Costruzioni paradossali in Teoria della Misura: il Teorema di Davies

Chiara Molinari

Relatore: Prof. Luigi Ambrosio

10 giugno 2022

Introduzione: paradossi in teoria della misura

Talvolta il comportamento della misura di Lebesgue può essere molto controintuitivo: un esempio famoso è il paradosso di Banach-Tarski.

Talvolta il comportamento della misura di Lebesgue può essere molto controintuitivo: un esempio famoso è il paradosso di Banach-Tarski.
Si possono ottenere risultati paradossali anche restringendosi a considerare insiemi misurabili, ottenuti con metodi costruttivi che non richiedono l'uso dell'assioma della scelta.

Introduzione: paradossi in teoria della misura

Talvolta il comportamento della misura di Lebesgue può essere molto controintuitivo: un esempio famoso è il paradosso di Banach-Tarski.
Si possono ottenere risultati paradossali anche restringendosi a considerare insiemi misurabili, ottenuti con metodi costruttivi che non richiedono l'uso dell'assioma della scelta.

Teorema (Davies, 1951)

Dato un insieme misurabile $A \subseteq \mathbb{R}^2$, esiste un insieme di rette L tale che:

- *per ogni punto di A passa una retta di L;*
- *$\mu(A) = \mu(L^*)$, dove μ è misura di Lebesgue e L^* il sottoinsieme di $\mathbb{R}^2$ coperto dalle rette di L.*

Introduzione

Nel 2001, viene dimostrata una generalizzazione del teorema, nel caso in cui μ è una misura boreliana σ-finita.
Nella tesi è dimostrata tale generalizzazione, attraverso i seguenti passi intermedi:

Introduzione

Nel 2001, viene dimostrata una generalizzazione del teorema, nel caso in cui μ è una misura boreliana σ-finita.
Nella tesi è dimostrata tale generalizzazione, attraverso i seguenti passi intermedi:

- la dimostrazione nel caso della misura di Lebesgue, introducendo la formulazione duale del problema e alcune costruzioni geometriche nel piano;

Introduzione

Nel 2001, viene dimostrata una generalizzazione del teorema, nel caso in cui μ è una misura boreliana σ-finita.
Nella tesi è dimostrata tale generalizzazione, attraverso i seguenti passi intermedi:

- la dimostrazione nel caso della misura di Lebesgue, introducendo la formulazione duale del problema e alcune costruzioni geometriche nel piano;
- lo sviluppo della teoria di Suslin;

Introduzione

Nel 2001, viene dimostrata una generalizzazione del teorema, nel caso in cui μ è una misura boreliana σ-finita.
Nella tesi è dimostrata tale generalizzazione, attraverso i seguenti passi intermedi:

- la dimostrazione nel caso della misura di Lebesgue, introducendo la formulazione duale del problema e alcune costruzioni geometriche nel piano;
- lo sviluppo della teoria di Suslin;
- la dimostrazione nel caso di μ generica boreliana σ-finita.

Formulazione duale

Esiste una corrispondenza tra le rette in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ e i punti in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$: alla retta di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ associo il punto $[a, b, c]$.

Formulazione duale

Esiste una corrispondenza tra le rette in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ e i punti in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$: alla retta di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ associo il punto $[a, b, c]$.
Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, realizzato come quoziente di $\mathbb{S}^2$.
Una misura su $\mathbb{S}^2$ induce tramite la proiezione al quoziente una misura su $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.

Formulazione duale

Esiste una corrispondenza tra le rette in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ e i punti in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$: alla retta di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ associo il punto $[a, b, c]$.
Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, realizzato come quoziente di $\mathbb{S}^2$.
Una misura su $\mathbb{S}^2$ induce tramite la proiezione al quoziente una misura su $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.
Possiamo così definire una misura sulle rette proiettive. Se una retta è affine, considero la sua equazione omogeneizzata.
L'usuale misura di area su $\mathbb{S}^2$, induce una naturale misura $\tilde{\theta}$ sulle rette.

Formulazione duale

Esiste una corrispondenza tra le rette in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$ e i punti in $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$: alla retta di equazione $ax_0 + bx_1 + cx_2 = 0$ associo il punto $[a, b, c]$.
Si consideri il piano proiettivo reale $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, realizzato come quoziente di $\mathbb{S}^2$.
Una misura su $\mathbb{S}^2$ induce tramite la proiezione al quoziente una misura su $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$.
Possiamo così definire una misura sulle rette proiettive. Se una retta è affine, considero la sua equazione omogeneizzata.
L'usuale misura di area su $\mathbb{S}^2$, induce una naturale misura $\tilde{\theta}$ sulle rette.
In modo simile, diciamo che un insieme di rette è aperto/compatto/boreliano/misurabile se l'insieme di punti corrispondente nel duale lo è.

Formulazione duale

Osservazione

Un insieme di rette passanti per un punto $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, è rappresentato nel duale da punti appartenenti a una retta ℓ_P.

Formulazione duale

Osservazione

Un insieme di rette passanti per un punto $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, è rappresentato nel duale da punti appartenenti a una retta ℓ_P.

Fissato un punto P nel piano, la misura $\tilde{\theta}$ delle rette passanti per esso è sempre nulla.

Formulazione duale

Osservazione

Un insieme di rette passanti per un punto $P \in \mathbb{P}^2\mathbb{R}$, è rappresentato nel duale da punti appartenenti a una retta ℓ_P.

Fissato un punto P nel piano, la misura $\tilde{\theta}$ delle rette passanti per esso è sempre nulla.
Usando l'osservazione, posso comunque definire una misura sulle rette passanti per P: è quella indotta dalla naturale misura su ℓ_P (omeomorfo a $\mathbb{S}^1$ quozientato).

Definizioni

Definizione

Un insieme è di **prima categoria** *se unione numerabile di insiemi mai densi (cioè con chiusura a parte interna vuota).*

Definizioni

Definizione

Un insieme è di **prima categoria** *se unione numerabile di insiemi mai densi (cioè con chiusura a parte interna vuota).*
Un insieme è **residuale** *se il suo complementare è di prima categoria.*

Definizioni

Definizione

Un insieme è di **prima categoria** *se unione numerabile di insiemi mai densi (cioè con chiusura a parte interna vuota).*
Un insieme è **residuale** *se il suo complementare è di prima categoria.*

Definizione

Dato un insieme di rette nel piano L, *indichiamo con* L^* *l'insieme di punti coperti da rette di* L.

Definizioni

Definizione

Un insieme è di **prima categoria** *se unione numerabile di insiemi mai densi (cioè con chiusura a parte interna vuota).*
Un insieme è **residuale** *se il suo complementare è di prima categoria.*

Definizione

Dato un insieme di rette nel piano L, indichiamo con L^* l'insieme di punti coperti da rette di L.
Similmente, dato un insieme di punti nel piano A, indichiamo con A^* l'insieme delle rette passanti per punti di A.

Lemma (1)

Sia A aperto del piano e sia x un punto che non appartiene ad A. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:

- *per ogni punto $p \in A$, l'insieme delle rette di L passanti per p è residuale;*
- *$L^* \backslash A$ interseca ogni retta per x in un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

Lemma (1)

Sia A aperto del piano e sia x un punto che non appartiene ad A. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:

- *per ogni punto $p \in A$, l'insieme delle rette di L passanti per p è residuale;*
- *$L^* \backslash A$ interseca ogni retta per x in un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

Questo è un rafforzamento del teorema di Davies per la misura di Lebesgue.

Lemma (1)

Sia A aperto del piano e sia x un punto che non appartiene ad A. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:

- *per ogni punto $p \in A$, l'insieme delle rette di L passanti per p è residuale;*
- *$L^* \backslash A$ interseca ogni retta per x in un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

Questo è un rafforzamento del teorema di Davies per la misura di Lebesgue.

- Si mostra che condizione A aperto non è restrittiva.

Lemma (1)

Sia A aperto del piano e sia x un punto che non appartiene ad A. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:

- *per ogni punto $p \in A$, l'insieme delle rette di L passanti per p è residuale;*
- *$L^* \setminus A$ interseca ogni retta per x in un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

Questo è un rafforzamento del teorema di Davies per la misura di Lebesgue.

- Si mostra che condizione A aperto non è restrittiva.
- Viene aggiunta una condizione topologica su L. Questa implica che L copre A per il teorema di Baire.

Lemma (1)

Sia A aperto del piano e sia x un punto che non appartiene ad A. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:

- *per ogni punto $p \in A$, l'insieme delle rette di L passanti per p è residuale;*
- *$L^* \backslash A$ interseca ogni retta per x in un insieme di misura di Lebesgue nulla.*

Questo è un rafforzamento del teorema di Davies per la misura di Lebesgue.

- Si mostra che condizione A aperto non è restrittiva.
- Viene aggiunta una condizione topologica su L. Questa implica che L copre A per il teorema di Baire.
- Per Fubini, il sottoinsieme del piano $L^* \setminus A$ ha misura di Lebesgue nulla se e solo se, dato un punto x, *quasi* ogni retta per x interseca $L^* \setminus A$ in un insieme di misura lineare nulla. Togliendo il *quasi*, la tesi è più forte.

Enunciamo così la versione duale del precedente lemma.

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette e sia X un retta non appartenente a L. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuale;*
- *per ogni punto di X passano trascurabili rette di $A^*\backslash L$.*

Enunciamo così la versione duale del precedente lemma.

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette e sia X un retta non appartenente a L. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuale;*
- *per ogni punto di X passano trascurabili rette di $A^* \setminus L$.*

Il primo passo della dimostrazione è assumere che X sia la retta all'infinito.

Enunciamo così la versione duale del precedente lemma.

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette e sia X un retta non appartenente a L. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuale;*
- *per ogni punto di X passano trascurabili rette di $A^* \setminus L$.*

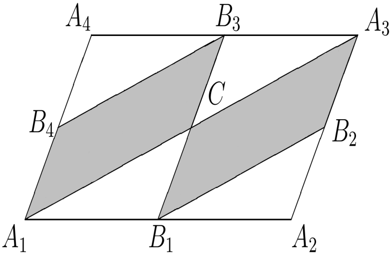
Il primo passo della dimostrazione è assumere che X sia la retta all'infinito. In seguito la dimostrazione è piuttosto tecnica e vengono usate costruzioni geometriche che induttivamente permettono di costruire collezioni di parallelogrammi nel piano, con certe caratteristiche.

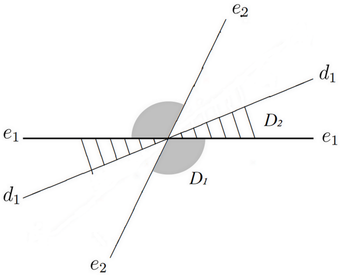
Costruzioni per parallelogrammi

Una di queste è la costruzione geometrica detta "venetian blind", che dato un parallelogramma P, gli associa una collezione finita di parallelogrammi contenuti in P, nel seguente modo.

Costruzioni per parallelogrammi

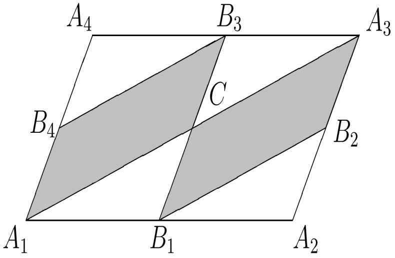
Una di queste è la costruzione geometrica detta "venetian blind", che dato un parallelogramma P, gli associa una collezione finita di parallelogrammi contenuti in P, nel seguente modo.

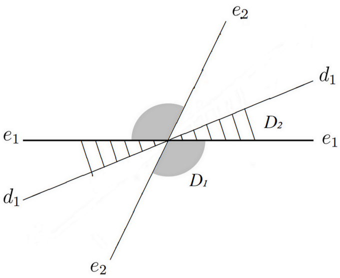




Costruzioni per parallelogrammi

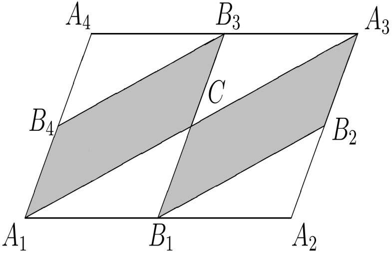
Una di queste è la costruzione geometrica detta "venetian blind", che dato un parallelogramma P, gli associa una collezione finita di parallelogrammi contenuti in P, nel seguente modo.

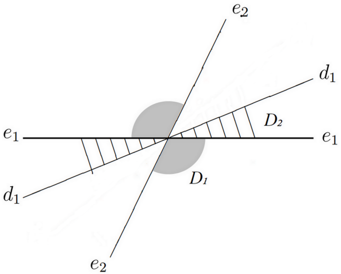




Ogni retta in direzione appartenente a D_1 che interseca P interseca anche uno dei nuovi parallelogrammi.

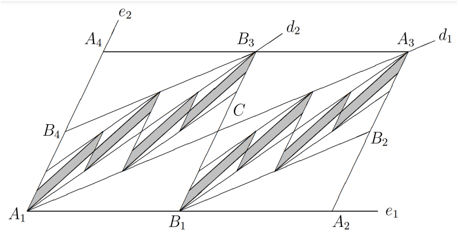
Una di queste è la costruzione geometrica detta "venetian blind", che dato un parallelogramma P, gli associa una collezione finita di parallelogrammi contenuti in P, nel seguente modo.

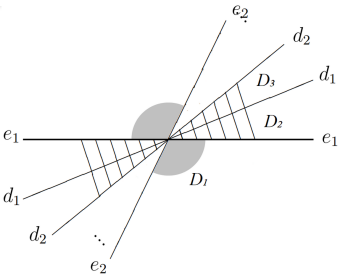




Ogni retta in direzione appartenente a D_1 che interseca P interseca anche uno dei nuovi parallelogrammi.
La misura della proiezione dell'unione dei parallelogrammi sulla retta A_1A_4 è al più $2 \cdot |A_1A_4|$ in ogni direzione in D_2.

Costruzioni per parallelogrammi





Induttivamente, all'n-esimo passo, una retta in direzione in D_1 che interseca P, interseca uno dei parallelogrammi dell'n-esimo passo.
Inoltre la misura della proiezione dell'unione dei parallelogrammi sulla retta A_1A_4 è al più $2 \cdot |A_1A_4|$ in ogni direzione in $D_2, ..., D_{n+1}$.

Costruzioni per parallelogrammi

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuale;*
- *in ogni direzione ci sono trascurabili rette che intersecano A e non appartengono a L.*

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuale;*
- *in ogni direzione ci sono trascurabili rette che intersecano A e non appartengono a L.*

Si costruisce A esplicitamente, tramite intersezioni e unioni applicate a una collezione numerabile di parallelogrammi ottenuti con la procedura di prima.

Costruzioni per parallelogrammi

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuale;*
- *in ogni direzione ci sono trascurabili rette che intersecano A e non appartengono a L.*

Si costruisce A esplicitamente, tramite intersezioni e unioni applicate a una collezione numerabile di parallelogrammi ottenuti con la procedura di prima.
Per quasi ogni direzione d, si costruisce un insieme $A_d \subseteq A$ con questa proprietà: ogni una retta non in L e in direzione d che interseca A interseca anche A_d.

Costruzioni per parallelogrammi

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuale;*
- *in ogni direzione ci sono trascurabili rette che intersecano A e non appartengono a L.*

Si costruisce A esplicitamente, tramite intersezioni e unioni applicate a una collezione numerabile di parallelogrammi ottenuti con la procedura di prima.

Per quasi ogni direzione d, si costruisce un insieme $A_d \subseteq A$ con questa proprietà: ogni una retta non in L e in direzione d che interseca A interseca anche A_d.

Si conclude mostrando che la misura della proiezione di A_d in direzione d è arbitrariamente piccola.

Costruzioni per parallelogrammi

Lemma (2)

Sia L un insieme aperto di rette. Allora esiste un insieme boreliano di punti A per cui:

- *ogni retta di L interseca A in un insieme residuale;*
- *in ogni direzione ci sono trascurabili rette che intersecano A e non appartengono a L.*

Si costruisce A esplicitamente, tramite intersezioni e unioni applicate a una collezione numerabile di parallelogrammi ottenuti con la procedura di prima.

Per quasi ogni direzione d, si costruisce un insieme $A_d \subseteq A$ con questa proprietà: ogni una retta non in L e in direzione d che interseca A interseca anche A_d.

Si conclude mostrando che la misura della proiezione di A_d in direzione d è arbitrariamente piccola.

La condizione di residualità è piuttosto diretta.

Generalizzazione del teorema

Teorema

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ *misurabile e* μ *una misura boreliana* σ*-finita nel piano. Allora esiste un insieme boreliano di rette* L *tale che:*

- L *contiene un insieme residuale di rette per ogni punto di* A*;*

- $\mu(A) = \mu(L^*)$*.*

Generalizzazione del teorema

Teorema

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ *misurabile e* μ *una misura boreliana* σ*-finita nel piano. Allora esiste un insieme boreliano di rette* L *tale che:*
- L *contiene un insieme residuale di rette per ogni punto di* A*;*
- $\mu(A) = \mu(L^*)$*.*
Similmente, data una misura boreliana $\tilde{\mu}$ σ*-finita sull'insieme delle rette nel piano, per un insieme misurabile di rette* L*, esiste un insieme di punti* A *tale che ogni retta di* L *interseca* A *in un insieme residuale e* $\tilde{\mu}(A^*) = \tilde{\mu}(L)$*.*

Generalizzazione del teorema

Teorema

Sia $A \subset \mathbb{R}^2$ misurabile e μ una misura boreliana σ-finita nel piano. Allora esiste un insieme boreliano di rette L tale che:
- L contiene un insieme residuale di rette per ogni punto di A;
- $\mu(A) = \mu(L^*)$.
Similmente, data una misura boreliana $\tilde{\mu}$ σ-finita sull'insieme delle rette nel piano, per un insieme misurabile di rette L, esiste un insieme di punti A tale che ogni retta di L interseca A in un insieme residuale e $\tilde{\mu}(A^*) = \tilde{\mu}(L)$.

Ci soffermiamo solo sul primo enunciato. La prima verifica è che dato L insieme di rette boreliano, allora L^* è misurabile rispetto a qualsiasi misura μ boreliana finita.

Misurabilità di L^*

Introduciamo alcune definizioni generali.

Definizione

Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una collezione di suoi sottoinsiemi.

Introduciamo alcune definizioni generali.

Definizione

Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una collezione di suoi sottoinsiemi. Diciamo che un insieme A è analitico o di Suslin se è nella forma

$$A = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1,\dots,n_k}.$$

per opportuni $A_{n_1,\dots,n_k} \in \mathcal{E}$.

Misurabilità di L^*

Introduciamo alcune definizioni generali.

Definizione

Sia X un insieme non vuoto e sia $\mathcal{E}$ una collezione di suoi sottoinsiemi. Diciamo che un insieme A è analitico o di Suslin se è nella forma

$$A = \bigcup_{(n_i) \in \mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} A_{n_1,\ldots,n_k}.$$

per opportuni $A_{n_1,\ldots,n_k} \in \mathcal{E}$.
Questa è detta operazione di Suslin.
La collezione degli insiemi di questo tipo e l'insieme vuoto è indicata con $S(\mathcal{E})$.

Misurabilità di L^*

Valgono i seguenti teoremi generali.

Valgono i seguenti teoremi generali.

Teorema

1. $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$

Misurabilità di L^*

Valgono i seguenti teoremi generali.

Teorema

1. $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$
2. *Se il complementare di ogni insieme in* $\mathcal{E}$ *appartiene a* $S(\mathcal{E})$ *e* $\varnothing \in \mathcal{E}$*, la* σ*-algebra generata da* $\mathcal{E}$ *è contenuta in* $S(\mathcal{E})$*.*

Misurabilità di L^*

Valgono i seguenti teoremi generali.

Teorema

1. $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$
2. *Se il complementare di ogni insieme in $\mathcal{E}$ appartiene a $S(\mathcal{E})$ e $\varnothing \in \mathcal{E}$, la σ-algebra generata da $\mathcal{E}$ è contenuta in $S(\mathcal{E})$.*

Siccome L insieme boreliano, applicando il teorema con $\mathcal{E}$ la classe dei compatti di $\mathbb{P}^2\mathbb{R}$, si ha

$$L = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K_{n_1,\dots,n_k}$$

con $K_{n_1,\dots,n_k} \in \mathcal{E}$. Posso anche supporre che l'intersezione sia decrescente.

Misurabilità di L^*

Si mostra che vale anche

$$L^* = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K^*_{n_1,\dots,n_k}.$$

Misurabilità di L^*

Si mostra che vale anche

$$L^* = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K^*_{n_1,\dots,n_k}.$$

Si mostra che dato K compatto di rette, allora K^* analitico.

Si mostra che vale anche

$$L^* = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K^*_{n_1,\dots,n_k}.$$

Si mostra che dato K compatto di rette, allora K^* analitico. Ricordando che $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$, abbiamo quindi che L^* analitico.

Misurabilità di L^*

Si mostra che vale anche

$$L^* = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K^*_{n_1,\dots,n_k}.$$

Si mostra che dato K compatto di rette, allora K^* analitico. Ricordando che $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$, abbiamo quindi che L^* analitico. Concludiamo applicando il seguente teorema.

Misurabilità di L^*

Si mostra che vale anche

$$L^* = \bigcup_{(n_i)\in\mathbb{N}^\infty} \bigcap_{k=1}^{\infty} K^*_{n_1,\dots,n_k}.$$

Si mostra che dato K compatto di rette, allora K^* analitico. Ricordando che $S(S(\mathcal{E})) = S(\mathcal{E})$, abbiamo quindi che L^* analitico. Concludiamo applicando il seguente teorema.

Teorema

Detta μ una misura finita. Se $\mathcal{E}$ famiglia di insiemi misurabili chiusa per unioni finite e intersezioni numerabili, ogni insieme in $S(\mathcal{E})$ è μ-misurabile.

Generalizzazione del teorema

Dato A misurabile, cerchiamo quindi un insieme boreliano L che copra A con le caratteristiche richieste.

Generalizzazione del teorema

Dato A misurabile, cerchiamo quindi un insieme boreliano L che copra A con le caratteristiche richieste.

Dimostrazione

- Passo 1: possiamo assumere che μ abbia supporto compatto K disgiunto da A.

Dato A misurabile, cerchiamo quindi un insieme boreliano L che copra A con le caratteristiche richieste.

Dimostrazione

- Passo 1: possiamo assumere che μ abbia supporto compatto K disgiunto da A.
- Passo 2: possiamo assumere che $A = B(x,r)\setminus\{x\}$ e $B(x,2r)$ sia disgiunta da K. Per brevità, assumiamo $A = B(0,1)\setminus\{0\}$ e $B(0,2) \cap K = \varnothing$.

Dato A misurabile, cerchiamo quindi un insieme boreliano L che copra A con le caratteristiche richieste.

Dimostrazione

- Passo 1: possiamo assumere che μ abbia supporto compatto K disgiunto da A.
- Passo 2: possiamo assumere che $A = B(x, r)\backslash\{x\}$ e $B(x, 2r)$ sia disgiunta da K. Per brevità, assumiamo $A = B(0, 1)\backslash\{0\}$ e $B(0, 2) \cap K = \varnothing$.
- Passo 3: possiamo assumere che μ sia finita.

Dato A misurabile, cerchiamo quindi un insieme boreliano L che copra A con le caratteristiche richieste.

Dimostrazione

- Passo 1: possiamo assumere che μ abbia supporto compatto K disgiunto da A.
- Passo 2: possiamo assumere che $A = B(x,r)\setminus\{x\}$ e $B(x,2r)$ sia disgiunta da K. Per brevità, assumiamo $A = B(0,1)\setminus\{0\}$ e $B(0,2)\cap K = \varnothing$.
- Passo 3: possiamo assumere che μ sia finita.
- Passo 4: per concludere, applichiamo il lemma 1 (teorema di Davies per la misura di Lebesgue).

Passo 4

Applicando il lemma 1 ad A e $x = 0$, otteniamo l'insieme boreliano di rette M.

Passo 4

Applicando il lemma 1 ad A e $x = 0$, otteniamo l'insieme boreliano di rette M.

- M contiene un insieme residuale di rette per ogni punto di A;
- $M^* \setminus A$ interseca ogni retta per 0 in un insieme di misura di Lebesgue nulla.

Passo 4

Applicando il lemma 1 ad A e $x = 0$, otteniamo l'insieme boreliano di rette M.

- M contiene un insieme residuale di rette per ogni punto di A;
- $M^* \setminus A$ interseca ogni retta per 0 in un insieme di misura di Lebesgue nulla.

L'insieme L di rette cercato è $L = tM$, per un certo $1 \leq t \leq 2$ (che si dimostra esistere).

Passo 4

Applicando il lemma 1 ad A e $x = 0$, otteniamo l'insieme boreliano di rette M.

- M contiene un insieme residuale di rette per ogni punto di A;
- $M^* \setminus A$ interseca ogni retta per 0 in un insieme di misura di Lebesgue nulla.

L'insieme L di rette cercato è $L = tM$, per un certo $1 \leq t \leq 2$ (che si dimostra esistere).
L così definito è ancora boreliano, da cui L^* misurabile. Si mostra che soddisfa la condizione di residualità e che $\mu(L^*) = 0 = \mu(A)$.

Bibliografia

- *On accessibility of plane sets and differentiation of functions of two real variables*, R. O. Davies
- *How to make Davies' Theorem visible*, M. Csörnyei
- *On the visibility of invisible sets*, M. Csörnyei
- *Measure Theory*, V.I. Bogachev

Grazie per l'attenzione