

# TAREA 3. ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

**Estudiante:** Juan Armando Parra Flores

**Fecha:** 15 de febrero de 2021

---

1. Encuentra la solución general de la ecuación diferencial dada

$$2t \operatorname{sen} y + y^3 e^t + (t^2 \cos y + 3y^2 e^t) \frac{dy}{dt} = 0$$

**Solución.** Como típicamente se escribe, identificamos las funciones  $M(t, y) = 2t \operatorname{sen} y + y^3 e^t$  y a  $N(t, y) = t^2 \cos y + 3y^2 e^t$ . Notemos que  $\frac{\partial M}{\partial y} = 2t \cos y + 3y^2 e^t = \frac{\partial N}{\partial t}$ , por lo que debe existir una función  $\Phi$  tal que  $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = M$  y  $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N$  (Según el libro, la verdad no entendí esa parte de la demostración). Integrando con respecto a  $t$  obtenemos

$$\begin{aligned} c = \Phi(t, y) &= \int M(t, y) dt = \int 2t \operatorname{sen} y + y^3 e^t dt \\ &= t^2 \sin y + y^3 e^t + h(y), \quad \text{para alguna función } h. \end{aligned}$$

Por otro lado, haciéndolo con respecto a  $y$  se tiene

$$\begin{aligned} c = \Phi(t, y) &= \int N(t, y) dy = \int t^2 \cos y + 3y^2 e^t dy \\ &= t^2 \sin y + y^3 e^t + k(t), \quad \text{para alguna función } k. \end{aligned}$$

Luego  $h(y) = k(t)$ . Derivando con respecto de  $y$  vemos que  $h'(y) = 0$ , por lo que  $h$  es una constante. Como  $\Phi$  es constante y la solución general de la ecuación es

$$\Phi(t, y) = t^2 \sin y + y^3 e^t + C, \quad \text{para alguna } C \in \mathbb{R},$$

debe suceder que

$$t^2 \sin y + y^3 e^t = C' \quad \text{para alguna } C' \in \mathbb{R}.$$

■

2. Resuelve el problema de valor inicial,

$$3ty + y^2 + (t^2 + ty) \frac{dy}{dt} = 0, \quad y(2) = 1.$$

**Solución.** Expresamos como  $M(t, y) = 3ty + y^2$  y a  $N(t, y) = t^2 + ty$ . Esta ecuación diferencial no es exacta desde que  $\frac{\partial M}{\partial y} = 3t + 2y$  y  $\frac{\partial N}{\partial t} = 2t + y$ . Pero aún podemos encontrar un factor integrante. Supongamos que existe  $\mu$ , función de  $t$  y de  $y$  tal que

$$\frac{\partial}{\partial y} [\mu(t, y)M(t, y)] = \frac{\partial}{\partial t} [\mu(t, y)N(t, y)],$$

o bien

$$M \frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Si además  $\mu$  es sólo función de  $t$ , su derivada parcial con respecto a  $y$  se anula, y nos deja con

$$\mu \frac{\partial M}{\partial y} = N \frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Esto implica que

$$N \frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t} \right).$$

Si  $\mu \neq 0$  siempre podemos ver que

$$\begin{aligned} \frac{1}{\mu} \frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \\ &= \frac{3t + 2y - 2t - y}{t^2 + ty} \\ &= \frac{t + y}{t(t + y)} \\ &= \frac{1}{t}. \end{aligned}$$

Esta ecuación es más sencilla, pues al integrar con respecto a  $t$  obtenemos que  $\mu(t) = t$ . Entonces tenemos que

$$\begin{aligned} 0 &= \mu(t) \left( 3ty + y^2 + (t^2 + ty) \frac{dy}{dt} \right) \\ &= 3t^2y + ty^2 + (t^3 + t^2y) \frac{\partial y}{\partial t} \end{aligned}$$

es una ecuación diferencial exacta e identificamos  $M(t, y) = 3t^2y + ty^2$  y a  $N(t, y) = t^3 + t^2y$ . Luego, integrando con respecto a  $t$  tenemos

$$\begin{aligned} \Phi(t, y) &= \int M(t, y) dt + h(y), \quad \text{para alguna función } h, \\ &= \int 3t^2y + ty^2 dt + h(y) \\ &= t^3y + \frac{t^2y^2}{2} + h(y). \end{aligned}$$

Derivando con respecto a  $y$  obtenemos que

$$h'(y) + t^3 + t^2y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N(t, y) = t^3 + t^2y.$$

Por lo tanto  $h'(y) = 0$ , y  $h$  es constante. Como  $\Phi(t, y) = c \in \mathbb{R}$ , tenemos que la solución general de la ecuación diferencial es

$$c = t^3y + \frac{t^2y^2}{2}, \quad \text{con } c \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo, la condición inicial nos dice que

$$c = 2^3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 10.$$

Por lo tanto, la solución de esta ecuación diferencial es

$$10 = t^3y(t) + \frac{t^2y^2(t)}{2}.$$

■

3. Demuestra que toda ecuación separable de la forma  $M(t) + N(y)\frac{dy}{dt} = 0$  es exacta.

**Demostración.** Para que sea exacta debe cumplirse que  $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$ . Pero esto es cierto desde que la dependencia de  $M$  es únicamente de  $t$  y la de  $N$  es sobre  $y$ . Por lo tanto

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

Todas las ecuaciones de esa forma son exactas.

■