

Automatic System Verification

Exercices

Cominato Enrico 137396
Department of Computer Science
Univeristy of Udine

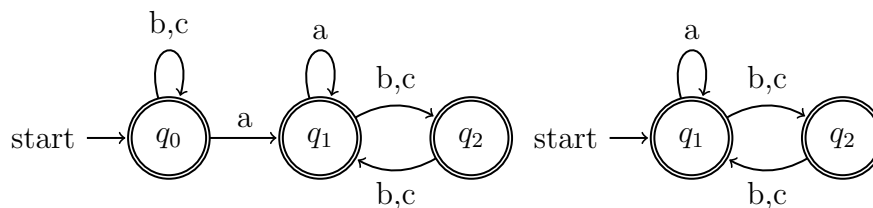
October 27, 2020

1 Exercices on the automata's notes

Esercizio 2.3

Sia \mathcal{A} l'automa dell'Esempio 2.2. Si consideri l'automa \mathcal{A}' ottenuto da \mathcal{A} rimuovendo lo stato q_0 , e le transizioni in esso entranti e da esso uscenti, e facendo diventare q_1 il nuovo stato iniziale. Si stabilisca se \mathcal{A} e \mathcal{A}' riconoscono o meno lo stesso linguaggio

Riporto di seguito i due grafi.



I due linguaggi non sono uguali. Per esempio la ω – parola *babcabca...* appartiene al primo dei due automi, ma non al secondo (da q_1 andiamo in q_2 ma da lì possiamo leggere solo una *b* oppure una *c*)

Esercizio 2.4

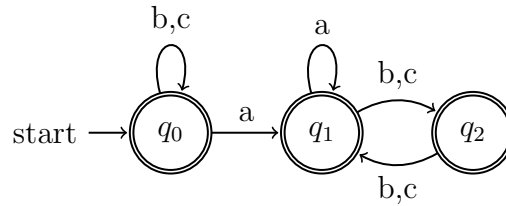
Si costruisca l'automa \mathcal{A}' che riconosce la variante finita (linguaggio di parole finite) dell'Esempio 2.2

Il linguaggio richiesto è il seguente:

L'insieme delle parole finite su $A = \{a, b, c\}$ tali che tra ogni coppia di occorrenze consecutive di a esiste un numero pari di occorrenze di simboli diversi da a .

Osservazione: una parola con una sola occorrenza di a deve essere sempre accettata.

L'automa risultante quindi è lo stesso dell'esempio 2.2, solo che le run su questo automa sono finite.



Esercizio 2.5

Sia W il linguaggio riconosciuto dall'automa \mathcal{A}' dell'Esercizio 2.4. Si caratterizzi il linguaggio \vec{W} .

Riprendo la definizione di \vec{W} :

$$\vec{W} = \{\alpha \in A^\omega \text{ t.c. } \exists^\omega n \alpha(0, n) \in W\}$$

Sono quindi tutte quelle ω -parole di cui ogni prefisso finito appartiene a W . Analizziamo per casi:

- la parola non ha neppure una a : in questo caso ogni suo prefisso appartiene a W perchè le parole $(b|c), (b|c)^2, (b|c)^3, \dots, (b|c)^n, \dots \in W$
- la parola ha una sola occorrenza di a : anche in questo caso ogni suo prefisso appartiene a W perchè:
 - come visto nel punto precedente, fino a che non si incontra la lettera a le parole appartengono a W
 - dopo l'occorrenza di a , ancora tutti i prefissi appartengono a W , dato che tutte le parole finite con una sola occorrenza di a appartengono a W

- infine tutti gli altri casi sono parole con un più di una occorrenza di a : dove abbiamo che ogni prefisso, o ricade in uno dei precedenti casi, oppure è una parola che tra ogni coppia di occorrenze consecutive di a esiste un numero pari di occorrenze di simboli diversi da a e che quindi appartiene a W .

In questo caso abbiamo che $W^\omega = \overrightarrow{W}$.

Esercizio 2.7

Teorema 2.6

1. Se $V \subseteq A^*$ è regolare, allora V^ω è ω -regolare
2. Se $V \subseteq A^*$ è regolare e $L \subseteq A^\omega$ è ω -regolare, allora $V \cdot L$ è ω -regolare
3. Se $L_1, L_2 \subseteq A^*$ sono ω -regolari, allora $L_1 \cup L_2$ e $L_1 \cap L_2$ sono ω -regolari

Dimostrare le proprietà (2) e (3) del teorema

Dimostro (2). Siano \mathcal{A}, \mathcal{B} automi tali che \mathcal{A} accetta V e \mathcal{B} accetta L , allora possiamo costruire \mathcal{C} unendo tutti gli stati finali di \mathcal{A} con lo stato iniziale di \mathcal{B} . Otteniamo così un'automa che legge il linguaggio $V \cdot L$, quindi $V \cdot L$ è ω -regolare.

Dimostro (3). Per quanto riguarda l'unione, prendiamo \mathcal{A}, \mathcal{B} automi tali che \mathcal{A} accetta L_1 e \mathcal{B} accetta L_2 . Costruiamo \mathcal{C} unendo gli stati iniziali di \mathcal{A} e \mathcal{B} . Abbiamo quindi che \mathcal{C} accetta tutte le parole di $L_1 \cup L_2$. Sappiamo inoltre che i linguaggi ω -regolari sono chiusi per complementazione, quindi possiamo riscrivere $L_1 \cap L_2 = \neg(\neg L_1 \cup \neg L_2)$ ed ottenere la chiusura per intersezione.

Esercizio 2.13

Fornire un esempio di parola non definitivamente periodica

Un esempio è:

$$ababbab^3ab^4ab^5\dots$$

Esercizio 2.16

Dimostrare che una congruenza è una relazione di equivalenza invariante destra

Invariante a destra significa che $\forall x, y, z \in A$, se $x \sim y$ allora $xz \sim yz$. Questo è sempre vero perchè, concatenando la stessa parola ad x, y finiremo in un'unica classe di equivalenza.

Esercizio 2.19

Dato un automa di Buchi $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, A, \Delta, q_0, F)$, dimostrare che, per ogni $s, s' \in \mathcal{Q}$, $W_{ss'}^F$ è regolare

Un linguaggio è regolare se esiste un'automa in grado di accettarlo. Per poterlo accettare deve avere almeno uno stato finale. Quindi se eliminiamo dall'automa \mathcal{A} , tutti gli stati e le relazioni non interessate dai possibili cammini tra s e s' otteniamo un automa in grado di leggere solo $W_{ss'}^F$, e questo fa di lui un linguaggio regolare.

Esercizio 2.23

Dimostrare che la relazione \approx_A è una congruenza di indice finito

Perchè \approx_A sia una congruenza deve valere che $\forall u, u', v, v' \in A^*$ se $u \approx_A v$ e $u' \approx_A v'$ allora $uu' \approx_A vv'$. Questo è vero perchè avendo $u \approx_A v$ e $u' \approx_A v'$, allora $\exists t$ tale che:

- $s \rightarrow_u t \Leftrightarrow s \rightarrow_v t$
- $s \xrightarrow{F}_u t \Leftrightarrow s \xrightarrow{F}_v t$
- $t \rightarrow_{u'} s' \Leftrightarrow t \rightarrow_{v'} s'$
- $t \xrightarrow{F}_{u'} s' \Leftrightarrow t \xrightarrow{F}_{v'} s'$

Quindi abbiamo che $\forall s, s' \in Q$:

- $s \rightarrow_{uu'} s' \Leftrightarrow s \rightarrow_{vv'} s'$
- $s \xrightarrow{F}_{uu'} s' \Leftrightarrow s \xrightarrow{F}_{vv'} s'$

e quindi $uu' \approx_A vv'$. Il resto della dimostrazione è già stata svolta negli appunti.

Esercizio 2.25

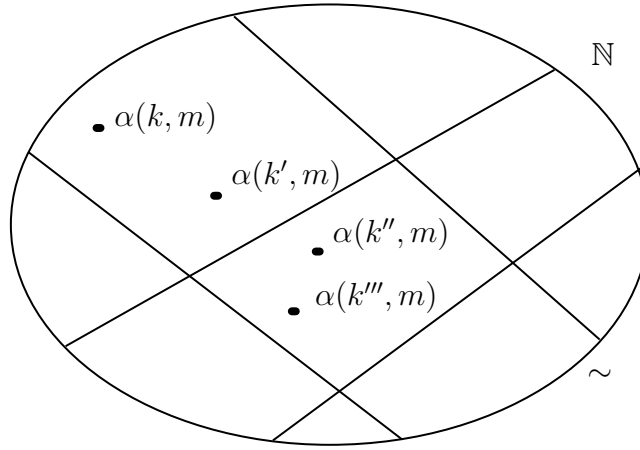
Si dimostri che la relazione \cong_α è una relazione di equivalenza sui naturali di indice finito

Riprendo la definizione di \cong_α . Sia \sim una congruenza su A^* di indice finito. Sia $\alpha \in A^\omega$ e siano k, k' posizioni. Diciamo che $k \cong_\alpha^m k'$ (k, k' si riuniscono in $m > k, k'$) se $\alpha(k, m) \sim \alpha(k', m)$. Diciamo che $k \cong_\alpha k'$ se esiste m per cui $k \cong_\alpha^m k'$.

Dimostro che è una relazione di equivalenza:

- **Riflessività:** $\forall k \in \mathbb{N}$ è sempre vero che $k \cong_\alpha k$ perchè $k \cong_\alpha k \Leftrightarrow \exists m \text{ t.c. } \alpha(k, m) \sim \alpha(k, m)$ e questo è vero $\forall k$ perchè \sim è una relazione di equivalenza
- **Simmetria:** $\forall k, k' \in \mathbb{N}$ è sempre vero che $k \cong_\alpha k' \Rightarrow k' \cong_\alpha k$ perchè $k \cong_\alpha k' \Leftrightarrow \exists m \text{ t.c. } \alpha(k, m) \sim \alpha(k', m)$. Dato che \sim è una relazione di equivalenza allora vale che $\exists m \text{ t.c. } \alpha(k', m) \sim \alpha(k, m)$, il che significa che $k' \cong_\alpha k$.
- **Transitività:** $\forall i, j, k \in \mathbb{N}$ è sempre vero che $i \cong_\alpha j$ e $j \cong_\alpha k \Rightarrow i \cong_\alpha k$, perchè $i \cong_\alpha j \Leftrightarrow \exists m \text{ t.c. } \alpha(i, m) \sim \alpha(j, m)$ e $j \cong_\alpha k \Leftrightarrow \exists n \text{ t.c. } \alpha(j, n) \sim \alpha(k, n)$. Senza perdere di generalità pongo $n > m$, quindi abbiamo che $\exists m \text{ t.c. } \alpha(i, m) \sim \alpha(j, m)$ e $\alpha(j, m) \sim \alpha(k, m)$. Dato che \sim è una relazione di equivalenza allora vale che $\exists m$ tale che $\alpha(i, m) \sim \alpha(j, m)$ e $\alpha(j, m) \sim \alpha(k, m) \Rightarrow \alpha(i, m) \sim \alpha(k, m)$, il che significa che $i \cong_\alpha k$.

Dimostro che \cong_α ha indice finito. Dato che \sim ha indice finito, per un m fisso, ci troviamo in una situazione del genere:



Dove il numero di classi di equivalenza è limitato dal numero di classi di equivalenza di \sim , e sappiamo che \sim ha un numero finito di classi di equivalenza, quindi anche \cong_α avrà un numero finito di classi di equivalenza.

Esercizio 2.44

Dimostrare la chiusura della classe dei linguaggi riconosciuti dagli automi di Buchi deterministici rispetto alle operazioni di unione e intersezione

Siano $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}_A, A, \Delta_A, q_{0A}, F_A)$ e $\mathcal{B} = (\mathcal{Q}_B, A, \Delta_B, q_{0B}, F_B)$

Unione: Se assumiamo che $\mathcal{Q}_A \cap \mathcal{Q}_B = \emptyset$ allora possiamo costruire l'automa unione \mathcal{C} come segue:

- $\mathcal{Q}_C = \mathcal{Q}_A \cup \mathcal{Q}_B \cup \{q_{0C}\}$
- A rimane invariato
- $\Delta_C = \Delta_A \cup \Delta_B$
- q_{0C} come nuovo stato iniziale, con le stesse relazioni di q_{0A} e q_{0B} , finale nel caso che almeno uno tra q_{0A} e q_{0B} sia uno stato finale
- $F_C = F_A \cup F_B$

Intersezione: Costruiamo l'automa intersezione \mathcal{C} , partendo dal prodotto cartesiano degli stati:

- $\mathcal{Q}_C = \mathcal{Q}_A \times \mathcal{Q}_B \times \{1, 2\}$

- A rimane invariato
- $\Delta_C = \Delta_1 \cup \Delta_2$ dove
 - $\Delta_1 = \{((q_A, q_B, 1), a, (q'_A, q'_B, i)) \mid (q_A, a, q'_A) \in \Delta_A \text{ e } (q_B, a, q'_B) \in \Delta_B \text{ e se } q_A \in F_A \text{ allora } i = 2 \text{ altrimenti } i = 1\}$
 - $\Delta_2 = \{((q_A, q_B, 2), a, (q'_A, q'_B, i)) \mid (q_A, a, q'_A) \in \Delta_A \text{ e } (q_B, a, q'_B) \in \Delta_B \text{ e se } q_B \in F_B \text{ allora } i = 1 \text{ altrimenti } i = 2\}$
- $q_{0C} = (q_{0A}, q_{0B}, 1)$
- $F_C = \{(q_a, q_b, 2) \mid q_B \in F_B\}$

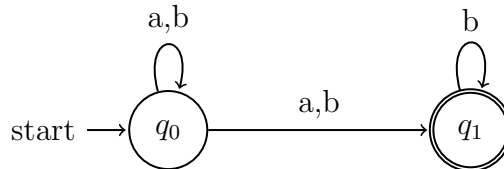
Per costruzione, $r_C = (q_A^0, q_B^0, i^0), (q_A^1, q_B^1, i^1), \dots$ è un'esecuzione su \mathcal{C} per la parola w se:

- $r_A = q_A^0, q_A^1, \dots$ è un'esecuzione su \mathcal{A} per w
- $r_B = q_B^0, q_B^1, \dots$ è un'esecuzione su \mathcal{B} per w

r_A e r_B sono accettate se r_C è la concatenazione di una serie infinita di segmenti finiti di stati 1 (stati con terza componente 1) e stati 2 (stati con terza componente 2) alternativamente. Questa sequenza esiste se r_C è accettato da \mathcal{A}

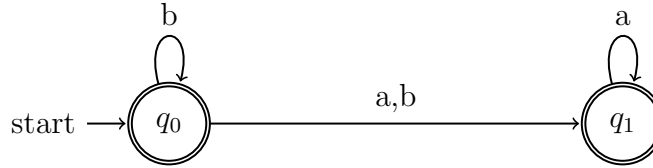
Esercizio 2.46

Sia $A = \{a, b\}$ e $L = \{\alpha \in A^\omega. \exists^{<\omega} n \alpha(n) = a\}$. Si costruisca un automa di Buchi non deterministico che riconosca il linguaggio L



Esercizio 2.48

Sia $A = \{a, b\}$ e $L = \overrightarrow{\{b^*a^*\}}$. Si costruisca un automa di Buchi non deterministico che riconosca il linguaggio L



Esercizio 2.50

Dimostrare che la classe degli ω -linguaggi ω -regolari coincide con la classe degli ω -linguaggi riconosciuti dagli automi di Muller non deterministici

Esercizio 2.57

Dimostrare che l'insieme $W_v \subseteq A^$ dei V -testimoni, con V classe di congruenza $\approx_{\mathcal{A}}$ è regolare*

2 Exercises of chapter 0 of Temporal Verification of Reactive Systems

3 Additional exercises

Esercizio1

Dato un linguaggio $L \subseteq A^$, dimostrare se che L è un linguaggio star-free, allora L è definibile nel frammento al prim'ordine di $S1S_A$, con la relazione di ordinamento $<$ e i predicati unari Q_a , con $a \in A$.*

Esercizio2

Dimostrare che l'insieme dei linguaggi riconosciuti da automi di Büchi su alberi infiniti con insieme degli stati finali singoletto è strettamente contenuto nell'insieme dei linguaggi riconosciuti da automi di Büchi su alberi infiniti

Esercizio3

Sia $A = \{a, b\}$ e $T_1 = \{t \in T_A^\omega : \text{tutti i cammini di } t \text{ contengono un numero finito di occorrenze di } a\}$. T_1 contiene l'insieme di tutti gli alberi t_i , con $i \geq 0$,

tali che t_i ha un'occorrenza di a nelle posizioni $\epsilon, 1^{m_1}0, \dots, 1^{m_1}01^{m_2}0 \dots 1^{m_i}0$, con $m_1, m_2, \dots, m_i > 0$. Immaginiamo che esista un automa di Büchi $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, A, \Delta, q_0, F)$ con $n + 1$ stati, con $n \geq 1$, incluso lo stato iniziale q_0 che occorre solo in posizione ϵ tale che $L(\mathcal{A}) = T_1$ e sia r un run di successo di \mathcal{A} su t_n . Mostrare che deve esistere un cammino in t_n contenente 3 nodi u, v e w , con $u < v < w$, tali che $r(u) = r(w) = s \in F$ e $t_n(v) = a$.

Esercizio4

Siano $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ e $\bar{c} = (c_1, \dots, c_m)$. Sia dato $T \subseteq T_A^\omega$ tale che $T = T_0 \cdot \bar{c}(T_1, \dots, T_m)^\omega$

Esercizio5

Dimostrare la (correttezza e completezza della) caratterizzazione di uno degli operatori di CTL (diverso da AF) quale minimo punto fisso di un'opportuna trasformazione di predicato.

Esercizio6

Dimostrare la (correttezza e completezza della) caratterizzazione di uno degli operatori di CTL (diverso da EG) quale massimo punto fisso di un'opportuna trasformazione di predicato.