treillis des fonctions	<ul style="list-style-type: none"> • éléments : les fonctions réelles ou numériques : $f : S \rightarrow \mathbf{R}$ ou $S \rightarrow \mathbf{Z}$ • relation d'ordre : $f \leq g \Leftrightarrow \forall x \in S, f(x) \leq g(x)$ • sup : $\vee \{f_i\}$ • inf : $\wedge \{f_i\}$ 	<p style="text-align: center;">définies par :</p> $\begin{cases} (\vee \{f_i\})(x) = \vee \{f_i(x)\} \\ (\wedge \{f_i\})(x) = \wedge \{f_i(x)\} \end{cases}$

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

12

Le principe de dualité

Dans un treillis, les lois *Sup* et *Inf* jouent des rôles symétriques.

On appelle **involution** l'opérateur $\overline{\cdot} : E \rightarrow E$

qui permet d'échanger leur rôle :

$$\wedge \overline{P} = \overline{\vee P} \quad \text{et} \quad \vee \overline{P} = \overline{\wedge P}$$

On dit que deux opérateurs Φ et Φ^* sont **duaux** pour l'involution $\overline{\cdot}$.

$$\text{si : } \boxed{\Phi(\overline{x}) = \overline{\Phi^*(x)}}$$

Exemples d'involutions

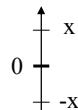
Treillis des formules booléennes

NON logique :

g	$\neg g$
0	1
1	0

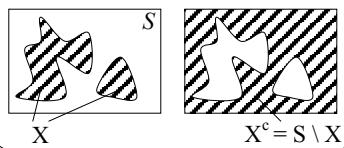
Treillis des nombres

opposé :



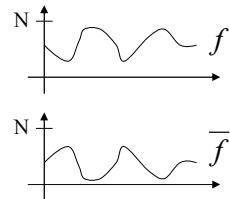
Treillis ensembliste

Complémentaire :



Treillis des fonctions dans $[0, N]$

$\overline{f} = N - f$:



Propriétés fondamentales des opérateurs

$$\Phi : E \rightarrow E$$

$$x \leq y \Rightarrow \Phi(x) \leq \Phi(y)$$

Croissance

$$x \leq \Phi(x)$$

Extensivité

$$\Phi(x) \leq x$$

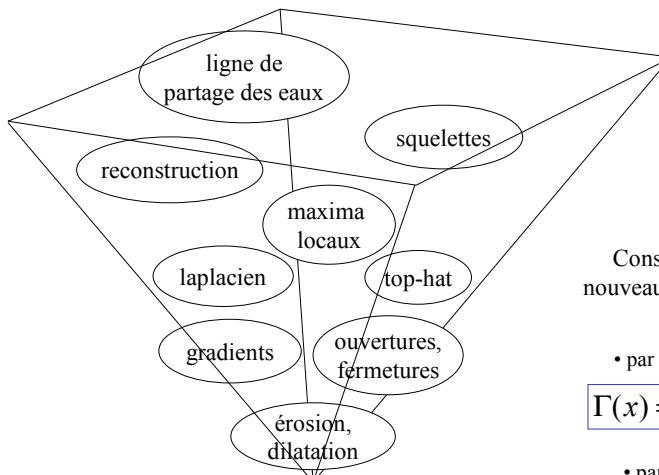
Anti-extensivité

$$\Phi(\Phi(x)) = \Phi(x)$$

Idempotence

Construction des opérateurs de la morphologie mathématique

↑
complexité,
richesse des
propriétés



Construction de nouveaux opérateurs :

- par composition

$$\Gamma(x) = \Phi(\Psi(x))$$

- par différence

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

Opérations de Minkowski dans \mathbf{R}^n

Définitions préliminaires

On se place ici dans E : l'ensemble des parties de \mathbf{R}^n

Pour $X \subset \mathbf{R}^n$
et $b \in \mathbf{R}^n$ on note $X_b = \{x + b; x \in X\}$
le *translaté* de X par b .

et on note $\bar{X} = \{-x; x \in X\}$
le *transposé* de X .
Rq: si X est symétrique alors $X = \bar{X}$

Cours de Morphologie Mathématique

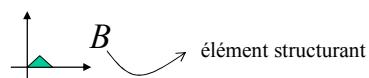
Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

17

L'addition de Minkowski

L'addition de Minkowski de X et B est définie par :

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b$$



$$\text{Rq: } X \oplus B = B \oplus X$$

C'est le lieu géométrique des points de B_x lorsque x parcourt X

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

18

La dilatation morphologique

La dilatation morphologique de X par B est définie par :

$$\delta_B(X) = X \oplus \bar{B}$$



élément structurant

$$\begin{aligned}\delta_B(X) &= X \oplus \bar{B} = \bigcup_{b \in \bar{B}} X_b \\ &= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B; z = x - b\} \\ &= \{z / \exists x \in X, \exists b \in B; z + b = x\} \\ &= \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}\end{aligned}$$

$$\delta_B(X) = \{z / B_z \cap X \neq \emptyset\}$$

C'est le lieu géométrique
des points z tels que B_z
intersecte X

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

19

L'érosion morphologique

L'érosion morphologique de X par B est définie par le principe de dualité : $\varepsilon_B(\bar{X}) = \overline{\delta_B(X)}$



élément structurant

$$\begin{aligned}\varepsilon_B(X) &= \overline{\delta_B(\bar{X})} = \overline{\bar{X} \oplus \bar{B}} \\ &= \overline{\bigcup_{b \in B} \bar{X}_b} = \bigcap_{b \in B} X_b \\ &= X \ominus \bar{B} \xrightarrow{\text{Soustraction de Minkowski}} \\ \varepsilon_B(X) &= \bigcap_{b \in B} X_b = \{z / \forall b \in B, \exists x \in X; z + b = x\} \\ &= \{z / B_z \subset X\}\end{aligned}$$

$$\varepsilon_B(X) = \{z / B_z \subset X\}$$

C'est le lieu géométrique
des points z tels que B_z
est inclus dans X

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

20

Propriétés algébriques des opérateurs de base

CROISSANCE

La dilatation et l'érosion sont des opérateurs *croissants*

$$X \subset Y \Rightarrow \delta_B(X) \subset \delta_B(Y)$$

$$X \subset Y \Rightarrow \epsilon_B(X) \subset \epsilon_B(Y)$$



L'érosion est *décroissante* par rapport à l'élément structurant : $B \subset B' \Rightarrow \epsilon_B(X) \supset \epsilon_{B'}(X)$

EXTENSIVITE

Si l'élément structurant B contient l'origine :

- La dilatation est *extensive*

$$X \subset \delta_B(X)$$

- L'érosion est *anti-extensive*

$$\epsilon_B(X) \subset X$$

- La dilatation commute avec le *Sup*

$$\delta_B(X \cup Y) = \delta_B(X) \cup \delta_B(Y)$$

- L'érosion commute avec le *Inf*

$$\epsilon_B(X \cap Y) = \epsilon_B(X) \cap \epsilon_B(Y)$$

On a les égalités :

$$\delta_{B \cup B'}(X) = \delta_B(X) \cup \delta_{B'}(X)$$

$$\epsilon_{B \cup B'}(X) = \epsilon_B(X) \cap \epsilon_{B'}(X)$$



Mais seulement les inclusions :

$$\delta_{B \cap B'}(X) \subset \delta_B(X) \cap \delta_{B'}(X)$$

$$\epsilon_{B \cap B'}(X) \supset \epsilon_B(X) \cup \epsilon_{B'}(X)$$

$$\epsilon_B(X \cup Y) \supset \epsilon_B(X) \cup \epsilon_B(Y)$$

Propriétés algébriques des opérateurs de base

PROPRIETE D'ADJONCTION



$$X \subset \epsilon_B(Y) \Leftrightarrow \delta_{\bar{B}}(X) \subset Y$$

CAS DEGENERES

élément structurant vide

$$\epsilon_{\emptyset}(X) = \mathbf{R}^n$$

$$\delta_{\emptyset}(X) = \emptyset$$

ASSOCIATIVITE DE LA DILATATION

Application : Polyèdres de Steiner dans \mathbf{R}^n :

$$\delta_{B'}(\delta_B(X)) = \delta_{\delta_{B'}(B)}(X)$$

$$\epsilon_{B'}(\epsilon_B(X)) = \epsilon_{\epsilon_{B'}(B)}(X)$$

ex:

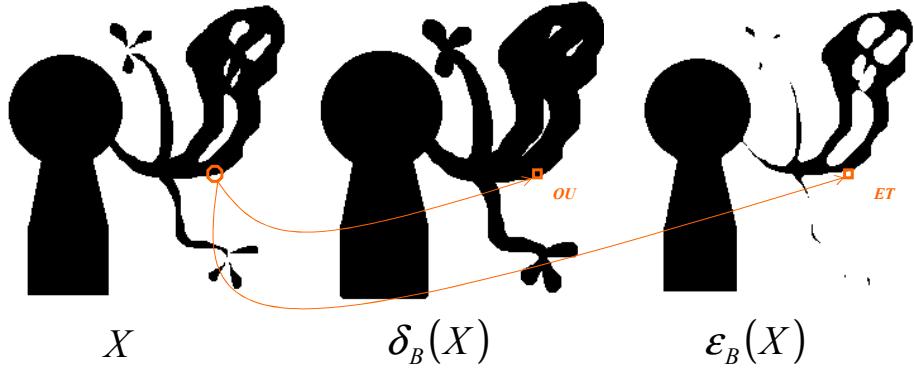
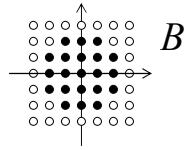
dans \mathbf{R}^2 : \oplus $=$

dans \mathbf{R}^3 : \oplus $=$

Décomposition des éléments structurants convexes en sommes de segments

Application aux images binaires

Le treillis est l'ensemble des parties de \mathbf{Z}^2



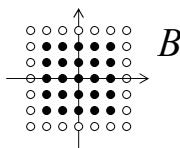
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

23

Implantation des opérateurs de base

Ex : élément structurant carré de côté c .



Méthode triviale :

```
DILATE (Image_IN X, Image_OUT Y,Elt_struct B) {
Pour tout pixel p ∈ X {
    Y(p) = 0;
    Pour tout b ∈ B {
        Y(p) = Y(p) OU X(p-b);
    }
}
}
```

X

$\delta_B(X)$

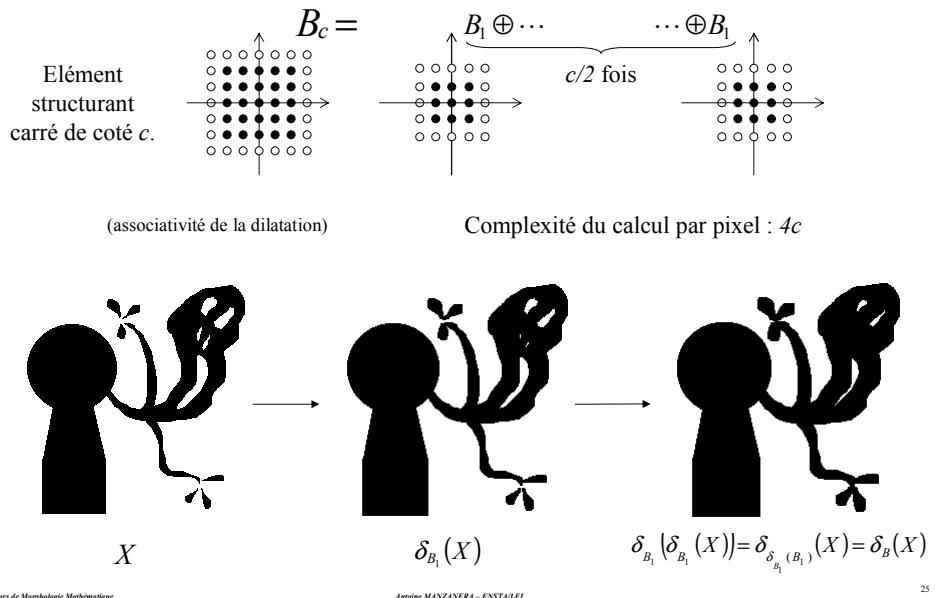
Complexité
du calcul par
pixel : c^2

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

24

Implantation des opérateurs de base

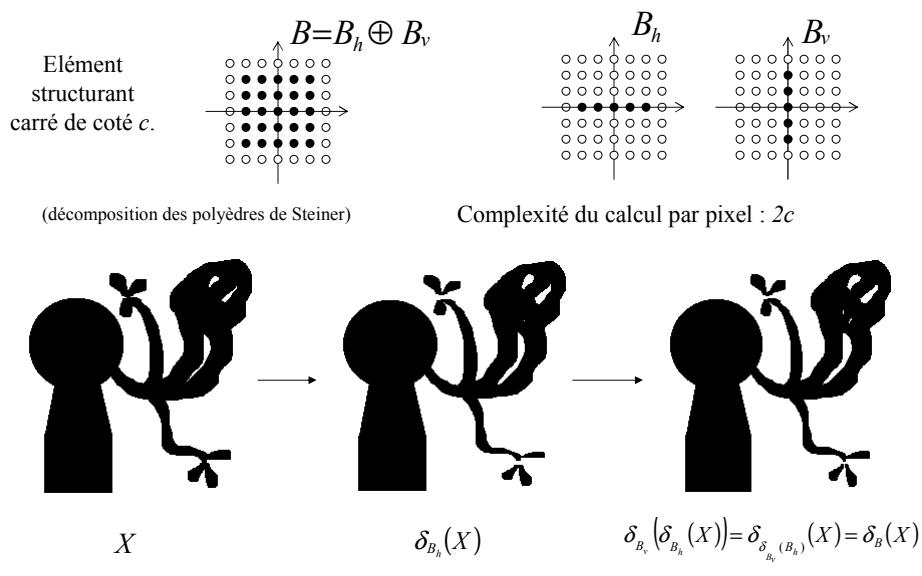


Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

25

Implantation des opérateurs de base



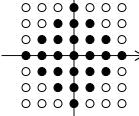
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

26

Erosions binaires et distances discrètes

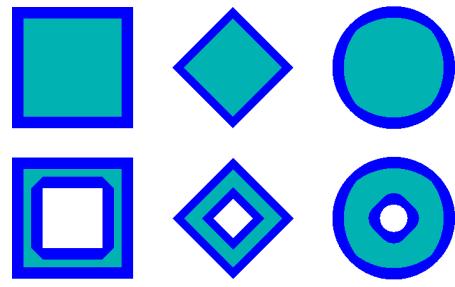
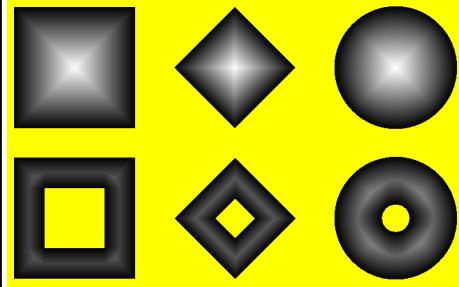
Pour les ensembles (images binaires), dans le cas où l'élément structurant est une boule d'une distance discrète, il est avantageux de calculer l'érodé par *seuillage de la transformée en distance* :

ex : 
 distance de la 4-connexité

$$d_4(a, b) = |x_a - x_b| + |y_a - y_b|$$

en effet : $p \in \mathcal{E}_{B_\lambda}(X) \Leftrightarrow F_X^d(p) \geq \lambda$

transformée en distance d de l'ensemble X : $F_X^d : \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{N}$
 $p \mapsto d(p, X^c)$



Transformée en distance d_4

Erosion par une boule de d_4

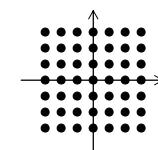
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

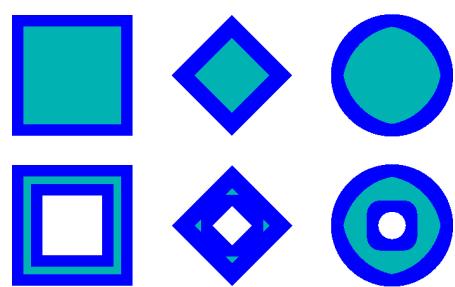
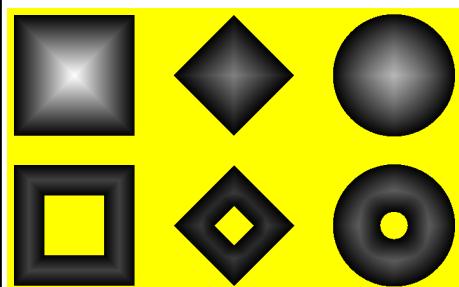
27

Erosions binaires et distances discrètes

ex :
 distance de la 8-connexité



$$d_8(a, b) = \max(|x_a - x_b|, |y_a - y_b|)$$



Transformée en distance d_8

Erosion par une boule de d_8

Cours de Morphologie Mathématique

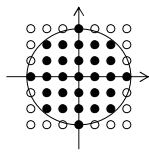
Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

28

Erosions binaires et distances discrètes

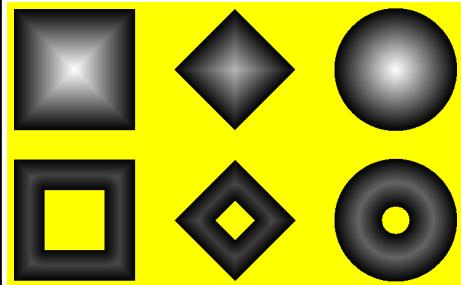
ex :

distance euclidienne (ou pseudo-euclidienne)

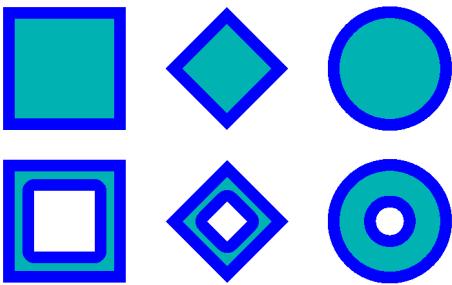


$$d_e(a,b) = \sqrt{(x_a - x_b)^2 + (y_a - y_b)^2}$$

Grâce aux techniques de calcul récursif de la transformée en distance, la complexité du calcul par pixel devient constante : ($O(1)$)



Transformée en distance *pseudo-euclidienne*



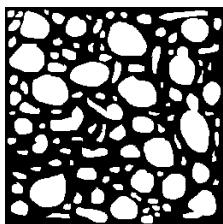
Erosion par une boule *pseudo-euclidienne*

Cours de Morphologie Mathématique

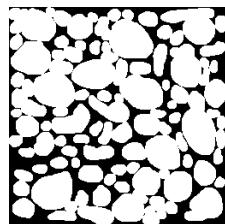
Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

29

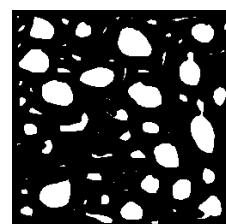
Conclusions sur les opérateurs de base



Originale



Dilatée



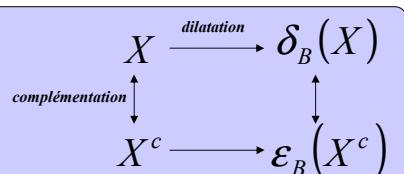
Erodée

- La dilatation fait disparaître les petits trous et les petits détroits, et fait grossir les objets.
- L'érosion fait disparaître les petits objets et les petits isthmes, et amincit les objets restants.



Dilatation et érosion sont des opérations *non réversibles*.

Dilatation et érosion sont des opérations *duales, pas inverses* !



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

30

Transformées en tout-ou rien

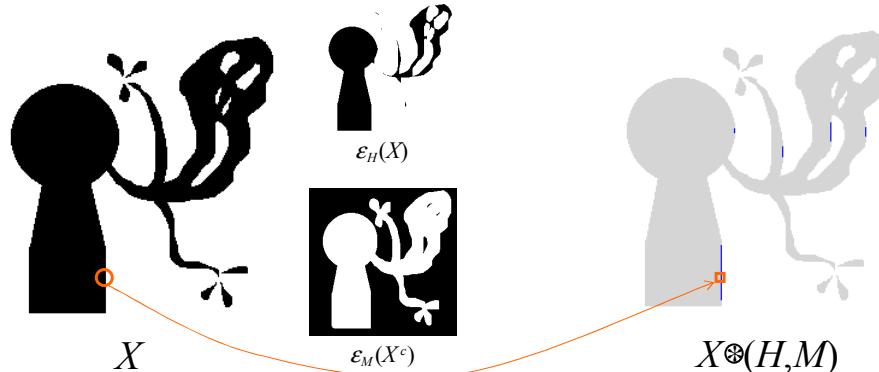
$$H \bullet \begin{array}{c} \textcircled{\text{o}} \\ \textcircled{\text{o}} \end{array}$$

$$M \circ \begin{array}{c} \textcircled{\text{o}} \\ \textcircled{\text{o}} \end{array}$$

Les transformées en tout-ou rien (*Hit-or-Miss Transform*) unifient et généralisent érosions et dilatations.

$$X \oplus (H, M) = \mathcal{E}_H(X) \cap \mathcal{E}_M(X^c)$$

Application : Recherche de configurations



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

31

Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

On se place à présent dans le cadre des fonctions : $f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$

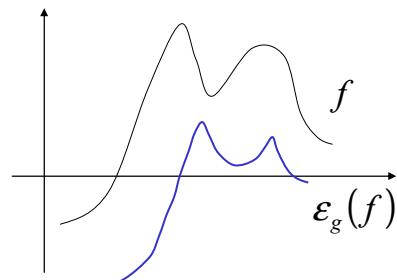
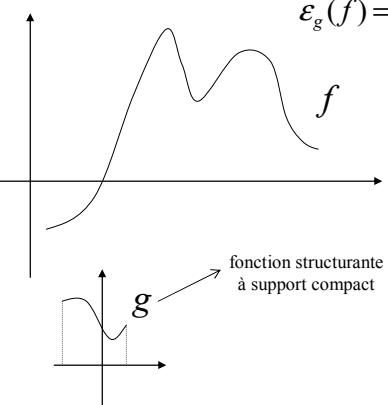
La dilatation et l'érosion fonctionnelles sont respectivement définies par :

$$\delta_g(f) = f \oplus \bar{g}$$

$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) + g(y-x)\}$$

$$\varepsilon_g(f) = f \ominus \bar{g}$$

$$\varepsilon_g(f)(x) = \inf_{y \in \mathbf{R}^n} \{f(y) - g(y-x)\}$$



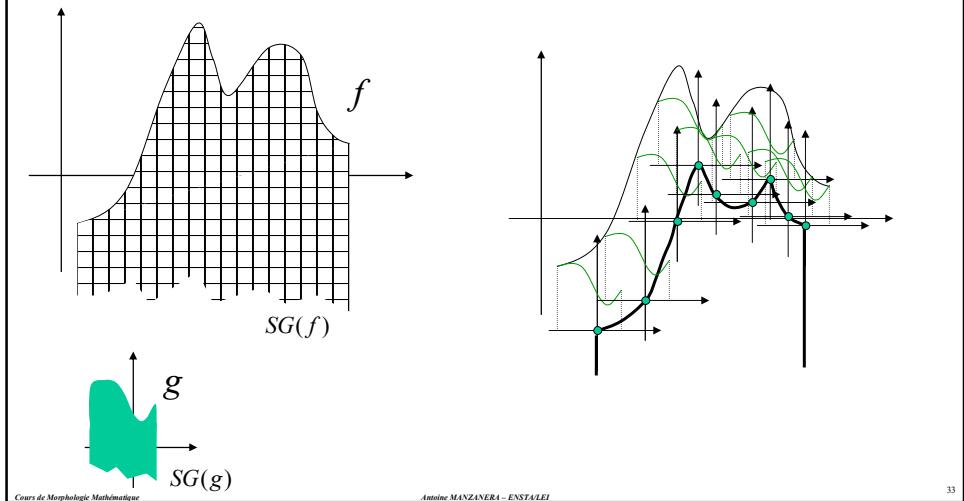
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

32

Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

A toute fonction f on associe son **sous-graphe** : $SG(f) = \{(x, t) \in \mathbf{R}^n \times \overline{\mathbf{R}} / t \leq f(x)\}$



Du cadre ensembliste au cadre fonctionnel

Interprétation ensembliste :

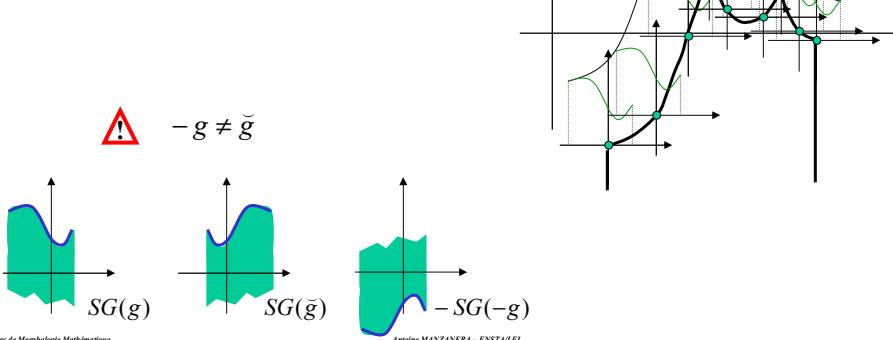
$$SG(\varepsilon_g(f)) = \mathbf{\Sigma}_{SG(g)}(SG(f))$$

$$SG(\delta_g(f)) = \mathbf{\Delta}_{-SG(-g)}(SG(f))$$

fonctionnel

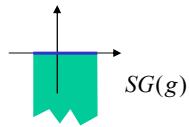
ensembliste

⚠ $-g \neq \check{g}$



Cas des éléments structurants plans

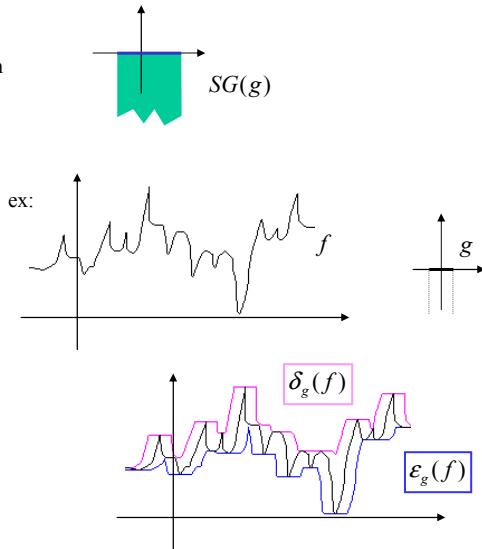
Élément structurant plan =
fonction structurante nulle sur un
support compact K



L'expression algébrique des opérateurs de base devient :

$$\begin{aligned}\varepsilon_g(f)(x) &= \inf_{\substack{y \in \mathbb{R}^n \\ y-x \in K}} \{f(y)\} \\ &= \inf_{y \in K_x} \{f(y)\}\end{aligned}$$

$$\delta_g(f)(x) = \sup_{y \in K_x} \{f(y)\}$$



Propriétés des opérateurs de base dans le cadre fonctionnel

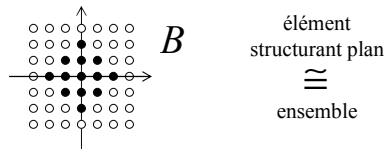
Identiques au cas ensembliste, en remplaçant :

$$\begin{array}{ccc} \subset & \rightarrow & \leq \\ \cup & \rightarrow & \vee \\ \cap & \rightarrow & \wedge \end{array}$$

$f \leq f' \Rightarrow \delta_g(f) \leq \delta_g(f')$	Si $O \in \text{Supp}(g)$: $f \leq \delta_g(f)$ $\varepsilon_g(f) \leq f$	$\delta_g(f \vee f') = \delta_g(f) \vee \delta_g(f')$ $\varepsilon_g(f \wedge f') = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_g(f')$
$f \leq f' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \leq \varepsilon_g(f')$	$\delta_g(f \wedge g')(f) \leq \delta_g(f) \wedge \delta_g(f')$ $\varepsilon_g(f \wedge g')(f) \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_g(f')$ $\varepsilon_g(f \vee f') \geq \varepsilon_g(f) \vee \varepsilon_g(f')$	
$g \leq g' \Rightarrow \varepsilon_g(f) \geq \varepsilon_{g'}(f)$	$\delta_g(f \vee g')(f) = \delta_g(f) \vee \delta_{g'}(f)$ $\varepsilon_g(f \vee g')(f) = \varepsilon_g(f) \wedge \varepsilon_{g'}(f)$	
$\delta_g(f) \leq f$	$\delta_g(\delta_g(f)) = \delta_{g \wedge g}(f)$ $\varepsilon_g(\varepsilon_g(f)) = \varepsilon_{g \wedge g}(f)$	
$f \leq \varepsilon_g(f) \Leftrightarrow \delta_g(f) \leq f$		

Application aux images numériques

Le treillis est l'ensemble des fonctions de \mathbf{Z}^2 dans \mathbf{Z}



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

37

Chapitre 2 : Opérateurs complexes et filtres morphologiques

- Gradients et laplacien morphologique.
- Opérateur de rehaussement de contraste
- Ouvertures et fermetures morphologiques, Top-hat.
- Filtres morphologiques.
- Ouvertures et fermetures algébriques.
- Analyse granulométrique.
- Filtres alternés séquentiels.
- Pyramides et espaces d'échelles morphologiques.

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

38

Premiers opérateurs par différence

Opérateur par différence :

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

Cas ensembliste

$$\Lambda(X) = \Phi(X) \setminus \Psi(X)$$

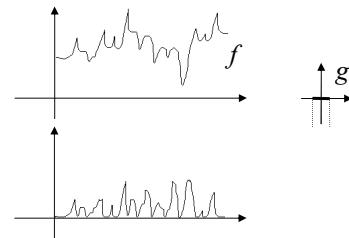
Cas fonctionnel

$$\Lambda(f) = \Phi(f) - \Psi(f)$$

Gradient intérieur

$$g_y^-(x)$$

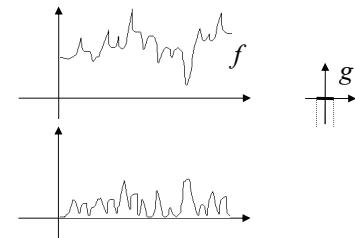
$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



Gradient extérieur

$$g_y^+(x)$$

$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = x$$



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

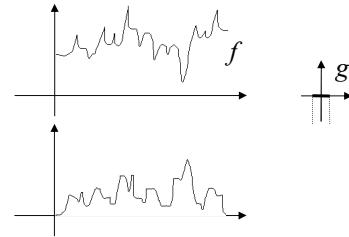
39

Premiers opérateurs par différence

Gradient morphologique
(symétrisée)

$$g_y^m(x)$$

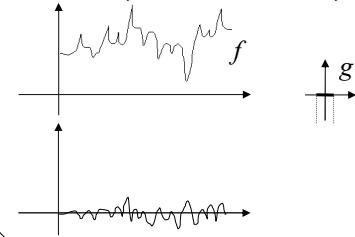
$$\Phi(x) = \delta_y(x) \quad \Psi(x) = \varepsilon_y(x)$$



Laplacien morphologique

$$\lambda_y(x)$$

$$\Phi(x) = g_y^+(x) \quad \Psi(x) = g_y^-(x)$$



Rq : dans le cas de fonctions de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R} , en prenant pour élément structurant une boule euclidienne centrée sur l'origine, le gradient morphologique et le laplacien morphologique tendent respectivement vers le module du gradient et le laplacien euclidiens lorsqu'ils sont définis, quand le rayon de la boule tend vers zéro :

$$\|\nabla I\| = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial x}(u, v)\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial y}(u, v)\right)^2}$$

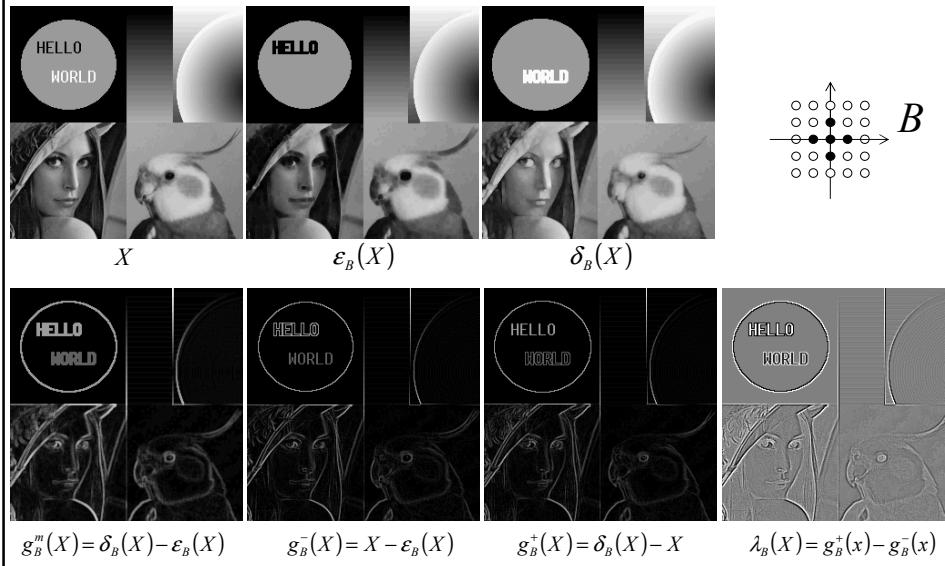
$$\Delta I = \frac{\partial^2 I}{\partial x^2}(u, v) + \frac{\partial^2 I}{\partial y^2}(u, v)$$

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

40

Gradients et laplacien : images numériques

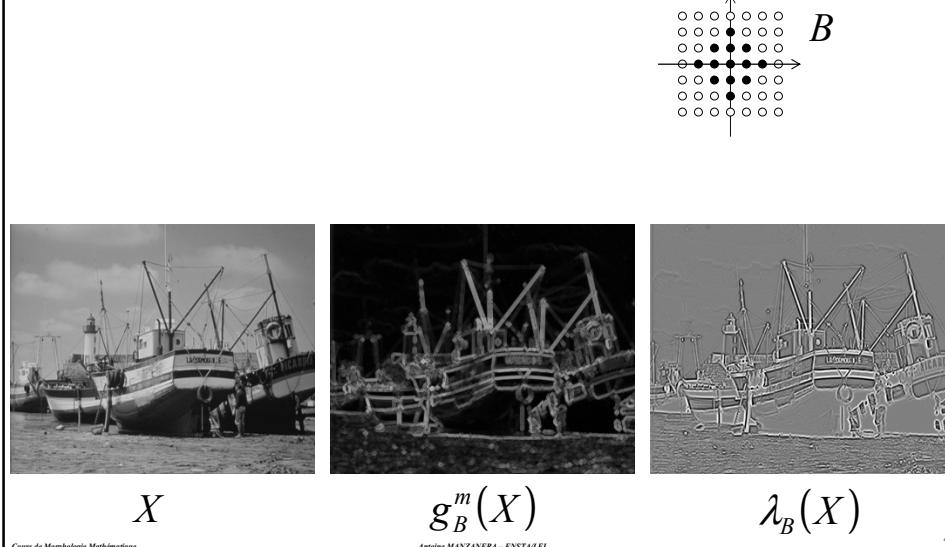


Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

41

Gradients et laplacien : images numériques



Cours de Morphologie Mathématique

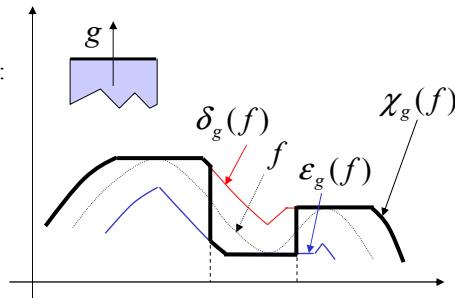
Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

42

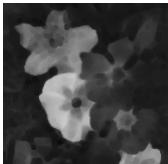
Augmentation de contraste morphologique

Le filtre rehausseur de contraste est défini par :

$$\begin{cases} \chi_g(f) = \delta_g(f) \text{ si } (\delta_g(f) - f) < (f - \varepsilon_g(f)) \\ \chi_g(f) = \varepsilon_g(f) \text{ si } (\delta_g(f) - f) > (f - \varepsilon_g(f)) \end{cases}$$

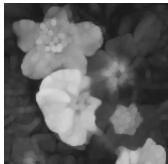


erodé



$\varepsilon_g(f)$

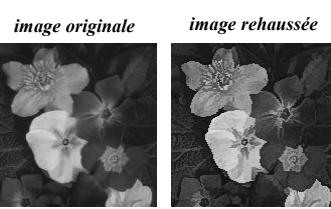
dilaté



$\delta_g(f)$



f



$\chi_g(f)$

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

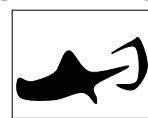
43

Ouvertures et fermetures morphologiques

Problème Min/Max : étant donné $Y \in E$, $B \in E$, trouver le plus petit $X \in E$ tel que : $Y = \varepsilon_B(X)$



X_1



X_2



X_3

•

B



$$Y = \varepsilon_B(X_1) = \varepsilon_B(X_2) = \varepsilon_B(X_3)$$

REPONSE : C'est le dilaté de Y par le transposé de B :

$$\delta_{\bar{B}}(Y) = Y \oplus B$$



On note : $\gamma_B(X) = X \circ B = \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(X)) = (X \ominus \bar{B}) \oplus B$

l'ouverture morphologique de X par B .

et son dual : $\varphi_B(X) = X \bullet B = \varepsilon_{\bar{B}}(\delta_B(X)) = (X \oplus \bar{B}) \ominus B$

la fermeture morphologique de X par B .

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

44

Propriétés algébriques des ouvertures et fermetures

CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

EXTENSIVITE

L'ouverture est anti-extensive : $\gamma_B(x) \leq x$
 La fermeture est extensive : $x \leq \varphi_B(x)$

IDEMPOTENCE

$$\begin{aligned} \gamma_B(\gamma_B(x)) &= \gamma_B(x) \\ \varphi_B(\varphi_B(x)) &= \varphi_B(x) \end{aligned}$$

dém:

$$\delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x)) \leq x \leq \varepsilon_{\bar{B}}(\delta_B(x))$$

$$\text{donc } \underbrace{\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B}_{\varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B} \leq id_E \leq \varepsilon_B\delta_B$$

$$\text{et } \underbrace{\delta_B\varepsilon_{\bar{B}}}_{\varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B} \leq id_E \leq \varepsilon_B\delta_{\bar{B}}$$

$$\text{donec } \varepsilon_B = \varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B$$

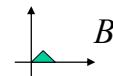
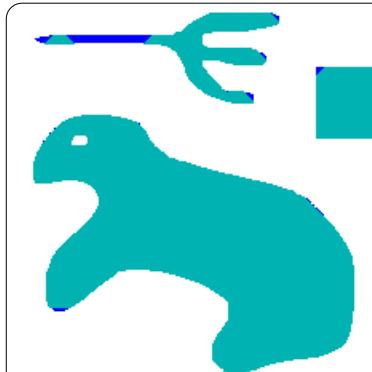
$$\text{et donc } \delta_{\bar{B}}\varepsilon_B = \delta_{\bar{B}}\varepsilon_B\delta_{\bar{B}}\varepsilon_B$$

PROPRIETE MIN/MAX

Soient x, x' , et y tels que : $\begin{cases} y = \varepsilon_B(x) = \varepsilon_B(x') \\ x = \delta_{\bar{B}}(y) \end{cases}$

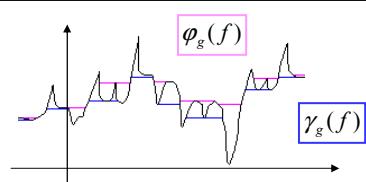
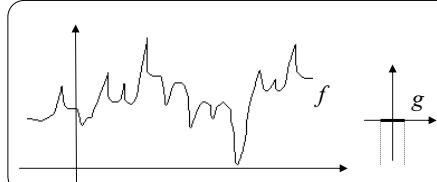
$$\begin{aligned} \text{alors } x &= \delta_{\bar{B}}(y) = \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x)) \\ &= \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(x')) = \gamma_B(x') \leq x' \end{aligned}$$

Ouvertures et fermetures : ensembles et fonctions

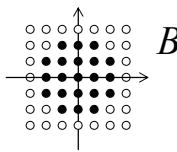


C'est le lieu géométrique des points de B_z tels que B_z est inclus dans X

X
 $\gamma_B(X)$



Ouvertures et fermetures : images binaires



- l'ouverture élimine les petites composantes, et ouvre les petits isthmes.
- la fermeture bouche les petites trous, et ferme les petits détroits.



X

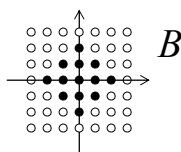


$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

Ouvertures et fermetures : images numériques



$\varepsilon_B(X)$



$\delta_B(X)$



X



$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$

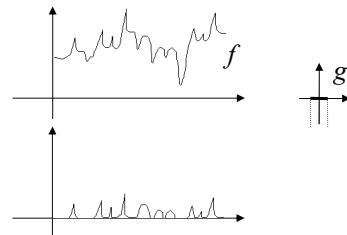
Opérateurs obtenus par différence d'ouvertures et fermetures

Opérateur par différence :

$$\Lambda(x) = \Phi(x) - \Psi(x)$$

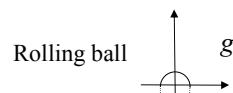
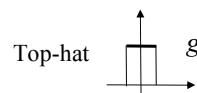
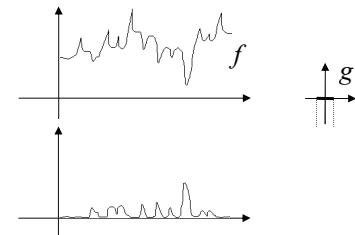
Top-hat

$$\Phi(x) = x \quad \Psi(x) = \gamma_y(x)$$



Top-hat conjugué

$$\Phi(x) = \varphi_y(x) \quad \Psi(x) = x$$

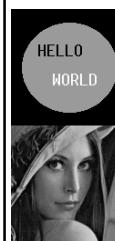


Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

49

Top Hat : images numériques



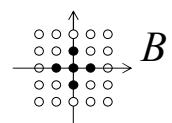
X



$\varepsilon_B(X)$



$\delta_B(X)$



$\gamma_B(X)$



$\varphi_B(X)$



$\tau_B(X) = \gamma_B(X) - X$



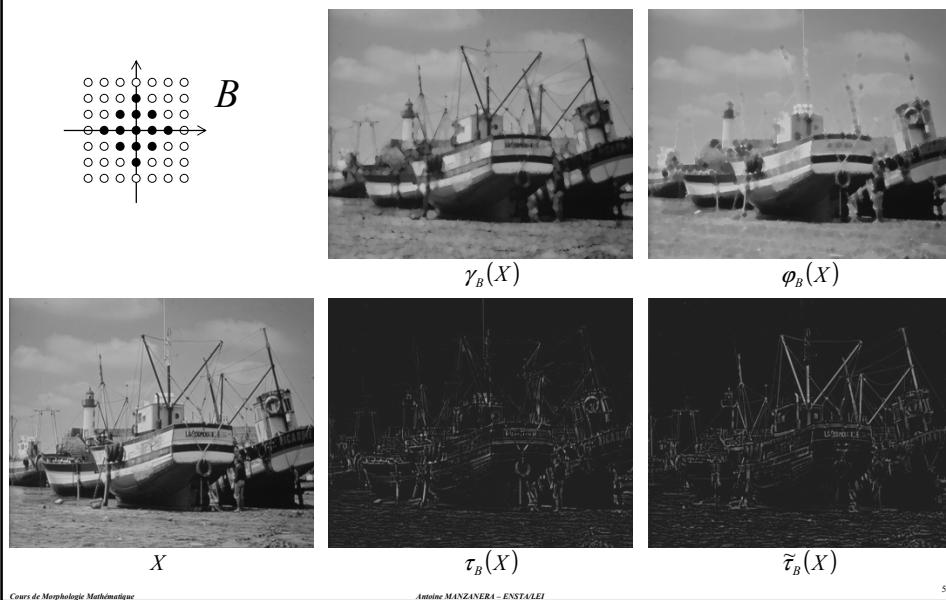
$\tilde{\tau}_B(X) = \varphi_B(X) - X$

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

50

Top Hat : images numériques



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

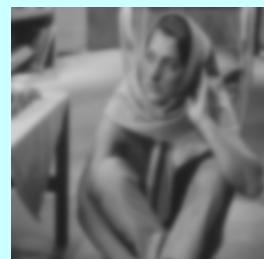
51

L'approche morphologique du filtrage



En traitement linéaire des images, filtrer, c'est éliminer certaines composantes fréquentielles des images.

Filtrage = Convolution



En morphologie mathématique, filtrer, c'est simplifier l'image en supprimant certaines structures géométriques (en général implicitement définies par un ou plusieurs éléments structurants).

Le filtre morphologique simplifie l'image en préservant la structure, mais il perd en général de l'information (→ Croissance).

Le filtre morphologique est stable et possède une classe d'invariance connue (→ Idempotence).



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

52

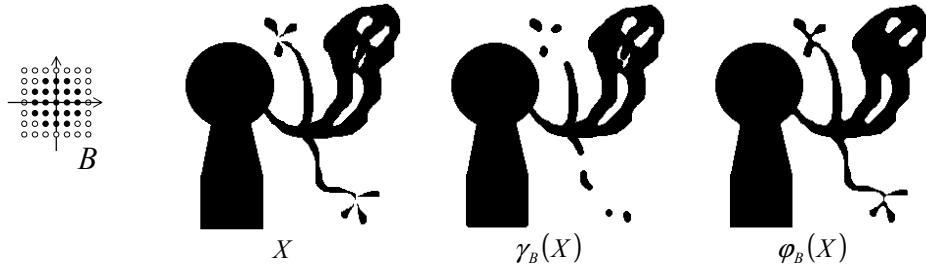
Rappel : ouvertures et fermetures morphologiques

l'ouverture morphologique de X par B.

$$\gamma_B(X) = X \circ B = \delta_{\bar{B}}(\varepsilon_B(X)) = (X \ominus \bar{B}) \oplus B$$

la fermeture morphologique de X par B.

$$\varphi_B(X) = X \bullet B = \varepsilon_{\bar{B}}(\delta_B(X)) = (X \oplus \bar{B}) \ominus B$$



CROISSANCE

$$x \leq y \Rightarrow \begin{cases} \gamma_B(x) \leq \gamma_B(y) \\ \varphi_B(x) \leq \varphi_B(y) \end{cases}$$

IDEMPOTENCE

$$\begin{aligned} \gamma_B(\gamma_B(x)) &= \gamma_B(x) \\ \varphi_B(\varphi_B(x)) &= \varphi_B(x) \end{aligned}$$

EXTENSIVITE

$$\begin{aligned} \text{L'ouverture est anti-extensive : } \gamma_B(x) &\leq x \\ \text{La fermeture est extensive : } x &\leq \varphi_B(x) \end{aligned}$$

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

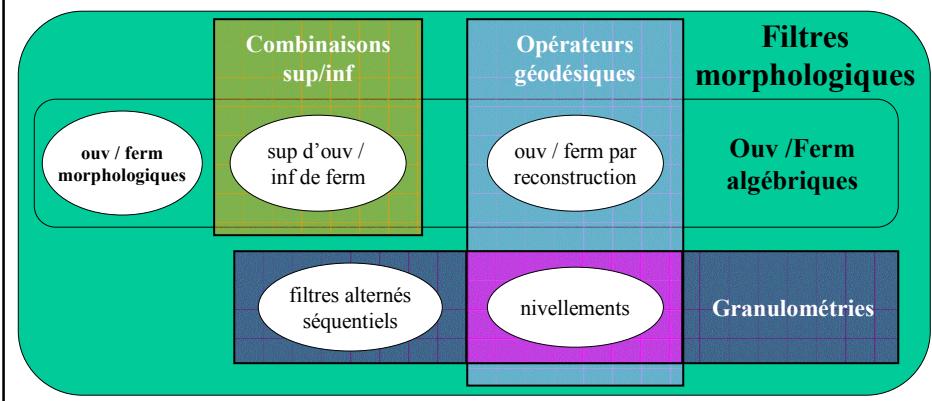
53

Filtres morphologiques

Un filtre morphologique est un opérateur ψ croissant et idempotent :

$$x \leq y \Rightarrow \psi(x) \leq \psi(y) \quad \psi(\psi(x)) = \psi(x)$$

On peut construire différentes familles de filtres morphologiques à partir des filtres de base, l'ouverture et la fermeture morphologiques :



Ouvertures et fermetures algébriques

Les ouvertures et fermetures algébriques généralisent les ouvertures et fermetures morphologiques.

- Une **ouverture algébrique** est un filtre morphologique anti-extensif.
- Une **fermeture algébrique** est un filtre morphologique extensif.

PROPRIETE

- Un sup d'ouvertures morphologiques est une ouverture algébrique
- Un inf de fermetures morphologiques est une fermeture algébrique

ex :

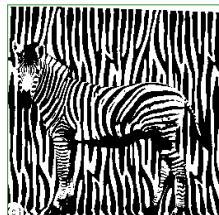
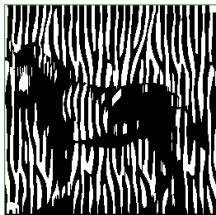
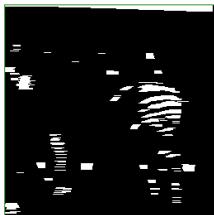


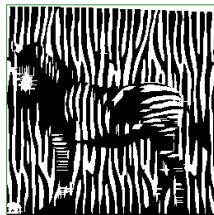
Image originale



Ouverture morphologique par un segment vertical



Ouverture morphologique par un segment horizontal



Ouverture algébrique par union des deux ensembles

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

55

Granulométries

L'analyse granulométrique est l'étude de la taille des objets fondée sur le principe du *tamisage* : sélection des objets par un ensemble de tamis de différentes tailles.

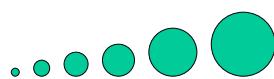
Formellement, une granulométrie peut être définie par une famille d'ouvertures :

$$(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0} \quad \text{telle que :}$$

$$0 \leq \lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_\lambda \gamma_{\lambda'} = \gamma_\lambda \gamma_{\lambda'} = \gamma_{\lambda'}$$

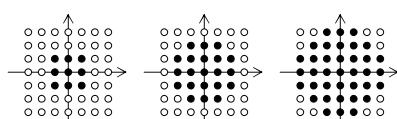
ex1 : $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{R}^+}$

Ouvertures par des boules euclidiennes de rayon λ



ex2 : $(\gamma_\lambda)_{\lambda \in \mathbf{N}}$

Ouvertures par une suite croissante de boules discrètes



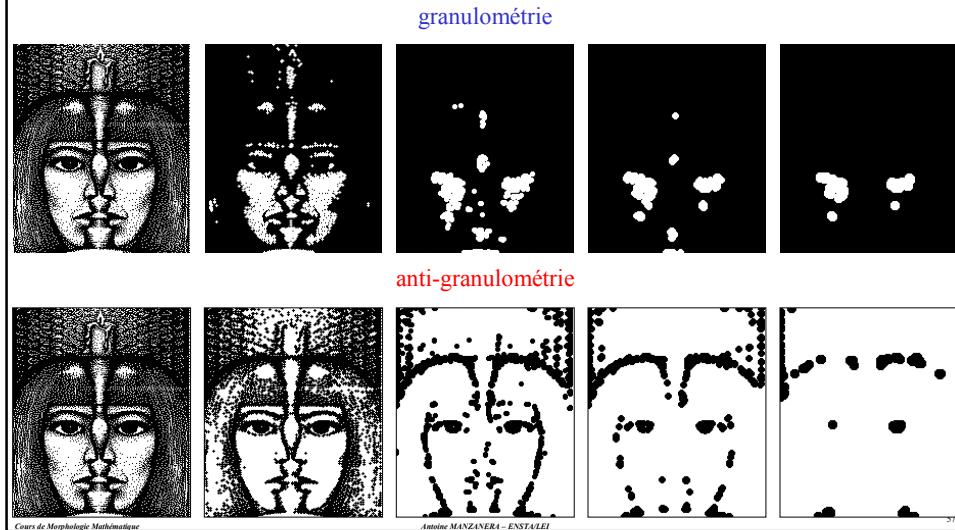
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

56

Granulométrie et anti-granulométrie

La famille des opérateurs duals (fermetures de taille croissante) est une anti-granulométrie :

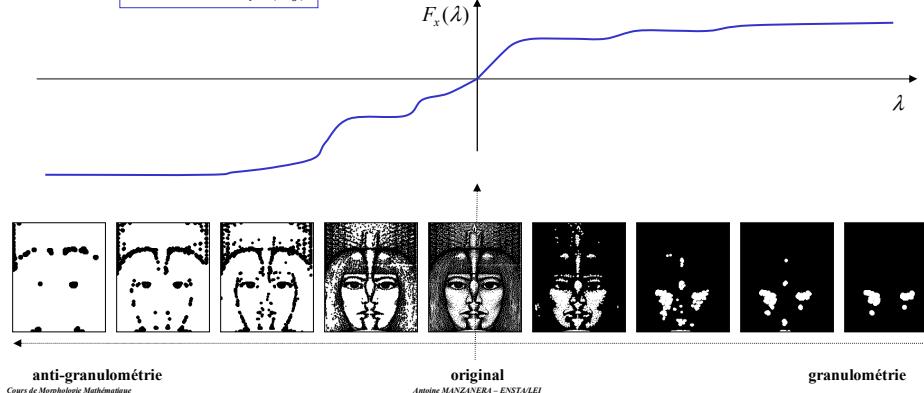


Fonction de distribution granulométrique

Soit μ une mesure bornée sur un treillis E (aire, intégrale...)

Pour $x \in E$, on note x_λ (resp. $x_{-\lambda}$) l'image de x par l'opérateur de granulométrie (resp. d'anti-granulométrie) d'indice λ .

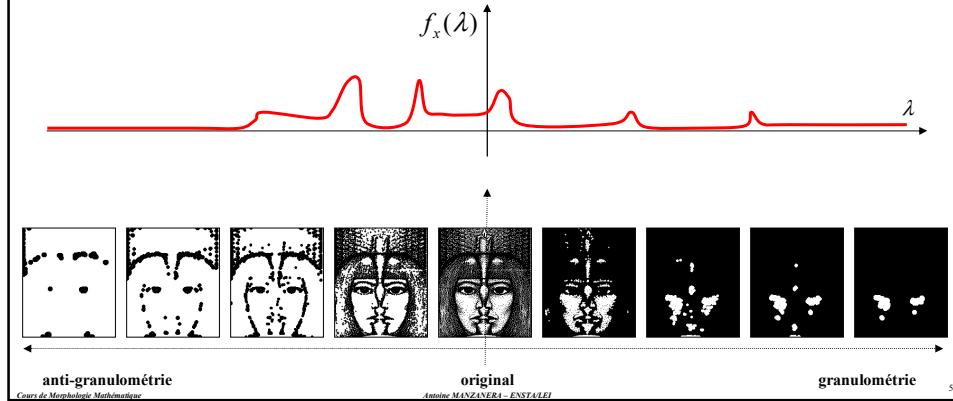
On note $F_x(\lambda) = 1 - \frac{\mu(x_\lambda)}{\mu(x_0)}$ la fonction de distribution sur x de la granulométrie $(\gamma_\lambda)_\lambda$



Spectre granulométrique

Le spectre granulométrique est la dérivée de la fonction de distribution granulométrique :

$$f_x(\lambda) = F'_x(\lambda)$$



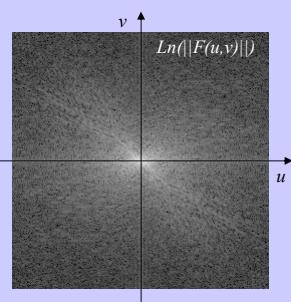
L'analyse granulométrique

→ Etude quantitative des images par la mesure de la contribution de chaque composante à l'image globale :

Traitement linéaire :

Transformée de Fourier

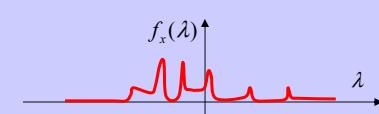
Composantes = sinusoïdes complexes



Morphologie mathématique :

Analyse granulométrique

Composantes = famille de boules



Historiquement : une des premières applications de la morphologie mathématique était l'étude quantitative des sols poreux par analyse granulométrique de coupes microscopiques.

Construction des filtres alternés

L'ensemble des filtres sur un treillis complet E forme un treillis \mathfrak{F}

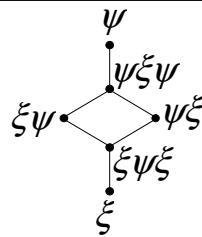
Théorème

Soient $\xi, \psi \in \mathfrak{F}$ tels que $\xi \leq \psi$

- L'ensemble ci-contre est un sous-treillis de \mathfrak{F} :
- De plus, on a l'équivalence :

$$\psi\xi \leq \xi\psi \Leftrightarrow \psi\xi\psi = \xi\psi \Leftrightarrow \xi\psi\xi = \psi\xi$$

Matheron 1988



- dem : (1) filtres (idempotence) : $\xi\psi = \xi\xi\xi\psi \leq \xi\psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi\psi = \xi\psi$
 $\xi\psi\xi = \xi\xi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\xi\xi\psi\xi \leq \xi\psi\psi\psi\psi\xi = \xi\psi\xi$
- (2) ordres : $\xi = \xi\xi\xi \leq \xi\psi\xi \leq \psi\psi\xi = \psi\xi = \psi\xi\xi$
 $\xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi \leq \psi\xi\psi \leq \psi\psi\psi = \psi$
- (3) plus petit majorant :
soit ζ un filtre tel que $\zeta \geq \xi\psi$ et $\zeta \geq \psi\xi$ alors $\zeta = \zeta\zeta \geq \psi\xi\xi\psi = \psi\xi\psi$
- (4) équivalence : $\xi\psi = \psi\xi\psi \Rightarrow \xi\psi \geq \psi\xi\xi = \psi\xi$
et $\psi\xi \leq \xi\psi \Rightarrow \psi\xi\psi \leq \xi\psi\psi = \xi\psi = \xi\xi\psi \leq \psi\xi\psi$

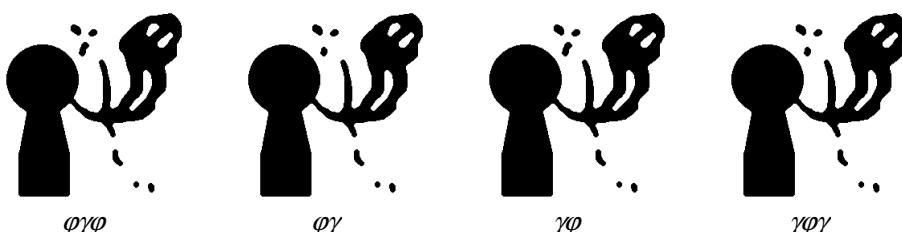
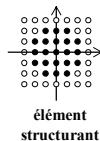
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

61

Exemple de filtres alternés

On prend : $\xi = \gamma$ (ouverture morphologique) $\psi = \varphi$ (fermeture morphologique)



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

62

Filtres alternés séquentiels

Soit $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$ une granulométrie, et $(\gamma_\lambda^* = \varphi_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

l'anti-granulométrie associée

Alors les opérateurs suivants :

$$\Theta_\lambda = \varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$$

$$\Xi_\lambda = \gamma_\lambda \varphi_\lambda \dots \gamma_2 \varphi_2 \gamma_1 \varphi_1$$

sont des filtres, dits *filtres alternés séquentiels* associés à la granulométrie $(\gamma_\lambda)_{\lambda \geq 0}$

Propriétés d'absorption :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \begin{cases} \Theta_\lambda \Theta_{\lambda'} = \Theta_{\lambda'} & \text{mais} \\ \Xi_\lambda \Xi_{\lambda'} = \Xi_{\lambda'} & \text{mais} \end{cases} \quad \begin{cases} \Theta_\lambda \Theta_{\lambda'} \leq \Theta_{\lambda'} \\ \Xi_\lambda \Xi_{\lambda'} \leq \Xi_{\lambda'} \end{cases}$$

Serra 1988 63

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

Filtres alternés séquentiels : démonstration des propriétés

Filtre morphologique (idempotence) :

$$\lambda \leq \lambda' \Rightarrow \gamma_{\lambda'} \leq \gamma_\lambda \leq \varphi_\lambda \leq \varphi_{\lambda'} \quad (*)$$

$$(*) \Rightarrow \varphi_\lambda \gamma_\lambda \geq \gamma_{\lambda'} \gamma_\lambda = \gamma_\lambda \geq \gamma_{\lambda'} \Rightarrow \varphi_\lambda \gamma_\lambda \varphi_\lambda \gamma_\lambda \geq \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'}$$

$$\text{et } (*) \Rightarrow \varphi_\lambda \gamma_\lambda \leq \varphi_{\lambda'} \varphi_\lambda = \varphi_\lambda \leq \varphi_{\lambda'} \Rightarrow \varphi_\lambda \gamma_\lambda \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'} \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} = \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'}$$

$$\text{donc } \lambda \leq \lambda' \Rightarrow \varphi_\lambda \gamma_\lambda \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \leq \varphi_\lambda \gamma_\lambda \varphi_\lambda \gamma_\lambda$$

$$\text{d'où } \varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \geq \varphi_\lambda \gamma_\lambda \varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 = \varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$$

$$\text{et } \varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 \leq \varphi_\lambda \gamma_\lambda \varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1 = \varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1$$

Propriétés d'absorption :

$$\begin{aligned} \Theta_\lambda \Theta_{\lambda'} &= (\varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) (\varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) \\ &= (\varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) = \Theta_{\lambda'} \end{aligned}$$

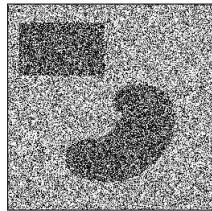
$$\begin{aligned} \Theta_\lambda \Theta_{\lambda'} &= (\varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) (\varphi_{\lambda'} \gamma_{\lambda'} \dots \varphi_{\lambda+1} \gamma_{\lambda+1}) (\varphi_\lambda \gamma_\lambda \dots \varphi_2 \gamma_2 \varphi_1 \gamma_1) \\ &\leq \Theta_{\lambda'} \end{aligned}$$

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

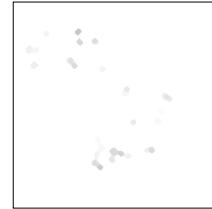
64

Application à la réduction du bruit

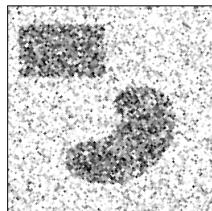


Original

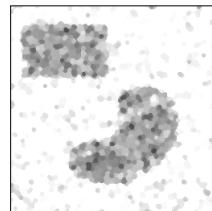
Les filtres alternés séquentiels conduisent à une bonne réduction du bruit grâce à une élimination progressive des pics et des creux de faible surface.



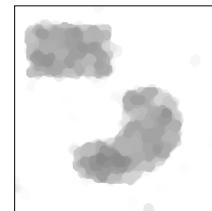
Application directe
du filtre alterné $\gamma_4 \phi_4$



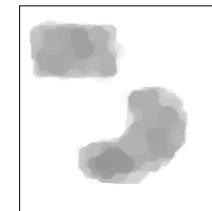
Ξ_1



Ξ_2

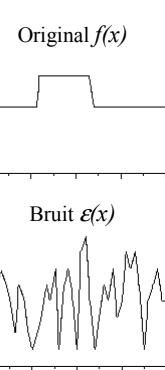


Ξ_5

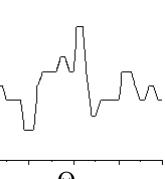


Ξ_8

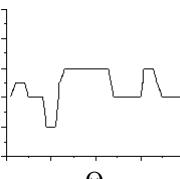
Application à la réduction du bruit



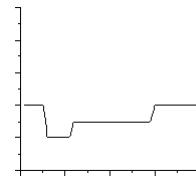
Bruit $\epsilon(x)$



Somme $f(x) + \epsilon(x)$



...en 1d :



Application directe
du filtre alterné $\phi_5 \gamma_5$

Θ_2

Θ_3

Θ_4

Θ_5

Espace d'échelle morphologique

Une granulométrie induit un *espace d'échelle* (scale-space), qui fournit une représentation des images à différents niveaux de détail.



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

67

Supports de cours, exercices et tutoriels

http://www.ensta.fr/~manzanaer/Support_Cours.html



Pour aller plus loin, expérimenter et étudier les algorithmes, à partir de la page web indiquée ci-dessus, vous pouvez télécharger :

- les copies de transparents de ce cours
- un recueil d'exercices et de sujets d'examen
- un tutoriel de morphologie mathématique

Le tutoriel est un logiciel écrit en c++ et en Tcl/Tk. Il fonctionne sous Linux et sous Windows XP.



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

68

Chapitre 3 : Opérateurs connexes et géodésie

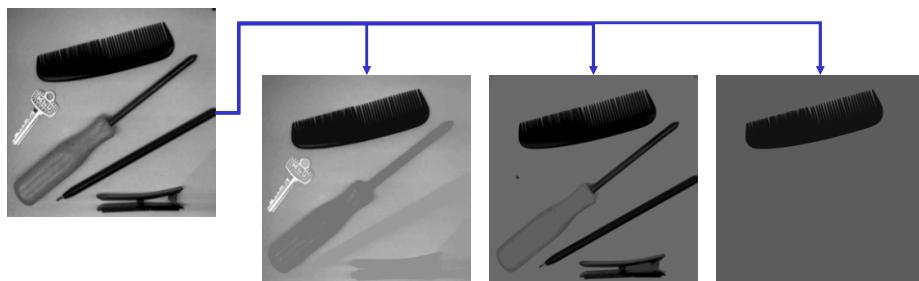
- Opérations géodésiques et interaction régionale.
- Maxima régionaux et érodés ultimes.
- Ouvertures par reconstruction et nivelllements
- Pyramides et espaces d'échelles morphologiques.
- Point de vue algorithmique.

Introduction aux opérations géodésiques

Objectif sous-jacent : l'analyse individuelle des « objets » d'une image.

En l'absence de données de plus haut niveau sémantique, l'objet dans une image est associé à une particule, correspondant en général à une composante connexe.

L'analyse individuelle des objets nécessite donc l'utilisation d'opérateurs (filtres) connexes, c'est-à-dire qui préserve les objets (une composante connexe est soit préservée, soit intégralement éliminée).



Opérations géodésiques

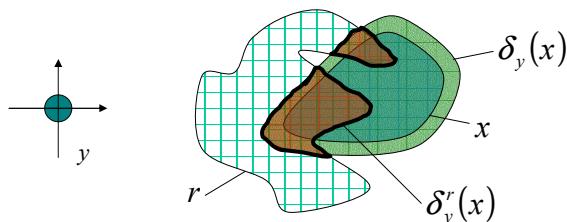
Les opérations géodésiques sont celles qui sont conditionnées par un élément de référence r du treillis. Elles sont définies à partir des opérations géodésiques de base :

la *dilatation géodésique* et la *reconstruction géodésique*.

Dans les opérations géodésiques, l'élément structurant représente le “voisinage élémentaire” de l'origine ; et définit donc la topologie sous-jacente.

La dilatation géodésique dans r :

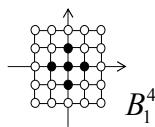
$$\delta_y^r(x) = \delta_y(x) \wedge r$$



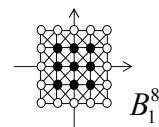
Opérations géodésiques : cas discret

Dans le cas discret, l'élément structurant utilisé dans les opérations géodésiques est en général la boule élémentaire de taille 1, qui détermine implicitement la topologie utilisée.

4-connectivité :



8-connectivité :



Dans le cadre ensembliste, la dilatation géodésique de X dans R (par la boule élémentaire) devient l'ensemble des voisins de X inclus dans R :

$$\delta_{B_1^1}^R(X) = \delta_{B_1^1}(X) \cap R$$

La reconstruction géodésique

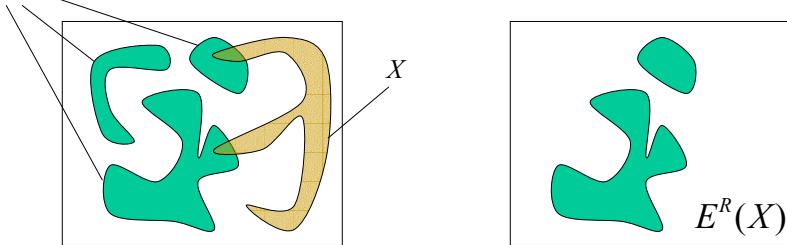
posons

$$\begin{cases} (\delta_{B_1^R})^0(X) = X \\ (\delta_{B_1^R})^n(X) = \delta_{B_1^R}^R((\delta_{B_1^R})^{n-1}(X)) \end{cases} \text{ pour } n > 0$$

La reconstruction géodésique de X dans R est définie par :

$$E_{B_1^R}(X) = \sup_{n \geq 0} \{(\delta_{B_1^R})^n(X)\}$$

Dans le cadre ensembliste, c'est l'ensemble des composantes connexes (au sens de la topologie induite par B_1) de R qui intersectent X :



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

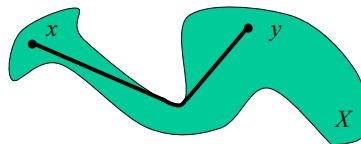
73

Mesures géodésiques

$x, y \in X$
La **distance géodésique** entre x et y dans X :

$$d_X(x, y) = \min \{n \geq 0; x \in (\delta_{B_1^R})^n(\{y\})\}$$

C'est la longueur du (ou des) plus court(s) chemin(s) **dans X** entre x et y .

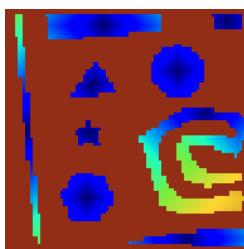


Soit X une composante connexe.

La **fonction de propagation** de X :

$$\Pi_X : X \rightarrow \mathbb{N}$$

$$x \mapsto \max \{d_X(x, y); y \in X\}$$



Soit X une composante connexe.

Le **diamètre géodésique** de X :

$$\begin{aligned} \Delta_X &= \max \{\Pi_X(x); x \in X\} \\ &= \max \{d_X(x, y); x, y \in X\} \end{aligned}$$

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

74

Etiquetage des composantes connexes

La première application de la reconstruction géodésique est l'analyse individuelle de particules, qui consiste à extraire les composantes connexes l'une après l'autre par reconstruction du premier pixel rencontré lors d'un balayage vidéo :



Image binaire



Etiquetage des composantes
connexes

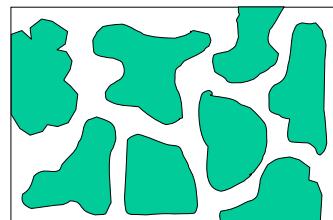
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

75

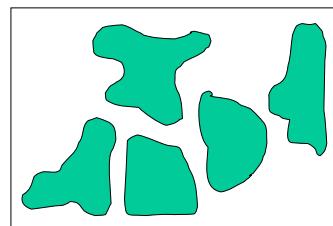
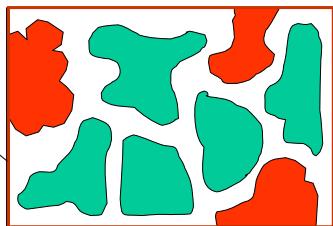
Suppression des objets touchant le bord de l'image

La suppression des objets touchant le bord de l'image binaire X s'obtient par différence avec la reconstruction du bord dans X :



X

Y



$X \setminus E^X(Y)$

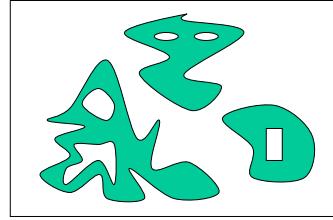
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

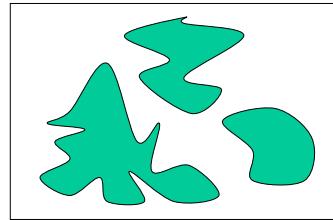
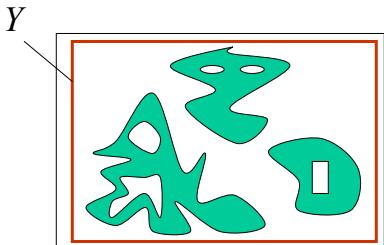
76

Bouchage de trous

Le bouchage de trous dans l'image binaire (bidimensionnelle !) X s'obtient par complément de la reconstruction dans X^c d'un ensemble qui n'intersecte pas X :



X



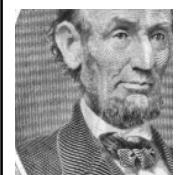
$(E^{X^c}(Y))^c$

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

77

Seuillage par hystérésis



I



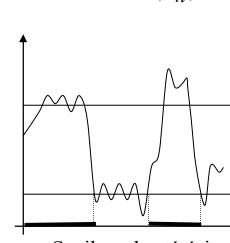
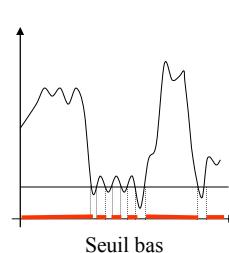
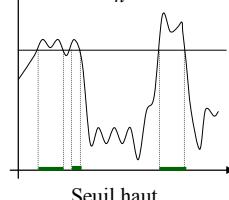
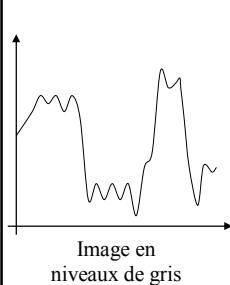
I_h



I_b



$E^{I_b}(I_h)$



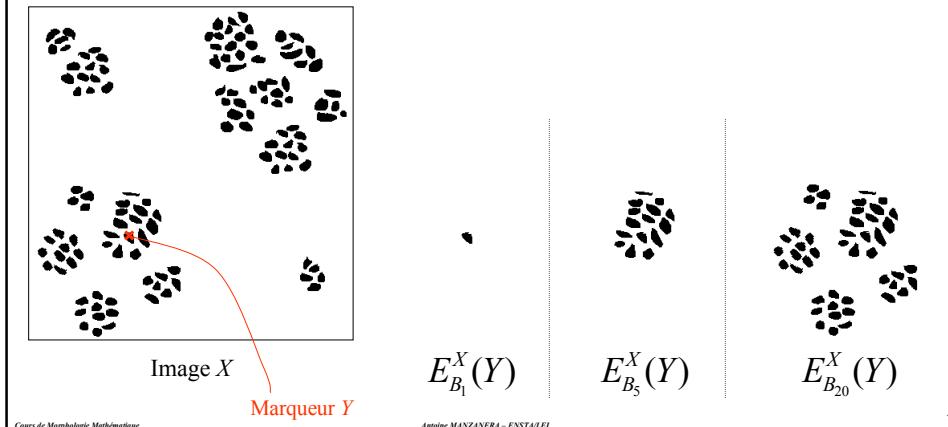
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

78

Connexions généralisées

En faisant varier la taille des éléments structurants utilisés dans les reconstructions, on obtient une hiérarchie de voisinages, et donc une topologie à divers degrés de détails :



Cours de Morphologie Mathématique

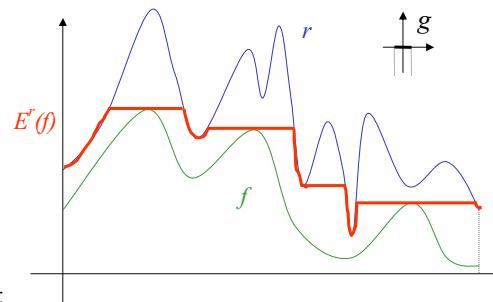
Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

79

Reconstruction fonctionnelle

La dilatation géodésique de f dans r :

$$\delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r$$



La reconstruction géodésique de f dans r :

$$E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_g^r)^n(f) \}$$

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

80

Extrema régionaux

La notion d'extremum régional joue un rôle important pour les images numériques, en particulier dans le calcul des opérateurs géodésiques. Il s'agit de « plateaux », au bord desquels on ne peut que descendre (pour les maxima régionaux), ou monter (pour les minima régionaux) strictement.

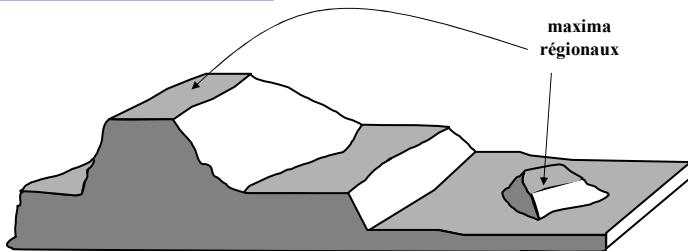
Soit f une fonction numérique.

$$f : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{N}$$

$$SG_i(f) = \{x \in \mathbf{R}^n / f(x) \geq i\}$$

$$\max_f = \bigcup_{i \in \mathbf{N}} \{SG_i(f) \setminus (E^{SG_i(f)}(SG_{i+1}(f)))\}$$

Un point x appartient à un maximum régional du graphe de f lorsqu'on ne peut pas atteindre un point y tel que $f(y) > f(x)$ sans redescendre strictement :



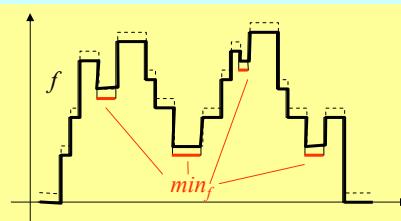
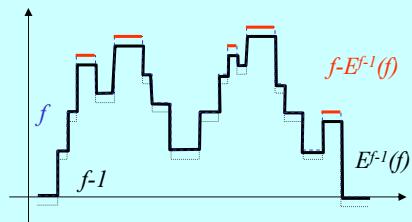
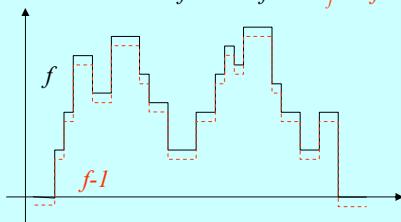
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

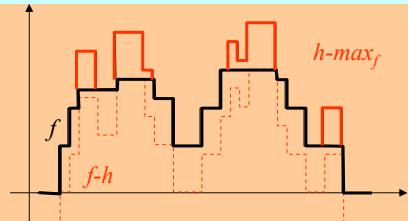
81

Calcul des maxima régionaux

Les maxima régionaux d'une fonction numérique f peuvent se calculer à partir de la reconstruction de $f-l$ sous f : $\max_f = f - E^{f-l}(f)$



Minima régionaux : par dualité



Généralisation : h-extrema régionaux

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

82

Erodés ultimes

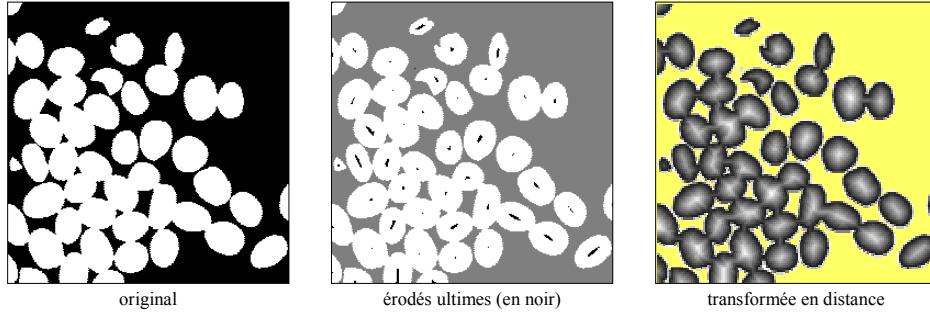
Les maxima régionaux de la transformée en distance correspondent aux composantes connexes qui disparaissent lors d'érosions successives.

F_X^d la transformée en distance d de l'ensemble X.

$$\begin{aligned} SG_i(F_X^d) &= \{x \in \mathbb{R}^n / F_X^d(x) \geq i\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n / d(x, X^c) \geq i\} \\ &= \mathcal{E}_{B_i}(X) \end{aligned}$$

$$\max_{F_X^d} = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{SG_i(F_X^d) \setminus (E^{SG_i(F_X^d)}(SG_{i+1}(F_X^d)))\} = ERO_ULT(X) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \{\mathcal{E}_{B_i}(X) \setminus (E^{\mathcal{E}_{B_i}(X)}(\mathcal{E}_{B_{i+1}}(X)))\}$$

Application : singularisation de particules se recouvrant partiellement :



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

83

Ouvertures et fermetures par reconstruction

La reconstruction géodésique est un filtre morphologique :

$$x \leq y \Rightarrow E^r(x) \leq E^r(y) \quad E^r(E^r(x)) = E^r(x)$$

Si ξ (resp. ψ) est un opérateur anti-extensif (resp. extensif)

$$\text{alors l'opérateur : } E^x(\xi(x)) \quad (\text{resp. } (E^{x^c}((\psi(x))^c))^c)$$

est une ouverture (resp. fermeture) algébrique.

Cas particulier important : $\xi = \gamma$ (ouverture) et $\psi = \phi$ (fermeture) :

ouverture par reconstruction :

$$E^x(\gamma(x))$$

fermeture par reconstruction :

$$(E^{x^c}((\phi(x))^c))^c$$

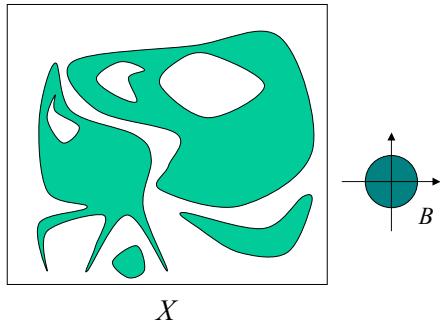
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

84

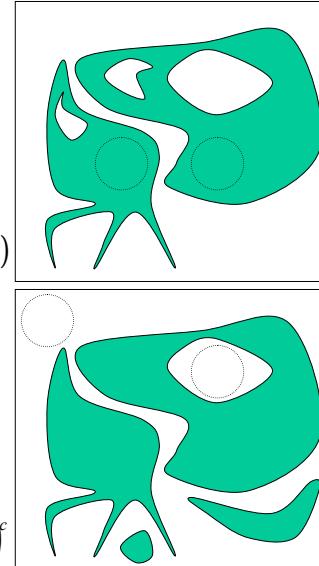
Ouvertures et fermetures par reconstruction

L'ouverture par reconstruction élimine les composantes connexes qui n'appartiennent pas à l'ouvert sans modifier les autres :



La fermeture par reconstruction est définie par dualité :

$$(E^{X^c}((\varphi_B(X))^c))^c$$



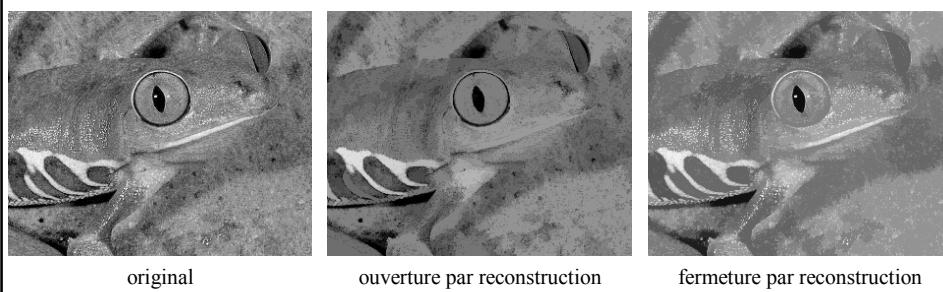
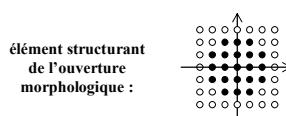
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

85

Ouvertures et fermetures par reconstruction

Par extension, les ouvertures et fermetures par reconstruction élimine les structures en préservant les contours des images numériques :



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

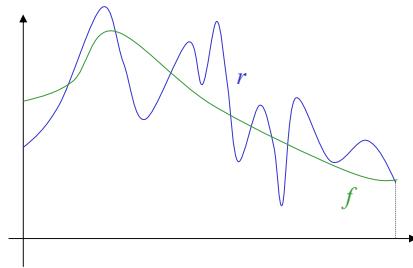
86

Nivellements

Cas où la fonction marqueur f et la fonction de référence r ne sont pas ordonnées

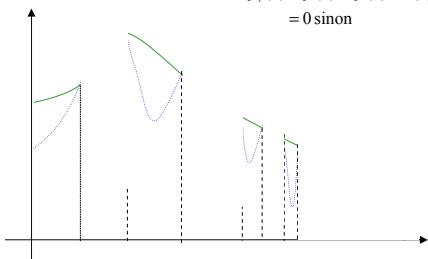
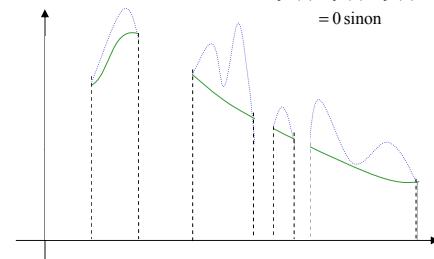
On décompose f en deux fonctions :

$$\begin{aligned} f &= f_- + f_+ \\ &= f_- \vee f_+ \end{aligned}$$



$$f_-(x) = f(x) \text{ si } f(x) \leq r(x) \\ = 0 \text{ sinon}$$

$$f_+(x) = f(x) \text{ si } f(x) > r(x) \\ = 0 \text{ sinon}$$

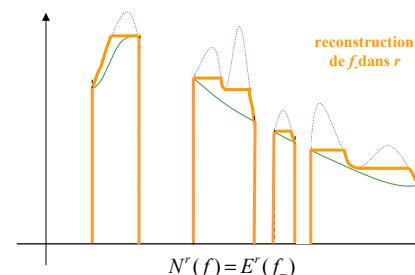


Cours de Morphologie Mathématique

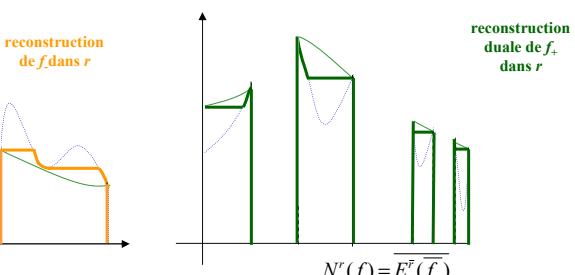
Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

87

Nivellements

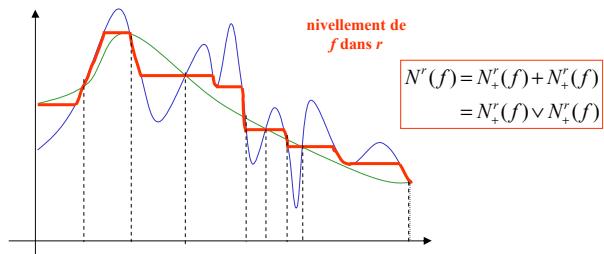


$$N^r_-(f) = E^r(f_-)$$



$$N^r_+(f) = E^r(f_+)$$

Les nivellments définissent des opérateurs connexes, qui simplifient l'image par sélection des ensembles de niveaux ou de leurs complémentaires :

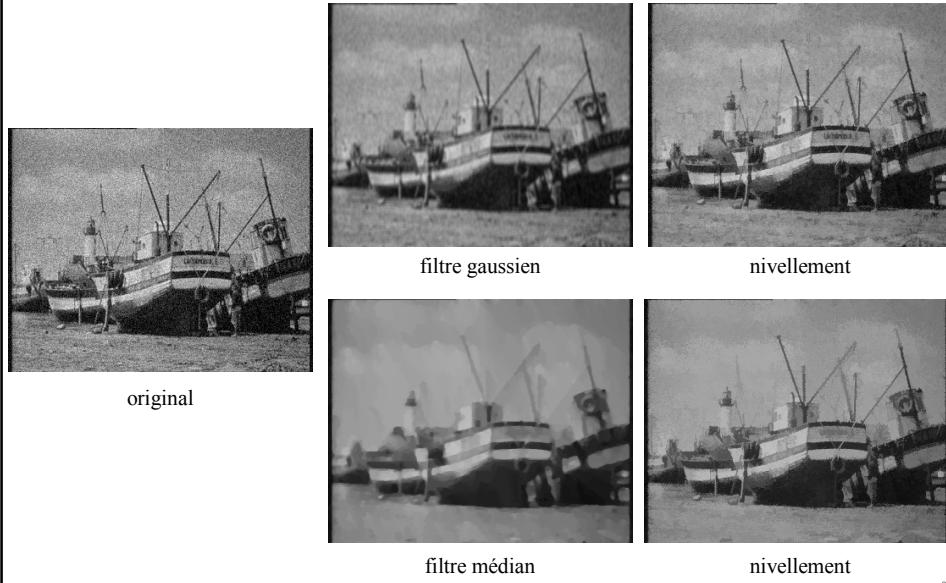


Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

88

Exemples de niveling



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

89

Nouvel espace d'échelles morphologique

Une granulométrie induit un espace d'échelle via les *filtres alternés séquentiels par reconstruction* (i.e. niveling des filtres alternés séquentiels) :



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

90

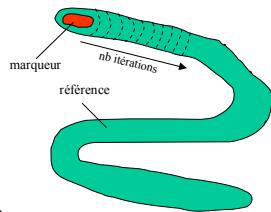
Point de vue algorithmique

RECONSTRUCTION NAÏVE

Sur une architecture séquentielle, l'implantation « naïve » de la reconstruction, i.e. basée sur la définition :

$$\begin{cases} \delta_g^r(f) = \delta_g(f) \wedge r \\ E_g^r(f) = \sup_{n \geq 0} \{ (\delta_g^n)^*(f) \} \end{cases}$$

conduit à un coût de calcul tout à fait prohibitif, puisque le nombre d'itérations de dilatation géodésique peut être égal au diamètre géodésique des plus grandes composantes connexes :



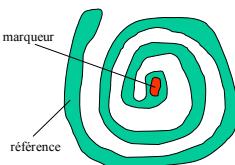
Cours de Morphologie Mathématique

RECONSTRUCTION SEQUENTIELLE

Une implantation sensiblement plus efficace consiste à « propager » le marqueur au cours d'un balayage séquentiel, direct puis rétrograde :

```
RECONSTRUIT (Marqueur M, Référence R) {
    Répéter jusqu'à stabilité {
        // Balayage direct
        Pour j de 0 à w {
            Pour i de 0 à h {
                M(i,j) = MIN(R(i,j),MAX(M(i-1,j),M(i,j-1),M(i,j));
            }
        }
        // Balayage rétrograde
        Pour j de w à 0 {
            Pour i de h à 0 {
                M(i,j) = MIN(R(i,j),MAX(M(i+1,j),M(i,j+1),M(i,j));
            }
        }
    }
}
```

Néanmoins, le nombre d'itérations de double balayage peut parfois être important dans le cas de composantes connexes enroulées, par exemple :



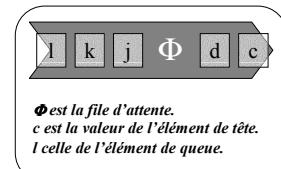
Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

91

Point de vue algorithmique

La file d'attente (FIFO) est une structure de donnée particulièrement utile dans les algorithmes morphologiques à base de reconstruction géodésique. Son intérêt est multiple :

- On restreint les calculs aux pixels susceptibles de changer : on examine les pixels qui sont dans la file d'attente, et pas tous les pixels de l'image.
- La terminaison d'un algorithme de relaxation est rendue visible par le fait que la file d'attente est vide. On n'a donc plus besoin de garder une trace explicite des changements pour détecter la convergence.



$x = \text{pop}(\Phi)$		La fonction POP(Φ) supprime l'élément de tête et renvoie sa valeur, soit $x = c$.
$\text{push}(\Phi, y)$		La procédure PUSH(y, Φ) ajoute en queue de Φ un nouvel élément de valeur y , soit $m = y$.
$\text{empty}(\Phi) = \text{TRUE}$		La fonction empty(Φ) est une fonction booléenne qui renvoie 1 si et seulement si Φ est vide.

La structure de donnée File d'attente et ses fonctions associées.

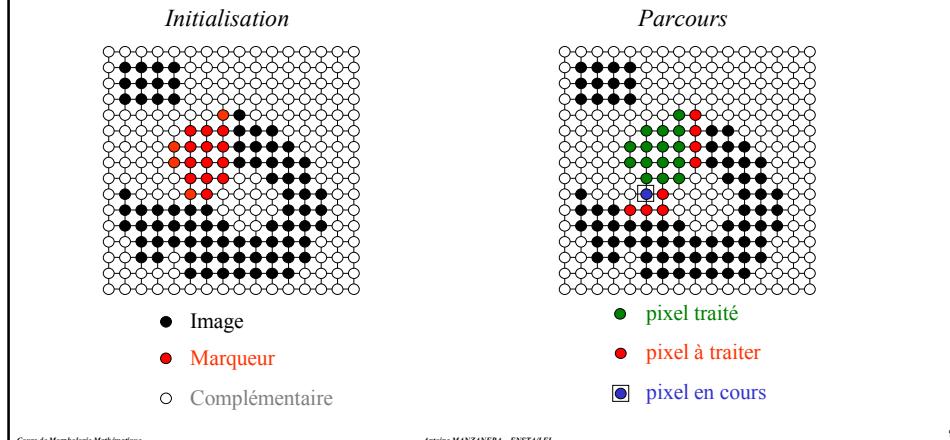
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

92

Reconstruction binaire à base de files d'attente

La reconstruction par file d'attente consiste à initialiser la FIFO avec le marqueur, puis pour chaque élément de la FIFO extraire, rajouter ses voisins dans l'image, ainsi jusqu'à convergence (FIFO vide). Le nombre d'opération est proportionnel au nombre de pixels « ajoutés » au marqueur...



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

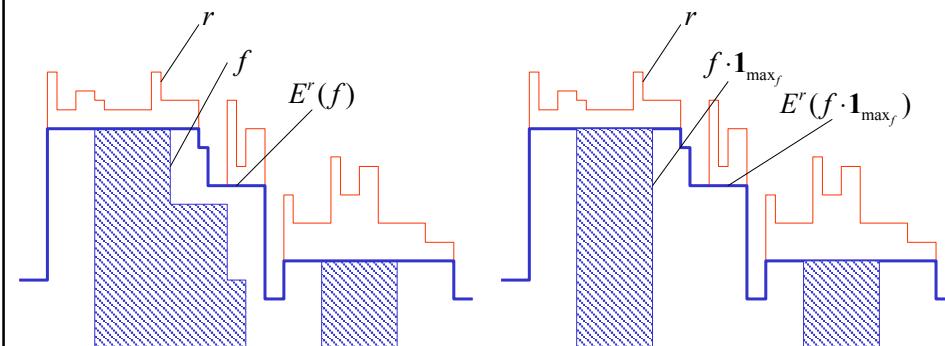
93

Reconstruction numérique à base de FIFO

Dans le cas de la reconstruction numérique (fonctionnelle), l'utilisation des FIFO est moins immédiate car il faut déterminer le domaine de stabilité (ensemble des points fixes) de la fonction marqueur f , au bord duquel la propagation va être initialisée. Ce domaine de stabilité est en fait l'ensemble des *maxima régionaux* de f . On utilise alors la propriété suivante :

La reconstruction de f est la même que la reconstruction de la restriction de f à ses maxima locaux :

$$E^r(f) = E^r(f \cdot \mathbf{1}_{\max_f})$$



Cours de Morphologie Mathématique

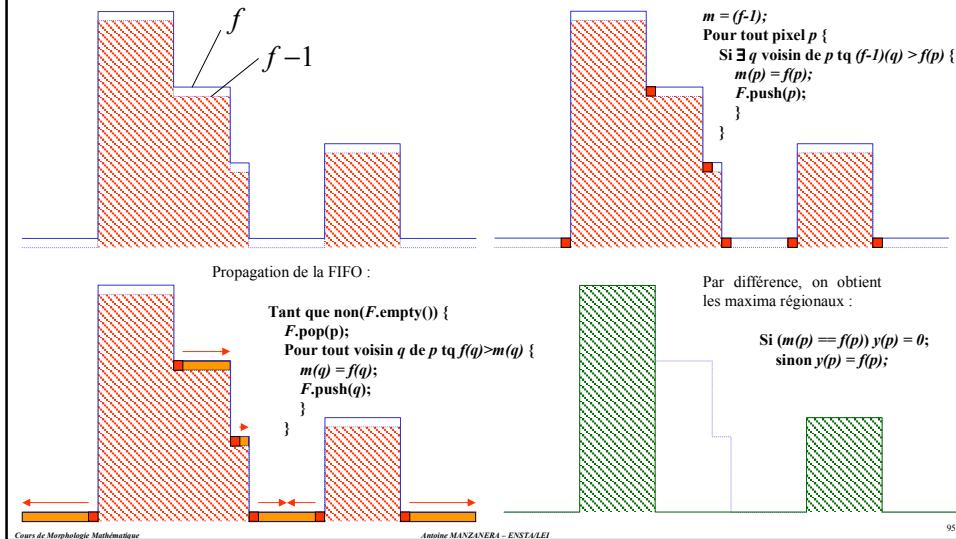
Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

94

Reconstruction numérique à base de FIFO

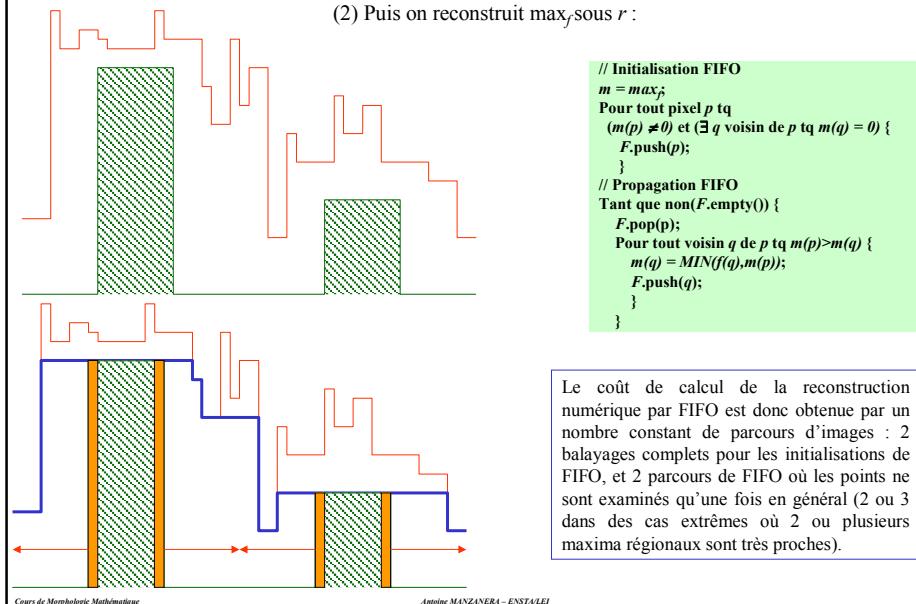
(1) La première étape consiste donc à calculer les maxima régionaux de f :

Pour cela, on reconstruit $f-1$ sous f :



Reconstruction numérique à base de FIFO

(2) Puis on reconstruit \max_f sous r :

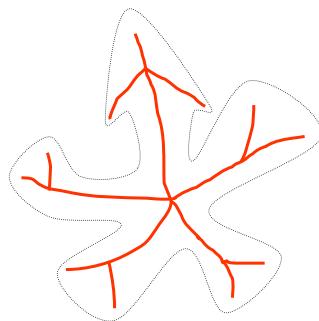
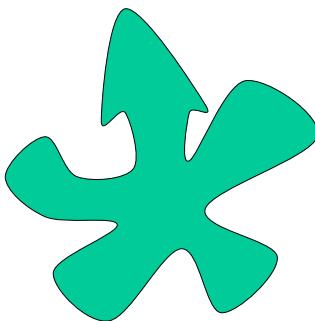


Chapitre 4 : Squelettes et Lignes de Partage des Eaux

- Squelettes : introduction.
- Squelette morphologique.
- Homotopie discrète et squelettes par amincissement.
- Squelette par zones d'influences (SKIZ).
- Ligne de partage des eaux (LPE) : introduction.
- LPE et filtrage morphologique.
- Point de vue algorithmique.

Squelettes : motivations

L'objectif de la squelettisation est de représenter un ensemble avec un minimum d'information, sous une forme qui soit à la fois simple à extraire et commode à manipuler.

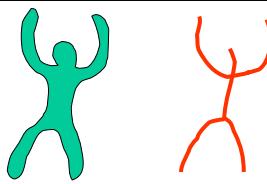


Remarque : Pour les squelettes, on se limitera dans le cadre de ce cours au cas des ensembles bidimensionnels (images binaires 2D), bien que certaines notions s'appliquent également aux dimensions supérieures.

Squelettes : propriétés recherchées (1)

Préservation de la géométrie

Le squelette doit rendre compte des propriétés géométriques de la forme : ramifications, parties allongées...



Epaisseur nulle



Le squelette doit être constitué de courbes sans épaisseur.

Préservation de la topologie

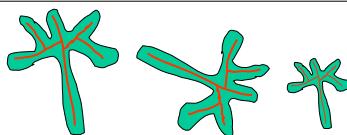
Le squelette doit conserver les relations de connexité : même nombre de composantes connexes, même nombre de trous par composante connexe.



Squelettes : propriétés recherchées (2)

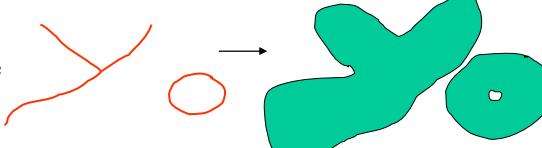
Invariance aux transformations affines

Le squelette doit commuter avec la translation, la rotation et l'homothétie



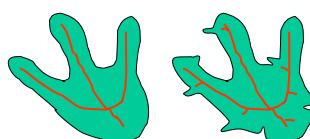
Réversibilité

Le squelette doit permettre de retrouver la forme originale



Continuité

Une petite modification de la forme originale doit induire une petite modification du squelette



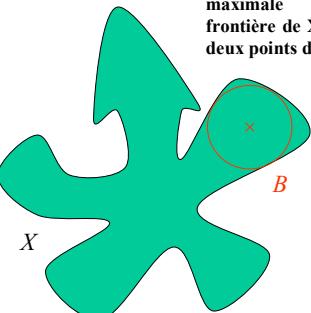
Squelette morphologique

Le squelette morphologique est fondée sur la notion d'*axe médian* (*Blum 67*). Il utilise la notion de *boule maximale* :

Une boule B est dite maximale dans X si :

$$B \subset B' \subset X \Rightarrow B' = B$$

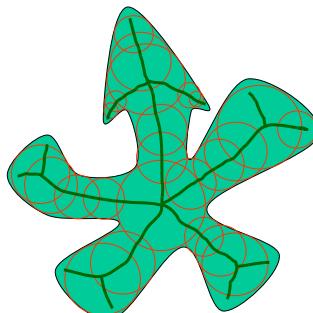
Propriété : une boule maximale touche la frontière de X en au moins deux points distincts



Cours de Morphologie Mathématique

Le squelette morphologique (euclidien) est la réunion des centres de boules (euclidiennes) maximales :

$$S(X) = \bigcup_{\rho \geq 0} \{x \in \mathbf{R}^2; B(x, \rho) \text{ est maximale dans } X\}$$



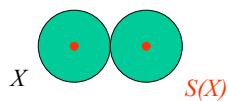
101

Propriétés du squelette morphologique (1)

De par sa définition, le squelette morphologique euclidien respecte la géométrie de la forme originale, et il est invariant par homothétie. Il possède de plus les propriétés suivantes :

- Il est sans épaisseur (d'intérieur vide).
- Il est anti-extensif et idempotent :
$$S(X) \subset X \quad S(S(X)) = S(X)$$
- Si X est ouvert, alors X et $S(X)$ ont la même topologie.

Contre-exemple :



Cours de Morphologie Mathématique

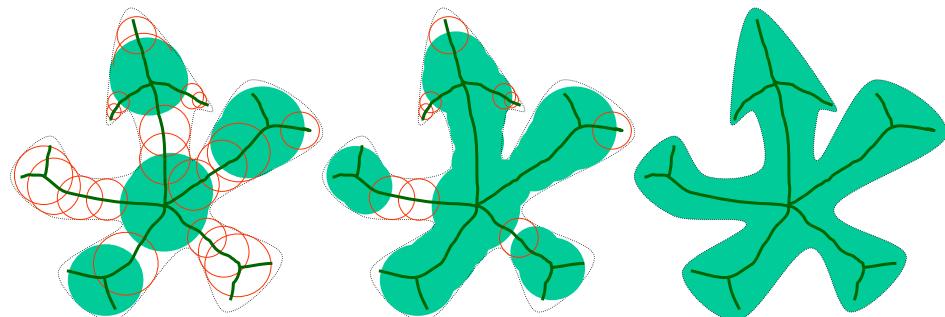
Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

102

Propriétés du squelette morphologique (2)

Réversibilité :

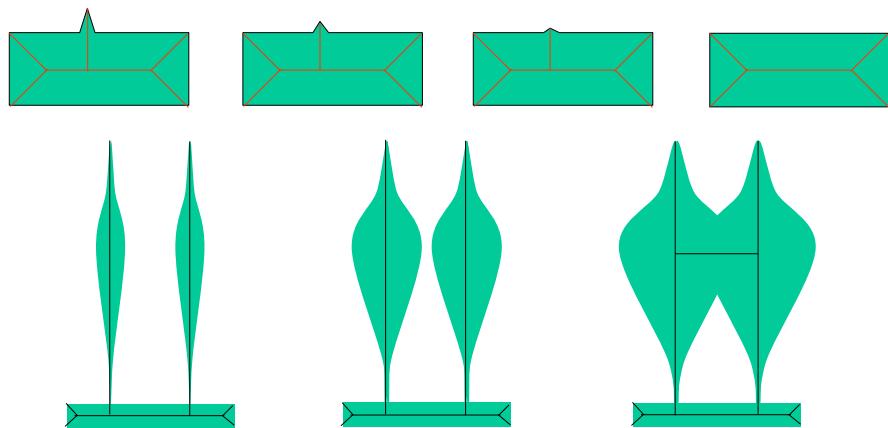
La donnée de la transformée en distance euclidienne de X sur $S(X)$ permet de reconstruire exactement X :



Propriétés du squelette morphologique (3)

Non-continuité :

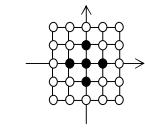
Le squelette morphologique euclidien n'est pas une transformation continue :



Squelette morphologique : passage au discret

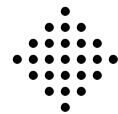
Dans le cas discret, les boules maximales sont les boules d'une distance discrète donnée

Exemples :

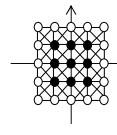


voisinage élémentaire
de l'origine

Distance d_4

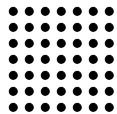


boule de rayon 3



voisinage élémentaire
de l'origine

Distance d_8



boule de rayon 3

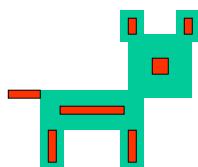
PROPRIÉTÉ

Un point x est centre d'une boule maximale de rayon r dans X si et seulement si il appartient à l'érodé de X par une boule de taille r , mais pas à l'ouvert de cet érodé par la boule élémentaire :

$$\begin{aligned} S_r(X) &= \{x \in \mathbb{Z}^2; B(x, r) \text{ est maximale dans } X\} \\ &= \mathcal{E}_{B(0,r)}(X) \setminus \gamma_{B(0,1)}(\mathcal{E}_{B(0,r)}(X)) \end{aligned}$$

Squelette morphologique : passage au discret

Par conséquent, le squelette morphologique est égal à l'union des résidus d'ouverture des érodés successifs de la forme originale :

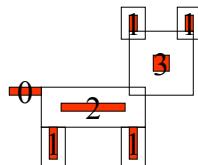


$$\begin{aligned} S(X) &= \bigcup_{r \in \mathbb{N}} S_r(X) \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \mathcal{E}_{B(0,r)}(X) \setminus \gamma_{B(0,1)}(\mathcal{E}_{B(0,r)}(X)) \end{aligned}$$

Lantuejoul 78

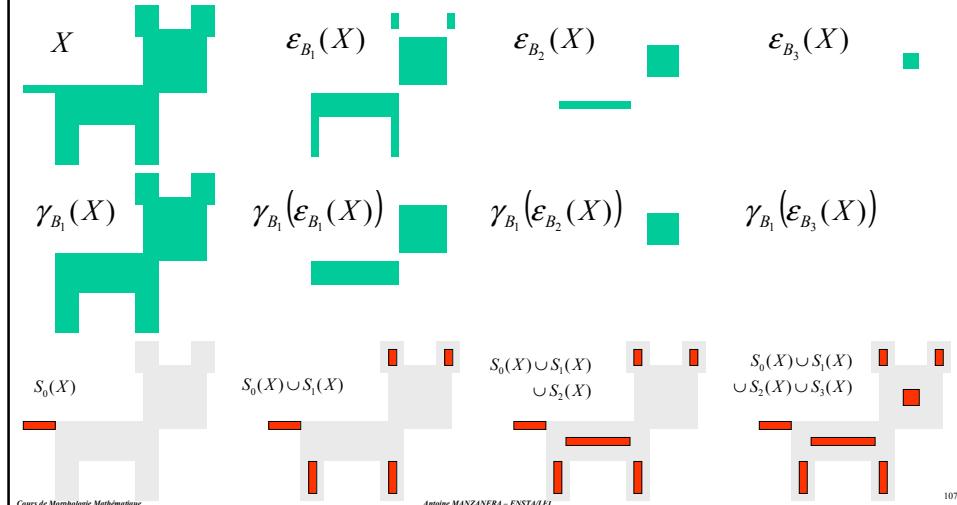
Formule d'inversion du squelette morphologique :

$$X = \bigcup_{r \in \mathbb{N}} \delta_{B(0,r)}(S_r(X))$$



Squelette morphologique : passage au discret

La formule de Lantuéjoul fournit un moyen explicite de calculer le squelette morphologique :



Cours de Morphologie Mathématique

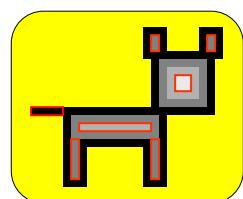
Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

107

Squelette morphologique : passage au discret

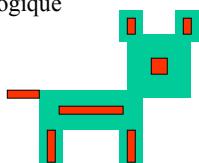
Comme l'ensemble des résidus d'ouverture coïncide avec l'ensemble des maxima locaux de la transformée en distance, le squelette morphologique discret est égal aux maxima locaux de la transformée en distance :

$$S(X) = \{x \in X; \forall y, \delta(x, y) = 1 \Rightarrow \delta(y, X^c) \leq \delta(x, X^c)\}$$



Contrairement au cas continu, le squelette morphologique ne préserve pas la topologie de la forme originale :

Les algorithmes de squelettisation connexe traitent donc le problème de préservation de la topologie directement dans le cadre discret.



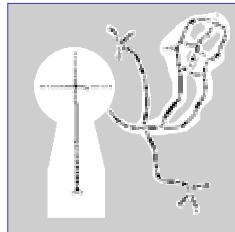
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

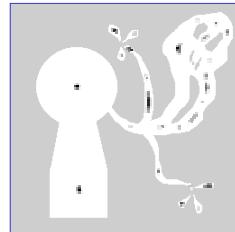
108

Squelette morphologique / Erodés ultimes

REMARQUE : Noter les parallèles entre le squelette morphologique et les érodés ultimes :



Squelette morphologique



Erodés ultimes

||
Maxima locaux de la transformée en distance

||
Maxima régionaux de la transformée en distance

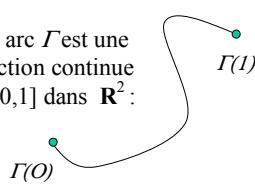
||
Résidus d'ouverture

||
Résidus d'ouverture par reconstruction

Homotopie : cas continu

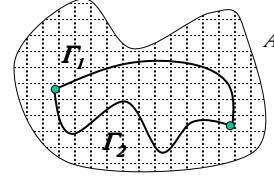
La préservation de la topologie est liée à la notion d'*homotopie*, originellement définie pour des arcs dans une partie du plan \mathbf{R}^2

Un arc Γ est une fonction continue de $[0,1]$ dans \mathbf{R}^2 :

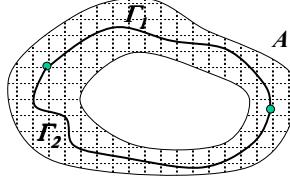


Soit A une partie de \mathbf{R}^2 . Deux arcs Γ_1 et Γ_2 de mêmes extrémités sont **homotopes** dans A s'il existe une fonction Θ bicontinue de $[0,1] \times [0,1]$ dans A telle que :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0,1]: \Theta(t,0) = \Gamma_1(t) & \quad \forall u \in [0,1]: \Theta(0,u) = \Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) \\ \Theta(t,1) = \Gamma_2(t) & \quad \Theta(t,u) = \Gamma_2(1) = \Gamma_1(1) \end{aligned}$$



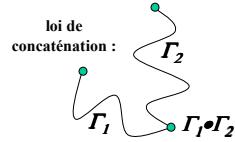
Γ_1 et Γ_2 sont homotopes dans A .



Γ_1 et Γ_2 ne sont pas homotopes dans A .

Homotopie : cas continu

- L'homotopie est une relation d'équivalence.
- Si A est un ouvert de \mathbf{R}^2 , l'ensemble des classes d'homotopie, muni de la loi de concaténation, est un groupe dit *groupe fondamental* de A .



- Le groupe fondamental caractérise la topologie de l'ensemble, et on dira que deux ouverts sont *homotopes* si leurs groupes fondamentaux sont isomorphes.
- Etant donnée une fonction F de \mathbf{R}^2 dans \mathbf{R}^2 , on dira que F préserve la topologie si et seulement si pour tout ouvert A , A et $F(A)$ sont homotopes.

Homotopie et arbre de connexité

On peut représenter le groupe fondamental d'un ouvert borné du plan par un arbre orienté dit arbre de connexité

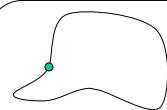
- Chaque nœud noir représente une composante connexe de l'ouvert, chaque nœud blanc représente une composante connexe du complémentaire.



- Les successeurs de chaque nœud blanc (resp. nœud noir) correspondent aux composantes connexes de l'ouvert (resp. du complémentaire) que la composante représentée par le nœud entoure.

La définition de la relation "entoure" est liée au *théorème de Jordan*...

Théorème de Jordan dans \mathbb{R}^2

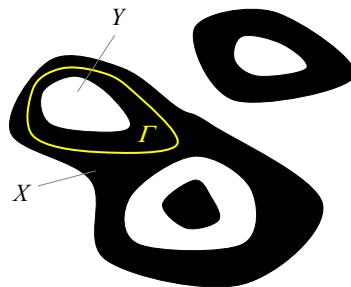


Déf: Une courbe de Jordan est une *courbe simple fermée* (arc Γ injectif sur $[0,1[$ et tel que $\Gamma(0)=\Gamma(1)$)

Théorème de Jordan : Une courbe de Jordan sépare le plan en deux parties : l'intérieur et l'extérieur de la courbe.

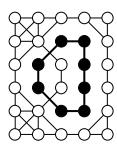
Relation d'entourage :

On dit qu'une composante X de l'ouvert (resp. du complémentaire) entoure une composante Y du complémentaire (resp. de l'ouvert) s'il existe une courbe de Jordan Γ incluse dans X telle que Y est inclus dans l'intérieur de Γ :

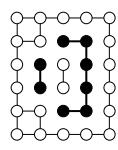


Théorème de Jordan en maille carrée

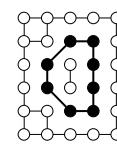
Le théorème de Jordan n'est pas valide dans la maille carrée...



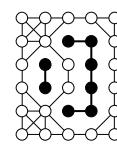
8-connectivité



4-connectivité



(8,4)-connectivité



(4,8)-connectivité

...sauf si l'on considère des topologies différentes pour l'objet et pour le complémentaire.

$(K = 8 \text{ ou } 4 ; \text{ On note } \tilde{K} = 12 - K)$

Propriété d'homotopie en maille carrée :

A et B sont K -homotopes si et seulement si : il existe une bijection entre l'ensemble des composantes K -connexes de A et celles de B , et une bijection entre les composantes \tilde{K} -connexes de A^c et celles de B^c , qui préservent la relation d'entourage



Homotopie discrète et simplicité

Lorsqu'il y a une relation d'inclusion entre les deux ensembles,
l'homotopie s'exprime plus simplement :

Soit $A \subset B$. Alors A est homotope à B si et seulement si les 2 conditions suivantes sont vérifiées :

- Toute K -cc de B contient exactement une K -cc de A .
- Toute \tilde{K} -cc de A^c contient exactement une \tilde{K} -cc de B^c .

Stefanelli & Rosenfeld 1971

Ensembles simples :

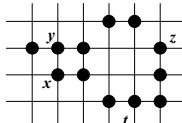
Soit $A \subset X$. A est dit ***K-simple*** dans X si et seulement si $X \setminus A$ est homotope à X .

Points simples :

Soit $x \in X$. x est un point ***K-simple*** de X si $\{x\}$ est un ensemble K -simple dans X .

exemples :

- x et y sont 8-simples
- x et z sont 4-simples



115

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

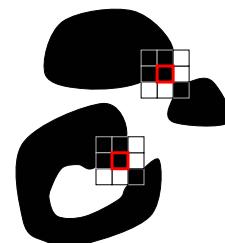
Caractérisation analytique des points simples

La simplicité d'un point peut être déterminée en examinant ses 8 voisins :

Théorème :

Soit $x \in X$. x est un point ***K-simple*** de X si et seulement si :

- (1) x a au moins un \tilde{K} -voisin dans X^c .
- (2) x est K -voisin d'une seule K -cc dans son voisinage strict.



Nombres de connexité :

somme arithmétique

$$N_{c_8}^X(x) = \sum_{i=0}^3 (x_{2i+1} \vee x_{2i+2}) \wedge \neg x_{2i}$$

$$N_{c_4}^X(x) = \sum_{i=0}^3 x_{2i} \wedge \neg(x_{2i+1} \wedge x_{2i+2})$$

Yokoï 1973

Propriété :

$$x \text{ est } K\text{-simple dans } X \Leftrightarrow N_{c_K}^X(x) = 1$$

Notation des 8 voisins :

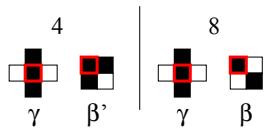
x_3	x_2	x_1
x_4	x	x_0
x_5	x_6	x_7

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

116

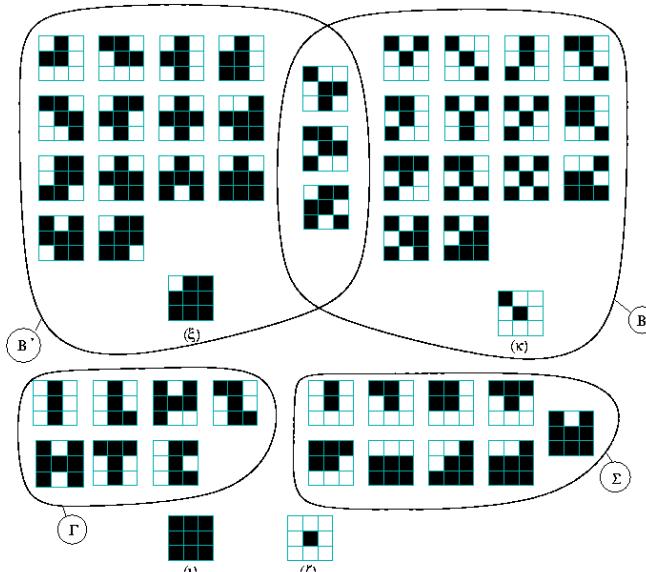
Caractérisation géométrique des points simples



Ce classement montre une caractérisation géométrique des points simples : Un point qui n'est ni un point intérieur (configuration ι), ni un point isolé (configuration ζ), est 8-simple (resp. 4-simple) s'il ne contient pas dans son 8-voisinage l'une des sous-configurations γ ou β (resp. γ ou β'). La réciproque est également vraie, sauf pour la configuration κ (resp. ξ).

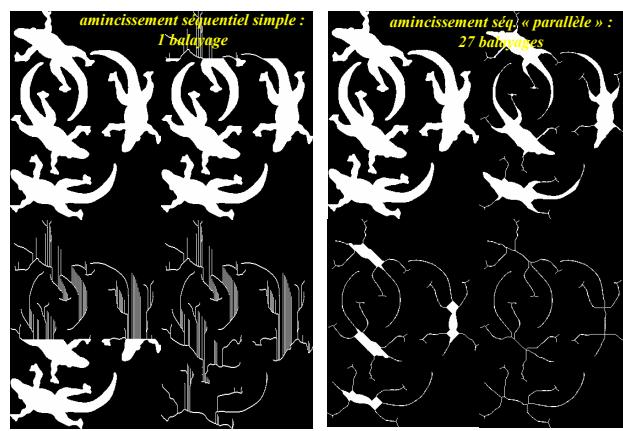
Classification des configurations de 8-voisinage en fonction de sous-configurations communes

Cours de Morphologie Mathématique



Squelettisation : séquentiel vs parallèle

Si l'on retire des points de squelette (simples et non terminaux) de manière séquentielle, on préserve la connexité : on obtient donc un squelette en 1 seule itération... mais toutes les propriétés métriques du squelette disparaissent ! Les algorithmes d'amincissement séquentiels « simulent » donc le parallélisme pour retirer indépendamment les points, en travaillant sur une image d'entrée I_{IN} , et une image de sortie I_{OUT} , la mise à jour $I_{IN} = I_{OUT}$ ne se faisant qu'à la fin de chaque balayage.



Par conséquent, il est indispensable de pouvoir retirer un grand nombre de points « simultanément ».

ENSEMBLES SIMPLES

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA - ENSTA/LEI

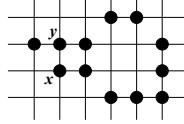
118

Points simples et ensembles simples



Une réunion de points simples ne forment pas un ensemble simple en général :

ex : x et y sont tous deux 8-simples, mais la destruction de la paire $\{x,y\}$ déconnecte l'objet en deux composantes 8-connexes



Se pose alors la question de la validité des algorithmes de squelettisation *parallèles*. Le résultat suivant répond à ce problème :

Théorème de Ronse (1988) :

Soit A un opérateur de $P(\mathbb{Z}^2)$ dans $P(\mathbb{Z}^2)$ tel que pour tout X , $A(X) \subset X$. Si pour tout X , les 3 conditions suivantes sont vérifiées :

- Tout $x \in X \setminus A(X)$ est K -simple.
- Toute paire $\{x,y\} \subset X \setminus A(X)$ de points (12- K)-adjacents est K -simple.
- Si $K=8$, alors aucune K -cc de X contenue dans un carré 2×2 n'appartient à $X \setminus A(X)$.

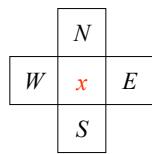
Alors l'opérateur A préserve la K -topologie

K	
4	8

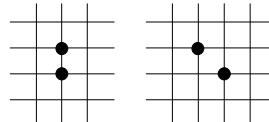
Points simples et ensembles simples

Pour assurer l'homotopie dans le cas d'une destruction simultanée de points simples, il faut donc en général examiner un voisinage plus large. On peut également utiliser la propriété suivante, qui est une simple conséquence du théorème de Ronse :

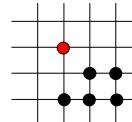
Le retrait simultané de points simples d'une image X ne modifie pas la topologie de X si on ne retire que les points qui ont un voisin *Nord* (resp. *Est*, *Sud*, et *Ouest*) dans X^c , sauf pour les composantes connexes de deux pixels.



dénomination cardinale
des 4-voisins



cas des composantes de deux pixels



Pixel terminal : un seul
voisin dans l'image

Ou encore : le retrait simultané de points simples *et non terminaux* d'une image X ne modifie pas la topologie de X si on ne retire que les points qui ont un voisin *Nord* (resp. *Est*, *Sud*, et *Ouest*) dans X^c .

Noyau homotopique

En retirant les points simples de la frontière dans une direction cardinale donnée, puis en réitérant le procédé en alternant les directions *Nord*, *Est*, *Ouest* et *Sud*, et ce, jusqu'à convergence, on obtient "le plus petit" (au sens du procédé de destruction des points) ensemble homotope à l'original, dit *noyau homotopique* :



Original



Noyau homotopique

Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

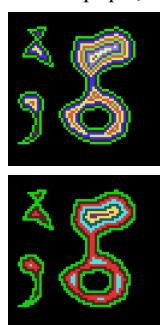
121

Squelettes par points d'ancrage

En imposant la présence d'un ensemble de référence par un OU logique à chaque itération du noyau homotopique, on obtient le *squelette par points d'ancrage* :



original



transformée en distance



points d'ancrage :
centres des boules max



squelette par points
d'ancrage

d_4



d_8

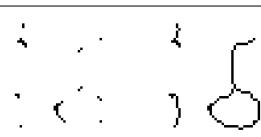


d'autres exemples...

Intersection des
max locaux
pour d_4 et d_8 :



érodés ultimes
(squelette minimal) :



Cours de Morphologie Mathématique

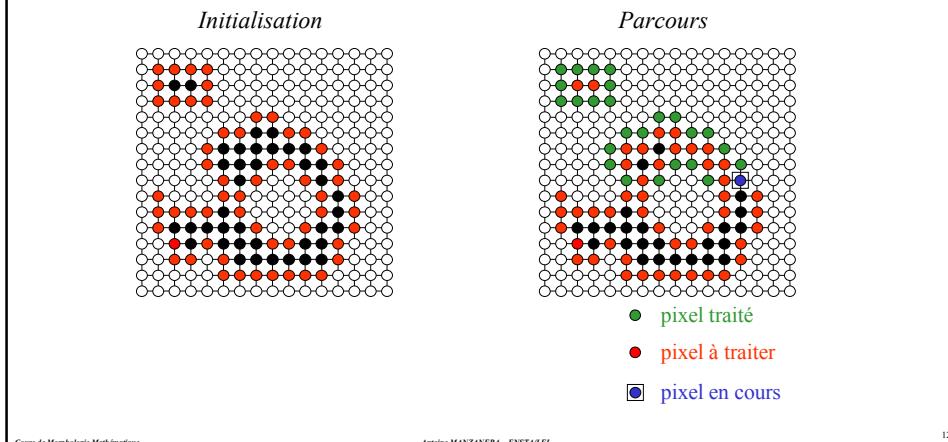
Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

122

Point de vue algorithmique

Squelettisation par file d'attente

La squelettisation séquentielle par file d'attente est un algorithme d'amincisement très efficace, qui fonctionne par une phase d'initialisation et une phase de parcours, soit 1 parcours entier de l'image, et 1 parcours entier de l'ensemble des pixels noirs :



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

123

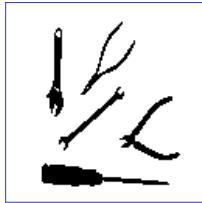
Squelette par zones d'influence

Soit X un ensemble composé des différentes composantes connexes X_i : $X = \bigcup_i X_i$

La *zone d'influence* d'une composante connexe de X est l'ensemble des points du plan plus proche de cette composante que de toute autre composante de X :

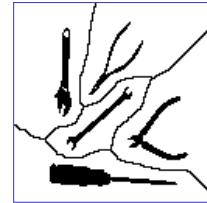
$$IZ(X_i) = \{x \in \mathbb{R}^2; \forall j \neq i, d(x, X_i) < d(x, X_j)\}$$

Le *squelette par zone d'influence* (SKIZ) de X est la frontière de l'ensemble des zones d'influence :



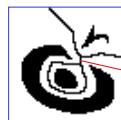
original

$$SKIZ(X) = \left[\bigcup_i IZ(X_i) \right]^c$$



SKIZ + original

En discret, le SKIZ peut se calculer à partir du noyau homotopique dual, qui en constitue déjà une bonne approximation :



cette partie de la courbe
n'appartient pas au SKIZ

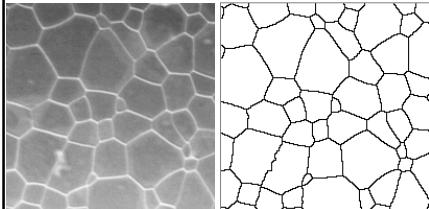
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

124

LPE : motivation

La ligne de partage des eaux (LPE) constitue l'approche morphologique de la segmentation d'une image en niveaux de gris. Le but est d'obtenir une partition de l'image en régions regroupant des pixels jugés équivalents en fonction d'un certain critère.



ex1 : analyse des cristaux de minerai d'uranium

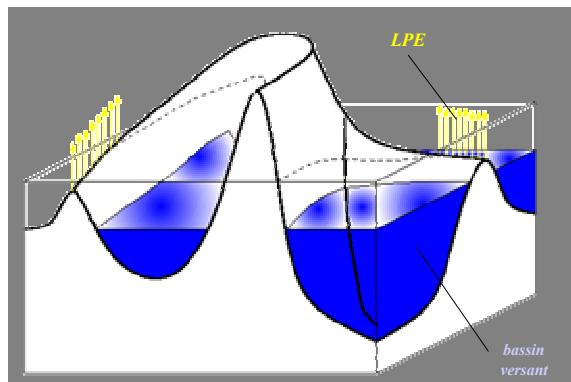


ex2 : détection de contours

La segmentation est la base de la représentation de l'image qui permettra d'aller vers une description évoluée de la scène.

LPE par simulation d'immersion

Si l'on considère une image comme une surface topographique, où l'altitude correspond au niveau de gris, le principe de construction de la LPE par immersion est le suivant : en imaginant que tous les minima régionaux sont percés, on immerge progressivement le relief par une montée des eaux.

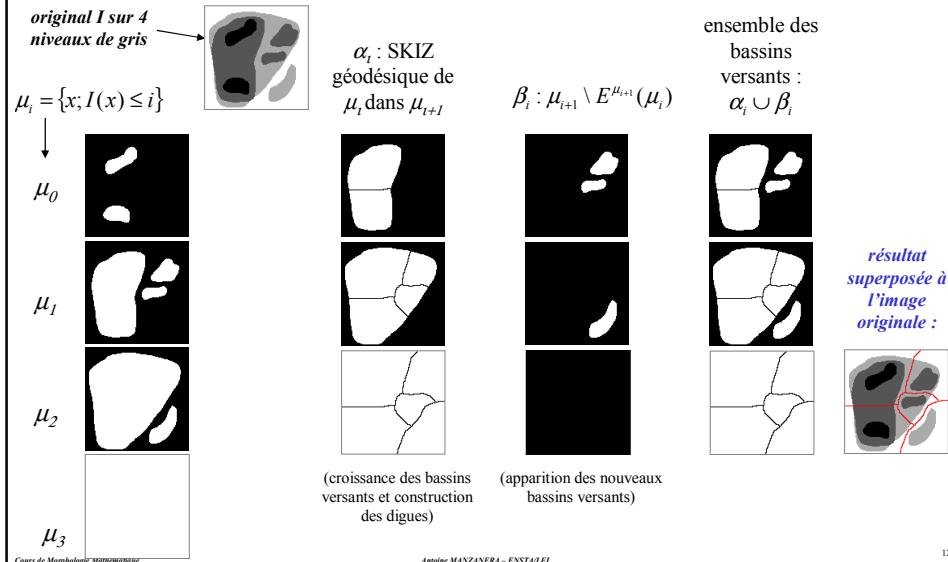


(1) A chaque fois que la hauteur de l'eau atteint l'altitude d'un minimum régional, un nouveau bassin versant est créé.

(2) A chaque fois que deux bassins se rencontrent, on empêche leur fusion en construisant une “digue”.

L'ensemble des digues forme la LPE.

Calcul de la LPE



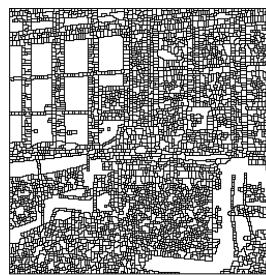
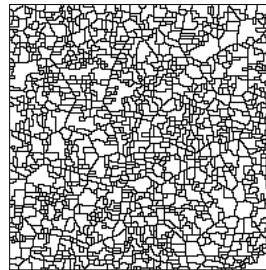
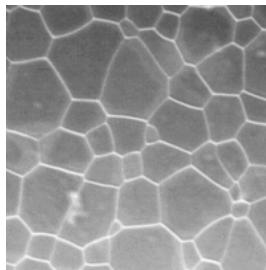
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

127

LPE : problème de la sursegmentation

Dans le cas d'images naturelles, l'application de l'algorithme précédent sur l'image (uranium) ou sur le gradient morphologique de l'image (bureau) produit une sursegmentation très importante.



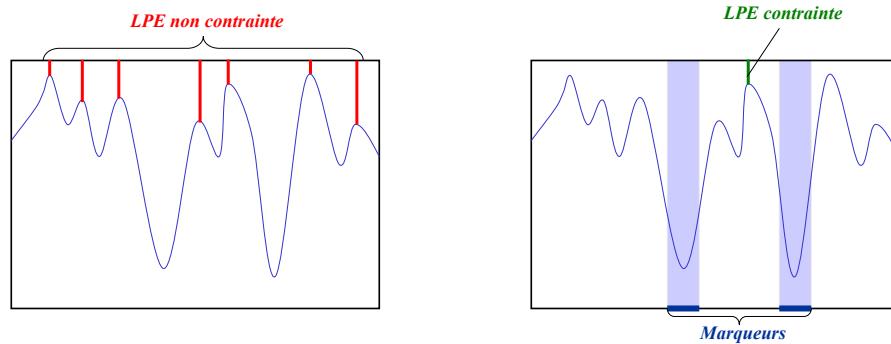
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

128

LPE avec marqueurs

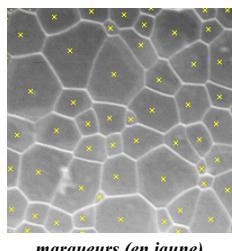
La première technique pour éviter la sursegmentation est d'utiliser des *marqueurs* qui ont pour rôle *d'imposer la présence de certains bassins versants seulement*, de manière à *contraindre la topologie de la LPE*.



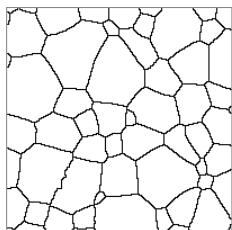
Pratiquement, on impose la présence des marqueurs par un OU logique à chaque étape, et on ne fait pas apparaître de nouveaux bassins versants.

LPE avec marqueurs : applications

exemple 1



marqueurs (en jaune)

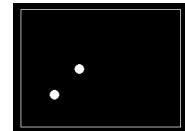


LPE contrainte

exemple 2



Séquence du Taxi de Hambourg



marqueurs : objets mobiles + fond



LPE brute

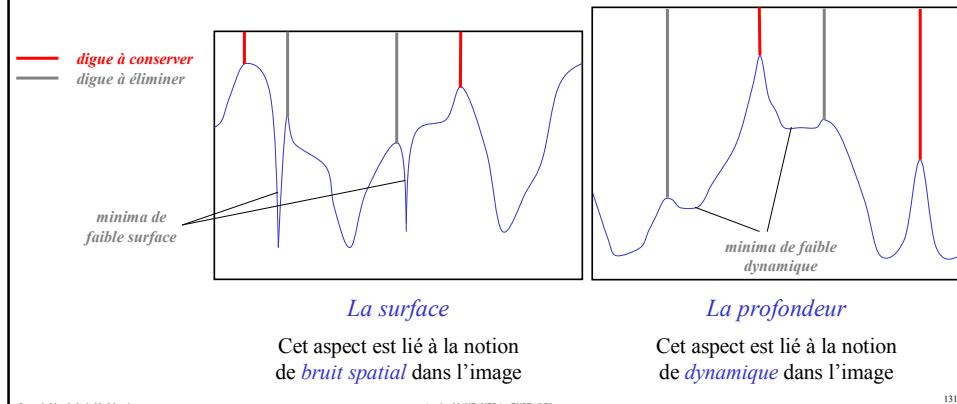


LPE contrainte

LPE par filtrage

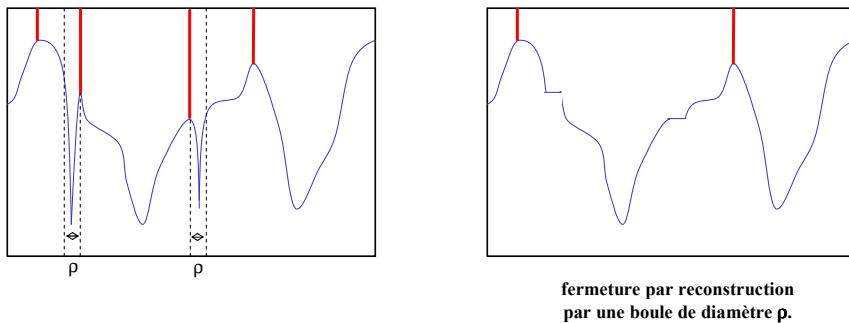
La seconde technique pour éviter la sursegmentation est de sélectionner les bassins versants qui apparaîtront dans la LPE en fonction de leur “importance”.

Cette importance revêt deux aspects différents :



LPE : filtrage spatial

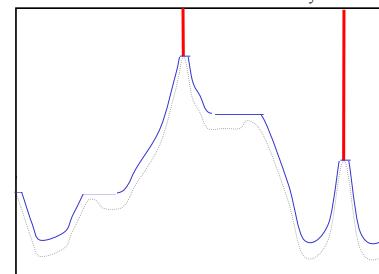
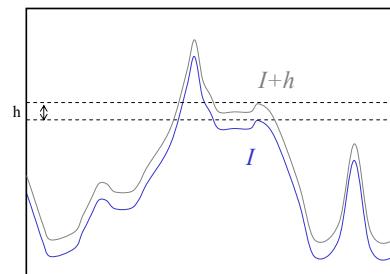
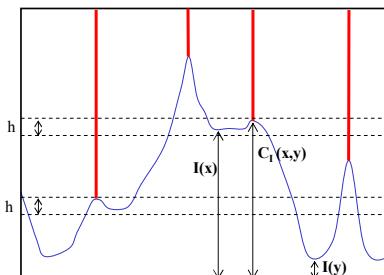
L'élimination des digues produites par des bassins de faible surface peut être obtenue grâce au filtrage morphologique spatial :



LPE : filtrage de dynamique

L'élimination des digues produites par des bassins de faible dynamique peut être obtenue grâce au filtrage morphologique de dynamique :

La reconstruction de la fonction I dans la fonction $I+h$ élimine les minima régionaux de dynamique inférieure à h :



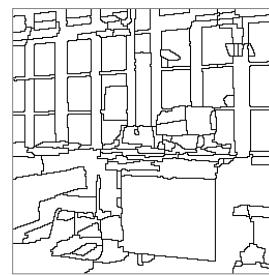
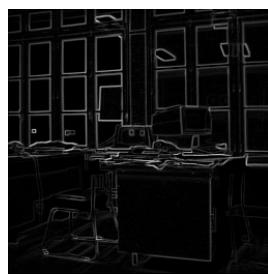
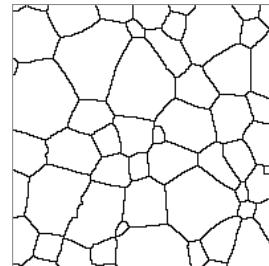
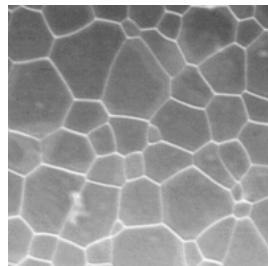
Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

133

LPE par filtrage : résultats

En appliquant les deux filtrages précédents sur l'image (uranium) ou sur le gradient morphologique de l'image (bureau), on élimine dans la LPE les bassins *non significatifs*.



Cours de Morphologie Mathématique

Antoine MANZANERA – ENSTA/LEI

134

Table des matières

<i>Chapitre 1 : Principes de base – Opérateurs élémentaires.....</i>	4
<i>Chapitre 2 : Opérateurs complexes et filtres morphologiques.....</i>	38
<i>Chapitre 3 : Opérateurs connexes et géodésie.....</i>	69
<i>Chapitre 4 : Squelettes et Ligne de Partage des Eaux.....</i>	97