UNIVERSITÀ DI PISA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA

Corso di Laurea Triennale in Matematica

Costruzioni paradossali in Teoria della Misura: il Teorema di Davies

Relatori:

Prof. Luigi Ambrosio

Candidato:

Chiara Molinari

ANNO ACCADEMICO 2021/2022

Indice

1 Introduzione

Nel 1952 R. O. Davies dimostrò che, dato un insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^2$, esiste un insieme di rette L tali che per ogni punto di A passa una retta di L (diremo che L copre A) e l'insieme di punti coperto dalle rette di L ha la stessa misura di Lebesgue di A.

Definizione 1.1. *Dato uno spazio di misura* $(X, \mathcal{A})$*, una misura* μ *si dice* σ*-finita se esistono degli insiemi* $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ *con* $\mu(A_n) < \infty$ *per ogni* $n \in \mathbb{N}$*, tali che* $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = X$*.*
Se X *spazio topologico, una misura* μ *su* X *si dice boreliana se ogni boreliano è misurabile.*

Il nostro obiettivo è dimostrare una generalizzazione del teorema di Davies per una generica misura boreliana σ-finita. Ciò è possibile mostrando un rafforzamento del teorema di Davies (nel caso della misura di Lebesgue e A aperto), che consente la generalizzazione cercata.
Per fare questo, il primo passo è formulare il problema in forma duale, cioè facendo corrispondere a ogni retta un punto e viceversa.
Successivamente, si mostra l'enunciato in forma duale, facendo uso di alcuni lemmi dimostrati nella sezione finale.
La generalizzazione del teorema invece richiederà lo sviluppo della teoria riguardante gli insiemi di Suslin.
ovviamente sistemare

2 Misura su insiemi di rette

Consideriamo l'insieme delle rette in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, dove ogni retta è descritta dall'equazione omogenea $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$, per opportuni coefficienti a, b, c.
Possiamo identificare ogni retta con un punto di $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, attraverso la bigezione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0 \mapsto [a, b, c]$, che chiameremo corrispondenza duale.
Dato un insieme di rette proiettive, diciamo che questo è aperto, compatto, boreliano se il sottoinsieme di $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ corrispondente nel duale lo è.

Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, realizzato come quoziente di $\mathbb{S}^2$ rispetto alla mappa π che identifica i punti antipodali. Una misura su $\mathbb{S}^2$ induce tramite π una misura su $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$. Nel caso la misura su $\mathbb{S}^2$ sia misura usuale di area, chiameremo la misura immagine θ.
Così, data una misura μ in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, si ha in modo naturale una misura $\tilde{\mu}$ sulle rette proiettive. In particolare, diciamo che un insieme di rette è misurabile rispetto a $\tilde{\mu}$ se l'insieme di punti duale lo è rispetto a μ.

Data una retta affine in $\mathbb{R}^2$, si può omogeneizzare l'equazione che la descrive, associando a $a + bx + cy = 0$ l'equazione omogenea $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$, e assumere che questa retta sia in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$. Si definisce così una misura anche sulle rette affini.
Come prima si può parlare di insiemi di rette affini aperti, compatti, boreliani, misurabili.

Osservazione 2.1. *Un insieme di rette passanti per un punto P, è rappresentato nel duale da punti appartenenti a una retta ℓ_P.*
Infatti se $P = [a, b, c]$, una retta passante per P soddisfa $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$. Tale retta è rappresentata da $[x_0, x_1, x_2]$, che quindi appartiene alla retta $az_0 + bz_1 + cz_2 = 0$.
In particolare, ℓ_P è rappresentata nel duale dal punto P.

Fissato un punto P nel piano proiettivo, la misura $\tilde{\theta}$ delle rette passanti per esso è sempre nulla, perché un'insieme lineare in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ ha area nulla.
Usando l'osservazione, si può comunque definire una misura sulle rette passanti per P: è quella indotta dalla naturale misura di lunghezza sulla retta proiettiva ℓ_P (omeomorfa a $\mathbb{S}^1$ quozientato).

Definizione 2.2. *Una direzione è un punto all'infinito della chiusura proiettiva di $\mathbb{R}^2$. La misura sulle direzioni è data dalla misura di lunghezza sulla retta all'infinito. Dato un insieme di rette L in $\mathbb{R}^2$ e una direzione d, sia L_d l'insieme delle rette di L in direzione d.*

A meno passare alle chiusura proiettiva, L_d è un sottoinsieme di rette passanti per un fissato punto all'infinito Q.
Come prima, la misura $\tilde{\theta}$ di L_d è nulla, ma esiste una misura su tale insieme, indotta dalla misura lineare su ℓ_Q.

Con queste definizioni, si osserva che L_d ha misura $\tilde{\theta}$ nulla se e solo se per ogni t_d retta ortogonale alla direzione d, $(\bigcup L_d) \cap t_d$ ha misura lineare nulla.
Inoltre vale il seguente lemma.

Lemma 2.3. *Un insieme misurabile di rette L nel piano ha misura $\tilde{\theta}$ nulla se e solo se contiene trascurabili rette in quasi ogni direzione.*

Dimostrazione. Ogni insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^2$ ha misura nulla se e solo se esiste $x \in \mathbb{R}^2$ (equivalentemente, per ogni x), quasi ogni retta per x interseca A in insieme di misura lineare nulla. Infatti segue subito applicando il teorema di Fubini e un cambio di variabili in coordinate polari nel piano.
Posso supporre che L sia un insieme di rette proiettive, rappresentato nel duale dai punti A.
Fissiamo x punto nel duale, che corrisponde alla retta all'infinito.
Passando in carte, posso supporre che $x \in \mathbb{R}^2$ e $A \subseteq \mathbb{R}^2$, a meno di un insieme di misura nulla.
$\tilde{\theta}(L) = 0 \Leftrightarrow \theta(A) = 0 \Leftrightarrow$ per quasi ogni retta ℓ per x, $\theta(\ell \cap A) = 0$.
Passando al duale, questo avviene se e solo se per quasi ogni punto all'infinito (direzione), la misura delle rette di L passanti per quel punto (in quella direzione) è nulla. $\square$

3 Il Teorema di Davies per la misura di Lebesgue

Procediamo con la dimostrazione di lemma che implica il teorema di Davies nel caso della misura di Lebesgue e A aperto.
Premettiamo alcune definizioni e proprietà.

Definizione 3.1. *Per un insieme di rette L nel piano $\mathbb{R}^2$, sia $L^* = \{\bigcup \ell | \ell \in L\}$, cioè i punti di $\mathbb{R}^2$ coperti da rette di L; per un insieme di punti $A \subseteq \mathbb{R}^2$, sia A^* l'insieme delle rette per i punti di A.*

Definizione 3.2. *Un insieme è residuale se il suo complementare è di prima categoria. Un insieme è di prima categoria se unione numerabile di insiemi mai densi (cioè con chiusura a parte interna vuota).*

Proposizione 3.3. *Sono vere le seguenti proprietà:*

- *ogni soprainsieme di un insieme residuale è residuale. In particolare, l'unione arbitraria di insiemi residuali è residuale.*
- *l'intersezione numerabile di insiemi residuali, è residuale. Inoltre l'intersezione numerabile di aperti densi è un insieme residuale.*

Dimostrazione. Passando al complementare, sia A di prima categoria e $B \subseteq A$. Vale $A = \bigcup_n U_n$, con gli U_n mai densi.
Allora $B = \bigcup_n (B \cap U_n)$, cioè è unione numerabile di insiemi mai densi.
Sia ora $A = \bigcup_n A_n$, con A_n di prima categoria per ogni n, cioè A_n è unione numerabile di insiemi mai densi. Allora anche A è unione numerabile di insiemi mai densi.
Mostriamo infine che un aperto denso è residuale. Infatti il suo complementare è un chiuso a parte interna vuota. □

Lemma 3.4. *Sia A aperto del piano e sia x un punto che non appartiene ad A. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:*

- *per ogni punto di A, L contiene un insieme residuale di rette;*
- *$L^* \backslash A$ interseca ogni retta per x in un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

Ricordiamo che, per Fubini, il sottoinsieme del piano $L^* \setminus A$ ha misura di Lebesgue nulla se e solo se, dato un punto x, *quasi* ogni retta per x interseca $L^* \setminus A$ in un insieme di misura lineare nulla.
Il lemma richiede non solo che $L^* \setminus A$ abbia misura nulla, ma anche che intersechi ogni retta per un dato punto in un insieme di misura lineare nulla.
Inoltre è la condizione di residualità implica che L copre A. Infatti preso un punto di A, per il teorema di Baire, se l'insieme di rette di L passanti per esso è residuale, allora è non vuoto.

In questo lemma, i punti e le rette in questione sono affini. Quindi per definire la versione duale del lemma, bisogna dare una formulazione "proiettiva" equivalente, immergendo $\mathbb{R}^2$ in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$. Si ammette che A possa avere punti all'infinito e L possa contenere la retta all'infinito. Si richiede che x non sia all'infinito. Inoltre, la misura di Lebesgue sulla retta è sostituta dalla misura di lunghezza su una retta proiettiva. Questa operazione è possibile perché:

- la nozione di misura nulla su una retta è ben definita: con le definizioni date, un sottoinsieme di una retta proiettiva ha misura nulla se e solo se la sua parte affine ha misura di Lebesgue nulla.
- si aggiunge a L al più una retta, quindi la condizione di residualità è invariata.
- si aggiunge a $L^* \setminus A$ al più i punti della retta all'infinito. Quindi, data una retta proiettiva passante per x, la nozione di trascurabilità della sua intersezione con $L^* \setminus A$ rimane invariata.

Dopo queste osservazioni, ha senso la formulazione duale del lemma, come segue

Lemma 3.5. *Sia L un insieme aperto di rette e sia X un retta non appartenente a L. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:*

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuale;*
- *per ogni punto di X passano trascurabili rette di $A^*\setminus L$.*

Si mostra facilmente che la formulazione duale è equivalente a quella data inizialmente. Mostriamo l'implicazione utile a noi, introducendo prima la seguente notazione. Dato un punto p, sia p^* l'insieme delle rette passanti per p. Data una retta ℓ, sia ℓ^* l'insieme dei punti passanti per ℓ.
Indichiamo con λ la misura lineare su una retta proiettiva.

Dimostrazione. Sia M l'aperto di rette corrispondente nel duale ad A e X la retta proiettiva corrispondente a x. Applicando il lemma 3.5 a questi, esiste un insieme boreliano di punti B per cui:

- $\forall \ell \in M, \ell^* \cap B$ è residuale;
- $\forall p \in X, \lambda((B^* \setminus M) \cap p^*) = 0$

Chiamando L l'insieme di rette che rappresenta nel duale B, valgono le seguenti:

- $\forall p \in A, p^* \cap L$ è residuale;
- $\forall \ell \ni x, \lambda((L^* \setminus A) \cap \ell^*) = 0$

□

Possiamo assumere che X sia la retta all'infinito. Allora i punti di X sono direzioni di rette nel piano e le rette di L sono tutte affini. Possiamo formulare il lemma 3.5 in una versione equivalente.

Lemma 3.6. *Sia L un insieme aperto di rette, allora esiste un insieme di punti A tale che:*

- *ogni retta di L intersechi A in un insieme residuale;*
- *in ogni direzione ci siano trascurabili rette di $A^* \backslash L$.*

Per dimostrarlo, usiamo il seguente lemma, la cui dimostrazione è riportata nell'ultima sezione.
Introduciamo anche la seguente notazione. Per un dato parallelogramma P (aperto e non degenere) e un intervallo di direzioni I, sia $A_{P,I}$ l'insieme di rette per i punti di P in direzioni appartenenti a I.

Lemma 3.7. questa parte è ancora da sistemare *Per ogni parallelogramma P, numero positivo ε e intervalli di direzioni I, J tale che $\operatorname{cl}(I) \subset \operatorname{int}(J)$, esistono dei sotto parallelogrammi $P_1, P_2, \ldots$ tali che:*

- *ogni retta che interseca P e la cui direzione appartiene a I interseca anche uno dei parallelogrammi, cioè $\bigcup_n A_{P_n,I} = A_{P,I}$;*
- *la proiezione di $\bigcup_n P_n$ ha misura di Lebesgue minore di ε in ogni direzione non appartenente a J.*

Dimostrazione. Scegliamo $\varepsilon_{\mathbf{n}}$ positivo per ogni sequenza finita di naturali $\mathbf{n} = n_1 n_2 \cdots n_k$ tale che per ogni k si abbia $\sum_{\mathbf{n}=n_1 n_2 \cdots n_k} \varepsilon_{\mathbf{n}} < 1/2^k$.
Siano $P_1, P_2, \ldots$ parallelogrammi aperti con vertici razionali a cosa serve? e siano $I_1, I_2, \ldots$ intervalli aperti razionali di direzioni, tali che $A_{P_j,I_j} \subset L$ per ogni j, e per ogni retta $\ell \in L$, l'insieme $\left\{P_j : \ell \in A_{P_j,I_j}\right\}$ sia un ricoprimento di Vitali di ℓ, cioè ogni punto di ℓ sia coperto da un parallelogramma arbitrariamente piccolo. l'esistenza di una configurazione di questo tipo è garantita dal fatto che L sia aperto.
Se $P = P_{\mathbf{n}}, I = I_{\mathbf{n}}$ e $\varepsilon = \varepsilon_{\mathbf{n}}$ sono stati definiti per una sequenza finita di naturali $\mathbf{n} = n_1 n_2 \cdots n_k$, allora definiamo $P_{\mathbf{n}j}, I_{\mathbf{n}j}$ per ogni $j \in \mathbb{N}$ nel seguente modo.
Scegliamo dei sotto-parallelogrammi aperti razionali $P^1, P^2, \ldots$ di $P = P_{\mathbf{n}}$ e dei sotto-intervalli aperti razionali $I^1, I^2, \ldots$ di $I = I_{\mathrm{n}}$ tali che per ogni $\ell \in A_{P,I}$, l'insieme di sotto-parallelogrammi $\left\{P^j : \ell \in A_{P^j,I^j}\right\}$ sia un ricoprimento di Vitali del segmento $\ell \cap P$.
Posso avere $I = I_j$?
Scegliamo ε^j positivi tale che $\sum_j \varepsilon^j < \varepsilon = \varepsilon_{\mathbf{n}}$ e degli intervalli razionali di direzioni J^j tali che $\operatorname{cl}\left(I^j\right) \subset \operatorname{int}\left(J^j\right)$ e $\sum_j \left|J^j \backslash I^j\right| < \varepsilon$. Si applica il lemma 3.7 a tutti i parallelogrammi P^j, con intervalli I^j, J^j e numeri ε^j. Otteniamo un insieme numerabile di sotto-parallelogrammi di P, che chiameremo $P_{\mathbf{n}1}, P_{\mathbf{n}2}, \ldots$. Per ogni m per cui il parallelogramma $P_{\mathbf{n}m}$ è ottenuto con il lemma 3.7 applicato a $P^j, I^j, J^j, \varepsilon^j$, sia $I_{\mathbf{n}m}$ l'intervallo I^j.
L'insieme $\left\{P^j : \ell \in A_{P^j,I^j}\right\}$ era un ricoprimento di Vitali di $\ell \cap P$ per ogni $\ell \in A_{P^j,I^j}$; inoltre per il primo punto del lemma 3.7, ℓ interseca uno dei sotto-parallelogrammi ottenuti applicando il lemma a $P^j, I^j, J^j, \varepsilon^j$. Quindi l'insieme $\left\{P_{\mathrm{n}m} : \ell \in A_{P_{\mathrm{n}m},I_{\mathrm{n}m}}\right\}$

copre un sottoinsieme aperto denso del segmento $\ell \cap P$.
Segue che $\bigcup_{\mathbf{n}=n_1 n_2 \cdots n_k} P_{\mathbf{n}}$ interseca ogni retta $\ell \in L$ in un insieme aperto denso, quindi, per quanto osservato prima, l'insieme

$$A := \bigcap_k \bigcup_{\mathbf{n}} P_{\mathbf{n}=n_1 n_2 \cdots n_k}$$

interseca ogni retta $\ell \in L$ in un insieme residuale, quindi soddisfa la prima condizione del lemma 3.6.
D'altra parte, se $\ell \notin L$, o ℓ non interseca $P_{\mathbf{n}}$ per ogni sequenza $\mathbf{n}$, oppure esiste $\mathbf{n}$ per cui la direzione di ℓ non appartiene a $I_{\mathbf{n}}$.
Nel primo caso in particolare si ha che ℓ non interseca A.
Nel secondo caso, la direzione di ℓ non appartiene a $\bigcup_{m_1 m_2 \cdots m_l} J_{nm_1 \cdots m_l}$ per l abbastanza grande perché? devo ancora usare ipotesi, immagino servano proprio qui, quindi la proiezione di $\bigcup_{m_1 m_2 \cdots m_l} P_{\mathbf{n}m_1 \cdots m_l}$ nella direzione di ℓ ha misura minore ho uguale a $\sum_{m_1 m_2 \cdots m_l} \varepsilon_{\mathbf{n}m_1 \cdots m_l} \leq c/2^l$ per un'opportuna costante c. Per l'arbitrarietà di l, nella direzione di ℓ ci sono trascurabili rette che intersecano A. cosa sono i J con indice in basso? immagino siano definiti come gli I con indici in basso
Prendo gli I_n contenuti strettamente in quelli prima. In questo modo, è vera la cosa di "l abbastanza grande". La struttura è la seguente. Consideriamo una direzione. Sia ℓ in quella direzione e $\ell \not{i}nL$.
Se per ogni... allora ℓ non interseca A.
Se esiste un P_n, allora per l abbastanza grande... Trovo che la proiezione ortogonale di A in quella direzione è nulla, in particolare ci sono trascurabili rette non in L in quella direzione che intersecano A $\square$

4 Problema della misurabilità di L^* e teoria di Suslin

Nel tentativo di generalizzare il teorema per una misura boreliana σ-finita μ, si chiede che, dato un insieme di rette L boreliano, l'insieme di punti L^* coperto da tali rette sia misurabile rispetto a μ.
La dimostrazione di questo fatto richiede l'introduzione di alcuni concetti più generali nell'ambito della teoria della misura.

Definizione 4.1. *Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una collezione di suoi sottoinsiemi. Diciamo che $\{A_{n_1,\dots,n_k}\}$ è uno schema di Suslin a valori in $\mathcal{E}$ se per ogni sequenza finita di naturali $(n_1,\dots,n_k)$, si ha $A_{n_1,\dots,n_k} \in \mathcal{E}$.*
L'operazione di Suslin (o A-operazione) in $\mathcal{E}$ associa a ogni schema di Suslin $\{A_{n_1,\dots,n_k}\}$ a valori in $\mathcal{E}$ l'insieme

$$A = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1,\dots,n_k}.$$

Gli insiemi in questa forma sono detti di $\mathcal{E}$-Suslin o $\mathcal{E}$-analitici.
La collezione degli insiemi di questo tipo e l'insieme vuoto è indicata con $S(\mathcal{E})$.

Diciamo che uno schema di Suslin è monotono (o regolare) se $A_{n_1,\dots,n_k,n_{k+1}} \subset A_{n_1,\dots,n_k}$ per ogni k e per ogni successione (n_i).
Se $\mathcal{E}$ è chiuso per intersezione finita, allora uno schema di Suslin $\{A_{n_1,\dots,n_k}\}$ a valori in $\mathcal{E}$ può essere sostituito da uno schema monotono $\left\{A^*_{n_1,\dots,n_k}\right\}$ che dà lo stesso risultato applicando l'operazione di Suslin. Infatti basta porre

$$A^*_{n_1,\dots,n_k} := A_{n_1} \cap A_{n_1,n_2} \cap \dots \cap A_{n_1,\dots,n_k}.$$

Mostriamo ora il seguente lemma, dove con $(\mathbb{N}^\infty)^\infty$ indichiamo lo spazio delle successioni $\eta = \left(\eta^1, \eta^2, \dots\right)$ con $\eta^i \in \mathbb{N}^\infty$.

Lemma 4.2. *Esistono delle bigezioni*

$$\beta : \mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N} \quad \textit{and} \quad \Psi : \mathbb{N}^\infty \times (\mathbb{N}^\infty)^\infty \to \mathbb{N}^\infty$$

tali che per ogni $m,n \in \mathbb{N}, \sigma = (\sigma_i) \in \mathbb{N}^\infty$ e $\left(\tau^i\right) \in (\mathbb{N}^\infty)^\infty$, dove $\tau^i = \left(\tau^i_j\right) \in \mathbb{N}^\infty$, le collezioni $\sigma_1,\dots,\sigma_m$ e $\tau^m_1,\dots,\tau^m_n$ sono univocamente determinate dalle prime $\beta(m,n)$ componenti di $\Psi\left(\sigma,\left(\tau^i\right)\right)$.

Dimostrazione. Sia $\beta(m,n) = 2^{m-1}(2n-1)$. Allora β è una bigezione da $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ in $\mathbb{N}$ (per unicità della fattorizzazione dei naturali). Siano $\varphi(l) := m, \psi(l) := n$, dove $\beta(m,n) = l$. Siano $\sigma = (\sigma_i) \in \mathbb{N}^\infty$ e $\left(\tau^i\right) \in (\mathbb{N}^\infty)^\infty$, con $\tau^i = \left(\tau^i_j\right) \in \mathbb{N}^\infty$. Poniamo

$$\Psi\left(\sigma,\left(\tau^i\right)\right) = \left(\beta\left(\sigma_1, \tau^{\varphi(1)}_{\psi(1)}\right), \dots, \beta\left(\sigma_l, \tau^{\varphi(l)}_{\psi(l)}\right), \dots\right).$$

Allora per ogni $\eta = (\eta_i) \in \mathbb{N}^\infty$, l'equazione $\Psi\left(\sigma, \left(\tau^i\right)\right) = \eta$ ha a soluzione unica $\sigma_i = \varphi\left(\eta_i\right), \tau_{\psi(i)}^{\varphi(i)} = \psi(\eta_i)$ da cui $\tau_j^i = \psi\left(\eta_{\beta(i,j)}\right)$. Quindi Ψ è bigettiva.
Poiché $m \leq \beta(m,n)$ e $\beta(m,k) \leq \beta(m,n)$ per $k \leq n$, dalla scrittura esplicita delle soluzioni $\sigma, (\tau^i)$ segue che le prime $\beta(m,n)$ componenti di $\Psi\left(\sigma, \left(\tau^i\right)\right)$ determinano univocamente le prime m componenti di σ e le prime n componenti di τ^m.

$\square$

Ora usiamo il precedente lemma per mostrare una proprietà generale degli insiemi di Suslin.

Teorema 4.3.

- $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$. *In particolare, la classe* $S(\mathcal{E})$ *è chiusa per unioni e intersezioni numerabili.*
- *Se il complementare di ogni insieme in* $\mathcal{E}$ *appartiene a* $S(\mathcal{E})$ *(ad esempio se è unione numerabile di elementi di* $\mathcal{E}$*) e* $\varnothing \in \mathcal{E}$*, allora la* σ*-algebra* $\sigma(\mathcal{E})$ *generata da* $\mathcal{E}$ *è contenuta in* $S(\mathcal{E})$.

Dimostrazione. Ovviamente $S(\mathcal{E}) \subset S(S(\mathcal{E}))$. Per l'altra inclusione, siano $A_{n_1,\ldots,n_k}^{\nu_1,\ldots,\nu_m} \in \mathcal{E}$ e siano

$$A_{n_1,\ldots,n_k} = \bigcup_{(\nu_j)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{m=1}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_k}^{\nu_1,\ldots,\nu_m}.$$

$$A = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_k} \in S(S(\mathcal{E}))$$

Con la stessa notazione di cui sopra, siano $\eta_1, \ldots, \eta_l$ naturali fissati. Per suriettività di Ψ, esistono $\sigma \in \mathbb{N}^\infty$ e $\tau = (\tau^m) \in (\mathbb{N}^\infty)^\infty$ tali che $\eta_1 = \Psi(\sigma,\tau)_1, \ldots, \eta_l = \Psi(\sigma,\tau)_l$. Anche se σ e τ non sono univocamente determinate, per il lemma precedente, le collezioni $\sigma_1, \ldots, \sigma_{\varphi(l)}$ e $\tau_1^{\varphi(l)}, \ldots, \tau_{\psi(l)}^{\varphi(l)}$ lo sono. Ha senso quindi porre

$$B\left(\eta_1, \ldots, \eta_l\right) = A_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{\varphi(l)}}^{\tau_1^{\varphi(l)},\ldots,\tau_{\psi(l)}^{\varphi(l)}} \in \mathcal{E}.$$

Sia $\eta = (\eta_l) \in \mathbb{N}^\infty$. Mostriamo che $A = \bigcup_\eta \bigcap_{l=1}^\infty B(\eta_1, \ldots, \eta_l) \in S(\mathcal{E})$, quindi che $S(S(\mathcal{E})) \subset S(\mathcal{E})$.

$$\begin{aligned}
\bigcup_\eta \bigcap_{l=1}^\infty B(\eta_1, \ldots, \eta_l) &= \bigcup_{\sigma,(\tau^m)} \bigcap_{l=1}^\infty B\left(\Psi\left(\sigma, (\tau^m)\right)_1, \ldots, \Psi\left(\sigma, (\tau^m)\right)_l\right) \\
&= \bigcup_{\sigma,(\tau^m)} \bigcap_{l=1}^\infty A_{\sigma_1,\ldots,\sigma_{\varphi(l)}}^{\tau_1^{\varphi(l)},\ldots,\tau_{\psi(l)}^{\varphi(l)}} = \bigcup_{\sigma,(\tau^m)} \bigcap_{m,n=1}^\infty A_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}^{\tau_1^m,\ldots,\tau_n^m} \\
&= \bigcup_\sigma \bigcup_{(\tau^m)} \bigcap_{m=1}^\infty \bigcap_{n=1}^\infty A_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}^{\tau_1^m,\ldots,\tau_n^m} = \bigcup_\sigma \bigcap_{m=1}^\infty \bigcup_{\tau^m} \bigcap_{n=1}^\infty A_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m}^{\tau_1^m,\ldots,\tau_n^m} \\
&= \bigcup_\sigma \bigcap_{m=1}^\infty A_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m} = A
\end{aligned}$$

Per concludere che $S(\mathcal{E})$ chiuso per intersezioni e unioni numerabili, consideriamo degli insiemi $B_1, B_2 ...$ in $S(\mathcal{E})$.
Allora ponendo $A_{n_1,\ldots,n_k} = B_{n_1}$ se $n_1 = ... = n_k$ e vuoto altrimenti, l'operazione di Suslin dà l'unione numerabile dei B_n.
Similmente, ponendo $A_{1,2,3,\ldots,k} = B_k$ e vuoto altrimenti, l'operazione di Suslin dà l'intersezione numerabile dei B_n.
(ii) Sia

$$\mathcal{F} = \{B \in S(\mathcal{E}) : \quad X \backslash B \in S(\mathcal{E})\}.$$

Mostriamo che $\mathcal{F}$ è una σ-algebra. Per costruzione, $\mathcal{F}$ è chiusa per complementare. Siano $B_n \in \mathcal{F}$, allora $\bigcap_{n=1}^\infty B_n \in S(\mathcal{E})$ per l'enunciato (i). Similmente, $X \backslash \bigcap_{n=1}^\infty B_n = \bigcup_{n=1}^\infty (X \backslash B_n) \in S(\mathcal{E})$, da cui $\mathcal{F}$ chiusa per intersezione. Inoltre per l'ipotesi, $\varnothing \in \mathcal{F}$. Quindi $\mathcal{F}$ è una σ-algebra. Per ipotesi $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, da cui $\sigma(\mathcal{E}) \subset \mathcal{F} \subset S(\mathcal{E})$.

□

Definizione 4.4. *Data una funzione non negativa μ definita su una classe $\mathcal{A}$ di sottoinsiemi di uno spazio X che contiene X stesso, la misura esterna è una funzione non negativa sui sottoinsiemi di X, definita come segue*

$$\mu^*(A) = \inf\{\sum_{n=1}^\infty \mu(A_n) | A_n \in \mathcal{A}, A \subseteq \bigcup_{n=1}^\infty A_n\}$$

Un insieme A è $\mu-$misurabile se per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $A_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tale che $\mu^*(A \,\Delta\, A_\varepsilon) < \varepsilon$.

Teorema 4.5. *Sia μ una misura finita su una σ-algebra $\mathcal{M}$. Allora la classe $\mathcal{M}_\mu$ di tutti gli insiemi μ-misurabili è chiusa rispetto all'operazione di Suslin. Inoltre, data una famiglia di insiemi $\mathcal{E} \subset \mathcal{M}$ chiusa rispetto a unioni finite e intersezioni numerabili vale*

$$\mu^*(A) = \sup\{\mu(E) : E \subset A, E \in \mathcal{E}\}$$

per ogni $\mathcal{E}$-insieme di Suslin A. In particolare, ogni $\mathcal{E}$-insieme di Suslin è μ-misurabile.

Dimostrazione. Il primo enunciato segue applicando il secondo alla famiglia $\mathcal{E} = \mathcal{M}_\mu$, perché $\mathcal{M}_\mu$ soddisfa le ipotesi del secondo enunciato, quindi si ha $S(\mathcal{M}_\mu) \subseteq \mathcal{M}_\mu \subseteq S(\mathcal{M}_\mu)$.
Per mostrare il secondo enunciato, sia A costruito con l'operazione di Suslin a partire da uno schema di Suslin di insiemi $E_{n_1,\dots,n_k} \in \mathcal{E}$. Siccome $\mathcal{E}$ chiuso per intersezione finita, posso supporre che sia uno schema monotono.
Sia $\varepsilon > 0$. Per ogni collezione $m_1, \dots, m_k$ di numeri naturali, indichiamo con $D_{m_1,\dots,m_k}$ l'unione di $E_{n_1,\dots,n_k}$ per $n_1 \leq m_1, \dots, n_k \leq m_k$. Poiché lo schema di Suslin è decrescente, anche la famiglia $D_{m_1,\dots,m_k}$ è decrescente in k.
Sia

$$M_{m_1,\dots,m_k} := \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty, n_1\leq m_1,\dots,n_k\leq m_k}^{\infty} \bigcap_{j=1}^{\infty} E_{n_1,\dots,n_j}.$$

Per $k, m_1, ..., m_k \to \infty$, gli insiemi $M_{m_1,\dots,m_k}$ tendono crescendo ad A e, fissati $m_1, \dots, m_k$ gli insiemi $M_{m_1,\dots,m_k,m}$ tendono crescendo a $M_{m_1,\dots,m_k}$ per $m \to \infty$.
Ricordando che la misura esterna passa al limite per unioni numerabili monotone spiegare, esiste un numero m_1 con $\mu^* (M_{m_1}) > \mu^*(A) - \varepsilon 2^{-1}$. Nello stesso modo esiste un numero m_2 con $\mu^* (M_{m_1,m_2}) > \mu^* (M_{m_1}) - \varepsilon 2^{-2}$. Induttivamente, otteniamo una successione di naturali m_k tali che

$$\mu^* (M_{m_1,m_2,\dots,m_k}) > \mu^* \left(M_{m_1,m_2,\dots,m_{k-1}}\right) - \varepsilon 2^{-k}.$$

Quindi per ogni k si ha

$$\mu^* (M_{m_1,m_2,\dots,m_k}) > \mu^*(A) - \varepsilon.$$

Poiché $\mathcal{E}$ chiuso per unioni finite, $D_{m_1,\dots,m_k} \in \mathcal{E}$; poiché $\mathcal{E}$ chiuso per intersezioni numerabili, $E := \bigcap_{k=1}^{\infty} D_{m_1,\dots,m_k} \in \mathcal{E}$. Siccome $M_{m_1,\dots,m_k} \subset D_{m_1,\dots,m_k}$, usando la precedente stima, $\mu^* (D_{m_1,m_2,\dots,m_k}) > \mu^*(A) - \varepsilon$. Quindi $\mu(E) \geq \mu^*(A) - \varepsilon$, perché gli insiemi $D_{m_1,m_2,\dots,m_k}$ decrescono a E.
Mostriamo infine che $E \subset A$. Sia $x \in E$, cioé per ogni k si ha $x \in D_{m_1,\dots,m_k}$. Quindi $x \in E_{n_1,\dots,n_k}$ per una collezione $n_1, \dots, n_k$ tale che $n_1 \leq m_1, \dots, n_k \leq m_k$.
Chiameremo queste collezioni ammissibili e costruiremo una successione infinita $n_1, n_2, \dots$ con intervalli iniziali $n_1, \dots, n_k$ ammissibili. In tal caso, si avrà $x \in \bigcap_{k=1}^{\infty} E_{n_1,\dots,n_k} \subset A$.
Per costruirla, osserviamo che, per ogni $k > 1$, abbiamo collezioni ammissibili di k numeri. Diciamo che una collezione $n_1, \dots, n_k$ è estendibile se, per ogni $l \geq k$, esiste una collezione ammissibile $p_1, \dots, p_l$ tale che $p_1 = n_1, ..., p_k = n_k$.
Osserviamo che ogni intervallo iniziale $n_1, \dots, n_k$ in una collezione ammissibile prova $n_1, \dots, n_k, \dots, n_l$ è ammissibile per monotonia (cioé $E_{n_1,\dots,n_l} \subset E_{n_1,\dots,n_k}$).
Concludiamo che esiste almeno una collezione estendibile di lunghezza 1. Infatti, supponendo il contrario, si ha che per ogni $n \leq m_1$ esiste una lunghezza massima

$l(n)$ delle collezioni ammissibili con il numero n in prima posizione. Infatti per un certo n se tale massimo non esistesse, per l'osservazione precedente, la collezione n sarebbe estendibile. Ora, i finiti valori di $l(n)$, sono uniformemente limitati, da cui le collezioni ammissibili hanno lunghezza limitata, che è assurdo.
Con lo stesso procedimento, la collezione estendibile n_1 è contenuta in un'altra n_1, n_2 estendibile. Induttivamente si ottiene una successione che per costruzione soddisfa la tesi.
Infine, come conseguenza del secondo enunciato, dato $A \in S(\mathcal{E})$, per ogni $\varepsilon > 0$ esiste $E \in \mathcal{E}$ tale che $\mu^*(A \setminus E) < \varepsilon$, quindi A misurabile.

□

Torniamo al contesto del teorema di Davies e utilizziamo i precedenti teoremi per dimostrare il seguente risultato.

Teorema 4.6. *Dato un insieme di rette affini L boreliano e una misura σ-finita boreliana μ, allora L^* è misurabile rispetto a μ.*

Dimostrazione. Sia $\mathcal{K}$ l'insieme dei compatti nello spazio delle rette proiettive (cioè compatti di $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$). Scegliendo $\mathcal{E} = \mathcal{K}$, le ipotesi del teorema 4.3 sono verificate: infatti ogni aperto di $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ è unione numerabile di compatti e $\varnothing \in \mathcal{K}$. Quindi $\sigma(\mathcal{K}) = \mathcal{B} \subseteq S(\mathcal{K})$ dove con $\mathcal{B}$ si indicano i boreliani di $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.
Quindi per il teorema 4.3 e poiché $\mathcal{K}$ chiuso per intersezione finita, esiste uno schema di Suslin monotono di insiemi compatti di rette che rappresenta L tramite l'operazione di Suslin, cioè

$$L = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K_{n_1,\dots,n_k}$$

con $K_{n_1,\dots,n_k} \in \mathcal{K}$.
Siccome la mappa $L \mapsto L^*$ commuta con l'unione arbitraria, vale

$$L^* = \bigcup_{\mathbf{n} \in \mathbf{N}^\infty} \left(\bigcap_{k=1}^{\infty} K_{n_1,\dots,n_k} \right)^* .$$

Mostriamo che tale mappa commuta anche con intersezioni decrescenti di compatti, cioè

$$\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} K_{n_1,\dots,n_k} \right)^* = \bigcap_{k=1}^{\infty} K^*_{n_1,\dots,n_k}$$

L'inclusione $\subseteq$ è sempre vera. Viceversa, sia x per cui esistono rette ℓ_k per cui $x \in \ell_k \in K^*_{n_1,\dots,n_k}$ per ogni k. Per compattezza esiste una retta ℓ, limite di una sottosuccessione delle ℓ_k che per monotonia deve appartenere a tutti i $K^*_{n_1,\dots,n_k}$. Inoltre ℓ contiene ancora x.

Se mostriamo che i $K^*_{n_1,\dots,n_k}$ sono analitici, poiché l'operazione di Suslin mantiene l'analiticità, anche L^* analitico. Applicando il teorema 4.5, segue la misurabilità di L^* rispetto a μ.
Siccome L insieme di rette affini e lo schema di Suslin è monotono, posso supporre che ogni $K_{n_1,\dots,n_k}$ non contenga la retta all'infinito.
Sia quindi K insieme di rette affini compatto. Alla retta di equazione $a+bx+cy=0$ associo l'equazione omogenea $ax_0+bx_1+cx_2=0$.

Il sottoinsieme K_0 delle rette in K che sono verticali è un compatto. Quindi i punti di K_0^* appartengono al prodotto di un compatto per $\mathbb{R}$, che è analitico perché chiuso.

L'insieme K_1 delle rette in K non verticali è omeomorfo a un chiuso di $\mathbb{R}^2$ tramite la carta $[a,b,c] \mapsto (a/c, b/c)$ (ricordiamo che $[a,b,c]$ identifica la retta di equazione $ax_0+bx_1+cx_2=0$ e che la condizione di non verticalità è data da $c \neq 0$).
In questo modo, un insieme di rette parametrizzate da un rettangolo di $\mathbb{R}^2$, è l'insieme di rette passanti per un intervallo dell'asse y aventi direzioni in un certo intervallo. Allora l'insieme di punti coperto da tali rette è un boreliano, quindi analitico.
Ora, dato un chiuso C di $\mathbb{R}^2$, esistono rettangoli aperti per cui $\bigcup_n A_n = C^c$. Detti $B_n = \bigcup_{m=1}^n A_m$, allora $\bigcup_n B_n = C^c$. Siano R_m rettangoli chiusi tali che $\bigcup_m R_m = \mathbb{R}^2$. Allora $\bigcap_n (B_n^c \cap R_m) = C \cap R_m$ è intersezione numerabile decrescente di compatti, ciascuno dei quali è unione finita di rettangoli. Inoltre $C = \bigcup_m (R_m \cap C)$. Quindi utilizzando unioni numerabili e intersezioni numerabili monotone di compatti, otteniamo che la tesi è vera per ogni chiuso C. $\square$

ripensare a mu finita/sigma finita

5 Generalizzazione per μ boreliana σ-finita

In questa sezione generalizziamo il teorema di Davies, dimostrando il seguente teorema.

Teorema 5.1. *Sia μ una misura boreliana σ-finita del piano. Allora per ogni insieme misurabile $A \subset \mathbb{R}^2$, esiste un insieme boreliano di rette L tale che:*

- *per ogni punto di A passi un insieme residuale di rette di L, (cioè l'insieme delle direzioni delle rette di L contenenti il punto sia residuale).*
- $\mu(L^*) = \mu(A)$.

Usando le nozioni di dualità definite in una sezione precedente, possiamo formulare anche il teorema generalizzato in forma duale come segue.

Teorema 5.2. *Per una misura boreliana σ-finita $\tilde{\mu}$ sulle rette e per un insieme misurabile di rette L, esiste un insieme boreliano di punti A tale che:*

- *ogni retta di L intersechi A in un insieme residuale.*
- $\tilde{\mu}(A^*) = \tilde{\mu}(L)$.

Assumendo il Teorema di Davies. da sistemare, incompleto Sia $A \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$ il duale di L. A Per il Teorema di Davies, sia M insieme di rette tale che $A \subseteq M^*$ e $\mu(M^*) = \mu(A)$. Sia allora $P = \bigcup_{\ell \in M} p_\ell$. Usando l'osservazione precedente, M^* è il duale di P^*. Segue subito che $L \subseteq P^*$ e che $|P^*| = |M^*| = |A| = |L|$. □

Ora ci concentriamo sul il primo enunciato, la cui dimostrazione prevede alcuni passi.

Lemma 5.3. *Nel teorema 5.1, posso supporre A aperto.*

Dimostrazione. Se A misurabile, allora esiste $G_\delta = \bigcap_{n=1}^\infty G_n \supseteq A$ della stessa misura, con $G_1 \supset G_2 \supset \cdots$ aperti.
Quindi se il teorema è verificato per gli aperti $G_1, G_2, \dots$ e per l'insieme di rette $L_1, L_2, \dots$, allora è anche verificato per $A = \bigcap_{n=1}^\infty G_n$ e $L = \bigcap_{n=1}^\infty L_n$.
Infatti sia $x \in G_\delta \subseteq G_i \quad \forall i \Rightarrow$ l'insieme delle rette di L_i per x è residuale per ogni i. L'intersezione numerabile di tali insiemi è ancora un insieme residuale, in particolare è non vuoto, quindi $A \subseteq L^*$.
Inoltre, $\mu(A) = \lim_n \mu(G_n) = \lim_n \mu(L_n^*) \geq \mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty L_n^*\right) \geq \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^\infty L_n\right)^*\right) = \mu(L^*) \geq \mu(A)$.

□

Dimostrazione. Posso assumere μ a supporto compatto K disgiunto da A.
Infatti, siano $K_1 \subset K_2 \subset \cdots$ compatti di $\mathbb{R}^2 \setminus A$ tali che $\mu\left(\left(\mathbb{R}^2 \setminus A\right) \setminus \bigcup_n K_n\right) = 0$ e sia μ_n la restrizione di μ all'insieme K_n. Supponiamo che per ogni n la tesi valga per μ_n a supporto compatto e per un insieme di rette L_n.

L'insieme $L = \bigcap_n L_n$ allora soddisfa la tesi.
Infatti, la condizione di residualità rimane inalterata perché passa a intersezioni numerabili.
Inoltre ricordando che $\mu(K_n \cap A) = \mu(K_n \cap L_n^*) = 0$ per ipotesi, si ha $\mu(A) = \lim_n \mu(K_n^c) = \lim_n \mu(L_n^* \cup K_n^c) \geq \lim_n \mu(L_n^*) \geq \mu\left(\bigcap_{n=1}^\infty L_n^*\right) \geq \mu\left(\left(\bigcap_{n=1}^\infty L_n\right)^*\right) = \mu(L^*) \geq \mu(A)$.

Mostriamo che posso assumere che $A = B(x,r)\backslash\{x\}$ e $B(x,2r)$ sia disgiunta da K.
Scegliamo numerabili palle aperte $B(x_n, r_n)$ tali che

$$A \subset \bigcup_n \left(B(x_n, r_n) \setminus \{x_n\}\right)$$

e $B(x_n, 2r_n) \cap K = \varnothing$ per ogni n.
Basta mostrare che per ogni n esiste un insieme di rette L_n tale che la tesi valga per $B(x_n, r_n) \setminus \{x_n\}$. Infatti definendo $L = \bigcup_n L_n$, mostriamo che la tesi vale per A.
La condizione di residualità passa a unioni arbitrarie.
Inoltre per ogni n, $\mu(B(x_n, r_n)) = \mu(L_n^*) = 0$ per ipotesi, quindi $\mu(L) = \mu((\bigcup_n L_n)^*) = \mu(\bigcup_n L_n^*) = 0$.
Per brevità, assumiamo che $A = B(0,1)\backslash\{0\}$ e $B(0,2) \cap K = \varnothing$. Applichiamo il lemma 3.4 ad A e $x = 0$ e sia M l'insieme di rette così ottenuto.

Sia $M^{**} = M^*\backslash B(0,1)$. Consideriamo lo spazio

$$\left(\mathbb{R}^2, \mu\right) \times (\mathbb{R}, \lambda),$$

dove λ è la misura di Lebesgue sulla retta e consideriamo il sottoinsieme

$$\left\{(x,t) \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} : tx \in M^{**}\right\}.$$

Poiché M soddisfa la seconda condizione del lemma 3.4, M^{**} interseca ogni retta per l'origine in un insieme di misura di Lebesgue nulla, cioè per ogni $x \neq 0$ vale $\lambda(\{t : tx \in M^{**}\}) = 0$. In altre parole, tutte le sezioni verticali di questo sottoinsieme per $y \neq 0$ hanno misura di Lebesgue nulla. Quindi quasi ogni sezione orizzontale ha misura nulla e possiamo scegliere un numero u tale che $1/2 < u < 1$ e $\mu\left(\{x : ux \in M^{**}\}\right) = 0$, e porre $t = 1/u$. Quindi $1 < t < 2$ e $\mu\left(tM^{**}\right) = 0$.
Ricordiamo che poiché M boreliano, allora M^*, M^{**} e i suoi omotetizzati sono misurabili rispetto a μ.
Affermiamo che tM soddisfa la tesi.
Siccome M contiene residue rette per ogni punto di $B(0,1)\backslash\{0\}$, tM contiene residue rette per i punti di $tB(0,1)\backslash\{0\}$, ma $tB(0,1)\backslash\{0\} \supset B(0,1)\backslash\{0\} = A$ quindi è vera la prima affermazione.
D'altra parte, siccome $B(0,2) \cap K = \varnothing$ e $t < 2$, si ha

$$\mu\left(tM^*\right) = \mu\left(tM^* \cap K\right) = \mu\left(tM^*\backslash B(0,t)\right)$$

Inoltre

$$tM^*\backslash B(0,t) = t\left(M^*\backslash B(0,1)\right) = tM^{**}$$

Siccome $\mu\left(tM^{**}\right) = 0$, anche $\mu(tM^*) = 0 = \mu(A)$.

$\square$

6 Costruzione per parallelogrammi

Per dimostrare il lemma 3.7, introduciamo una costruzione geometrica (detta "venetian blind"), che a un parallelogramma P, associa dei sotto-parallelogrammi con certe proprietà.
Consideriamo il parallelogramma non degenere $P = A_1A_2A_3A_4$, con punti medi dei lati B_1, B_2, B_3, B_4, come in figura 1. Sia C il centro del parallelogramma. Il primo passo consiste nel scegliere i due sotto-parallelogrammi $A_1CB_3B_4$ e $B_1B_2A_3C$ (evidenziati in figura).

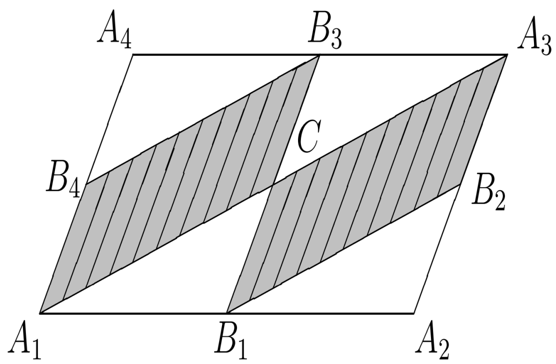
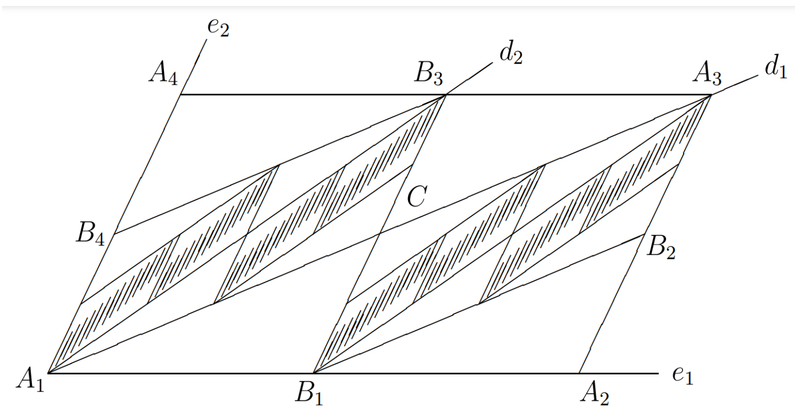


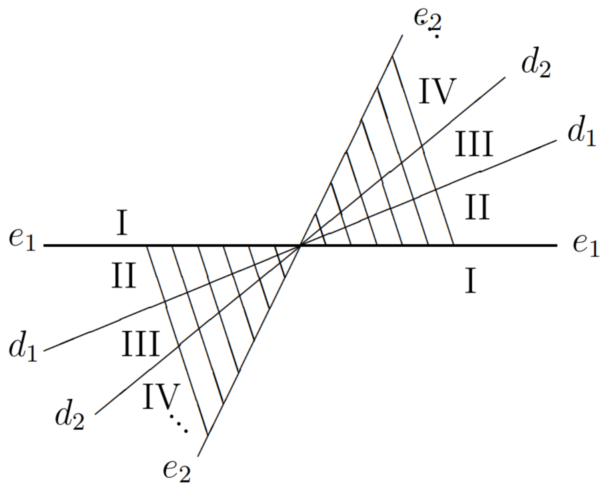
Figura 1: Figura 1

Ora ripetiamo il procedimento per ciascuno dei nuovi parallelogrammi. Iterando per un numero finito di passi, si ottengono un numero finito di sotto-parallelogrammi di P. Nella figura 2 sono mostrati i primi tre passi e sono evidenziati gli otto parallelogrammi ottenuti.



Siano e_1, e_2 le direzioni dei lati di P e siano $d_1, d_2, \ldots$ le direzioni delle diagonali $A_1A_3, A_1B_3, \ldots$. Sia ha che $d_n \to e_2$.
Come illustrato nella figura seguente, definiamo dei sotto insiemi di direzioni come segue. Sia D_1 l'insieme delle direzioni delle rette per A_4 che intersecano A_1A_3; D_2 l'insieme di direzioni tra e_1 e d_1; D_3 l'insieme delle direzioni tra d_1 e d_2, ...

Notiamo che data una direzione diversa da quella verticale, esiste un n abbastanza grande per cui tale direzione appartenga a D_n.



Ogni retta in direzione appartenente a D_1 che interseca P interseca anche la diagonale A_1A_3, quindi uno dei parallelogrammi $A_1CB_3B_4$ e $B_1B_2A_3C$.
Inoltre, si vede facilmente che la misura delle proiezioni di ciascuno di questi parallelogrammi sulla retta A_1A_4 è al più $|A_1A_4|$ in ogni direzione in D_2. Quindi la misura della proiezione dell'unione dei parallelogrammi è al più $2 \cdot |A_1A_4|$.
Nello stesso modo, ogni retta in direzione in D_1 o D_2 che interseca $A_1CB_3B_4$ o $B_1B_2A_3C$ interseca uno dei 4 parallelogrammi del secondo passo. Inoltre la misura della proiezione dell'unione dei 4 parallelogrammi sulla retta A_1A_4 nelle direzioni in D_3 è al più $4 \cdot |A_1B_4| = 2 \cdot |A_1A_4|$. In realtà, quest'ultima proprietà vale anche per le direzioni in D_2.

Induttivamente, all'n-esimo passo, le rette in direzioni appartenenti a $\bigcup_{i=1}^{n} D_i$ intersecano l'unione dei parallelogrammi costruiti all'n-esimo passo, se intersecano uno dei parallelogrammi del passo $n-1$. In particolare una retta in direzione in D_1 che interseca P, interseca uno dei parallelogrammi dell'n-esimo passo.
Inoltre la misura della proiezione dell'unione dei parallelogrammi dell'n-esimo passo sulla retta A_1A_4 è al più $2 \cdot |A_1A_4|$ in ogni direzione in $\bigcup_{i=2}^{n+1} D_i$.

Lemma 6.1. *Sia* $I = \left\{I^1, I^2, \ldots, I^m\right\}$ *un insieme finito di intervalli due a due disgiunti di direzioni e sia* $J = \left\{J^1, J^2, \ldots, J^m\right\}$ *un insieme di sotto intervalli stretti (cioè,* $\mathrm{cl}\left(J^j\right) \subset \mathrm{int}\, I^j$ *per ogni* j*). Allora per ogni parallelogramma* T *e* $\varepsilon > 0$ *esistono dei parallelogrammi disgiunti* $T_1, T_2, \ldots \subset T$ *tali che:*

- *per ogni direzione* $d \in \bigcup J$ *la proiezione di* U *in direzione* d *abbia misura minore di* ε*;*
- *per ogni retta* l *in direzione* $d \notin \bigcup I$*, se* l *interseca* T *allora* l *interseca anche* U*.*

Dimostrazione. Assumiamo $m = 1$, con intervalli $J \subseteq I$. Sia T parallelogramma non degenere, allora scegliamo un intervallo (a, b) tale che $\mathrm{cl}(J) \subsetneq (a, b) \subset [a, b] \subsetneq \mathrm{int}(I)$. Allora possiamo scegliere dei vertici di T e dei parallelogrammi due a due disgiunti in T e tali che:
per nulla chiaro

- le direzioni dei lati di tutti i parallelogrammi siano a e b;
- ogni retta in direzione in I^c che interseca T interseca anche uno dei sotto-parallelogrammi;
- la somma dei lati in direzione a sia minore di $\frac{1}{2}\varepsilon$, dove ε è un numero positivo fissato.

Detti questi $\{T_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, applichiamo la procedura esposta sopra ad ogni T_i, in modo che il lato A_1A_4 sia in direzione a, con riferimento alla notazione precedente.
Il numero di passi necessario è indipendente dal T_i scelto ed è dato dalla seguente osservazione: poiché $\mathrm{cl}(J) \subsetneq (a, b)$, esiste $\rho > 0$ tale che $J \subset (a + \rho, b)$. Quindi esiste un certo n per cui $J \subseteq \bigcup_{i=2}^{n+1} D_i$.
Con questa procedura si ottiene un nuovo sistema di sotto-parallelogrammi e la misura della proiezione (non ortogonale) dell'unione di questi sulla retta di direzione a è minore di $2 \cdot \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$ in ogni direzione in J. Quindi, la misura della proiezione ortogonale in ogni direzione in J è minore di ε.
Infine siccome $D_1 = (a, b)^c$ e $(a, b) \subseteq I$, allora $I^c \subseteq D_1$. Quindi ogni retta in direzione di I^c che interseca uno dei T_i, interseca anche uno dei finiti sotto-parallelogrammi di T_i definiti all'n-esimo passo.

$\square$

scambiare I, J