Tarea 3. Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Estudiante: Juan Armando Parra Flores **Fecha:** 15 de febrero de 2021

1. Encuentra la solución general de la ecuación diferencial dada

$$2t \operatorname{sen} y + y^3 e^t + \left(t^2 \cos y + 3y^2 e^t\right) \frac{dy}{dt} = 0$$

Solución. Como típicamente se escribe, identificamos las funciones $M(t,y) = 2t \operatorname{sen} y + y^3 e^t$ y a $N(t,y) = t^2 \cos y + 3y^2 e^t$. Notemos que $\frac{\partial M}{\partial y} = 2t \cos y + 3y^2 e^t = \frac{\partial N}{\partial t}$, por lo que debe existir una función Φ tal que $\frac{\partial \Phi}{\partial t} = M$ y $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = N$ (Según el libro, la verdad no entendí esa parte de la demostración). Integrando con respecto a t obtenemos

$$\begin{aligned} c = \Phi(t,y) = \int M(t,y)\,dt &= \int 2t \operatorname{sen} y + y^3 e^t \, dt \\ &= t^2 \sin y + y^3 e^t + h(y), \quad \text{para alguna función } h. \end{aligned}$$

Por otro lado, haciéndolo con respecto a y se tiene

$$\begin{aligned} c = \Phi(t,y) = \int N(t,y)\,dy &= \int t^2 \cos y + 3y^2 e^t \, dy \\ &= t^2 \sin y + y^3 e^t + k(t), \quad \text{para alguna función } k. \end{aligned}$$

Luego $h(y) = k(t)$. Derivando con respecto de y vemos que $h'(y) = 0$, por lo que h es una constante. Como Φ es constante y la solución general de la ecuación es

$$\Phi(t,y) = t^2 \sin y + y^3 e^t + C, \quad \text{para alguna } C \in \mathbb{R},$$

debe suceder que

$$t^2 \sin y + y^3 e^t = C' \quad \text{para alguna } C' \in \mathbb{R}.$$

■

2. Resuelve el problema de valor inicial,

$$3ty + y^2 + \left(t^2 + ty\right) \frac{dy}{dt} = 0, \quad y(2) = 1.$$

Solución. Expresamos como $M(t, y) = 3ty + y^2$ y a $N(t, y) = t^2 + ty$. Esta ecuación diferencial no es exacta desde que $\frac{\partial M}{\partial y} = 3t + 2y$ y $\frac{\partial N}{\partial t} = 2t + y$. Pero aún podemos encontrar un factor integrante. Supongamos que existe μ, función de t y de y tal que

$$\frac{\partial}{\partial y} \left[\mu(t, y)M(t, y)\right] = \frac{\partial}{\partial t} \left[\mu(t, y)N(t, y)\right],$$

o bien

$$M\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\frac{\partial N}{\partial t}.$$

Si además μ es sólo función de t, su derivada parcial con respecto a y se anula, y nos deja con

$$\mu\frac{\partial M}{\partial y} = N\frac{\partial \mu}{\partial t} + \mu\frac{\partial N}{\partial t}.$$

Esto implica que

$$N\frac{\partial \mu}{\partial t} = \mu \left(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}\right).$$

Si $\mu \neq 0$ para todo su dominio, podemos ver que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mu}\frac{\partial \mu}{\partial t} &= \frac{\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial t}}{N} \\
&= \frac{3t + 2y - 2t - y}{t^2 + ty} \\
&= \frac{t + y}{t(t + y)} \\
&= \frac{1}{t}.
\end{aligned}$$

Esta ecuación es más sencilla, pues al integrar con respecto a t obtenemos que $\mu(t) = t$. Entonces tenemos que

$$\begin{aligned}
0 &= \mu(t)\left(3ty + y^2 + (t^2 + ty)\frac{dy}{dt}\right) \\
&= 3t^2y + ty^2 + \left(t^3 + t^2y\right)\frac{\partial y}{\partial t}
\end{aligned}$$

es una ecuación diferencial exacta e identificamos $M^*(t, y) = 3t^2y + ty^2$ y a $N^*(t, y) = t^3 + t^2y$. Luego, integrando con respecto a t tenemos

$$\begin{aligned}
\Phi(t, y) &= \int M^*(t, y)\, dt + h(y), \quad \text{para alguna función } h, \\
&= \int 3t^2y + ty^2\, dt + h(y) \\
&= t^3y + \frac{t^2y^2}{2} + h(y).
\end{aligned}$$

Derivando con respecto a y obtenemos que

$$h'(y) + t^3 + t^2 y = \frac{\partial \Phi}{\partial y} = N^*(t, y) = t^3 + t^2 y.$$

Por lo tanto $h'(y) = 0$, y h es constante. Como $\Phi(t, y) = c \in \mathbb{R}$, tenemos que la solución general de la ecuación diferencial es

$$c' = t^3 y + \frac{t^2 y^2}{2}, \quad \text{con } c' \in \mathbb{R}.$$

Sin embargo, la condición inicial nos dice que

$$c' = 2^3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 10.$$

Por lo tanto, la solución de esta ecuación diferencial es

$$10 = t^3 y(t) + \frac{t^2 y^2(t)}{2}.$$

$\blacksquare$

3. Demuestra que toda ecuación separable de la forma $M(t) + N(y)\frac{dy}{dt} = 0$ es exacta.

   Demostración. Para que sea exacta debe cumplirse que $\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial t}$. Pero esto es cierto desde que la dependencia de M es únicamente de t y la de N es sobre y. Por lo tanto

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 0 = \frac{\partial N}{\partial t}.$$

   Todas las ecuaciones de esa forma son exactas.

$\blacksquare$