DIP Homework6

周佳毅 PB21061294

2024.5.20

1 简述CT发明过程.

早期X射线成像
1895年，德国物理学家威廉·伦琴（Wilhelm Röntgen）发现了X射线。这一发现迅速在医学领域得到了应用，X射线成像技术成为诊断骨折和内部异常的重要工具。然而，早期的X射线图像是二维的，只能显示人体一个平面的信息，不能提供器官和组织的详细三维结构。这一局限性激发了科学家们探索更先进成像技术的兴趣。

数学基础的奠定
1917年，奥地利数学家约翰·拉东（Johann Radon）提出了一种数学方法，即拉东变换，用于从多个投影中重建三维物体的断层图像。尽管这一理论在当时并没有立即应用于医学成像，但它为后来的CT技术奠定了数学基础。拉东变换的基本思想是，通过对物体进行不同角度的投影，可以利用数学算法重建出物体的内部结构。

计算机技术的发展
20世纪中叶，计算机技术的迅猛发展为CT技术的实现提供了可能。早期计算机的出现使得复杂的数学计算成为可能，这对于CT图像的重建至关重要。1960年代，计算机性能的提升和算法的发展，为CT技术的实际应用铺平了道路。

CT技术的发明与应用
1967年，英国工程师戈弗雷·豪斯菲尔德（Godfrey Hounsfield）开始研究使用X射线和计算机技术来创建断层图像。他在EMI公司（电子和音乐工业有限公司）的支持下，建造了第一台实用的CT扫描仪。这台设备最初用于头部扫描，通过从多个角度获取X射线投影数据，然后利用计算机算法重建大脑的断层图像。1971年，豪斯菲尔德的CT扫描仪在临床上进行了首次成功应用，生成了高质量的大脑断层图像。这一突破性成果迅速引起了医学界的关注和重视。同一时期，美国物理学家艾伦·科马克（Allan Cormack）也独立发展了类似的CT图像重建算法，进一步推动了CT技术的发展。

临床应用的扩展
1972年，世界上第一台CT扫描仪在英国阿特金森·莫利医院正式投入使用，标志着CT技术进入了临床实践阶段。CT扫描仪的临床应用极大地提高了医学诊断的准确性和效率。医生可以通过CT图像详细观察器官和组织的三维结构，从而更准确地诊断疾病和制定治疗计划。

由于CT技术对医学领域的重大贡献，戈弗雷·豪斯菲尔德和艾伦·科马克于1979年共同获得了诺贝尔生理学或医学奖。这一荣誉不仅肯定了他们的创新工作，也进一步推动了CT技术的研究和应用。

随着时间的推移，CT技术不断改进和发展。现代CT扫描仪在扫描速度、图像分辨率、患者舒适度等方面都有了显著提升。例如，螺旋CT和多层CT技术的出现，使得扫描速度大大加快，图像质量也显著提高。现在的CT扫描仪可以在几秒钟内完成全身扫描，并生成高分辨率的三维图像。今天，CT技术已经成为医学影像学的重要组成部分，广泛应用于诊断各种疾病、制定治疗计划和进行医学研究。除了医学领域，CT技术还在工业检测、考古研究等方面发挥着重要作用。

2 证明射影定理

Proof:

1.先证明$\theta=0$的情况

图像f(x,y)在x方向上的投影： $g_y(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f[x,y]\ \mathrm{d}y$

其傅里叶变换为： $G_y(u)=\int_{-\infty}^{\infty} g_y(x) exp[-j2\pi ux]\ \mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) exp[-j2\pi ux]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

图像f(x,y)的傅里叶变换为： $F(u,v)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) exp[-j2\pi(ux+vy)]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

令v=0，则： $G_y(u)=F(u,0)$

2.$\theta\in(0,2\pi]$时：

图像f(x,y)在Θ方向上的投影： $g(s,\theta)=\int f(x,y)\ \mathrm{d}t$

其傅里叶变换为：

$G(R,\Theta)=\int_{-\infty}^{\infty} g(s,\theta) exp(-j2\pi Rs)\ \mathrm{d}s$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) exp[-j2\pi Rs]\ \mathrm{d}s\ \mathrm{d}t \tag{1}$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y) exp[-j2\pi R(x\cos\theta+y\sin\theta]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y \tag{2}$$

由(1)可得：

$\begin{bmatrix} s \\ t \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

(2)的雅可比行列式：

$|J|=\begin{bmatrix} \frac{\partial s}{\partial t} & \frac{\partial t}{\partial x} \\ \frac{\partial s}{\partial y} & \frac{\partial t}{\partial y} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}=1\Longrightarrow \mathrm{d}s\mathrm{d}t=\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

令$u=R\cos\theta, v=R\sin\theta$

图像f(x,y)的傅里叶变换可化为：

$F(R\cos\theta,R\sin\theta)=\int\int f(x,y) exp[-j2\pi R(x\cos\theta+y\sin\theta]\ \mathrm{d}x\ \mathrm{d}y$

$\Downarrow$

$G(R,\Theta)=F(R\cos\theta,R\sin\theta)$