

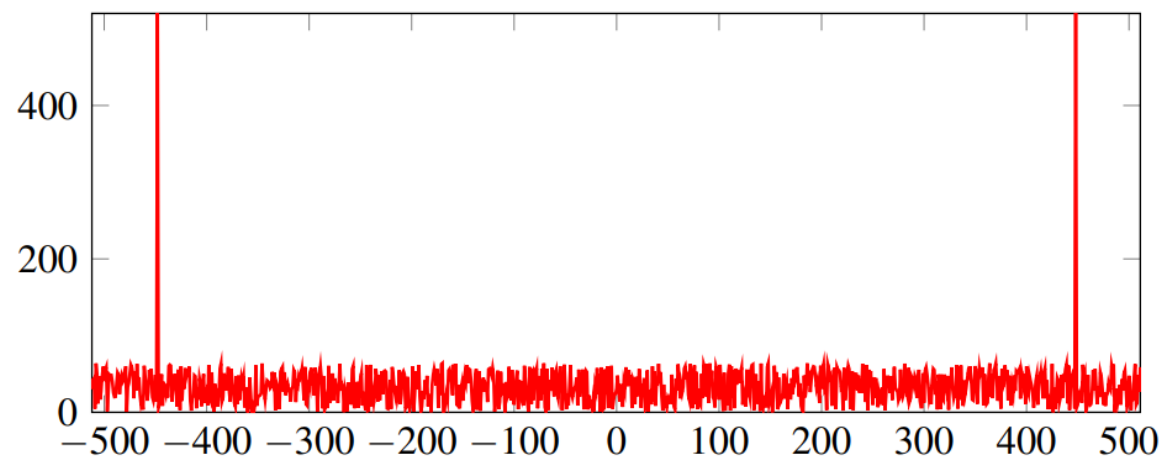
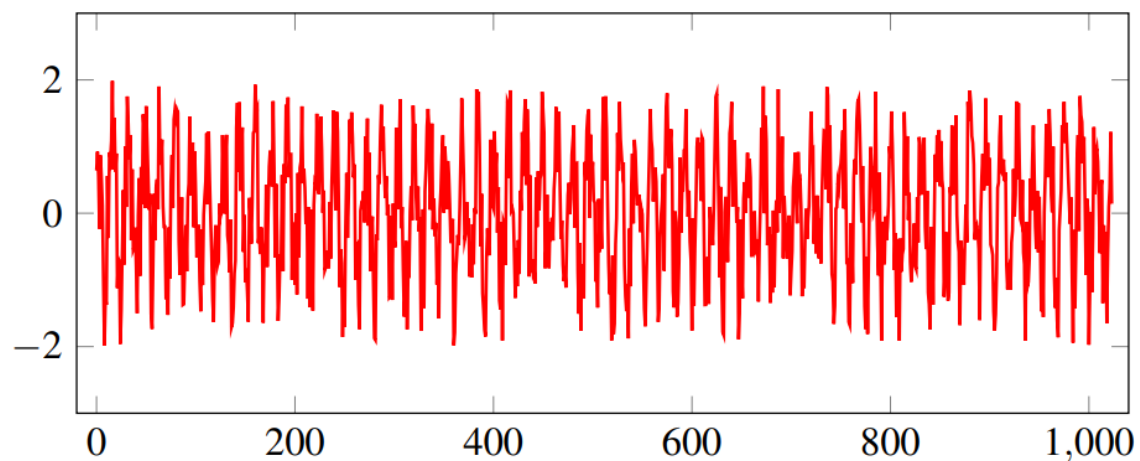


中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

离散傅里叶变换 (DFT)

信号的时频域描述

$$x(t) = \cos(2\pi ft) + e(t)$$



- 傅里叶分析

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega \Leftrightarrow X(\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

- 时间 t : 单位 s 、连续
- 频率 f : 单位 Hz 、连续
- 连续傅里叶仅仅是一种分析方法。

Question: 实际处理如何操作?

DFT的原因

计算机只能处理**离散**、**有限长**信号。不能处理连续、无限长信号。

- 连续时间傅里叶变换 (Continuous Fourier Transform - CFT)

- ✗ 时间连续
- ✗ 频率连续

- 离散时间傅里叶变换 (Discrete-time Fourier Transform - DTFT)

- ✓ 时间离散
- ✗ 无限长序列
- ✗ 频率连续

- **有限长**+**离散时间**变换

- ✓ 时间离散
- ✓ 频率离散
- ✓ 有限长序列

本章内容

- 1 傅里叶变换的四种可能形式
- 2 离散傅里叶级数 (DFS)
- 3 离散傅里叶变换 (DFT)
- 4 DFT的主要性质
- 5 频域抽样理论
- 6 DFT的应用

3.1 傅里叶变换的四种可能形式

傅里叶变换的四种可能形式

1. 连续时间，离散频率的傅里叶变换——傅里叶级数
2. 连续时间，连续频率的傅里叶变换——连续傅里叶变换
3. 离散时间，连续频率的傅里叶变换——序列的傅里叶变换
4. 离散时间，离散频率的傅里叶变换——离散傅里叶变换

一个域是连续的，则对应的另一个域一定是非周期的；
一个域是离散的，则对应的另一个域一定是周期的。

傅里叶变换的四种可能形式

傅里叶变换对	连续时间非周期信号的傅里叶变换(FT)对	连续时间周期信号的傅里叶级数(FS)对	非周期序列的傅里叶变换(DTFT)对	周期序列的傅里叶级数对——离散傅里叶级数(DFS)对
	$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$ $x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$	$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$ $x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$	$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) e^{-j\omega n}$ $x(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega}) e^{j\omega n} d\omega$	$\tilde{X}(k) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$ $\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$
时域波形				
	连续, 非周期	连续, 周期(T_0)	离散(T), 非周期	离散(T), 周期(T_0)
	非周期, 连续	非周期, 离散($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$)	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$), 连续	周期($\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$), 离散($\Omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$)
频域幅度特性				

3.2 离散傅里叶级数 (DFS)

离散傅里叶级数 (DFS) —— 周期序列的傅里叶级数

一、DFS的定义

$\tilde{x}(n)$ 表示一个周期为 N 的周期序列

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}(n + rN)$$

可展成离散傅里叶级数:

$$\tilde{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$$

DFS

离散傅里叶级数（DFS）对可表示为

正变换：

$$\tilde{X}(k) = DFS[\tilde{x}(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n) W_N^{nk}$$

反变换：

$$\tilde{x}(n) = IDFS[\tilde{X}(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k) W_N^{-nk}$$

DFS $[\cdot]$ 表示离散傅里叶级数正变换，
IDFS $[\cdot]$ 表示离散傅里叶级数反变换。

DFS

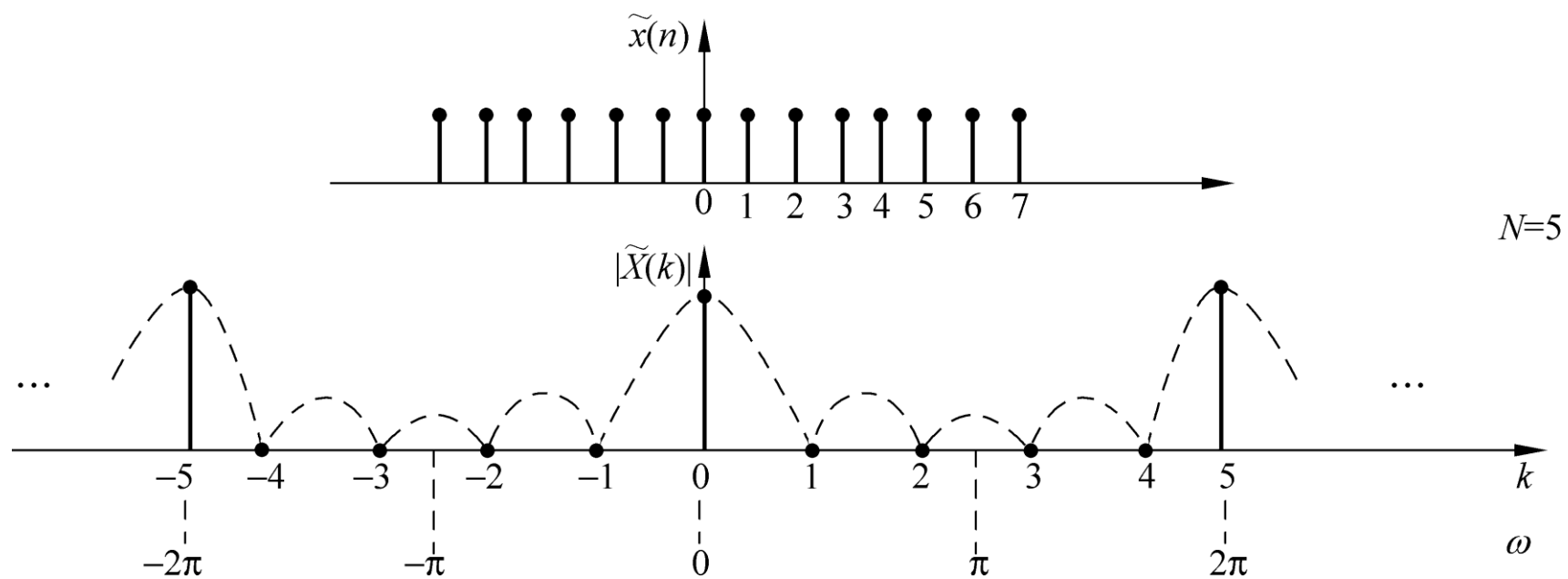
$$\tilde{X}(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j2\pi k/N}}$$

$$\tilde{X}(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N}$$

$\tilde{x}(n)$ 的傅里叶级数的系数 $\tilde{X}(k)$ ，等于 $\tilde{x}(n)$ 的一个周期 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega}) = \text{DTFT}[x(n)]$ 在 $2\pi k/N$ 上的抽样值； $\tilde{X}(k)$ 可以看成是 $x(n)$ 的 z 变换在 z 平面单位圆上按等间隔角 $2\pi/N$ 抽样而得到的。或者说，是 $x(n)$ 的傅里叶变换 $X(e^{j\omega})$ 在 $[0, 2\pi)$ 上的 N 点等间隔抽样，抽样间隔为 $2\pi/N$ 。

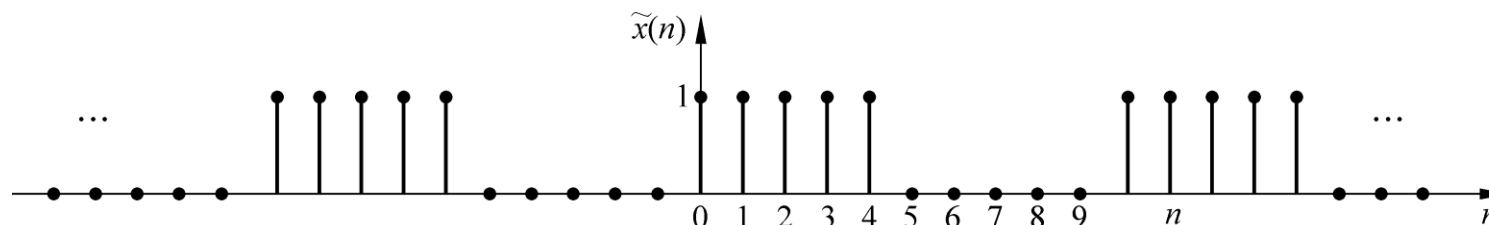
DFS

例3.1

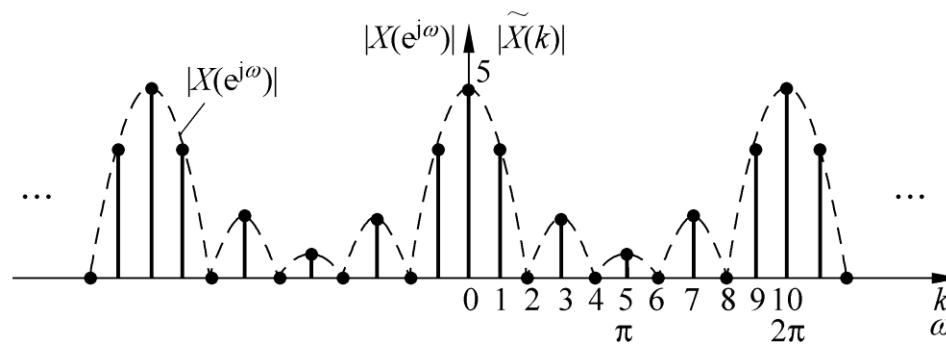


DFS

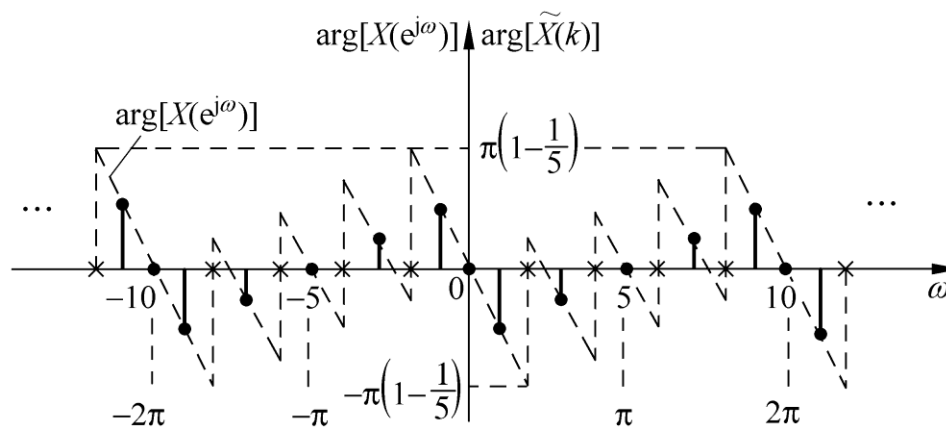
例3.2



(a)



(b)



(c)

DFS的性质

$$\tilde{X}_1(k) = DFS[\tilde{x}_1(n)], \quad \tilde{X}_2(k) = DFS[\tilde{x}_2(n)]$$

1. 线性

$$DFS[ax_1(n) + bx_2(n)] = a\tilde{X}_1(k) + b\tilde{X}_2(k)$$

2. 周期序列的移位

$$DFS[\tilde{x}(n+m)] = W_N^{-m\hat{k}} \tilde{X}(k) = e^{-j\frac{2\pi}{N}m\hat{k}} \tilde{X}(k)$$

3. 调制特性

$$DFS[W_N^{l\hat{n}} \tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k+l)$$

DFS的性质

4. 对偶性

$$\text{DFS}[\tilde{x}(n)] = \tilde{X}(k)$$

$$\text{DFS}[\tilde{X}(n)] = N\tilde{x}(-k)$$

5. 对称性

与傅里叶变换的对称性质一样。

DFS的性质

6. 周期卷积和 如果 $\tilde{Y}(k) = \tilde{X}_1(k) \cdot \tilde{X}_2(k)$

$$\begin{aligned} \text{则 } \tilde{y}(n) = IDFS[\tilde{Y}(k)] &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1(m) \tilde{x}_2(n-m) \\ &= \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_2(m) \tilde{x}_1(n-m) \end{aligned}$$

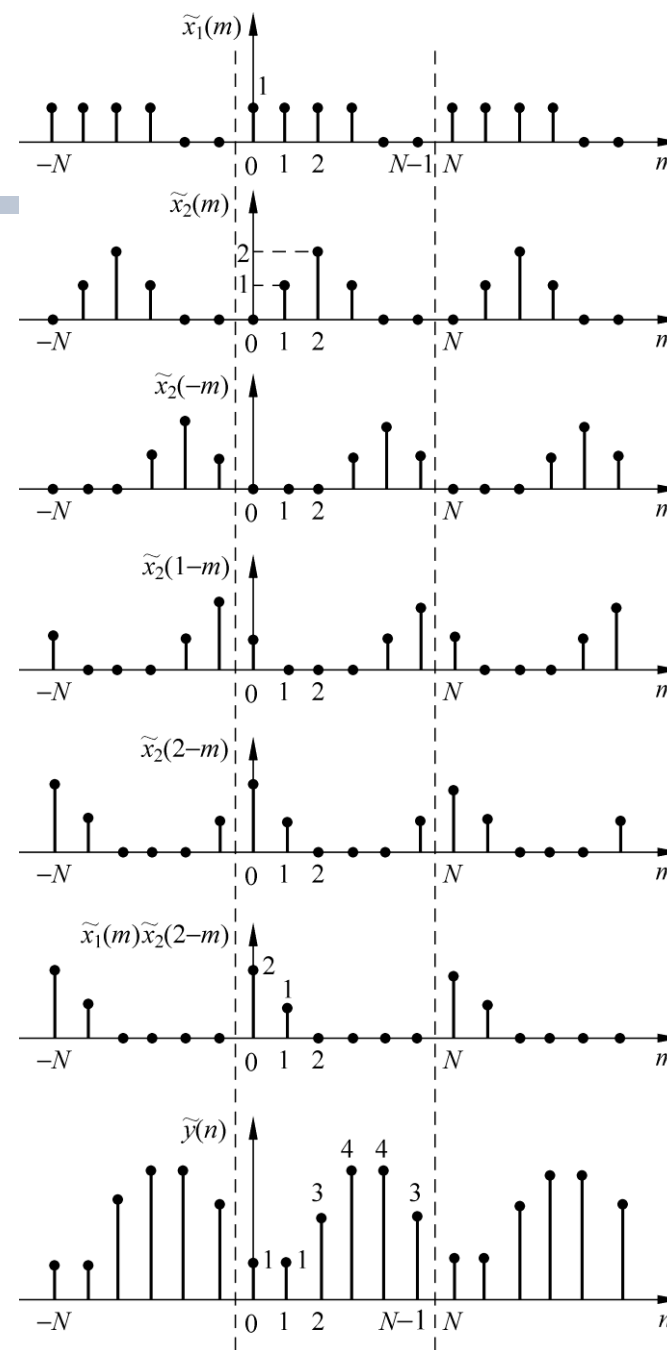
如果 $\tilde{y}(n) = \tilde{x}_1(n) \tilde{x}_2(n)$

$$\begin{aligned} \text{则 } \tilde{Y}(k) = DFS[\tilde{y}(n)] &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{y}(n) W_N^{nk} \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_1(l) \tilde{X}_2(k-l) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{l=0}^{N-1} \tilde{X}_2(l) \tilde{X}_1(k-l) \end{aligned}$$

DFS的性质

例3.4

周期序列
($N=6$)
的周期卷积



3.3 离散傅里叶变换 (DFT)

DFT的定义、DFT与DFS、DTFT及 z 变换的关系



1. 主值区间、主值序列

设 $x(n)$ 为有限长序列，只在 $0 \leq n \leq N-1$ 处有值，
可以把它看成是以 N 为周期的周期性序列 $\tilde{x}(n)$ 的
第一个周期（ $0 \leq n \leq N-1$ ），
这第一个周期 $[0, N-1]$ 就称为主值区间，
主值区间的序列 $x(n)$ 就称为主值序列，则有

$$x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = x((n))_N R_N(n)$$

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$

DFT的定义、DFT与DFS、DTFT及 z 变换的关系

2. DFT的定义

设 $x(n)$ 为 M 点有限长序列，即在 $0 \leq n \leq M-1$ 内有值，
则可定义 $x(n)$ 的 N 点（ $N \geq M$ 。当 $N > M$ 时，补 $N-M$ 个零值点）
离散傅里叶变换定义为

$$X(k) = DFT[x(n)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N}nk} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) W_N^{nk} \quad 0 \leq k \leq N-1$$

反变换

$$x(n) = IDFT[X(k)] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k) W_N^{-nk} \quad 0 \leq n \leq N-1$$

DFT的定义、DFT与DFS、DTFT及 z 变换的关系

3. DFT用矩阵表示

DFT用矩阵表示

$$\mathbf{X} = \mathbf{W}_N \mathbf{x}$$

$$\mathbf{X} = [X(0), X(1), \dots, X(N-2), X(N-1)]^T$$

$$\mathbf{x} = [x(0), x(1), \dots, x(N-2), x(N-1)]^T$$

$$\mathbf{W}_N = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^1 & W_N^2 & \cdots & W_N^{N-1} \\ 1 & W_N^2 & W_N^4 & \cdots & W_N^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{N-1} & W_N^{2(N-1)} & \cdots & W_N^{(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

DFT的定义、DFT与DFS、DTFT及 z 变换的关系

IDFT也可用矩阵表示

$$\mathbf{x} = \mathbf{W}_N^{-1} \mathbf{X}$$

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W_N^{-1} & W_N^{-2} & \cdots & W_N^{-(N-1)} \\ 1 & W_N^{-2} & W_N^{-4} & \cdots & W_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & W_N^{-(N-1)} & W_N^{-2(N-1)} & \cdots & W_N^{-(N-1)(N-1)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{W}_N^{-1} = \frac{1}{N} \mathbf{W}_N^*$$

DFT的定义、DFT与DFS、DTFT及 z 变换的关系

4. DFT与DFS的关系

定义于第一个周期 ($0 \leq n \leq N-1$) 中的DFS对, 就得到DFT对。

也就是说, 对DFT来说, 人们感兴趣的定义范围,

在 $x(n)$ 为 $0 \leq n \leq N-1$, 在 $X(k)$ 则为 $0 \leq k \leq N-1$ 。

但是, 它们本质上都是离散且周期的序列:

在DFT讨论中, 有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的, 也就是说, 对DFT的任何处理, 都是看成先把序列值周期延拓后, 再作相应的处理, 然后取主值序列后, 就是处理的结果。

DFT的定义、DFT与DFS、DTFT及 z 变换的关系

$$\left\{ \begin{array}{l} x(n) = \tilde{x}(n)R_N(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)W_N^{-nk} \quad 0 \leq n \leq N-1 \\ \tilde{x}(n) = x((n))_N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(n+mN) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}(k)W_N^{-nk} \end{array} \right.$$

$x(n)$ 是 $\tilde{x}(n)$ 的主值序列, $\tilde{x}(n)$ 是 $x(n)$ 的以 N 为周期的周期延拓序列。同样,

$$\left\{ \begin{array}{l} X(k) = \tilde{X}(k)R_N(k) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{nk} \quad 0 \leq k \leq N-1 \\ \tilde{X}(k) = X((k))_N = \sum_{m=-\infty}^{\infty} X(k+mN) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}(n)W_N^{nk} \end{array} \right.$$

DFT的定义、DFT与DFS、DTFT及 z 变换的关系



5. DFT和DTFT、 z 变换的关系----频域抽样

$$X(k) = X(z) \Big|_{z=e^{j2\pi k/N}} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

$$X(k) = X(e^{j\omega}) \Big|_{\omega=2\pi k/N} \quad k = 0, 1, \dots, N-1$$

DFT的定义、DFT与DFS、DTFT及 z 变换的关系

6. 离散傅里叶变换对 $x(n)$ 与 $X(k)$ 中各参量间的关系

$$T_0 = NT = N/f_s = 1/F_0, F_0 = f_s/N = 1/NT = 1/T_0$$

- (1) 时域相邻两抽样点的时间间距 等于抽样频率 的倒数。
- (2) 频域相邻两抽样点的频率间距 等于时域序列的时间长度
的倒数。
- (3) 频域相邻两抽样点的频率间距也等于
抽样频率 与抽样点数 N 之比值: $F_0 = f_s/N$

DFT的定义、DFT与DFS、DTFT及 z 变换的关系



例3.4: 设 $x(n)=R_5(n)$, 求

- (1) $X(e^{j\omega})$;
- (2) $N=5$ 的 $X(k)$;
- (3) $N=10$ 的 $X(k)$ 。

例3.5

时域、频域都抽样后， f_k 、 f_s 、 N 的关系

$$\Omega_k = 2\pi k/N = \Omega_k T = 2\pi f_k T = 2\pi f_k / f_s$$

第 k 个抽样点的频率为

$$f_k = k/NT = kf_s/N = kF_0$$

由于 NT 表示记录的时间长度，因而称（ $1/NT = F_0$ ）
为频率分辨率。

增加记录时间，就能减小 F_0 ，即提高频率分辨力。

DFT隐含的周期性

$$\tilde{X}(k) = X((k))_N$$

$$X(k + mN) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{(k+mN)n} = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)W_N^{kn} = X(k)$$

对离散傅里叶变换而言，
有限长序列都是作为周期序列的一个周期来表示的，
都隐含有周期性意义。

3.4 DFT的主要性质

DFT的主要性质

一、线性

$$DFT[x_1(n)] = X_1(k)$$

$$DFT[x_2(n)] = X_2(k)$$

$$DFT[ax_1(n) + bx_2(n)] = aX_1(k) + bX_2(k)$$

- ① **a , b** 为任意常数，包括复常数。
- ② **$x_1(n)$, $x_2(n)$** 必须同为 **N** 点序列，如果两序列长度不等，分别为点 **N_1** 与点 **N_2** ，则必须补零值，补到 **$N \geq \max[N_1, N_2]$** ，这是由隐含周期性决定的，即讨论相同周期的序列的线性才有意义。

DFT的主要性质

二、圆周移位性质

(1) 圆周移位序列

$$x_m(n) = x((n+m))_N R_N(n)$$

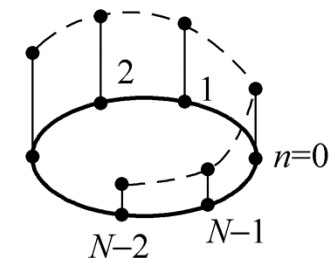
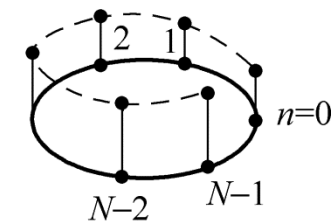
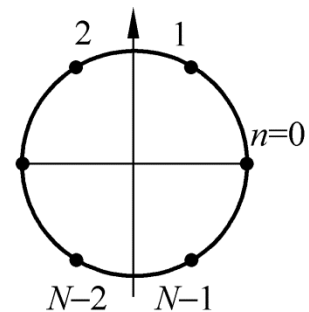
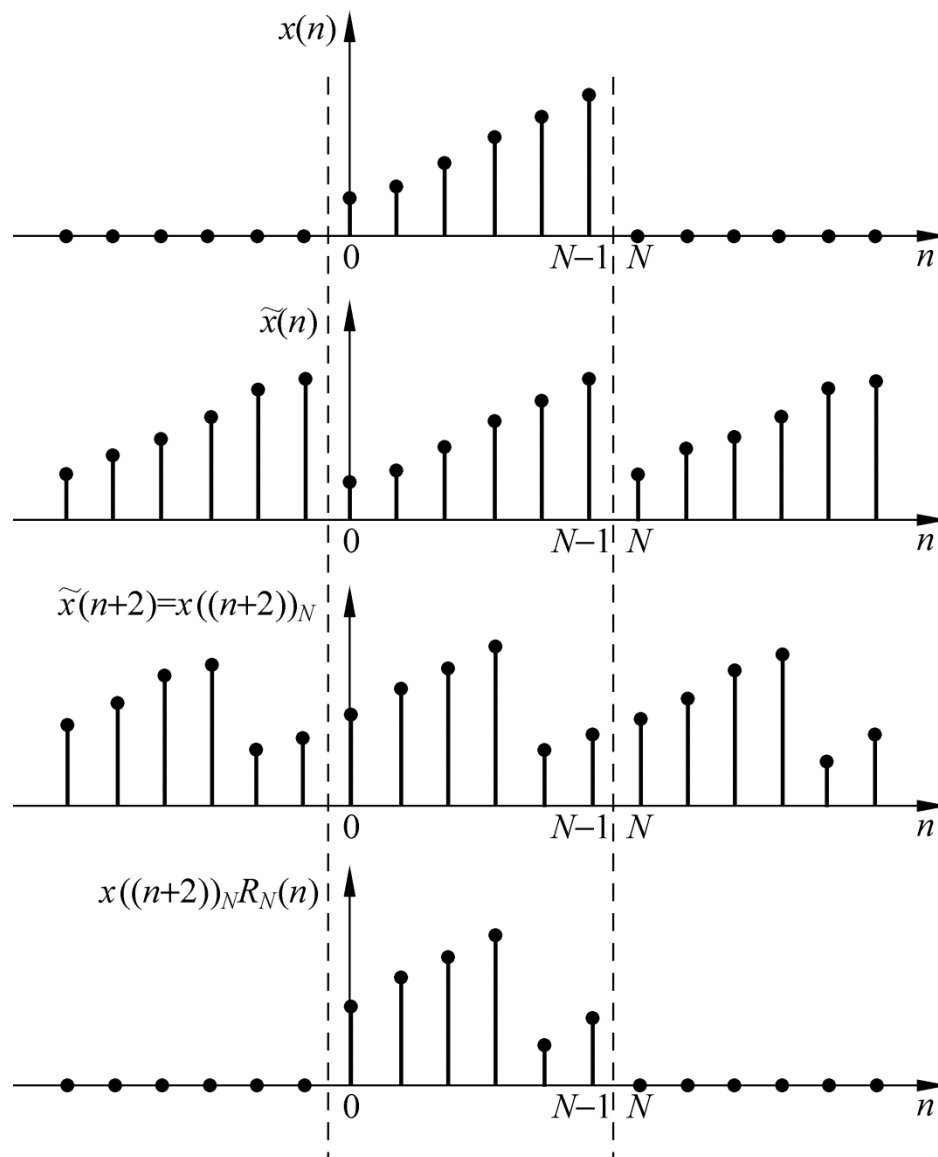
在作DFT运算时， N 点有限长序列的 m 点移位，
可以看成将 $x(n)$ 以 N 为周期，延拓成周期序列，

$$\tilde{x}(n) = x((n))_N$$

将 $x((n))_N$ 作 m 点线性移位后,再取主值区间中的序列,
即得到 $x(n)$ 的 m 点圆周移位序列 $x_m(n)$ 。

DFT的主要性质

序列的圆周移位:



$N=6$

DFT的主要性质

(2) 圆周移位性质

$$DFT[x(n)] = X(k)$$

$$DFT[x((n+m))_N R_N(n)] = W_N^{-mk} X(k)$$

$$IDFT[X(k)] = x(n)$$

$$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)] = W_N^{nl} x(n) = e^{-j\frac{2\pi}{N}nl} x(n)$$

调制特性——

离散时域的调制（相乘）

等效于离散频域的圆周移位

DFT的主要性质

$$\cos x = \frac{e^{jx} + e^{-jx}}{2}$$

$$\sin x = \frac{e^{jx} - e^{-jx}}{2j}$$

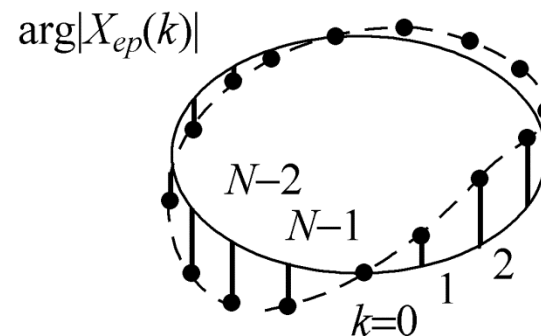
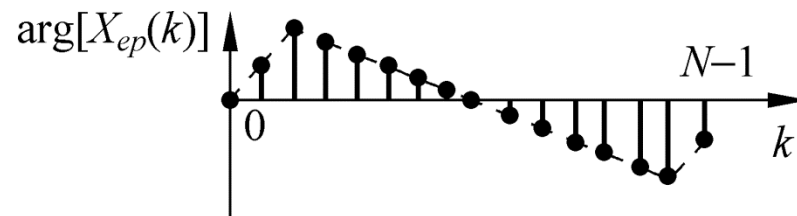
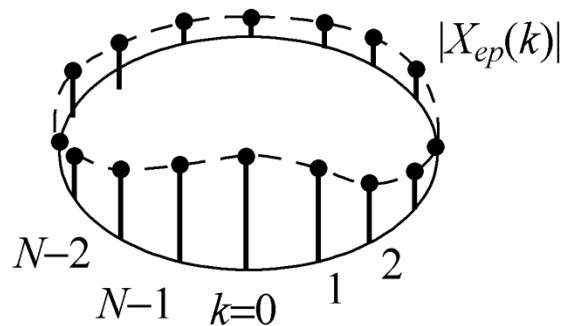
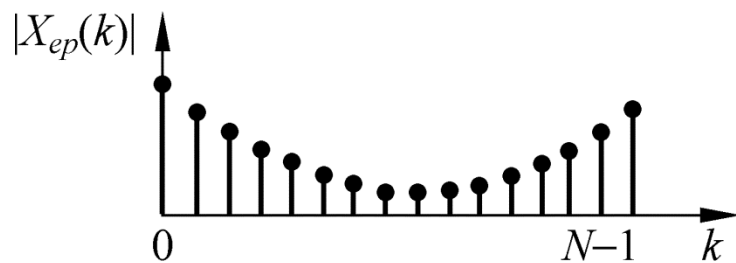
$$DFT[x(n) \cos(\frac{2\pi nl}{N})] = \frac{1}{2} [X((k-l))_N + X((k+l))_N] R_N(k)$$

$$DFT[x(n) \sin(\frac{2\pi nl}{N})] = \frac{1}{2j} [X((k-l))_N - X((k+l))_N] R_N(k)$$

DFT的主要性质

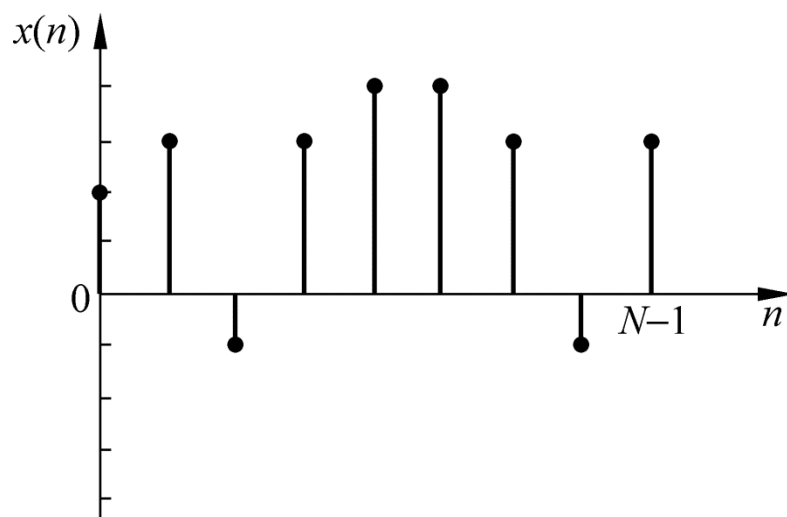
三、圆周共轭对称性质

1. 圆周对称中心

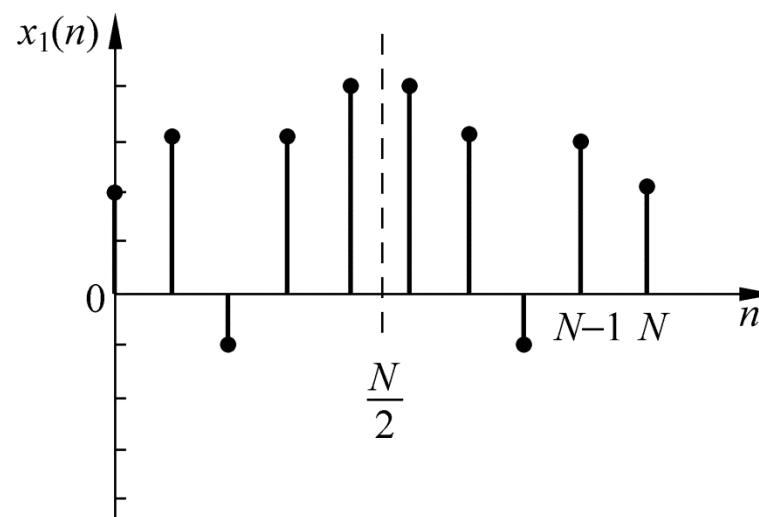


DFT的主要性质

考察序列是否是圆周偶（奇）对称序列的方法



(a) 原序列



(b) 在 $n=N$ 处补上与 $n=0$ 处相同的序列值后的序列

DFT的主要性质

2. 在DFT应用下，有限长的圆周共轭对称序列 及圆周共轭反对称序列

(1)

周期性共轭对称序列

$$\tilde{x}_e(n) = \tilde{x}_e^*(-n)$$

周期性共轭反对称序列

$$\tilde{x}_o(n) = -\tilde{x}_o^*(-n)$$

DFT的主要性质

任一周期序列都可以表示成周期性的共轭对称序列
及周期性共轭反对称序列之和

$$\tilde{x}(n) = \tilde{x}_e(n) + \tilde{x}_o(n)$$

$$\tilde{x}_e(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) + \tilde{x}^*(-n)]$$

$$\tilde{x}_o(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}^*(-n)]$$

DFT的主要性质

- (2) 由于有限长序列被看成是周期性序列的主值序列，故有限长序列的圆周共轭对称序列、圆周共轭反对称序列分别被看成为 $\tilde{x}_e(n)$ 及 $\tilde{x}_o(n)$ 的主值序列。

$$x_{ep}(n) = \tilde{x}_e(n)R_N(n)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n)$$

圆周共轭对称序列满足圆周共轭对称关系：

$$x_{ep}(n) = x_{ep}^*((-n))_N R_N(n) = x_{ep}^*(N-n) \quad , \quad n=0, 1, \dots, N-1$$

$$x_{op}(n) = -x_{op}^*((-n))_N R_N(n) = -x_{op}^*(N-n) \quad , \quad n=0, 1, \dots, N-1$$

DFT的主要性质

任一有限长序列 $x(n)$ 一定可以表示成圆周共轭对称分量
和圆周共轭反对称分量 之和

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

$$\begin{aligned} x_{ep}(n) &= \tilde{x}_e(n) R_N(n) = \frac{1}{2} [\tilde{x}(n) + \tilde{x}(-n)] R_N(n) \\ &= \frac{1}{2} [x((n))_N + x^*((-n))_N] R_N(n) \\ &= \frac{1}{2} [x(n) + x^*(N-n)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

DFT的主要性质

$$x(n) = x_{ep}(n) + x_{op}(n)$$

$$x_{op}(n) = \tilde{x}_o(n)R_N(n) = \frac{1}{2}[\tilde{x}(n) - \tilde{x}(-n)]R_N(n)$$

$$= \frac{1}{2}[x((n))_N - x^*((-n))_N]R_N(n)$$

$$= \frac{1}{2}[x(n) - x^*(N-n)], \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

DFT的主要性质

四、 圆周翻褶序列及其DFT

1. 圆周翻褶序列

有限长序列

$$\tilde{x}(-n)R_N(n) = x((-n))_N R_N(n) = x((N-n))_N = x(N-n)$$

$$x(N-n) \Big|_{n=0} = x(N) = x(0)$$

n	0	1	2	...	$N-2$	$N-1$
$x(n)$	$x(0)$	$x(1)$	$x(2)$...	$x(N-2)$	$x(N-1)$
$x((-n))_N R_N(n)$ 或 $x(N-n)$	$x(0)$	$x(N-1)$	$x(N-2)$...	$x(2)$	$x(1)$

DFT的主要性质

2. 圆周翻褶序列的DFT

若

$$DFT[x(n)] = X(k)$$

则

$$DFT[x((-n))_N R_N(n)] = X((-k))_N R_N(k)$$

$$DFT[x(N-n)] = X(N-k)$$

DFT的主要性质

五、对偶性

$$DFT[x(n)] = X(k)$$

$$DFT[X(n)] = Nx((-k))_N R_N(k) = Nx((N-k))_N R_N(k) = Nx(N-k)$$

DFT的主要性质

六、DFT运算中的圆周共轭对称性

设 $x(n)$ 为 N 点有限长序列

$$DFT[x(n)] = DFT\{\operatorname{Re}[x(n)] + j \operatorname{Im}[x(n)]\} = X(k)$$

1. 共轭序列的DFT

$$DFT[x^*(n)] = X^*((-k))_N R_N(k) = X^*((N-k))_N R_N(k) = X^*(N-k)$$

2. 圆周共轭翻褶序列的DFT

$$DFT[x^*((-n))_N R_N(n)] = DFT[x^*(N-n)] = X^*(k)$$

DFT的主要性质

3.

$$x(n) = \text{Re}[x(n)] + j \text{Im}[x(n)]$$

$$\begin{array}{ccc} \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \end{array}$$

$$X(k) = X_{ep}(k) + X_{op}(k)$$

$$X_{ep}(k) = DFT[\text{Re}[x(n)]]$$

$$X_{op}(k) = DFT[j \text{Im}[x(n)]]$$

即序列的实部的**DFT**等于频域的圆周共轭对称分量，
虚部乘**j**的**DFT**等于频域 的圆周共轭反对称分量。

DFT的主要性质

4. 如果将序列 分成圆周共轭对称分量与圆周共轭反对称分量，
将相应的**DFT**分成实部和虚部， 则

$$\begin{array}{ccc}
 x(n) & = x_{ep}(n) & + x_{op}(n) \\
 \updownarrow & \quad \quad \updownarrow & \quad \quad \updownarrow \\
 X(k) & = \text{Re}[X(k)] + j \text{Im}[X(k)]
 \end{array}$$

$$\text{Re}[X(k)] = DFT[x_{ep}(n)]$$

$$j \text{Im}[X(k)] = DFT[x_{op}(n)]$$

序列的圆周共轭对称分量的**DFT**等于频域 的实部，

序列的圆周共轭反对称分量的**DFT**等于频域 的虚部乘j。

DFT的主要性质

5. 序列 是实序列

$$X(k) = X^*(N-k)$$

$$|X(k)| = |X(N-k)|$$

$$\arg[X(k)] = -\arg[X(N-k)]$$

$$\operatorname{Re}[X(k)] = \operatorname{Re}[X(N-k)]$$

$$\operatorname{Im}[X(k)] = -\operatorname{Im}[X(N-k)]$$

对称中心为折叠频率

DFT的主要性质

6. 利用**DFT**的共轭对称性，可以减少实序列的**DFT**的计算量，只要知道一半数目的 $X(k)$ 就可以了。

7. 圆周共轭反对称关系

$$X(k) = -X^*(N - k)$$

$$\text{Re}[X(k)] = -\text{Re}[X(N - k)]$$

$$\text{Im}[X(k)] = \text{Im}[X(N - k)]$$

8. 利用一个复序列的 **N 点DFT**，可以求得两个实序列的 **N 点DFT**，或

利用一个复序列的**DFT**，求得一个 **$2N$ 点实序列的DFT**。

DFT的主要性质

例3.6:

用共轭对称性，可以用一次**N**点**DFT**运算来计算两个**N**点实数序列的**DFT**，
因而可以减少计算量。

DFT的主要性质

七、DFT形式下的帕塞瓦定理

$$DFT[x(n)] = X(k), DFT[y(n)] = Y(k)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} x(n)y^*(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(k)Y^*(k)$$

$$x(n) = y(n)$$

$$\sum_{n=0}^{N-1} |x(n)|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

对于实序列：

$$\sum_{n=0}^{N-1} x^2(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} |X(k)|^2$$

3.5 频域抽样理论

频域抽样与频域抽样定理

频域抽样，时域会产生周期延拓，延拓周期 N 为频域一个周期的抽样点数。

如果时域长为 M ，当 $N \geq M$ 时，时域周期延拓后，主值区间的序列等于原序列，无失真。

当 $N < M$ 时，时域会有混叠失真，这时，

只在 $M - N \leq n \leq N - 1$ 范围内，没有混叠失真。

频域抽样与频域抽样定理

例3.10

设 $x(n)$ 为 $M=12$ 点序列

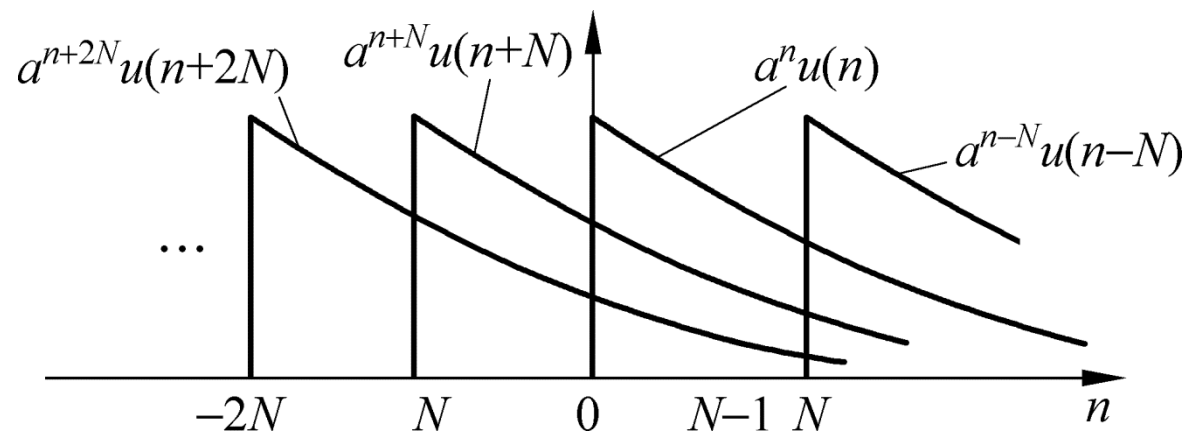
$x(n)$ [2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24] ,

若对 $x(n)$ 的傅里叶变换 $\text{DTFT}[x(n)]$ 在 $0 \leq \omega < 2\pi$ 的一个周期内作 $N=8$ 点的等间隔抽样, 得到 $X_8(k)$,

试研究 $\text{IDFT}[X_8(k)] = x_8(n)$ 和原序列 $x(n)$ 的关系。

频域抽样与频域抽样定理

例3.11



例3.12

频域的插值重构

在满足频域抽样定理的情况下，可由 $\tilde{X}(k)$ 重构 $x(n)$ 。

$$x(n) = \text{IDFT} [\tilde{X}(k) R_N(k)]$$

频域的插值重构：由频域抽样 $X(k)$ 经过插值来重构 $X(z)$ 或 $X(e^{j\omega})$ 。

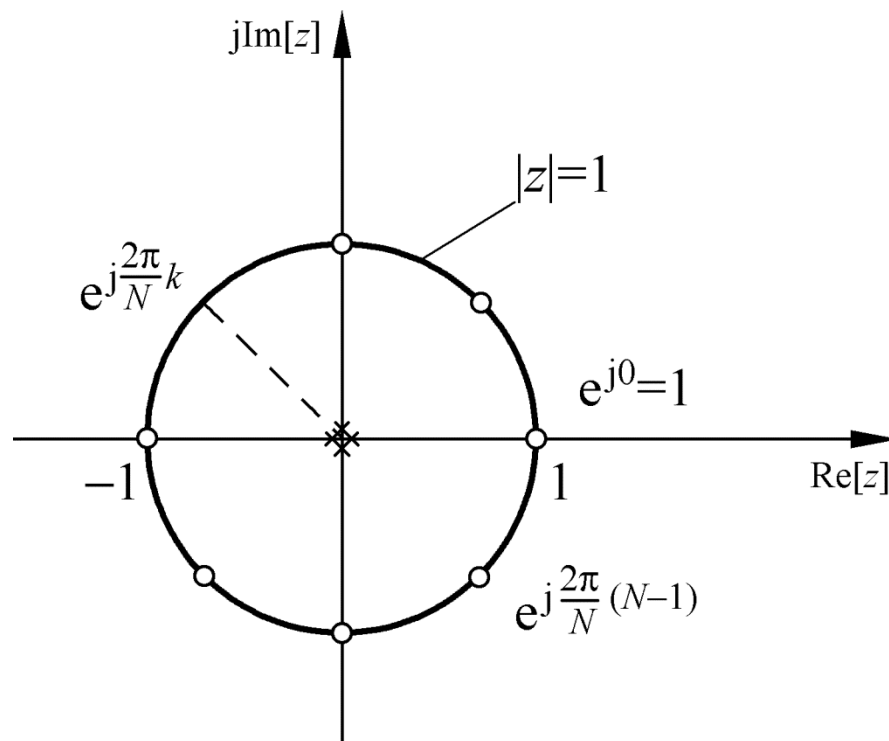
频域插值公式是FIR数字滤波器频率抽样结构和频率抽样设计方法的理论依据。

频域的插值重构

1. 由 $X(k)$ 插值重构 $X(z)$

$$X(z) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi_k(z) \quad \phi_k(z) = \frac{1}{N} \frac{1 - z^{-N}}{1 - W_N^{-k} z^{-1}} = \frac{z^N - 1}{N z^{N-1} (z - W_N^{-k})}$$

插值函数的零极点:



频域的插值重构

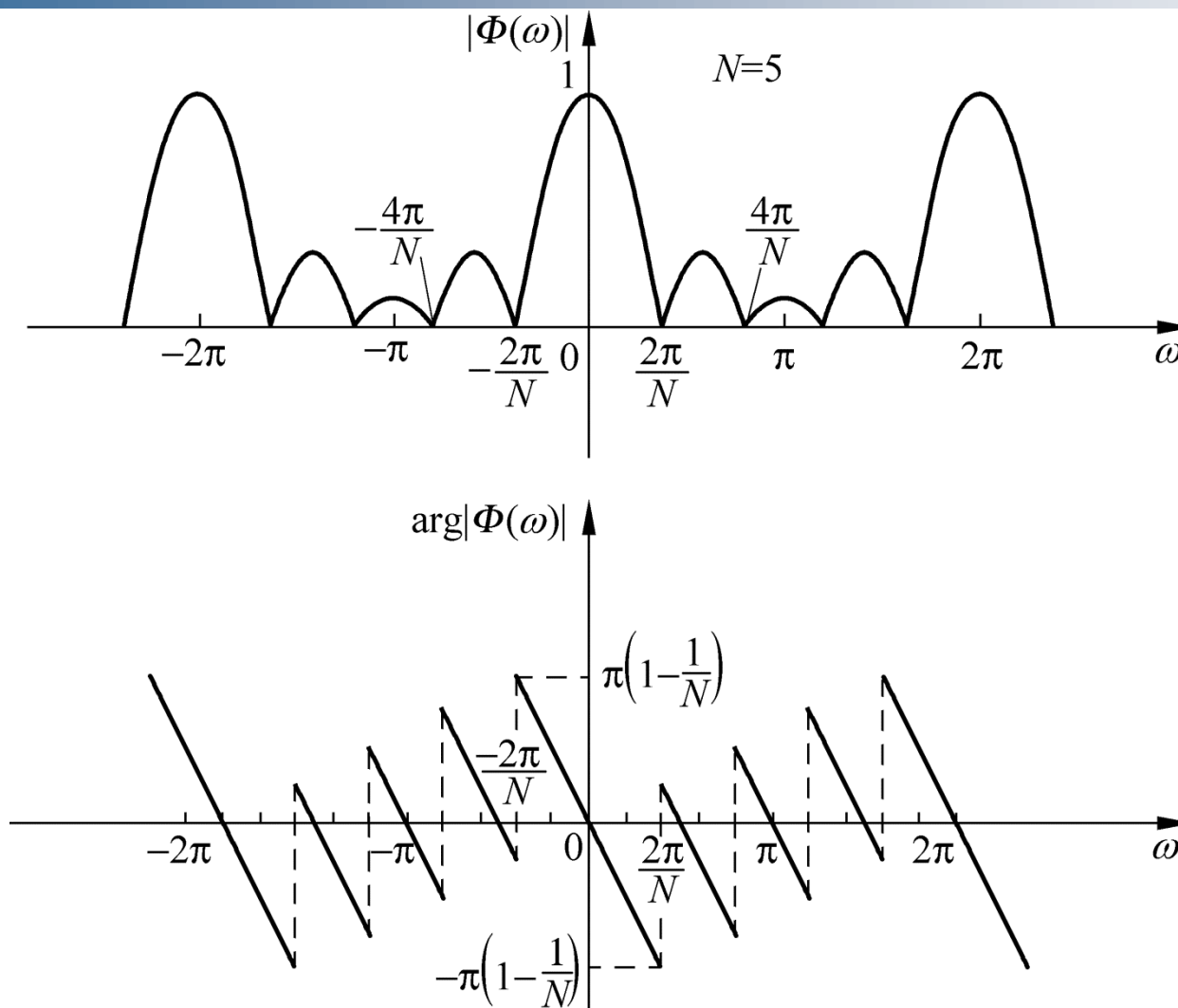
2. 由 $X(k)$ 插值重构 $X(e^{j\omega})$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi_k(e^{j\omega})$$

$$\phi_k(e^{j\omega}) = \phi(\omega - 2\pi k / N)$$

$$\phi(\omega) = \frac{1}{N} \frac{\sin(\omega N / 2)}{\sin(\omega / 2)} e^{-j(N-1)\omega/2}$$

频域的插值重构

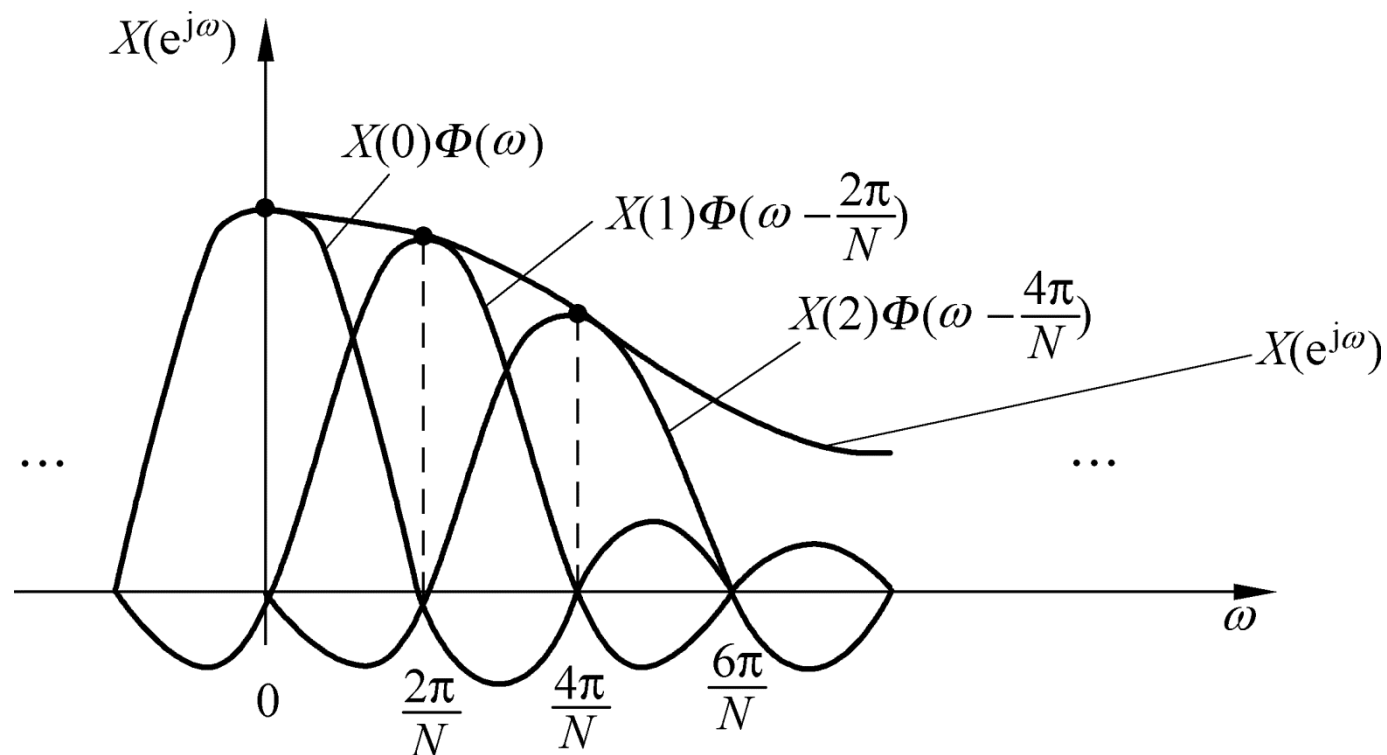


插值函数的幅频特性和相频特性

频域的插值重构

$$\phi(\omega) = \frac{1}{N} R_N(e^{j\omega})$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{k=0}^{N-1} X(k) \phi(\omega - 2\pi k / N)$$



3.6 DFT的应用

利用DFT计算线性卷积

一、利用DFT计算线性卷积

用DFT方法（采用FFT算法）来计算线性卷积和

输入序列 $x(n)$, $0 \leq n \leq N_1 - 1$

系统单位抽样响应 $h(n)$, $0 \leq n \leq N_2 - 1$

用计算圆周卷积和的办法求系统的输出，即求

$$y_1(n) = x(n) * h(n)$$

利用DFT计算线性卷积

① 令 $L = 2^m \geq N_1 + N_2 - 1$

② 取

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

$$h(n) = \begin{cases} h(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

利用**DFT**计算
线性卷积的过程

③ $X(k) = \text{DFT}[x(n)]$, L 点; $H(k) = \text{DFT}[h(n)]$, L 点

④ $Y(k) = X(k)H(k)$

⑤ $y(n) = \text{IDFT}[Y(k)]$, L 点

⑥ $y_l(n) = y(n)$, $0 \leq n \leq N_1 + N_2 - 1$

利用DFT计算线性相关

二、利用DFT计算线性相关

圆周相关定理

$$\text{若 } R_{xy}(k) = X(k) Y(N-k) = X(k) Y^*(k)$$

则圆周相关序列

$$\bar{r}_{xy}(m) = \text{IDFT} [R_{xy}(k)] = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) y((n-m))_N R_N(m)$$

利用DFT计算线性相关

线性相关求解步骤:

① 给定 $x(n)$, N_1 点; $y(n)$, N_2 点

② 补零到 $L \geq N_1 + N_2 - 1$ 点:

$$x(n) = \begin{cases} x(n), & 0 \leq n \leq N_1 - 1 \\ 0, & N_1 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

$$y(n) = \begin{cases} y(n), & 0 \leq n \leq N_2 - 1 \\ 0, & N_2 \leq n \leq L - 1 \end{cases}$$

③ 求 $X(k) = DFT[x(n)]$, L 点
 $Y(k) = DFT[y(n)]$, L 点

利用DFT计算线性相关

④ $R_{xy}(k) = X(k)Y^*(k)$

⑤ $\bar{r}_{xy}(m) = IDFT[R_{xy}(k)], L \text{ 点}$

⑥ 确定 $r_{xy}(0)$ 的定位，由于圆周相关定理求出的 $\bar{r}_{xy}(m)$ 的 m 全部是正值，而线性相关在 m 为正数及 m 为负数时皆有值，因而有 $m=0$ 的定位问题。

利用DFT计算线性相关

例3.13

设两个实序列为

$$x(n)=\{2, 1, 3, 2, 1, 5, 1\},$$

$$y(n)=\{2, 1, 3, 4\},$$

试求互相关序列 $r_{xy}(m)$ 。

利用DFT对模拟信号的傅里叶变换（级数）对的逼近

1. 用DFT对连续时间信号非周期信号的傅里叶变换对的逼近

连续时间非周期的绝对可积信号 的傅里叶变换对:

$$X(j\Omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j\Omega t} dt$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} X(j\Omega) e^{j\Omega t} d\Omega$$

利用DFT对模拟信号的傅里叶变换（级数）对的逼近

- (1) 将 $x(t)$ 在 t 轴上等间隔（宽度为 T ）分段，每一段用一个矩形脉冲代替，脉冲的幅度为其起始点的抽样值，

$$x(t) \big|_{t=nT} = x(nT) = x(n)$$

然后把所有矩形脉冲的面积相加。

$$X(j\Omega) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT) e^{-j\Omega nT} \cdot T$$

- (2) 将序列 $x(n)=x(nT)$ 截断成从 $t=0$ 开始长度为 T_0 的有限长序列，包含有 N 个抽样（即 $n=0 \sim (N-1)$ ），时域取 N 个样点

$$X(j\Omega) \approx T \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-j\Omega nT}$$

利用DFT对模拟信号的傅里叶变换（级数）对的逼近

(3) 频域离散化（抽样）：

$$d\Omega = (k+1)\Omega_0 - k\Omega_0$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\Omega \rightarrow \sum_{k=0}^{N-1} \Omega_0$$

$$T_0 = \frac{1}{F_0} = \frac{N}{f_s} = NT$$

$$\Omega_0 = 2\pi F_0$$

$$\Omega_0 T = \Omega_0 \frac{1}{f_s} = \Omega_0 \cdot \frac{2\pi}{\Omega_s} = 2\pi \frac{\Omega_0}{\Omega_s} = 2\pi \frac{F_0}{f_s} = 2\pi \frac{T}{T_0} = \frac{2\pi}{N}$$

用DFS对连续时间周期信号的傅里叶级数的逼近



用DFS方法将周期信号时域频域都离散化后，

对模拟周期信号进行频谱分析。

(1) 周期信号要变成周期序列是有条件的，即周期信号的周期 T_0 要等于抽样间隔 T ($T=1/f_s$)的整数倍，或 T 与 T_0 为互素的整数，即 $NT=MT_0$ ， $f_s > 2f_{max}$ 。

(2) 只能按所形成的离散周期序列的一个周期进行截断，以此作为DFS的一个周期，以防止频谱的泄漏。

用DFS对连续时间周期信号的傅里叶级数的逼近

连续时间周期信号 的傅里叶级数对:

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t}$$

(1) 先对时域抽样

$$X(jk\Omega_0) = \frac{1}{T_0} \int_0^{T_0} x(t) e^{-jk\Omega_0 t} dt \quad \longrightarrow$$

$$X(jk\Omega_0) \approx \frac{T}{T_0} \sum_{n=0}^{N-1} x(nT) e^{-jk\Omega_0 nT} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-j\frac{2\pi}{N} nk}$$

用DFS对连续时间周期信号的傅里叶级数的逼近

(2) 将频域离散序列加以截断，使它成为有限长序列

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 t} \longrightarrow$$

$$\begin{aligned} x(nT) &\approx \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{jk\Omega_0 nT} = \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \\ &= N \cdot \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X(jk\Omega_0) e^{j\frac{2\pi}{N}nk} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} X(jk\Omega_0) \approx \frac{1}{N} \cdot DFS[x(n)] \\ x(nT) = x(t)|_{t=nT} \approx N \cdot IDFS[X(jk\Omega_0)] \end{cases}$$

用DFS对连续时间周期信号的傅里叶级数的逼近



模拟信号用DFT作频谱分析的处理过程中，
时域抽样、时域截断、频域抽样（DFT）都会产生失真。

(1)时域抽样。时域抽样，频域周期延拓。

需满足抽样定理采就不会产生频谱混叠失真。

(2)时域截断。即在时域序列上乘一个窗口函数 $d(n)$ ，

得到 $x(n)d(n)$ ， $d(n)$ 是有限长的即 $d(n)$ ， $0 \leq n \leq N-1$ 。

若为矩形窗，则在 $0 \leq n \leq N-1$ 范围内 $x(n)d(n)$ 与 $x(n)$ 数值相同；

否则，若用其他形状窗，在此范围内数据也产生变化。

时域信号的截断会对谱分析造成影响。

用DFS对连续时间周期信号的傅里叶级数的逼近



(3) 频域抽样。由于频域仍是连续值，故必须加以离散化，在离散时域产生周期延拓序列。要求一个周期内频域抽样点数 M 满足 $M \geq N$ 。

对模拟信号作谱分析，主要有两个技术指标：

第一个指标：要分析的最高频率，它决定了抽样频率的选取。

第二个指标：所需分析的信号要求的频率分辨率，

它是能分辨的两个频率的最小间距。

决定了信号应截取的时间长度。

用DFT对模拟信号进行谱分析

两个技术指标:

- (1) 最高频率 f_h —— 决定所选的抽样频率 f_s
- (2) 频率分辨率 F_0 —— 决定信号应取的时间长度 T_0
以及随之而定的抽样点数 N

之间
关系

三个过程:

时域抽样
时域截断
频域抽样

产生失真

哪些?

用DFT对模拟信号进行谱分析

1. 抽样频率的选择

$$f_s > 2f_k$$

考虑到将信号截断成有限长序列会造成频谱泄漏使原来的频谱展宽且产生谱间的串扰，故将 f_s 增加为

$$f_s = (3 \sim 6) f_h$$

用DFT对模拟信号进行谱分析

1. 抽样频率的选择

$$f_s > 2f_k$$

考虑到将信号截断成有限长序列会造成频谱泄漏使原来的频谱展宽且产生谱间的串扰，故将 f_s 增加为

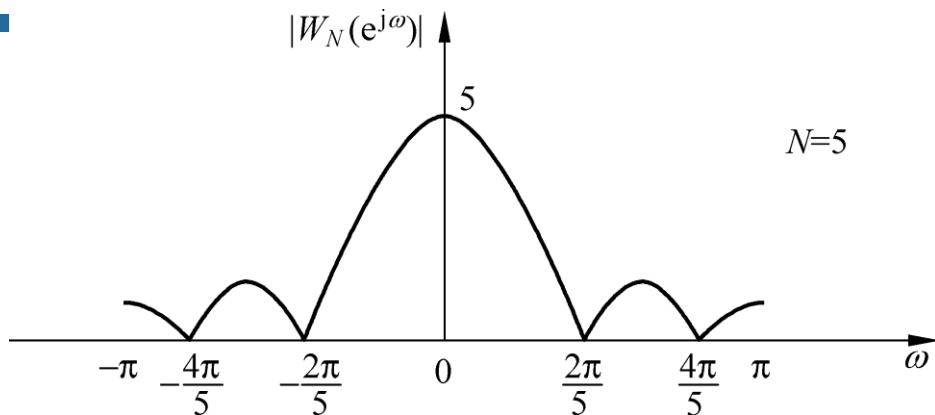
$$f_s = (3 \sim 6) f_h$$

用DFT对模拟信号进行谱分析

2. 频率分辨率

长度为 N 的信号序列所对应的连续谱中能分辨的两个频率分量峰值的最小频率间距 F_0 , F_0 越小, 则频率分辨率越高。

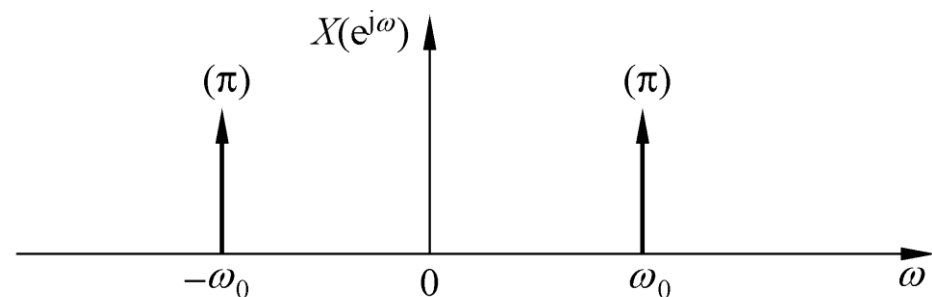
用DFT对模拟信号进行谱分析



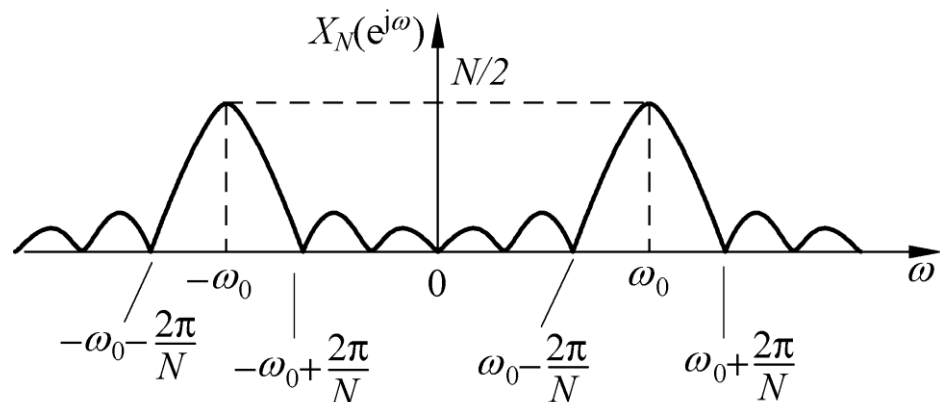
矩形窗（宽 N 点）截断

频率分辨率:

$$\Delta\omega = 2\pi / N$$



(a) 余弦序列 $\cos(\omega_0 n)$ 的频谱 $x(e^{j\omega})$



(b) 余弦序列加窗 $R_N(n)$ 后的频谱 $X_N(e^{j\omega})$

用DFT对模拟信号谱分析的几个问题

1. 频谱的混叠失真

时域的突变会造成频域的拖尾现象，会有轻微的混叠产生；
信号中的高频噪声干扰，也可能造成频域混叠；
再次，频域泄漏也会造成频谱的混叠失真。

2. 频谱泄漏

时域截断为有限长序列时的截断效应，
由信号加窗截断后造成的后果。

用DFT对模拟信号谱分析的几个问题

① 首先是产生了频谱泄漏，窗谱主瓣使原来的谱线展宽了。

截断的时域序列长度越长，即 N 越大，则 $4\pi/N$ 越小，

展宽得越窄，泄漏越小。这种展宽就称为频谱泄漏。

泄漏会使频率分辨率降低，也就是说，两信号的频率

离得很近时，由于频谱的泄漏，会使得无法分辨出

这两信号。

用DFT对模拟信号谱分析的几个问题

② 其次是截断后产生谱间串扰。

由于矩形窗存在着很多相对于主瓣幅度不是太小的旁瓣，因而在 $X_M(e^{j\omega})$ 中也形成了很多旁瓣，这些旁瓣就起到谱间串扰作用，它有可能使得原信号中的两个频率分量，强信号的旁瓣掩盖弱信号的主瓣，降低了频率分辨率。

减轻截断效应的办法：

- 采用缓变窗（例如海明窗）截断，可减小旁瓣幅度，从而减小谱间串扰；
- 使截断长度更长，使窗谱主瓣更窄，从而减小泄漏。

用DFT对模拟信号谱分析的几个问题

3. 栅栏效应

一般非周期模拟信号的频谱是频率的连续函数，
而用DFT来分析信号频谱时，DFT的计算的最小间距，
即看到的频谱间隔为 f_s / N ，

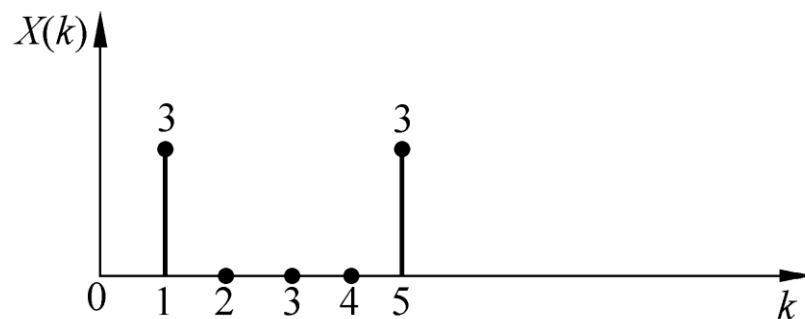
——连续频谱的等间隔的 N 点抽样值，
而这 N 点抽样值的任意相邻两点之间的频率点上的频谱值是不知道的，把这种现象称为栅栏效应。

用DFT对模拟信号谱分析的几个问题

4. 信号**量化效应**以及**FFT**运算过程的系数及运算的有限字长效应等会造成频谱的失真。

用DFT对模拟信号谱分析的几个问题

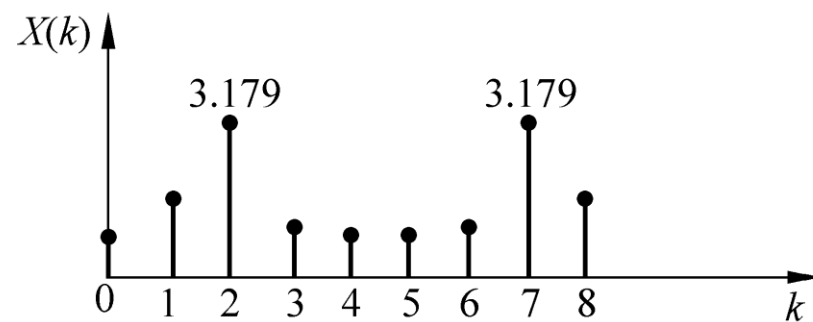
例题3.14



(a) $T_0=6T$ ($N=6$)

$$k=1, f_1=1\text{kHz}$$

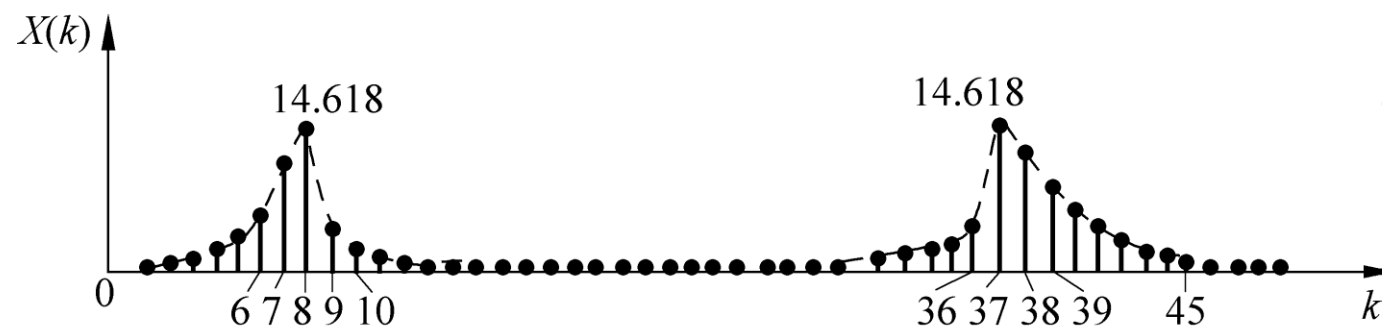
$$k=5, f_5=5\text{kHz}$$



(b) $T_0=9T$ ($N=9$)

$$k=1, f_1=0.667\text{kHz}$$

$$k=2, f_2=1.333\text{kHz}$$



(c) $T_0=45T$ ($N=45$)

$$k=7, f_7=0.933\text{kHz}$$

$$k=8, f_8=1.067\text{kHz}$$

$$k=37, f_{37}=4.933\text{kHz}$$

$$k=38, f_{38}=5.066\text{kHz}$$