中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

数字信号处理——Z变化和离散时间傅里叶变换

本章内容

序列的z变换

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

一、z变换定义

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

二、z变换收敛域

对任意给定序列$x(n)$，能使$X(z)$收敛，

即$|X(z)|<\infty$的所有z值的集合。

序列的z变换

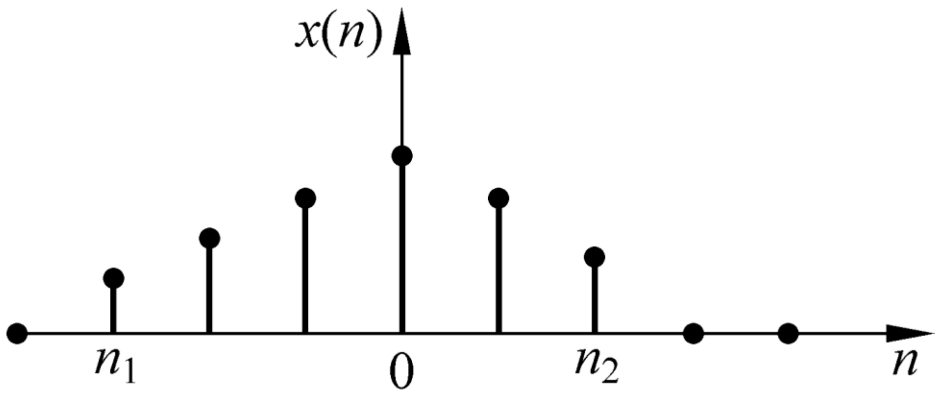
中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

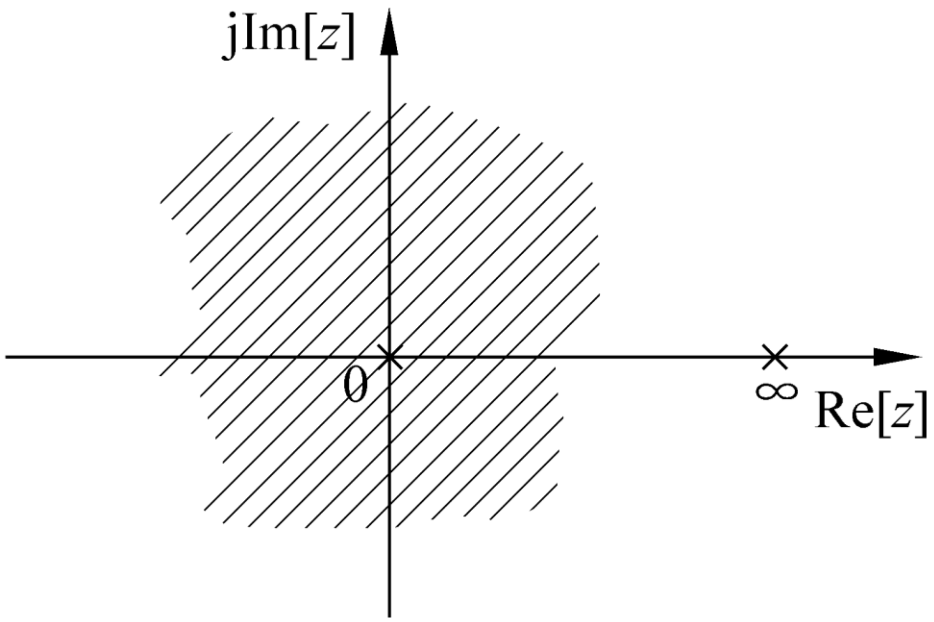
1. 有限长序列

$x(n)$ 只在$n_1 \le n \le n_2$ 有值。

$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{n_2} x(n)z^{-n}, \qquad 0<|z|<\infty$$

有限长序列及其收敛域：





序列的z变换

2. 右边序列

在$n \geq n_1$时，序列 有值。在$n < n_1$时，序列$x(n)=0$ 。

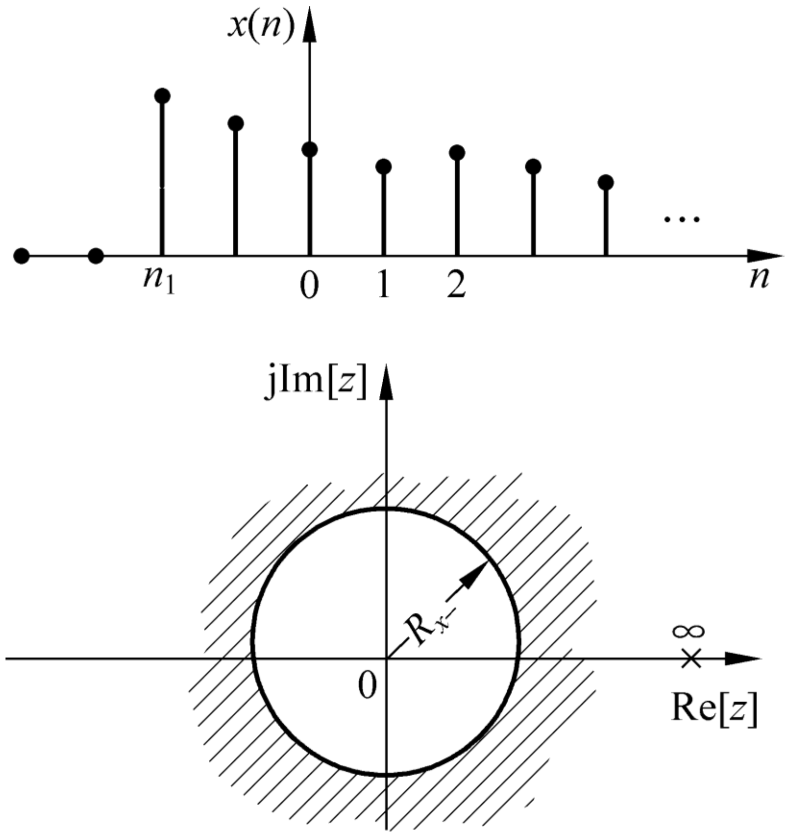
$$X(z)=\sum_{n=n_1}^{\infty} x(n) z^{-n}, \qquad R_{x-} < |z| < \infty$$

对于因果序列，在$n \geq 0$时有值，在$n < 0$时$x(n)=0$。

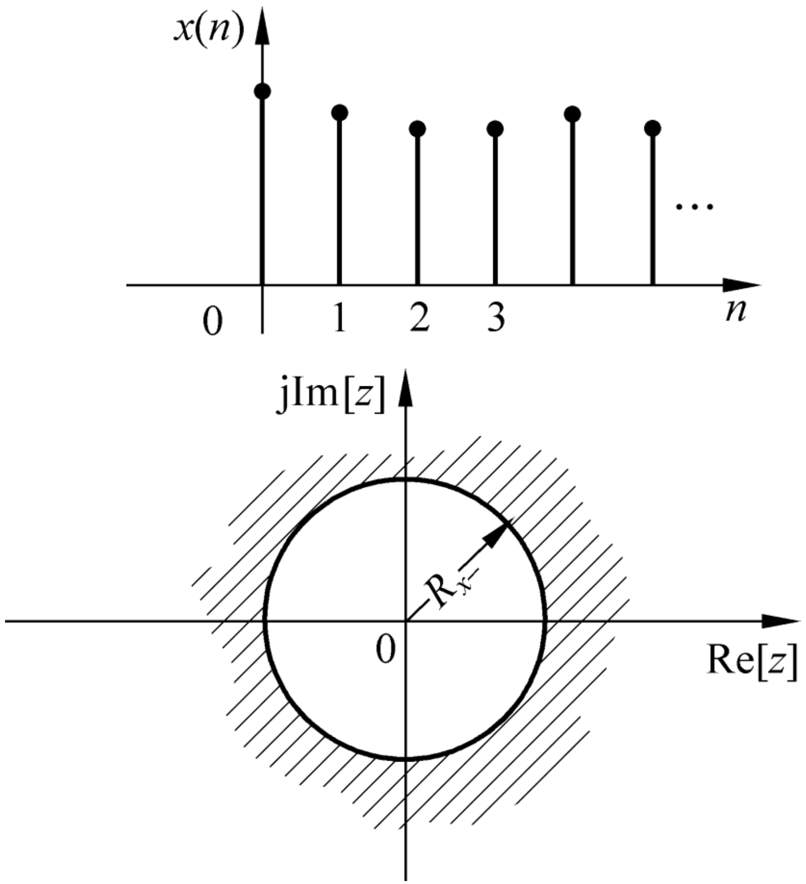
收敛域包括 ∞是因果序列的重要特性。

序列的z变换

右边序列及其收敛域：



因果序列及其收敛域：



序列的z变换

3. 左边序列

在$n \le n_2$时，序列 有值。在 $n > n_1$时，序列$x(n)=0$ 。

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{n_2} x(n) z^{-n} \qquad 0<|z|<R_{x+}$$

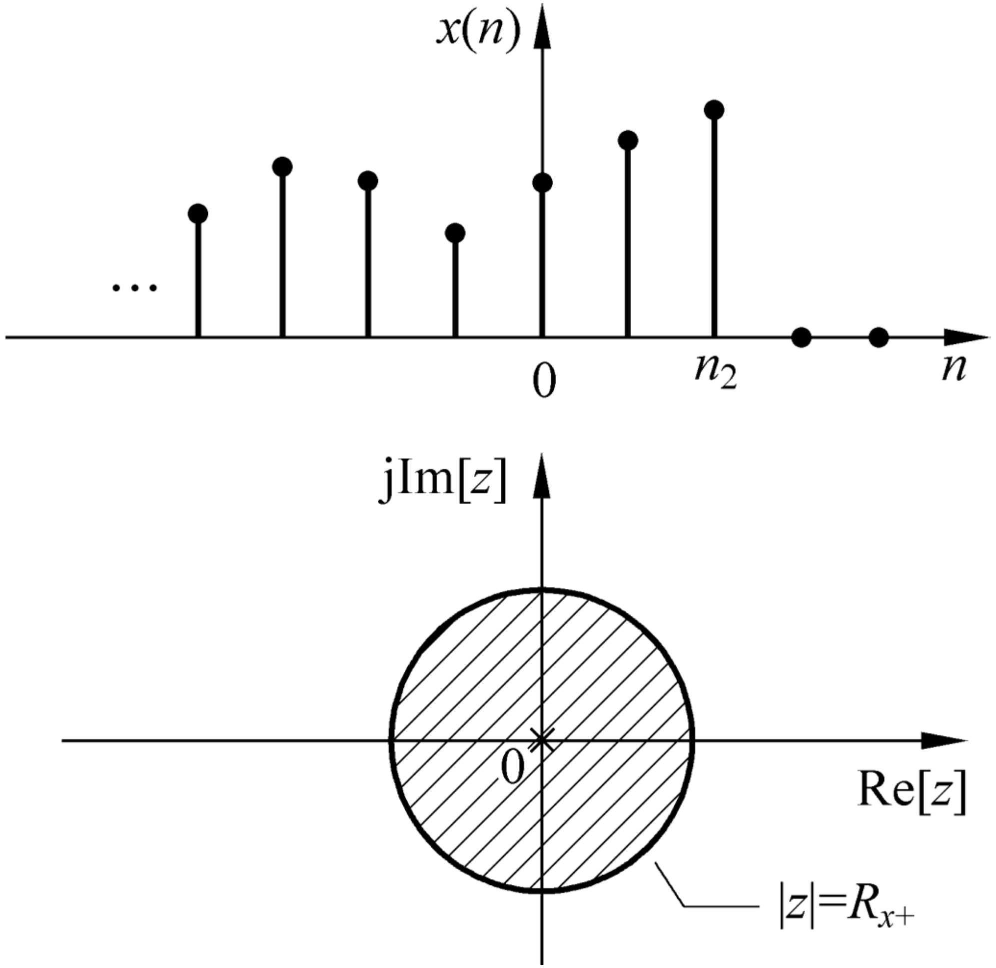
对于反因果序列，在$n\le 0$时有值，在$n>0$时$x(n)=0$。

?

收敛域包括 坐标原点是反因果序列的重要特性。

序列的z变换

左边序列及其收敛域：



序列的z变换

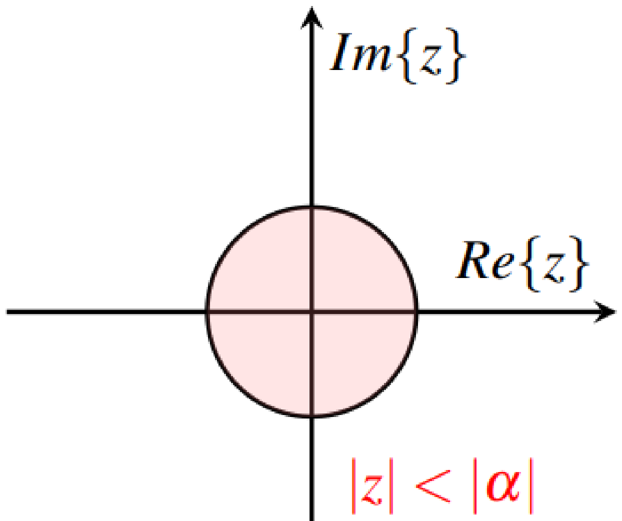
左边序列（非因果）$y[n]=-\alpha^n\mu[-n-1]$ 的 Z 变换：

$$Y(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}-\alpha^n\mu[-n-1]z^{-n}=-\sum_{n=-\infty}^{-1}\alpha^n z^{-n}=-\sum_{m=1}^{\infty}\alpha^{-m}z^m$$

$$=-\frac{\alpha^{-1}z}{1-\alpha^{-1}z}=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}},\quad |\alpha^{-1}z|<1$$

对应的收敛域 ROC 为：$|z|<|\alpha|$

ROC of $Y(z)$



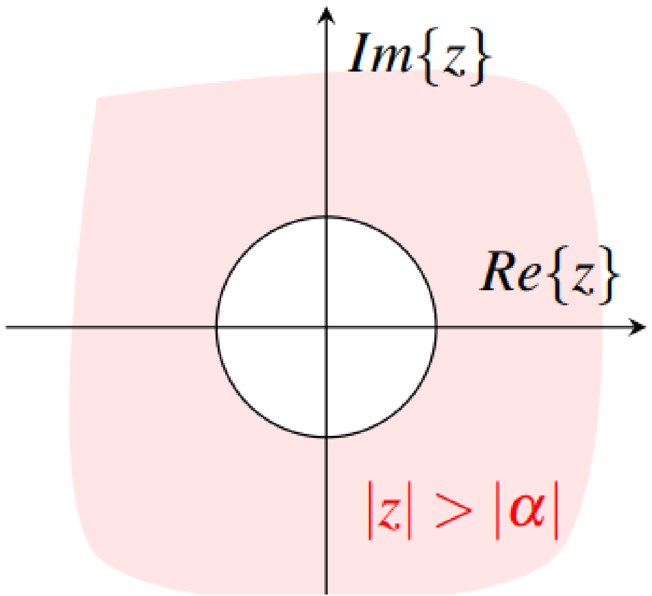
序列的z变换

两个不同的序列，其 Z 变换的形式完全一样:

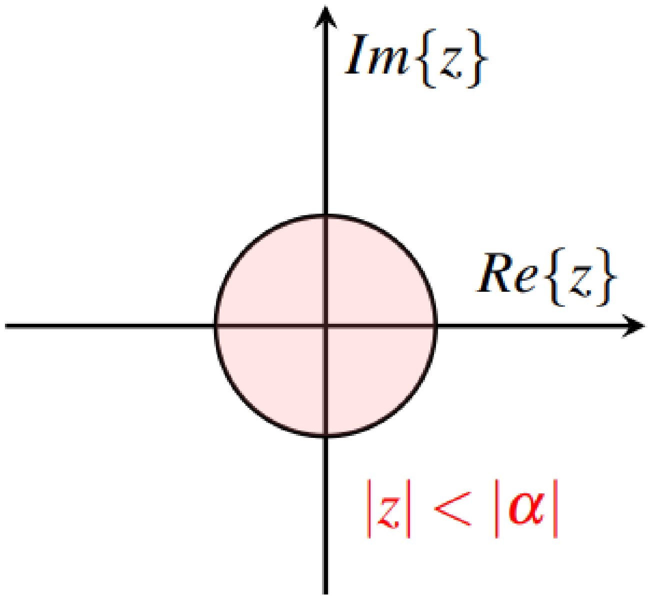
$$x[n] = \alpha^n \mu[n] \longleftrightarrow X(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}},$$

$$y[n] = -\alpha^n \mu[-n-1] \longleftrightarrow Y(z) = \frac{1}{1-\alpha z^{-1}}$$

ROC of $X(z)$



ROC of $Y(z)$



序列的z变换

4. 双边序列

*n*为任意值时（正、负、零），*x*(*n*)皆有值。

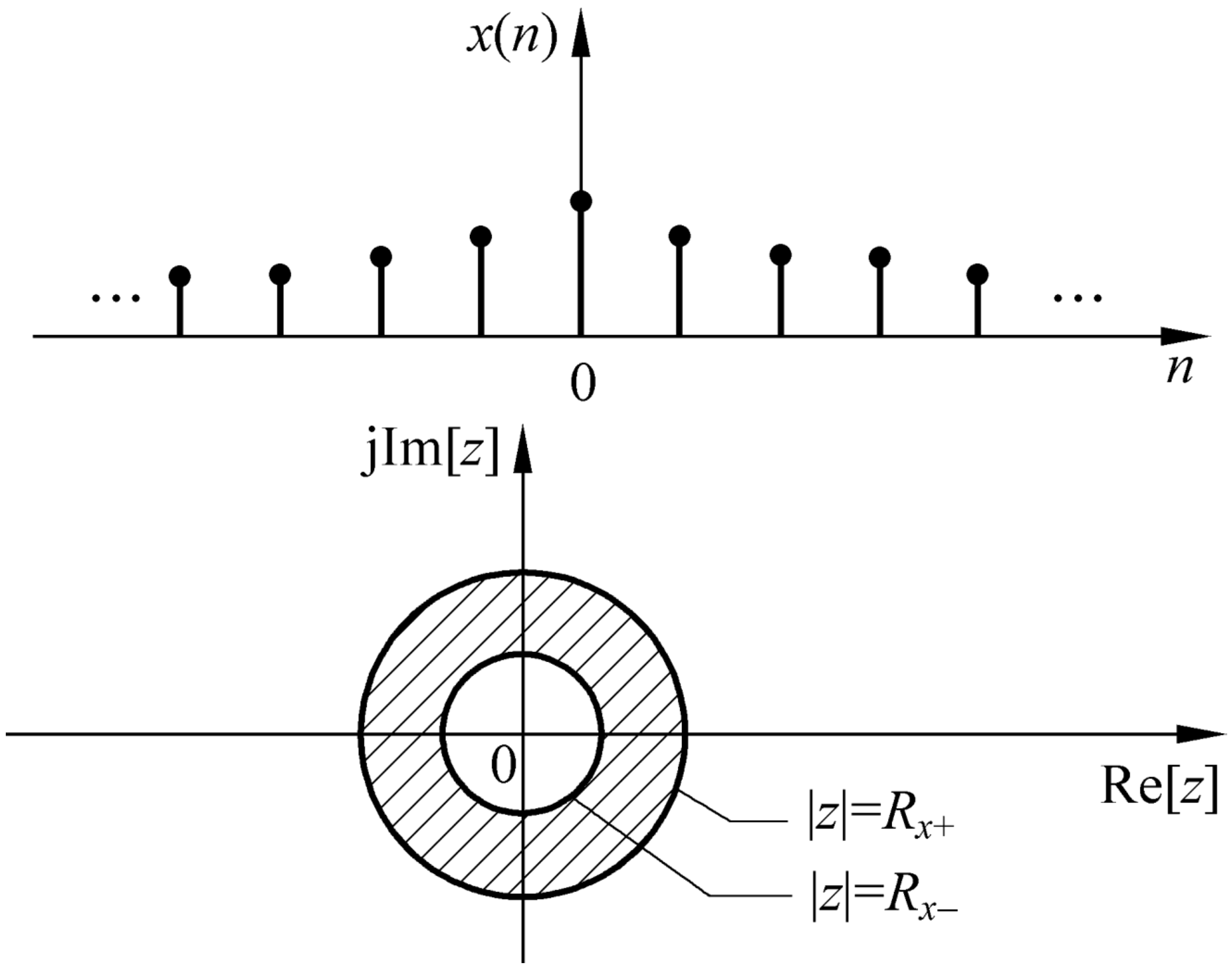
其收敛域为：

$$X(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n} \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

收敛域是环状区域

序列的z变换

双边序列及其收敛域：



序列的z变换

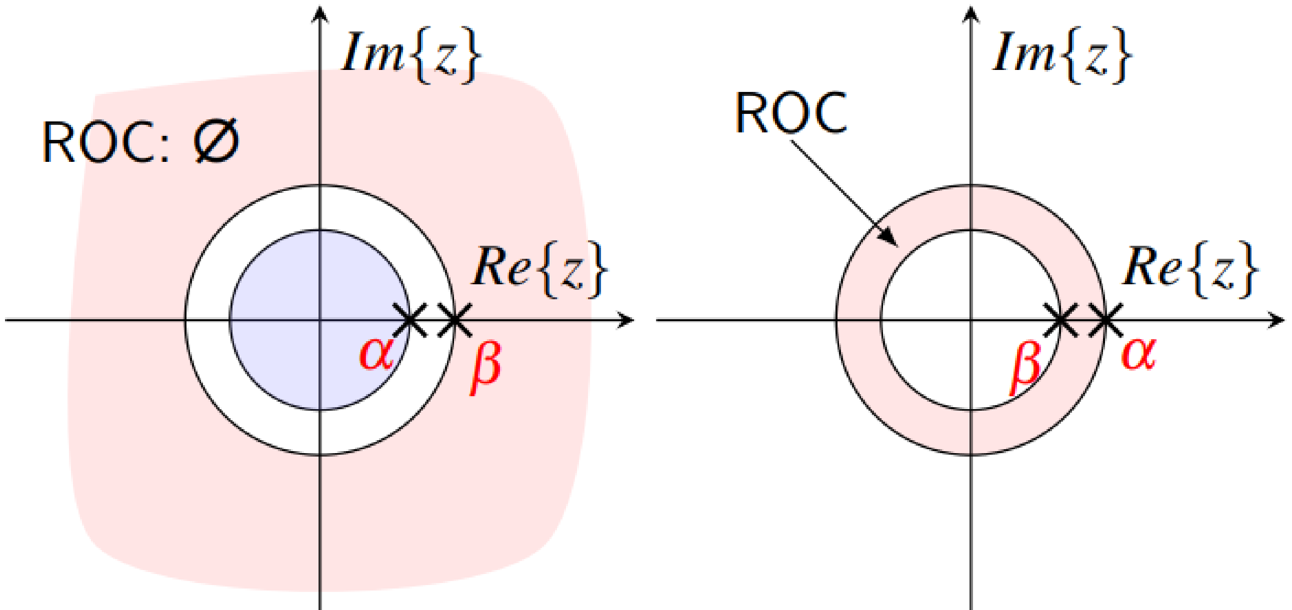
中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

双边序列 $h[n]=x[n]+y[n]=\alpha^n\mu[n]-\beta^n\mu[-n-1]$ 的 Z 变换:

$$H(z)=X(z)+Y(z)=\frac{1}{1-\alpha z^{-1}}+\frac{1}{1-\beta z^{-1}}=\frac{2-(\alpha+\beta)z^{-1}}{(1-\alpha z^{-1})(1-\beta z^{-1})}$$

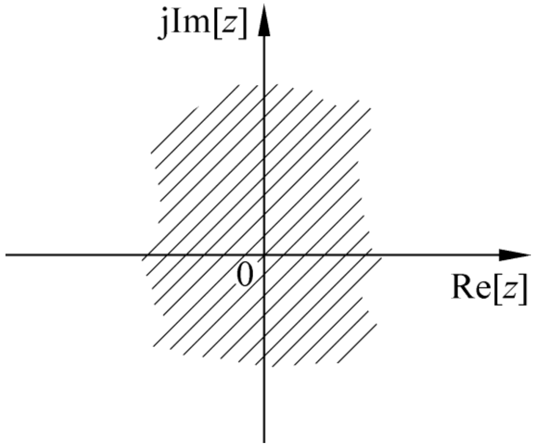
序列 $h[n]$ 的 Z 变换 ROC=ROC$_x$∩ROC$_y$。

$|\alpha|<|\beta|$ $\qquad\qquad$ $|\alpha|>|\beta|$

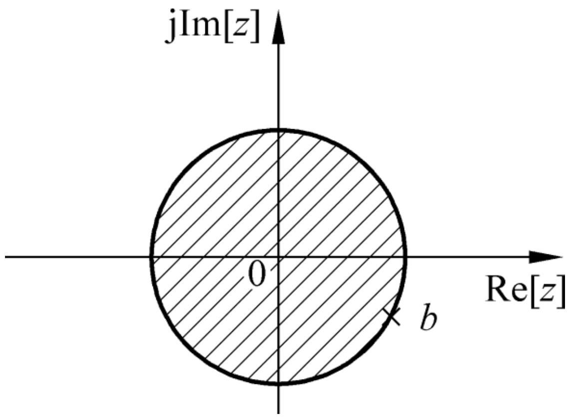


序列的z变换

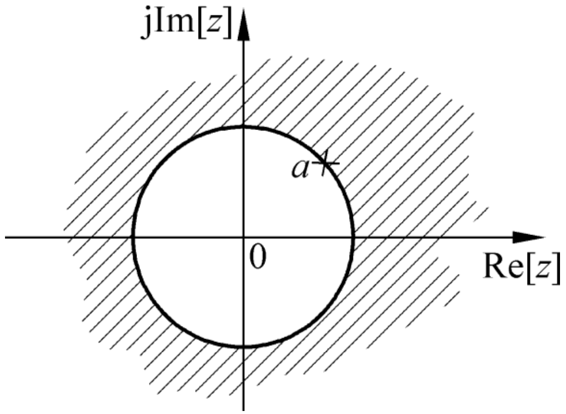
例2.1



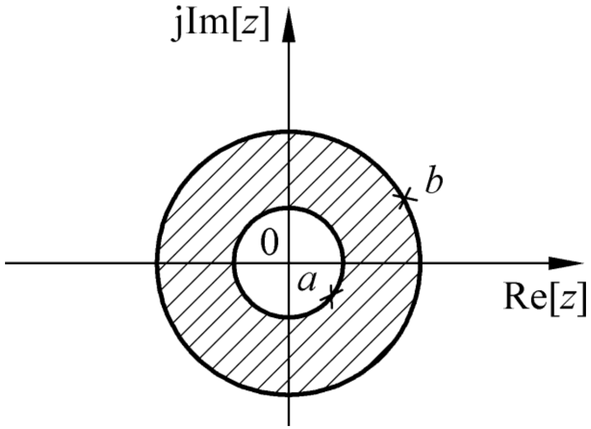
例2.3



例2.2



例2.4



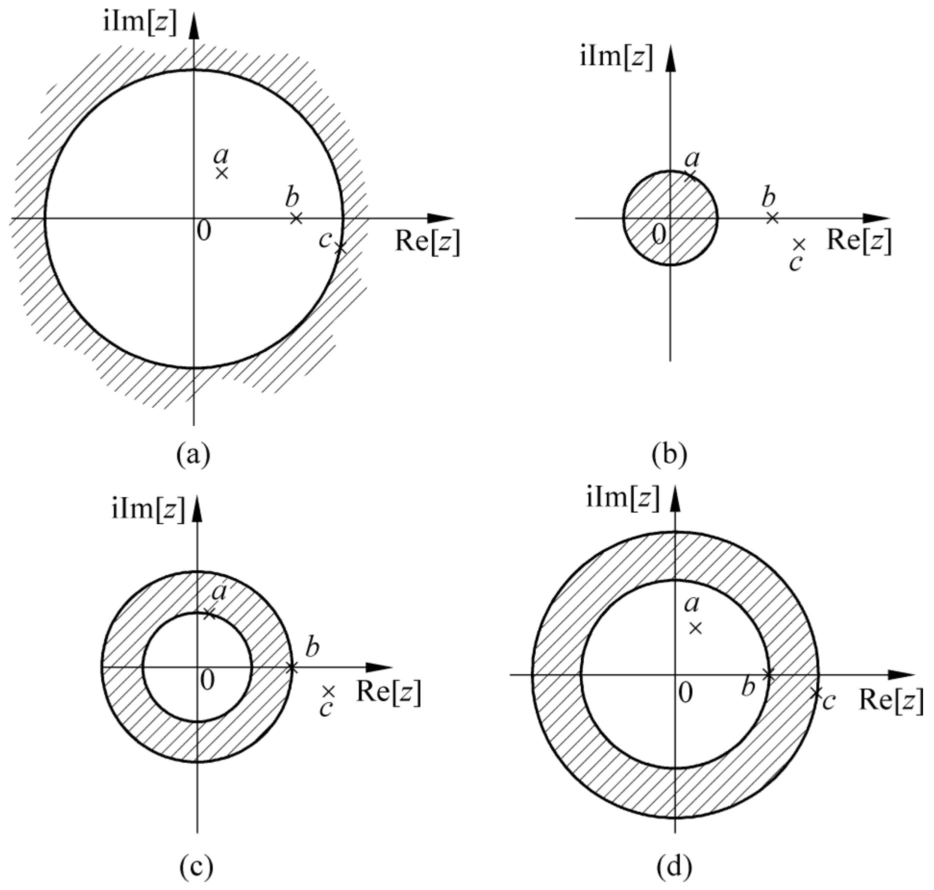
z反变换

$$x(n)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)]=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_{c}X(z)z^{n-1}\mathrm{d}z$$

同一z变换

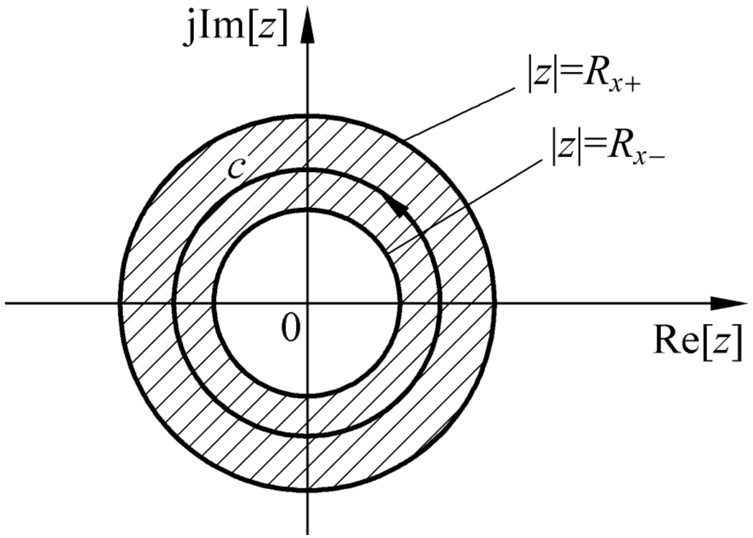
对应的序列

是不同的



z反变换

1. 围线积分法（留数法）



$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_k \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_k}$$

$$\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_m \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}$$

c内有K个单阶极点z_k

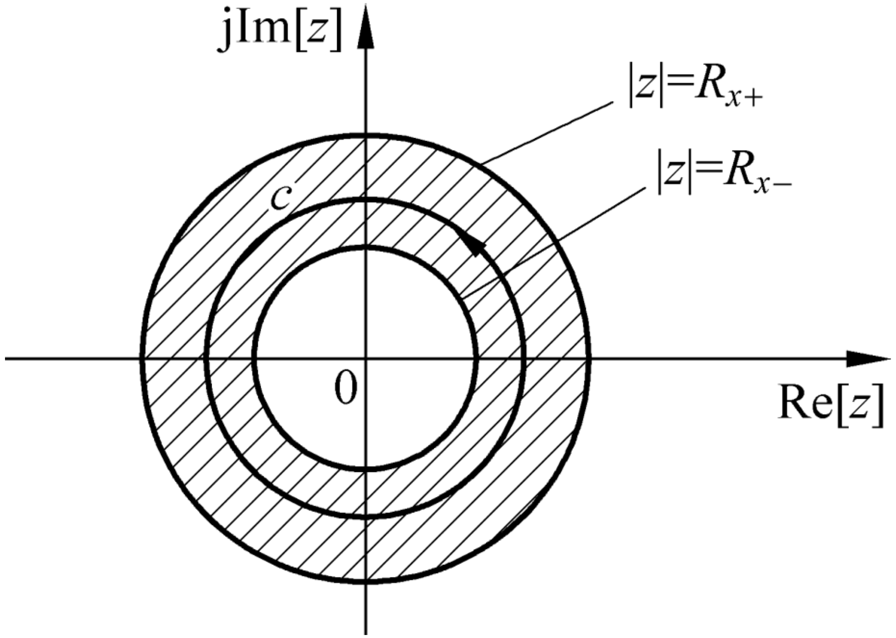
c外有M个单阶极点z_m

z反变换

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

$$x(n)=\frac{1}{2\pi \mathrm{j}}\oint_c X(z)z^{n-1}dz=\sum_k \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_k}$$

$$=-\sum_m \mathrm{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_m}$$



z反变换

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

留数的计算公式：

单阶极点

①. $\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_r} = [(z-z_r)X(z)z^{n-1}]_{z=z_r}$

②. $\operatorname{Res}[X(z)z^{n-1}]_{z=z_r} = \dfrac{1}{(l-1)!}\dfrac{d^{l-1}}{dz^{l-1}}[(z-z_r)^l X(z)z^{n-1}]\Big|_{z=z_r}$

多阶极点

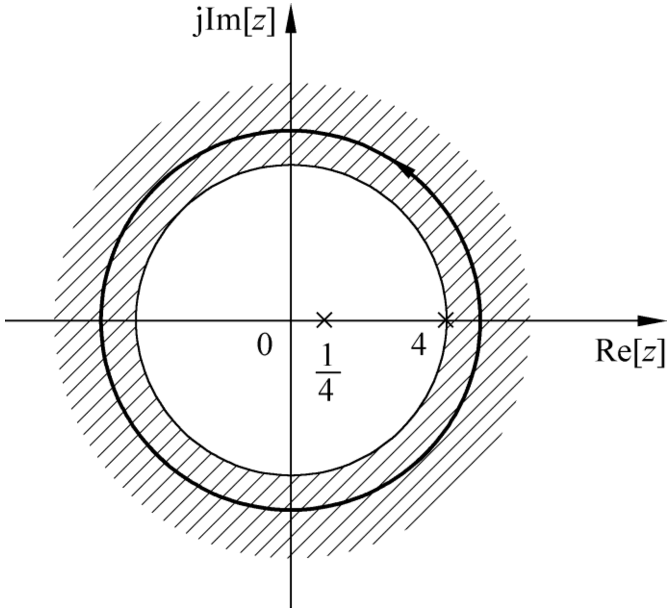
***X*(*z*) *z*$^{n-1}$的极点与*n*有关，求解时，注意要将*n*划成不同区域。**

z反变换

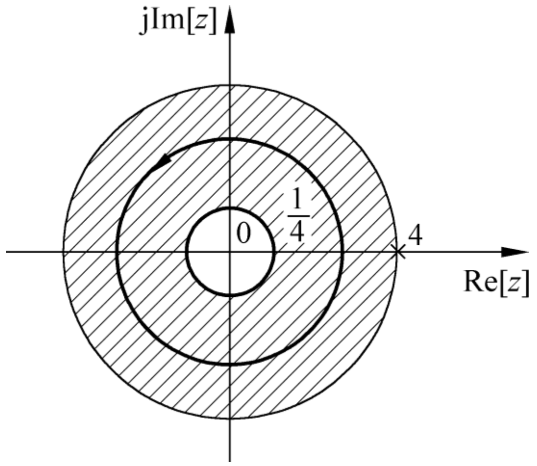
中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

例2.5

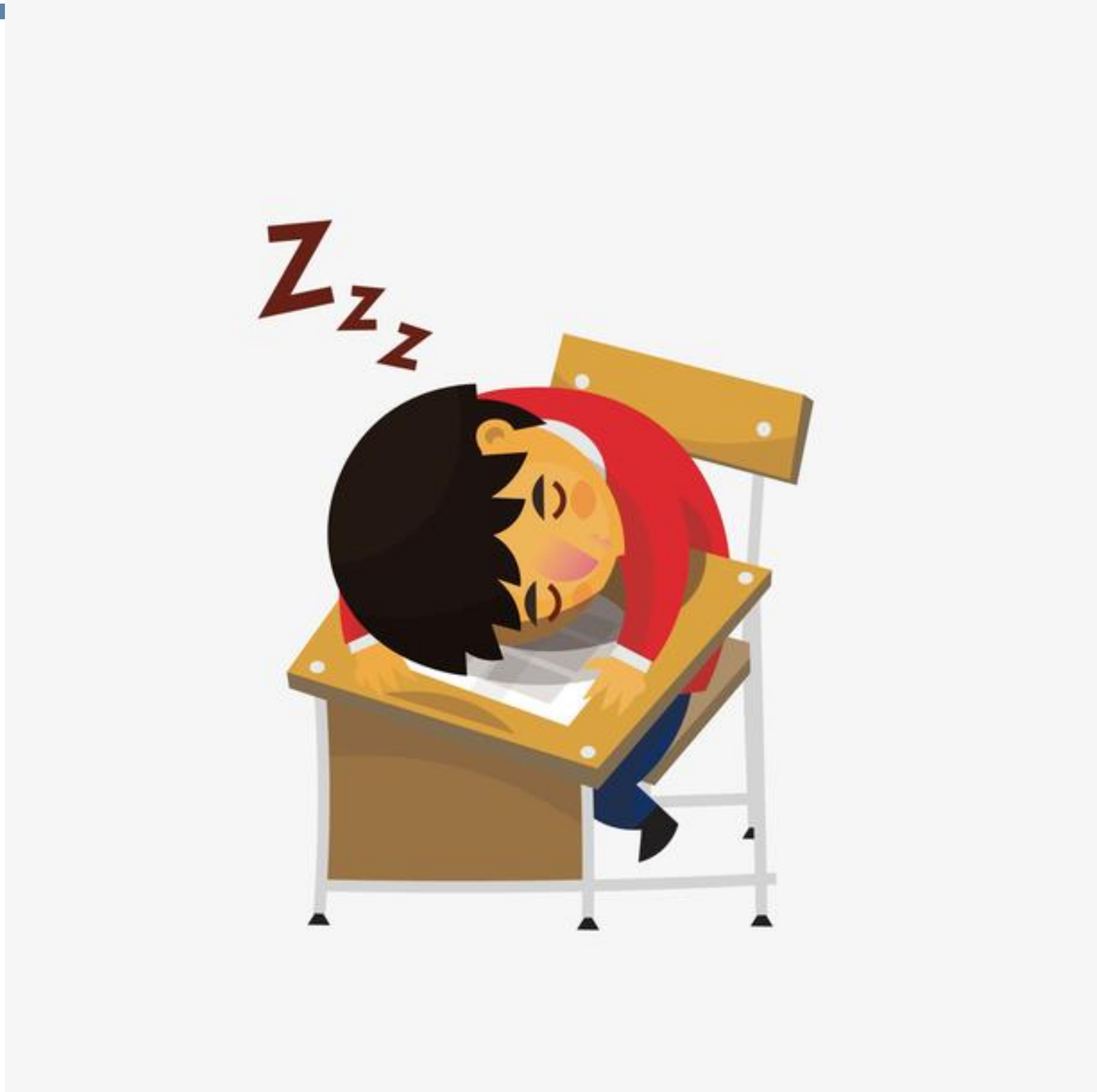
例2.7



例2.6



z反变换



z反变换

2. 部分分式法

展开成部分分式：

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=X_1(z)+X_2(z)+\ldots+X_k(z)$$

$$x(n)=\mathscr{Z}^{-1}[X(z)]=\mathscr{Z}^{-1}[X_1(z)]+\mathscr{Z}^{-1}[X_2(z)]+\ldots+\mathscr{Z}^{-1}[X_k(z)]$$

（1）展开成z^{-1}的有理分式：

$$X(z)=\sum_{n=0}^{M-N}B_n z^{-n}+\sum_{k=1}^{N-r}\frac{A_k}{1-z_k z^{-1}}+\sum_{j=1}^{r}\frac{c_j}{(1-z_i z^{-1})^j}$$

z反变换

单阶极点z_k的留数（部分分式的系数）A_k：

$$A_k = (1 - z_k z^{-1}) X(z)\Big|_{z=z_k} = (z - z_k)\frac{X(z)}{z}\Bigg|_{z=z_k} = \mathrm{Res}\left[\frac{X(z)}{z}\right]\Bigg|_{z=z_k}$$

高阶极点的系数c_j：

$$c_j = \frac{1}{(-z_i)^{r-j}} \cdot \frac{1}{(r-j)!} \left\{ \frac{d^{r-j}}{d(z^{-1})^{r-j}} [(1 - z_i z^{-1})^r X(z)] \right\}_{z=z_i}$$

$$j = 1, 2, \ldots, r$$

z反变换

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

（2）z的正幂级数

$$X(z)=\frac{B(z)}{A(z)}=\frac{b_0+b_1z+\ldots+b_{M-1}z^{(M-1)}+b_Mz^M}{a_0+a_1z+\ldots+a_{N-1}z^{(N-1)}+b_Nz^N}$$

$$\frac{X(z)}{z}=\frac{A_0}{z}+\sum_{k=1}^{N-r}\frac{A_k}{z-z_k}+\sum_{j=1}^{r}\frac{D_j}{(z-z_i)^j}$$

$$A_k=(z-z_k)\frac{X(k)}{z}\Big|_{z=z_k}=\mathrm{Res}[\frac{X(z)}{z}]\Big|_{z=z_k}, \qquad k=0,1,\ldots,N-r$$

$$D_j=\frac{1}{(r-j)!}\left\{\frac{d^{r-j}}{dz^{r-j}}[(z-z_i)^r\frac{X(z)}{z}]\right\}_{z=z_i}, \qquad j=1,2,\ldots r$$

z反变换

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

例2.8

例2.9

z变换的性质与定理

1. 线性

$$\mathscr{Z}[x(n)] = X(z), \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

$$\mathscr{Z}[y(n)] = Y(z), \qquad R_{y-} < |z| < R_{y+}$$

$$\mathscr{Z}[ax(n)+by(n)] = aX(z)+bY(z), \qquad R_{-} < |z| < R_{+}$$

例2.13

例2.14

z变换的性质与定理

2. 序列的移位

（1）双边z变换：

$$\mathscr{Z}[x(n-m)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n-m)z^{-n}\underline{\underline{n-m=i}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)z^{-m-i}=z^{-m}X(z)$$

$$\mathscr{Z}[x(n+m)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n+m)z^{-n}\underline{\underline{n+m=i}}\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(i)z^{m-i}=z^{m}X(z)$$

z变换的性质与定理

3. z域尺度变换（乘以指数序列）

若

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)], \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

则

$$\mathscr{Z}[a^n x(n)]=X\left(\frac{z}{a}\right), \qquad |a|R_{x-}<|z|<|a|R_{x+}$$

例题2.15

z变换的性质与定理

4. 序列的线性加权（z域求导数）

若

$$X(z) = \mathscr{Z}[x(n)], \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$\mathscr{Z}[nx(n)] = -z \cdot \frac{d}{dz} X(z), \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

z变换的性质与定理

5. 序列共轭性

若

$$\mathscr{Z}[x(n)] = X(z), \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

则

$$\mathscr{Z}[x^*(n)] = X^*(z^*) \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$$

若$x(n)$为实序列， $x(n)=x^*(n)$，则有

$$X(z)=X^*(z^*)$$

z变换的性质与定理

6. 序列翻褶性

若 $\mathscr{Z}[x(n)] = X(z), \qquad R_{x-} < |z| < R_{x+}$

则 $\mathscr{Z}[x(-n)] = X(\frac{1}{z}), \qquad \frac{1}{R_{x+}} < |z| < \frac{1}{R_{x-}}$

z变换的性质与定理

7. 初值定理

对于因果序列***x*(*n*)**，即***x*(*n*)=0**，***n*<0**，有

$$\lim_{z\to\infty} X(z) = x(0)$$

8. 终值定理

设***x*(*n*)**为因果序列，且 ***X*(*z*)** 的极点处于单位圆**|*z*|=1**以内（单位圆上最多在***z*=1**处可有一阶极点），则

$$\lim_{n\to\infty} x(n) = \lim_{z\to 1}[(z-1)X(z)]$$

z变换的性质与定理

9. 因果序列的累加性

设$x(n)$为因果序列，即

$$x(n)=0,\ n<0$$

则

$$\mathscr{Z}\left[\sum_{m=0}^{n} x(m)\right]=\frac{z}{z-1}X(z), \qquad |z|>\max[R_{x-},1]$$

例题2.16

z变换的性质与定理

10. 时域卷积和定理

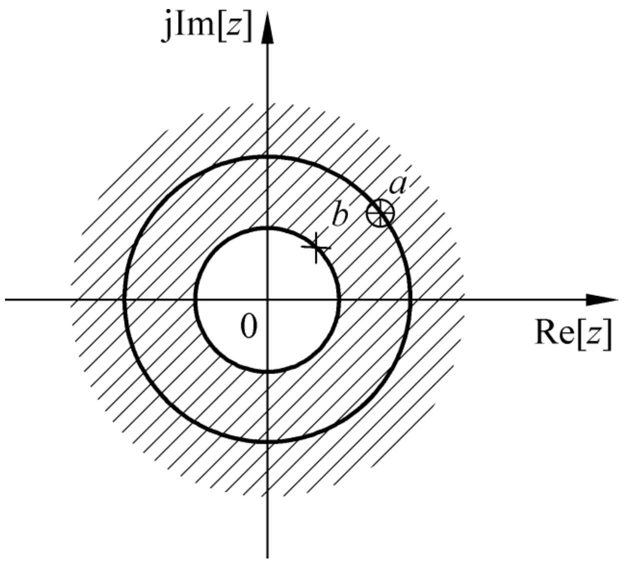
$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)$$

则

$$Y(z)=\mathscr{Z}[y(n)]=H(z)X(z),\qquad \max[R_{x-},R_{h-}]<|z|<\min[R_{x+},R_{h+}]$$

z变换的性质与定理

例题2.17



z变换的性质与定理

11. 序列相乘（z域复卷积定理）

若$y(n)= x(n)\, h(n)$，且

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)],\qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$H(z)=\mathscr{Z}[h(n)],\qquad R_{h-}<|z|<R_{h+}$$

复卷积可用留数定理求解

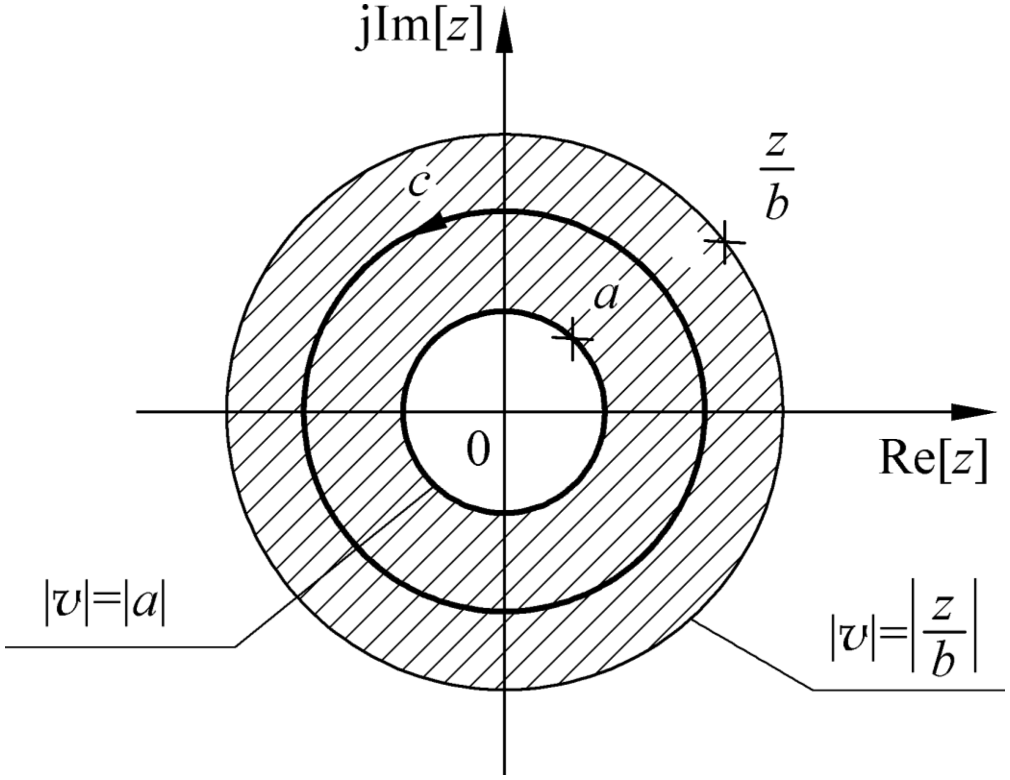
但关键在于正确决定围线所在收敛域。

则

$$Y(z)=\mathscr{Z}[y(n)]=\mathscr{Z}[x(n)h(n)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X\left(\frac{z}{v}\right)H(v)v^{-1}dv,\qquad R_{x-}R_{h-}<|z|<R_{x+}R_{h+}$$

z变换的性质与定理

例题2.18



z变换的性质与定理

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

12. 帕塞瓦（Parseval）定理

$$X(z)=\mathscr{Z}[x(n)], \qquad R_{x-}<|z|<R_{x+}$$

$$H(z)=\mathscr{Z}[h(n)], \qquad R_{h-}<|z|<R_{h+}$$

且

$$R_{x-}R_{h-}<1<R_{x+}R_{h+}$$

则

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)h^*(n)=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(v)H^*\left(\frac{1}{v^*}\right)v^{-1}dv$$

z变换的性质与定理

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

若收敛域包括单位圆，则围线 可选为单位圆，即

$$v=e^{j\omega}$$

再令$x(n)=h(n)$为实序列，则

$$X(e^{-j\omega})=X^*(e^{j\omega})$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x^2(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

z变换的性质与定理

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

例2.20，例2.21

2.2　s平面到z平面的映射

s平面到z平面的映射

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

连续时间信号$x_a(t)$

理想抽样后的信号 $\hat{x}_a(t)$

$$X_a(s)=\mathscr{L}\left[x_a(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}x_a(t)e^{-st}dt$$

$$\hat{X}_a(s)=\mathscr{L}\left[\hat{x}_a(t)\right]=\int_{-\infty}^{\infty}\hat{x}_a(t)e^{-st}dt$$

$$\hat{X}_a(s)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)e^{-st}dt$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)e^{-nsT}$$

$$\boxed{x(n)=x_a(nT)}$$

s平面到z平面的映射

$$x(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x(n)z^{-n}$$

$$X(z)\big|_{z=e^{sT}}=X(e^{sT})=\hat{X}_a(s)$$

s平面到z平面的映射：

$$z=e^{sT}$$

$$\begin{cases} z=re^{j\omega} \\ s=\sigma+j\Omega \end{cases} \qquad r=e^{\sigma T} \qquad \omega=\Omega T$$

s平面到z平面的映射

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

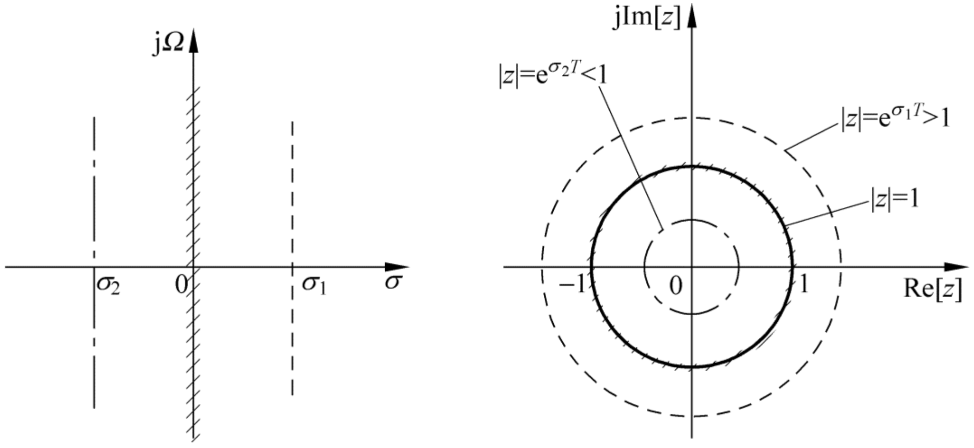
s平面到z平面的映射：

$$z = e^{sT}$$

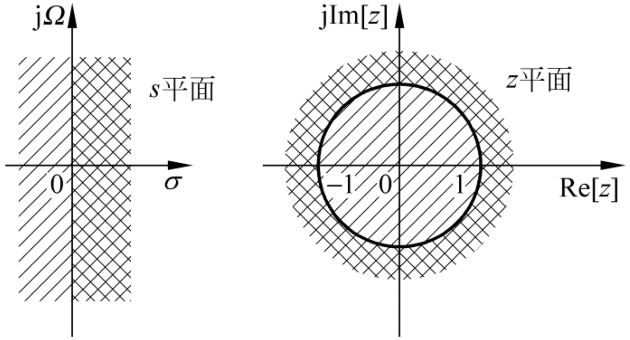
$$\begin{cases} z = re^{j\omega} \\ s = \sigma + j\Omega \end{cases}$$

$$r = e^{\sigma T}$$

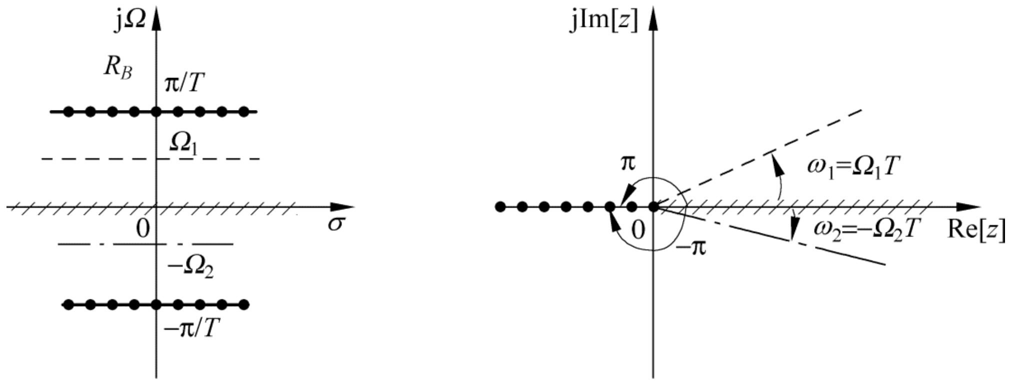
$$\omega = \Omega T$$



(a) $|z|=r=e^{\sigma T}$(σ=常数)。σ=常数映射成z平面的圆$|z|=r=e^{\sigma T}$

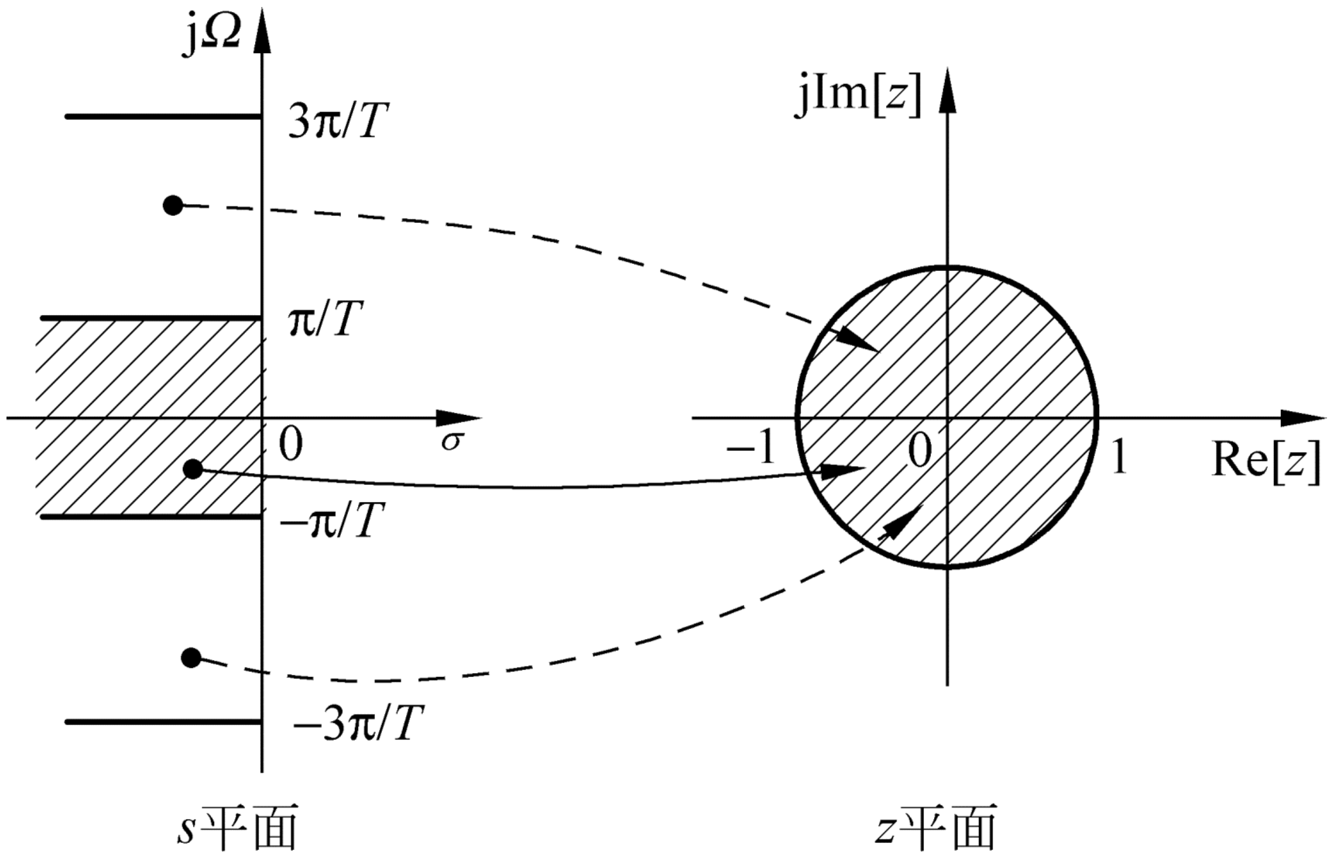


(b) $\sigma \gtreqless 0$分别映射成$r \gtreqless 1$



(c) $\omega=\Omega T$ 。Ω=常数映射成$\omega=\Omega T$的辐射线

s平面到z平面的映射



s平面与z平面的多值映射关系

s平面到z平面的映射

二、$x_a(t)$、$\hat{x}_a(t)$、$x(n)$ 之间以及它们各自的

拉普拉斯变换、z变换、傅里叶变换之间的关系

1. $\hat{X}_a(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(s-jk\Omega_s)$

$$X(z)\big|_{z=e^{sT}}=\hat{X}_a(s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(s-jk\Omega_s)=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(s-j\frac{2\pi}{T}k)$$

抽样序列的z变换 和原连续时间抽样信号的拉普拉斯变换有一对一的对应关系，而和原连续时间信号的拉普拉斯变换 是多值映射关系，这正好验证了从s平面到z平面的多值映射关系。

s平面到z平面的映射

2. 序列在单位圆上的z变换

和连续时间信号的傅里叶变换 的关系

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\Omega T}}=X(e^{j\Omega T})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j(\Omega-\frac{2\pi}{T}k))$$

抽样序列在单位圆上的z变换（即序列的傅里叶变换）

等于其原连续时间信号的傅里叶变换的周期延拓，

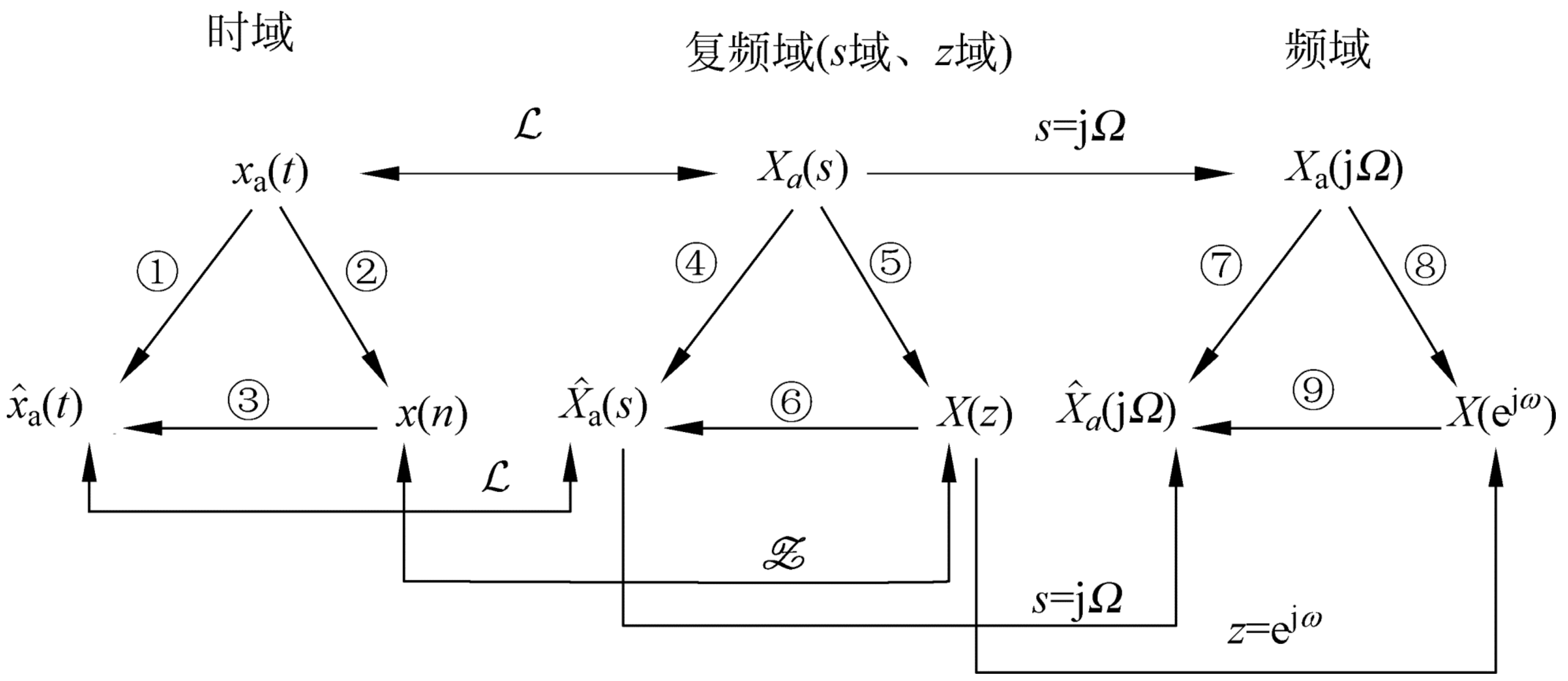
其延拓周期为 的整数倍，此外还有 的幅度加权因子。

3. 考虑 $\omega=\Omega T=\Omega/f_s=2\pi f/f_s$

$$X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}}=X(e^{j\omega})=\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}X_a(j\frac{\omega-2\pi}{T}k)$$

s平面到z平面的映射

4. 序列的时域、复频域（s域、z域）及频域之间的关系



2.3　离散时间傅里叶变换（DTFT）

DTFT定义

一、定义

离散时间傅里叶变换（DTFT），

也称为序列的傅里叶变换。

正变换：

$$X(e^{j\omega}) = \mathrm{DTFT}[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

反变换：

$$x(n) = \mathrm{IDTFT}[X(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}d\omega$$

DTFT定义

二、序列傅里叶变换的收敛性

——DTFT的存在条件

1. 一致收敛

序列的傅里叶变换可以看成序列的**z**变换在单位圆上的值，即

$$X(e^{j\omega}) = X(z)\Big|_{z=e^{j\omega}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \left|\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{j\omega}\right| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)||e^{j\omega}| \le \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)| < \infty$$

序列 绝对可和是其傅里叶变换存在的充分条件

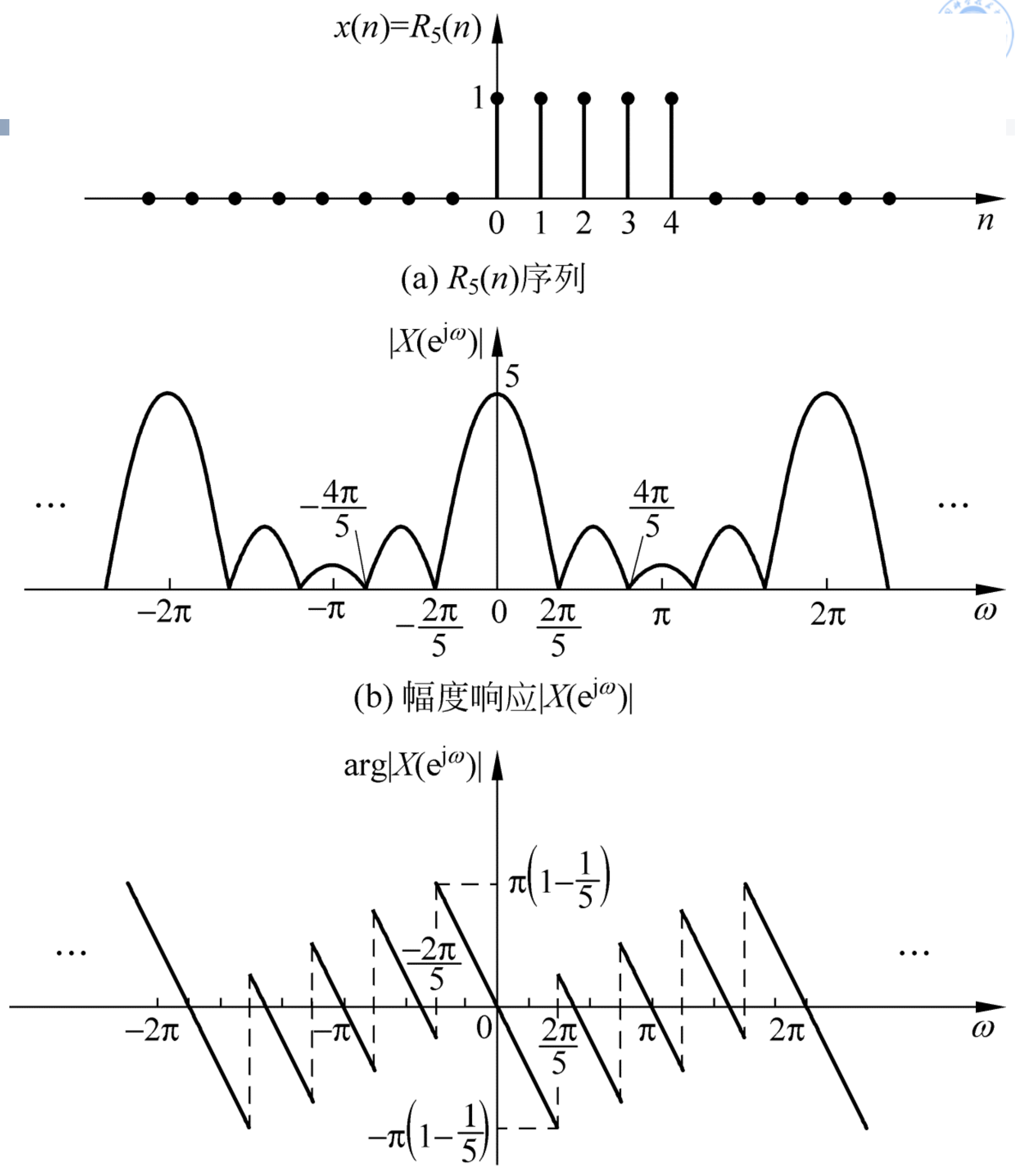
DTFT定义

例2.23：

求矩形序列

$x(n)=R_N(n)$

的N点DTFT。



(a) $R_5(n)$序列

(b) 幅度响应$|X(e^{j\omega})|$

(c) 相位响应$\arg[X(e^{j\omega})]$

DTFT定义

2. 均方收敛

当序列*x*(*n*)不满足绝对可和条件，而是满足以下的

平方可和条件：

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 < \infty$$

则满足均方收敛条件：

$$\lim_{M\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left| X(e^{j\omega}) - \sum_{n=-M}^{M} x(n)e^{-j\omega n} \right|^2 d\omega = 0$$

序列*x*(*n*)能量有限（平方可和）也是其傅里叶变换

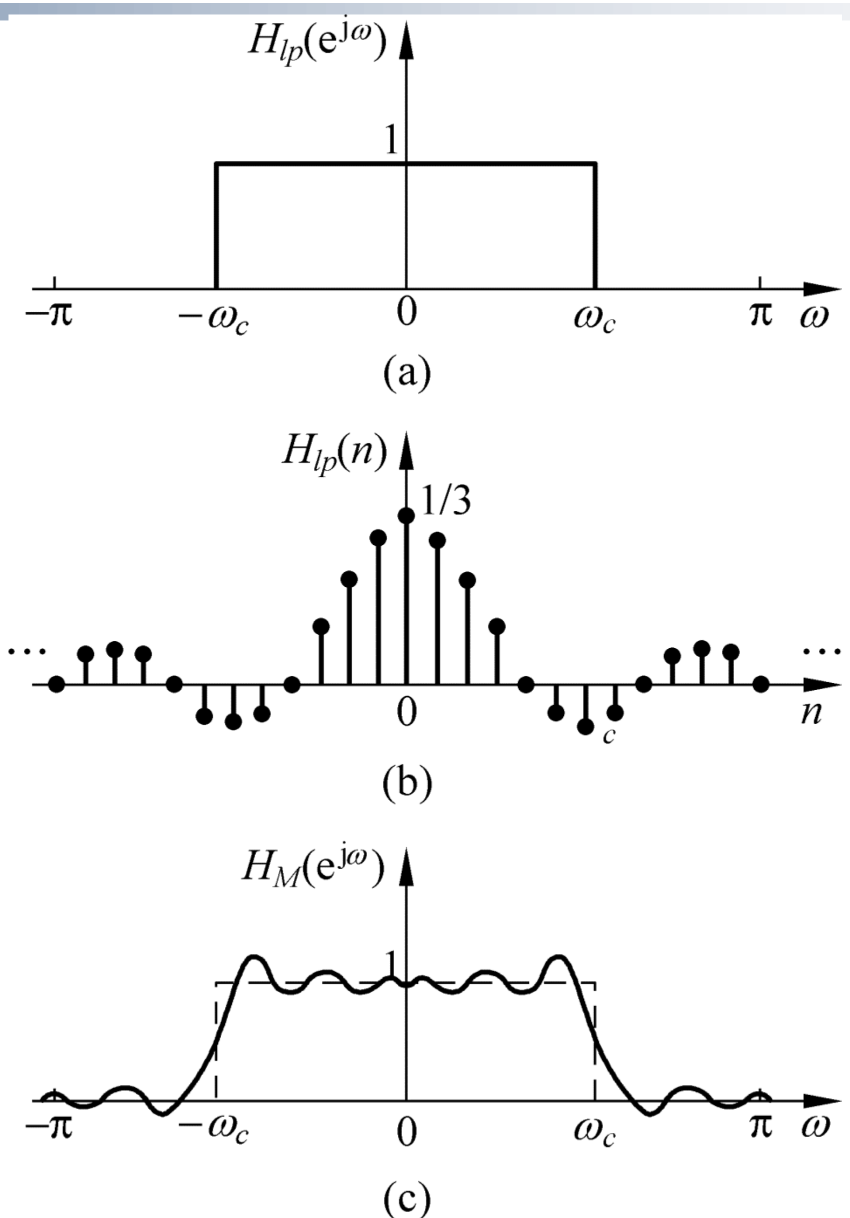
存在的充分条件。

DTFT定义

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

例2.24：

已知理想低通数字滤波器的频率响应，求其单位抽样响应，并讨论其傅里叶变换的收敛情况。



序列傅里叶变换的主要性质

1. 线性

$$DTFT[ax_1(n)+bx_2(n)]=aX_1(e^{j\omega})+bX_2(e^{j\omega})$$

2. 序列的移位

$$DTFT[x(n-m)]=e^{-j\omega m}X(e^{j\omega})$$

时域的移位对应于频域有一个相位移

3. 乘以指数序列

$$DTFT[a^n x(n)]=X(\frac{1}{a}e^{j\omega})$$

序列傅里叶变换的主要性质

4. 乘以复指数序列（调制性）

$$DTFT[e^{j\omega_0 n}x(n)] = X(e^{j(\omega-\omega_0)})$$

5. 时域卷积定理

$$DTFT[x(n)*h(n)] = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

时域的线性卷积对应于频域的相乘

6. 频域卷积定理

$$DTFT[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi}[X(e^{j\omega})*Y(e^{j\omega})] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$$

时域的加窗（即相乘）对应于频域的周期性卷积并除以2π

序列傅里叶变换的主要性质

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

7. 序列的线性加权

$$DTFT[nx(n)] = j\frac{d}{d\omega}[X(e^{j\omega})]$$

8. 帕塞瓦定理

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)y(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y(e^{-j\omega})d\omega$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |x(n)|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

9. 序列的翻褶

$$DTFT[x(-n)] = X(e^{-j\omega})$$

10. 序列的共轭

$$DTFT[x^*(n)] = X^*(e^{-j\omega})$$

序列及其傅里叶变换的对称性质

四、序列及其傅里叶变换的一些对称性质

无论$x(n)$是实序列或虚序列，皆可分解为

$$x(n)= x_e(n)+ x_o(n)$$

1. 复序列$x(n)$可分解为共轭对称序列和共轭反对称序列之和

(1). 共轭对称序列

$$x_e(n)=x_e^*(-n)$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[x_e(n)]=\mathrm{Re}[x_e(-n)] \\ \mathrm{Im}[x_e(n)]=-\mathrm{Im}[x_e(-n)] \end{cases}$$

序列及其傅里叶变换的对称性质

(2). 共轭反对称序列（分量）

$$x_o(n) = -x_o^*(-n)$$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}[x_o(n)] = -\mathrm{Re}[x_o(-n)] \\ \mathrm{Im}[x_o(n)] = \mathrm{Im}[x_o(-n)] \end{cases}$$

(3). 由 $x(n)$ 求 $x_e(n)$、 $x_o(n)$

$$\begin{cases} x_e(n) = \dfrac{1}{2}[x(n) + x^*(-n)] \\ x_o(n) = \dfrac{1}{2}[x(n) - x^*(-n)] \end{cases}$$

序列及其傅里叶变换的对称性质

2. 实数序列*x*(*n*)可分解为偶对称分量与奇对称分量之和

$$x_e(n) = x_e(-n)$$

$$x_o(n) = -x_o(-n)$$

序列及其傅里叶变换的对称性质

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

3. 序列***x***(***n***)的傅里叶变换 也可分解为

共轭对称分量 与共轭反对称分量 之和

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

（1）复序列

$$x(n) = \mathrm{Re}[x(n)] + j\,\mathrm{Im}[x(n)]$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = X_e(e^{j\omega}) + X_o(e^{j\omega})$$

序列及其傅里叶变换的对称性质

（2）实序列

$$x(n) = x_e(n) + x_o(n)$$

$$\Updownarrow \qquad \Updownarrow \qquad \Updownarrow$$

$$X(e^{j\omega}) = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] + j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

时域$x(n)$的实部及j乘虚部的傅里叶变换分别等于频域 的共轭对称分量与共轭反对称分量；

时域$x(n)$的共轭对称分量及共轭反对称分量的傅里叶变换分别等于频域 的实部与j乘虚部。

序列及其傅里叶变换的对称性质

$$X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] + j\,\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] = |X(e^{j\omega})|\,e^{j\arg[X(e^{j\omega})]}$$

$$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] = \mathrm{Re}[X(e^{-j\omega})]$$

$$\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})] = -\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

$$|X(e^{j\omega})| = |X(e^{-j\omega})|$$

$$\arg[X(e^{j\omega})] = -\arg[X(e^{-j\omega})]$$

序列及其傅里叶变换的对称性质

（3） 实偶序列，其DTFT为实偶函数

$$\overbrace{\overbrace{x(n)\quad = x(-n)}^{\text{偶}}\quad = x^*(n)}^{\text{实}}$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$\underbrace{X(e^{j\omega}) = X(e^{-j\omega})}_{\text{偶}} \underbrace{= X^*(e^{-j\omega})}_{\text{实}}$$

（4） 实奇序列，其DTFT为虚奇函数

$$\overbrace{\overbrace{x(n)\quad = -x(-n)}^{\text{奇}}\quad = x^*(n)}^{\text{实}}$$

$$\updownarrow \qquad\qquad \updownarrow \qquad\qquad \updownarrow$$

$$\underbrace{X(e^{j\omega}) = -X(e^{-j\omega})}_{\text{奇}} \underbrace{= X^*(e^{-j\omega})}_{\text{虚}}$$

序列及其傅里叶变换的对称性质

（5） 虚偶序列，其 DTFT是虚偶函数

$$\overbrace{\overbrace{x(n)=x(-n)}^{\text{偶}}=-x^{*}(n)}^{\text{虚}}$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$\underbrace{X(e^{j\omega})=X(e^{-j\omega})}_{\text{偶}}\underbrace{=-X^{*}(e^{-j\omega})}_{\text{虚}}$$

（6） 虚奇序列，其DTFT 是实奇函数

$$\overbrace{\overbrace{x(n)=-x(-n)}^{\text{奇}}=-x^{*}(n)}^{\text{虚}}$$

$$\updownarrow \qquad \updownarrow \qquad \updownarrow$$

$$\underbrace{X(e^{j\omega})=-X(e^{-j\omega})}_{\text{奇}}\underbrace{=-X^{*}(e^{-j\omega})}_{\text{实}}$$

序列及其傅里叶变换的对称性质

（7） 因果序列

$$x(n)=\begin{cases}2x_e(n), & n>0\\ x_e(n), & n=0\\ 0, & n<0\end{cases} \qquad (2.3.59)$$

$$x(n)=\begin{cases}2x_o(n), & n>0\\ x(0), & n=0\\ 0, & n<0\end{cases} \qquad (2.3.60)$$

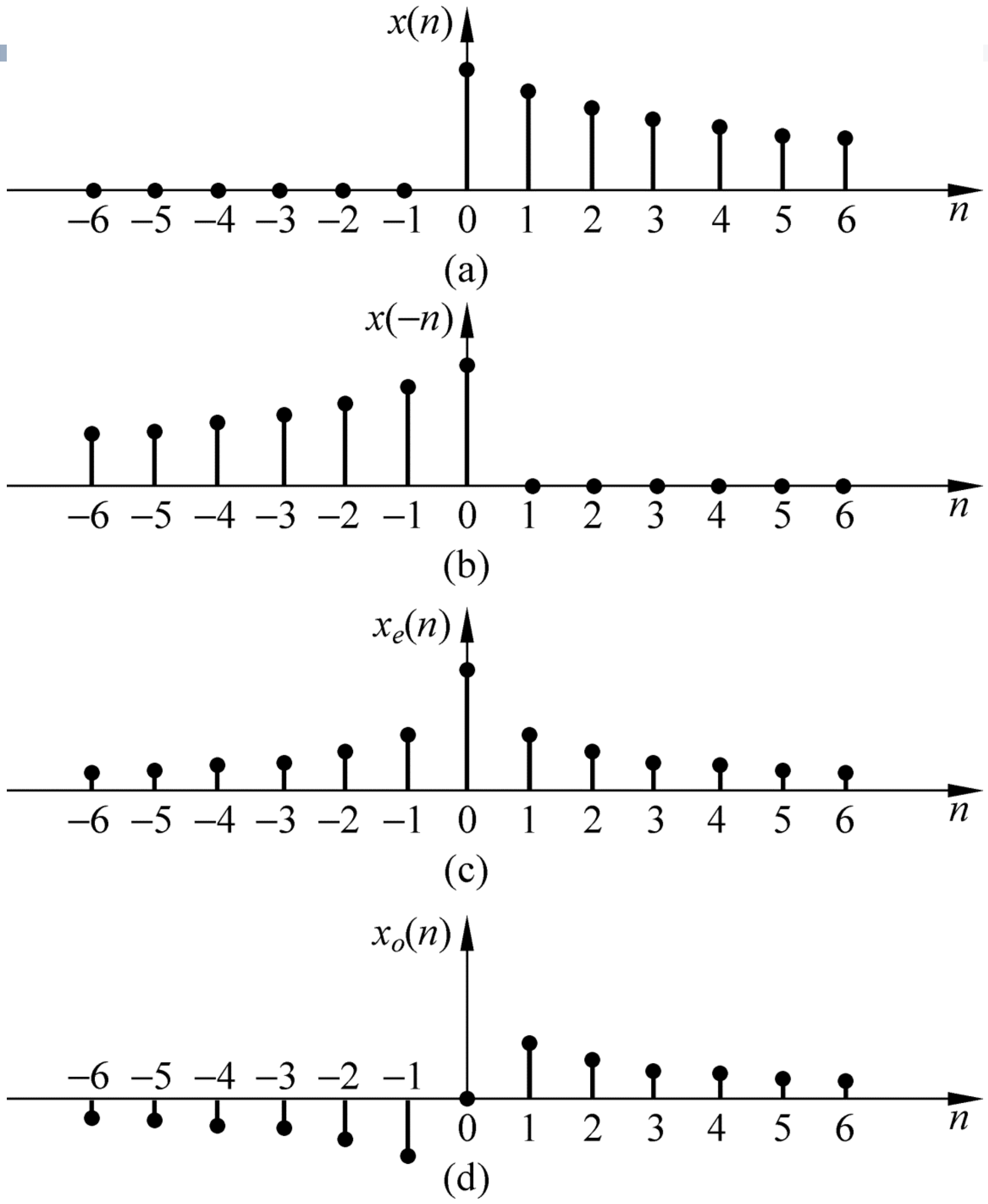
可从偶序列中恢复出*x*(*n*)，也可从奇序列加上*x*(0) 来恢复出*x*(*n*)

序列及其傅里叶变换的对称性质

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

实因果序列

的奇偶分解



序列及其傅里叶变换的对称性质

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

（8） 实因果序列

$$\mathrm{Re}[X(e^{j\omega})] \xrightarrow{IDTFT} x_e(n) \xrightarrow{(2.3.59)式} x(n) \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$

DTFT的实部包含了 *x*(*n*)的全部信息。

$$\mathrm{j\,Im}[X(e^{j\omega})] \xrightarrow{IDTFT} x_o(n) \xrightarrow{(2.3.60)式+x(0)} x(n) \xrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$$

DTFT的虚部加上*x*(0)包含了 *x*(*n*)的全部信息。

对实因果序列，其**DTFT**中包含冗余信息。

s平面到z平面的映射

2.2 s平面到z平面的映射

周期性序列的傅里叶变换

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

1. 复指数序列的傅里叶变换对

$$x(n)=e^{j\omega_0 n}$$

$$DTFT[e^{j\omega_0 n}]=X(e^{j\omega})=\sum_{i=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi i),\qquad -\pi<\omega_0\leq\pi$$

$$IDTFT[\sum_{i=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-\omega_0-2\pi i)]=e^{j\omega_0 n}$$

周期性序列的傅里叶变换

2. 常数序列的傅里叶变换对

$$x(n)=1,\qquad -\infty<n<\infty$$

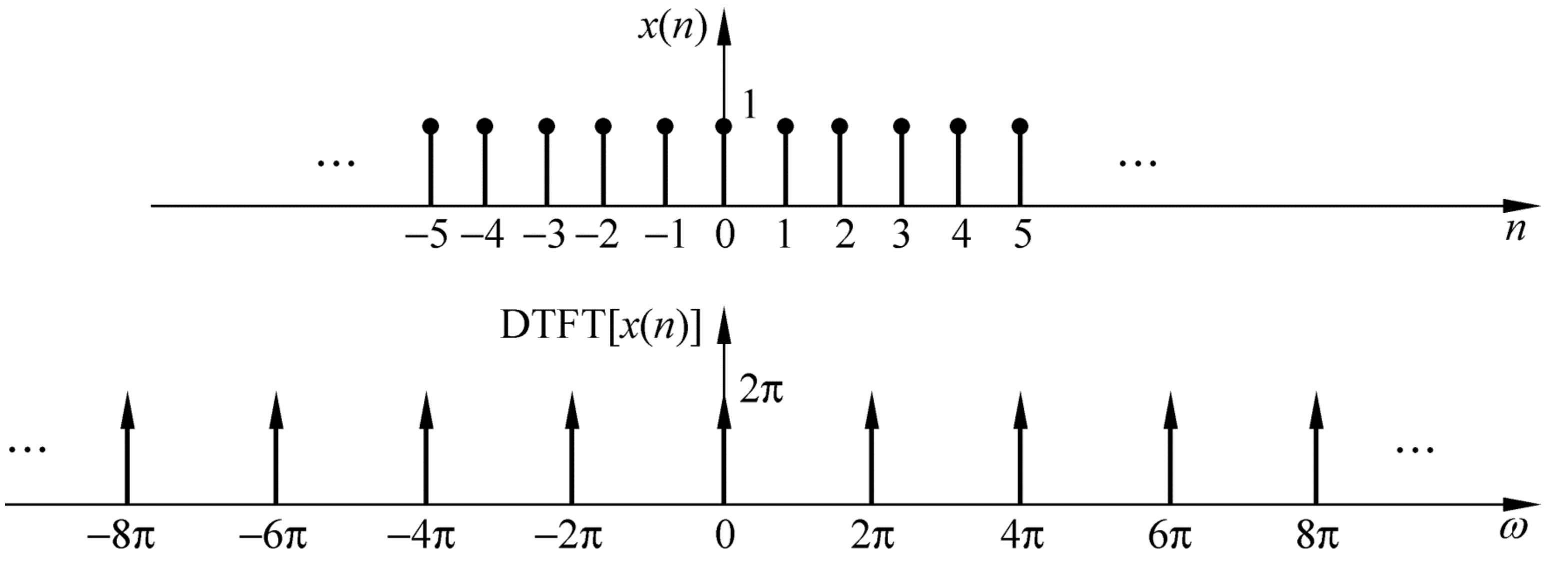
$$x(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-i)$$

$$DTFT[\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-i)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}1\cdot e^{-j\omega n}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega n}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-2\pi i)$$

$$IDTFT[\sum_{i=-\infty}^{\infty}2\pi\delta(\omega-2\pi i)]=IDTFT[\sum_{n=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega n}]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-i)$$

周期性序列的傅里叶变换

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院



常数序列及其傅里叶变换

周期性序列的傅里叶变换

3. 周期为*N*的单位抽样序列串的傅里叶变换对

$$x(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN) \qquad DTFT[\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}[\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN)]e^{-j\omega n}=\sum_{i=-\infty}^{\infty}[\sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN)]e^{-j\omega n}$$

$$=\sum_{i=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega Ni}$$

$$DTFT[\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN)]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}e^{-j\omega Ni}=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta[N\omega-2\pi k]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}2\pi\delta[N(\omega-2\pi k/N)]$$

$$\begin{cases} DTFT[\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN)]=\dfrac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[\omega-\dfrac{2\pi}{N}k] \\ IDTFT[\dfrac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta[\omega-\dfrac{2\pi}{N}k]=\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN) \end{cases}$$

周期性序列的傅里叶变换

4. 一般性周期为*N*的周期性序列 的傅里叶变换

$$\tilde{x}(n)=\sum_{i=-\infty}^{\infty}x(n-iN)=x(n)*\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN)$$

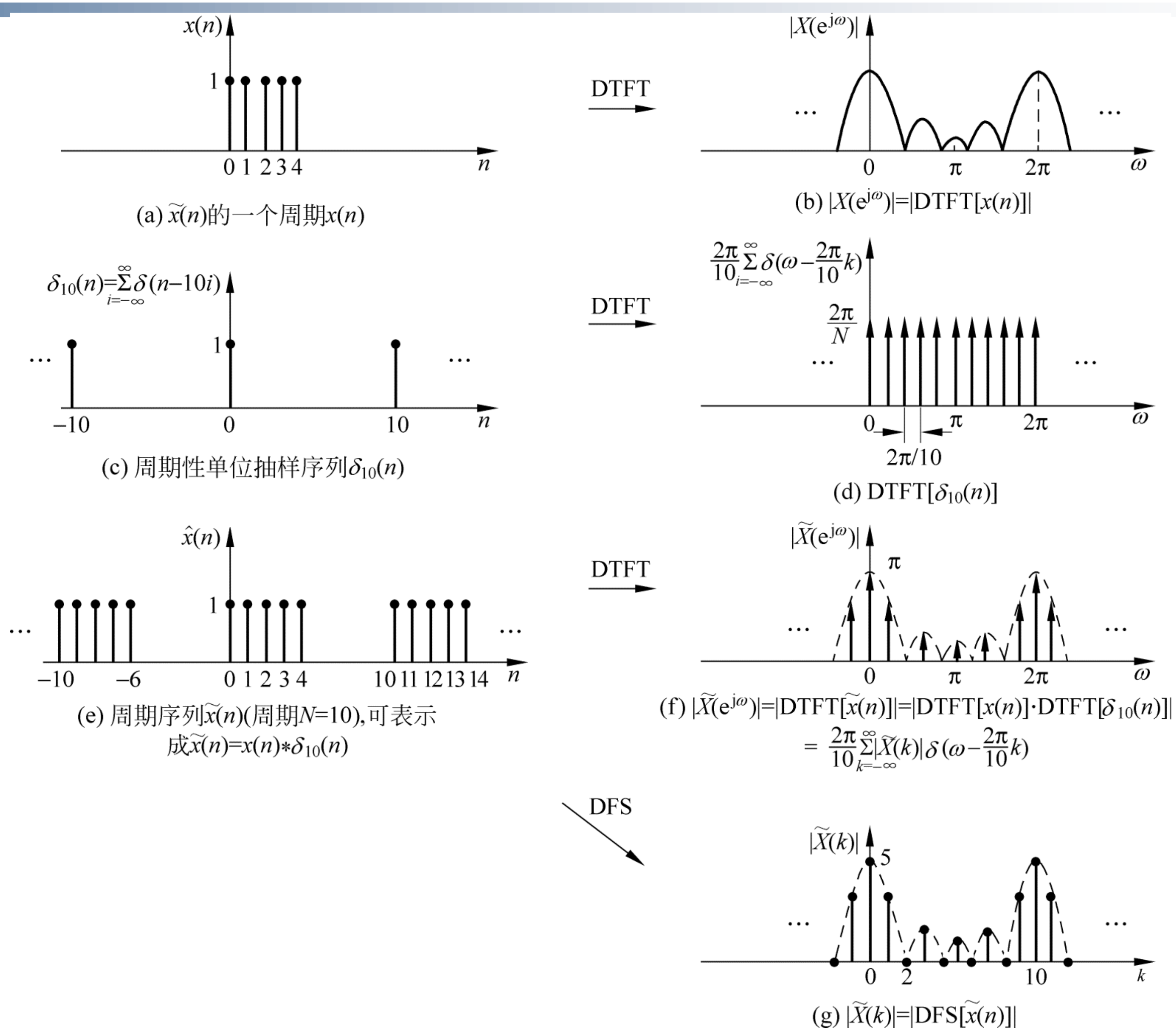
$$\tilde{X}(e^{j\omega})=DTFT[\tilde{x}(n)]=DTFT[x(n)]\cdot DTFT[\sum_{i=-\infty}^{\infty}\delta(n-iN)]$$

$$=X(e^{j\omega})[\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)]\quad=\frac{2\pi}{N}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\tilde{X}(k)\delta(\omega-\frac{2\pi}{N}k)$$

$$\boxed{\tilde{X}(k)=X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=2\pi k/N}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\omega n}\Big|_{\omega=2\pi k/N}=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}nk}}$$

周期性序列的傅里叶变换

例2.25



中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

2.4　LSI系统的频域表征

LSI系统的描述

1. 时域中的描述

（1） 用单位抽样响应*h*(*n*)来表征

$$h(n)=T[\delta(n)]$$

$$y(n)=x(n)*h(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}h(m)x(n-m)$$

（2） 用常系数线性差分方程来表征输出与输入的关系

$$y(n)=\sum_{m=0}^{M}b_m x(n-m)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)$$

LSI系统的描述

2. 变换域中的描述：

（1） 用系统函数*H(z)*来表征

$$H(z)=\mathscr{Z}[h(n)]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)z^{-n}$$

$$Y(z)=X(z)H(z)$$

（2） 用频率响应 来表征系统：

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}h(n)e^{-j\omega n}$$

$$H(e^{j\omega})=\frac{Y(e^{j\omega})}{X(e^{j\omega})}=\frac{\sum_{m=0}^{M}b_m e^{-j\omega m}}{1+\sum_{k=1}^{N}a_k e^{-j\omega k}}$$

LSI系统的因果、稳定条件

中国科学技术大学 University of Science and Technology of China 信息科学技术学院

1. 时域条件

因果性： $h(n)=0\ ,\ n<0$

稳定性： $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|<\infty$

2. z域条件：

因果性： $H(z)$收敛且要满足$R_{h-}<|z|\leq\infty$

即，收敛域为某圆外包含∞。

稳定性： $H(z)$的收敛域必须包括z平面单位圆，

即包括$|z|=1$

LSI系统的因果、稳定条件

因果稳定性：

系统函数 必须在从单位圆$|z|=1$到$|z|=\infty$的整个z平面内（$1\le|z|\le\infty$）收敛。

也就是说系统函数 的全部极点必须在z平面单位圆之内。

LSI系统的频率响应的特点

1. LSI系统的频率响应

$$x(n) = e^{j\omega n}, \qquad -\infty < n < \infty$$

$$y(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{j\omega(n-m)}$$

$$= e^{j\omega n}\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)e^{-j\omega m} = e^{j\omega n}H(e^{j\omega})$$

$$H(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)e^{-j\omega n}$$

$H(e^{j\omega})$ 是 $h(n)$ 的离散时间傅里叶变换

——LSI系统的频率响应。

LSI系统的频率响应的特点

2. $H(e^{j\omega})$的特性

（1） 只要$h(n)$绝对可和，则LSI系统稳定，

这时$H(e^{j\omega})$一定存在且连续。

（2） $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\arg[H(e^{j\omega})]} = \mathrm{Re}[H(e^{j\omega})] + j\mathrm{Im}[H(e^{j\omega})]$

（3）$h(n)$实序列

$$|H(e^{j\omega})| = |H(e^{-j\omega})| \qquad \arg[H(e^{j\omega})] = -\arg[H(e^{-j\omega})]$$

$$\mathrm{Re}[H(e^{j\omega})] = |H(e^{j\omega})| \cos[\arg[H(e^{j\omega})]] = \mathrm{Re}[H(e^{-j\omega})]$$

$$\mathrm{Im}[H(e^{j\omega})] = |H(e^{j\omega})| \sin[\arg[H(e^{j\omega})]] = -\mathrm{Im}[H(e^{-j\omega})]$$

LSI系统的频率响应的特点

（4） $H(e^{j\omega})=H(e^{j(\omega+2\pi)})$

（5）ω=0,2π表示最低频率，ω=π表示最高频率。

即， ω=0,2π 是低通滤波器的通带中心频率，

ω=π是高通滤波器的通带中心频率。

（6） $H(e^{j\omega})$是ω的连续函数。

（7） 若系统输入为正弦型序列，则稳态输出为

同频的正弦型序列：

$$x(n)=A\cos(\omega_0 n+\varphi)$$

$$y(n)=A\left|H(e^{j\omega_0})\right|\cos\left\{\omega_0 n+\varphi+\arg[H(e^{j\omega_0})]\right\}$$

LSI系统的频率响应的特点

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

（8） LSI系统，其输出序列的傅里叶变换等于输入序列的傅里叶变换与系统的频率响应的乘积：

$$DTFT[y(n)] = DTFT[x(n) * h(n)]$$

$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$$

频率响应的几何确定法

1. 系统函数 用极点、零点的表示法：

$$H(z)=K\frac{\prod_{m=1}^{M}(1-c_m z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k z^{-1})}=Kz^{(N-M)}\frac{\prod_{m=1}^{M}(z-c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(z-d_k)}$$

2. 系统频率响应的几何解积

$$H(e^{j\omega})=Ke^{j(N-M)\omega}\frac{\prod_{m=1}^{M}(e^{j\omega}-c_m)}{\prod_{k=1}^{N}(e^{j\omega}-d_k)}=|H(e^{j\omega})|e^{j\arg[H(e^{j\omega})]}$$

频率响应的几何确定法

中国科学技术大学
University of Science and Technology of China
信息科学技术学院

模（幅度响应）为

$$|H(e^{j\omega})| = |K| \frac{\prod_{m=1}^{M} |e^{j\omega} - c_m|}{\prod_{k=1}^{N} |e^{j\omega} - d_k|}$$

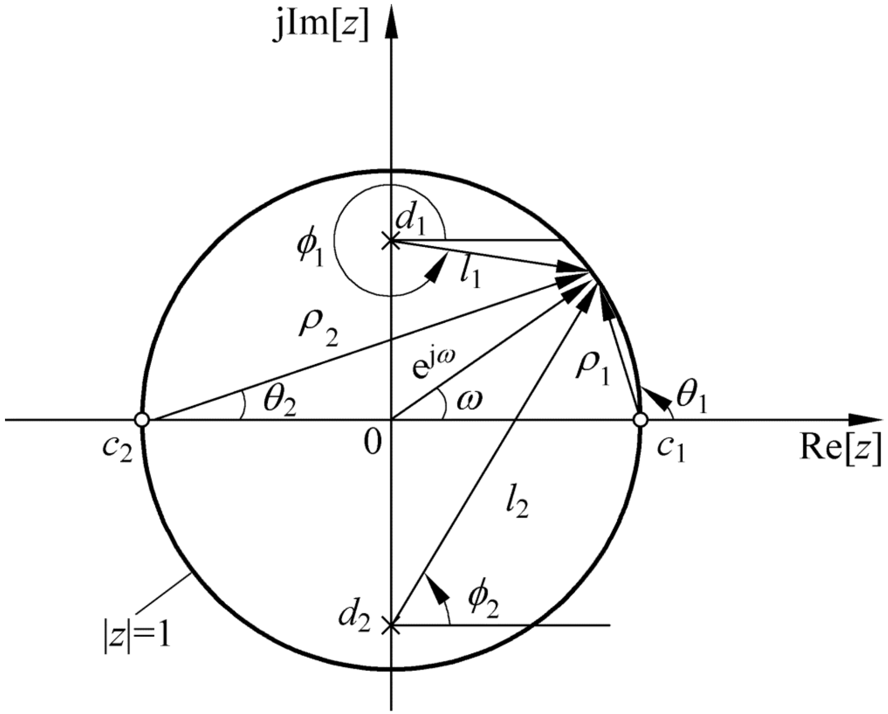
相角（相位响应）为

$$\arg[H(e^{j\omega})] = \arg[K] + \sum_{m=1}^{M} \arg[e^{j\omega} - c_m] - \sum_{k=1}^{N} \arg[e^{j\omega} - d_k] + (N-M)\omega$$

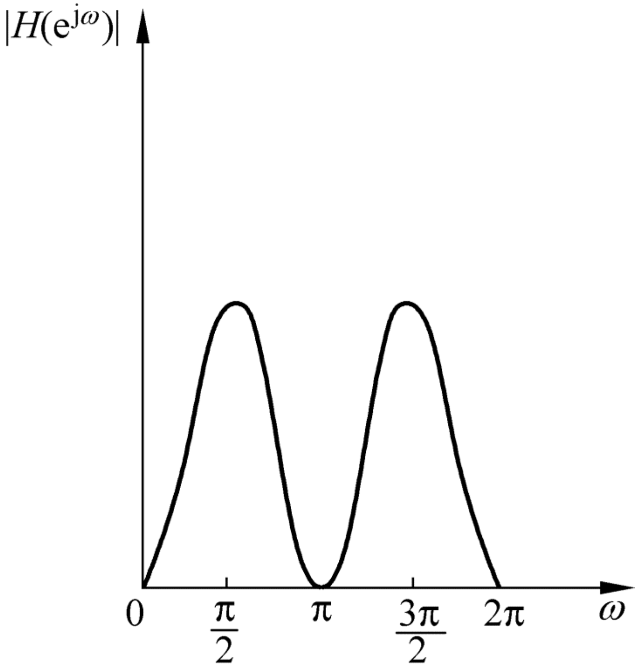
频率响应的幅度等于各零矢长度之积, 除以各极矢长度之积, 再乘以常数|*K*|。

频率响应的相角等于各零矢的相角之和减去各极矢的相角之和，加上常数*K*的相角（由于*K*是实数，故其相角是零或是π），再加上线性相移分量*ω*(*N*-*M*)。

频率响应的几何确定法



(a) 几何解释



(b) 频率响应的幅度

频率响应的几何解释

IIR系统与FIR系统

IIR：无限长单位冲激响应

FIR：有限长单位冲激响应

1. 零极点：

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

FIR系统：全零点系统（滑动平均系统），

全部 $a_k=0$ ($k=1，2，\ldots，N$)。

$$H(z)=\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}=\sum_{m=0}^{M} h(m) z^{-m}$$

IIR系统与FIR系统

$$H(z)=\frac{\sum_{m=0}^{M} b_m z^{-m}}{1+\sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

IIR系统：全极点（AR）系统与零、极点（ARMA）系统

，

至少一个$a_k \neq 0$

IIR系统与FIR系统

2. 系统结构：

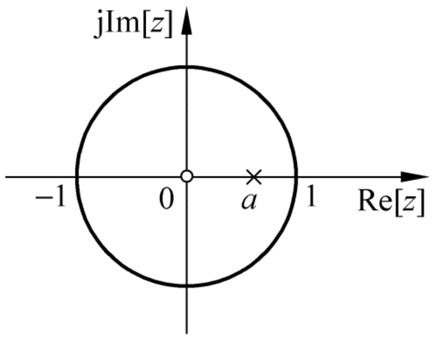
$$y(n)=\sum_{m=0}^{M}b_m x(n-m)-\sum_{k=1}^{N}a_k y(n-k)$$

IIR系统：递归型结构

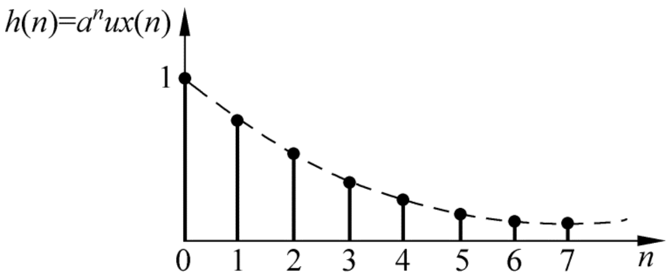
FIR系统：非递归型结构

IIR系统与FIR系统

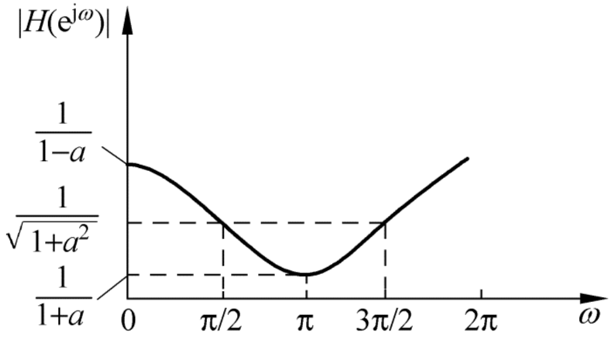
例2.27



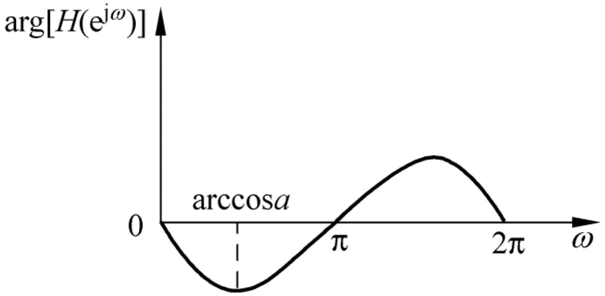
(a) 零极点分布



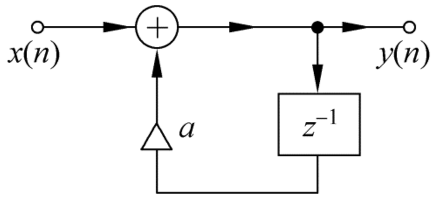
(b) 冲激响应(0＜a＜1)



(c) 幅度响应



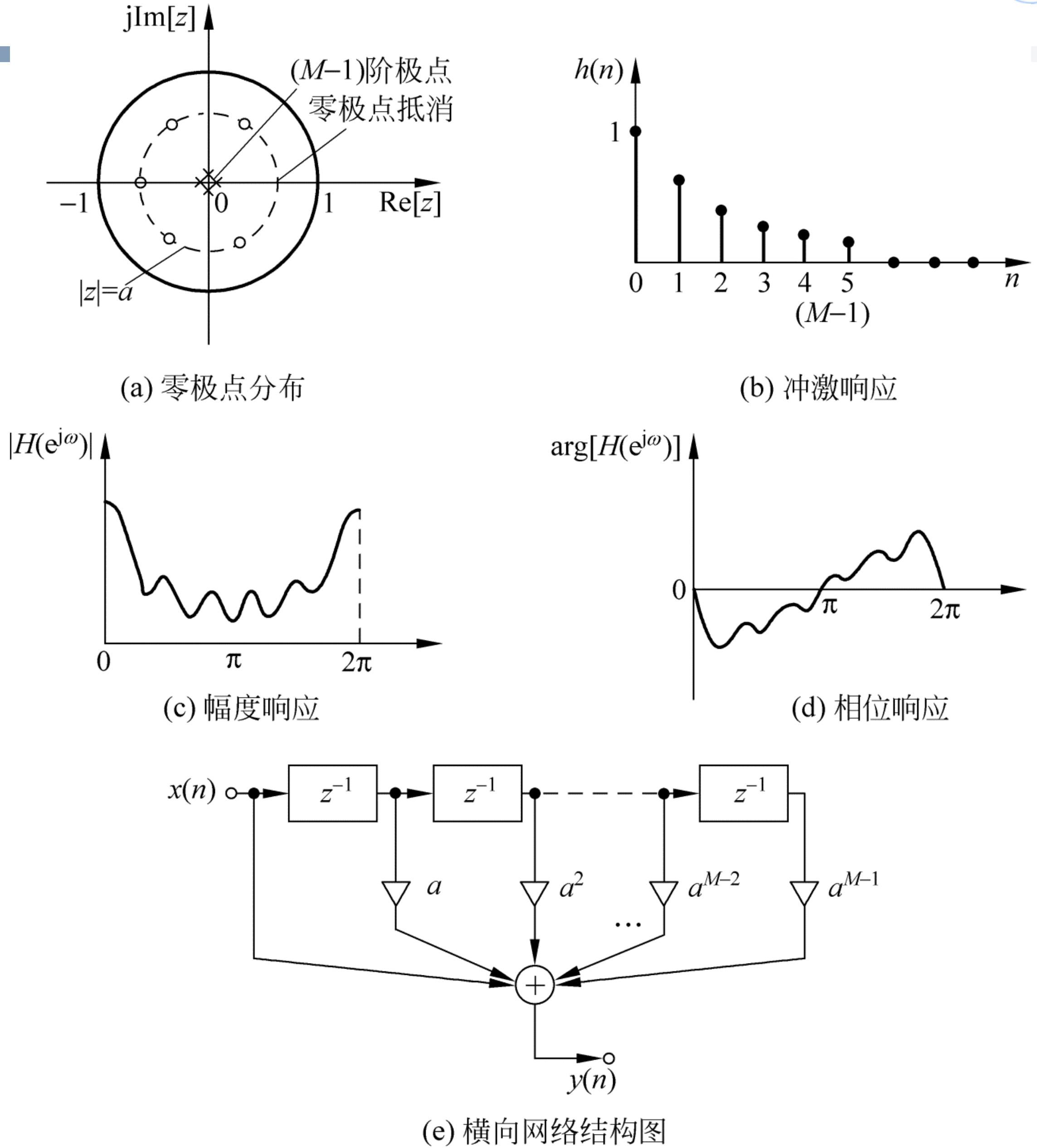
(d) 相位响应



(e) 一阶系统结构图

IIR系统与FIR系统

例2.28



(a) 零极点分布

(b) 冲激响应

(c) 幅度响应

(d) 相位响应

(e) 横向网络结构图