理解贝叶斯公式

参考CSDN @nebulaf91 http://blog.csdn.net/u011508640/article/details/72815981

贝叶斯公式：

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B)} \tag{1}$$

将B展开，可以写成：

$$P(A|B)=\frac{P(B|A)P(A)}{P(B|A)P(A)+P(B|\sim A)P(\sim A)} \tag{2}$$

其中$\sim A$表示"非A"。

贝叶斯公式描述的是，你有多大把握能相信一件证据？

我们用汽车（或电瓶车）警报响和汽车被砸之间的关系举例来理解贝叶斯公式。

我们假设响警报的目的就是想说汽车被砸了。把A计作"汽车被砸了"，B计作"警报响了"，带进贝叶斯公式里看。我们想求等式左边发生$A|B$的概率，这是在说警报响了，汽车也确实被砸了。汽车被砸引起警报响，即$B|A$。但是，也有可能是汽车被小孩子皮球踢了一下、被行人碰了一下等其他原因（统统计作$\sim A$），其他原因引起汽车警报响了，即$B|\sim A$。

那么，现在突然听见警报响了，这时汽车已经被砸了的概率是多少呢（这即是说，警报响这个证据有了，多大把握能相信它确实是在报警说汽车被砸了）？想一想，应当这样来计算：

用警报响起、汽车也被砸了这事件的数量，除以响警报事件的数量（即式1）

进一步展开：

进一步展开，即警报响起、汽车也被砸了的事件的数量，除以警报响起、汽车被砸了的事件数量加上警报响起、汽车没被砸的事件数量（即式2）

对于式2来说，想让$P(A|B)=1$，即警报响了，汽车一定被砸了，该怎么做呢？让$P(B|\sim A)P(\sim A)=0$即可。很容易想清楚，假若让$P(\sim A)=0$即杜绝了汽车被球踢、被行人碰到等等其他所有情况，那自然，警报响了，只剩下一种可能——汽车被砸了。这即是提高了响警报这个证据的说服力。

从这个角度总结贝叶斯公式：做判断的时候，要考虑所有的因素。 老板骂你，不一定是你把什么工作搞砸了，可能只是他今天出门前和太太吵了一架。

再思考式2，观察右边的分子，$P(B|A)$为汽车被砸后响警报的概率。姑且仍为这是1吧。但是，若$P(A)$很小，即汽车被砸的概率本身就很小，则$P(B|A)P(A)$仍然很小，即式2右边分子仍然很小，$P(A|B)$还是大不起来。这里，$P(A)$即是常说的先验概率，如果A的先验概率很小，就算$P(B|A)$较大，可能A的后验概率$P(A|B)$还是不会大（假设$P(B|\sim A)P(\sim A)$不变的情况下）。

从这个角度思考贝叶斯公式：一个本来就难以发生的事情，就算出现某个证据和他强烈相关，也要谨慎。证据很可能来自别的虽然不是很相关，但发生概率较高的事情。 发现刚才写的代码编译报错，可是我今天状态特别好，这语言我也很熟悉，犯错的概率很低。因此觉得是编译器出错了。————别，还是先再检查下自己的代码吧。