Tarea 1. Cálculo Diferencial e Integral IV

Estudiante: Juan Armando Parra Flores **Fecha:** 4 de febrero de 2021

Ejercicio 1

3-2 Sea $f : A \to \mathbb{R}$ integrable y sea $g = f$ excepto por una cantidad finita de puntos. Demuestra que g es integrable y que $\int_A f = \int_A g$.

Demostración. Sean $D_g = \{x \in A : g \text{ es discontinua en } x\}$, $D_f = \{x \in A : f \text{ es discontinua en } x\}$ y $D = \{x \in A : f(x) \neq g(x)\}$.

Como f es integrable, D_f tiene medida 0. Por otra parte D al ser finito tiene medida 0 también. Esto implica que $D_f \cup D$ tiene medida 0, pues es el resultado de una unión finita de conjuntos con medida 0.

Sea $x_0 \in D_g$. Si $f(x_0) \neq g(x_0)$, entonces $x \in D$. En cambio, si $f(x_0) = g(x_0)$ hay que probar que f es discontinua en x_0. Dada la discontinuidad de g, existe $\varepsilon > 0$ tal que para toda $\delta > 0$, existe $x \in A$ con

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{pero} \quad |g(x) - g(x_0)| \geq \varepsilon.$$

En particular, por ser D un conjunto finito, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que para toda $n \geq N$ hay una $x \in A \setminus D$ con $\|x - x_0\| < \frac{1}{n}$, pero con $|g(x) - g(x_0)| \geq \varepsilon$. Pero en este caso, como $x_0, x \notin D$, se tiene que $|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon$. Entonces f es discontinua en x_0. Esto implica que $x \in D_f$.

De lo anterior $D_g \subseteq D \cup D_f$, y entonces D_g tiene medida 0. Así que g también es integrable.

■

3-3 Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ integrables.

(a) Para cada partición P de A y subrectángulo S, demuestra que

$$m_S(f) + m_S(g) \leq m_S(f+g) \quad \text{y} \quad M_S(f+g) \leq M_S(f) + M_S(g)$$

y por lo tanto

$$L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) \quad \text{y} \quad U(f+g,P) \leq U(f,P) + U(g,P).$$

Demostración. Consideremos el conjunto

$$C = \{f(x_1) + g(x_2) : x_1, x_2 \in S\}.$$

Sea $y \in C$. Deben existir entonces $x_1, x_2 \in S$ tal que $y = f(x_1) + g(y_2)$. Sin embargo, por definición se tiene que

$$\begin{aligned} m_S(f) &\leq f(x_1) \\ m_S(g) &\leq g(x_2). \end{aligned}$$

Esto nos permite concluir que $m_S(f) + m_S(g) \leq f(x_1) + g(x_2) = y$. Dado que escogimos a y de forma arbitraria, se tiene que $m_S(f) + m_S(g)$ es conta inferior de C. Entonces

$$m_S(f) + m_S(g) \leq \inf C.$$

De forma análoga se prueba que $M_S(f) + M_S(g) \geq \sup C$. Por otra parte, es cierto que $D = \{f(x) + g(x) : x \in S\} \subseteq C$, así que

$$\begin{aligned} m_S(f+g) = \inf D &\geq \inf C \geq m_S(f) + m_S(g) && (1) \\ M_S(f+g) = \sup D &\leq \sup C \leq M_S(f) + M_S(g). && (2) \end{aligned}$$

Por la desigualdad en (1), se obtiene

$$[m_S(f) + m_S(g)] \operatorname{vol}(S) \leq m_S(f+g)\operatorname{vol}(S),$$

Por lo tanto, sumando sobre todos los subrectángulos S definidos por la partición P, concluimos que

$$\begin{aligned} L(f,P) + L(g,P) &= \sum_S m_S(f)\operatorname{vol}(S) + \sum_S m_S(g)\operatorname{vol}(S) \\ &\leq \sum_S m_S(f+g)\operatorname{vol}(S) \\ &= L(f+g,P). \end{aligned}$$

De forma análoga, por la desigualdad en (2) vemos que

$$[M_S(f) + M_S(g)] \operatorname{vol}(S) \geq M_S(f+g)\operatorname{vol}(S),$$

con lo cual al sumar sobre los subrectángulos de P

$$\begin{aligned} U(f,P) + U(g,P) &= \sum_S M_S(f)\operatorname{vol}(S) + \sum_S M_S(g)\operatorname{vol}(S) \\ &\geq \sum_S M_S(f+g)\operatorname{vol}(S) \\ &= U(f+g,P). \end{aligned}$$

■

(b) Demuestra que $f+g$ es integrable y $\int_A (f+g) = \int_A f + \int_A g$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$. Usando la integrabilidad de f y de g, existen particiones P' y P'' tales que $U(f,P') - L(f,P') < \frac{\varepsilon}{2}$, y $U(g,P'') - L(g,P'') < \frac{\varepsilon}{2}$. En particular, esto es válido para $P = P'' \cup P'$. Sumando las desigualdades obtenidas en el inciso anterior, para cada partición P sucede que

$$U(f+g,P) + L(f,P) + L(g,P) \leq L(f+g,P) + U(f,P) + U(g,P).$$

Intercambiando algunos términos (sumando inversos aditivos) obtenemos

$$U(f+g,P) - L(f+g,P) \leq [U(f,P) - L(f,P)] + [U(g,P) - L(g,P)]\,.$$

Por la integrabilidad de f, g, para cada $\varepsilon > 0$, existirá una partición P, tal que

$$\begin{aligned} U(f+g,P) - L(f+g,P) &\leq [U(f,P) - L(f,P)] + [U(g,P) - L(g,P)] \\ &= \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

lo cual prueba que $f+g$ es integrable.

Por el inciso anterior, para cualquier partición P sucede que

$$U(f,P) + U(g,P) \geq U(f+g,P) \geq \int_A (f+g) \geq L(f+g,P) \geq L(f,P) + L(g,P),$$

así que

$$U(f,P) + U(g,P) \geq \int_A (f+g) \tag{3}$$

Por otro lado tenemos las desigualdades

$$\int_A f \geq L(f,P) \quad \text{y} \quad \int_A g \geq L(g,P),$$

las cuales al ser sumadas implican que

$$\int_a f + \int_A g \geq L(f,P) + L(g,P). \tag{4}$$

Las desigualdades (3) y (4) nos permiten concluir que

$$U(f,P) + U(g,P) + \int_A f + \int_A g \geq \int_A (f+g) + L(f,P) + L(g,P).$$

y luego

$$(U(f,P) - L(f,P)) + (U(g,P) - L(g,P)) \geq \int_A (f+g) - \left(\int_A f + \int_A g\right)$$

Así que dada $\varepsilon > 0$, podemos tomar una partición que es un refinamiento de particiones válidas para f y g, la cual asegura que

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad U(g,P) - L(g,P) < \frac{\varepsilon}{2}$$

con lo cual concluimos que

$$\int_A (f+g) - \left(\int_A f + \int_A g\right) < \varepsilon.$$

El hecho de que esto sea cierto para toda $\varepsilon > 0$ concluye la demostración.

■

(c) Para cualquier constante c, demuestra que $\int_A cf = c\int_A f$.

Demostración.

$\blacksquare$

3-5 Sean $f, g : A \to \mathbb{R}$ integrables y suponga que $f \leq g$. Demuester que $\int_A f \leq \int_A g$.

Demostración.

$\blacksquare$

3-6 Si $f : A \to \mathbb{R}$ es integrable, demuestra que $|f|$ es integrable y que $\left|\int_A f\right| \leq \int_A |f|$.

Demostración.

$\blacksquare$

3-9 (a) Demuestra que un conjunto no acotado no puede tener contenido 0.

Demostración. Sea $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto con contenido 0. Entonces dada una $\varepsilon > 0$, existe una cantidad finita de rectángulos $R_1, \ldots, R_k \subset \mathbb{R}^n$ tales que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} R_i$$

y $\sum_{i=1}^{k} \operatorname{vol}(R_i) < \varepsilon$.. Lo importante es que cada rectángulo R_i es un conjunto acotado. Dado que $\bigcup_i R_i$ es una unión finita de rectángulos, también es un conjunto acotado.

Esto se debe a lo siguiente. Como cada R_i es un conjunto acotado, existe $M_i > 0$ tal que $R_i \subset B_{M_i}(0)$. Si definimos como $M = \text{máx}\{M_1, \ldots, M_k\}$, tenemos que M acota a la unión de los rectángulos, pues si $x \in \bigcup_i R_i$, $x_i \in R_j$ para algún $j(1 \leq j \leq k)$, implicando que $\|x\| \leq M_j \leq M$. Entonces, como $\bigcup R_i$ es un conjunto acotado, también lo es A.

Probar que "el conjunto A tenga contenido 0, hace necesario que sea acotado" es equivalente a probar que "si A no es acotado, entonces no tiene contenido 0".

■

(b) Da un ejemplo de un conjunto cerrado con medida cero, el cual no tiene contenido 0.

Solución. Cualquier conjunto numerable no acotado. Por ejemplo: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$. Como son numerables, tienen medida 0, como vimos en clase. Sin embargo, al no ser acotados no pueden tener contenido 0, por el inciso anterior.

■

3-10 (a) Si C es un conjunto de contenido 0, demuestra que la frontera de C tiene contenido 0.

Demostración.

$\blacksquare$

(b) Da un ejemplo de un conjunto acotado C de medida 0 tal que su frontera no tiene medida 0.

Solución. El conjunto $[0,1] \cap \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ es un conjunto acotado y numerable. Entonces tiene medida 0. Sin embargo $\partial([0,1] \cap \mathbb{Q}) = [0,1]$, el cual es un conjunto que no tiene medida 0.

$\blacksquare$

3-16 Da un ejemplo de un conjunto acotado C con medida 0, tal que $\int_A \chi_C$ no existe.

Solución. Si $A = [0,1]$ y $C = \mathbb{Q} \cap [0,1]$, claramente C tiene medida 0, y es acotado. Sin embargo,

$$\chi_C(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta función es discontinua en cada punto de $[0,1]$, lo cual impide su integrabilidad.

$\blacksquare$

3-18 Si $f : A \to \mathbb{R}$ es no negativa y $\int_A f = 0$, demuestra que $\{x : f(x) \neq 0\}$ tiene medida 0. ***Hint:*** Demuestra que $L(f, P) = 0$ para toda partición P. Usa el problema 3-8.

Demostración. Sea P una partición de A, y sea S un subrectángulo definido por la partición. Por la no negatividad de f, debe suceder que $0 \leq f(x)$, para toda $x \in S$. Por lo tanto 0 es cota inferior de $\{f(x) : x \in S\}$, así que $0 \leq m_S(f)$. Como $\text{vol}(S) > 0$, tenemos que $0 \leq m_S(f)\text{vol}(S)$. Como esto sucede para cada una de los subrectángulos, debe tenerse

$$0 \leq \sum_S m_S(f)\text{vol}(S) = L(f, P) \leq \int_A f = 0.$$

De esta manera $L(f, P) = 0$, para toda P.

$\blacksquare$

3-28 Usa el teorema de Foubini para dar una prueba sencilla de que $D_{1,2}f - D_{2,1}f$ si estas son continuas. ***Hint:*** Si $D_{1,2}f(a) - D_{2,1}f(a) > 0$, hay un rectángulo A que contiene a a tal que $D_{1,2}f - D_{2,1}f > 0$ en A.

Ejercicio 2

Usa el ejercicio 3-4 (no es necesario que lo pruebes) para demostrar que la definición de

$$\int_C f := \int_A \chi_C \cdot f$$

no depende del rectángulo A que contenga a C.