Tarea 2. Cálculo Diferencial e Integral IV

Estudiante: Juan Armando Parra Flores **Fecha:** 14 de febrero de 2021

Ejercicio 1

3-26. Sea $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrable y no negativa, y sea $A_f = \{(x, y) : a \leq x \leq b \text{ y } 0 \leq y \leq f(x)\}$. Demuestra que A_f es medible de Jordan, y tiene área $\int_a^b f$.

Demostración. La frontera de A_f es

$$\begin{aligned} \partial A_f = &\{(a, y) : 0 \leq y \leq f(a)\} \cup \{(b, y) : 0 \leq y \leq f(b)\} \\ &\cup \{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\} \cup \{(x, 0) : a \leq x \leq b\}. \end{aligned}$$

Sea $\varepsilon > 0$, si $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{2f(a)+4}$, el rectángulo $R = [a - \delta, a + \delta] \times [-1, f(a) + 1]$ contiene al conjunto $\{(a, y) : 0 \leq y \leq f(a)\}$ y tiene volumen $\text{vol}(R) = 2\delta(f(a) + 2) = \delta(2f(a) + 4) < \varepsilon$. Por lo tanto $\{(a, y) : 0 \leq y \leq f(a)\}$ tiene contenido cero.

De forma similar, tomando $\delta < \frac{\varepsilon}{2f(b)+4}$ el conjunto $\{(b, y) : 0 \leq y \leq f(b)\}$, está contenido en el rectángulo $[b - \delta, b + \delta] \times [-1, f(b) + 1]$, con volumen menor que ε. Así que este conjunto también tiene contenido 0.

El conjunto $\{(x, f(x)) : a \leq x \leq b\}$ es la gráfica de una función integrable, por cual tiene contenido 0. La función constante 0 también es integrable, por lo que su gráfica $\{(x, 0) : a \leq x \leq b\}$ tiene contenido 0.

Elc onjunto ∂A_f es la unión finita de conjuntos de contenido 0. Por lo tanto tiene contenido cero y A_f es medible de Jordan con área

$$\begin{aligned} \text{area}(A_f) &= \int_{A_f} 1 = \int_{[a,b]\times[0,\text{máx} f]} \chi_{A_f} \\ &= \int_a^b \int_0^{\text{máx} f} \chi_{A_f}(x, y) dy\, dx \\ &= \int_a^b \left(\int_0^{f(x)} \chi_{A_f}(x, y) dy + \int_{f(x)}^{\text{máx} f} \chi_{A_f}(x, y) dy \right) dx. \end{aligned}$$

Pero siempre que $x \in [a, b]$ cuando $y > f(x)$, $\chi_{A_f}(x, y) = 0$, y su integral es 0, y cuando $0 \leq y \leq f(x)$, $\chi_{A_f}(x, y) = 1$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \text{area}(A_f) &= \int_a^b \int_0^{f(x)} \chi_{A_f}(x, y) dy\, dx \\ &= \int_a^b \int_0^{f(x)} 1\, dy\, dx \\ &= \int_a^b x|_0^{f(x)} dx \\ &= \int_a^b f(x)\, dx. \end{aligned}$$

■

3-32. Sea $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ continua, y subponga que $D_2 f$ es continua. Sea $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx$. Demuestre la regla de Leibniz: $F'(y) = \int_a^b D_2 f(x,y)dx$.

Hint: $F(y) = \int_a^b f(x,y)dx = \int_a^b \left(\int_c^y D_2 f(x,t)dt + f(x,c)\right) dx$. (La prueba mostrará que la continuidad de $D_2 f$ podría remplazarse por una hipótesis considerablemente más debil).

Demostración. Por el teorema fundamental del cálculo, para cada $x \in [a,b]$ existe una constante $K_x \in \mathbb{R}$, tal que como función de y, $f(x,y) = \int_c^y D_2 f(x,t)\,dt + K_k$. Tomando $y = c$ podemos ver que $K + 0 = f(x,c)$. Por lo tanto $f(x,y) = \int_c^y D_2 f(x,t)\,dt + f(x,c)$. Entonces

$$\begin{aligned} F(y) &= \int_a^b \left(\int_c^y D_2 f(x,t)\,dt + f(x,c) \right) dx \\ &= \int_a^b \int_c^y D_2 f(x,t)\,dt\,dx + \int_a^b f(x,c)\,dx. \end{aligned}$$

Observemos que la y es fija y no está en función de t ni de x. Por lo tanto $F(y)$ está definida por el rectángulo de integración $[a,b] \times [c,y]$, por lo que el teorema de Foubini nos permite intercambiar el orden de integración y ver que

$$F(y) = \int_c^y \int_a^b D_2 f(x,t)\,dx\,dt + \int_a^b f(x,c)\,dx.$$

Por el teorema fundamental del cálculo, al derivar con respecto a la variable y, obtenemos

$$F'(y) = \int_a^b D_2 f(x,t)\,dt,$$

que era lo que queríamos probar.

■

3-33. Si $f : [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ es continuoa y $D_2 f$ es continua, defina $F(x,y) = \int_a^x f(t,y)dt$.

(a) Encuentra $D_1 F$ y $D_2 F$.

Solución. Por el ejercicio anterior, si se fija x,

$$D_2 F(x,y) = \int_a^x D_2 f(t,y)\,dt.$$

Por el teorema fundamental del cálculo, cuando y está fija,

$$\begin{aligned} D_1 F(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \int_a^x f(t,y)\,dt \\ &= f(x,y). \end{aligned}$$

■

(b) Si $G(x) = \int_a^{g(x)} f(t,x)dt$, encuentra $G'(x)$.

Solución. Sea $F(x,y) = \int_a^x f(t,y)\,dt$, y notemos que $F(g(x),x) = G(x)$. Por la regla de la cadena en espacios más grandes,

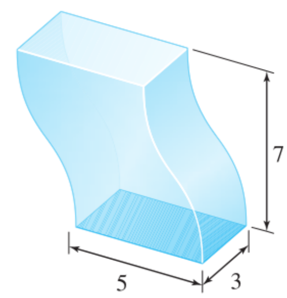
$$\begin{aligned} G'(t) &= D_1 F(g(x),x)g'(x) + D_2 F(g(x),x) \\ &= f(g(x),x)g'(x) + \int_a^{g(x)} D_2 f(t,x)\,dt. \end{aligned}$$

Este último paso se usa aplicando el inciso (a).

■

Ejercicio 2

6. Usando el principio de Cavalieri, calcula el volumen de la estructura mostrada en la figura; cada sección de cruce es un rectángulo de longitud 5 y ancho 3.

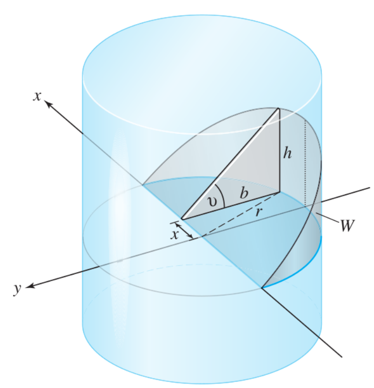


Solución. Sea $A(h)$, el área de la sección de cruce rectangular en la altura h. El principio de Cavalieri dice que el volumen de esta estructura es

$$\begin{aligned}\int_0^7 A(h)\,dh &= \int_0^7 5\cdot 3\,dh\\ &= 15\int_0^7 dh\\ &= 15(7-0) = 105.\end{aligned}$$

■

7. Un leñador corta una pieza en forma de cuña W de un árbol cilíndrico de radio r obtenido de hacer dos cortes de sierra en el centro del árbol, uno horizontal y otro en un ángulo θ. Calcula el volumen de la cuña W usando el principio de Cavalieri. Véase la figura



Solución. Como lo muestra la figura, podemos pensar en las secciones triangulares paralelas que dependen de x, que es la distancia de la punta de la sección al centr del círculo. Por otro lado, podemos observar un triángulo rectángulo formado por los de longitud x, r y b. Por lo tanto

$$b = \sqrt{r^2 - x^2}.$$

Así que podemos ver, por la definición de tangente, que $h = b\tan\theta = \sqrt{r^2 - x^2}\tan\theta$. Entonces el área de cada triángulo es

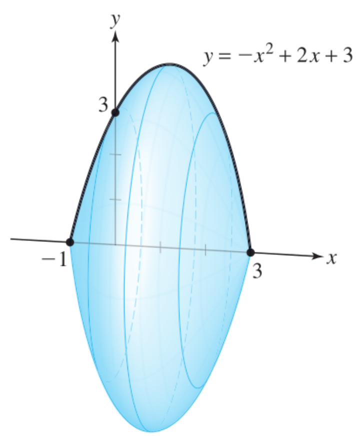
$$T(x) = \frac{1}{2}\left(\sqrt{r^2 - x^2}\right)\left(\sqrt{r^2 - x^2}\tan\theta\right).$$

De esta manera, por el principio de Cavalieri el volumen de la cuña es

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}(W) = \int_{-r}^{r} T(x)\,dx &= \int_{-r}^{r} \frac{\tan\theta}{2}(r^2 - x^2)\,dx \\
&= \tan\theta \int_0^r (r^2 - x^2)\,dx, \quad \text{por la paridad del integrando,} \\
&= \tan\theta \int_0^r r^2\,dx - \tan\theta \int_0^r x^2\,dx \\
&= r^3\tan\theta - \tan\theta\frac{r^3}{3} = \frac{2r^3\tan\theta}{3}.
\end{aligned}$$

■

8 b). Demuestra que el volumen de la región obtenida por rotar la región debajo de la gráfica de la parábola $y = -x^2 + 2x + 3$, $-1 \le x \le 3$, al rededor del eje x es $512\frac{\pi}{15}$. Véase la figura

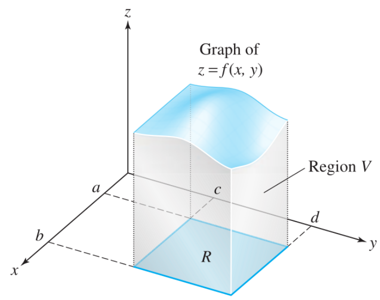


Solución. Las secciones de corte con planos paralelos al plano yz son círculos de radio y, con área $\pi y^2(x) = \pi(-x^2 + 2x + 3)^2$. Por el principio de Cavalieri, el volumen de la región es

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{3} \pi y^2(x)\,dx &= \pi \int_{-1}^{3} (-x^2 + 2x + 3)^2\,dx \\
&= \pi \int_{-1}^{3} x^4 - 4x^3 - 2x^2 + 12x + 9\,dx \\
&= \pi\left[\frac{x^5}{5} - x^4 - \frac{2x^3}{3} + 6x^2 + 9x\right]\Bigg|_{-1}^{3} \\
&= \frac{512}{15}\pi
\end{aligned}$$

■

14. Encuentra el volumen acotado por la gráfica de $f(x, y) = 1 + 2x + 3y$, el rectángulo $[1, 2] \times [0, 1]$, y los cuatro lados verticales del rectángulo R como en la figura



Solución. Podemos ver las intersecciones de los planos paralelos al plano yz y dependiendo del valor de x, podemos ver que estos tienen área

$$\int_0^1 1 + 2x + 3y \, dy = \left[y + 2xy + 3\frac{y^2}{2} \right] \Big|_0^1 = \frac{5}{2} + 2x.$$

Luego, por Cavalieri, el volumen de la figura entera es

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{5}{2} + 2x \, dx &= \left[\frac{5}{2}x + x^2 \right] \Big|_1^2 \\ &= 5 + 4 - \frac{5}{2} - 1 \\ &= \frac{11}{2}. \end{aligned}$$

■

Eercicio 3

1 d). Calcula la siguiente integral si $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\iint_R \ln \left[(x + 1)(y + 1) \right] dA.$$

Solución. Por el el Teorema de Foubini y la ley del logaritmo de un producto, la integral anterior es igual a

$$\int_0^1 \int_0^1 \ln(x + 1) + \ln(y + 1) \, dy \, dx.$$

El integrando es

$$\begin{aligned} \int_0^1 \ln(x + 1) \, dy + \int_0^1 \ln(y + 1) \, dy &= y \ln(x + 1) + (y + 1)(\ln(y + 1) - 1)|_0^1 \\ &= \ln(x + 1) + 2(\ln(2) - 1) + 1 \\ &= \ln(x + 1) + 2\ln(2) - 1. \end{aligned}$$

Entonces la integral anterior es

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \ln(x+1) + 2\ln(2) - 1\, dx &= (x+1)(\ln(x+1) - 1) + 2\ln(2)x - x|_0^1 \\
&= 2(\ln(2) - 1) + 2\ln(2) - 1 - 1(-1) \\
&= 4\ln(2) - 2.
\end{aligned}$$

■

4. Calcula sobre la región R:

$$\iint\limits_R \frac{y}{1+x^2} dydx, \quad R : [0,2] \times [-1,1] \,.$$

Solución.

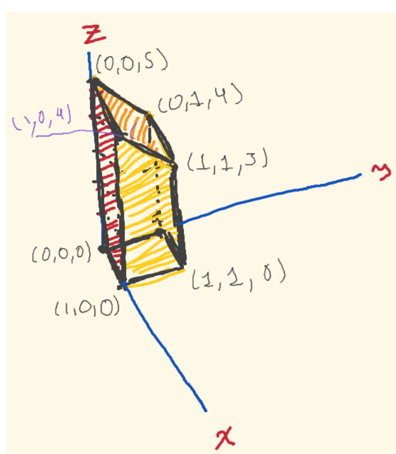
$$\begin{aligned}
\int_0^2 \int_{-1}^1 \frac{y}{1+x^2}\, dy\, dx &= \int_0^2 \frac{1}{1+x^2} \int_{-1}^1 y\, dy\, dx \\
&= \int_0^2 \frac{0}{1+x^2}\, dx, \quad \text{ya que } f(y) = y \text{ es impar,} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

5. Dibuja el sólido cuyo volumen está dado por

$$\int_0^1 \int_0^1 (5 - x - y)\, dy\, dx.$$

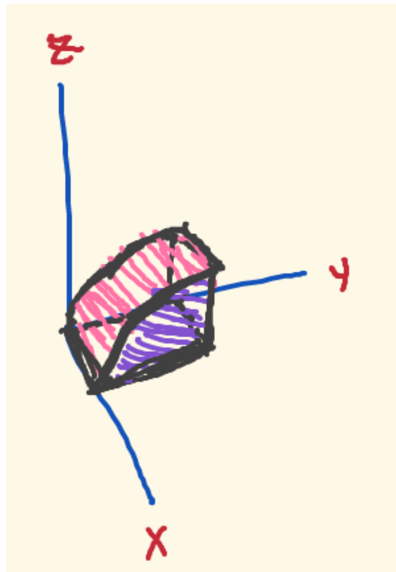
Solución. La gráfica de la función que se integra corresponde al plano $z = 5 - x - y$. La base de la figura corresponde al rectángulo $[0,1] \times [0,1] \times \{0\}$. El resto de las caras del sólido son los planos que se levantan de los rectángulos.



■

10. Calcula el volumen del sólido acotado por la superficie $z = \sin y$, los planos $x = 1$, $x = 0$, $y = 0$ $y = \frac{\pi}{2}$, y el plano xy.

Solución. La gráfica de este sólido luce más o menos como



Este volumen se puede calcular con el principio de Cavalieri con las secciones transversales

$$C_x = \left\{ (x, y, z) : 0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq z \leq \sin y \right\},$$

donde $0 \leq x \leq 1$. Es decir, las intersecciones entre el sólido y los planos paralelos al plano yz. Por lo tanto el volumen de esta figura es

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin y \, dy \, dx &= \int_0^1 -\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + \cos(0) \, dx \\ &= \int_0^1 1 \, dx \\ &= 1 \end{aligned}$$

■