Automatic System Verification
Exercices

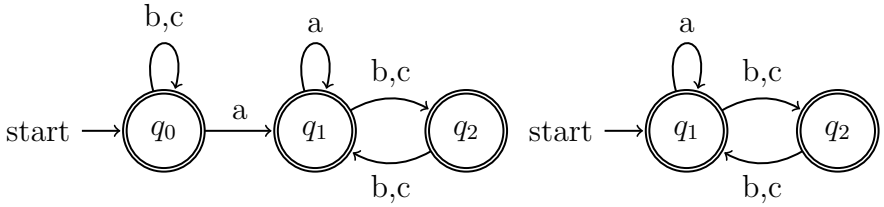
Cominato Enrico 137396
Department of Computer Science
Univeristy of Udine

January 4, 2021

1 Exercices on the automata's notes

Esercizio 2.3

Sia $\mathcal{A}$ l'automa dell'Esempio 2.2. Si consideri l'automa $\mathcal{A}'$ ottenuto da $\mathcal{A}$ rimuovendo lo stato q_0, e le transizioni in esso entranti e da esso uscenti, e facendo diventare q_1 il nuovo stato iniziale. Si stabilisca se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ riconoscono o meno lo stesso linguaggio
Riporto di seguito i due grafi.

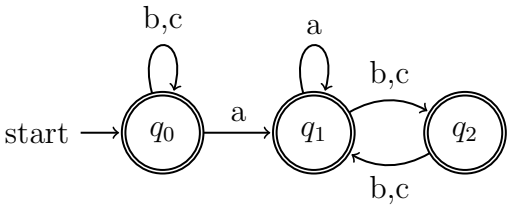


I due linguaggi non sono uguali. Per esempio la $\omega - parola\ babcabca...$ appartiene al primo dei due automi, ma non al secondo (da q_1 andiamo in q_2 ma da li possiamo leggere solo una b oppure una c)

Esercizio 2.4

Si costruisca l'automa $\mathcal{A}'$ che riconosce la variante finita (linguaggio di parole finite) dell'Esempio 2.2

Il linguaggio richiesto è il seguente:
L'insieme delle parole finite su $A = \{a, b, c\}$ tali che tra ogni coppia di occorrenze consecutive di a esiste un numero pari di occorrenze di simboli diversi da a.
Osservazione: una parola con una sola occorrenza di a deve essere sempre accettata.
L'automa risultante quindi è lo stesso dell'esempio 2.2, solo che le run su questo automa sono finite.



Esercizio 2.5

Sia W il linguaggio riconosciuto dall'automa $\mathcal{A}$' dell'Esercizio 2.4. Si caratterizzi il linguaggio $\overrightarrow{W}$.
Riprendo la definizione di $\overrightarrow{W}$:

$$\overrightarrow{W} = \{\alpha \in A^\omega \ t.c. \ \exists^\omega n \ \alpha(0, n) \in W\}$$

Sono quindi tutte quelle ω-parole di cui ogni prefisso finito appartiene a W.
Analizziamo per casi:

- la parola non ha neppure una a: in questo caso ogni suo prefisso appartiene a W perchè le parole $(b|c), (b|c)^2, (b|c)^3, \ldots, (b|c)^n, \ldots \in W$
- la parola ha una sola occorrenza di a: anche in questo caso ogni suo prefisso appartiene a W perchè:
  - come visto nel punto precedente, fino a che non si incontra la lettera a le parole appartengono a W
  - dopo l'occorrenza di a, ancora tutti i prefissi appartengono a W, dato che tutte le parole finite con una sola occorrenza di a appartengono a W

- infine tutti gli altri casi sono parole con un più di una occorrenza di a: dove abbiamo che ogni prefisso, o ricade in uno dei precedenti casi, oppure è una parola che tra ogni coppia di occorrenze consecutive di a esiste un numero pari di occorrenze di simboli diversi da a e che quindi appartiene a W.

In questo caso abbiamo che $W^\omega = \overrightarrow{W}$.

Esercizio 2.7

Teorema 2.6

1. Se $V \subseteq A^*$ è regolare, allora V^ω è $\omega - regolare$
2. Se $V \subseteq A^*$ è regolare e $L \subseteq A^\omega$ è $\omega - regolare$, allora $V \cdot L$ è $\omega - regolare$
3. Se $L_1, L_2 \subseteq A^*$ sono $\omega - regolari$, allora $L_1 \cup L_2$ e $L_1 \cap L_2$sono $\omega - regolari$

Dimostrare le proprietà (2) e (3) del teorema
Dimostro *(2)*. Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ automi tali che $\mathcal{A}$ accetta V e $\mathcal{B}$ accetta L, allora possiamo costruire $\mathcal{C}$ unendo tutti gli stati finali di $\mathcal{A}$ con lo stato iniziale di $\mathcal{B}$. Otteniamo così un'automa che legge il linguaggio $V \cdot L$, quindi $V \cdot L$ è ω-regolare.
Dimostro *(3)*. Per quanto riguarda l'unione, prendiamo $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ automi tali che $\mathcal{A}$ accetta L_1 e $\mathcal{B}$ accetta L_2. Costruiamo $\mathcal{C}$ unendo gli stati iniziali di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Abbiamo quindi che $\mathcal{C}$ accetta tutte le parole di $L_1 \cup L_2$. Sappiamo inoltre che i linguaggi ω-regolari sono chiusi per complementazione, quindi possiamo riscrivere $L_1 \cap L_2 = \neg(\neg L_1 \cup \neg L_2)$ ed ottenere la chiusura per intersezione.

Esercizio 2.13

Fornire un esempio di parola non definitivamente periodica
Un esempio è:

$$abab b ab^3 ab^4 ab^5 ...$$

Esercizio 2.16

Dimostrare che una congruenza è una relazione di equivalenza invariante destra
Invariante a destra significa che $\forall x, y, z \in A$, se $x \sim y$ allora $xz \sim yz$. Questo è sempre vero perchè, concatenando la stessa parola ad x, y finiremo in un'unica classe di equivalenza.

Esercizio 2.19

Dato un automa di Büchi $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, A, \Delta, q_0, F)$, dimostrare che, per ogni $s, s' \in \mathcal{Q}$, $W^F_{ss'}$ è regolare
Un linguaggio è regolare se esiste un'automa in grado di accettarlo. Per poterlo accettare deve avere almeno uno stato finale. Quindi se eliminiamo dall'automa $\mathcal{A}$, tutti gli stati e le relazioni non interessate dai possibili cammini tra s e s' otteniamo un automa in grado di leggere solo $W^F_{ss'}$, e questo fa di lui un linguaggio regolare.

Esercizio 2.23

Dimostrare che la relazione $\approx_A$ è una congruenza di indice finito
Perchè $\approx_A$ sia una congruenza deve valere che $\forall u, u', v, v' \in A^*$ se $u \approx_A v$ e $u' \approx_A v'$ allora $uu' \approx_A vv'$. Questo è vero perchè avendo $u \approx_A v$ e $u' \approx_A v'$, allora $\exists t$ tale che:

- $s \to_u t \Leftrightarrow s \to_v t$
- $s \to^F_u t \Leftrightarrow s \to^F_v t$
- $t \to_{u'} s' \Leftrightarrow t \to_{v'} s'$
- $t \to^F_{u'} s' \Leftrightarrow t \to^F_{v'} s'$

Quindi abbiamo che $\forall s, s' \in Q$:

- $s \to_{uu'} s' \Leftrightarrow s \to_{vv'} s'$
- $s \to^F_{uu'} s' \Leftrightarrow s \to^F_{vv'} s'$

e quindi $uu' \approx_A vv'$. Il resto della dimostrazione è già stata svolta negli appunti.

Esercizio 2.25

Si dimostri che la relazione $\cong_\alpha$ è una relazione di equivalenza sui naturali di indice finito

Riprendo la definizione di $\cong_\alpha$. Sia $\sim$ una congruenza su A^* di indice finito. Sia $\alpha \in A^\omega$ e siano k, k' posizioni. Diciamo che $k \cong_\alpha^m k'$ (k, k' si riuniscono in $m > k, k'$) se $\alpha(k, m) \sim \alpha(k', m)$. Diciamo che $k \cong_\alpha k'$ se esiste m per cui $k \cong_\alpha^m k'$.

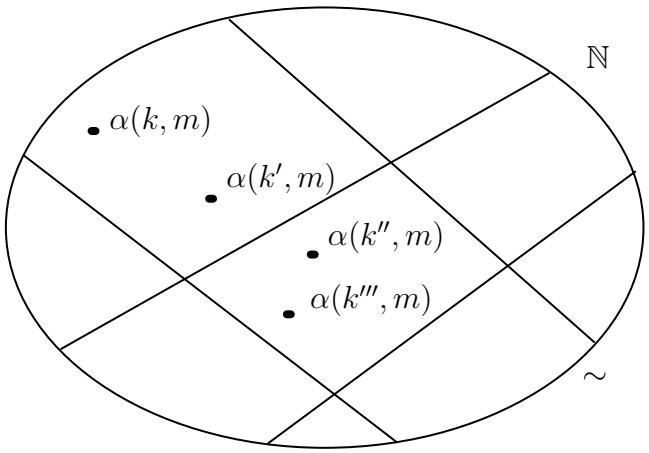
Dimostro che è una relazione di equivalenza:

- **Riflessività**: $\forall k \in \mathbb{N}$ è sempre vero che $k \cong_\alpha k$ perchè $k \cong_\alpha k \Leftrightarrow \exists m \; t.c. \; \alpha(k, m) \sim \alpha(k, m)$ e questo è vero $\forall k$ perchè $\sim$ è una relazione di equivalenza

- **Simmetria**: $\forall k, k' \in \mathbb{N}$ è sempre vero che $k \cong_\alpha k' \Rightarrow k' \cong_\alpha k$ perchè $k \cong_\alpha k' \Leftrightarrow \exists m \; t.c. \; \alpha(k, m) \sim \alpha(k', m)$. Dato che $\sim$ è una relazione di equivalenza allora vale che $\exists m \; t.c. \; \alpha(k', m) \sim \alpha(k, m)$, il che significa che $k' \cong_\alpha k$.

- **Transitività**: $\forall i, j, k \in \mathbb{N}$ è sempre vero che $i \cong_\alpha j$ e $j \cong_\alpha k \Rightarrow i \cong_\alpha k$, perchè $i \cong_\alpha j \Leftrightarrow \exists m \; t.c. \; \alpha(i, m) \sim \alpha(j, m)$ e $j \cong_\alpha k \Leftrightarrow \exists n \; t.c. \; \alpha(j, n) \sim \alpha(k, n)$. Senza perdere di generalità pongo $n > m$, quindi abbiamo che $\exists m \; t.c. \; \alpha(i, m) \sim \alpha(j, m)$ e $\alpha(j, m) \sim \alpha(k, m)$. Dato che $\sim$ è una relazione di equivalenza allora vale che $\exists m$ tale che $\alpha(i, m) \sim \alpha(j, m)$ e $\alpha(j, m) \sim \alpha(k, m) \Rightarrow \alpha(i, m) \sim \alpha(k, m)$, il che significa che $i \cong_\alpha k$.

Dimostro che $\cong_\alpha$ ha indice finito. Dato che $\sim$ ha indice finito, per un m fisso, ci troviamo in una situazione del genere:



Dove il numero di classi di equivalenza è limitato dal numero di classi di equivalenza di $\sim$, e sappiamo che $\sim$ ha un numero finito di classi di equivalenza, quindi anche $\cong_\alpha$ avrà un numero finito di classi di equivalenza.

Esercizio 2.44

Dimostrare la chiusura della classe dei linguaggi riconosciuti dagli automi di Büchi deterministici rispetto alle operazioni di unione e intersezione
Siano $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}_\mathcal{A}, A, \Delta_A, q_{0A}, F_A)$ e $\mathcal{B} = (\mathcal{Q}_\mathcal{B}, A, \Delta_B, q_{0B}, F_B)$
Unione: Se assumiamo che $\mathcal{Q}_\mathcal{A} \cap \mathcal{Q}_\mathcal{B} = \emptyset$ allora possiamo costruire l'automa unione $\mathcal{C}$ come segue:

- $\mathcal{Q}_\mathcal{C} = \mathcal{Q}_\mathcal{A} \cup \mathcal{Q}_\mathcal{B} \cup \{q_{0C}\}$
- A rimane invariato
- $\Delta_C = \Delta_A \cup \Delta_B$
- q_{0C} come nuovo stato iniziale, con le stesse relazioni di q_{0A} e q_{0B}, finale nel caso che almeno uno tra q_{0A} e q_{0B} sia uno stato finale
- $F_C = F_A \cup F_B$

Intersezione: Costruiamo l'automa intersezione $\mathcal{C}$, partendo dal prodotto cartesiano degli stati:

- $\mathcal{Q}_\mathcal{C} = \mathcal{Q}_\mathcal{A} \times \mathcal{Q}_\mathcal{B} \times \{1, 2\}$

- A rimane invariato
- $\Delta_C = \Delta_1 \cup \Delta_2$ dove
  - $\Delta_1 = \{((q_A, q_B, 1), a, (q'_A, q'_B, i)) \mid (q_A, a, q'_A) \in \Delta_A \; e \; (q_B, a, q'_B) \in \Delta_B \; e \; se \; q_A \in F_A \; allora \; i = 2 \; altrimenti \; i = 1\}$
  - $\Delta_2 = \{((q_A, q_B, 2), a, (q'_A, q'_B, i)) \mid (q_A, a, q'_A) \in \Delta_A \; e \; (q_B, a, q'_B) \in \Delta_B \; e \; se \; q_B \in F_B \; allora \; i = 1 \; altrimenti \; i = 2\}$
- $q_{0C} = (q_{0A}, q_{0B}, 1)$
- $F_C = \{(q_a, q_b, 2) \mid q_B \in F_B\}$

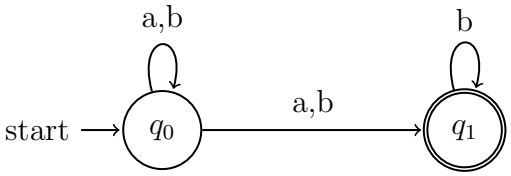
Per costruzione, $r_C = (q_A^0, q_B^0, i^0), (q_A^1, q_B^1, i^1), \ldots$ è un'esecuzione su $\mathcal{C}$ per la parola w se:

- $r_A = q_A^0, q_A^1, \ldots$ è un'esecuzione su $\mathcal{A}$ per w
- $r_B = q_B^0, q_B^1, \ldots$ è un'esecuzione su $\mathcal{B}$ per w

r_A e r_B sono accettate se r_C è la concatenazione di una serie infinita di segmenti finiti di stati 1 (stati con terza componente 1) e stati 2 (stati con terza componente 2) alternativamente. Questa sequenza esiste se r_C è accettato da $\mathcal{A}$

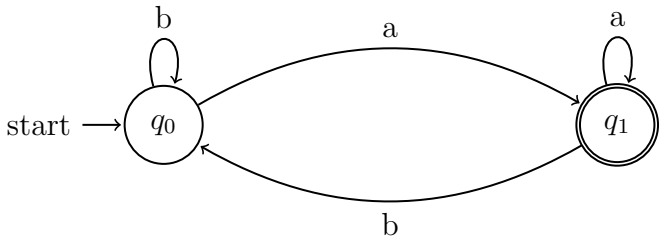
Esercizio 2.46

Sia $A = \{a, b\}$ e $L = \{\alpha \in A^\omega . \exists^{<\omega} \; n \; \alpha(n) = a\}$. Si costruisca un automa di Büchi non deterministico che riconosca il linguaggio L



Esercizio 2.48

Sia $A = \{a, b\}$ e $L = \overrightarrow{\{b^*a^*\}}$. Si costruisca un automa di Büchi deterministico che riconosca il linguaggio L



Esercizio 2.50

Dimostrare che la classe degli ω-linguaggi ω-regolari coincide con la classe degli ω-linguaggi riconosciuti dagli automi di Muller non deterministici
Dato che un ω-linguaggio per essere ω-regolare deve essere accettato da un automa di Büchi , mi basta dimostrare l'equivalenza tra gli automi di Büchi non deterministici e quelli di Muller non deterministici.
Sia $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, A, \Delta, q_0, F)$ un automa di Büchi , possiamo costruire un automa di Muller: $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, A, \Delta, q_0, \mathcal{F})$ dove $\mathcal{F} = \{X | X \in 2^{\mathcal{Q}} \wedge X \cap F \neq \emptyset\}$. Si può osservare che una ω-parola viene accettata da $\mathcal{A}$ se e solo se passa infinite volte per uno stato finale. Quindi viene accettata anche da $\mathcal{M}$ perchè, presa una sua computazione σ, abbiamo che $In(\sigma) \cap F \neq \emptyset$ e $In(\sigma) \in 2^{\mathcal{Q}} \Rightarrow In(\sigma) \in \mathcal{F}$ quindi la stessa ω-parola viene accettata da $\mathcal{F}$. Lo stesso ragionamento lo possiamo fare al contrario. Se una ω-parola viene accettata da $\mathcal{M}$ allora $In(\sigma) \cap F \neq \emptyset$ quindi esiste una computazione che passa infinite volte per uno stato finale, quindi la stessa ω-parola viene accettata da $\mathcal{A}$.

Esercizio 2.57

Dimostrare che l'insieme $W_V \subseteq A^*$ dei V-testimoni, con V classe di congruenza $\approx_{\mathcal{A}}$ è regolare
Riprendo la definizione di V-Testimone: $\alpha(k_0, m)$ è un V-testimone se, per qualche k, con $k_0 < k < m$, m è la più piccola posizione tale che $\alpha(k_0, k) \in$ V e $k_0 \cong_{\alpha}^{m} k$. Chiamiamo W_V insieme dei V-testimoni della classe V.

Possiamo riscrivere questa definizione nel seguente modo:

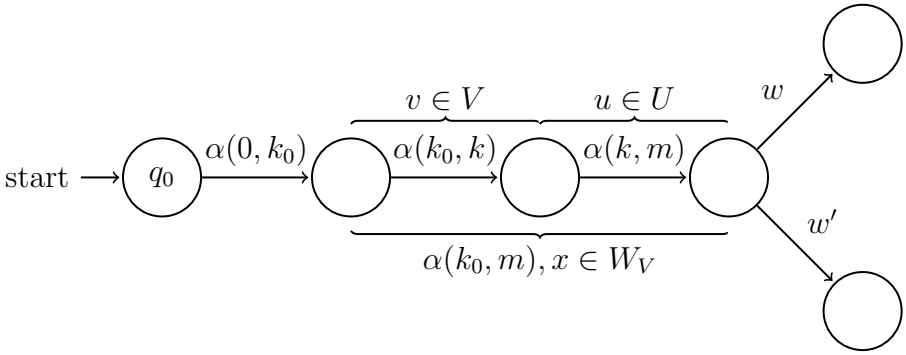
$$W_V : \left\{ \alpha(k_0, m) \mid \begin{array}{l} \exists k_0, k, m \; t.c. \; k_0 < k < m \\ \alpha(k_0, k) \in V \\ k_0 \cong_\alpha^m k \\ \nexists m' < m \; t.c. \; k_0 \cong_\alpha^{m'} k \end{array} \right\}$$

Una parola x è un V-testimone se esistono $v \in V, u \in U(U \approx_{\mathcal{A}}$-classe) tali che $x = v \cdot u$. Inoltre sappiamo che m è minimo, quindi u a sua volta dovrà essere minimo.
Dato $U \approx_{\mathcal{A}}$-classe definiamo:

$$U_{\min} = \{u \in U \text{ tali che } \exists v \in V \; v \cdot u \in U \wedge v \cdot u \cdot \Sigma + \notin U\}$$

In conclusione abbiamo che:

$$W_V = \bigcup_{U \approx_{\mathcal{A}}\text{-classe}} (U \cap (V \cdot U_{\min}))$$



2 Exercices of chapter 0 of Temporal Verification of Reactive Systems

Problem 0.1

out x: **integer where** x = 0

$$l_0 : \begin{bmatrix} [l_1 : \textbf{while } x \geq 0 \textbf{ do } l_2 : x := x + 1] \\ \quad \textbf{or} \\ [l_3 : \textbf{await } x > 0] \end{bmatrix}$$

l_4 :

Program S8 (strange behavior).

a) *Identify the locations of this program as equivalence classes of labels. List the post-location of each of the statements.*
There are three classes:

$$l_0 = \{l_0, l_1, l_3\}$$

$$l_2 = \{l_2\}$$

$$l_4 = \{l_4\}$$

While the post-locations are:

$$post(l_0) = post(l_1) = post(l_3) = [l_4]$$

$$post(l_2) = [l_0]$$

b) *Show that this program has a terminating computation.*
The program can terminate because the post-location of the body of the while is the selection statement. So the await condition can be satisfied and this terminate the program.

c) *Define transitions and transition relations for this version of a WHILE statement. Show that the version of program SB in which the while statement has been replaced by this WHILE statement has no terminating computation.*
Recall of the new WHILE statement:

$$l_1 : [WHILE\ c\ DO\ [l_2 : S; \hat{l_2}]]; l_3 : \text{ where } \hat{l_2} \nsim l_1$$

We can define its transitions $\tau_{l_1}, \tau_{\hat{l_2}}$ and transition relations $\rho_{l_1}, \rho_{\hat{l_2}}$ as follow:

ρ_{l_1} : $\rho_{l_1}^T \vee \rho_{l_1}^F$ where

$\rho_{l_1}^T$: $move(l_1, l_2) \wedge c \wedge pres(Y)$

$\rho_{l_1}^F$: $move(l_1, l_3) \wedge \neg c \wedge pres(Y)$

$\rho_{\hat{l_2}}$: $\rho_{\hat{l_2}}^T \vee \rho_{\hat{l_2}}^F$ where

$\rho_{\hat{l_2}}^T$: $move(\hat{l_2}, l_2) \wedge c \wedge pres(Y)$

$\rho_{\hat{l_2}}^F$: $move(\hat{l_2}, l_3) \wedge \neg c \wedge pres(Y)$

As we can see, now the program cannot terminate anymore, because once in the WHILE loop, the transition $\rho_{\hat{l_2}}^F$ will be never satisfied.

Problem 0.2

out y: **integer where** y = 0
local x: **boolean where** x = T

$$P_1 :: \begin{bmatrix} l_0 : \textbf{while } x \textbf{ do} \\ \quad l_1 : y := y + 1 \\ l_2 : \end{bmatrix} \quad \| \quad P_2 :: \begin{bmatrix} m_0 : x := F \\ m_1 : \end{bmatrix}$$

Program ANY-NAT (computing any natural number).

a) *Consider program ANY-NAT. Argue (informally) that this program always terminates. Also show that, for every natural number $n \geq 0$, there exists a computation of ANY-NAT such that $y = n$ on termination.*

The program terminates whenever m_0 is executed. The transition τ_{m_0} is always enabled and because of *justice* requirement we know that, soon or later, it will be taken. Once executed $\rho_{l_0}^F$ is satisfied and control goes to $\pi = \{l_2, m_1\}$. Furthermore, the justice requirement allow only a finite (but unbounded) number of transition τ_{l_0}. So, $\forall n \in \mathbb{N}$ there exists a run where τ_{l_0} is taken n times before τ_{m_0}, leading to have $y = n$ on termination.

b) *Construct a program with a single process that exhibits a similar behavior; that is, all of its computations terminate and, for each natural number n, there exists a computation producing n.*

$$
\begin{array}{|l|}
\hline
\textbf{out } \mathrm{y}\text{: } \textbf{integer where } \mathrm{y} = 0 \\
\textbf{local } \mathrm{x}\text{: } \textbf{boolean where } \mathrm{x} = \mathrm{T} \\
\\
l_0 : \left[\begin{array}{l} \\ \textbf{while } x \textbf{ do } l_1 : \end{array}\right. \left[\begin{array}{l} [l_2 : y := y + 1] \\ \quad \textbf{or} \\ [l_3 : x := F] \end{array}\right] \\
l_4 : \\
\hline
\end{array}
$$

This Program exibits the same behavior of the previus one:

- All of its computation terminates, because τ_{l_3} is always enabled and thank to the justice requirement we know that soon or later it will be taken and change the value of x ending the cycle.
- As the previous program, the number of iteration before the execution of τ_{l_3} is finite but unbounded, so y could have any value in $\mathcal{N}$ at the end of the computation.

c) *Prove that no single-process program with only just transitions can have the same behavior as ANY-NAT.* This kind of program need:

- an incremental statement
- a termination statement

Problem 0.3

a) *Consider the two statements*

$$S_1 :: [x := 1; l_1 : x := 2]$$

$$S_2 :: [x := 1; l_2 : x := x + 1]$$

and the context

$$P[S] :: l_0 : [\textbf{\textit{out}}\ x : \textbf{\textit{integer where}}\ x = 0; S]\hat{l_0} :$$

Show that $P[S_1]$ and $P[S_2]$ are termination equivalent.
$P[S_1]$ and $P[S_2]$ have the initial state with the same interpretation of the variable x (equal to 0). They both have a single possible run, that is:

$$P[S_1] : \langle \pi : [l_0], x : 0 \rangle \xrightarrow{l_0} \langle \pi : [l_1], x : 1 \rangle \xrightarrow{l_1} \langle \pi : [\hat{l_0}], x : 2 \rangle$$

$$P[S_2] : \langle \pi : [l_0], x : 0 \rangle \xrightarrow{l_0} \langle \pi : [l_2], x : 1 \rangle \xrightarrow{l_2} \langle \pi : [\hat{l_0}], x : 2 \rangle$$

This lead to have ending states sharing the interpretation of variable x equal to 2. Thus $P[S_1]$ and $P[S_2]$ are termination equivalent.

b) *Consider the preceding two statements and the context*

$Q[S] :: [\textbf{\textit{out}}\ x : \textbf{\textit{integer where}}\ x = 0; [[l_0 : S; \hat{l_0} :] \parallel [m_0 : x := 0; \hat{m_0} :]]]$.
Show that $Q[S_1]$ and $Q[S_2]$ are not termination equivalent. We may conclude that S_1 and S_2 are not congruent.
$Q[S_1]$ and $Q[S_2]$ are not termination equivalent, because the are some computation that lead to different ending states, like:

$$\begin{aligned} Q[S_1] :& \langle \pi : \{l_0, m_0\}, x : 0 \rangle \xrightarrow{l_0} \langle \pi : \{l_1, m_0\}, x : 1 \rangle \xrightarrow{m_0} \\ & \langle \pi : \{l_1, \hat{m_0}\}, x : 0 \rangle \xrightarrow{l_1} \langle \pi : \{\hat{l_0}, \hat{m_0}\}, x : 2 \rangle \\ Q[S_2] :& \langle \pi : \{l_0, m_0\}, x : 0 \rangle \xrightarrow{l_0} \langle \pi : \{l_2, m_0\}, x : 1 \rangle \xrightarrow{m_0} \\ & \langle \pi : \{l_2, \hat{m_0}\}, x : 0 \rangle \xrightarrow{l_2} \langle \pi : \{\hat{l_0}, \hat{m_0}\}, x : 1 \rangle \end{aligned}$$

c) *Show the following congruence:*

1. $P :: [S_1 \textbf{or} S_2] \approx Q :: [S_2 \textbf{or} S_1]$: If P selects S_1 (resp. S_2), also Q can select S_1 (resp. S_2) and vice versa.

2. $[S_1 \parallel S_2] \approx [S_2 \parallel S_1]$: As the previous case, since there is no precondition to the parallel composition of S_1 and S_2, each transition on P can be choose on Q.

3. $S \approx [S; \textbf{skip}]$: We know that **skip** always terminates, so S;**skip** terminates if and only if S does. Moreover, **skip** does not alter the data (its data transformation is the identity).

4. **await** $c \approx$ **while** $\neg c$ **do skip** While c is false the programs loop forever. When c is true, both programs terminates without altering the values of output variables.

d) *Are the two statements:*

$$\textbf{\textit{await}}\ x \ \textit{and}\ \textbf{\textit{skip}}\ m : \textbf{\textit{await}}\ x$$

congruent? Prove your answer.
The statements are not congruent since there exist a context $P[S]$ like:

$$P[S] :: \begin{bmatrix} \text{local } x : \text{ boolean where } x = F \\ [S \text{ or await } \neg x] \end{bmatrix}$$

where $P[\textbf{await } x]$ always terminates because **await** x is not enabled and **await** $\neg x$ is selected, terminating the computation. While $P[\textbf{skip } m : \textbf{await } x]$ is always enabled, due to the **skip**, and if it is chosen, it leads to a non terminating computation.

e) *Let y be a boolean variable. Which of the three following statements are congruent?*

1. $y := T$
2. ***if*** y ***then*** $y := T$ ***else*** $y := T$
3. $[[\textbf{\textit{await}}\ y;\ y := T]\ \textbf{\textit{or}}\ [\textbf{\textit{await}}\ \neg y;\ y := T]]$

While *1* and *2* are equivalently enabled, the selection *3* can be disregarded by a scheduler ensuring justice requirement, since the two await commands may be not continuously enabled. Consider the following context:

$$P[S] :: \begin{bmatrix} \text{local } x : \text{ boolean where } x = T \\ \text{local } y : \text{ boolean where } y = F \\ [S; x := F] \parallel [\text{while } x \text{ do } y := \neg y] \end{bmatrix}$$

While *1* and *2* always terminates in computations that ensure justice, with *3* there exists a fair computation that stays forever in loop while x do $y := \neg y$, as the **await** commands are enabled in alternation.

Problem 0.4

$$\textbf{local } y_1, y_2\text{: } \textbf{integer where } y_1 = 0,\ y_2 = 0$$

$$P_1 :: \left[\begin{array}{l} l_0 : \textbf{loop forever do} \\ \quad \left[\begin{array}{l} l_1 : \textbf{noncritical} \\ l_2 : \textbf{await } y_2 = 0 \\ l_3 : y_1 := 1 \\ l_4 : \textbf{critical} \\ l_5 : y_1 := 0 \end{array}\right] \end{array}\right] \quad \| \quad P_2 :: \left[\begin{array}{l} m_0 : \textbf{loop forever do} \\ \quad \left[\begin{array}{l} m_1 : \textbf{noncritical} \\ m_2 : \textbf{await } y_1 = 0 \\ m_3 : y_2 := 1 \\ m_4 : \textbf{critical} \\ m_5 : y_2 := 0 \end{array}\right] \end{array}\right]$$

Program TRY-MUX1(proposed solution to mutual exclusion).

a) *Is program TRY-MUXI a good solution to the mutual-exclusion problem?* No, because it does not satisfy neither the exclusion requirement, neither the accessibility requirement. First of all there exists a computation where a state $\pi = \{l_4, m_4\}$ is accessible as shown by the following computation:

$$\begin{aligned} \langle \pi : \{l_0, m_0\}, y_1 : 0, y_2 : 0\rangle &\xrightarrow{l_0} \langle \pi : \{l_1, m_0\}, y_1 : 0, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{l_1} \langle \pi : \{l_2, m_0\}, y_1 : 0, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{l_2} \langle \pi : \{l_3, m_0\}, y_1 : 0, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{m_0} \langle \pi : \{l_3, m_1\}, y_1 : 0, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{m_1} \langle \pi : \{l_3, m_2\}, y_1 : 0, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{m_2} \langle \pi : \{l_3, m_3\}, y_1 : 0, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{l_3} \langle \pi : \{l_4, m_3\}, y_1 : 1, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{m_3} \langle \pi : \{l_4, m_4\}, y_1 : 1, y_2 : 1\rangle \end{aligned}$$

Furthermore P_2 can indefinitely wain in m_2: in fact, P_1 is allowed to visit locations l_3 and l_5, disabling and enabling respectively the statement in m_2. Without a compassion requirement, it has not to be taken eventually.

b) *The same questions for TRY-MUX2, a version of program TRY-MUXl in which statements l_2 and l_3 are interchanged and so are statements m_2 and m_3.*

In this case, program TRY-MUX2 guarantees exclusion but not accessibility since there is a deadlock computation:

$$\begin{aligned}\langle \pi : \{l_0, m_0\}, y_1 : 0, y_2 : 0\rangle &\xrightarrow{l_0} \langle \pi : \{l_1, m_0\}, y_1 : 0, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{l_1} \langle \pi : \{l_2, m_0\}, y_1 : 0, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{l_2} \langle \pi : \{l_3, m_0\}, y_1 : 1, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{m_0} \langle \pi : \{l_3, m_1\}, y_1 : 1, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{m_1} \langle \pi : \{l_3, m_2\}, y_1 : 1, y_2 : 0\rangle \\ &\xrightarrow{m_2} \langle \pi : \{l_3, m_3\}, y_1 : 1, y_2 : 1\rangle \not\rightarrow\end{aligned}$$

local t: **integer where** $t = 1$

$$P_1 :: \left[\begin{array}{l} l_0 : \textbf{loop forever do} \\ \quad \left[\begin{array}{l} l_1 : \textbf{noncritical} \\ l_2 : \textbf{await } t = 1 \\ l_3 : \textbf{critical} \\ l_4 : t := 2 \end{array}\right] \end{array}\right] \quad \| \quad P_2 :: \left[\begin{array}{l} m_0 : \textbf{loop forever do} \\ \quad \left[\begin{array}{l} m_1 : \textbf{noncritical} \\ m_2 : \textbf{await } t = 2 \\ m_3 : \textbf{critical} \\ m_4 : t := 1 \end{array}\right] \end{array}\right]$$

Program TURN (turn taking).

c) *The same questions for program TURN.*
This program satisfies exclusion but neither accessibility nor common accessibility.

exclusion Consider the case in which P_1 enter in critical section (at_{l_3} we have $t = 1$) so P_2 must be in $m_0, m1, m2$ or waiting in front of m_2. The same consideration can be applied when P_2 enters in its critical section.

accessibility P_1 and P_2 enters in critical their section in a forced alternation: since it is not required to a non-critical section to terminate, if process P_1 (resp., P_2) is stuck in its non-critical section, P_2 (resp., P_1) waits inde finitely for its turn. If both non-critical sections are ensured to terminate, then the protocol would satisfy both requirements.

Problem 0.5

$$\textbf{local } \alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2\text{: } \textbf{channel of boolean}$$

$$P_1 :: \begin{bmatrix} \textbf{local } x_1 : \textbf{boolean} \\ l_0 : \textbf{loop forever do} \\ \quad \begin{bmatrix} l_1 : \textbf{noncritical} \\ l_2 : \alpha_1 \Leftarrow T \\ l_3 : \beta_1 \Rightarrow x_1 \\ l_4 : \textbf{critical} \\ l_5 : \alpha_1 \Leftarrow F \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\Vert$$

$$A :: \begin{bmatrix} \textbf{local } y : \textbf{boolean} \\ k_0 : \textbf{loop forever do} \\ \quad k_1 : \begin{bmatrix} [k_1^a : \alpha_1 \Rightarrow y; k_2 \beta_1 \Leftarrow T; k_3 : \alpha_1 \Rightarrow y] \\ \quad \textbf{or} \\ [k_1^b : \alpha_2 \Rightarrow y; k_4 \beta_2 \Leftarrow T; k_5 : \alpha_2 \Rightarrow y] \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

$$\Vert$$

$$P_2 :: \begin{bmatrix} \textbf{local } x_2 : \textbf{boolean} \\ m_0 : \textbf{loop forever do} \\ \quad \begin{bmatrix} m_1 : \textbf{noncritical} \\ m_2 : \alpha_2 \Leftarrow T \\ m_3 : \beta_2 \Rightarrow x_2 \\ m_4 : \textbf{critical} \\ m_5 : \alpha_2 \Leftarrow F \end{bmatrix} \end{bmatrix}$$

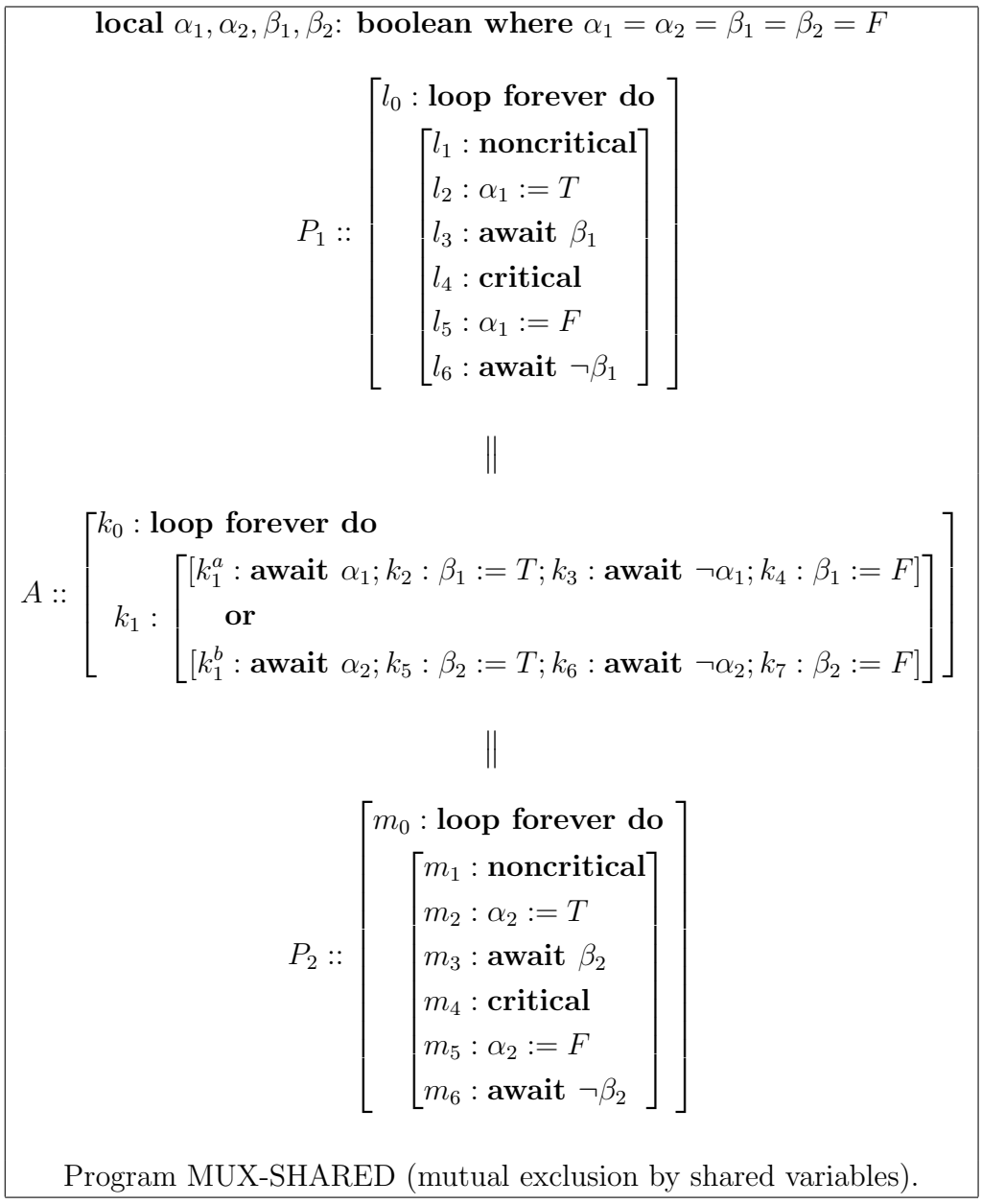
Program MUX-SYNCH (mutual exclusion by synchronous communication).

a) *Argue (informally) that program MUX-SYNCH is a good solution to the*

mutual exclusion problem. That is, show that each computation of the program satisfies the requirements of exclusion and accessibility.
Program MUX-SYNCH satisfies exclusion. P_1 (resp. P_2) enters in critical section only if at_{k_3} (resp. at_{k_5}). Being in a selection statement, ($at_{k_3} \wedge at_{k_3}$) is inconsistent. k_1^b (or k_1^a) can be chosen only after the execution of k_3 (resp. k_5), which is enabled only after P_1 (resp. P_2) has terminated its critical section. Program MUX-SYNCH satisfies accessibility. If at_{k_1} , and both the lecture from channels α_1 and α_2 can synchronize, then k_1^a (or k_1^b) is selected; since the critical section is ensured to terminate, eventually α_1 (or α_2) receives F. Control goes back to k_1. The left-over request cannot be discarded infinitely often because k_1^b (or k_1^a) is always enabled and must be eventually selected by k_1.

b) *Consider a non-standard transition system for program MUX-SYNCH, in which transitions associated with communication statements are taken to be just but not compassionate. We refer to this interpretation of the program as MUX-SYNCH-J. Is this program (transition system) a good solution to the mutual exclusion problem? Provide an informal argument in support of a positive answer or, alternately, show a computation that violates one of the two requirements.*
If only justice is ensured for channel communication, the accessibility property would still hold since there is no way the the reading in location k_1^a (or k_1^b) can be disabled, once enabled. Since the request to enter is continuously renewed, even with a justice requirement this will be eventually accepted.

c) *Consider program MUX-ASYNCH which is obtained from program MUX-SYNCH by redeclaring channels $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ and β_2 as asynchronous channels. Is program MUX-ASYNCH a good solution to the mutual-exclusion problem? Provide an informal argument in support of a positive answer or, alternately, show a computation that violates one of the two requirements.*
With asynchronous channels, the properties would still hold. Exclusion would be guaranteed by the selection in k_1; besides, if the channel is not-empty, then the lecture is always enabled and the corresponding branch of selection is eventually taken.



Program MUX-SHARED (mutual exclusion by shared variables).

d) *Is program MUX-SHARED a good solution to the mutual-exclusion problem? Present an informal argument or show a computation that violates one of the two requirements.*

Program MUX-SHARED satisfies exclusion due to the selection statement in location k_1. Accessibility is also satisfied because the **await** α_1 (resp. **await**

α_2) are always enabled if a process attempts to enter in its critical section, and must be eventually taken.

3 Additional exercices

Esercizio1

Dato un linguaggio $L \subseteq A^*$, dimostrare se che L è un linguaggio star-free, allora L è definibile nel frammento al prim'ordine di $S1S_A$, con la relazione di ordinamento $<$ e i predicati unari Q_a, con $a \in A$.

Esercizio2

Dimostrare che l'insieme dei linguaggi riconosciuti da automi di Büchi su alberi infiniti con insieme degli stati finali singoletto è strettamente contenuto nell'insieme dei linguaggi riconosciuti da automi di Büchi su alberi infiniti

Esercizio3

Sia $A = \{a, b\}$ e $T_1 = \{t \in T_A^\omega$:tutti i cammini di t contengono un numero finito di occorrenze di $a\}$. T_1 contiene l'insieme di tutti gli alberi t_i, con $i \geqslant 0$, tali che t_i ha un'occorrenza di a nelle posizioni $\epsilon, 1^{m_1}0, \ldots, 1^{m_1}01^{m_2}0 \ldots 1^{m_i}0$, con $m_1, m_2, \ldots, m_i > 0$. Immaginiamo che esista un automa di Büchi $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, A, \Delta, q_0, F)$ con $n+1$ stati, con $n \geqslant 1$, incluso lo stato iniziale q_0 che occorre solo in posizione ϵ tale che $L(\mathcal{A}) = T_1$ e sia r un run di successo di $\mathcal{A}$ su t_n. Mostrare che deve esistere un cammino in t_n contenente 3 nodi u,v e w, con $u < v < w$, tali che $r(u) = r(w) = s \in Fet_n(v) = a$.

Esercizio4

Siano $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ e $\bar{c}$= $(c_1, \ldots, c_m)$. Sia dato $T \subseteq T_A^\omega$ tale che $T = T_0 \cdot \bar{c}(T_1, \ldots, T_m)^\omega$

Esercizio5

Dimostrare la (correttezza e completezza della) caratterizzazione di uno degli operatori di CTL (diverso da AF) quale minimo punto fisso di un'opportuna trasformazione di predicato.

Esercizio6

Dimostrare la (correttezza e completezza della) caratterizzazione di uno degli operatori di CTL (diverso da EG) quale massimo punto fisso di un'opportuna trasformazione di predicato.