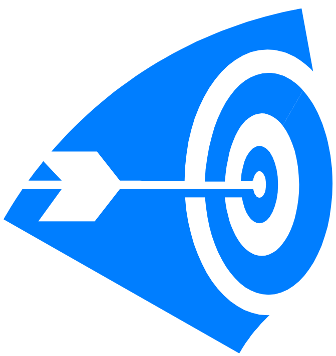
矩陣幾何



矩陣幾何

- 可用於矩陣的數學作業（mathematical operations)
- 只有與本課程相關的矩陣幾何被介紹

矩陣

- 定義：數值或符號的矩形行列式，分別以行（row）及列（column）順序排列。並表示為

$$A_{m\times n}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3j} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

每一個元素有兩個下標，其中a_{ij}表示在第i行第j列的元素

行矩陣與列矩陣

- 當 $m=1$，A矩陣變成行矩陣

$$A_{1\times n}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1j} & \ldots & a_{1n}\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}a_{1} & a_{2} & a_{3} & \ldots & a_{j} & \ldots & a_{n}\end{bmatrix}$$

- 當 $n=1$，A矩陣變成行矩陣

$$A_{m\times 1}=\begin{bmatrix}a_{11}\\ a_{21}\\ a_{31}\\ \vdots\\ a_{i1}\\ \vdots\\ a_{m1}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{1}\\ a_{2}\\ a_{3}\\ \vdots\\ a_{i}\\ \vdots\\ a_{m}\end{bmatrix}=\left\langle a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad \cdots \quad a_i \quad \cdots \quad a_m\right\rangle^T$$

方矩陣

- 當 $m = n$, 矩陣稱為方矩陣

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2j} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3j} & \dots & a_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

零矩陣

- 當所有矩陣內元素的值均為零時，該矩陣稱為零矩陣，例如

$$A=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$$

對角線矩陣及單位矩陣

- 除了主對角線外，其餘非對角線的值均為零的矩陣稱為對角線矩陣

$$A=\begin{bmatrix}5 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

- 若對角線矩陣上所有的值均為1，這矩陣稱為單位矩陣

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

帶狀矩陣

- 當矩陣中的元素只出現於主對角線兩旁的一定帶寬內，這個矩陣稱為帶狀矩陣

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

三角矩陣

- 當矩陣中的元素只出現於主對角線上或下半三角形內時，這個矩陣稱為三角矩陣，常以L（下半）或U（上半）表示

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \dots & a_{ij} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

矩陣分割

- 一個矩陣可以利用水平線及垂直線分割為數個小的矩陣

$$A=\left[\begin{array}{cc|c} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 9 & -5 \\ \hline 6 & -5 & 2 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right]$$

轉置矩陣

- 轉置矩陣是將一個矩陣的相對應的行矩陣與列矩陣互換而成

$$A=\begin{bmatrix}1 & 5 & 2\\ 3 & 11 & 7\\ -2 & 9 & 8\end{bmatrix} \Longrightarrow A^T=\begin{bmatrix}1 & 3 & -2\\ 5 & 11 & 9\\ 2 & 7 & 8\end{bmatrix}$$

同理 $\left(A^T\right)^T = A$

對稱矩陣

- 若一個矩陣存在下列狀況存在稱為對稱矩陣

$$A^T = A$$

例如

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 9 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

相同矩陣

- 當兩個矩陣被視為相同的矩陣時，也就是

$$A = B$$

則必定

$$a_{ij} = b_{ij}$$

例如

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 9 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 9 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \end{bmatrix}$$

此外 $A - B = \{0\}$

矩陣相加

- 兩個矩陣相加所形成的新矩陣，其元素為原先矩陣相對應元素的總和

$$A + B = C$$

$$a_{ij} + b_{ij} = c_{ij}$$

例如

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 8 & 9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$$

此外 $A + B = B + A$ （互易定律）

矩陣相減

- 兩個矩陣相加所形成的新矩陣，其元素為原先矩陣相對應元素的差

$$A - B = C$$

$$a_{ij} - b_{ij} = c_{ij}$$

例如

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 7 & 2 \\ 6 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -6 & 5 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

矩陣乘法

矩陣與純量乘法

- 若 c 為純量，A 為矩陣，則

$$cA = \begin{bmatrix} ca_{11} & ca_{12} & ca_{13} \\ ca_{21} & ca_{22} & ca_{23} \\ ca_{31} & ca_{32} & ca_{33} \end{bmatrix}$$

矩陣乘法

- 兩個矩陣 $A_{m\times p}, B_{p\times n}$ 相乘可表示為

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{p} a_{ir} b_{rj} \qquad i = 1,2,\ldots,n$$

例如

$$C = AB = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 5 & -7 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2\times 1 + 3\times 5 & 2\times 2 + 3\times(-7) & 2\times(-3) + 3\times 4 \\ 9\times 1 + 7\times 5 & 9\times 2 + 7\times(-7) & 9\times(-3) + 7\times 4 \end{bmatrix}$$

行列式

- 一個矩陣的行列式的值可表示為

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

例如

$$|A| = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 11 & 7 \\ -2 & 9 & 8 \end{bmatrix} = (1\times 11\times 8) + (3\times 9\times 2) + (5\times 7\times -2) \\ -(2\times 11\times -2) - (7\times 9\times 1) - (5\times 3\times 8)$$

Minor

- 一個 $n \times n$ 方矩陣 A 的 *minor* 是把 A 的第 i 列與第 j 行去掉, 剩下來的那個 (n-1)*(n-1) 方陣 ***的行列式值*** 叫做 A 的一個 minor, 記為 Mi,j

$$A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 6 \\ -3 & 9 & -5 \\ 6 & -5 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \bar{A}_{11} = \begin{vmatrix} 9 & -5 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$$

$$M = \begin{bmatrix} \bar{A}_{11} & \bar{A}_{12} & \bar{A}_{13} \\ \bar{A}_{21} & \bar{A}_{22} & \bar{A}_{23} \\ \bar{A}_{31} & \bar{A}_{32} & \bar{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & M_{22} & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

餘因式(cofactor)

- 將Minor矩陣中 M_{ij} 乘以 $(-1)^{i+j}$ 即變成 a_{ij} 的餘因式

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} (-1)^{1+1}\bar{A}_{11} & (-1)^{1+2}\bar{A}_{12} & (-1)^{1+3}\bar{A}_{13} \\ (-1)^{2+1}\bar{A}_{21} & (-1)^{2+2}\bar{A}_{22} & (-1)^{2+3}\bar{A}_{23} \\ (-1)^{3+1}\bar{A}_{31} & (-1)^{3+2}\bar{A}_{32} & (-1)^{3+3}\bar{A}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & -M_{12} & M_{13} \\ -M_{21} & M_{22} & -M_{23} \\ M_{31} & -M_{32} & M_{33} \end{bmatrix}$$

反矩陣

- 一個方矩陣的反矩陣可表示為

$$A^{-1} = \frac{\hat{A}}{|A|}$$

它具有下列特性：一個矩陣乘上他的反矩陣可以得到一個單位矩陣

$$AA^{-1} = I$$

反矩陣例子

- 若一個 2×2 矩陣如下

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

其反矩陣為

$$A^{-1}=\frac{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}=\frac{\begin{bmatrix} a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & a_{11} \end{bmatrix}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}$$

解聯立方程式

- 一個N階線性聯立方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{Bmatrix}$$

也可以簡寫為 $AX = B$

兩邊各乘一個 A^{-1}

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \longrightarrow IX = X = A^{-1}B$$