1 $a+b+c=0$ を満たす実数 a, b, c について，$(|a|+|b|+|c|)^2 \geqq 2(a^2+b^2+c^2)$ が成り立つことを示せ．また，ここで等号が成り立つのはどんな場合か．

2 a, b, c, d を整数とし，行列 $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ を考える．$\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ とし，自然数 n に対して $A^n=\begin{pmatrix} a_n & b_n \\ c_n & d_n \end{pmatrix}$ とする．このとき，

(1) $n \geqq 0$ について，$c_{n+2}-(a+d)c_{n+1}+(ad-bc)c_n=0$ を示せ．

(2) p を素数とし，$a+d$ は p で割り切れないものとする．ある自然数 k について，c_k と c_{k+1} が p で割り切れるならば，すべての n について c_n は p で割り切れることを示せ．

3 xy 平面上で，$(1,1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする．P, Q はそれぞれ x 軸，y 軸の正の部分にある点で，線分 PQ が円 C に接しているとする．正三角形 PQR を第 1 象限内に描くとき，頂点 R の座標 (a,b) について，a, b の間に成り立つ関係式を求めよ．

4　3人の選手 A，B，C が次の方式で優勝を争う．

まず A と B が対戦する．そのあとは，一つの対戦が終わると，その勝者と休んでいた選手が勝負をする．このようにして対戦をくり返し，先に2勝した選手を優勝者とする．(2連勝でなくてもよい．)

各回の勝負で引き分けはなく，A と B は互角の力量であるが，C が A，B に勝つ確率はともに p である．

(1)　2回の対戦で優勝者が決まる確率を求めよ．

(2)　ちょうど4回目の対戦で優勝者が決まる確率を求めよ．

(3)　A，B，C の優勝する確率が等しくなるような p の値を求めよ．

5　実数 r は $2\pi r > 1$ を満たすとする．半径 r の円の周上に2点 P，Q を，弧 PQ の長さが1になるようにとる．点 R が弧 PQ 上を P から Q まで動くとき，弦 PR が動いて通過する部分の面積を $S(r)$ とする．

r が変化するとき，面積 $S(r)$ の最大値を求めよ．

6　n を自然数とし，$I_n = \displaystyle\int_1^e (\log x)^n dx$ とおく．

(1)　I_{n+1} を I_n を用いて表せ．

(2)　すべての n に対して，$\dfrac{e-1}{n+1} \leqq I_n \leqq \dfrac{(n+1)e+1}{(n+1)(n+2)}$ が成り立つことを示せ．