Automatic System Verification
Exercices

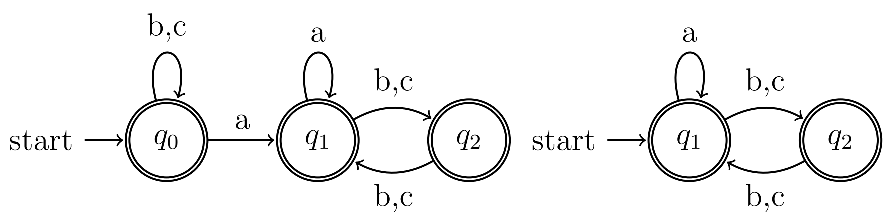
Cominato Enrico 137396
Department of Computer Science
Univeristy of Udine

November 17, 2020

1 Exercices on the automata's notes

Esercizio 2.3

Sia $\mathcal{A}$ l'automa dell'Esempio 2.2. Si consideri l'automa $\mathcal{A}'$ ottenuto da $\mathcal{A}$ rimuovendo lo stato q_0, e le transizioni in esso entranti e da esso uscenti, e facendo diventare q_1 il nuovo stato iniziale. Si stabilisca se $\mathcal{A}$ e $\mathcal{A}'$ riconoscono o meno lo stesso linguaggio
Riporto di seguito i due grafi.

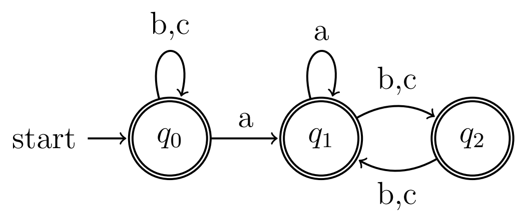


I due linguaggi non sono uguali. Per esempio la $\omega - parola$ *babcabca...* appartiene al primo dei due automi, ma non al secondo (da q_1 andiamo in q_2 ma da li possiamo leggere solo una b oppure una c)

Esercizio 2.4

Si costruisca l'automa $\mathcal{A}'$ che riconosce la variante finita (linguaggio di parole finite) dell'Esempio 2.2

Il linguaggio richiesto è il seguente:
L'insieme delle parole finite su $A = \{a, b, c\}$ tali che tra ogni coppia di occorrenze consecutive di a esiste un numero pari di occorrenze di simboli diversi da a.
Osservazione: una parola con una sola occorrenza di a deve essere sempre accettata.
L'automa risultante quindi è lo stesso dell'esempio 2.2, solo che le run su questo automa sono finite.



Esercizio 2.5

Sia W il linguaggio riconosciuto dall'automa $\mathcal{A}$' dell'Esercizio 2.4. Si caratterizzi il linguaggio $\overrightarrow{W}$.
Riprendo la definizione di $\overrightarrow{W}$:

$$\overrightarrow{W} = \{\alpha \in A^\omega \ t.c. \ \exists^\omega n \ \alpha(0, n) \in W\}$$

Sono quindi tutte quelle ω-parole di cui ogni prefisso finito appartiene a W.
Analizziamo per casi:

- la parola non ha neppure una a: in questo caso ogni suo prefisso appartiene a W perchè le parole $(b|c), (b|c)^2, (b|c)^3, \ldots, (b|c)^n, \ldots \in W$

- la parola ha una sola occorrenza di a: anche in questo caso ogni suo prefisso appartiene a W perchè:

  - come visto nel punto precedente, fino a che non si incontra la lettera a le parole appartengono a W
  - dopo l'occorrenza di a, ancora tutti i prefissi appartengono a W, dato che tutte le parole finite con una sola occorrenza di a appartengono a W

- infine tutti gli altri casi sono parole con un più di una occorrenza di a: dove abbiamo che ogni prefisso, o ricade in uno dei precedenti casi, oppure è una parola che tra ogni coppia di occorrenze consecutive di a esiste un numero pari di occorrenze di simboli diversi da a e che quindi appartiene a W.

In questo caso abbiamo che $W^\omega = \overrightarrow{W}$.

Esercizio 2.7

Teorema 2.6

1. Se $V \subseteq A^*$ è regolare, allora V^ω è $\omega - regolare$
2. Se $V \subseteq A^*$ è regolare e $L \subseteq A^\omega$ è $\omega{-}regolare$, allora $V \cdot L$ è $\omega{-}regolare$
3. Se $L_1, L_2 \subseteq A^*$ sono $\omega - regolari$, allora $L_1 \cup L_2$ e $L_1 \cap L_2$sono $\omega - regolari$

Dimostrare le proprietà (2) e (3) del teorema
Dimostro *(2)*. Siano $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ automi tali che $\mathcal{A}$ accetta V e $\mathcal{B}$ accetta L, allora possiamo costruire $\mathcal{C}$ unendo tutti gli stati finali di $\mathcal{A}$ con lo stato iniziale di $\mathcal{B}$. Otteniamo così un'automa che legge il linguaggio $V \cdot L$, quindi $V \cdot L$ è ω-regolare.
Dimostro *(3)*. Per quanto riguarda l'unione, prendiamo $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ automi tali che $\mathcal{A}$ accetta L_1 e $\mathcal{B}$ accetta L_2. Costruiamo $\mathcal{C}$ unendo gli stati iniziali di $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Abbiamo quindi che $\mathcal{C}$ accetta tutte le parole di $L_1 \cup L_2$. Sappiamo inoltre che i linguaggi ω-regolari sono chiusi per complementazione, quindi possiamo riscrivere $L_1 \cap L_2 = \neg(\neg L_1 \cup \neg L_2)$ ed ottenere la chiusura per intersezione.

Esercizio 2.13

Fornire un esempio di parola non definitivamente periodica
Un esempio è:

$$ababbab^3ab^4ab^5...$$

Esercizio 2.16

Dimostrare che una congruenza è una relazione di equivalenza invariante destra

Invariante a destra significa che $\forall x, y, z \in A$, se $x \sim y$ allora $xz \sim yz$. Questo è sempre vero perchè, concatenando la stessa parola ad x, y finiremo in un'unica classe di equivalenza.

Esercizio 2.19

Dato un automa di Büchi $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, A, \Delta, q_0, F)$, dimostrare che, per ogni $s, s' \in \mathcal{Q}$, $W^F_{ss'}$ è regolare

Un linguaggio è regolare se esiste un'automa in grado di accettarlo. Per poterlo accettare deve avere almeno uno stato finale. Quindi se eliminiamo dall'automa $\mathcal{A}$, tutti gli stati e le relazioni non interessate dai possibili cammini tra s e s' otteniamo un automa in grado di leggere solo $W^F_{ss'}$, e questo fa di lui un linguaggio regolare.

Esercizio 2.23

Dimostrare che la relazione $\approx_A$ è una congruenza di indice finito

Perchè $\approx_A$ sia una congruenza deve valere che $\forall u, u', v, v' \in A^*$ se $u \approx_A v$ e $u' \approx_A v'$ allora $uu' \approx_A vv'$. Questo è vero perchè avendo $u \approx_A v$ e $u' \approx_A v'$, allora $\exists t$ tale che:

- $s \rightarrow_u t \Leftrightarrow s \rightarrow_v t$
- $s \rightarrow^F_u t \Leftrightarrow s \rightarrow^F_v t$
- $t \rightarrow_{u'} s' \Leftrightarrow t \rightarrow_{v'} s'$
- $t \rightarrow^F_{u'} s' \Leftrightarrow t \rightarrow^F_{v'} s'$

Quindi abbiamo che $\forall s, s' \in Q$:

- $s \rightarrow_{uu'} s' \Leftrightarrow s \rightarrow_{vv'} s'$
- $s \rightarrow^F_{uu'} s' \Leftrightarrow s \rightarrow^F_{vv'} s'$

e quindi $uu' \approx_A vv'$. Il resto della dimostrazione è già stata svolta negli appunti.

Esercizio 2.25

Si dimostri che la relazione $\cong_\alpha$ *è una relazione di equivalenza sui naturali di indice finito*

Riprendo la definizione di $\cong_\alpha$. Sia $\sim$ una congruenza su A^* di indice finito. Sia $\alpha \in A^\omega$ e siano k, k' posizioni. Diciamo che $k \cong_\alpha^m k'$ (k, k' si riuniscono in $m > k, k'$) se $\alpha(k, m) \sim \alpha(k', m)$. Diciamo che $k \cong_\alpha k'$ se esiste m per cui $k \cong_\alpha^m k'$.

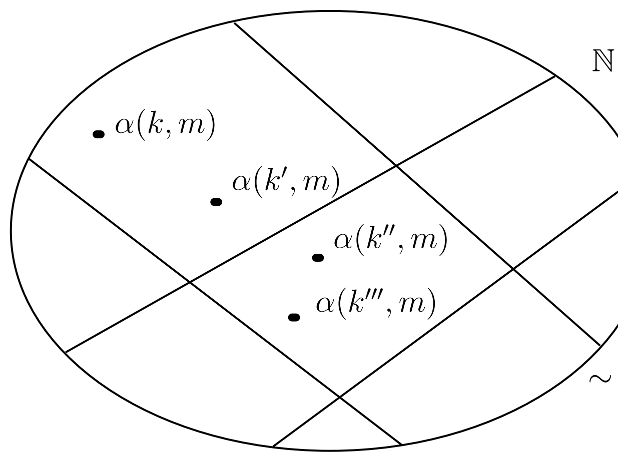
Dimostro che è una relazione di equivalenza:

- **Riflessività**: $\forall k \in \mathbb{N}$ è sempre vero che $k \cong_\alpha k$ perchè $k \cong_\alpha k \Leftrightarrow \exists m\ t.c.\ \alpha(k, m) \sim \alpha(k, m)$ e questo è vero $\forall k$ perchè $\sim$ è una relazione di equivalenza

- **Simmetria**: $\forall k, k' \in \mathbb{N}$ è sempre vero che $k \cong_\alpha k' \Rightarrow k' \cong_\alpha k$ perchè $k \cong_\alpha k' \Leftrightarrow \exists m\ t.c.\ \alpha(k, m) \sim \alpha(k', m)$. Dato che $\sim$ è una relazione di equivalenza allora vale che $\exists m\ t.c.\ \alpha(k', m) \sim \alpha(k, m)$, il che significa che $k' \cong_\alpha k$.

- **Transitività**: $\forall i, j, k \in \mathbb{N}$ è sempre vero che $i \cong_\alpha j$ e $j \cong_\alpha k \Rightarrow i \cong_\alpha k$, perchè $i \cong_\alpha j \Leftrightarrow \exists m\ t.c.\ \alpha(i, m) \sim \alpha(j, m)$ e $j \cong_\alpha k \Leftrightarrow \exists n\ t.c.\ \alpha(j, n) \sim \alpha(k, n)$. Senza perdere di generalità pongo $n > m$, quindi abbiamo che $\exists m\ t.c.\ \alpha(i, m) \sim \alpha(j, m)$ e $\alpha(j, m) \sim \alpha(k, m)$. Dato che $\sim$ è una relazione di equivalenza allora vale che $\exists m$ tale che $\alpha(i, m) \sim \alpha(j, m)$ e $\alpha(j, m) \sim \alpha(k, m) \Rightarrow \alpha(i, m) \sim \alpha(k, m)$, il che significa che $i \cong_\alpha k$.

Dimostro che $\cong_\alpha$ ha indice finito. Dato che $\sim$ ha indice finito, per un m fisso, ci troviamo in una situazione del genere:



Dove il numero di classi di equivalenza è limitato dal numero di classi di equivalenza di $\sim$, e sappiamo che $\sim$ ha un numero finito di classi di equivalenza, quindi anche $\cong_\alpha$ avrà un numero finito di classi di equivalenza.

Esercizio 2.44

Dimostrare la chiusura della classe dei linguaggi riconosciuti dagli automi di Büchi deterministici rispetto alle operazioni di unione e intersezione
Siano $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}_{\mathcal{A}}, A, \Delta_A, q_{0A}, F_A)$ e $\mathcal{B} = (\mathcal{Q}_{\mathcal{B}}, A, \Delta_B, q_{0B}, F_B)$
Unione: Se assumiamo che $\mathcal{Q}_{\mathcal{A}} \cap \mathcal{Q}_{\mathcal{B}} = \emptyset$ allora possiamo costruire l'automa unione $\mathcal{C}$ come segue:

- $\mathcal{Q}_{\mathcal{C}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} \cup \mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \cup \{q_{0C}\}$
- A rimane invariato
- $\Delta_C = \Delta_A \cup \Delta_B$
- q_{0C} come nuovo stato iniziale, con le stesse relazioni di q_{0A} e q_{0B}, finale nel caso che almeno uno tra q_{0A} e q_{0B} sia uno stato finale
- $F_C = F_A \cup F_B$

Intersezione: Costruiamo l'automa intersezione $\mathcal{C}$, partendo dal prodotto cartesiano degli stati:

- $\mathcal{Q}_{\mathcal{C}} = \mathcal{Q}_{\mathcal{A}} \times \mathcal{Q}_{\mathcal{B}} \times \{1, 2\}$

- A rimane invariato
- $\Delta_C = \Delta_1 \cup \Delta_2$ dove
  - $\Delta_1 = \{((q_A, q_B, 1), a, (q'_A, q'_B, i)) \mid (q_A, a, q'_A) \in \Delta_A$ *e* $(q_B, a, q'_B) \in \Delta_B$ *e se* $q_A \in F_A$ *allora* $i = 2$ *altrimenti* $i = 1\}$
  - $\Delta_2 = \{((q_A, q_B, 2), a, (q'_A, q'_B, i)) \mid (q_A, a, q'_A) \in \Delta_A$ *e* $(q_B, a, q'_B) \in \Delta_B$ *e se* $q_B \in F_B$ *allora* $i = 1$ *altrimenti* $i = 2\}$
- $q_{0C} = (q_{0A}, q_{0B}, 1)$
- $F_C = \{(q_a, q_b, 2) \mid q_B \in F_B\}$

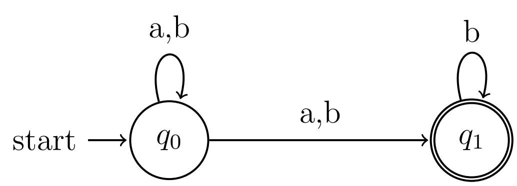
Per costruzione, $r_C = (q_A^0, q_B^0, i^0), (q_A^1, q_B^1, i^1), \ldots$ è un'esecuzione su $\mathcal{C}$ per la parola w se:

- $r_A = q_A^0, q_A^1, \ldots$ è un'esecuzione su $\mathcal{A}$ per w
- $r_B = q_B^0, q_B^1, \ldots$ è un'esecuzione su $\mathcal{B}$ per w

r_A e r_B sono accettate se r_C è la concatenazione di una serie infinita di segmenti finiti di stati 1 (stati con terza componente 1) e stati 2 (stati con terza componente 2) alternativamente. Questa sequenza esiste se r_C è accettato da $\mathcal{A}$

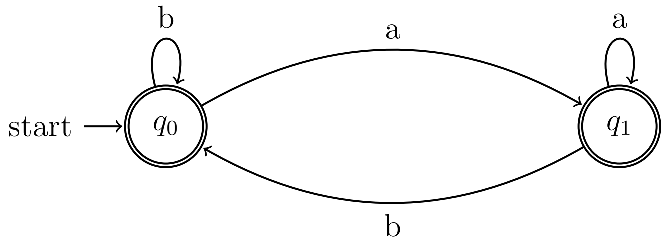
Esercizio 2.46

Sia $A = \{a, b\}$ *e* $L = \{\alpha \in A^\omega . \exists^{<\omega}\, n\ \alpha(n) = a\}$. *Si costruisca un automa di Büchi non deterministico che riconosca il linguaggio* L



Esercizio 2.48

Sia $A = \{a, b\}$ *e* $L = \overrightarrow{\{b^* a^*\}}$. *Si costruisca un automa di Büchi deterministico che riconosca il linguaggio* L



Esercizio 2.50

Dimostrare che la classe degli ω-linguaggi ω-regolari coincide con la classe degli ω-linguaggi riconosciuti dagli automi di Muller non deterministici

Dato che un ω-linguaggio per essere ω-regolare deve essere accettato da un automa di Büchi , mi basta dimostrare l'equivalenza tra gli automi di Büchi non deterministici e quelli di Muller non deterministici.

Sia $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, A, \Delta, q_0, F)$ un automa di Büchi , possiamo costruire un automa di Muller: $\mathcal{M} = (\mathcal{Q}, A, \Delta, q_0, \mathcal{F})$ dove $\mathcal{F} = \{X | X \in 2^Q \wedge X \cap F \neq \emptyset\}$. Si può osservare che una ω-parola viene accettata da $\mathcal{A}$ se e solo se passa infinite volte per uno stato finale. Quindi viene accettata anche da $\mathcal{M}$ perchè, presa una sua computazione σ, abbiamo che $In(\sigma) \cap F \neq \emptyset$ e $In(\sigma) \in 2^Q \Rightarrow In(\sigma) \in \mathcal{F}$ quindi la stessa ω-parola viene accettata da $\mathcal{F}$. Lo stesso ragionamento lo possiamo fare al contrario. Se una ω-parola viene accettata da $\mathcal{M}$ allora $In(\sigma) \cap F \neq \emptyset$ quindi esiste una computazione che passa infinite volte per uno stato finale, quindi la stessa ω-parola viene accettata da $\mathcal{A}$.

Esercizio 2.57

Dimostrare che l'insieme $W_V \subseteq A^*$ dei V-testimoni, con V classe di congruenza $\approx_{\mathcal{A}}$ è regolare

2 Exercices of chapter 0 of Temporal Verification of Reactive Systems

Problem 0.1

$$\begin{array}{l}
\quad\quad\quad\quad \textbf{out } \mathrm{x}\text{: } \textbf{integer where } \mathrm{x} = 0 \\
\\
l_0 : \begin{bmatrix} [l_1 : \textbf{while } x \geq 0 \textbf{ do } l_2 : x := x + 1] \\ \quad \textbf{or} \\ [l_3 : \textbf{await } x > 0] \end{bmatrix} \\
l_4 :
\end{array}$$

Program S8 (strange behavior).

a) *Identify the locations of this program as equivalence classes of labels. List the post-location of each of the statements.*
There are three classes:

$$l_0 = \{l_0, l_1, l_3\}$$

$$l_2 = \{l_2\}$$

$$l_4 = \{l_4\}$$

While the post-locations are:

$$post(l_0) = post(l_1) = post(l_3) = [l_4]$$

$$post(l_2) = [l_0]$$

b) *Show that this program has a terminating computation.*
The program can terminate because the post-location of the body of the while is the selection statement. So the await condition can be satisfied and this terminate the program.

c) *Define transitions and transition relations for this version of a WHILE statement. Show that the version of program SB in which the while statement has been replaced by this WHILE statement has no terminating computation.*
Recall of the new WHILE statement:

$$l_1 : [WHILE\ c\ DO\ [l_2 : S; \hat{l_2}]]; l_3 : \text{ where } \hat{l_2} \not\sim l_1$$

We can define its transitions $\tau_{l_1}, \tau_{\hat{l_2}}$ and transition relations $\rho_{l_1}, \rho_{\hat{l_2}}$ as follow:

$\rho_{l_1} : \rho^T_{l_1} \vee \rho^F_{l_1}$ where

$$\rho^T_{l_1} : move(l_1, l_2) \wedge c \wedge pres(Y)$$
$$\rho^F_{l_1} : move(l_1, l_3) \wedge \neg c \wedge pres(Y)$$

$\rho_{\hat{l_2}} : \rho^T_{\hat{l_2}} \vee \rho^F_{\hat{l_2}}$ where

$$\rho^T_{\hat{l_2}} : move(\hat{l_2}, l_2) \wedge c \wedge pres(Y)$$
$$\rho^F_{\hat{l_2}} : move(\hat{l_2}, l_3) \wedge \neg c \wedge pres(Y)$$

As we can see, now the program cannot terminate anymore, because once in the WHILE loop, the transition $\rho^F_{\hat{l_2}}$ will be never satisfied.

Problem 0.2

out y: **integer where** y = 0
local x: **boolean where** x = T

$$P_1 :: \begin{bmatrix} l_0 : \textbf{while } x \textbf{ do} \\ \quad l_1 : y := y + 1 \\ l_2 : \end{bmatrix} \quad \Bigg\| \quad P_2 :: \begin{bmatrix} m_0 : x := F \\ m_1 : \end{bmatrix}$$

Program ANY-NAT (computing any natural number).

a) *Consider program ANY-NAT. Argue (informally) that this program always terminates. Also show that, for every natural number $n \geq 0$, there exists a computation of ANY-NAT such that $y = n$ on termination.*

The program terminates whenever m_0 is executed. The transition τ_{m_0} is always enabled and because of *justice* requirement we know that, soon or after, it will be taken. Once executed $\rho^F_{l_0}$ is satisfied and control goes to $\pi = \{l_2, m_1\}$. Furthermore, the justice requirement allow only a finite (but unbounded) number of transition τ_{l_0}. So, $\forall n \in \mathbb{N}$ there exists a run where τ_{l_0} is taken n times before τ_{m_0}, leading to have $y = n$ on termination.

b) *Construct a program with a single process that exhibits a similar behavior; that is, all of its computations terminate and, for each natural number n, there exists a computation producing n.*

$$
\begin{array}{l}
\qquad\quad \textbf{out } \mathrm{y}\text{: } \textbf{integer where } \mathrm{y} = 0 \\
\qquad\quad \textbf{local } \mathrm{x}\text{: } \textbf{boolean where } \mathrm{x} = \mathrm{T} \\
\\
l_0 : \left[\textbf{while } x \textbf{ do } l_1 : \left[\begin{array}{l} [l_2 : y := y + 1] \\ \quad \textbf{or} \\ [l_3 : x := F] \end{array} \right] \right] \\
l_4 :
\end{array}
$$

c) *Prove that no single-process program with only just transitions can have the same behavior as ANY-NAT.*

3 Additional exercices

Esercizio1

Dato un linguaggio $L \subseteq A^*$, dimostrare se che L è un linguaggio star-free, allora L è definibile nel frammento al prim'ordine di $S1S_A$, con la relazione di ordinamento $<$ e i predicati unari Q_a, con $a \in A$.

Esercizio2

Dimostrare che l'insieme dei linguaggi riconosciuti da automi di Büchi su alberi infiniti con insieme degli stati finali singoletto è strettamente contenuto nell'insieme dei linguaggi riconosciuti da automi di Büchi su alberi infiniti

Esercizio3

Sia $A = \{a, b\}$ e $T_1 = \{t \in T_A^\omega$:tutti i cammini di t contengono un numero finito di occorrenze di $a\}$. T_1 contiene l'insieme di tutti gli alberi t_i, con $i \geqslant 0$, tali che t_i ha un'occorrenza di a nelle posizioni $\epsilon, 1^{m_1}0, \ldots, 1^{m_1}01^{m_2}0 \ldots 1^{m_i}0$, con $m_1, m_2, \ldots, m_i > 0$. Immaginiamo che esista un automa di Büchi $\mathcal{A} = (\mathcal{Q}, A, \Delta, q_0, F)$ con $n+1$ stati, con $n \geqslant 1$, incluso lo stato iniziale q_0 che occorre solo in posizione ϵ tale che $L(\mathcal{A}) = T_1$ e sia r un run di successo di $\mathcal{A}$ su t_n. Mostrare che deve esistere un cammino in t_n contenente 3 nodi u,v e w, con $u < v < w$, tali che $r(u) = r(w) = s \in Fet_n(v) = a$.

Esercizio4

Siano $C = \{c_1, \ldots, c_m\}$ e $\bar{c} = (c_1, \ldots, c_m)$. Sia dato $T \subseteq T_A^\omega$ tale che $T = T_0 \cdot \bar{c}(T_1, \ldots, T_m)^\omega$

Esercizio5

Dimostrare la (correttezza e completezza della) caratterizzazione di uno degli operatori di CTL (diverso da AF) quale minimo punto fisso di un'opportuna trasformazione di predicato.

Esercizio6

Dimostrare la (correttezza e completezza della) caratterizzazione di uno degli operatori di CTL (diverso da EG) quale massimo punto fisso di un'opportuna trasformazione di predicato.