可行流与次模流存在性定理

张俊驰

November 16, 2025

Contents

1 图论基本概念

定义 1

一个图 G 是一个有序对 (V,E)，由一个顶点集 $V(G)$ 和一个边集 $E(G)$ 组成，其中 $E(G) \subseteq \binom{V(G)}{2}$ 是由顶点对组成的集合。一条边的顶点称为其端点。我们用 xy 表示端点为 x 和 y 的一条边。图 G 的阶是 $|V(G)|$；它的大小是 $|E(G)|$。阶为 n 的图指的是顶点集大小为 n 的图。

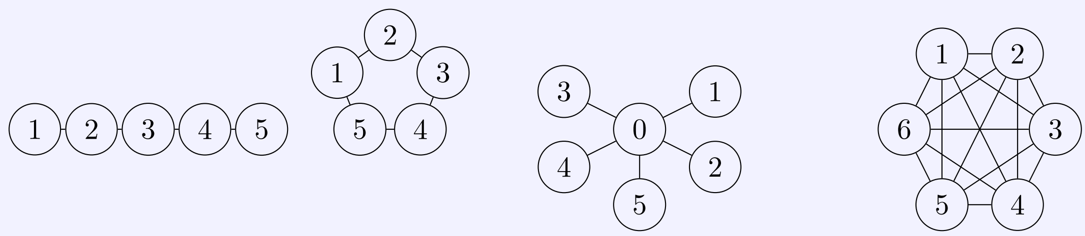
定义 2

给出一些常见图的定义：

- 一条长度为 k 的路 P_k，指的是一个 $k+1$ 个顶点的图 $G=(V,E)$, $V=\{x_1,x_2,\ldots,x_{k+1}\}$, $E_=\{\{x_i,x_{i+1}\}|i=1,2\ldots,k\}$，一般我们记 $P_k=x_1x_2\ldots x_{k+1}$。一条 xy-路指的是两个端点为 x,y 的路。
- 一个长度为 k 的圈 C_k，指的是一个 k 个顶点的图 $G=(V,E)$，$V=\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$, $E_=\{\{x_i,x_{i+1}\}|i=1,2\ldots,k\}$，其中 $x_{k+1}=x_1$, 一般我们记 $C_k=x_1x_2\ldots x_kx_1$。
- 一个有 k 条边的星型图 S_k，指的是一个 $k+1$ 个顶点的图 $G=(V,E)$，$V=\{x,x_1,x_2,\ldots,x_k\}$，$E_=\{\{x,x_i\}|i=1,2\ldots,k\}$，顶点 x 被称作该星型图的中心（根），$\{x_1,x_2,\ldots,x_k\}$ 中的顶点被称作该星型图的叶子点。
- 一个图 $G=(V,E)$ 被称为完全图，如果任意两个不同的顶点之间都有一条边相连，即 E 包含 V 的所有二元子集。

例子 1

我们给出一些例子



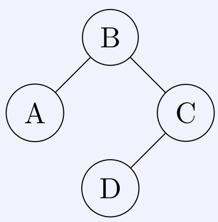
定义 3

再给出一些常见概念：

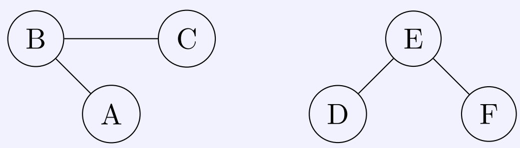
- 给定一个图 $G=(V,E)$，如果图 $H=(V_H,E_H)$ 满足 $V_H\subseteq V$ 且 $E_H\subseteq E$，那么 H 称为 G 的一个子图。
- 图 G 中一个顶点 v 的度数 $d_G(v)$，指图中包含该顶点的边数。
- u 称作 v 的邻居，如果 $uv\in E(G)$。图 G 中一个顶点 v 的邻居集 $N_G(v)$，指图中与该点所有邻居构成的集合。
- 两个点 u 和 v 被称为连通的，如果存在一条路连接顶点 u 和 v。换句话说，如果存在一个顶点序列 $v_1,v_2,\ldots,v_k$，其中 $v_1=u$，$v_k=v$，且路 $v_1v_2\ldots v_k$ 是 G 的子图，那么顶点 u 和 v 就被称为连通的。
- 一个图是连通图，当且仅当任意两个顶点都连通。
- 一个图被称为一个树，如果该图是连通图，且不包含一个圈作为子图。
- 一个图的生成树是指与该图顶点数相同且为树的子图。
- 一个图可以被划分为若干个连通分支，若每个连通分支都是树，则称这个图为一个森林。
- 图 G 中顶点 v 的度数指的是 $E(G)$ 中包含点 v 的边数，记作 $d_G(v)$。
- 叶子点指的是度数为 1 的点。
- 给定图 $G=(V,E)$，任意子集 $S\subseteq V$，G 在顶点集的子集 S 上的诱导子图记作 $G[S]$，它的顶点集为 S，边集为 $E_S=\{e\subseteq E|e\subseteq S\}$。
- 一个点 u 被称作连通图 G 的割点，若 $G[V-\{u\}]$（记作 $G-v$）不是连通图。
- 一条边 e 被称作连通图 G 的割边，若 $(V(G),E(G)\setminus\{e\})$（记作 $G-e$）不是连通图。

例子 2

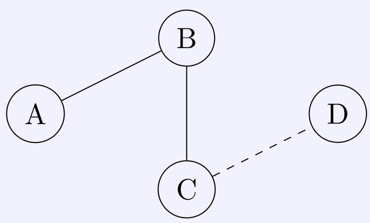
我们给出一些图例：



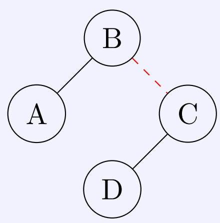
树 (Tree)



森林 (Forest)



诱导子图 (Induced Subgraph)



割集 (Cut Set)

命题 1: 基本性质

一个没有圈的连通图是一个森林。非平凡树至少有两个叶子点，删除一个树的一个叶子点后仍然得到一个树。

Proof: 对于一个非平凡树 G，它没有孤立顶点，且由于树没有圈作为子图，每条极大路的端点都是叶子点。

从 G 中删除顶点不会产生圈。而图 G 中的叶子点 v 不能是 G 的割点，因为 v 在 $G-v$ 的一个连通分支中只能有一个邻居。因此，如果 v 是树 G 的一个叶子点，那么 $G-v$ 是无圈且连通的，因此仍然是一个树。 □

命题 2

对于具有 n 个顶点的图 G，以下三个性质中的任意两个蕴含第三个（对树的刻画）。

(a) G 是无环的。

(b) G 是连通的。

(c) G 有 $n-1$ 条边。

Proof: 向一个图中添加一条边能够减少其连通分支的数量（最多减少 1），当且仅当它连接了来自不同连通分支的顶点，因此不会产生圈。从没有边的图开始，我们不断加边，可以看出：一个具有 k 条边的图恰好有 $n-k$ 个连通分支，当且仅当它没有圈。

因此，对于 n 个顶点的图来说，一个无圈图仅有 1 个连通分支当且仅当它恰好有 $n-1$ 条边，而一个仅有 $n-1$ 条边且只有一个连通分支的图必定是无圈的。 □

命题 3

对于下面的每个性质，图 G 是一个树当且仅当它满足该性质。

(a) G 是连通的，且每条边都是割边。

(b) 对于每个 $u,v\in V(G)$，G 恰好包含一条 uv-路。

(c) G 无圈，且添加任意一条边恰好生成一个圈。

Proof: 我们按照以下顺序来证明：

(G 是树) $\Rightarrow$ (a) ：一条边是割边当且仅当它不在任何圈中。由于树是无圈的，每条边都是割边。

(a) $\Rightarrow$ (b) ：由于 G 是连通的，它包含一条 uv-路。如果 G 包含不止一条 uv-路，则令 xy 为一条属于其中某些路但不是全部路的边。此时，$G-xy$ 包含一条 xy-路，与 xy 是割边相矛盾。

(b) $\Rightarrow$ (c) ：在一个圈上的两个顶点通过沿着该圈的两条路相连，因此 (b) 蕴含 G 无圈。又任取 $u,v\in V(G), uv\notin E(G)$，添加边 uv 后，该边加上 G 中原有的一条 uv-路生成了一个圈，且因为生成的圈必须包含边 uv，它会由 uv 以及一条 uv-路组成，由这种路的唯一性得到圈的唯一性。

(c) $\Rightarrow$ (G 是树) ：添加任意一条缺失的边 uv 会生成一个圈，因此 G 包含至少一条 uv-路，$\forall u,v\in V(G)$，G 连通。由于 G 无圈，所以 G 是一个树。 □

Proof: 由于 e 是 T 的割边，我们可以令 U 和 U' 为 Te 的两个连通分支的顶点集。令 $e = uu'$，其中 $u \in U$ 且 $u' \in U'$。由于 T' 是生成树，T' 包含唯一的 uu'-路。该路有唯一的一条从 U 到 U' 的边；设 e' 为这条边。

连接 U 和 U' 的 T 中唯一的边是 e，所以 $e' \in E(T')E(T)$。由于 e' 连接了 Te 的连通分支，$Te + e'$ 也是一个生成树。类似地，$T' + ee'$ 也是一棵生成树。 □

练习 1

一个有 $2k$ 个奇度数顶点的树可以分解成 k 条路。

练习 2

$f(d_1, d_2, \ldots, d_n)$ 是指顶点集为 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$，且顶点 i 的度数为 d_i 的树的个数，利用归纳法证明 $f(d_1, \ldots, d_n) = \binom{n-2}{d_1-1, d_2-1 \ldots, d_n-1}$。

练习 3

（较难）完全图 K_n 可以分解为 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 条路。当 n 是奇数时可以分解为 $\lceil \frac{n}{2} \rceil$ 个圈。

2 最大流最小割定理

定义 4: 网络流基本概念

给定一个有向图 $G = (V, E)$，以及定义在边集 E 上的两个容量函数 $a, b \colon E \to \mathbb{R}$ 且满足 $a \le b$，构成一个网络。

- **流** (Flow) 是一个函数 $f \colon E \to \mathbb{R}$。通常我们要求 $f(e) = 0$ 若 $e \notin E$。
- **可行流** (Feasible Flow) 是一个流 f，满足对任意的边 $e \in E$，都有 $a(e) \le f(e) \le b(e)$。
- **流量守恒** (Flow Conservation)：一个点 $v \in V$ 满足流量守恒条件，如果流入该点的总流量等于流出该点的总流量，即 $\sum_{e \in E^-(v)} f(e) = \sum_{e \in E^+(v)} f(e)$。
- **环流** (Circulation) 是一个可行流，其中网络中的**所有**顶点都满足流量守恒条件。
- *s*-*t* **流** (*s*-*t* Flow) 是一个可行流，其中除了源点 s 和汇点 t 之外的所有顶点都满足流量守恒条件。其**流量值** (Value) 定义为

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{e \in E^+(s)} f(e) - \sum_{e \in E^-(s)} f(e) = \sum_{e \in E^-(t)} f(e) - \sum_{e \in E^+(t)} f(e)$$

- *s*-*t* **割** (*s*-*t* Cut) 是对顶点集 V 的一个划分 (S, T)，其中 $T = V \setminus S$，使得 $s \in S$ 且 $t \in T$。割的**容量** (Capacity) 定义为

$$c(S, T) = \sum_{e \in E^+(S)} b(e) - \sum_{e \in E^-(S)} a(e)$$

定理 1: *s-t* 流分解定理

给定一个网络 $G=(V,E)$ 和一个值大于零的 s-t 流 f，则 f 可以被分解为：

$$f = f_{P_1} + \cdots + f_{P_k} + f_{C_1} + \cdots + f_{C_l}$$

其中 $k \geq 1$ 且

- 每一个 f_{P_i} 是一个从 s 到 t 的**路径流**，其值为正的边构成一条从 s 到 t 的有向路径。
- 每一个 f_{C_j} 是一个**圈流**，其值为正的边构成一个有向圈。
- 所有路径流的值之和等于原始 s-t 流的值：$\sum_{i=1}^{k} \mathrm{val}(f_{P_i}) = \mathrm{val}(f)$。

此外，如果流 f 是无环的，则分解中不包含圈流部分（$l=0$）。

Proof: 留作习题。提示：在流图上寻找路径或圈，剥离流量，直至流函数为零。 □

定义 5: 残留图与增广路

给定一个流 f，我们定义**残留图** (Residual Graph) $G_f=(V,E_f)$。对于原图 G 中的每条边 $e=(u,v)\in E$：

- 如果 $f(e)<b(e)$，我们在 E_f 中加入一条**前向边** (Forward Edge) (u,v)，其残留容量为 $b(e)-f(e)$。
- 如果 $f(e)>a(e)$，我们在 E_f 中加入一条**后向边** (Backward Edge) (v,u)，其残留容量为 $f(e)-a(e)$。

在残留图 G_f 中，从 s 到 t 的一条有向路径被称为**增广路** (Augmenting Path)。

引理 1: 增广路定理

一个 s-t 流是最大流，当且仅当其残留图中不存在从 s 到 t 的增广路。

Proof: ($\Rightarrow$) 若存在增广路 P，则我们可以沿着这条路推送 $\delta=\min_{e\in P}\{c_f(e)\}>0$ 的流量。新流 f' 仍然可行，且 $\mathrm{val}(f')=\mathrm{val}(f)+\delta>\mathrm{val}(f)$，因此 f 不是最大流。

($\Leftarrow$) 若 f 不是最大流，设 f^* 是一个最大流，则 $\mathrm{val}(f^*)>\mathrm{val}(f)$。考虑差值流 $f_d=f^*-f$，其 $\mathrm{val}(f_d)>0$。根据 s-t 流分解定理，f_d 中必然存在从 s 到 t 的路径，这些路径都是 G_f 中的增广路。 □

定理 2: 最大流最小割定理

在一个网络中，最大 s-t 流的值等于最小 s-t 割的容量，即：

$$\max_{f\text{ 为可行流}} \mathrm{val}(f) = \min_{S: s\in S, t\notin S} c(S,S^c)$$

Proof: 1. **任意流 $\leq$ 任意割**

令 f 为任意 s-t 流，(S,T) 为任意 s-t 割。对集合 S 中所有顶点的净流出求和，由于只有 s

的净流出不为零，我们得到：

$$\mathrm{val}(f) = \sum_{v\in S}\left(\sum_{e\in E^+(v)} f(e) - \sum_{e\in E^-(v)} f(e)\right) = \sum_{e\in E^+(S)} f(e) - \sum_{e\in E^-(S)} f(e)$$

根据容量限制 $a(e)\le f(e)\le b(e)$，我们有：

$$\mathrm{val}(f) \le \sum_{e\in E^+(S)} b(e) - \sum_{e\in E^-(S)} a(e) = c(S,T)$$

2. **存在一个流和一个割，使得流量等于容量**

   通过不断寻找增广路的方法（如 Ford-Fulkerson 算法）可以构造一个最大流 f^*，其残留图 G_{f^*} 中不存在 $s\to t$ 路径。我们定义点集 $S^* = \{v\in V \mid 在G_{f^*} 中存在s\to v 的路径\}$。

   易知 $(S^*,V\setminus S^*)$ 是一个 s-t 割。对于任意跨越该割的边，我们有：

   - 若 $e=(u,v)\in E$ 且 $u\in S^*, v\notin S^*$，则 G_{f^*} 中没有前向边 (u,v)，意味着 $f^*(e)=b(e)$。
   - 若 $e'=(w,u)\in E$ 且 $w\notin S^*, u\in S^*$，则 G_{f^*} 中没有后向边 (u,w)，意味着 $f^*(e')=a(e')$。

   因此，对于这个特定的割 $(S^*,V\setminus S^*)$，我们有：

$$\mathrm{val}(f^*) = \sum_{e\in E^+(S^*)} f^*(e) - \sum_{e\in E^-(S^*)} f^*(e) = \sum_{e\in E^+(S^*)} b(e) - \sum_{e\in E^-(S^*)} a(e) = c(S^*,V\setminus S^*)$$

   结合第一部分，我们证明了 f^* 是最大流，$(S^*,V\setminus S^*)$ 是最小割。

□

3 可行流存在性与最优性

定理 3: 环流存在定理 (Hoffman's Theorem)

图中存在可行环流，当且仅当对于所有顶点子集 $S\subseteq V$，从 S 流出的边的容量下界之和不大于流入 S 的边的容量上界之和，即：

$$\sum_{e\in E^-(S)} a(e) \le \sum_{e\in E^+(S)} b(e), \quad \forall S\subseteq V.$$

Proof: 构造一个带有源点 s' 和汇点 t' 的新网络 $G'=(V\cup\{s',t'\},E')$。

1. 对于原图 G 中的每条边 $(u,v)\in E$，在 E' 中添加一条边 (u,v)，其容量上界为 $b(u,v)-a(u,v)$，下界为 0。
2. 对于每个节点 $v\in V$，计算其**净需求** (Net Demand)：

$$D(v) = \sum_{u:(u,v)\in E} a(u,v) - \sum_{w:(v,w)\in E} a(v,w)$$

3. 如果 $D(v)>0$，则添加一条从源点 s' 到 v 的边 (s',v)，容量上界为 $D(v)$，下界为 0。
4. 如果 $D(v)<0$，则添加一条从 v 到汇点 t' 的边 (v,t')，容量上界为 $-D(v)$，下界为 0。

原图 G 中存在可行环流，等价于新图 G' 中存在一个从 s' 流出的、能满足所有需求的 s'-t' 流，即一个值为 $\sum_{v:D(v)>0} D(v)$ 的流。根据最大流最小割定理，这个条件成立当且仅当 G' 中任意 (s',t')-割的容量都不小于所有从 s' 出发边的总容量。这一条件经过推导，与定理中陈述的条件是等价的。 □

在带费用的网络中，每条边 e 都有一个费用 $w(e)$，流 f 的总费用为 $W(f)=\sum_{e\in E} w(e)f(e)$。我们的目标是找到总费用最小的可行环流。

定义 6: 势能与降价成本

给定一个带费用的网络 $G=(V,E,w)$。

- **势能函数** (Potential Function) 是一个映射 $p: V\to\mathbb{R}$。
- 对于边 $e=(u,v)\in E$，其关于势能 p 的**降价成本** (Reduced Cost) 定义为：

$$w_p(u,v)=w(u,v)+p(u)-p(v)$$

定义 7: 费用流的残留图

给定一个可行环流 f，其关于费用的**残留图** (Residual Graph) $G_f=(V,E_f)$ 定义如下。对于原图中的每条边 $e=(u,v)\in E$：

- 若 $f(e)<b(e)$，在 E_f 中加入前向边 (u,v)，容量为 $b(e)-f(e)$，费用为 $w(u,v)$。
- 若 $f(e)>a(e)$，在 E_f 中加入后向边 (v,u)，容量为 $f(e)-a(e)$，费用为 $-w(u,v)$。

注意，残留图中可能出现费用不同的平行边。在残留图中总费用为负的圈被称为**负费用圈** (Negative-Cost Cycle)。

定理 4: 最小费用环流最优性定理

一个可行环流 f 是最小费用环流，当且仅当存在一个势能函数 $p: V\to\mathbb{R}$，使得对于 f 的残留图 G_f 中的每一条边 (u,v)，其降价成本都为非负值，即：

$$w_p(u,v)=w(u,v)+p(u)-p(v)\geq 0$$

Proof: $(\Leftarrow)$ 假设存在这样的势能 p。令 f^* 是任意其他可行环流，考虑差值流 $g=f^*-f$。g 是一个环流，可分解为一系列圈流之和。这些圈都对应 G_f 中的有向圈。对于 G_f 中的任意圈 C，其总费用 $\sum_{e\in C} w(e)=\sum_{e\in C} w_p(e)\geq 0$ (伸缩和)。因此 $W(g)=W(f^*)-W(f)\geq 0$，故 f 是最小费用环流。

$(\Rightarrow)$ 假设 f 是最小费用环流。那么其残留图 G_f 中必不包含负费用圈（否则可以沿负圈增广以降低总费用）。既然 G_f 无负费用圈，我们可以定义从某个源点 s 出发的最短路距离 $\mathrm{dist}_s(v)$。令势能 $p(v)=\mathrm{dist}_s(v)$。根据最短路的三角不等式性质，对 G_f 中任意边 (u,v)，有 $\mathrm{dist}_s(v)\leq \mathrm{dist}_s(u)+w(u,v)$，整理即得 $w_p(u,v)\geq 0$。 □

推论 1

一个可行环流是最小费用的，当且仅当其残留图中不包含任何负费用圈。

Proof: 留作习题。 □

4 带成本约束的环流存在性定理

定义 8: 降价成本的正部与负部

对于任意势能函数 p 和边 e，其降价成本 $w_p(e)$ 的正部和负部分别为：

- **正部** (Positive Part): $w_p^+(e) = \max\{0, w_p(e)\}$
- **负部** (Negative Part): $w_p^-(e) = \max\{0, -w_p(e)\}$

注意，恒有 $w_p(e) = w_p^+(e) - w_p^-(e)$。

定理 5: 带成本约束的环流存在性

给定网络 $N = (V, E, a, b, w)$ 和目标费用 W_0。网络中存在费用为 W_0 的可行环流，当且仅当：

1. 网络中存在可行环流。
2. 对于**任意**势能函数 $p: V \to \mathbb{R}$，以下两个不等式同时成立：

$$\sum_{e\in E}\left(a(e)w_p^+(e) - b(e)w_p^-(e)\right) \le W_0 \le \sum_{e\in E}\left(b(e)w_p^+(e) - a(e)w_p^-(e)\right)$$

Proof: 这个定理的证明依赖于线性规划的对偶理论。

必要性 ($\Rightarrow$): 假设存在一个费用为 W_0 的可行环流 f。对于任意势能函数 p，我们有关键等式 $W_0 = W(f) = \sum_{e\in E} w_p(e) f(e)$，这是因为势能项在环流上求和为零。将 $w_p(e) = w_p^+(e) - w_p^-(e)$ 代入，得到：

$$W_0 = \sum_{e\in E}\left(w_p^+(e) - w_p^-(e)\right) f(e) = \sum_{e\in E} w_p^+(e) f(e) - \sum_{e\in E} w_p^-(e) f(e)$$

由于 $a(e) \le f(e) \le b(e)$ 且 $w_p^+, w_p^- \ge 0$，我们有：

$$W_0 \le \sum_{e\in E} w_p^+(e) b(e) - \sum_{e\in E} w_p^-(e) a(e) \quad \text{(上界不等式成立)}$$

$$W_0 \ge \sum_{e\in E} w_p^+(e) a(e) - \sum_{e\in E} w_p^-(e) b(e) \quad \text{(下界不等式成立)}$$

由于 p 是任意的，所以必要性得证。

充分性 ($\Leftarrow$): 这部分的证明是核心，我们证明其逆否命题：若不存在费用为 W_0 的可行环流，则必定**存在**一个势能函数 p 使得定理中的不等式不成立。

第一步：建立原初线性系统 (Primal System)

我们将环流存在性问题表述为一个线性规划可行性问题。令 $m = |E|$，$n = |V|$。我们的变量是流向量 $\boldsymbol{f} \in \mathbb{R}^m$。该问题是在寻找一个向量 $\boldsymbol{f}$ 满足以下线性约束：

- **流量守恒**: $\boldsymbol{A}_{\text{inc}}\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$，其中 $\boldsymbol{A}_{\text{inc}}$ 是 $n \times m$ 的点-边关联矩阵。对于 $e = (u, v)$，其对应列在第 u 行为-1，第 v 行为 +1。
- **成本约束**: $\boldsymbol{w}^\top \boldsymbol{f} = W_0$，其中 $\boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^m$ 是费用向量。
- **容量约束**: $a(e) \le f(e) \le b(e)$，可以写成两个不等式组：$\boldsymbol{I}\boldsymbol{f} \le \boldsymbol{b}$ 和 $-\boldsymbol{I}\boldsymbol{f} \le -\boldsymbol{a}$。

我们可以将这些约束整合成标准的矩阵形式 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b_0}$ 和 $\boldsymbol{Cx}\le\boldsymbol{d}$：

$$\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_{\text{inc}}\\ \boldsymbol{w}^\top\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{A}}\boldsymbol{f}=\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{0}\\ W_0\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{b_0}},\quad \text{以及}\quad \underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{I}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{C}}\boldsymbol{f}\le\underbrace{\begin{bmatrix}\boldsymbol{b}\\ -\boldsymbol{a}\end{bmatrix}}_{\boldsymbol{d}}$$

第二步：应用法卡斯引理 (Farkas' Lemma)

我们使用如下形式的择一定理（法卡斯引理的推广）：

> **择一定理**
>
> 对于给定的矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{C}$ 和向量 $\boldsymbol{b_0},\boldsymbol{d}$，以下两个系统有且仅有一个有解：
> **系统** I (**原初可行性**) 存在向量 $\boldsymbol{x}$ 使得 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b_0}$ 且 $\boldsymbol{Cx}\le\boldsymbol{d}$。
> **系统** II (**对偶证书**) 存在向量 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}\ge\boldsymbol{0}$ 使得 $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$ 且 $\boldsymbol{b_0}^\top\boldsymbol{y}+\boldsymbol{d}^\top\boldsymbol{z}<0$。

我们的假设是原初系统（寻找 $\boldsymbol{f}$）无解，因此，系统 II 必定有解。

第三步：构建与分析对偶系统 (Dual System)

我们为系统 II 引入对偶变量向量 $\boldsymbol{y}$ 和 $\boldsymbol{z}$：

- $\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{n+1}$，对应等式约束。我们将其写成 $\boldsymbol{y}=[p_1,\ldots,p_n,\lambda]^\top$。为了方便后续推导，我们令 $p(v)=-p_v$。
- $\boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^{2m}$，对应不等式约束，且 $\boldsymbol{z}\ge\boldsymbol{0}$。我们将其写成 $\boldsymbol{z}=[\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}]^\top$，其中 $\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\in\mathbb{R}^m_{\ge0}$ 分别对应 $\boldsymbol{f}\le\boldsymbol{b}$ 和 $-\boldsymbol{f}\le-\boldsymbol{a}$。

现在我们展开系统 II 的两个条件：

1. **对偶等式** $\boldsymbol{A}^\top\boldsymbol{y}+\boldsymbol{C}^\top\boldsymbol{z}=\boldsymbol{0}$:
   这个向量方程对每条边 $e=(u,v)$ 都有一个分量。

$$(\boldsymbol{A}_{\text{inc}}^\top\begin{bmatrix}-p(v_1)\\ \vdots\\ -p(v_n)\end{bmatrix}+\boldsymbol{w}\lambda)+(\boldsymbol{I}^\top\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{I}^\top\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{0}$$

   对于边 $e=(u,v)$，其在方程中的对应行为：

$$(p(u)-p(v)+\lambda w(e))+(\beta(e)-\alpha(e))=0$$

2. **对偶不等式** $\boldsymbol{b_0}^\top\boldsymbol{y}+\boldsymbol{d}^\top\boldsymbol{z}<0$:
   这是一个标量不等式。

$$(\boldsymbol{0}^\top\begin{bmatrix}-p(v_1)\\ \vdots\end{bmatrix}+W_0\lambda)+(\boldsymbol{b}^\top\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{a}^\top\boldsymbol{\alpha})<0$$

   即

$$W_0\lambda+\sum_{e\in E}b(e)\beta(e)-\sum_{e\in E}a(e)\alpha(e)<0$$

第四步：从对偶解构造势能函数

从对偶等式，我们得到 $\beta(e)-\alpha(e)=p(v)-p(u)-\lambda w(e)$。令 $\Delta_e=p(v)-p(u)-\lambda w(e)$。由于 $\alpha(e),\beta(e)\geq 0$，我们可以选择 $\beta(e)=\max\{0,\Delta_e\}=\Delta_e^+$ 和 $\alpha(e)=\max\{0,-\Delta_e\}=\Delta_e^-$。将此代入对偶不等式：

$$W_0\lambda+\sum_{e\in E}\left(b(e)\Delta_e^+-a(e)\Delta_e^-\right)<0$$

现在，我们分情况讨论 λ：

- **情况** 1: $\lambda>0$。我们定义一个新的势能函数 $p'(v)=p(v)/\lambda$。则 $\Delta_e=\lambda(p'(v)-p'(u)-w(e))=-\lambda w_{p'}(e)$。因此，$\Delta_e^+=\lambda w_{p'}^-(e)$ 且 $\Delta_e^-=\lambda w_{p'}^+(e)$。代入不等式：

  $$W_0\lambda+\sum_{e\in E}\Big(b(e)\lambda w_{p'}^-(e)-a(e)\lambda w_{p'}^+(e)\Big)<0$$

  两边同除以 $\lambda>0$ 并移项，得到：

  $$W_0<\sum_{e\in E}\Big(a(e)w_{p'}^+(e)-b(e)w_{p'}^-(e)\Big)$$

  这违反了定理中的下界不等式。
- **情况** 2: $\lambda<0$。我们仍然定义 $p'(v)=p(v)/\lambda$。$\Delta_e=-\lambda w_{p'}(e)$。但此时 $-\lambda>0$，因此 $\Delta_e^+=-\lambda w_{p'}^+(e)$ 且 $\Delta_e^-=-\lambda w_{p'}^-(e)$。代入不等式：

  $$W_0\lambda+\sum_{e\in E}\Big(-b(e)\lambda w_{p'}^+(e)+a(e)\lambda w_{p'}^-(e)\Big)<0$$

  两边同除以 $\lambda<0$ (不等号反向)：

  $$W_0+\sum_{e\in E}\Big(-b(e)w_{p'}^+(e)+a(e)w_{p'}^-(e)\Big)>0$$

  移项后得到：

  $$W_0>\sum_{e\in E}\Big(b(e)w_{p'}^+(e)-a(e)w_{p'}^-(e)\Big)$$

  这违反了定理中的上界不等式。
- **情况** 3: $\lambda=0$。这破坏了环流存在定理的条件，因此没有可行流。

综上，如果原初系统无解，我们总能找到一个势能函数 p' 使得定理的一个不等式被违反。因此，如果定理中的两个不等式对所有 p 都成立，则原初系统必有解。 □

5 定理的直觉解释与经济学类比

5.1 给定费用存在性定理的直觉：万能的审查员

我们可以将网络流费用问题想象成一个“跨城市贸易”模型，其中**势能函数** $p(v)$ 代表货物在城市 v 的**公允市场价**，而**降价成本** $w_p(e)$ 则是完成一笔运输的**净经济成本**（利润的相反数）。

该定理如同一个商业计划可行性审查过程。一位“万能的审查员”可以任意设定全球市场价格 p，然后用他设定的这套价格体系来拷问你的预算 W_0 是否合理。

- **拷问下限**: 审查员计算出在他的价格体系下，一个最精明商人能达到的理论最低成本 $L(p)$。如果你的预算 $W_0<L(p)$，则计划不可行。

- **拷问上限**：审查员再计算出一个最败家商人对应的理论最高成本 $U(p)$。如果你的预算 $W_0 > U(p)$，则计划同样荒谬。

定理的精髓在于：如果你的预算计划 W_0 如此稳健，以至于**无论审查员如何设定市场价格**，你的预算都不会显得荒谬（始终在 $[L(p),U(p)]$ 区间内），那么满足所有约束的真实方案就一定存在。

5.2 最小费用最优性定理的直觉：最优性证书

该定理则描述了如何证明一个已有的运输计划 f 是“最好的”。你作为物流经理，只需找到一套“完美的市场价格” p，它就是你的 **“最优性证书”**。

- 在这套价格 p 下，你的计划 f 达到了完美的 **“经济均衡”** 状态。
- **所有潜在的调整都无利可图**：任何未运满的路线，增加运量都会亏本 ($w_p \geq 0$)。
- **所有正在的运输都完全合理**：任何正在执行的运输，取消它都是不明智的。

这个“最优证书” p 的存在，直接证明了计划 f 已经达到了一个无法被任何局部优化所改进的均衡状态，因此它必然是全局最优的。

5.3 两个核心定理的内在联系

前面我们讨论了两个关于网络流费用的核心定理：一个是关于“最小费用”的最优性条件，另一个是关于“给定费用”的存在性条件。它们看似不同（一个要求“存在”一个势能函数，另一个要求“对任意”势能函数成立），但实际上有着深刻的内在联系。

我们可以将更为具体的**最小费用最优性定理**看作是更具一般性的**给定费用存在性定理**在一个临界点上的必然推论。

从“给定费用定理”推导出“最小费用定理”

我们的推导逻辑如下：

1. **用“给定费用定理”定义最小费用 $W_{\min}$**
   根据“给定费用存在性定理”，一个费用为 W_0 的可行环流存在，当且仅当 W_0 落在所有由势能函数 p 决定的理论成本区间 $[L(p),U(p)]$ 之内。
   那么，网络中可能存在的**最小费用** $W_{\min}$，就是满足这个条件的最小的 W_0。这意味着，$W_{\min}$ 必须大于或等于**所有**理论下界 $L(p)$。因此，我们得到了一个深刻的对偶等式：
$$W_{\min} = \max_{p:V\to\mathbb{R}} L(p) = \max_{p} \sum_{e\in E} \left(a(e)w_p^+(e) - b(e)w_p^-(e)\right)$$
2. **最优解的存在性与“最优”势能函数 p^***
   既然 $W_{\min}$ 是一个实际存在的最小费用，那么必然存在一个达到此费用的可行环流 $f_{\min}$，以及一个在上述最大化问题中取到最优解的“最优”势能函数 p^*。在此最优点，我们有：
$$W_{\min} = W(f_{\min}) = L(p^*)$$
3. **分析等式 $W_{\min} = L(p^*)$ 的内在含义**
   我们展开这个等式的两端。根据关键等式 $W(f) = \sum w_p(e)f(e)$，我们有：
$$W_{\min} = \sum_{e\in E} w_{p^*}(e) f_{\min}(e)$$

而 $L(p^*)$ 的定义是：

$$L(p^*) = \sum_{e:w_{p^*}(e)>0} w_{p^*}(e)a(e) + \sum_{e:w_{p^*}(e)<0} w_{p^*}(e)b(e)$$

要使这两个表达式相等，可行流 $f_{\min}$ 的取值必须“完美地”与降价成本 $w_{p^*}(e)$ 的符号对齐。具体来说，对于每一条边 e：

- 如果 $w_{p^*}(e) > 0$（亏本路线），$f_{\min}(e)$ 必须取其下界 $a(e)$ 以最小化成本。
- 如果 $w_{p^*}(e) < 0$（赚钱路线），$f_{\min}(e)$ 必须取其上界 $b(e)$ 以最小化成本。
- 如果 $a(e) < f_{\min}(e) < b(e)$（流量在中间），那么为了不与前两条矛盾，只能是 $w_{p^*}(e) = 0$。

这组条件被称为**互补松弛条件** (Complementary Slackness Conditions)。

4. **与“最小费用定理”的完美对应**

“最小费用最优性定理”指出，f 是最优的 $\iff$ 存在一个势能 p，使得其残留图 G_f 中所有边的降价成本非负。

- 若 $f(e) < b(e)$（可前向增广），则要求 $w_p(e) \geq 0$。
- 若 $f(e) > a(e)$（可后向增广），则要求 $w_p(e) \leq 0$。

我们发现，第 3 步中由 p^* 导出的互补松弛条件，与上述残留图条件是完全等价的。例如，如果 $w_{p^*}(e) > 0$，根据互补松弛，必有 $f_{\min}(e) = a(e)$，此时残留图中不存在后向边，只可能存在前向边。这与 $w_{p^*}(e) > 0 \geq 0$ 的要求相符。同理，如果 $w_{p^*}(e) < 0$，必有 $f_{\min}(e) = b(e)$，残留图中不存在前向边，这与 $w_{p^*}(e) < 0 \leq 0$ 的要求也相符。

结论

“给定费用定理”是一个关于整个可行域的宏观论断，而“最小费用定理”是对可行域“最优顶点”的一个微观刻画。

- “最小费用定理”中那个起着“最优性证书”作用的特殊势能函数 $\boldsymbol{p}^*$，
- 正是“给定费用定理”中，让理论成本下界 $\boldsymbol{L(p)}$ 达到其全局最大值的那个最优对偶解。

这两个定理通过线性规划的对偶性被深刻地联系在一起，展现了同一个问题的不同侧面。

6 次模流 (Submodular Flow)

次模流是标准网络流理论的一个强大推广。在标准网络流中，我们要求每个节点的净流量为零（流量守恒）。而在次模流中，这个约束被放宽为：从任意一个顶点集合 S 流出的净流量不超过一个由该集合 S 决定的值 $p(S)$，其中 p 是一个次模函数。

定义 9: 次模函数与次模流

- **集函数** (Set Function) 是一个定义在顶点集 V 的所有子集上的函数 $p: 2^V \to \mathbb{R}$。
- **次模函数** (Submodular Function) 是一个集函数 p，对于任意两个顶点子集 $X, Y \subseteq V$，都满足不等式：
$$p(X) + p(Y) \geq p(X \cup Y) + p(X \cap Y)$$
- 对于一个流（函数）$x: E \to \mathbb{R}$，其在集合 $S \subseteq V$ 上的**边界或净流出** (Boundary or Net Outflow) 定义为：
$$\partial x(S) = \sum_{e \in E^+(S)} x(e) - \sum_{e \in E^-(S)} x(e)$$
其中 $E^+(S)$ 是离开集合 S 的边集，$E^-(S)$ 是进入集合 S 的边集。
- **次模流** (Submodular Flow) 是一个流 x，满足：
  1. **容量约束**: 对所有 $e \in E$，有 $a(e) \leq x(e) \leq b(e)$。
  2. **次模约束**: 对所有 $S \subseteq V$，有 $\partial x(S) \leq p(S)$，p 是一个次模函数。

注意，如果取 $p(v) = 0$ 对所有单点集 v 成立，且 $p(S) = +\infty$ 对所有 $|S| > 1$ 成立，那么次模流就退化为标准的环流。

定理 6: 给定成本约束的次模流存在定理

给定一个网络 $N = (V, E, a, b, w)$ 和一个次模函数 $p: 2^V \to \mathbb{R}$。存在一个成本为 W_0 的可行次模流，当且仅当同时满足以下两个条件：

1. 网络中至少存在一个可行次模流。
2. 目标成本 W_0 介于该网络中所有可行次模流能达到的最小成本 $W_{\min}$ 和最大成本 $W_{\max}$ 之间，即：
$$W_{\min} \leq W_0 \leq W_{\max}$$

Proof: ($\Rightarrow$) **必要性**部分是显然的。若存在成本为 W_0 的可行次模流，则可行集非空，且 W_0 必然位于所有可行成本构成的区间之内。

($\Leftarrow$) **充分性**的证明依赖于可行次模流解集的凸性，以及对 $W_{\min}$ 和 $W_{\max}$ 的精确数学刻画。

1. **解集的凸性与成本的连续性**：所有可行次模流构成的集合 $\mathscr{F}$ 是由一系列线性不等式定义的，因此是一个凸多面体。成本函数 $W(x) = \sum w(e)x(e)$ 在这个凸集上是一个线性函数。因此，所有可能成本的集合是一个闭区间 $[W_{\min}, W_{\max}]$。通过构造两个极值流 $x_{\min}$ 和 $x_{\max}$ 的凸组合 $x(\lambda) = (1-\lambda)x_{\min} + \lambda x_{\max}$，根据介值定理，可知任何介于 $W_{\min}$ 和 $W_{\max}$ 之间的成本值都是可以达到的。
2. **对 $W_{\min}$ 的数学刻画（核心）**：上述论证的核心是 $W_{\min}$ 和 $W_{\max}$ 是良定义的、可确定的值。这由**最小费用次模流的强对偶定理**保证。

   最小费用 $W_{\min}$ 是以下原初线性规划问题 (Primal Problem) 的最优值：
$$(P) \quad W_{\min} = \min \left\{ \sum_{e \in E} w(e)x(e) \;\middle|\; \partial x(S) \leq p(S)\ \forall S \subseteq V,\ \boldsymbol{a} \leq \boldsymbol{x} \leq \boldsymbol{b} \right\}$$

   根据强对偶定理，这个值精确地等于其对偶问题 (Dual Problem) 的最优值。对偶问题的

变量为 $y(S) \geq 0$ (对应次模约束)，$\alpha(e) \geq 0$ 和 $\beta(e) \geq 0$ (对应容量约束)。

$$
\begin{aligned}
(D) \quad W_{\min} = \max \Bigg\{ & -\sum_{S\subseteq V} p(S)y(S) - \sum_{e\in E} b(e)\beta(e) + \sum_{e\in E} a(e)\alpha(e) \;\Bigg|\; \\
& \forall e=(u,v)\in E: \sum_{S:u\in S, v\notin S} y(S) - \sum_{S:v\in S, u\notin S} y(S) - \beta(e) + \alpha(e) = -w(e), \\
& y(S)\geq 0, \alpha(e)\geq 0, \beta(e)\geq 0 \Bigg\}
\end{aligned}
$$

这个对偶最大化问题的存在性和最优值，为 $W_{\min}$ 提供了精确的数学刻画。它不再是一个需要算法 oracle 来断言的存在，而是一个有明确数学定义的对偶值。

3. **结论**：由于最小费用次模流问题（以及其对偶问题）是组合优化中的经典可解问题，因此 $W_{\min}$ 是一个可以被确定的值。同理，$W_{\max}$ 也是可确定的（通过将成本 $\boldsymbol{w}$ 取反为 $-\boldsymbol{w}$）。既然 $W_{\min}$ 和 $W_{\max}$ 均被良好定义和刻画，那么基于介值定理的论证就是严谨的。因此，充分性得证。

$\square$