

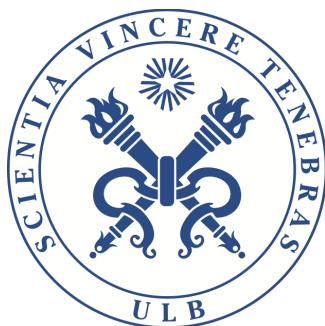
ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE BRUXELLES

ULB

PROJET MÉCANIQUE RATIONNELLE II

Projet 3 : le double pendule

Cornil BRUNO
Fara SAM



2015-2016

Logiciel : *Matlab*

Table des matières

1	Introduction	2
1.1	Préambule	2
1.2	Le système	2
2	Méthodique	3
2.1	Les outils graphiques	3
2.1.1	La représentation temporelle du mouvement	3
2.1.2	Le plan des phases	3
2.1.3	Les sections de Poincaré	3
2.1.4	Les diagrammes de bifurcation	3
2.2	La démarche adoptée	4
2.3	Remarques générales	4
3	Apparition du chaos	5
3.1	Paramètres indépendants	5
3.2	Paramètres provoquant le chaos	6
3.2.1	La constante de raideur	6
3.2.2	Les deux masses	8
3.2.3	La longueur des pendules	10
3.2.4	La longueur libre du ressort	11
4	Conclusion	13

1 Introduction

1.1 Préambule

Dans le cadre de ce projet, les étudiants du bloc 2 à l'école polytechnique de Bruxelles sont amenés à mettre en évidence le phénomène d'apparition du chaos dans un système fort simple. Le chaos se manifeste dans des systèmes dynamiques rigoureusement déterministes. Ceux-ci deviennent totalement imprévisibles et adoptent des comportements différents *suite à une légère modification des conditions initiales*. C'est ce qui va faire l'objet de ce rapport.

Pour mener à bien le projet, plusieurs outils graphiques seront utilisés : la représentation temporelle du mouvement, le plan des phases, la section de Poincaré et le diagramme de bifurcation.

1.2 Le système

Le dispositif qui va être étudié consiste en deux pendules ponctuels de masse m_1 et de masse m_2 distants d'une longueur l de leur point de fixation O_1 et O_2 . Les masses m_1 et m_2 sont reliées par un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0 . Le pendule de masse m_1 subit un couple moteur $A \cdot \sin(\omega t)$. Les points de fixation O_1 et O_2 des deux pendules sont éloignés d'une distance d . Le système est donc dépendant de 8 paramètres ($m_1, m_2, l, l_0, d, k, A, \omega$).

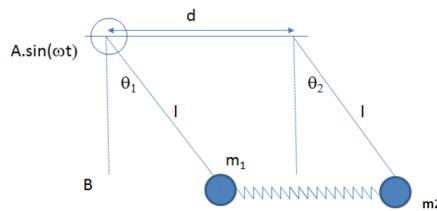


FIGURE 1 – Pendules couplés

Etant dans un système à deux degrés de liberté, les deux équations qui régissent le mouvement sont :

$$\begin{cases} m_1 \cdot l^2 \frac{d^2\theta_1}{dt^2} = A \cos(\omega t) - m_1 g l \sin(\theta_1) + \overrightarrow{\text{OM}_1} \times \overrightarrow{\text{F}_{\text{rappel}}} \\ m_2 \cdot l^2 \frac{d^2\theta_2}{dt^2} = -m_2 g l \sin(\theta_2) - \overrightarrow{\text{OM}_2} \times \overrightarrow{\text{F}_{\text{rappel}}} \end{cases}$$

2 Méthodique

2.1 Les outils graphiques

Le lecteur trouvera dans cette sous-section l'utilisation des différentes représentations munies de leur interprétation.

2.1.1 La représentation temporelle du mouvement

Il s'agit de la position - exprimée en radians par rapport à la verticale - de chacun des pendules en fonction du temps. Si on imagine un cas sans ressort, sans couple moteur et un angle initial nul pour le second pendule, ce graphe sera simplement la superposition d'une fonction sinusoïdale et d'une droite. Le chaos peut être mis en évidence en observant que deux systèmes possédant des conditions initiales très proches auront des courbes différentes l'une de l'autre pour chacun des pendules. En effet, cela traduirait la divergence des deux mouvements.

2.1.2 Le plan des phases

Le plan des phases est le graphe de $\dot{\theta}$ en fonction de θ . En d'autres termes, il s'agit du lien " position-vitesse ". L'utilité principale de ce graphe est la facilité avec laquelle un mouvement périodique est déterminé. En effet, il sera représenté par une courbe fermée. De plus, le chaos se lira lorsque, pour deux systèmes possédant des conditions initiales très proches, deux courbes disparates seront observables. Dès lors, il pourra être conclu que les deux dispositifs possèdent respectivement des mouvements différents.

2.1.3 Les sections de Poincaré

Cette représentation graphique correspond à un plan des phases mais avec un échantillonnage précis. Par conséquent, ce ne sont pas des courbes mais des points qui sont observés. Un système périodique peut être déterminé de la même manière que pour le plan des phases : si en reliant les points, une courbe fermée apparaît. Si au contraire les points s'affichent de manière aléatoire, on dira qu'il y a apparition de chaos. Un autre critère valable pour affirmer la présence du chaos est de voir, en reliant les points, apparaître une courbe fractale.

2.1.4 Les diagrammes de bifurcation

Ces diagrammes ont pour but de représenter l'évolution du système en fonction d'un paramètre non constant. Pour chaque valeur du paramètre, les systèmes peuvent être représentés par une section de Poincaré. En la projetant sur l'axe des ordonnées, on construit le diagramme de bifurcation. Celui-ci s'interprète comme précédemment. Si une seule couleur est observée, cela veut dire que les points se superposent et que le système n'est pas dans une phase chaotique. Dans le cas contraire, il se pourrait que le système le soit. S'en assurer fait l'objet de la section suivante.

2.2 La démarche adoptée

Une méthode systématique s'est naturellement imposée. Après une étude du système, certains paramètres parmi les 8 semblaient plus enclins à fournir une situation chaotique. Le programme informatique a dès lors été utilisé de la manière suivante :

- Un diagramme de bifurcation était lancé pour ces paramètres de manière à observer l'évolution du système et ainsi mettre en évidence les zones *stables*, *de transition* et *chaotiques*.
- Pour cibler les zones particulières, un zoom était effectué. Pour ce faire, l'intervalle de variation du paramètre ainsi que le pas d'analyse étaient diminués.
- Celles-ci étaient étudiées plus en profondeur grâce aux sections de Poincaré et/ou au plan des phases.
- Une fois les zones chaotiques déterminées avec certitude, une représentation temporelle du mouvement était effectuée pour les exhiber de manière claire.
- Une explication de l'apparition du chaos sur base d'une interprétation physique pouvait alors être avancée.

2.3 Remarques générales

- 1) Tous les graphes repris dans la suite du rapport sont composés de la superposition de trois systèmes. En effet, afin de mettre en évidence le chaos, il est indispensable de comparer le comportement d'un même dispositif mais pour plusieurs conditions initiales très proches. Ici, celles qui ont systématiquement été choisies sont :
 - Vitesses nulles pour les deux pendules.
 - Angle nul pour le second pendule.
 - Angle de : $\pi/4$, $(\pi/4 - 0.001)$ et $(\pi/4 - 0.002)$ pour le premier pendule des systèmes 1, 2 et 3.
- 2) Les paramètres ont été sélectionnés avec précaution. En effet, si un travail d'exhibition du chaos est en cours pour un paramètre bien précis, il est indispensable que les autres soient indépendants à son apparition. Sinon, les conclusions tirées seraient faussées. Dès lors, des *paramètres de bases* ont été déterminés. Ceux-ci sont des valeurs prises une par une pour lesquelles le système n'est pas chaotique. Les voici repris ci-dessous :

$$k=5, l=32, l_0=12, m_1=5, m_2=5, d=20, A = 2, w=50.$$

- 3) Il a été décidé de n'afficher que les points liés au premier pendule du système. En effet, les deux masses étant liées, si la première se retrouve dans une situation chaotique, nous pouvons rapidement déduire que la deuxième le sera également.
- 4) Jusqu'à présent, que les cas "système chaotique" et "système non-chaotique" ont été abordés. Il faut savoir que le passage de l'un à l'autre, n'est pas toujours immédiat. Souvent, une *zone de transition vers le chaos* apparaît. Celle-ci se retrouve lorsque les deux situations ne sont pas clairement distinguées.

3 Apparition du chaos

3.1 Paramètres indépendants

Comme mentionné plus haut, le projet a débuté par une étude des équations du mouvement. Directement, il a semblé évident que les paramètres A , w et d ne provoqueraient pas le chaos. En effet, il est facile de voir qu'ils ne sont pas liés à θ par le biais d'une multiplication. Dès lors, ils sont indépendants à l'apparition du chaos. Ceci s'est confirmé graphiquement.

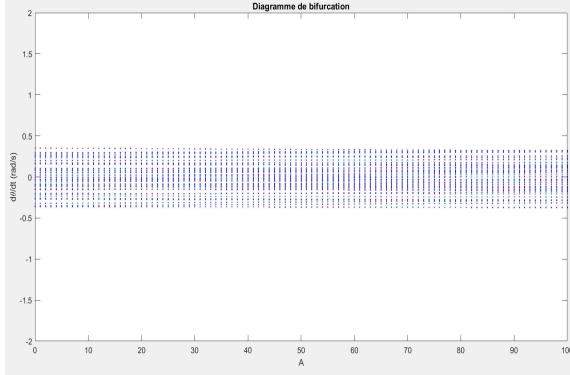


FIGURE 2 – Diagramme de bifurcation : variation de A de 0 à 100. Constantes : $k=5$, $l=32$, $l_0=15$, $m_1=1$, $m_2=1$, $d=20$, $w=50$.

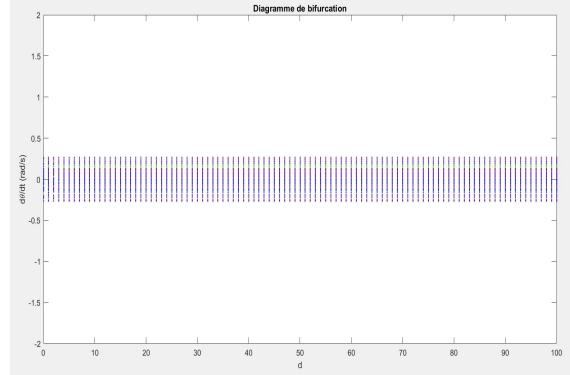


FIGURE 3 – Diagramme de bifurcation : variation de d de 0 à 100. Constantes : $k=5$, $l=32$, $l_0=15$, $m_1=1$, $m_2=1$, $A=2$, $w=50$.

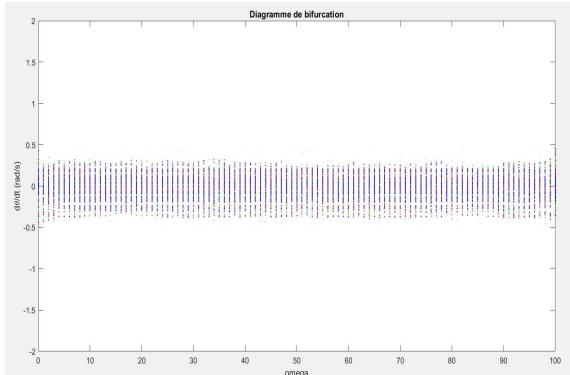


FIGURE 4 – Diagramme de bifurcation : variation de w de 0 à 100. Constantes : $k=5$, $l=32$, $l_0=15$, $m_1=1$, $m_2=1$, $d=20$, $A=1$, $w=10$.

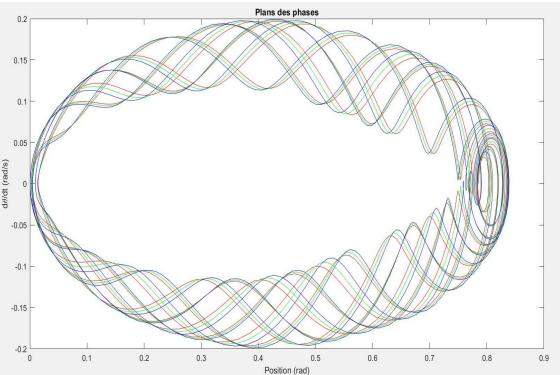


FIGURE 5 – Système non-chaotique Constantes : $k=5$, $l=32$, $l_0=15$, $d=20$, $m_1=1$, $m_2=1$, $d=20$, $A=2$, $w=50$.

Nous voyons clairement sur ces graphiques que nos systèmes sont non-chaotiques. (c.f 2.1.4) Voici un graphe (Figure 5) qui le confirme. Les paramètres de A , d et w ont été pris au hasard tandis ceux faisant apparaître le chaos ont été choisis tels qu'ils ne le provoqueraient pas. Il est à noter que, bien que les trois couleurs sont distinguables, le système n'est pas chaotique. En effet, les mouvements des trois dispositifs sont fort proches les uns des autres. Ils ne sont pas fondamentalement différents et ne répondent donc pas à la définition du chaos.

3.2 Paramètres provoquant le chaos

Les autres variables ont influencé l'apparition du chaos. Les différentes analyses et les graphes qui y sont liés sont repris dans la présente section.

3.2.1 La constante de raideur

Le paramètre k provoque clairement le chaos. En effet, sur base du diagramme de bifurcation nous pouvons dire qu'à partir de $k = 12$, les points ne sont plus superposés. Le système est-il chaotique à partir de cette valeur de k ?

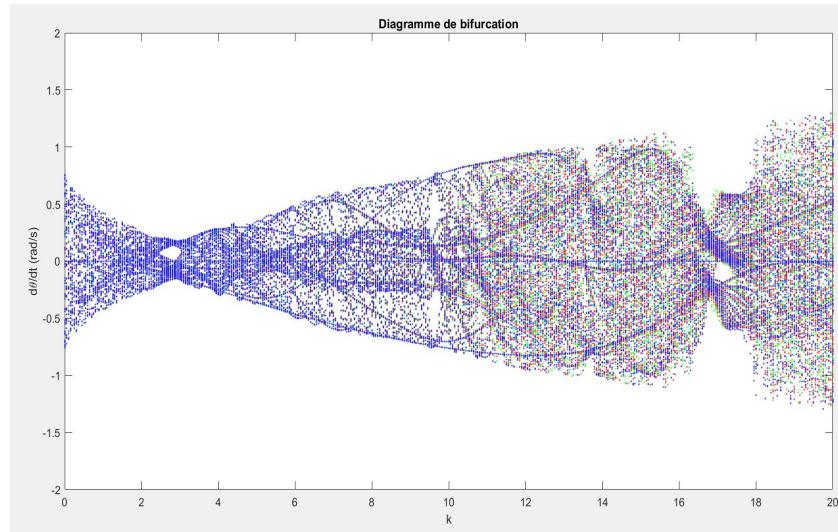


FIGURE 6 – Diagramme de bifurcation : variation de k de 0 à 20. Constantes : $l=32$, $l_0=15$, $m_1=5$, $m_2=5$, $d=20$, $A=2$, $w=50$.

Dans le but de répondre à cette question, une section de Poincaré a été établie pour $k = 15$.

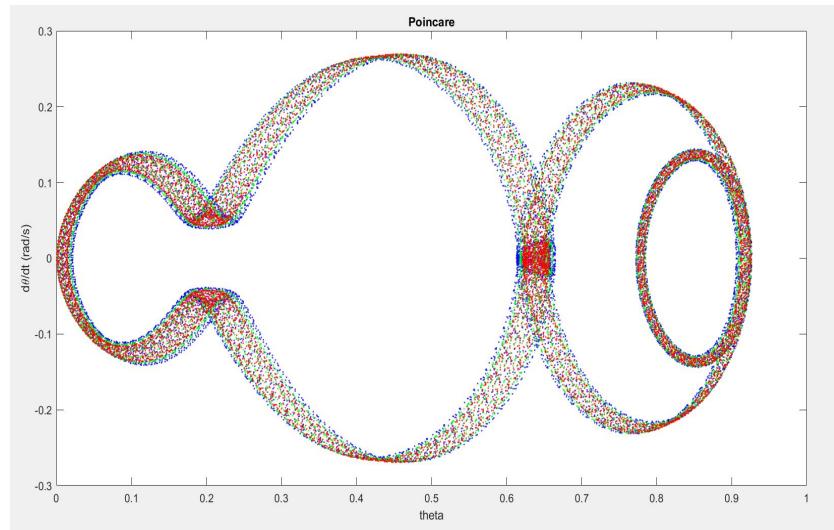


FIGURE 7 – Section de Poincaré : $k = 15$. Constantes : $l=32$, $l_0=15$, $m_1=5$, $m_2=5$, $d=20$, $A=2$, $w=50$.

Le graphe résultant semble exhiber le chaos. Pourtant, lorsque l'on fait des sections de Poincaré pour k variant de 17 jusqu'à 50, on tend vers la forme suivante (figure 11) :

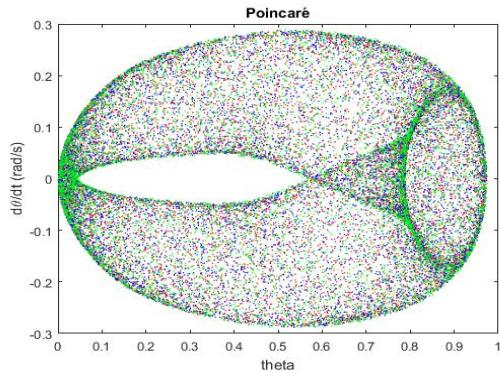


FIGURE 8 – Section de Poincaré pour $k = 17$. Constantes : $l=32$, $l_0=15$, $m_1=1$, $m_2=1$, $d=20$, $A=2$ $w=50$.

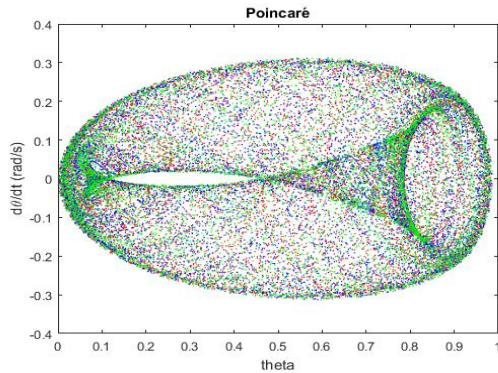


FIGURE 9 – Section de Poincaré pour $k = 20$. Constantes : $l=32$, $l_0=15$, $m_1=1$, $m_2=1$, $d=20$, $A=2$ $w=50$.

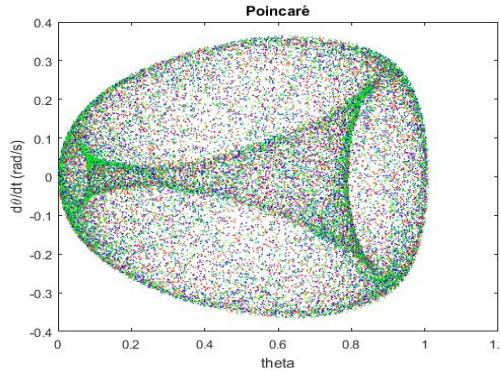


FIGURE 10 – Section de Poincaré pour $k = 28$. Constantes : $l=32$, $l_0=15$, $m_1=1$, $m_2=1$, $d=20$, $A=2$ $w=50$.

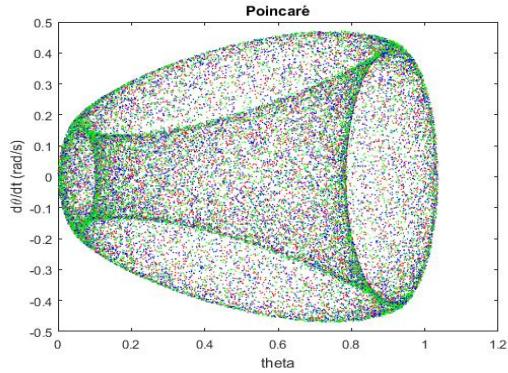


FIGURE 11 – Section de Poincaré pour $k = 50$. Constantes : $l=32$, $l_0=15$, $m_1=1$, $m_2=1$, $d=20$, $A=2$ $w=50$.

On conclut donc que la figure 7 correspondait à une *zone de transition vers le chaos*. En effet, la section de Poincaré n'est pas la même que la structure type du chaos pour la variation de ce paramètre.

L'apparition de celui-ci pourrait être expliquée par le fait que plus la constante de raideur est forte, plus les fréquences d'oscillation de nos masses seraient importantes.

Il est à noter que les lignes visibles sur les graphes ci-dessus traduisent bien la sensibilité aux conditions initiales. En effet, comme notre représentation graphique est dépendante du temps, il peut être déduit que les lignes représentent une évolution périodique du mouvement. Tous les points affichés pour des temps compris entre $\in [t_0; t_{\text{chaos}}]$ sont alignés. Ensuite, passer le t_{chaos} le dispositif perd son caractère périodique. C'est ce qui explique l'apparition de plein de points colorés.

3.2.2 Les deux masses

Les diagrammes de bifurcation ci-joints montrent que des petites valeurs de m_1 et de m_2 conduisent à une zone chaotique. Nous pouvons constater aisément que plus les masses sont petites, plus le chaos a des chances de se manifester. Cela pourrait être expliqué par le fait que, plus les masses sont petites, moins leurs inerties seront importantes. Le système aura donc plus vite tendance à s'emballer pour une même force appliquée.

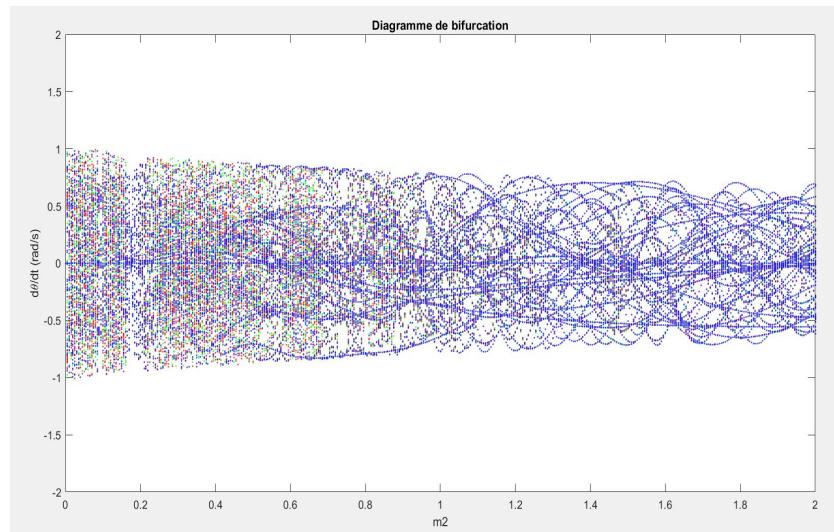


FIGURE 12 – Diagramme de bifurcation : variation de m_2 de 0 à 2. Constantes : $k=5$, $l=32$, $l_0=15$, $m_1=5$, $d=20$, $A=2$, $w=50$.

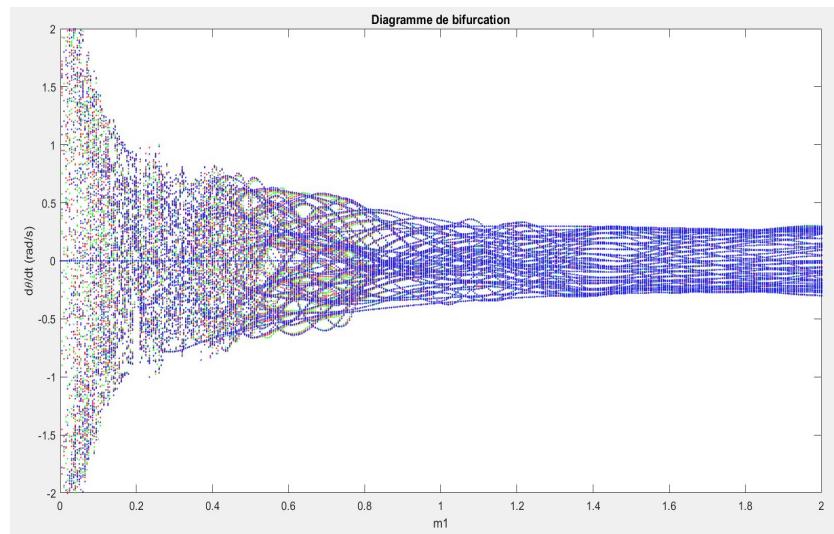


FIGURE 13 – Diagramme de bifurcation : variation de m_1 de 0 à 2. Constantes : $k=5$, $l=32$, $l_0=15$, $m_2=5$, $d=20$, $A=2$, $w=50$.

Les diagrammes de bifurcation peuvent parfois être trompeurs. Pour confirmer l'intuition qu'ils fournissent, un plan des phase a été tracé pour exhiber le chaos lié aux petites valeurs de **m2**.

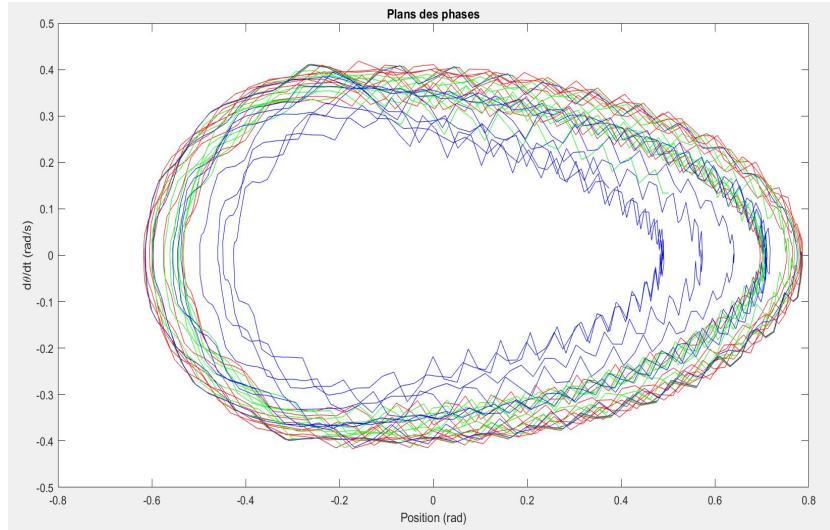


FIGURE 14 – Plan des phases. Constantes : $k=5$, $l=32$, $l_0=15$, $m_1 = 1$, **$m_2=0.02$** , $d=20$, $A=10$, $w=50$.

Pour varier les plaisirs, un raisonnement similaire a été établi avec la représentation temporelle du mouvement.

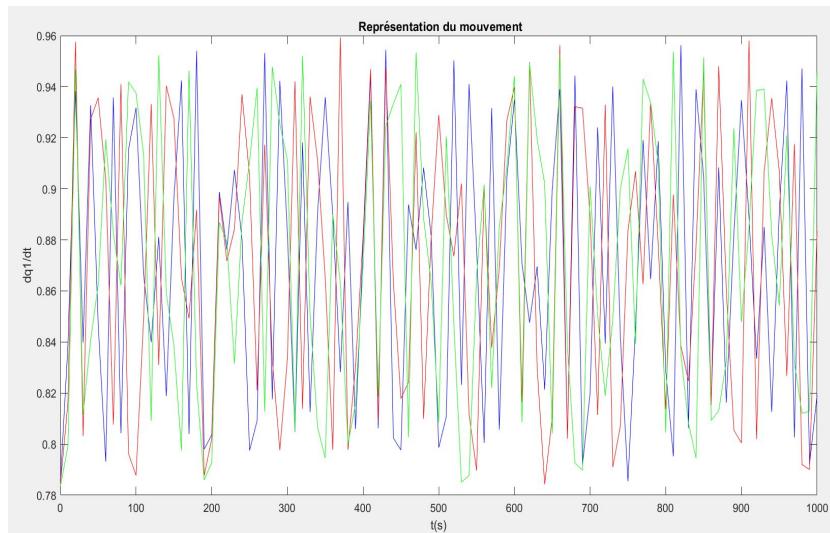


FIGURE 15 – Représentation temporelle du mouvement. Constantes : $k=5$, $l=32$, $l_0=15$, **$m_1 = 0.01$** , $m_2=1$, $d=20$, $A=10$, $w=50$

Les graphes confirment bien les doutes. Autant pour le plan des phases que pour la représentation temporelle du mouvement, les différents systèmes ne sont pas superposés. Les trois dispositifs se trouvent donc bien à des positions différentes pour un même temps. Finalement, il peut être affirmé que pour des petites masses le système a une tendance chaotique.

3.2.3 La longueur des pendules

Un diagramme de bifurcation a été lancé pour la longueur des pendules :

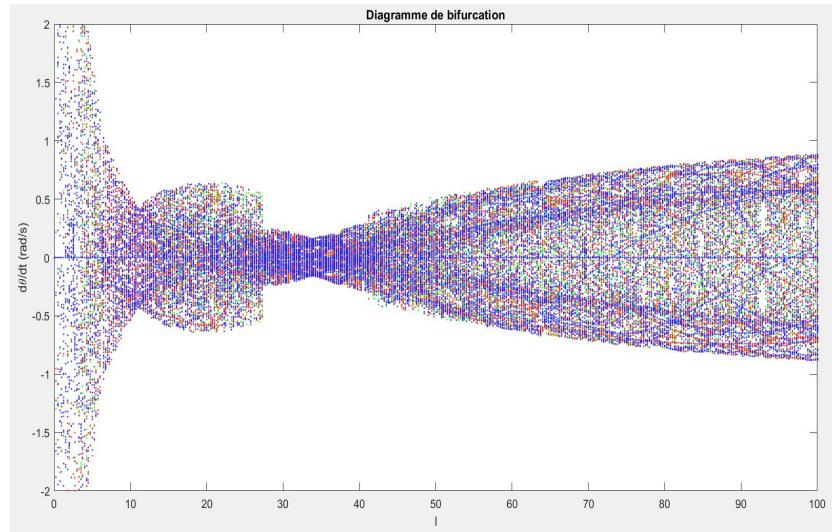


FIGURE 16 – Diagramme de bifurcation : variation de l de 0 à 100. Constantes : $k=5$, $l_0=15$, $d=20$, $m_1=5$, $m_2=5$, $A=2$, $w=50$.

La seule intervalle non chaotique qui peut être affirmée avec certitude est $l \in [29 ; 40]$.

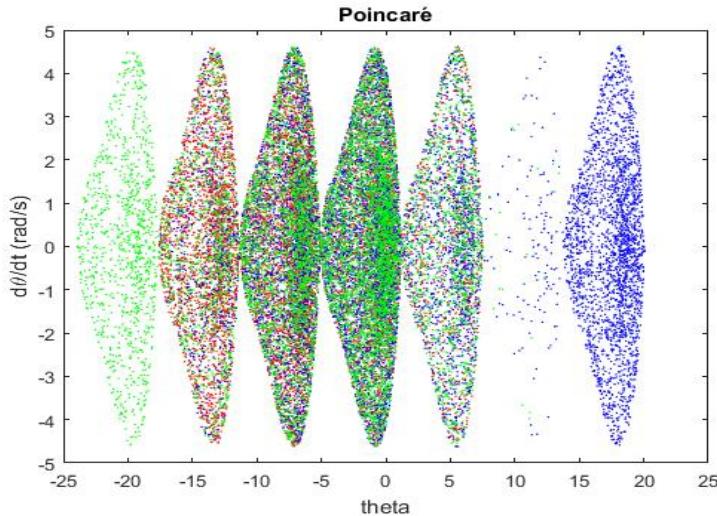


FIGURE 17 – Section de Poincaré : $l = 2$. Constantes : $k=5$, $l_0=15$, $m_1=5$, $m_2=5$, $d=2$, $A=2$, $w=50$.

Ci-dessus se trouve une section Poincaré pour $l = 2m$. La présence de chaos est indéniable. Si on critique l'intérêt pratique d'une telle valeur de l , on comprend rapidement qu'elle est intéressante. En effet, une situation de deux pendules de 2 m distants de 2 m est tout à fait plausible. Physiquement, le chaos peut être expliqué par le fait que, si les longueurs augmentent, les moments de force par rapport au point de fixation augmentent aussi. Dès lors, les mouvements peuvent être amplifiés et mener à une situation chaotique. C'est qui est illustré pour $l=100$

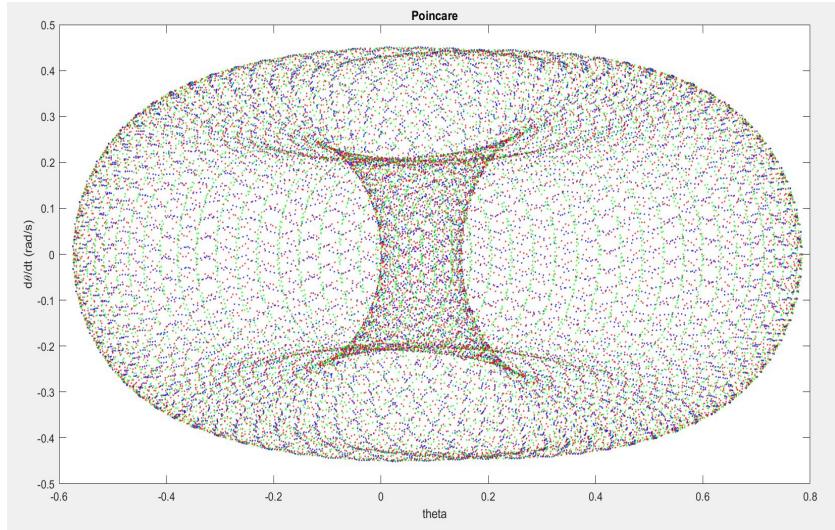


FIGURE 18 – Section de Poincaré : $\mathbf{l} = 100$. Constantes : $k=5$, $l_0=15$, $m_1=5$, $m_2=1$, $d=20$, $A=2$, $w=50$.

3.2.4 La longueur libre du ressort

Nous constatons que la longueur libre du ressort influence la présence de chaos dans notre système. Ce qui est logique au point de vue physique. Effectivement, plus la longueur libre est grande, plus la force de rappel du ressort sera importante. Le système a donc plus de chance d'être chaotique. En effet, les forces dues au ressort seront d'autant plus grande.

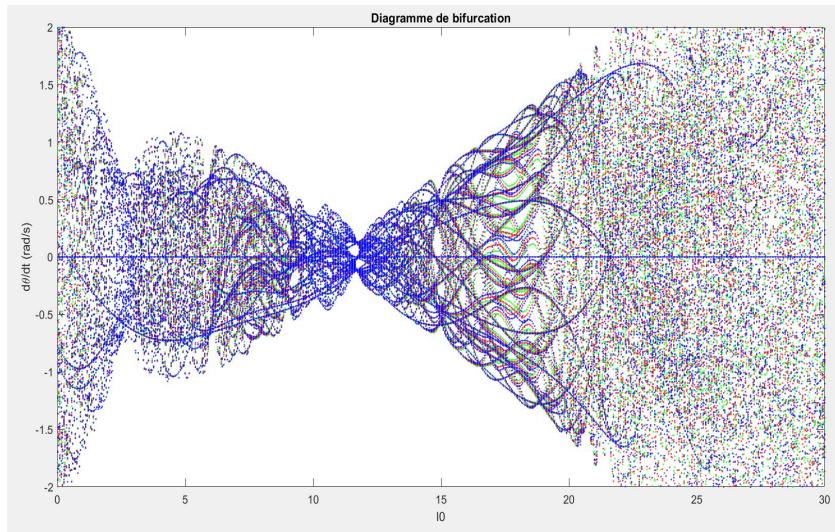


FIGURE 19 – Diagramme de bifurcation : variation de \mathbf{l}_0 de 0 à 30. Constantes : $k=5$, $l=32$, $d=20$, $m_1=5$, $m_2=5$, $A=2$, $w=50$.

Les propos tenus ci-dessus sont illustrés par une section de Poincaré pour une longueur libre égale à 25.

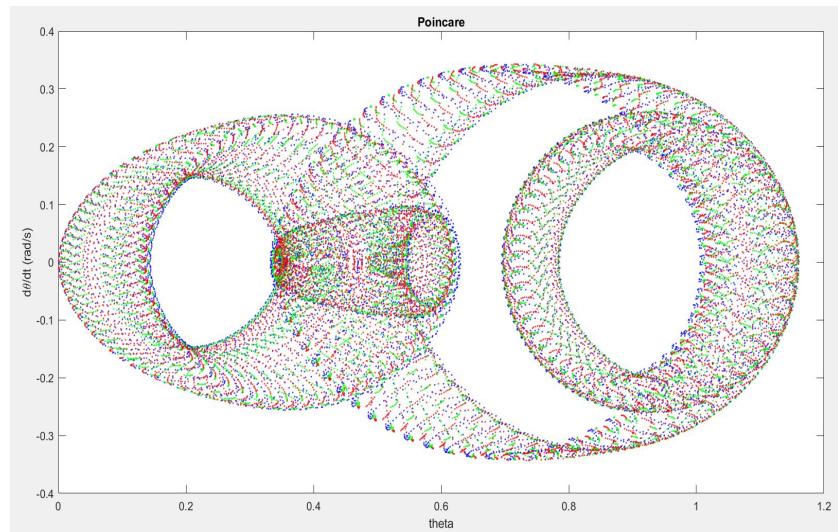


FIGURE 20 – Section de Poincaré : $l_0 = 25$. Constantes : $k=5$, $l=32$, $d=20$ $m_1=5$, $m_2=5$, $d=20$, $A=2$, $w=50$.

4 Conclusion

Après avoir étudié ce système par le biais de l'intuition et d'outils graphiques, une analyse précise peut être établie.

Contrairement à ce qu'on pourrait imaginer, le couple moteur n'influence pas l'apparition du chaos. En effet, en regardant les graphes de bifurcation des deux paramètres A et ω , on constate que ceux-ci ne font pas apparaître le chaos. Le paramètre d , qui est la distance entre les deux points de fixation des pendules, ne le créera pas non plus.

Par contre, les autres paramètres présents dans nos équations du mouvement (tels que la longueur des pendules, les masses des deux pendules...) l'influencent fortement. Grâce aux différents graphiques, nous avons pu nous rendre compte que le chaos se manifeste rapidement dans un système pourtant simple. En effet, il suffit d'une petite variation d'un paramètre pour le voir apparaître.

Le but de ce projet était de prendre connaissance de l'apparition du chaos dans un système. Dès lors, il a été décidé d'étudier le dispositif paramètre par paramètre. Une analyse plus approfondie aurait pu être établie en faisant varier non pas un seul paramètre mais un *rapport de paramètre*. En effet, les équations du mouvement (c.f le système 1.2) auraient pu être manipulées pour faire apparaître plusieurs termes multiplicatifs contenant les différentes grandeurs géométrique du système devant θ . Ainsi, une partie linéaire et une partie non-linéaire serait apparue. Et c'est en faisant varier ces nouvelles constantes que l'influence des proportions sur le chaos aurait pu être démontrée. En effet, une des deux parties est alors plus importante que l'autre.

L'influence d'une légère modification dans les conditions initiales d'un même système a été mise en lumière. Cette réalité est à garder en tête pour l'élaboration des projets futurs d'ingénierie.

Table des figures

1	Pendules couplés	2
2	Diagramme de bifurcation : variation de A de 0 à 100. Constantes : k=5, l=32, l0=15, m1=1, m2=1, d=20, w50.	5
3	Diagramme de bifurcation : variation de d de 0 à 100. Constantes : k=5, l=32, l0=15, m1=1, m2=1, A=2, w=50.	5
4	Diagramme de bifurcation : variation de w de 0 à 100. Constantes : k=5, l=32, l0=12, m1=1, m2=1, d=20, A=1, w=10.	5
5	Système non-chaotique Constantes : k=5, l=32, l0=15, d=20, m1=1, m2=1, d=20, A=2, w=50.	5
6	Diagramme de bifurcation : variation de k de 0 à 20. Constantes : l=32, l0=15, m1=5, m2=5, d=20, A=2, w=50.	6
7	Section de Poincaré : k = 15. Constantes : l=32, l0=15, m1=5, m2=5, d=20, A=2, w=50.	6
8	Section de Poincaré pour k = 17. Constantes : l=32, l0=15, m1=1, m2=1, d=20, A=2 w=50.	7
9	Section de Poincaré pour k = 20. Constantes : l=32, l0=15, m1=1, m2=1, d=20, A=2 w=50.	7
10	Section de Poincaré pour k = 28. Constantes : l=32, l0=15, m1=1, m2=1, d=20, A=2 w=50.	7
11	Section de Poincaré pour k = 50. Constantes : l=32, l0=15, m1=1, m2=1, d=20, A=2 w=50.	7
12	Diagramme de bifurcation : variation de m2 de 0 à 2. Constantes : k=5, l=32, l0=15, m1=5, d=20, A=2, w=50.	8
13	Diagramme de bifurcation : variation de m1 de 0 à 2. Constantes : k=5, l=32, l0=15, m2=5, d=20, A=2, w=50.	8
14	Plan des phases. Constantes : k=5, l=32, l0=15, m1 = 1, m2=0.02 , d=20, A=10, w=50.	9
15	Représentation temporelle du mouvement. Constantes : k=5, l=32, l0=15, m1 = 0.01, m2=1, d=20, A=10, w=50	9
16	Diagramme de bifurcation : variation de l de 0 à 100. Constantes :k=5, l0=15, d=20 m1=5, m2=5, d=20, A=2, w=50.	10
17	Section de Poincaré : l = 2. Constantes :k=5, l0=15, m1=5, m2=5, d=2, A=2, w=50.	10
18	Section de Poincaré : l = 100. Constantes :k=5, l0=15, m1=5, m2=1, d=20, A=2, w=50.	11
19	Diagramme de bifurcation : variation de l0 de 0 à 30. Constantes :k=5, l=32, d=20 m1=5, m2=5, d=20, A=2, w=50.	11
20	Section de Poincaré : l0 = 25. Constantes :k=5, l=32, d=20 m1=5, m2=5, d=20, A=2, w=50.	12