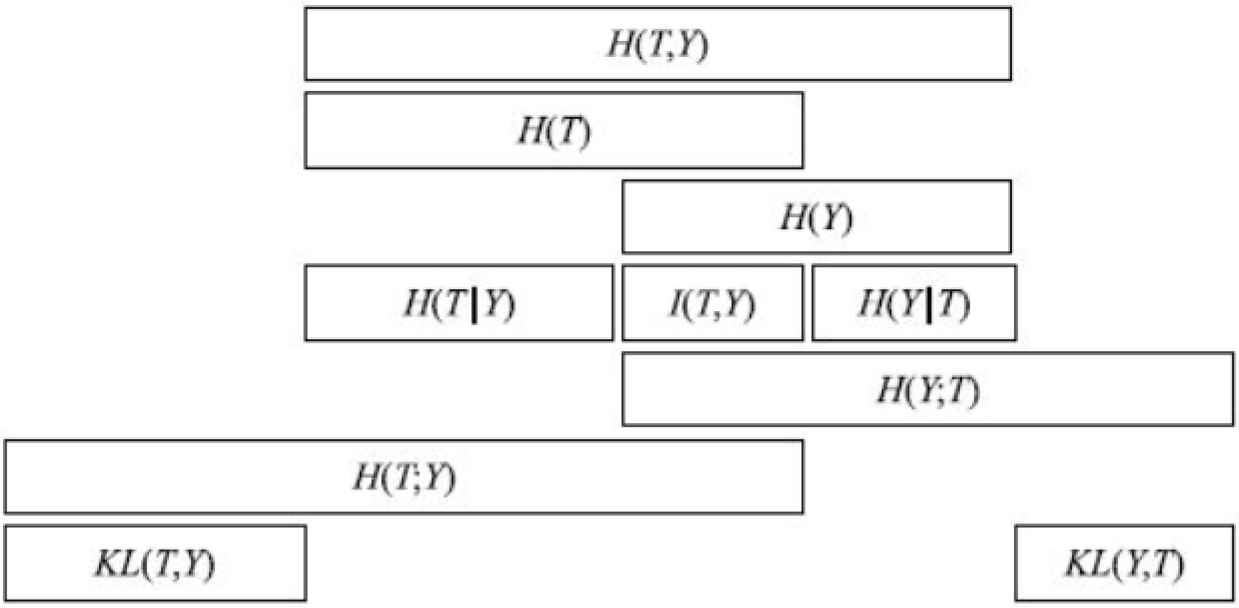
信息论基本概念汇总

总览：

Name	Formula	(Dis)similarity	(A)symmetry
Joint Information	$H(T,Y) = -\sum_t \sum_y p(t,y) \log_2 p(t,y)$	Inapplicable	Symmetry
Mutual Information	$I(T,Y) = \sum_t \sum_y p(t,y) \log_2 \frac{p(t,y)}{p(t)p(y)}$	Similarity	Symmetry
Conditional Entropy	$H(Y\|T) = -\sum_t \sum_y p(t,y) \log_2 p(y\|t)$	Dissimilarity	Asymmetry
Cross Entropy	$H(T;Y) = -\sum_z p_t(z) \log_2 p_y(z)$	Dissimilarity	Asymmetry
KL Divergence	$KL(T,Y) = \sum_z p_t(z) \log_2 \frac{p_t(z)}{p_y(z)}$	Dissimilarity	Asymmetry

这些度量中，互信息可以用来衡量相似性（越大越相似），而条件熵、交叉熵和相对熵（即KL散度）可以用来度量相异性（越大越不相似）。

这些量之间的关系如下



1. 信息量

如果事件X发生，那么$p(x)$能为"事件x发生"所提供的信息量：

$$h(X) = -\log_2 p(x)$$

也就是消除事情不确定性所需要的信息量，单位是比特。

2. 熵

熵是接收的每条消息中包含的信息的平均量，它是不确定性的度量，越随机的信号源其熵越大。

离散：

$$\mathbb{H}(X)=-\sum_{x} p\left(x_{i}\right) \log _{2} p\left(x_{i}\right)$$

连续：

$$\mathbb{H}(X)=-\int p(x) \log _{2} p(x)$$

在最优化理论中，很多算法用熵作为优化目标，Watanabe也提出过“学习就是一个熵减的过程”，算法学习的过程就是信息不确定性减小的过程。

3. 联合熵

度量二维随机变量的不确定性：

$$\mathbb{H}(X, Y)=-\sum_{i} \sum_{j} p\left(x_{i}, y_{j}\right) \log _{2} p\left(x_{i}, y_{j}\right)$$

4. 条件熵

$\mathbb{H}(Y|X)$表示已知X，求Y的平均不确定性

$$\mathbb{H}(Y|X)=-\sum_{i} \sum_{j} p\left(x_{i}, y_{j}\right) \log _{2} p\left(y_{j}|x_{i}\right)$$

$$\mathbb{H}(Y|X)=\sum_{i} p\left(x_{i}\right) \mathbb{H}\left(Y|x_{i}\right)$$

推导过程如下：

$$\begin{aligned}
\mathbb{H}(Y|X) &=-\sum_{i} \sum_{j} p\left(x_{i}\right) p\left(y_{i}|x_{i}\right) \log _{2} p\left(y_{i}|x_{i}\right) \\
&=-\sum_{i} p\left(x_{i}\right) \sum_{j} p\left(y_{i}|x_{i}\right) \log _{2} p\left(y_{i}|x_{i}\right) \\
&=\sum_{i} p\left(x_{i}\right) \mathbb{H}\left(Y|x_{i}\right)
\end{aligned}$$

由联合熵和条件熵可得：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{H}(X,Y) &= -\sum_i \sum_j p\left(x_i, y_j\right) \log_2 p\left(x_i, y_j\right) \\
&= -\sum_i \sum_j p\left(x_i, y_j\right) \log_2 p\left(y_j | x_i\right) \\
&\quad + \sum_i \left(\sum_j p\left(x_i, y_j\right)\right) \log_2 p\left(x_i\right) \\
&= \mathbb{H}(Y|X) + \mathbb{H}(X)
\end{aligned}
$$

5. 相对熵

又称为KL散度。主要用来衡量两个分布的相似度。假设连续随机变量x，真实的概率分布为$p(x)$，模型得到的近似分布为$q(x)$。

离散：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{KL}(p\|q) &= -\sum_i p\left(x_i\right) \ln q\left(x_i\right) - \left(-\sum p\left(x_i\right) \ln p\left(x_i\right)\right) \\
&= \sum_i p\left(x_i\right) \ln \frac{p\left(x_i\right)}{q\left(x_i\right)}
\end{aligned}
$$

连续：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{KL}(p\|q) &= -\int_x p(x) \ln p(x) + p(x) \ln q(x) \\
&= \int_x p(x) \ln \frac{p(x)}{q(x)}
\end{aligned}
$$

对离散变量的相对熵：

$$
\begin{aligned}
\mathbb{KL}(p\|q) &= -\sum_i p\left(x_i\right) \ln q\left(x_i\right) - \left(-\sum p\left(x_i\right) \ln p\left(x_i\right)\right) \\
&= \mathbb{H}(p,q) - \mathbb{H}(p)
\end{aligned}
$$

其中$\mathbb{H}(p,q)$被称为交叉熵。

6. 交叉熵

用来衡量两个分布之间的相似程度，p为真实概率分布，q为模型预测的概率分布：

$$
\mathbb{H}(p,q) = -\sum_i p\left(x_i\right) \ln q\left(x_i\right)
$$

7. 互信息

相对熵是衡量同一个变量的两个一维分布之间的相似性，而互信息是用来衡量两个相同的一维分布变量之间的独立性。

互信息$\mathbb{I}(p,q)$是衡量联合分布$p(x,y)$和$p(x)p(y)$分布之间的关系，即它们之间的相关系数

$$
\begin{aligned}
\mathbb{I}(X, Y) &= \mathbb{KL}(p(x, y) \| p(x) p(y)) \\
&= \sum_i \sum_j p\left(x_i, y_j\right) \ln \frac{p\left(x_i, y_j\right)}{p\left(x_i\right) p\left(y_j\right)} \\
&= -\mathbb{H}(X, Y) + \mathbb{H}(X) + \mathbb{H}(Y) \\
&= \mathbb{H}(X) - \mathbb{H}(X|Y) \\
&= \mathbb{H}(Y) - \mathbb{H}(Y|X)
\end{aligned}
$$

$\mathbb{I}(X, Y)$反映的是在知道了Y的值以后X的不确定性的减少量。 可以理解为Y的值透露了多少关于X的信息量。

实际上，互信息体现了两变量之间的依赖程度：如果$\mathbb{I}(X, Y) \gg 0$，表明X和Y是高度相关的；如果$\mathbb{I}(X, Y) = 0$，表明X和Y是相互独立的；如果$\mathbb{I}(X, Y) \ll 0$，表明Y的出现不但未使X得不确定性减少，反而还增大了X的不确定性，常常是不利的。