Résumé Iere

Jarod Differdange

2019-2020

Contents

Chapter 1

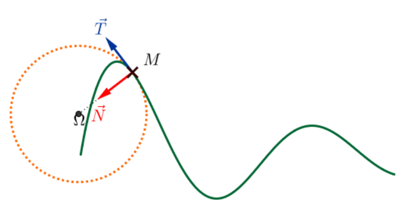
Cinématique et Dynamique

1.1 Grandeurs cinematiques et MCU

1.1.1 Base de Frenet

Vecteurs

- Le vecteur $\vec{T}$ est le vecteur tangeant à la courbe au point considéré
- Le vecteur $\vec{N}$ est le vecteur normal à la courbe au point considéré



1.1.2 MCU

La vitesse angulaire du mobile est: $\omega = \frac{2\pi}{T}$
et la vitesse linéaire est: $v = \frac{2\pi R}{T} = \omega * R$
La position sur un cercle est:

$$x = R * cos(\Theta), y = R * sin(\Theta)$$

Avec $\Theta = \omega * t$ qui varie uniformément et l'abscisse curviligne $s = v * t = \Theta * t$

$$x(t) = R * cos(\omega * t), y(t) = R * sin(\omega * t)$$

$$v_x(t) = -\omega * R * sin(\omega * t), v_y(t) = \omega * R * cos(\omega * t)$$

$$a_x(t) = -\omega^2 * R * cos(\omega * t), a_y(t) = -\omega^2 * R * sin(\omega * t)$$

Avec base de Frenet:

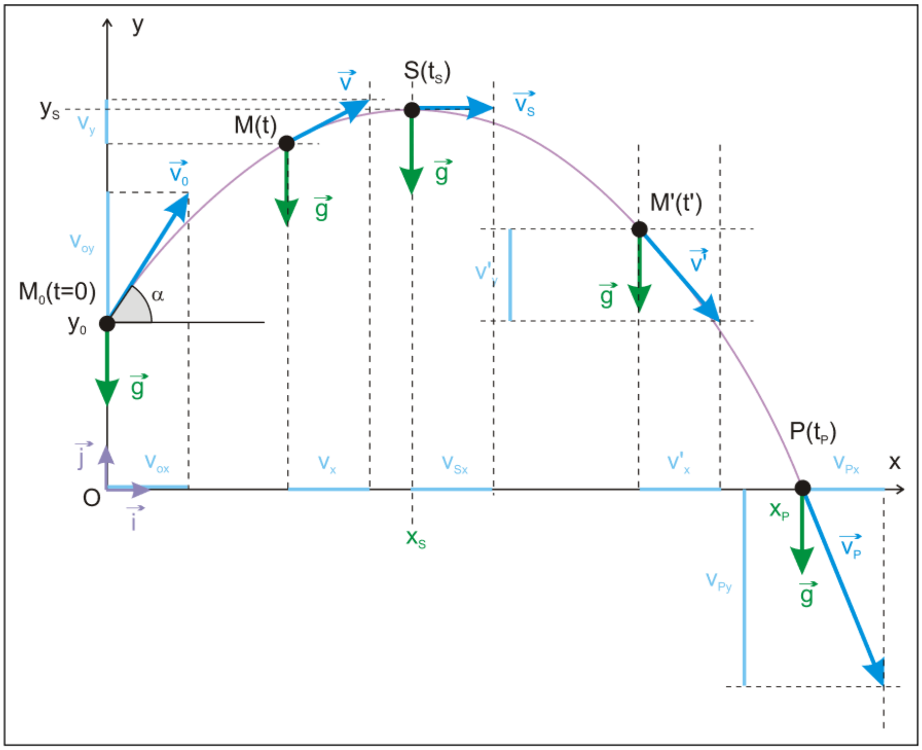
$$\vec{v} = \omega * R * \vec{T}$$

$$\vec{a} = \omega^2 * R * \vec{N}$$

1.2 Mouvement dans le champ de pesanteur

1.2.1 Système étudié

Projectile, de masse **m** lancé dans $\vec{g}$ uniforme et on néglige le frottement et toute autre force.
L'objet est lancé avec une vitesse v_0 et avec un angle α



1.2.2 Équation horaire du mouvement

Conditions initiales:
$x_0 = 0$ et y_0 quelconque
$v_{0x} = v_0 * cos(\alpha)$ et $v_{y0} = v_0 * sin(\alpha)$

Appliquons la RFD :

$$\sum \vec{F} = m * \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{P} = m * \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad m * \vec{g} = m * \vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \vec{g} \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

Accélération	$a_x = 0$	$a_y = -g$
$1^{ère}$ integr.	$v_x = v_0 * cos(\alpha)$	$v_y = -g * t + v_0 * sin(\alpha)$
$2^{ème}$ integr.	$x = v_0 * cos(\alpha) * t$	$v_y = -\frac{1}{2} g * t^2 + v_0 * sin(\alpha) * t + y_0$

1.2.3 Équation cartésienne

On écrit: $t = \frac{x}{v_0 cos(\alpha)}$, on obtient:

$$\boxed{y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 cos^2(\alpha)} x^2 + tan(\alpha) * x + y_0}$$

1.2.4 Cas particulier yp = y0

On note y_p l'ordonnée du point d'atterrissage. On résout donc:
$y = -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 cos^2(\alpha)} x^2 + tan(\alpha) * x + y_0 = y_p$
$\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 cos^2(\alpha)} x^2 + tan(\alpha) * x = 0$
$\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2 cos^2(\alpha)} x_2 = \frac{sin(\alpha)}{cos(\alpha)}$
$\Leftrightarrow x_1 = 0 \quad \text{ou} \quad = x_2 = \frac{2 v_0^2 sin(\alpha) cos(\alpha)}{g} = \frac{v_0^2 sin(2\alpha)}{g}$

1.2.5 Coordonnées du sommet S

En S, la vitesse verticale est nulle
$v_{Sy} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad t_S = \frac{v_0 * sin(\alpha)}{g}$
$x_S = \frac{1}{2} \frac{v_0^2 sin(2\alpha)}{g}$
$y_S = \frac{v_0^2 sin^2(\alpha)}{2g} + y_0$

1.3 Mouvement dans un champs électrique $\vec{E}$

1.3.1 Système étudié

Une particule chargée de charge q et de masse m dans le champs électrique uniforme $\vec{E}$ créé par un condensateur. Un canon à particules pour le lancement en O(0,0) (au milieu des plaques) lance la particule sous un angle α avec une vitesse initiale v_0.
La particule évolue dans le vide et le poids est négligable, donc il reste une seule force: $\vec{F}_{el} = q\vec{E}$ (l'orientation de $\vec{F}$ dépend de q et de $\vec{E}$.

1.3.2 Équation horaires (q >0 et plaque supérieure $\oplus$)

D'après les conditions du titre, la particule va se dévier vers le bas.
$\sum \vec{F} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad q\vec{E} = m\vec{a} \quad \Leftrightarrow \quad \vec{a} = \frac{q\vec{E}}{m}$
On en déduit les équations horaires:

Accélération	$a_x = 0$	$a_y = -\frac{qE}{m}$
$1^{ère}$ integr.	$v_x = v_0 * cos(\alpha)$	$v_y = -\frac{qE}{m} * t + v_0 * sin(\alpha)$
$2^{ème}$ integr.	$x = v_0 * cos(\alpha) * t$	$v_y = -\frac{1}{2}\frac{qE}{m} * t^2 + v_0 * sin(\alpha) * t + y_0$

1.3.3 Équation cartésienne

On écrit: $t = \frac{x}{v_0 cos(\alpha)}$, on obtient:

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}\frac{qE}{mv_0^2 cos^2(\alpha)} x^2 + tan(\alpha) * x + y_0}$$

On a souvent $\alpha = 0°$, l'équation devient:

$$\boxed{y = -\frac{1}{2}\frac{qE}{mv_0^2} x^2 + y_0}$$

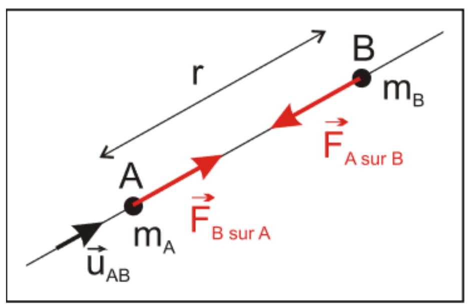
1.4 Gravitation et mouvement de planètes et satellites

1.4.1 Particule en mouvement circulaire uniforme

Un corps de masse m, en **mouvement circulaire uniforme** de rayon r et de vitesse v (de vitesse angulaire ω), a un **accélération centripète** $\vec{a}$ de norme $a = r\omega^2 = \frac{v^2}{r}$.
La résultante de toutes les forces s'excerçant sur un corps en MCU est centripète et de norme $\sum \left\| \vec{F} \right\| = ma = mr\omega^2 = m\frac{v^2}{r}$

1.4.2 Force d'interaction gravitationnelle de Newton

Soit deux objets, un objet A de masse m_a et un autre B de masse m_b, distant d'une distance r. Ces objets s'attirent mutuellement avec une force d'intensité:



$$F_{AsurB} = F_{BsurA} = K\frac{m_a m_b}{r^2}$$

Avec K = $6.67 \times 10^{-11} \quad Nm^2/kg^2$

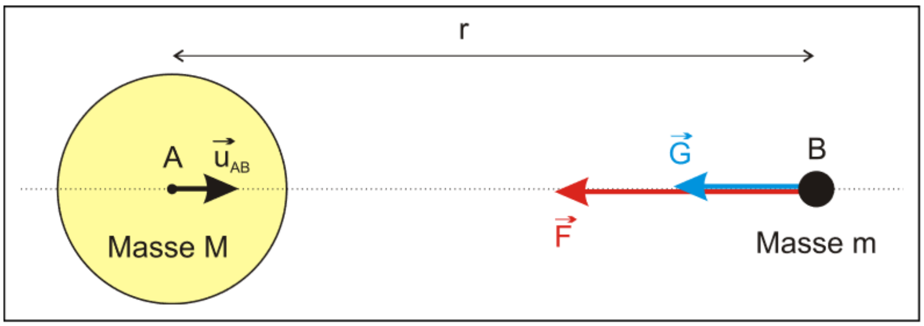
1.4.3 Gravitation autour d'un corps céleste M

Force d'attraction centrale

On considère une grande masse sphérique M au point A. La masse M crée un champs de gravitation. Ajoutons une petite masse m au point B, avec r la distance AB. La masse m se trouve donc dans le champs de M et donc subit une force.

$$\boxed{\vec{F} = -K\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_{AB}}$$

avec $\vec{u}_{AB}$ le vecteur unitaire de A vers B



vecteur champ de gravitation $\vec{G}$

On défini le vecteur champs de gravitation en un point de l'espace:

$$\boxed{\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad \text{Norme:} \quad G = \frac{F}{m}}$$

Calcul de $\vec{G}$ au point B:

$$\boxed{\vec{G} = \frac{\vec{F}}{m} \quad \Rightarrow \quad -K\frac{M}{r^2}\vec{u}_{AB} \quad \Rightarrow \quad \text{Norme:} \quad G = K\frac{M}{r^2}}$$

Champ de gravitation d'une planète

Soit R le rayon d'une planète, M sa masse, et z l'altitude potentielle d'un objet qui tourne autour de la planète.
La distance entre le centre de la planète et le centre de l'objet et donc

$$\boxed{r = R + z \quad \Rightarrow \quad G = K\frac{M}{(R+z)^2}}$$

On note G_0 le champs de gravitation pour $z = 0$:

$$\boxed{G_0 = K\frac{M}{R^2} \quad \Rightarrow \quad G = G_0\frac{R^2}{(R+z)^2}}$$

Rotation terrestre: champ de gravitation G_0 / champ de pesanteur g

À cause de la rotation terrestre, $\vec{g}$ qui est déterminé dans le repère terrestre, donc non galiléen, ne peut pas être égal à $\vec{G}_0$. Or la vitesse angulaire de la Terre est relativement faible, on peut tout de même dire que $G_0 \approx g$

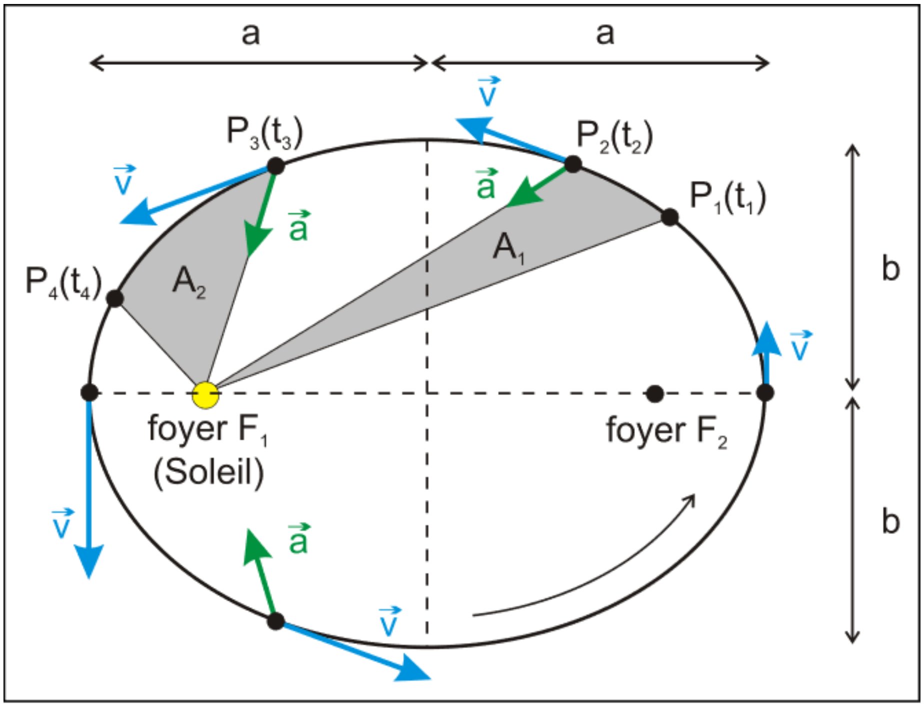
1.4.4 Mouvement général des planètes et satellites

Force et accélération

$$\boxed{\vec{F} = m\vec{G} = -K\frac{Mm}{r^2}\vec{u}_{AB}}$$

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \vec{G} = -K\frac{M}{r^2}\vec{u}_{AB}}$$

Lois de Kepler



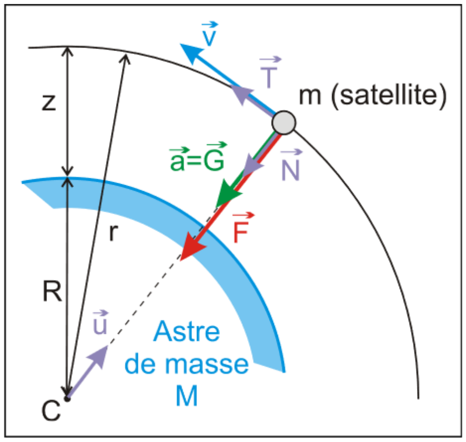
1ère loi de Kepler Les trajectoires planétaires sont des ellipses dont le soleil occupe un foyer.

2ème loi de Kepler Si $t_2 - t_1 = t_4 - t_3 \implies A_1 = A_2$

3ème loi de Kepler Soit T la période de révolution d'une planète et a le demi grand-axe de la trajectoire. On a $\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$ pour deux planètes.

1.4.5 Satellite en mouvement circulaire et uniforme

Souvent, les trajectoires prises par des satellites et planètes sont quasi circulaires



On calcule le mouvement dans une base de Frenet, et comme on suppose une trajectoire circulaire, la force est toujours normale au mouvement (pas comme pour les trajectoires elliptiques).

Force

$$\vec{F} = K\frac{Mm}{r^2}\vec{N}$$

Accélération

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = K\frac{M}{r^2}\vec{N}$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 0 \quad (1) \quad \text{et} \quad a_N = \frac{v^2}{r} = K\frac{M}{r^2} \quad (2)$$

Vitesse et rayon On en déduit que
(1) donne : $\frac{dv}{dt} = 0 \implies v = \text{constante}$
(2) donne : $\frac{v^2}{r} = K\frac{M}{r^2} \implies v = \sqrt{K\frac{M}{r}}$

Période de révolution On trouve aussi
$T = \frac{2\pi R}{v} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{KM}} = 2\pi\sqrt{\frac{(R+z)^3}{G_0 R^2}}$

Coefficient de la troisième loi de Kepler De plus
$T^2 = 4\pi^2\frac{R^3}{KM} \implies \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{KM}$
qui est aussi valable pour les trajectoires elliptiques

Application, satellite geostationaire On souhaite trouver l'altitude pour que la période de celui-ci soit la même que la Terre (=23h 56min 4s = 81164s)
$R + z = \sqrt[3]{\frac{T^2 R^2 G_0}{4\pi^2}} \approx 4.22 * 10^7 m$
$z = 4.22 * 10^7 m - 6.4 * 10^6 = 3.58 * 10^7 m$

1.5 Mouvement dans un champ magnétique

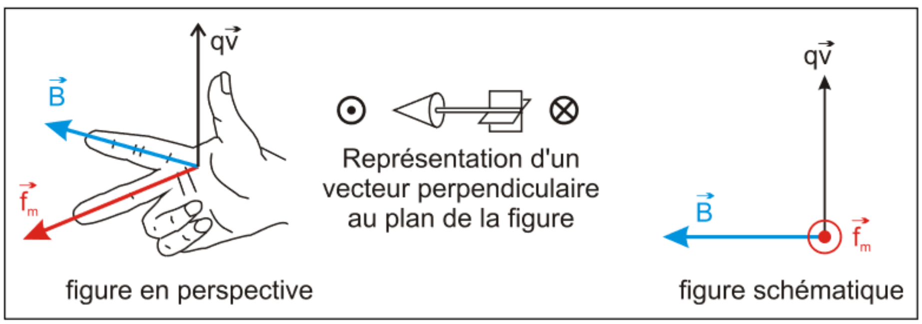
1.5.1 Force de Lorentz

Définition

Une charge q qui se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit une force telle:

$$\boxed{\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}}$$

Caractéristique de la force de Lorentz

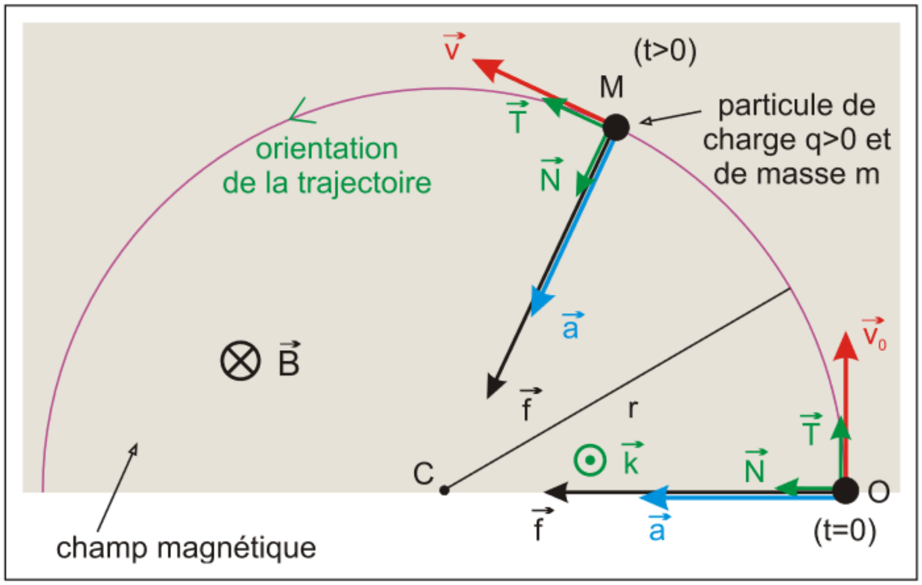


Direction perpendiculaire au plan formé par q$\vec{v}$ et $\vec{B}$

Sens règle de la main droite

Norme $f_m = |qvBsin\alpha|$

1.5.2 Etude cinématique dans le cas où $\vec{v} \perp \vec{B}$



On a: $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} \implies \vec{a} = \frac{q}{m}\vec{v} \wedge \vec{B}$

$a_k = 0 \qquad car \vec{f}_m \perp \vec{B}$
$a_T = 0 \qquad car \vec{f}_m \perp \vec{v}$
$a_N = \frac{|q|vB}{m} \qquad car \vec{N} \parallel \vec{f}_m \perp plan(\vec{v}, \vec{B})$

$$\boxed{a_k = \frac{dv_k}{dt} = 0 \implies v_k = constant = v_{0k} = 0}$$

Donc il n'y a pas de mouvement selon $\vec{k}$, le mouvement se fait dans le plan perpendiculaire à $\vec{B}$.

$$\boxed{a_T = \frac{dv_T}{dt} = 0 \implies v_T = v = constant}$$

Donc le mouvment est uniforme.

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = \frac{|q|vB}{m} \Leftrightarrow \rho = \frac{mv}{|q|B}$$

ρ est constant, donc R $= \dfrac{mv}{|q|B}$

Donc le mouvement est circulaire.

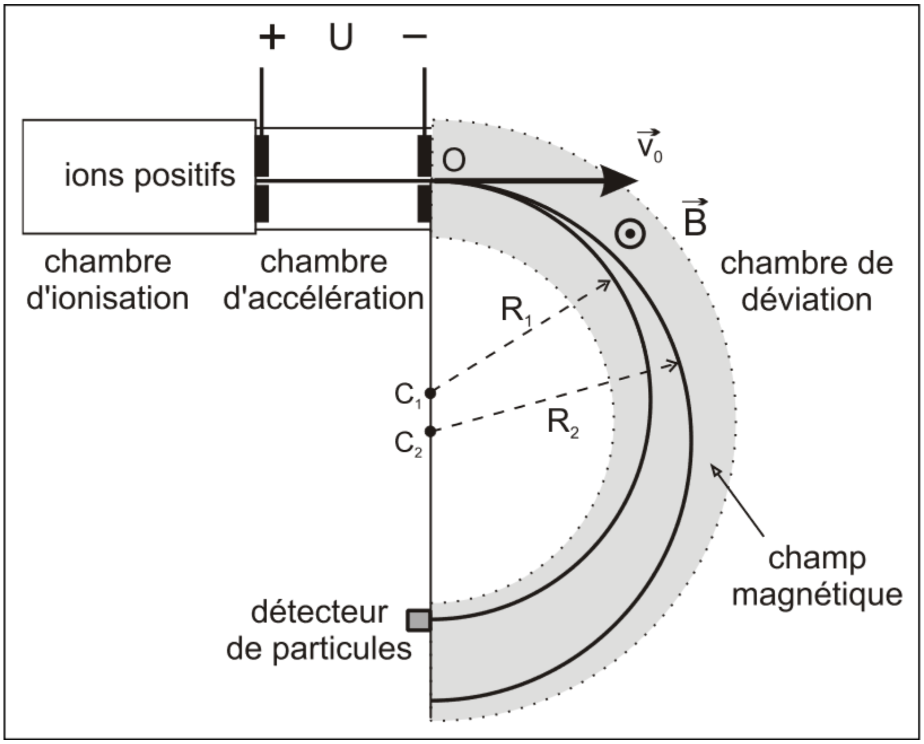
La force $\vec{f}_m$ est centripète.

La période de révolution $T = \dfrac{2\pi R}{v} \quad \Longrightarrow \quad T = 2\pi \dfrac{m}{|q|B}$

La fréquence $f = \dfrac{1}{T} \quad \Longrightarrow \quad f = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{|q|B}{m}$

Question de compréhension souvent posée
Si $\vec{v} \parallel \vec{B}$, alors $\vec{f}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B} = \vec{0}$

1.5.3 Spectrographe de masse



La chambre d'ionisation crée des ions de même charge q, mais de masses m_1 et m_2 différentes.
La chambre d'accélération accélère les particules avec une tension U tel que $v_0 = \sqrt{\frac{2|q|U}{m}}$
La chambre de déviation font tourner les particules en un demi-cercle de rayon R_1 et R_2 qui dépendent de la masse.
$R_1 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_1U}{|q|}} \quad et \quad R_2 = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2m_2U}{|q|}}$

On peut donc trouver la masse m d'une particule q en mesurant R

1.5.4 Cyclotron

voir cours page 6

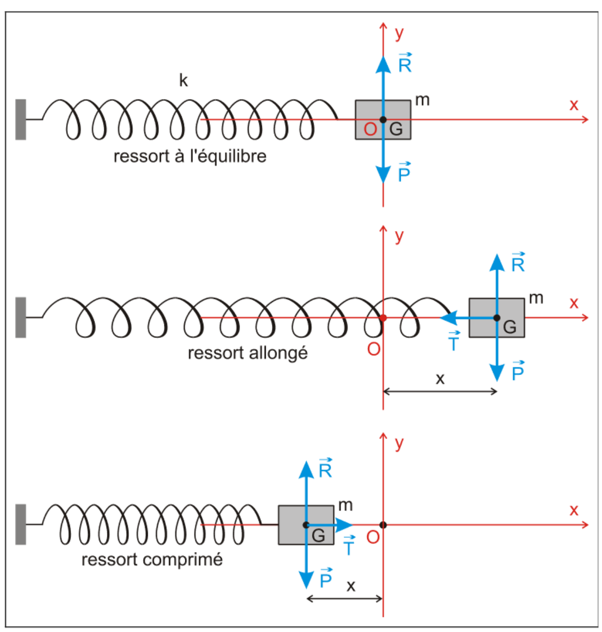
Chapter 2

Oscilliations et ondes

2.1 Oscillateurs

Définitions : voir cours

2.2 Le pendule élastique horizontal



Forces: Il y a le poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$ de la tige qui se compensent et la tension $\vec{T}$ (force de rappel) du ressort vers la position d'équilibre.

Force résultante: Selon (0x): $\sum F_x = T_x = -kx$
Donc si on lâche le corps hors de la position d'équilibre : $F_x \neq 0 \Rightarrow a \neq 0$

2.2.1 Équation différentielle du mouvement

RFD :

$$\sum F_x = T_x = ma_x \qquad\qquad \sum F_y = R - P = 0$$
$$\Leftrightarrow \quad -kx = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k}{m}x$$

On a une relation entre x(t)
et sa dérivée seconde

2.2.2 Solution de l'équation différentielle

On suppose qu'une sinusoïdale convient

$x(t) = X_m \cdot sin(\omega_0 t + \varphi)$ avec ω_0 la pulsation propre

$\Longrightarrow \frac{dx}{dt} = \dot{x} = X_m\omega_0 \cdot cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\Longrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = \ddot{x} = -X_m\omega_0^2 \cdot sin(\omega_0 t + \varphi)$

Dans l'équation différentielle:

$-X_m\omega_0^2 \cdot sin(\omega_0 t + \varphi) = -\frac{k}{m} \cdot X_m \cdot sin(\omega_0 t + \varphi)$

est vraie $\forall t \Leftrightarrow \omega_0^2 = \frac{k}{m}$

Conclusion Un pendule élastique formé d'une masse m et d'un ressort de raideur k effectue des oscillations sinuoïdales <u>libres</u>:

- pulsation propre : $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$
- période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$
- fréquence propre $f_0 = \frac{1}{T_0} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

2.2.3 Conditions initiales

Pour déterminer X_m et φ (déterminer x(t) complètement), il faut utiliser x_0 et v_0.

$$\begin{cases} x(0) = X_m \cdot sin(\varphi) = x_0 \\ v(0) = X_m \cdot \omega_0 \cdot cos(\varphi) = v_0 \end{cases}$$

Exemples où $x_0 = 0$ ou $v_0 = 0$:

$$\begin{cases} x(0) = X_m \cdot sin(\varphi) = x_0 > 0 & (1) \\ v(0) = X_m \cdot \omega_0 \cdot cos(\varphi) = 0 & (2) \end{cases}$$

On commence avec celle qui vaut 0:
(2) $\implies cos(\varphi) = 0 \implies \varphi = \pi/2 \quad$ ou $\quad \varphi = -\pi/2$

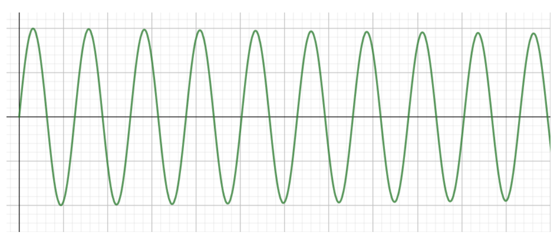
Dans (1):
$X_m \cdot sin(\pi/2) = x_0 \quad$ ou $\quad X_m \cdot sin(-\pi/2 = x_0$

X_m est toujours positif
$\Leftrightarrow \quad X_m = x_0$

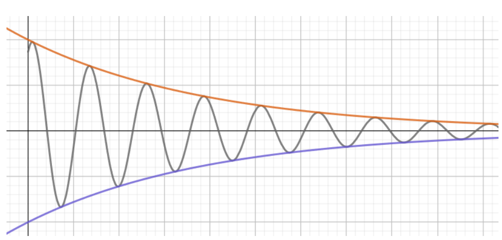
Si $x_0 = 0$ et $v_0 > 0$, alors on a $X_m = \frac{v_0}{\omega_0}$, car $v_{max} = X_m \cdot \omega_0$, et $\varphi = 0$

2.2.4 Effets du frottement (expérience réelle)

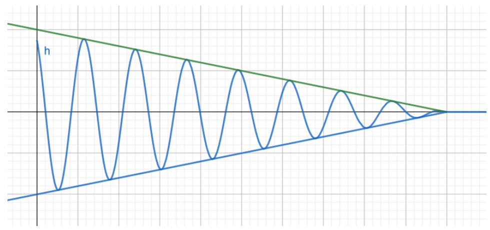
Frottement faible



Frottement fluide



Frottement solide



2.2.5 Étude énergique

Il y a deux formes d'énergies:

- $E_{pot}(t) = \frac{1}{2}kx^2(t)$
- $E_{cin}(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$

Vérification de la conservation de l'énergie mécanique

$$
\begin{aligned}
&x(t) = X_m \cdot sin(\omega_0 t + \varphi)\\
&v(t) = X_m\omega_0 \cdot cos(\omega_0 t + \varphi)\\
&E_{mec} = \frac{1}{2}k(X_m \cdot sin(\omega_0 t + \varphi))^2 + \frac{1}{2}m(X_m\omega_0 \cdot cos(\omega_0 t + \varphi))^2\\
&\quad = \frac{1}{2}kX_m^2 \cdot sin^2(\omega_0 t + \varphi) + \frac{1}{2}mX_m^2\omega_0^2 \cdot cos^2(\omega_0 t + \varphi) \quad \text{avec} \quad k = m\omega_0^2\\
&\quad = \frac{1}{2}kX_m^2(sin^2(\omega_0 t + \varphi) + cos^2(\omega_0 t + \varphi)) \quad \text{avec} \quad sin^2(\alpha) + cos^2(\alpha) = 1\\
&\quad = \frac{1}{2}kX_m^2 = \frac{1}{2}m\omega_0^2X_m^2 = \frac{1}{2}mv_{max}^2 \quad \text{Ne dépend pas de t, donc constante}
\end{aligned}
$$

Démonstration énergétique de l'équation différentielle

Dans certain cas, on ne peut pas appliquer la RFD, donc on doit utiliser la conservation de l'énergie.
Point de départ : ~~RFD~~ $\rightarrow \quad E_{mec} =$ constante

$$
\begin{aligned}
&E_{mec} = E_{pot} + E_{cin} = \text{const}\\
&\quad = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mv^2 = \text{const}
\end{aligned}
$$

La dérivée (par rapport à t) doit donc être nulle

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}(E_{mec}) = 0 \Leftrightarrow kx \cdot \dot{x} + m\dot{x} \cdot \ddot{x} = 0\\
&\qquad \Leftrightarrow \dot{x}(kx + m\ddot{x}) = 0\\
&\qquad \Leftrightarrow \dot{x} = 0 \quad \text{ou} \quad kx + m\ddot{x} = 0
\end{aligned}
$$

On étudie un mouvement, donc $\dot{x} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \ddot{x} = -\frac{k}{m}x \quad \text{qui est bien l'équation différentielle trouvée plus haut}$$

2.3 Propriétés d'une bobine parcourue par i variable

$$\boxed{u_B \quad = \quad L\frac{di}{dt}}$$

2.3.1 Définition de l'inductance d'une bobine sans résistance interne

Pour une bobine sans noyau de fer et une résistance interne négligable, on a:
Une proportionnalité entre u et $\frac{di}{dt}$. On note cette constante de proportionnalité $L = \frac{u_B}{(\frac{di}{dt})}$ et on l'appelle **inductance de la bobine** avec l'unité S.I. **henry(H)**.

2.3.2 Loi d'Ohm d'une bobine avec résistance interne

Si la résistance interne r n'est pas négligable, la tension ri s'ajoute aux bornes de la bobine, on a donc

$$\boxed{u_B = ri + L\frac{di}{dt}}$$

2.3.3 Energie magnétique emmagasinée dans une bobine

Rappel: $P = U * I$
Pour une bobine : $p = u_b * i \quad \Leftrightarrow \quad p = ri^2 + Li\frac{di}{dt}$ avec $u_B = L\frac{di}{dt}$
Ensuite, on peut dire qu'un gain d'énergie est égal $p * dt$ (dt étant un intervalle très petit) $dE_{el} = p * dt = ri^2dt + Li\frac{di}{dt} * dt = ri^2dt + Li * di$

- ri^2dt est l'énergie électrique transformée en énergie calorifique(chaleur) par effet Joule
- $Li * di$ est l'énergie électrique tranformée en énergie **magnétique** et est emmagasinée dans la bobine

On souhaite savoir l'énergie magnétique **totale**:
$E_{magn} = \int_0^E dE_{magn} = \int_0^I Li \cdot di = \left[\frac{1}{2}Li^2\right]_0^I$
$E_{magn} = \frac{1}{2}LI^2$

2.4 Oscillation dans un circuit (R)LC

2.4.1 Description et équation différentielle

On considère un circuit composé d'un condensateur branché à une bobine. On souhaite trouver une expression pour u(t) aux bornes du condensateur.
Formules à utiliser: (u la tension aux bornes de C, q la charge de C, i le courant dans le circuit, tous en fonction de t)

- Loi du condensateur: $q = C * u$ (1)
- Courant dans le circuit: $i = -\frac{dq}{dt}$ (2)
- Loi de la bobine: $u = L\frac{di}{dt}$ (3)

Remarque: Le - dans (2) indique, quand le condensateur se décharge, il y a du courant dans le circuit.

Equation différentielle
(1) et (2) donnent: $i = -C * \frac{du}{dt} \quad (4)$
En dérivant (4): $\frac{di}{dt} = -C * \frac{d^2u}{dt^2} \quad (5)$
(5) dans (3): $u = -LC\frac{d^2u}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{u} = -\frac{1}{LC}u \quad$ (E)

Résolution de (E)
L'expérience suggère:
$u(t) = U_m \cdot cos(\omega_0 t + \varphi)$
$\ddot{u}(t) = -\omega_0^2 \cdot U_m \cdot cos(\omega_0 t + \varphi)$

Dans (E), on trouve que l'égalité est vraie $\forall t$ ssi. $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$.

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

U_m et φ dépendent de conditions initiales (voir subsection 2.2.3 Conditions initiales)

2.4.2 Approche énergetique

Si on suppose R=0, alors il y a conservation d'énergie dans le circuit LC
Rappel :

- Energie dans un condensateur: $E_{elec} = \frac{1}{2}Cu^2$ (1)
- Energie dans une bobine : $E_{magn} = \frac{1}{2}Li^2$ (2)

$E_{tot} = E_{elec} + E_{magn} = \text{cnst.} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2 = \text{cnst.}$
En dérivant les deux côtés de l'équation:
$\frac{1}{2}C(2u) \cdot \dot{u} + \frac{1}{2}L(2i) \cdot \dot{i} = 0$ On utilise $i = -C\dot{u}$ et $\dot{i} = -C\ddot{u}$
$\Leftrightarrow \quad Cu\dot{u} + LC^2\dot{u}\ddot{u} = 0$ On suppose $\dot{u} \neq 0$, car mouvement
$\Leftrightarrow \quad \ddot{u} = -Cu \cdot \frac{1}{LC^2} = -\frac{1}{LC}u \quad$ (E)

On note que $E_{tot} = \frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$
De plus, avec cette dernière relation, on peut trouver que
$\frac{1}{2}LI_m^2 = \frac{1}{2}CU_m^2 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{\frac{L}{C}}$

2.5 Propagation d'une onde mécanique

2.5.1 Plusieurs définitions

- Milieu élastique: un matérial qui se laisse comprimer, déformer ou étirer réversiblement
- Signal mécanique: une déformation de courte durée d'un milieu élastique qui se déplace dans le milieu. Après le passage, le milieu reprend son état initial
- Onde mécanique: une déformation périodique d'un milieu élastique qui se propage
- Source: Le point de départ d'un signal/onde
- Direction / Sens de propagation: direction / sens dans laquelle se déplace le signal/onde
- Signal/onde transerval: sens de déformation et sens de propagation sont perpendiculaire (ex. corde)
- Signal/onde longitudinal: même sens de déformation et sens de propagation (ex. ressort qui se comprime et s'étire)

On note qu'une onde transporte de l'énergie, et de la quantité de mouvement sans transport de matière

La célérité c est la vitesse de propagation. Pour parcourir une distance Δx, le signal prend un temps $\Delta t = \frac{\Delta x}{c}$
La célérité d'un signal dans une corde depend de la tension appliquée F_T à la corde et la masse linéique $\mu = \frac{m_{corde}}{L_{corde}}$

$$\boxed{c = \sqrt{\frac{F_T}{\mu}}}$$

2.5.2 Propagation d'une onde sinusoïdale le long d'une corde

Dans le temps

On note la position de la source du signal:

$$\boxed{y_s(t) = Y_0 \sin(\omega t + \varphi) = Y_0 \sin(\frac{2\pi}{T} t + \varphi)}$$

Dans l'espace

Le mouvement sinusoïdal se propage avec la célérité c. Après t = T, la période du signal, la source a effectué une oscillation complète et le signal s'est propagé d'une longueur d'onde λ

$$\lambda = c \cdot T$$

c en m/s, période T en s et λ en m

2.5.3 Equation d'onde

On souhaite trouver une équation qui décrit le mouvement d'un point M sur la corde à un instant t $y_M(x,t)$

Or le point M se trouve à une abscisse x, il repète le mouvement de la source avec un **retard** de $\Delta t = \frac{x}{c}$.
Donc $y_M(x,t) = y_S(t - \Delta t)$ et on peut remplacer Δt par $\frac{x}{c}$

$y_M(x,t) = Y_0 \sin(\frac{2\pi}{T}(t - \frac{x}{c}))$
$y_M(x,t) = Y_0 \sin(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{cT}))$ avec: $\lambda = cT$
$y_M(x,t) = Y_0 \sin(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}))$

$$\boxed{y_M(x,t) = Y_0 \sin(2\pi \frac{t}{T} - 2\pi \frac{x}{\lambda})}$$

On note une double périodicité

- Une périodicité temporelle, car le mouvement se répète pour $t' = t + T$
- Une périodicité spatiale, car le mouvement se répète pour $x' = x + \lambda$

On décrit $(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda})$ comme étant la phase de M. La phase de S est $(2\pi\frac{t}{T})$ et $(2\pi\frac{x}{\lambda})$ est le déphasage entre les deux points

- Si deux points M et N sont séparés d'une distance $d = n \cdot \lambda$ alors ils ont le même mouvement
  Ils sont **en phase**

- Si deux points M et N sont séparés d'une distance $d = \frac{\lambda}{2} + n \cdot \lambda$ alors ils ont un mouvement opposé
  Ils sont **en opposition de phase**

2.6 Interférence de diffraction d'ondes mécanique

2.6.1 Superposition et conditions d'interférences

Si deux ondes **de même nature** atteignent un point M, l'élongation résultante est la somme algébrique (qui prend compte des élongations vers le bas, -1 p. ex.) des élongations instantanées

$y_M(t) = y_{1M}(t) + y_{2M}(t)$

Conditions d'interférences

- si on a **2 sources** de même fréquence synchrones(= en phase) ou cohérentes (=déphasage constant) qui émettent des ondes qui se superposent
- si on a **1 source** qui émet une onde **réfléchie** à l'autre extrémité du milieu, car l'onde réfléchie à la même fréquence que l'onde "originale" et elles se superposeront

2.6.2 Réflexion d'un signal à une extrémité d'une corde

- si l'extrémité de la corde est fixée, la réflexion change de signe
- si l'extrémité de la corde est libre, la réflexion ne change pas de signe

Pour une extrémité fixe, le changement de signe correspond à un déphasage de π

2.6.3 Expérience de Melde

Soit une corde tendue, l'extrémité A est animée par un mouvement vibratoire sinusoïdal. L'extrémité B est fixe, au contact d'une poulie, qui donc crée une onde réfléchie de même fréquence et de même amplitude. On peut changer la longeur AB, la tension F, et la frequence f du vibreur.
Pour une fréquence qui convient, on obtient des fuseaux de longueur $\frac{\lambda}{2}$. On obtient des ondes stationnaires. Deux fuseaux voisins sont en opposition de phase.

- Les ventres (endroits avec amplitude maximale) sont des endroits où les ondes sont en phase, il y a **une interférence constructive**
- Les noeuds (endroits avec amplitude minimale) sont des endroits où les ondes sont en opposition de phase, il y a **une interférence destructive**

Formule pour la fréquence et instruments à cordes

Soit la corde AB de longueur L, elle porte n fuseaux de longueur $\frac{\lambda}{2}$

$$L = n \cdot \frac{\lambda}{2} = n \cdot \frac{cT}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2L = n \cdot c \cdot T$$
$$\Leftrightarrow \quad \boldsymbol{f} = \frac{1}{T} = \frac{n \cdot c}{2L}$$

$$\boxed{f = \frac{n}{2L} \cdot \sqrt{\frac{F}{\mu}}}$$

Pour augmenter f, il faut donc 1. augmenter F; 2. diminuer μ (corde plus fine); 3. diminuer L (raccourcir la corde)

Etude théorique

Soit le mouvement de la source A: $y_A(t) = Y_0 \sin(2\pi \frac{t}{T})$
Un point M d'abscisse x, mesuré depuis l'extrémité B, subit le mouvement de

- l'onde: $y_{direct}(t) = Y_0 \sin(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{L-x}{\lambda}))$ avec $L - x = AM$
- la réfléxion: $y_{reflx} = Y_0 \sin(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{L+x}{\lambda}))$ avec $L + x = AB + BM$

Donc l'élongation de M est la somme des deux ondes: $y_M = y_{direct} + y_{reflx}$
On utilise des formules trigonométriques pour simplifier le résultat. (cf. formulaire trigonométrique)
Ici, on utilise : $\sin p + \sin q = 2 * \sin \frac{p+q}{2} \cdot \cos \frac{p-q}{2}$
On transforme la somme:

$y_M(x;t) = 2Y_0 \cdot \sin(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda}) + \frac{\pi}{2}) \cdot \cos(2\pi \frac{x}{\lambda} - \frac{\pi}{2})$ On simplifie les $\frac{\pi}{2}$ avec le form. trig.
$\Rightarrow \quad y_M(x;t) = 2Y_0 \cdot \cos(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{L}{\lambda})) \cdot \sin(2\pi \frac{x}{\lambda})$

$$y_M(x;t) = A(x) \cdot \cos(2\pi \frac{t}{T} + \Phi)$$

avec: $\Phi = -2\pi \frac{L}{\lambda}$ et $A(x) = 2Y_0 \cdot \sin(2\pi \frac{x}{\lambda})$

Remarque: x est mesuré depuis l'extrémité fixe, pas depuis la source !!

- Les noeuds se trouvent aux endroits où
  $A(x) = 0 \ldots x = k\frac{\lambda}{2}$ avec $k \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq L$
- Les ventres se trouvent aux endroits où
  $A(x) = \pm 2Y_0 \ldots x = (2k' + 1) \cdot \frac{\lambda}{4}$ avec $k' \in \mathbb{N}$ et $0 \leq x \leq L$

2.6.4 Interférence dans un milieu à 2 dimension

voir cours page 6 Même raisonnement que pour la corde, un point M subit la somme de deux élongations différentes y_1 et y_2 de même fréquence

- $y_{M,1}(t) = Y_0 \sin(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{d_1}{\lambda}))$ avec $d_1 = O_1M$
- $y_{M,2}(t) = Y_0 \sin(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{d_2}{\lambda}))$ avec $d_2 = O_2M$

Cette fois si, on dit qu'il y a une interférence constructive si les deux phases sont égales:
$2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{d_1}{\lambda} = 2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{d_2}{\lambda} + n * 2\pi$
$\frac{d_2}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda} = n$
$\delta = d_2 - d_1 = n * \lambda \quad$ avec: $n \in \mathbb{Z}$
Pareillement, on dit qu'il y a une interférence destructive si les deux phases sont opposées:
$2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{d_1}{\lambda} = 2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{d_2}{\lambda} + \pi + n' * 2\pi$
$\frac{d_2}{\lambda} - \frac{d_1}{\lambda} = \frac{1}{2} + n'$
$\delta = d_2 - d_1 = \frac{\lambda}{2} + n' * \lambda \quad$ avec: $n \in \mathbb{Z}$

Amplitude maximale: $\delta = n * \lambda$

Amplitude minimale: $\delta = \frac{\lambda}{2} + n * \lambda$

voir cours page 8

Note de théorie dite en cours, mais pas écrite Si les sources sont synchrones (même phases), alors 1. il y a toujours un ventre (l'amplitude maximale) au milieu des deux sources.
2. Si on souhaite avoir une amplitude minimale au milieu, il faut que les sources soient en opposition de phase, alors seulement il peut y avoir un noeud (amplitude minimale)

Interférence en 3 dimensions

Si on a deux sources dans l'espace, on constate le même schéma d'interférence. C'est toujours $\delta = d_2 - d_1$ qui détermine si l'amplitude est maximale ou minimale

2.6.5 Diffranctions d'ondes

voir cours page 10

2.7 Interférence lumineuse

2.7.1 Double fentes de Young

voir cours page 1+2

2.7.2 Etude théorique

voir cours page 3 pour image

- Soit D la distance entre le plan des fentes et le plan de l'écran
- Soit a la distance entre les deux fentes
- Soit x l'abscisse d'un point M sur l'ecran

On s'intéresse de nouveau à $\delta = d_2 - d_1$. Avec Pythagore, on obtient:

- $d_1^2 = O_1M^2 = O_1K^2 + KM^2 \quad \Rightarrow \quad d_1^2 = D^2 + (x - \frac{a}{2})^2$
- $d_2^2 = O_2M^2 = O_2L^2 + LM^2 \quad \Rightarrow \quad d_2^2 = D^2 + (x + \frac{a}{2})^2$

On applique une différence de carrés:
$d_2^2 - d_1^2 = D^2 + (x + \frac{a}{2})^2 - D^2 - (x - \frac{a}{2})^2$
$(d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = (x^2 + \frac{a^2}{4} + ax) - (x^2 + \frac{a^2}{4} - ax)$
$(d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = 2ax$

Or, D est très grand par rapport à a et x (a et x sont de l'ordre du mm, D est de l'ordre du m). On peut donc supposer que O_1M et O_2M sont peu inclinés et donc écrire que: $d_1 + d_2 \approx 2D$
On obtient $(d_2 - d_1)(d_2 + d_1) = 2ax \quad \Rightarrow$

$$\boxed{\delta = \frac{ax}{D}}$$

Position des franges lumineuses donc $\delta = k \cdot \lambda \quad k \in \mathbb{Z}$
En utilisant la formule établie au-dessus:

$$\boxed{x = k\frac{\lambda D}{a}}$$

On constate que le milieu est une frange brillante.

Position des franges obscures donc $\delta = \frac{\lambda}{2} + k' \cdot \lambda \quad k' \in \mathbb{Z}$
En utilisant la formule établie au-dessus:

$$\boxed{x = \frac{2k'+1}{2} \cdot \frac{\lambda D}{a}}$$

L'interfrange et longueur d'onde On définit l'interfrange comme la distance entre deux franges lumineuses (obscures) consécutives.
Un calcul détaillé serait:
$i = (k+1)\frac{\lambda D}{a} - k\frac{\lambda D}{a} = k\frac{\lambda D}{a} + \frac{\lambda D}{a} - k\frac{\lambda D}{a}$

$$\boxed{i = \frac{\lambda D}{a}}$$

i augmente avec la longueur d'onde, avec D, et i augmente si a diminue.
Note Les longueurs d'ondes visibles à l'homme sont celle du bleu (400 nm), la plus énergétique, jusqu'à celle du rouge (800 nm), la moins énergétique.
Donc l'interfrange d'une lumière rouge est plus grande que la lumière bleue