

Studio di un filtro *crossover* a due vie

Chiara Baldelli - 0001068915
Giorgio Germano - 0001079587

A.A. 2023/2024

Sommario

Sono state realizzate tre stime, indipendenti, della frequenza di crossover ν_c di un filtro *crossover* passivo a due vie. Dalle misure dirette dei componenti del circuito si ricava $\nu_c^{(dir)} = (9.8 \pm 0.1)$ kHz, dalla risposta in ampiezza a uno *sweep* in frequenza risulta $\nu_c^{(freq)} = (9.7 \pm 0.1)$ kHz, da quella in fase $\nu_c^{(fasi)} = (9.8 \pm 0.1)$ kHz. Le tre stime sono compatibili tra loro.

Introduzione

Il filtro *crossover* a due vie passivo è un filtro composito, costituito da due rami in parallelo, detti *woofer* e *tweeter* [1]. Il primo è composto da un induttore (e una resistenza in serie), svolgendo dunque il ruolo di filtro passa-basso; il *tweeter*, costituito da un condensatore e resistenza in serie, funge invece da filtro passa-alto.

Nel caso di un circuito ideale, le impedenze dei due rami sono, rispettivamente, $Z_w = R_w + j\omega L$ e $Z_t = R_t + \frac{1}{j\omega C}$ dove R_w, R_t sono le resistenze sui rispettivi rami, ω la pulsazione del generatore, C ed L capacità ed induttanza dei componenti e j l'unità immaginaria. Abbiamo $Z_w = Z_t$, ovvero medesima ampiezza del segnale sui due rami, quando la frequenza del segnale è pari alla *frequenza di crossover*

$$\nu_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad (1)$$

Inoltre, risolvendo il circuito con il metodo dei fasori (si veda l'Appendice A), si trova che la fase del segnale sui due rami è, rispettivamente,

$$\varphi_w = \arctan\left(-\frac{\omega L}{R}\right) \quad \varphi_t = \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right) \quad (2)$$

dunque alla frequenza di *crossover* $\varphi_w = -\varphi_t$, e abbiamo un altro metodo per misurare ν_c .

1 Apparato sperimentale e svolgimento

Il circuito è stato realizzato sulla *breadboard* della scheda di acquisizione NI ELVIS II (Fig. 1). Esso è alimentato dal generatore di tensione alternata NI ELVISmx Function Generator, avente resistenza interna $R_{gen} = 50 \Omega$.

In primo luogo, utilizzando il Digital Multimeter dell'ELVIS sono state misurate direttamente i vari elementi circuitali. Per ovviare al fatto che l'induttore avesse una resistenza R_L non trascurabile, al *tweeter* è stata aggiunta una resistenza R_{agg} con lo stesso valore, a monte del condensatore (si veda ancora la Fig. 1).

È stata poi avviata l'acquisizione¹ dati, utilizzando un apposito programma scritto nell'ambiente LabVIEW² e, in particolare, il subVI Extract Single Tone Measurement. In primis, è stata compiuta un'analisi delle ampiezze V_{in} , V_w e V_t (con un'acquisizione bufferizzata su 3 canali)³, a frequenze di 6, 10 e 14 kHz, per assicurarsi una corretta risposta qualitativa. È stato poi eseguito uno *sweep* in frequenza, da 2 a 18 kHz con *step* di 100 Hz e *sample rate* di 120 kHz (per evitare il fenomeno dell'*aliasing*). Durante lo *sweep* sono state misurate, oltre che alle ampiezze, anche le fasi (relative al segnale in ingresso).

Si sono quindi valutati gli errori da associare alle misure di tensione e di fase. Sono stati valutati prima gli errori casuali, inviando un segnale costante, simulato con un'onda quadra di periodo molto lungo, in un circuito puramente resistivo. Sono state prese, grazie al subVI Extract Single Tone Measurement, 5000 misure di ampiezza e 1300 di fase. Supponendo una distribuzione degli errori gaussiana si sono graficati i dati con degli istogrammi dai quali è stata calcolata la deviazione standard. Si è poi passati a valutare l'errore sistematico sulle misure di fase, dovuto alla presenza di un unico ADC che acquisisce il segnale dei tre canali in modo non simultaneo. Si è effettuato quindi uno *sweep* sullo stesso circuito resistivo, acquisendo le fasi sui tre canali di interesse.

¹È stata creata una repository su GitHub, dove sono disponibili tutti i dati acquisiti e il codice utilizzato per l'analisi dati: https://github.com/Chiarass/Crossover_filter

²<https://www.ni.com/it-it/shop/product/labview.html>

³Rispettivamente, sui canali A10, A11 e A12.

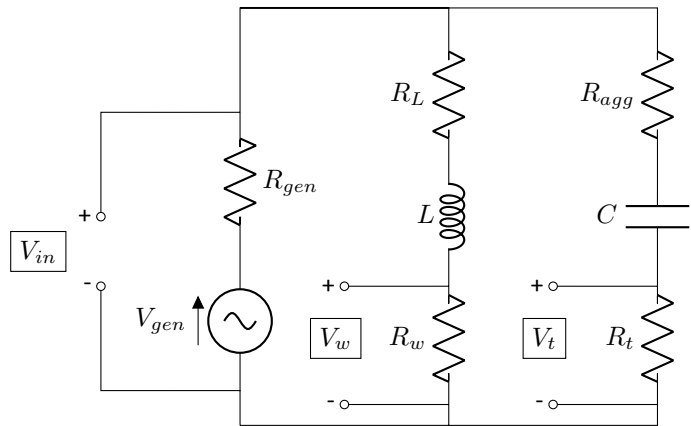
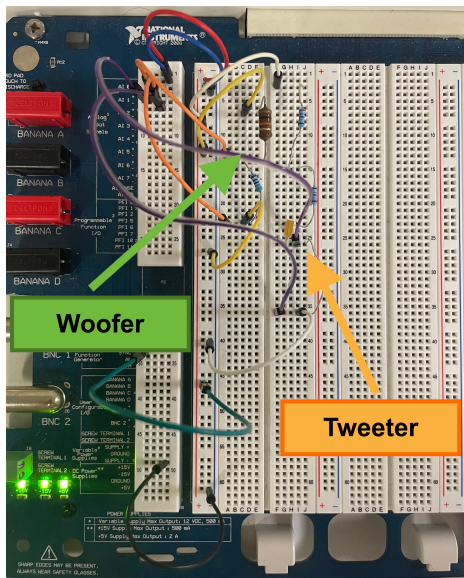
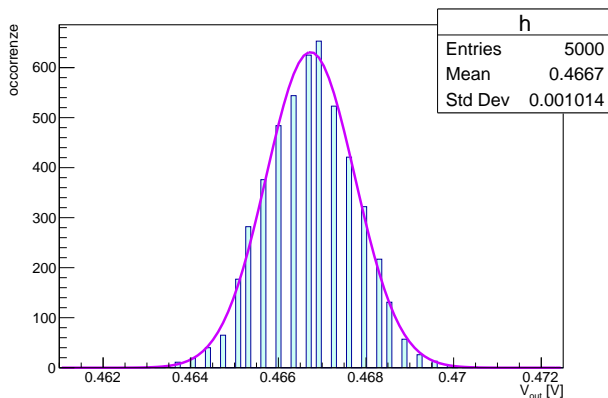


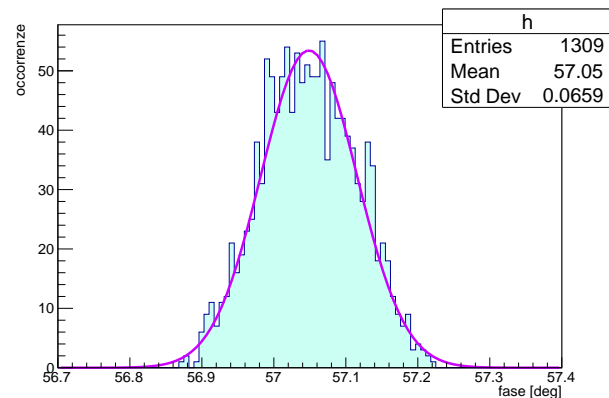
Figura 1: Circuito realizzato sull'ELVIS e relativo schema.

2 Risultati e discussione

2.1 Acquisizione dati



(a) Distribuzione delle misure di ampiezza di un segnale costante.



(b) Distribuzione delle misure di fase di un segnale costante.

Figura 2: Istogrammi per la valutazione dell'errore casuale

I risultati⁴ delle misure dirette prese con il *Digital Multimeter* sono riassunti nella Tab. 1.

Le misure effettuate per stimare l'errore casuale si distribuiscono normalmente attorno ad un valore medio, come illustrato nella Fig. 2. Dunque, alle misure di ampiezza e fase è stato associato un errore pari alla deviazione standard della relativa distribuzione ($\sigma_a = 0.001$ V per l'ampiezza, $\sigma_f = 0.07^\circ$ per la fase). Per le misure di fase, poi, è stato tenuto conto anche di un errore sistematico (si veda la Sezione 2.2.3).

Woofer	Tweeter
$L = (10.2 \pm 0.1) \cdot 10^{-3}$ H	$C = (26.1 \pm 0.3) \cdot 10^{-9}$ F
$R_w = (560.8 \pm 0.3) \Omega$	$R_t = (559.9 \pm 0.3) \Omega$
$R_L = (40.92 \pm 0.03) \Omega$	$R_{agg} = (37.27 \pm 0.03) \Omega$

Tabella 1: Risultati delle misure dirette dei componenti del circuito.

⁴Si vedano le specifiche della scheda [2] per la giustificazione degli errori associati alle misure.

2.2 Analisi

2.2.1 Analisi qualitativa

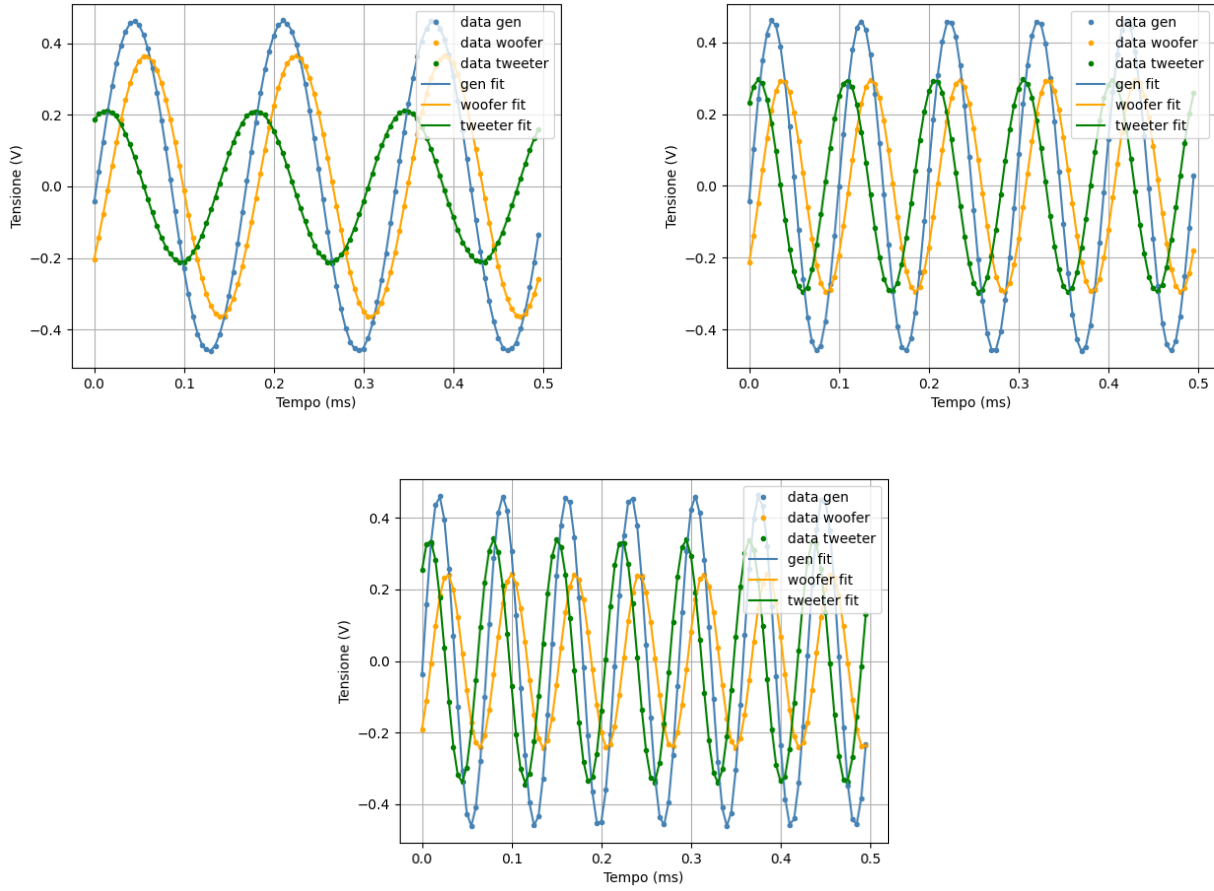


Figura 3: Andamento delle tensioni in funzione del tempo alle frequenze di, nell'ordine, 6kHz, 10kHz e 14kHz.

La Fig. 3 illustra il comportamento del circuito in risposta a 3 diverse frequenze: 4kHz, 10kHz, 14kHz. Si osserva che il comportamento è in accordo con quello atteso: alla frequenza di 4kHz, più bassa della frequenza di crossover attesa ν_c^{dir} , la tensione più alta è sul *woofer*, alla frequenza di 14kHz, più alta della frequenza di crossover attesa ν_c^{dir} , la tensione più alta è sul *tweeter*. Alla frequenza di 10kHz, vicina alla frequenza di crossover attesa ν_c^{dir} , le tensioni su *tweeter* e *woofer* sono circa uguali.

2.2.2 Analisi ampiezza

Il *function generator* della scheda *ELVIS* ha una resistenza interna $R_{gen} = 50 \Omega$, che essendo piccola rispetto alle resistenze utilizzate nel circuito è stata trascurata nella risoluzione analitica dello stesso.

I dati ottenuti, e il relativo fit, sono visibili nella Fig. 4, mentre i parametri del fit nella prima colonna della Tab. 2.

	analisi ampiezza	analisi fase
V_0 (V)	0.429 ± 0.001	-
L (mH)	9.84 ± 0.05	10.2 ± 0.02
C (nF)	27.6 ± 0.01	26.0 ± 0.09
R_w (Ω)	599 ± 3	523 ± 1
R_t (Ω)	560 ± 6	700 ± 20
$\tilde{\chi}^2$ (fit <i>woofer</i>)	0.1765	9.381
$\tilde{\chi}^2$ (fit <i>tweeter</i>)	0.1233	12.36
ν_c (kHz)	9.7 ± 0.1	9.8 ± 0.1

Tabella 2: Parametri ottenuti dai fit sulle ampiezze e sulle fasi, relativi χ^2 ridotti, e frequenza di crossover risultante dai fit (applicando la (1)).

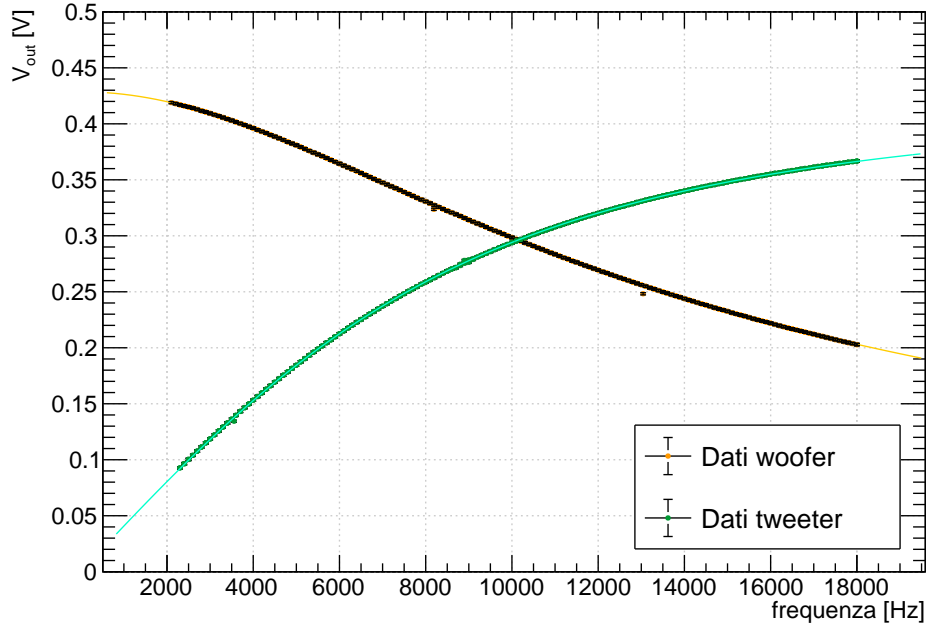
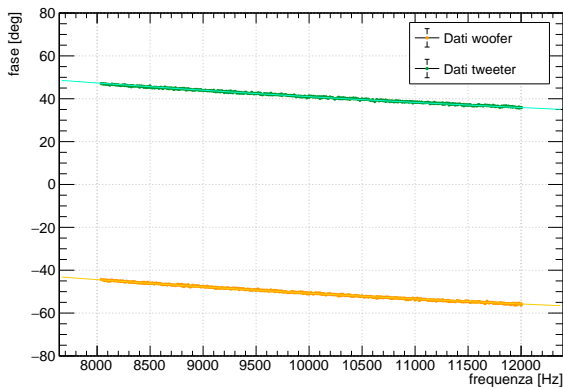


Figura 4: Ampiezza del segnale in funzione della frequenza sui due rami. Le barre di errore sono presenti ma parzialmente nascoste dai punti.

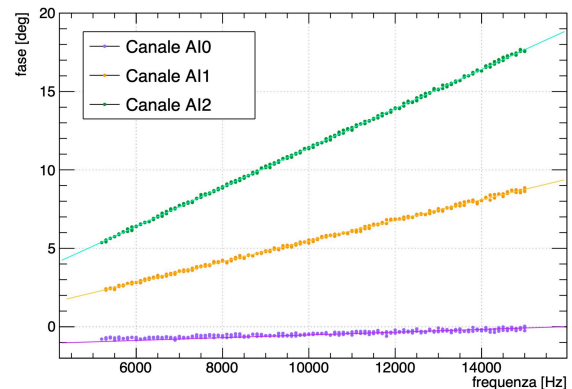
Applicando la (1) ai valori ottenuti dal fit, risulta $\nu_c^{(\text{freq})} = (9.7 \pm 0.1) \text{ kHz}$.

Dal grafico e dal valore del chi-quadro ridotto si evince che il fit si accorda bene con i dati sperimentali. Il valore del χ^2 suggerisce inoltre una leggera sovrastima dell'errore. I valori ottenuti per R_w ed R_t , però, non risultano compatibili con i valori misurati direttamente, né tra di loro. Questo fa sì che la (1) non sia esatta, da cui la differenza tra il valore di ν_c calcolato con i parametri del fit e l'effettiva frequenza per cui l'ampiezza del segnale è uguale sui due rami.

2.2.3 Analisi fase



(a) Fase del segnale in funzione della frequenza sui due rami.



(b) Errori sistematici sulla fase in funzione della frequenza.

Figura 5: Grafici relativi all'analisi in fase

La misura della fase è soggetta a un errore sistematico dovuto alla non simultaneità di digitalizzazione del segnale proveniente dai 3 canali utilizzati. La scheda *ELVIS II* dispone infatti di un singolo ADC a 8 canali e il campionamento dei segnali avviene su ciascun canale in successione (*interval sampling*). Per stimare questo sfasamento dei segnali, è stato effettuato uno *sweep* di frequenza ad ampiezza e fase costante, ottenendo i dati riportati nella Fig. 5b, che confermano come le fasi misurate tendano ad aumentare con la frequenza. Il valore corretto della fase si ottiene sottraendo ad ogni punto l'errore sistematico valutato alla frequenza corrispondente con un fit lineare.

Una volta eliminato l'errore sistematico, è stato eseguito un fit secondo la (2), ottenendo i parametri della Tab. 2. Il fit

restituisce un valore molto alto per la resistenza sul ramo del *tweeter*, non compatibile con la resistenza misurata con il multimetro. Il valore ottenuto $\nu_c^{(fasi)} = (9.8 \pm 0.1)$ kHz è invece compatibile con $\nu_c^{(freq)}$ e $\nu_c^{(dir)}$.

Conclusioni

Qualitativamente il comportamento del filtro crossover rispecchia il modello teorico di riferimento. Le tre stime della frequenza, rispettivamente $\nu_c^{(dir)} = (9.8 \pm 0.1)$ kHz, $\nu_c^{(freq)} = (9.7 \pm 0.1)$ kHz e $\nu_c^{(fasi)} = (9.8 \pm 0.1)$ kHz, risultano compatibili tra loro. Tuttavia, i parametri R_w e R_t restituiti dal fit non risultano compatibili con quelli misurati direttamente. Questo è probabilmente dovuto alla presenza di resistenza parassite nel circuito, che fanno sì che il suo comportamento si discosti da quello ideale. In particolare, il valore che più si discosta da quello misurato è R_t nel caso dell'analisi in fase; ciò è dovuto, probabilmente, al fatto che quel ramo del circuito avesse le numerose resistenze in serie inserite per compensare quella dell'induttore, aumentando le resistenze parassite.

Riferimenti bibliografici

- [1] Renzo Perfetti. *Circuiti Elettrici*. Zanichelli, 2012.
- [2] National Instruments. «NI ELVIS II Series Specifications». In: (2009). URL: <https://download.ni.com/support/manuals/372590b.pdf> (visitato il 23/05/2024).
- [3] Paolo Fornasini. *The Uncertainty in Physical Measurements*. Springer, 2008.

A Risoluzione del circuito

Le Eq. (1) e (2) sono state ricavate con il metodo dei fasori.

Le impedenze dei due rami sono, in prima approssimazione,

$$Z_W = R + j\omega L$$

$$Z_T = R - \frac{j}{\omega C}$$

dove $R_w = R_t = R$.

Applicando la legge di Kirchhoff, otteniamo una tensione sul *woofer* pari a

$$V_w(t) = V_0 \frac{R}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \cos\left(\omega t - \arctan\left(\frac{\omega L}{R}\right)\right)$$

e sul *tweeter* di

$$V_t(t) = V_0 \frac{R}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}} \cos\left(\omega t + \arctan\left(\frac{1}{\omega RC}\right)\right)$$

da cui si nota che, se vale l'Eq. 1, i moduli delle tensioni sono uguali, mentre le fasi uguali in valore assoluto e opposte in segno.

B Propagazione degli errori

L'errore su ν_c si trova applicando il metodo delle derivate parziali [3], ottenendo

$$\Delta\nu_c = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{C}{2(LC)^{3/2}} \frac{\Delta L}{L} + \frac{L}{2(LC)^{3/2}} \frac{\Delta C}{C} \right)$$

dove ΔL e ΔC sono gli errori assoluti su L e C , rispettivamente.