第二周练习题及作业

2021 年 3 月 13 日

1 Week2 One-way ANOVA-方差稳定化变换

1.1 背景描述

这里对五种绝缘材料的性能进行实验研究。我们在升高电压的情况下对每种材料的四个样本进行测试，以加速失效时间。这是一个因子水平数 a = 5 和重复次数 n = 4 的单因子实验。

1.2 数据描述

变量名	变量含义	变量类型	变量取值范围
（自变量）Material	绝缘材料类型	categorical variable	[1, 2, 3, 4, 5]
（因变量）Failure Time	失效时间	continuous variable（单位：分钟）	Real

[1]:
```
import pandas as pd
print('Data: \n', pd.read_csv('Project2.csv').values)
```

```
Data:
 [[   1    1  110]
 [   2    1  157]
 [   3    1  194]
 [   4    1  178]
 [   5    2    1]
 [   6    2    2]
 [   7    2    4]
 [   8    2   18]
 [   9    3  880]
```

```
 [    10      3   1256]
 [    11      3   5276]
 [    12      3   4355]
 [    13      4    495]
 [    14      4   7040]
 [    15      4   5307]
 [    16      4  10050]
 [    17      5      7]
 [    18      5      5]
 [    19      5     29]
 [    20      5      2]]
```

1.3 问题

注：这里使用 α=0.05 的显著性水平

1. 试判断 5 种绝缘材料的性能是否存在差异.
2. 试判断该实验残差是否具有异方差性.
3. 若实验中的残差具有异方差性，试判断失效时间如何进行方差稳定化变换.
4. 如果需要变换，基于变换后的数据，试判断 5 种绝缘材料的性能是否存在差异.

1.4 解决方案

Q1:

检验假设 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$; $H_1 : \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 不全相等。

在本问题中，采用单因子方差分析模型（One-way ANOVA 模型）对问题进行分析。计算得出方差分析表，然后计算出检验统计量 F。若 $F \geq F_{1-\alpha}(f_A, f_e)$，说明 H_0 成立，因子不显著；否则说明 H_0 不成立，说明因子显著。其中 f_A, f_e 分别为因子和误差的自由度。

利用 python 进行分析得到的具体分析结果如下：

[2]:
```python
# Import standard packages
import numpy as np
import pandas as pd
import scipy.stats as stats
from scipy import special
import matplotlib.pyplot as plt
```

```
import math

# Import additional packages
from statsmodels.formula.api import ols
from statsmodels.stats.anova import anova_lm
from scipy.stats import f

alpha = 0.05
a = 5
n = 4

x = pd.read_csv("Project2.csv")
data = x.values[:,1:3]
data = data.astype(float)
# 不加此句，在进行变换时会取整，导致误差
# print(data)

# Sort them into groups, according to column 1("Material")
group1 = data[data[:,0] == 1,1]
group2 = data[data[:,0] == 2,1]
group3 = data[data[:,0] == 3,1]
group4 = data[data[:,0] == 4,1]
group5 = data[data[:,0] == 5,1]

# Do the one-way ANOVA
df = pd.DataFrame(data, columns = ['Material', 'Failure_Time'])
model = ols('Failure_Time ~ C(Material)', df).fit()
anovaResults = round(anova_lm(model), 4)
print('The ANOVA table: \n', anovaResults)

F0, pVal1 = stats.f_oneway(group1, group2, group3, group4, group5)
# 法 1:
# print(pVal1)
if pVal1 < alpha:
    print('\nSince p-value < '+str(alpha)+', reject H0.')
else:
```

```
    print('\nAccept H0.')

# 法 2:
F = round(f.ppf(0.95,dfn = a-1,dfd = a*n-a), 4)
if F0 > F:
    print('Since F0 > F('+str(1-alpha)+', '+str(a-1)+', '+str(a*n-a)+') = ', F,␣
↪', reject H0.')
else:
    print('Accept H0.')
```

```
The ANOVA table:
                df        sum_sq      mean_sq        F   PR(>F)
C(Material)    4.0   103191489.2   25797872.3   6.1909   0.0038
Residual      15.0    62505657.0    4167043.8      NaN      NaN


Since p-value < 0.05, reject H0.
Since F0 > F(0.95, 4, 15) =  3.0556 , reject H0.
```

由方差分析表可知，P 值小于 0.05 且 F 值大于 3.06，落入拒绝域 $W=\{F\geq F_{1-\alpha}(f_A,f_e)\}$ 中，故拒绝原假设 H_0，说明因子显著，即 5 种绝缘材料的性能存在差异。

Q2:

ANOVA 模型：$y_{ij}=\mu+\tau_i+\epsilon_{ij}$ 的误差服从正态独立分布，其均值为零，方差为未知的常数 σ^2。想要判断 ANOVA 模型是否恰当，可以利用残差检测来进行分析。

处理 i 的观测值 j 的残差定义为：$e_{ij}=y_{ij}-\hat{y}_{ij}$

其中 $\hat{y}_{ij}$ 是对应于 y_{ij} 的一个估计，$\hat{y}_{ij}=\hat{\mu}+\hat{\tau}_i=\overline{y}_{\cdot\cdot}+(\overline{y}_{i\cdot}-\overline{y}_{\cdot\cdot})=\overline{y}_{i\cdot}$

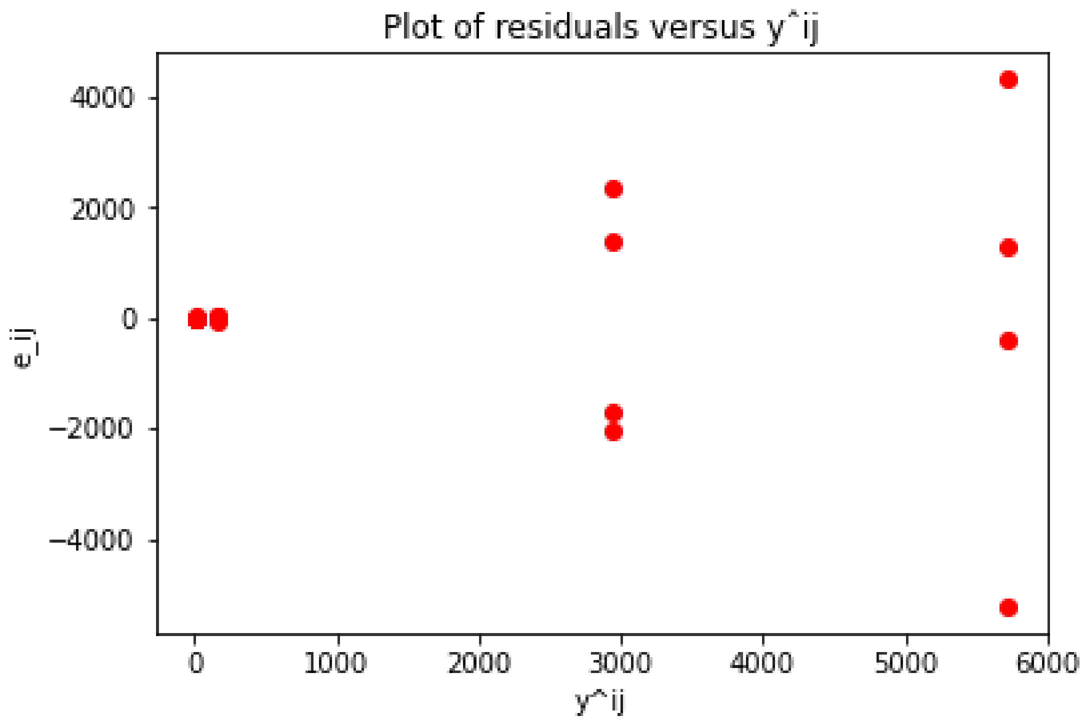
对数据的方差齐性进行检验，不满足方差齐性即说明数据具有异方差性，需要对原始数据进行变换然后再进行方差分析，方差齐性的检验假设为：$H_0:\sigma_1^2=\sigma_2^2=\quad=\sigma_a^2$ vs $H_1:\sigma_i^2\neq\sigma_j^2,\ i\neq j.$

编写 python 程序来判断数据的异方差性，判断依据主要有：残差与拟合值的关系图，Bartlett 检验及 Levene 检验。

[3]:
```
# 计算峰值流量的残差
data_res = data.astype(float) * 1
for k in range(a):
    cnt = data_res[data_res[:,0] == k + 1,1]
    data_res[data_res[:,0] == k + 1,1] = cnt - np.mean(cnt)
# print(data_res)
```

```python
# 法 1: 残差与拟合值的关系图
res = data_res[:,1]
y = []
for i in range(a):
    for j in range(n):
        y.append(np.mean(data[(data[:,0] == i + 1),1]))
plt.scatter(y, res, c = "red")
plt.title('Plot of residuals versus y^ij')
plt.xlabel('y^ij')
plt.ylabel('e_ij')

# 法 2: 用 Bartlett 检验进行方差齐性检验
bart, pVal2 = stats.bartlett(group1, group2, group3, group4, group5)
bart_stat = stats.chi2.isf(alpha, a - 1)
print('Bartlett 检验的 P 值为: ', pVal2)
if pVal2 < alpha:
    print('Since p-value < 0.05, reject H0.')
else:
    print('Accept H0')

# 法 3: 用 Levene 检验进行方差齐性检验
lene, pVal3 = stats.levene(group1, group2, group3, group4, group5)
print('\nLevene 检验的 P 值为: ', pVal3)
if pVal3 < alpha:
    print('Since p-value < 0.05, reject H0.\n')
else:
    print('Accept H0\n')
```

```
Bartlett 检验的 P 值为:  3.608342631295821e-15
Since p-value < 0.05, reject H0.

Levene 检验的 P 值为:  0.0043438474446047285
Since p-value < 0.05, reject H0.
```



由分析可知:

1. 残差与拟合值的关系图：呈现开口向外的漏斗型；2. Bartlett 检验法：P 值接近 0，$3.6 \times 10^{-15} < 0.05$；3. Levene 检验法：P 值为 $0.0043 < 0.05$.

由以上三种方法得出共同结论：拒绝方差相等的原假设。即认为数据具有异方差性，需要对数据进行变换。

Q3:

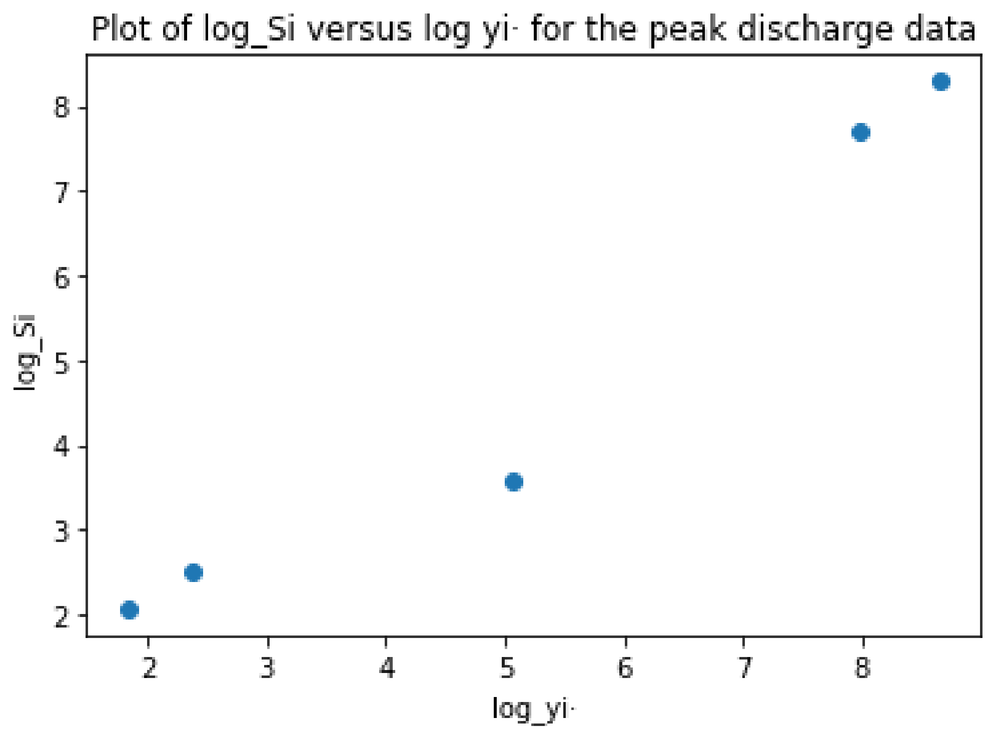
由第二题的结论可知，残差具有异方差性。由残差与拟合值的关系图可以看出，随着 $\hat{y}_{ij}$ 的增大，残差不断增大，每组数据的方差也随之增大。为了研究峰值流量如何采用方差稳定化变换，需画出 $logS_i$ 和 $log\bar{y}_i$. 的关系图。这是为了找出每一组内方差随均值变化的规律并由此进行变换。同时由于组间的方差和均值差距较大，所以对横纵坐标同时取了对数。

[4]:
```
# 求出各估计方法的标准差 sigma_i 和均值 mu_i 的对数
# 通常用样本的标准差 std_i 和均值 y_i 代替总体的标准差 sigma_i 和均值 mu_i
log_y_1 = math.log(np.mean(group1))
log_y_2 = math.log(np.mean(group2))
log_y_3 = math.log(np.mean(group3))
log_y_4 = math.log(np.mean(group4))
```

```
log_y_5 = math.log(np.mean(group5))
log_y = [log_y_1, log_y_2, log_y_3, log_y_4, log_y_5]

log_std_1 = math.log(np.std(group1, ddof = 1))
log_std_2 = math.log(np.std(group2, ddof = 1))
log_std_3 = math.log(np.std(group3, ddof = 1))
log_std_4 = math.log(np.std(group4, ddof = 1))
log_std_5 = math.log(np.std(group5, ddof = 1))
log_std = [log_std_1, log_std_2, log_std_3, log_std_4, log_std_5]

# linregress(x,y) 线性回归函数
slope, intercept, r_value, p_value, std_err = stats.linregress(log_y, log_std)
print('斜率为: ', round(slope, 2))

# 作图
plt.scatter(log_y, log_std)
plt.title('Plot of log_Si versus log yi· for the peak discharge data')
plt.xlabel('log_yi·')
plt.ylabel('log_Si')
```

```
斜率为:  0.92
```

[4]:
```
Text(0, 0.5, 'log_Si')
```



由上图可知，过这 5 点的直线斜率接近 0.92 ， 即 $\alpha = 0.92$。根据 $\lambda = 1-\alpha$, $\lambda = 0.08$。对原始数据可以通过幂变换进行方差稳定化变换，变换的方式为：对 y 值取 0.08 次方，变换后的数据为 $y^* = y^{0.08}$。

为了检验变换后的数据是否具有异方差性，定义如下函数处理变换后的数据。该函数可以打印出变换后的数据，然后计算其残差，并画出残差与拟合值的关系图。通过观察关系图来大致观察变换后的数据是否具有异方差性。函数代码如下：

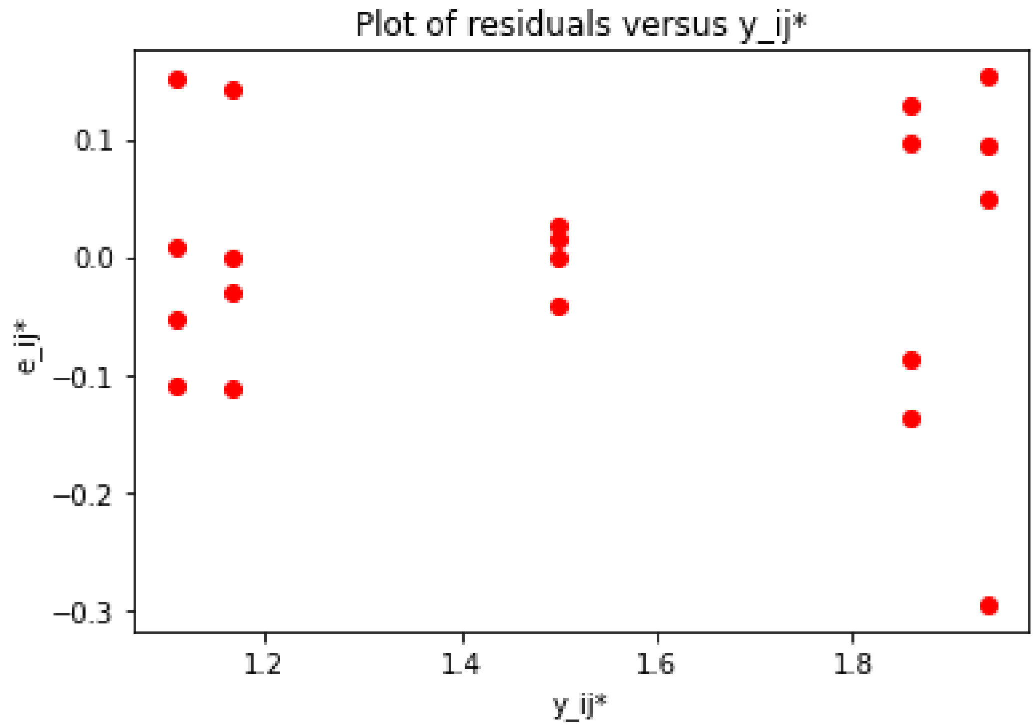
[5]:
```
def check_residual(sqrt_groups):
    sqrt_groups1 = pd.DataFrame(sqrt_groups)
    print(sqrt_groups1)

    # 计算变换后峰值流量的残差
    df = np.array(sqrt_groups)
    sqrt_data = [data[:,0], df.reshape(1, 20).tolist()[0]]
    sqrt_data = np.array(sqrt_data * 1).T
    sqrt_data_res = sqrt_data * 1
    for k in range(a):
```

```
        sqrt_cnt = sqrt_data_res[sqrt_data_res[:,0] == k + 1,1]
        sqrt_data_res[sqrt_data_res[:,0] == k + 1,1] = sqrt_cnt - np.
↪mean(sqrt_cnt)

    # 变换后的残差与拟合值的关系图
    sqrt_res = sqrt_data_res[:,1]
    sqrt_y = []
    for i in range(a):
        for j in range(n):
            sqrt_y.append(np.mean(sqrt_data[(sqrt_data[:,0] == i + 1),1]))
    plt.scatter(sqrt_y, sqrt_res, c = "red")
    plt.title('Plot of residuals versus y_ij*')
    plt.xlabel('y_ij*')
    plt.ylabel('e_ij*')
```

本题中我选取了幂变换，对数变换，Box-Cox 变换共三种变换来对 y 值进行方差稳定化变换。代码如下。

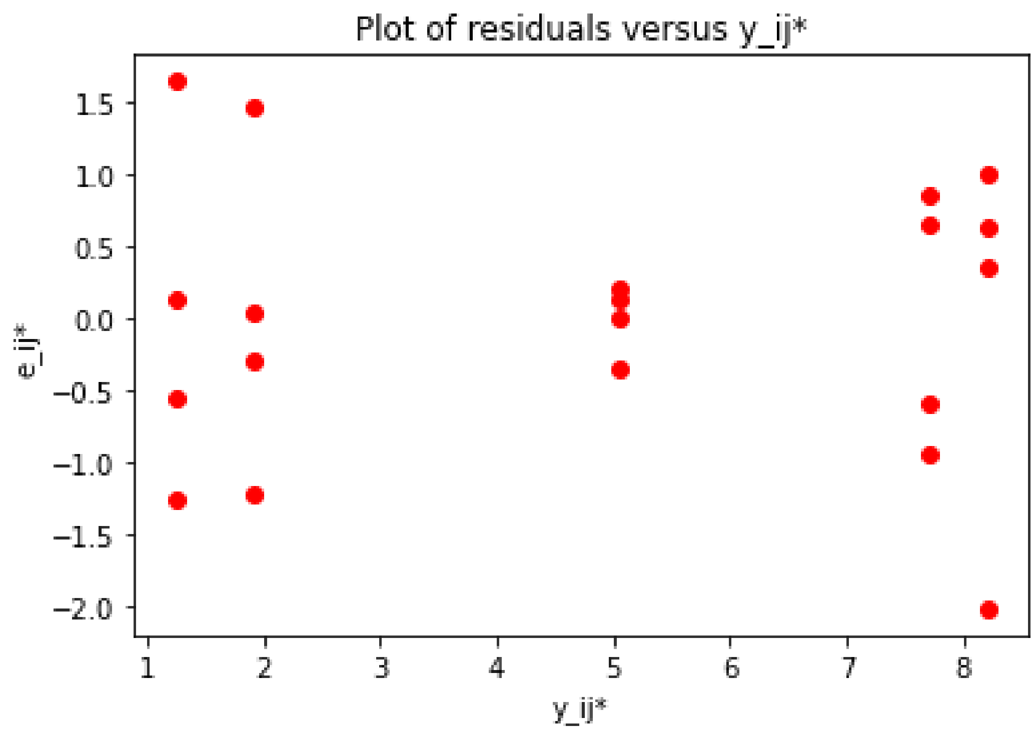
[6]:
```
# 对 y 值进行幂变换，即通过 n 次方或开方进行方差稳定化变换
lmda = 0.08
sqrt_group1 = group1 ** lmda
sqrt_group2 = group2 ** lmda
sqrt_group3 = group3 ** lmda
sqrt_group4 = group4 ** lmda
sqrt_group5 = group5 ** lmda
sqrt_groups = [sqrt_group1, sqrt_group2, sqrt_group3, sqrt_group4, sqrt_group5]

check_residual(sqrt_groups)
```

	0	1	2	3
0	1.456503	1.498553	1.524137	1.513678
1	1.000000	1.057018	1.117287	1.260149
2	1.720119	1.769780	1.985109	1.954875
3	1.642738	2.031448	1.986040	2.090130
4	1.168444	1.137411	1.309157	1.057018



[7]:
```
# 对 y 值进行对数变换，即通过取对数进行方差稳定化变换
log_group1 = np.log(group1)
log_group2 = np.log(group2)
log_group3 = np.log(group3)
log_group4 = np.log(group4)
log_group5 = np.log(group5)
log_groups = [log_group1, log_group2, log_group3, log_group4, log_group5]

check_residual(log_groups)
```

	0	1	2	3
0	4.700480	5.056246	5.267858	5.181784
1	0.000000	0.693147	1.386294	2.890372
2	6.779922	7.135687	8.570924	8.379080
3	6.204558	8.859363	8.576782	9.215328
4	1.945910	1.609438	3.367296	0.693147



【补充】Box-Cox 变换：Box-Cox 变换的主要特点是引入一个参数 λ，通过数据本身估计该参数进而确定应采取的数据变换形式，Box-Cox 变换可以明显地改善数据的正态性、方差齐性。
Box-Cox 变换的一般形式为：

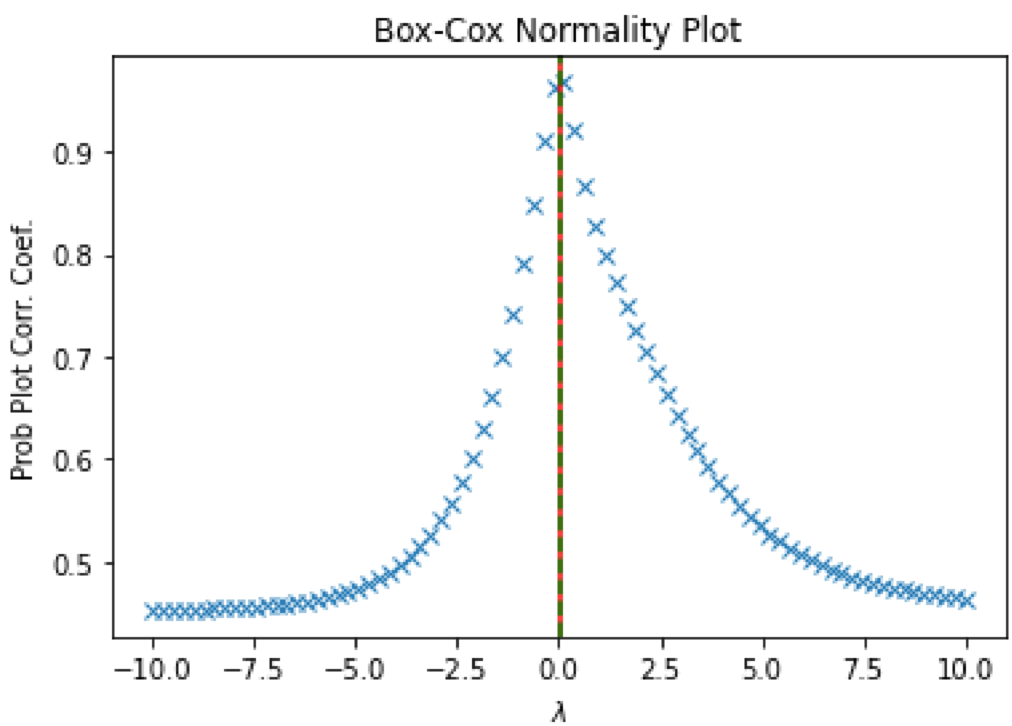
$$y(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{(y+c)^{\lambda}-1}{\lambda}, & \lambda\neq 0\\ \ln(y+c), & \lambda=0\end{cases}$$

式中 $y(\lambda)$ 为经 Box-Cox 变换后得到的新变量，y 为原始连续因变量，其中 $y+c$ 的 $+c$ 是为了确保 $(y+c)>0$, 因为在 Box-Cox 变换中要求 $y>0$，λ 为变换参数。
在这里可以看到 λ 的值是需要我们自己去确定的，那么怎么去确定呢？这里使用的方法是假设经过转换后的因变量就是服从正态分布的，然后画出关于 λ 的似然函数，似然函数值最大的时候 λ 的取值就是这里需要确定的值。

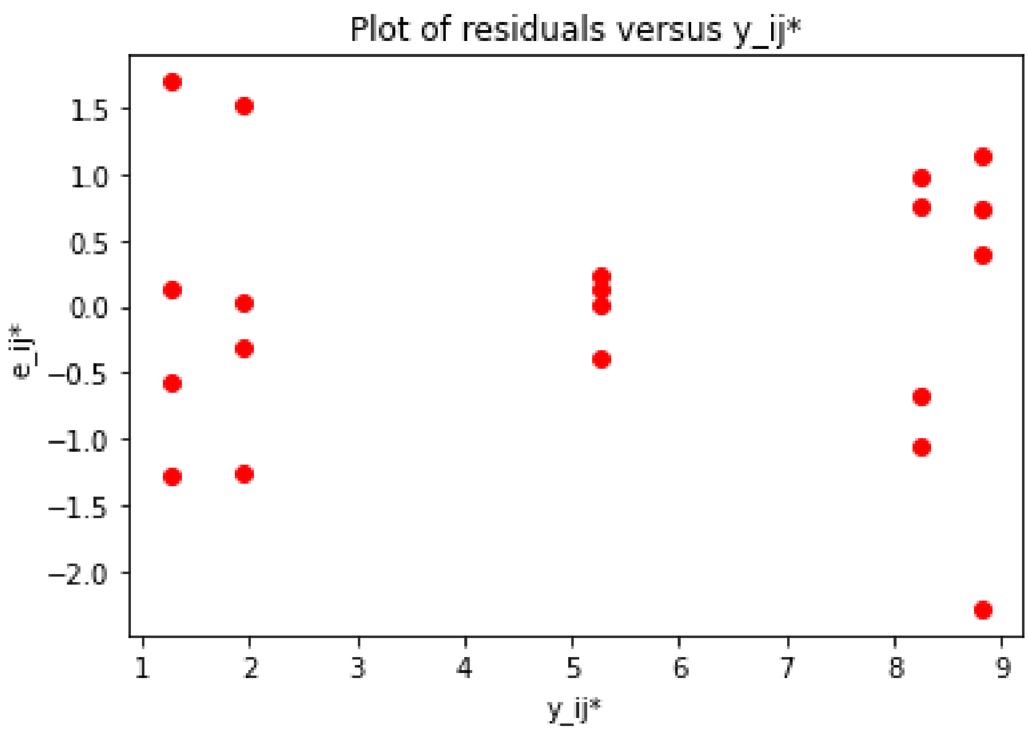
[8]:
```
# 作 Box-Cox 变换
bc, lmax_mle = stats.boxcox(data[:,1])
lmax_pearsonr = stats.boxcox_normmax(data[:,1])
print('lmax_mle: ', lmax_mle)
print('lmax_pearsonr: ', lmax_pearsonr)
```

```
fig = plt.figure()
ax = fig.add_subplot(111)
prob = stats.boxcox_normplot(data[:,1], -10, 10, plot = ax)
ax.axvline(lmax_mle, color='r')
ax.axvline(lmax_pearsonr, color='g', ls='--')
plt.show()

# 计算变换后峰值流量的残差
bc_group1 = bc[0:4]
bc_group2 = bc[4:8]
bc_group3 = bc[8:12]
bc_group4 = bc[12:16]
bc_group5 = bc[16:20]
bc_groups = [bc_group1, bc_group2, bc_group3, bc_group4, bc_group5]

check_residual(bc_groups)
```

```
lmax_mle:  0.016756747738272192
lmax_pearsonr:  0.014405187672448234
```



	0	1	2	3
0	4.890554	5.276624	5.507356	5.413405
1	0.000000	0.697188	1.402521	2.961511
2	7.180062	7.579822	9.216959	8.995842
3	6.538571	9.550754	9.223723	9.964921
4	1.977983	1.631337	3.464108	0.697188



由以上三个变换后得出的数据和图可知，虽然变换后的数据大小不一，但残差与拟合值的关系图都没有呈现漏斗型。这说明经过变换后的数据大致不再具有异方差性，具体的方差齐性检验将在下一问中给出。

Q4:

本问的检验假设仍为 $H_0 : \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4$ vs $H_1 : \mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 不全相等。但此处的平均值是对变换后的数据取得的平均值，而非对原数据取得的平均值。

定义如下函数对数据进行检验。首先使用 Levene 检验对变换后的数据进行方差齐性检验，然后使

用变换后的数据进行方差分析，并打印出方差分析表。函数打印的第一个结果是 Levene 检验的结果，若接受原假设说明数据具有方差齐性。第二个结果是方差分析的结果，若拒绝原假设说明因子水平显著。

[9]:
```
def Levene_and_ANOVA(group1, group2, group3, group4, group5):

    groups = [group1, group2, group3, group4, group5]

    # 变换后，再用 Levene 检验进行方差齐性检验
    lene, pVal5 = stats.levene(group1, group2, group3, group4, group5)
    if pVal5 < alpha:
        print('Since p-value < 0.05, reject H0.\n')
    else:
        print('Accept H0\n')

    # 变换后，Do the one-way ANOVA with transformation
    F0, pVal7 = stats.f_oneway(group1, group2, group3, group4, group5)
    if pVal7 < alpha:
        print('Since p-value < 0.05, reject H0.\n')
    else:
        print('Accept H0\n')

    # Elegant alternative implementation, with pandas & statsmodels
    for i in range(a):
        data[0 + 4 * i:4 * (i + 1), 1] = list(groups[i])
    df = pd.DataFrame(data, columns = ['method', 'Y'])
    model = ols('Y ~ C(method)', df).fit()
    anovaResults = anova_lm(model)
    print(anovaResults)
```

[10]:
```
# 幂变换后，进行方差齐性检验和 one-way ANOVA
Levene_and_ANOVA(sqrt_group1, sqrt_group2, sqrt_group3, sqrt_group4,␣
 ↪sqrt_group5)
```

```
Accept H0


Since p-value < 0.05, reject H0.
```

	df	sum_sq	mean_sq	F	PR(>F)
C(method)	4.0	2.326792	0.581698	35.322436	1.807989e-07
Residual	15.0	0.247023	0.016468	NaN	NaN

[11]:
```
# 对数变换后，进行方差齐性检验和 one-way ANOVA
Levene_and_ANOVA(log_group1, log_group2, log_group3, log_group4, log_group5)
```

Accept H0

Since p-value < 0.05, reject H0.

	df	sum_sq	mean_sq	F	PR(>F)
C(method)	4.0	165.056458	41.264114	37.65686	1.176093e-07
Residual	15.0	16.436891	1.095793	NaN	NaN

[12]:
```
# bc 变换后，进行方差齐性检验和 one-way ANOVA
Levene_and_ANOVA(bc_group1, bc_group2, bc_group3, bc_group4, bc_group5)
```

Accept H0

Since p-value < 0.05, reject H0.

	df	sum_sq	mean_sq	F	PR(>F)
C(method)	4.0	193.668327	48.417082	37.624897	1.182844e-07
Residual	15.0	19.302544	1.286836	NaN	NaN

对三种变换进行检验得到的结果大体上是相同的。由第一个结论可知，稳定化变换后的残差具有方差齐性。再进行单因素方差分析，由方差分析表知，P 值均小于 0.05 且接近于 0，故拒绝原假设，即 5 种绝缘材料的性能存在差异。

从最终结果来看，对数变换和 bc 变换得到的数据大小和方差分析表中的数据比较相似，而幂变换得到的数据比较小，接近于 0。这也导致幂变换计算得到的 S_A，S_e，MS_A，MS_e 也远小于另外两种变换的同一统计量。在精度不足时，应尽量选用对数变换和 bc 变换。

2 第二周作业

計算 $E[MS_A]$, $E[MS_B]$, $E[MS_{AB}]$, $E[MS_E]$.

解： $\mathrm{E[MS}_A] = E[\frac{SS_A}{df_A}] = \frac{1}{a-1}E[SS_A]$. $\overline{y} = \frac{1}{n}\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b\Sigma_{k=1}^m y_{ijk}$.
$\mu_{i..} = \frac{1}{bm}\Sigma_{j=1}^b\Sigma_{k=1}^m\mu_{ij} = \frac{1}{bm}\Sigma_{j=1}^b\Sigma_{k=1}^m(\mu+\alpha_i+\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}) = \mu+\alpha_i+\frac{1}{b}\Sigma_{j=1}^b(\beta_j+(\alpha\beta)_{ij}) = \mu+\alpha_i$,
$E[SS_A] = E[bm\Sigma_{i=1}^a(\overline{y}_{i..}-\overline{y})^2] = bmE[\Sigma_{i=1}^a((\mu_{i..}+\overline{\epsilon}_{i..})-(\mu+\overline{\epsilon}))^2] = bmE[\Sigma_{i=1}^a(\alpha_i+\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon})^2]$
$= bmE[\Sigma_{i=1}^a(\alpha_i^2+(\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon})^2+2\alpha_i(\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon}))] = bm\Sigma_{i=1}^a\{E[\alpha_i^2]+E[(\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon})^2]+2E[\alpha_i(\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon})]\}$
$= bm\Sigma_{i=1}^a\{\alpha_i^2+E[(\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon})^2]+2\alpha_iE[\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon}]\} = bm\Sigma_{i=1}^a\{\alpha_i^2+E[(\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon})^2]\}$
$= bm\Sigma_{i=1}^a\alpha_i^2+E[bm\Sigma_{i=1}^a(\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon})^2]$
$\because \epsilon_{ijk}\sim N(0,\sigma^2), \therefore \overline{\epsilon}_{i..}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{bm}),\ \therefore \frac{\Sigma_{i=1}^a E[(\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon})^2]}{\frac{\sigma^2}{bm}}\sim\chi^2(a-1), \therefore E[bm\Sigma_{i=1}^a(\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon})^2] = (a-1)\sigma^2$.
$\therefore E[SS_A] = (a-1)\sigma^2+bm\Sigma_{i=1}^a\alpha_i^2,\ E[MS_A] = \sigma^2+\frac{bm}{a-1}\Sigma_{i=1}^a\alpha_i^2$,
同理可得$E[MS_B] = \sigma^2+\frac{am}{b-1}\Sigma_{j=1}^b\beta_j^2$.

$\mathrm{E[SS}_E] = E[\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b\Sigma_{k=1}^m(y_{ijk}-\overline{y}_{ij.})^2]$
$= E[\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b\Sigma_{k=1}^m(\epsilon_{ijk}-\overline{\epsilon}_{ij.})^2] = \Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^bE[\Sigma_{k=1}^m(\epsilon_{ijk}-\overline{\epsilon}_{ij.})^2]$
$\because \epsilon_{ijk}\sim N(0,\sigma^2), \frac{1}{\sigma^2}\Sigma_{k=1}^m(\epsilon_{ijk}-\overline{\epsilon}_{ij.})^2\sim\chi^2(m-1), \therefore E[\Sigma_{k=1}^m(\epsilon_{ijk}-\overline{\epsilon}_{ij.})^2] = (m-1)\sigma^2$.
$\therefore E[SS_E] = ab(m-1)\sigma^2 = (n-ab)\sigma^2,\ E[MS_E] = E[\frac{SS_E}{df_E}] = \frac{1}{n-ab}E[SS_E] = \sigma^2$.

$\mathrm{E[SS}_{AB}] = E[m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b(\overline{y}_{ij.}+\overline{y}-\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{.j.})^2] = m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^bE[(\overline{y}_{ij.}+\overline{y}-\overline{y}_{i..}-\overline{y}_{.j.})^2]$
$= m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^bE[((\mu_{ij.}+\overline{\epsilon}_{ij.})+(\mu+\overline{\epsilon})-(\mu_{i..}+\overline{\epsilon}_{i..})-(\mu_{.j.}+\overline{\epsilon}_{.j.}))^2]$
$= m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^bE[((\alpha\beta)_{ij}+\overline{\epsilon}_{ij.}+\overline{\epsilon}-\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon}_{.j.})^2]$
$= m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^bE[(\alpha\beta)_{ij}^2+(\overline{\epsilon}_{ij.}+\overline{\epsilon}-\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon}_{.j.})^2+2(\alpha\beta)_{ij}(\overline{\epsilon}_{ij.}+\overline{\epsilon}-\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon}_{.j.})]$
$= m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b(\alpha\beta)_{ij}^2+E[m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b(\overline{\epsilon}_{ij.}+\overline{\epsilon}-\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon}_{.j.})^2]+2m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b(\alpha\beta)_{ij}E[\overline{\epsilon}_{ij.}+\overline{\epsilon}-\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon}_{.j.}]$
$= m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b(\alpha\beta)_{ij}^2+E[m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b(\overline{\epsilon}_{ij.}+\overline{\epsilon}-\overline{\epsilon}_{i..}-\overline{\epsilon}_{.j.})^2]$
$= m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b(\alpha\beta)_{ij}^2+E[m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b((\overline{\epsilon}_{ij.}-\overline{\epsilon}_{i..})-(\overline{\epsilon}_{.j.}-\overline{\epsilon}))^2]$
$\because \epsilon_{ijk}\sim N(0,\sigma^2), \therefore \overline{\epsilon}_{ij.}\sim N(0,\frac{\sigma^2}{m}), (\overline{\epsilon}_{ij.}-\overline{\epsilon}_{i..})\sim N(0,\frac{\sigma^2}{m}+\frac{\sigma^2}{bm})$,
$\therefore \frac{E[\Sigma_{i=1}^a((\overline{\epsilon}_{ij.}-\overline{\epsilon}_{i..})-(\overline{\epsilon}_{.j.}-\overline{\epsilon}))^2]}{\frac{\sigma^2}{m}+\frac{\sigma^2}{bm}}\sim\chi^2(a-1), E[\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b((\overline{\epsilon}_{ij.}-\overline{\epsilon}_{i..})-(\overline{\epsilon}_{.j.}-\overline{\epsilon}))^2] = (a-1)(b-1)\sigma^2$.
$\therefore E[SS_{AB}] = (a-1)(b-1)\sigma^2+m\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b(\alpha\beta)_{ij}^2$,
$E[MS_{AB}] = E[\frac{SS_{AB}}{df_{AB}}] = \frac{1}{(a-1)(b-1)}E[SS_{AB}] = \sigma^2+\frac{m}{(a-1)(b-1)}\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b(\alpha\beta)_{ij}^2$.

綜上所述， $\mathrm{E[MS}_A] = \sigma^2+\frac{bm}{a-1}\Sigma_{i=1}^a\alpha_i^2, E[MS_B] = \sigma^2+\frac{am}{b-1}\Sigma_{j=1}^b\beta_j^2$.
$E[MS_{AB}] = \sigma^2+\frac{m}{(a-1)(b-1)}\Sigma_{i=1}^a\Sigma_{j=1}^b(\alpha\beta)_{ij}^2, E[MS_E] = \sigma^2$.