Costruzioni paradossali in Teoria della Misura: il Teorema di Davies

Chiara Molinari

Relatore: Prof. Luigi Ambrosio

29 aprile 2022

Introduzione

Teorema (Davies, 1951)

Dato un insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^2$, esiste un insieme di rette L tale che:

- *per ogni punto di A passa una retta di L;*
- *$\mu(A) = \mu(L^*)$, dove μ è misura di Lebesgue e L^* il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ coperto dalle rette di L.*

Introduzione

Teorema (Davies, 1951)

Dato un insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^2$, esiste un insieme di rette L tale che:

- *per ogni punto di A passa una retta di L;*
- *$\mu(A) = \mu(L^*)$, dove μ è misura di Lebesgue e L^* il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ coperto dalle rette di L.*

Nel 2001, viene dimostrato un rafforzamento del teorema che consente una sua generalizzazione al caso di una generica misura boreliana σ-finita.

Introduzione

Teorema (Davies, 1951)

Dato un insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^2$, esiste un insieme di rette L tale che:

- *per ogni punto di A passa una retta di L;*
- *$\mu(A) = \mu(L^*)$, dove μ è misura di Lebesgue e L^* il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ coperto dalle rette di L.*

Nel 2001, viene dimostrato un rafforzamento del teorema che consente una sua generalizzazione al caso di una generica misura boreliana σ-finita.

In questo colloquio:

- illustreremo alcune idee per la dimostrazione del rafforzamento (la formulazione duale del problema e la costruzione geometrica "venetian blind");

Introduzione

Teorema (Davies, 1951)

Dato un insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^2$, esiste un insieme di rette L tale che:

- *per ogni punto di A passa una retta di L;*
- *$\mu(A) = \mu(L^*)$, dove μ è misura di Lebesgue e L^* il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ coperto dalle rette di L.*

Nel 2001, viene dimostrato un rafforzamento del teorema che consente una sua generalizzazione al caso di una generica misura boreliana σ-finita.

In questo colloquio:

- illustreremo alcune idee per la dimostrazione del rafforzamento (la formulazione duale del problema e la costruzione geometrica "venetian blind");
- tratteremo il problema della misurabilità di L^* come sopra;

Introduzione

Teorema (Davies, 1951)

Dato un insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^2$, esiste un insieme di rette L tale che:

- *per ogni punto di A passa una retta di L;*
- *$\mu(A) = \mu(L^*)$, dove μ è misura di Lebesgue e L^* il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ coperto dalle rette di L.*

Nel 2001, viene dimostrato un rafforzamento del teorema che consente una sua generalizzazione al caso di una generica misura boreliana σ-finita.

In questo colloquio:

- illustreremo alcune idee per la dimostrazione del rafforzamento (la formulazione duale del problema e la costruzione geometrica "venetian blind");
- tratteremo il problema della misurabilità di L^* come sopra;
- dimostreremo il caso per μ generica boreliana σ-finita.

Formulazione duale

Esiste una corrispondenza tra le rette in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ e i punti in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$: alla retta di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ associo il punto $[a, b, c]$.

Formulazione duale

Esiste una corrispondenza tra le rette in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ e i punti in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$: alla retta di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ associo il punto $[a, b, c]$.
Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, realizzato come quoziente di $\mathbb{S}^2$.
Una misura su $\mathbb{S}^2$ induce tramite la proiezione al quoziente una misura su $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

Formulazione duale

Esiste una corrispondenza tra le rette in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ e i punti in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$: alla retta di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ associo il punto $[a, b, c]$.
Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, realizzato come quoziente di $\mathbb{S}^2$.
Una misura su $\mathbb{S}^2$ induce tramite la proiezione al quoziente una misura su $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.
Possiamo così definire una misura sulle rette proiettive. Se una retta è affine, considero la sua equazione omogeneizzata.
L'usuale misura di area su $\mathbb{S}^2$, induce una naturale misura θ sulle rette.

Formulazione duale

Esiste una corrispondenza tra le rette in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ e i punti in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$: alla retta di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ associo il punto $[a, b, c]$.
Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, realizzato come quoziente di $\mathbb{S}^2$.
Una misura su $\mathbb{S}^2$ induce tramite la proiezione al quoziente una misura su $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.
Possiamo così definire una misura sulle rette proiettive. Se una retta è affine, considero la sua equazione omogeneizzata.
L'usuale misura di area su $\mathbb{S}^2$, induce una naturale misura θ sulle rette.
In modo simile, diciamo che un insieme di rette è aperto/compatto/misurabile se l'insieme di punti corrispondente nel duale lo è.

Formulazione duale

Osservazione

Un insieme di rette passanti per un punto P, è rappresentato nel duale da punti appartenenti a una retta ℓ_P.

Formulazione duale

Osservazione

Un insieme di rette passanti per un punto P, è rappresentato nel duale da punti appartenenti a una retta ℓ_P.
Infatti se $P = [a, b, c]$, una retta passante per P soddisfa $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$. Tale retta è rappresentata da $[x_0, x_1, x_2]$, che quindi appartiene alla retta $az_0 + bz_1 + cz_2 = 0$.

Formulazione duale

Osservazione

Un insieme di rette passanti per un punto P, è rappresentato nel duale da punti appartenenti a una retta ℓ_P.
Infatti se $P = [a, b, c]$, una retta passante per P soddisfa $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$. Tale retta è rappresentata da $[x_0, x_1, x_2]$, che quindi appartiene alla retta $az_0 + bz_1 + cz_2 = 0$.

Fissato un punto P nel piano, la misura θ delle rette passanti per esso è sempre nulla.

Formulazione duale

Osservazione

Un insieme di rette passanti per un punto P, è rappresentato nel duale da punti appartenenti a una retta ℓ_P.
Infatti se $P = [a, b, c]$, una retta passante per P soddisfa $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$. Tale retta è rappresentata da $[x_0, x_1, x_2]$, che quindi appartiene alla retta $az_0 + bz_1 + cz_2 = 0$.

Fissato un punto P nel piano, la misura θ delle rette passanti per esso è sempre nulla.
Usando l'osservazione, posso comunque definire una misura sulle rette passanti per P: è quella indotta dalla naturale misura su ℓ_P (omeomorfo a $\mathbb{S}^1$ quozientato).

Per enunciare il rafforzamento del teorema di Davies, diamo prima le seguenti definizioni.

Per enunciare il rafforzamento del teorema di Davies, diamo prima le seguenti definizioni.

Definizione

Un insieme è della **prima categoria** *se unione numerabile di insiemi mai densi (cioè con chiusura a parte interna vuota).*

Per enunciare il rafforzamento del teorema di Davies, diamo prima le seguenti definizioni.

Definizione

Un insieme è della **prima categoria** *se unione numerabile di insiemi mai densi (cioè con chiusura a parte interna vuota).*
Un insieme è **residuo** *se il suo complementare è della prima categoria.*

Per enunciare il rafforzamento del teorema di Davies, diamo prima le seguenti definizioni.

Definizione

Un insieme è della **prima categoria** *se unione numerabile di insiemi mai densi (cioè con chiusura a parte interna vuota).*
Un insieme è **residuo** *se il suo complementare è della prima categoria.*

Definizione

Dato un insieme di rette nel piano L, indichiamo con L^* l'insieme di punti coperti da rette di L.

Per enunciare il rafforzamento del teorema di Davies, diamo prima le seguenti definizioni.

Definizione

Un insieme è della **prima categoria** *se unione numerabile di insiemi mai densi (cioè con chiusura a parte interna vuota).*
Un insieme è **residuo** *se il suo complementare è della prima categoria.*

Definizione

Dato un insieme di rette nel piano L, *indichiamo con* L^* *l'insieme di punti coperti da rette di* L.
Similmente, dato un insieme di punti nel piano A, *indichiamo con* A^* *l'insieme delle rette passanti per punti di* A.

Lemma (1)

Sia A aperto del piano e sia x un punto che non appartiene ad A. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:

- *L contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di A;*
- *$L^* \backslash A$ interseca ogni retta per x in un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

Lemma (1)

Sia A aperto del piano e sia x un punto che non appartiene ad A. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:

- *L contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di A;*
- *$L^*\backslash A$ interseca ogni retta per x in un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

Vediamo che è un rafforzamento del teorema enunciato all'inizio.

Lemma (1)

Sia A aperto del piano e sia x un punto che non appartiene ad A. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:

- *L contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di A;*
- *$L^*\backslash A$ interseca ogni retta per x in un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

Vediamo che è un rafforzamento del teorema enunciato all'inizio.

- Si mostra che condizione A aperto non è restrittiva.

Lemma (1)

Sia A aperto del piano e sia x un punto che non appartiene ad A. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:

- *L contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di A;*
- *$L^*\backslash A$ interseca ogni retta per x in un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

Vediamo che è un rafforzamento del teorema enunciato all'inizio.

- Si mostra che condizione A aperto non è restrittiva.
- Viene aggiunta una condizione topologica su L. Questa implica che L copre A.

Lemma (1)

Sia A aperto del piano e sia x un punto che non appartiene ad A. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:

- *L contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di A;*
- *$L^* \backslash A$ interseca ogni retta per x in un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

Vediamo che è un rafforzamento del teorema enunciato all'inizio.

- Si mostra che condizione A aperto non è restrittiva.
- Viene aggiunta una condizione topologica su L. Questa implica che L copre A.
- Per Fubini, il sottoinsieme del piano $L^* \setminus A$ ha misura di Lebesgue nulla se e solo se, dato un punto x, *quasi* ogni retta per x interseca $L^* \setminus A$ in un insieme di misura lineare nulla. Togliendo il *quasi*, la tesi è più forte.

Enunciamo così il la versione duale del precedente lemma.

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette e sia X un retta non appartenente a L. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuo;*
- *per ogni punto di X passano trascurabili rette di $A^*\backslash L$.*

Enunciamo così il la versione duale del precedente lemma.

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette e sia X un retta non appartenente a L. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuo;*
- *per ogni punto di X passano trascurabili rette di $A^* \backslash L$.*

Il primo passo della dimostrazione è assumere che X sia la retta all'infinito. La tesi diventa quindi che in ogni direzione ci siano trascurabili rette che intersecano A e che non appartengono a L.

Enunciamo così il la versione duale del precedente lemma.

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette e sia X un retta non appartenente a L. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuo;*
- *per ogni punto di X passano trascurabili rette di $A^*\backslash L$.*

Il primo passo della dimostrazione è assumere che X sia la retta all'infinito. La tesi diventa quindi che in ogni direzione ci siano trascurabili rette che intersecano A e che non appartengono a L.
D'ora in poi risulta difficile dare un'idea intuitiva della dimostrazione di questo lemma senza passare per teoremi tecnici.

Enunciamo così il la versione duale del precedente lemma.

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette e sia X un retta non appartenente a L. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuo;*
- *per ogni punto di X passano trascurabili rette di $A^*\backslash L$.*

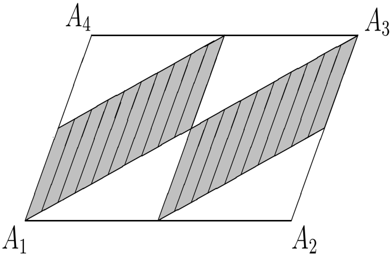
Il primo passo della dimostrazione è assumere che X sia la retta all'infinito. La tesi diventa quindi che in ogni direzione ci siano trascurabili rette che intersecano A e che non appartengono a L.
D'ora in poi risulta difficile dare un'idea intuitiva della dimostrazione di questo lemma senza passare per teoremi tecnici.
Vengono usate costruzioni geometriche che induttivamente permettono di costruire collezioni di parallelogrammi nel piano, con certe caratteristiche.

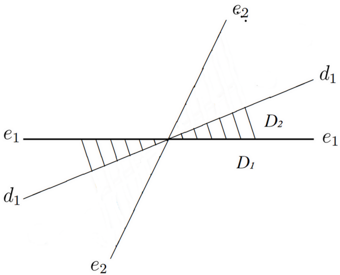
Costruzioni per parallelogrammi

A titolo di esempio, vediamo la costruzione geometrica detta "venetian blind", che dato un parallelogramma P, gli associa una collezione finita di parallelogrammi contenuti in P, nel seguente modo.

Costruzioni per parallelogrammi

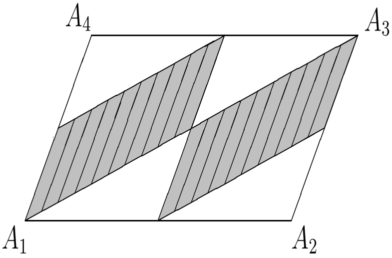
A titolo di esempio, vediamo la costruzione geometrica detta "venetian blind", che dato un parallelogramma P, gli associa una collezione finita di parallelogrammi contenuti in P, nel seguente modo.

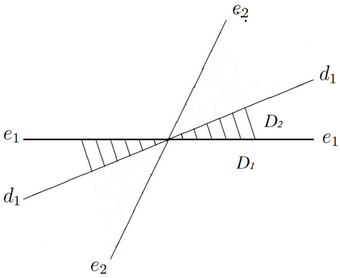




Costruzioni per parallelogrammi

A titolo di esempio, vediamo la costruzione geometrica detta "venetian blind", che dato un parallelogramma P, gli associa una collezione finita di parallelogrammi contenuti in P, nel seguente modo.

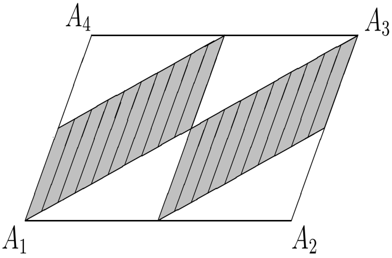


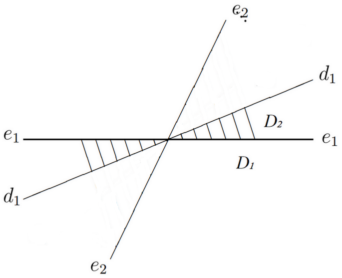


Ogni retta in direzione appartenente a D_1 che interseca P interseca anche uno dei nuovi parallelogrammi.

Costruzioni per parallelogrammi

A titolo di esempio, vediamo la costruzione geometrica detta "venetian blind", che dato un parallelogramma P, gli associa una collezione finita di parallelogrammi contenuti in P, nel seguente modo.

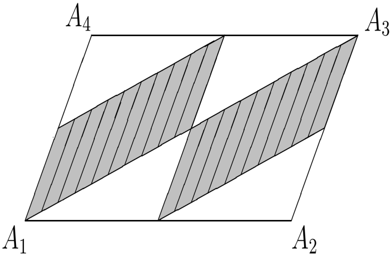


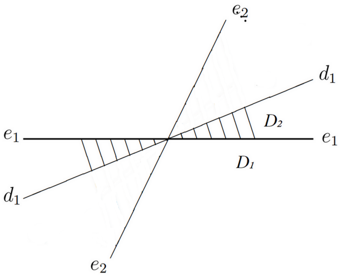


Ogni retta in direzione appartenente a D_1 che interseca P interseca anche uno dei nuovi parallelogrammi.
La misura delle proiezioni di ciascuno di questi parallelogrammi sulla retta A_1A_4 è al più $|A_1A_4|$ in ogni direzione in D_2.

Costruzioni per parallelogrammi

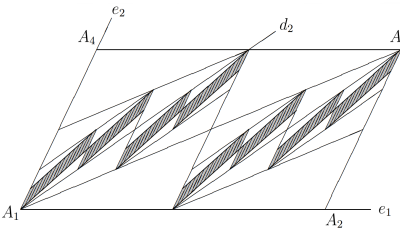
A titolo di esempio, vediamo la costruzione geometrica detta "venetian blind", che dato un parallelogramma P, gli associa una collezione finita di parallelogrammi contenuti in P, nel seguente modo.

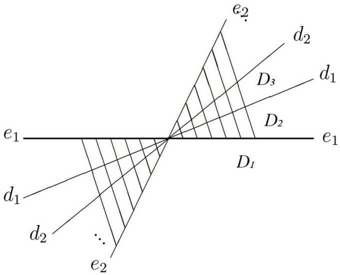




Ogni retta in direzione appartenente a D_1 che interseca P interseca anche uno dei nuovi parallelogrammi.
La misura delle proiezioni di ciascuno di questi parallelogrammi sulla retta A_1A_4 è al più $|A_1A_4|$ in ogni direzione in D_2. Quindi la misura della proiezione dell'unione dei parallelogrammi è al più $2 \cdot |A_1A_4|$.

Costruzioni per parallelogrammi





Induttivamente, all'n-esimo passo, una retta in direzione in D_1 che interseca P, interseca uno dei parallelogrammi dell'n-esimo passo.
Inoltre la misura della proiezione dell'unione dei parallelogrammi sulla retta A_1A_4 è al più $2 \cdot |A_1A_4|$ in ogni direzione in $D_2, ..., D_{n+1}$.

Costruzioni per parallelogrammi

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuo;*
- *in ogni direzione ci sono trascurabili rette che intersecano A e non appartengono a L.*

Costruzioni per parallelogrammi

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuo;*
- *in ogni direzione ci sono trascurabili rette che intersecano A e non appartengono a L.*

Si costruisce A tramite intersezioni e unioni di parallelogrammi sempre più piccoli.

Costruzioni per parallelogrammi

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuo;*
- *in ogni direzione ci sono trascurabili rette che intersecano A e non appartengono a L.*

Si costruisce A tramite intersezioni e unioni di parallelogrammi sempre più piccoli.
La condizione topologica è piuttosto diretta.

Costruzioni per parallelogrammi

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuo;*
- *in ogni direzione ci sono trascurabili rette che intersecano A e non appartengono a L.*

Si costruisce A tramite intersezioni e unioni di parallelogrammi sempre più piccoli.
La condizione topologica è piuttosto diretta.
Presa una retta $\ell \notin L$ che interseca A, mostro che la misura della proiezione di A in direzione di ℓ è arbitrariamente piccola.

Generalizzazione del teorema

Teorema

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ *misurabile e* μ *una misura boreliana* σ*-finita nel piano. Allora esiste un insieme boreliano di rette* L *tale che:*

- L *contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di* A*;*

- $\mu(A) = \mu(L^*)$*.*

Generalizzazione del teorema

Teorema

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ *misurabile e* μ *una misura boreliana* σ*-finita nel piano. Allora esiste un insieme boreliano di rette* L *tale che:*
- L *contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di* A*;*
- $\mu(A) = \mu(L^*)$*.*
Similmente, data una misura boreliana μ σ*-finita sull'insieme delle rette nel piano, per un insieme misurabile di rette* L*, esiste un insieme di punti* A *tale che ogni retta di* L *interseca* A *in un insieme residuo e* $\mu(A^*) = \mu(L)$*.*

Generalizzazione del teorema

Teorema

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ *misurabile e* μ *una misura boreliana* σ*-finita nel piano. Allora esiste un insieme boreliano di rette* L *tale che:*
- L *contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di* A*;*
- $\mu(A) = \mu(L^*)$*.*
Similmente, data una misura boreliana μ σ*-finita sull'insieme delle rette nel piano, per un insieme misurabile di rette* L*, esiste un insieme di punti* A *tale che ogni retta di* L *interseca* A *in un insieme residuo e* $\mu(A^*) = \mu(L)$*.*

Dimostriamo solo il primo enunciato. La prima verifica è che dato L insieme di rette boreliano, allora L^* è misurabile rispetto a qualsiasi misura μ boreliana σ-finita.

Misurabilità di L^*

Introduciamo alcune definizioni generali.

Definizione

Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una collezione di suoi sottoinsiemi.

Misurabilità di L^*

Introduciamo alcune definizioni generali.

Definizione

Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una collezione di suoi sottoinsiemi. Diciamo che un insieme A è analitico o di Suslin se è nella forma

$$A = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1,\dots,n_k}.$$

per opportuni $A_{n_1,\dots,n_k} \in \mathcal{E}$.

Misurabilità di L^*

Introduciamo alcune definizioni generali.

Definizione

Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una collezione di suoi sottoinsiemi. Diciamo che un insieme A è analitico o di Suslin se è nella forma

$$A = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1,\dots,n_k}.$$

per opportuni $A_{n_1,\dots,n_k} \in \mathcal{E}$.
Questa è detta operazione di Suslin.
La collezione degli insiemi di questo tipo e l'insieme vuoto è indicata con $S(\mathcal{E})$.

Misurabilità di L^*

Valgono i seguenti teoremi generali.

Misurabilità di L^*

Valgono i seguenti teoremi generali.

Teorema

1. $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$

Misurabilità di L^*

Valgono i seguenti teoremi generali.

Teorema

1. $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$
2. *Se $\mathcal{E}$ chiuso per complementare e $\varnothing \in \mathcal{E}$, la σ-algebra $\sigma(\mathcal{E})$ generata da $\mathcal{E}$ è contenuta in $S(\mathcal{E})$.*

Misurabilità di L^*

Valgono i seguenti teoremi generali.

Teorema

1. $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$
2. *Se $\mathcal{E}$ chiuso per complementare e $\varnothing \in \mathcal{E}$, la σ-algebra $\sigma(\mathcal{E})$ generata da $\mathcal{E}$ è contenuta in $S(\mathcal{E})$.*

Siccome L insieme boreliano, applicando il teorema con $\mathcal{E}$ la classe dei compatti di $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, si ha

$$L = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K_{n_1,\dots,n_k}$$

con $K_{n_1,\dots,n_k} \in \mathcal{E}$. Posso anche supporre che l'intersezione sia decrescente.

Misurabilità di L^*

Si mostra che vale anche

$$L^* = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K^*_{n_1,\dots,n_k}.$$

Misurabilità di L^*

Si mostra che vale anche

$$L^* = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K^*_{n_1,\dots,n_k}.$$

Si mostra che dato K compatto di rette, allora K^* analitico.

Misurabilità di L^*

Si mostra che vale anche

$$L^* = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K^*_{n_1,\ldots,n_k}.$$

Si mostra che dato K compatto di rette, allora K^* analitico. Ricordando che $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$, abbiamo quindi che L^* analitico.

Misurabilità di L^*

Si mostra che vale anche

$$L^* = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K^*_{n_1,\dots,n_k}.$$

Si mostra che dato K compatto di rette, allora K^* analitico. Ricordando che $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$, abbiamo quindi che L^* analitico. Concludiamo applicando il seguente teorema.

Misurabilità di L^*

Si mostra che vale anche

$$L^* = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K^*_{n_1,\dots,n_k}.$$

Si mostra che dato K compatto di rette, allora K^* analitico. Ricordando che $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$, abbiamo quindi che L^* analitico. Concludiamo applicando il seguente teorema.

Teorema

Detta μ una misura σ-finita. Se $\mathcal{E}$ famiglia di insiemi misurabili chiusa per unioni finite e intersezioni numerabili, ogni insieme in $S(\mathcal{E})$ è μ-misurabile.

Generalizzazione del teorema

Dato A misurabile, cerchiamo quindi un insieme boreliano L che copra A con le caratteristiche richieste.

Generalizzazione del teorema

Dato A misurabile, cerchiamo quindi un insieme boreliano L che copra A con le caratteristiche richieste.

Dimostrazione

- Passo 1: possiamo assumere che μ abbia supporto compatto K disgiunto da A.

Generalizzazione del teorema

Dato A misurabile, cerchiamo quindi un insieme boreliano L che copra A con le caratteristiche richieste.

Dimostrazione

- Passo 1: possiamo assumere che μ abbia supporto compatto K disgiunto da A.
- Passo 2: possiamo assumere che $A = B(x, r) \setminus \{x\}$ e $B(x, 2r)$ sia disgiunta da K. Per brevità, assumiamo $A = B(0, 1) \setminus \{0\}$ e $B(0, 2) \cap K = \varnothing$.

Dato A misurabile, cerchiamo quindi un insieme boreliano L che copra A con le caratteristiche richieste.

Dimostrazione

- Passo 1: possiamo assumere che μ abbia supporto compatto K disgiunto da A.
- Passo 2: possiamo assumere che $A = B(x, r)\backslash\{x\}$ e $B(x, 2r)$ sia disgiunta da K. Per brevità, assumiamo $A = B(0, 1)\backslash\{0\}$ e $B(0, 2) \cap K = \varnothing$.
- Passo 3: per concludere, applichiamo la versione rafforzata del teorema di Davies per la misura di Lebesgue.

Passo 3

Applicando il lemma 1 ad A e $x = 0$, otteniamo l'insieme boreliano di rette M.

Passo 3

Applicando il lemma 1 ad A e $x = 0$, otteniamo l'insieme boreliano di rette M.

- M contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di A;
- $M^* \setminus A$ interseca ogni retta per 0 in un insieme di misura di Lebesgue nulla.

Passo 3

Applicando il lemma 1 ad A e $x = 0$, otteniamo l'insieme boreliano di rette M.

- M contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di A;
- $M^* \setminus A$ interseca ogni retta per 0 in un insieme di misura di Lebesgue nulla.

Sia $M^{**} = M^* \backslash B(0,1)$, sappiamo che M^{**} interseca ogni retta per 0 in un insieme di misura di Lebesgue nulla.

Passo 3

Applicando il lemma 1 ad A e $x = 0$, otteniamo l'insieme boreliano di rette M.

- M contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di A;
- $M^* \setminus A$ interseca ogni retta per 0 in un insieme di misura di Lebesgue nulla.

Sia $M^{**} = M^* \setminus B(0,1)$, sappiamo che M^{**} interseca ogni retta per 0 in un insieme di misura di Lebesgue nulla.
Consideriamo lo spazio

$$\left(\mathbb{R}^2, \mu\right) \times (\mathbb{R}, \lambda),$$

dove λ è la misura di Lebesgue sulla retta e consideriamo il sottoinsieme

$$\left\{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : ty \in M^{**}\right\}.$$

Passo 3

Applicando il lemma 1 ad A e $x = 0$, otteniamo l'insieme boreliano di rette M.

- M contiene un insieme residuo di rette per ogni punto di A;
- $M^* \setminus A$ interseca ogni retta per 0 in un insieme di misura di Lebesgue nulla.

Sia $M^{**} = M^* \backslash B(0,1)$, sappiamo che M^{**} interseca ogni retta per 0 in un insieme di misura di Lebesgue nulla.
Consideriamo lo spazio

$$\left(\mathbb{R}^2, \mu\right) \times (\mathbb{R}, \lambda),$$

dove λ è la misura di Lebesgue sulla retta e consideriamo il sottoinsieme

$$\left\{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : ty \in M^{**}\right\}.$$

Per ogni $y \neq 0$ vale $\lambda(\{t : ty \in M^{**}\}) = 0$, cioè tutte queste sezioni verticali hanno misura di Lebesgue nulla.

Passo 3

Quindi λ-quasi ogni sezione orizzontale di $\left\{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : ty \in M^{**}\right\}$ ha misura μ nulla.
Possiamo scegliere un numero u tale che $1/2 < u < 1$ e $\mu\left(\{y : uy \in M^{**}\}\right) = 0$.

Passo 3

Quindi λ-quasi ogni sezione orizzontale di $\left\{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : ty \in M^{**}\right\}$ ha misura μ nulla.
Possiamo scegliere un numero u tale che $1/2 < u < 1$ e $\mu\left(\{y : uy \in M^{**}\}\right) = 0$.
Poniamo $t = 1/u$.
Quindi $1 < t < 2$ e $\mu\left(tM^{**}\right) = 0$. Affermiamo che tM soddisfa la tesi.

Passo 3

Quindi λ-quasi ogni sezione orizzontale di $\left\{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : ty \in M^{**}\right\}$ ha misura μ nulla.
Possiamo scegliere un numero u tale che $1/2 < u < 1$ e $\mu\left(\{y : uy \in M^{**}\}\right) = 0$.
Poniamo $t = 1/u$.
Quindi $1 < t < 2$ e $\mu\left(tM^{**}\right) = 0$. Affermiamo che tM soddisfa la tesi.

- siccome tM contiene residue rette per i punti di tA e $A \subset tA$, è vera la prima affermazione.

Passo 3

Quindi λ-quasi ogni sezione orizzontale di $\left\{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : ty \in M^{**}\right\}$ ha misura μ nulla.
Possiamo scegliere un numero u tale che $1/2 < u < 1$ e $\mu\left(\{y : uy \in M^{**}\}\right) = 0$.
Poniamo $t = 1/u$.
Quindi $1 < t < 2$ e $\mu\left(tM^{**}\right) = 0$. Affermiamo che tM soddisfa la tesi.

- siccome tM contiene residue rette per i punti di tA e $A \subset tA$, è vera la prima affermazione.
- poiché $B(0,2) \cap K = \varnothing$ e $t < 2$,

$$\mu\left(tM^{*}\right) = \mu\left(tM^{*} \cap K\right) = \mu\left(tM^{*} \backslash B(0,t)\right)$$

Inoltre $tM^{*} \backslash B(0,t) = tM^{**}$

Passo 3

Quindi λ-quasi ogni sezione orizzontale di $\left\{(y,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : ty \in M^{**}\right\}$ ha misura μ nulla.
Possiamo scegliere un numero u tale che $1/2 < u < 1$ e $\mu\left(\{y : uy \in M^{**}\}\right) = 0$.
Poniamo $t = 1/u$.
Quindi $1 < t < 2$ e $\mu\left(tM^{**}\right) = 0$. Affermiamo che tM soddisfa la tesi.

- siccome tM contiene residue rette per i punti di tA e $A \subset tA$, è vera la prima affermazione.
- poiché $B(0,2) \cap K = \varnothing$ e $t < 2$,

$$\mu\left(tM^*\right) = \mu\left(tM^* \cap K\right) = \mu\left(tM^* \setminus B(0,t)\right)$$

  Inoltre $tM^* \setminus B(0,t) = tM^{**}$
  Siccome $\mu\left(tM^{**}\right) = 0$, anche $\mu(tM^*) = 0 = \mu(A)$. $\square$

Bibliografia

Bibliografia

- *How to make Davies' Theorem visible*, M. Csörnyei
- *On the visibility of invisible sets*, M. Csörnyei
- *Measure Theory*, V.I. Bogachev

Grazie per l'attenzione