Tarea 2 con sesión de ayudantía. Problemas sobre familias de distribuciones

Asegúrense que pueden resolver todos estos ejercicios y/o identifiquen . Las primeras cuatro preguntas son comunes para todos los alumnos del grupo. Después entregarán tres problemas más que les haya tdudasocado resolver en su equipo como parte de esta tarea. Estos seis problemas conformarán su Tarea 2 y se entregará el jueves 25 de febrero de 2021 de manera individual.

PREGUNTAS COMUNES PARA TODOS LOS ALUMNOS PARA HACER EN LA CASA:

1. Si X tiene una distribución $F(x;\theta,\sigma)$ que pertenece a la familia de localización y escala con θ parámetro de localización y σ de escala, entonces da una expresión para el cuantil Q_α en términos de los parámetros (θ,σ), aprovechando la relación que guardan F y G, donde G es la distribución del miembro estándar de esta familia. El miembro estándar G corresponde al caso $\theta=0$ y $\sigma=1$,
$$F(x;\theta,\sigma)=G\left(\frac{x-\theta}{\sigma}\right).$$
Recuérdese que como X es variable aleatoria contínua, la función de cuantiles es simplemente la inversa de la distribución,
$$Q_\alpha=Q(\alpha)=F_X^{-1}(\alpha).$$
Notar que la definición de un cuantil Q_α es el valor donde se acumula una probabilidad α, de manera que
$$F_X(Q_\alpha;\theta,\sigma)=P[X\leq Q_\alpha]=\alpha.$$
Bajo estas consideraciones, el parámetro θ resulta ser él mismo un cuantil de cierta probabilidad. Indica a cuál probabilidad corresponde.

2. Considera una variable T de Student con 9 grados de libertad. Da el valor del cuantil $b>0$ tal que $P[-b\leq T\leq b]=0.90$. Da un par de valores (a,c) con $a\neq -c$ tales que $P[a\leq T\leq c]=0.90$ y muestra que $|c-a|>2b$. Nota que el intervalo más corto con probabilidad de 0.90 tiene la propiedad que en sus extremos la función de densidad t de Student tiene la misma altura. Es decir que se obtiene tras realizar un corte horizontal a la función de densidad. (Revisa el Teorema 9.3.2, p. 441 del libro de Casella y Berger, 2002).

3. Si X es una $F(a,b)$ de Fisher (distribución propuesta por George Snedecor en honor de Ronald Fisher), demuestra que $Y=1/X$ se distribuye como una F de Fisher con sus grados de libertad (b,a). Aplica el Teorema de Cambio de Variable.

4. Usa la función generadora de momentos $M(t)$ como se sugiere en la Sección 4.7 del Hogg y Craig (1978) para mostrar cómo se distribuye la suma $T = \Sigma_i^n X_i$ de n variables independientes $X_1, ..., X_n$ idénticamente distribuidas como exponenciales con parámetro de escala β. Indica cuál es la distribución de la cantidad pivotal T/β. (Una cantidad pivotal es una cantidad aleatoria que es función de variables aleatorias y de un parametro desconocido, tal que su distribución está completamente especificada).

PREGUNTAS PARA DISCUTIR DENTRO DE LOS EQUIPOS

EQUIPO 1:

1. Indica cómo se distribuye el promedio $\overline{X}_n$ de n variables independientes e idénticamente distribuidas como $Gama\,(\alpha, \beta)$. Usa la función generadora de momentos para esto y revisa la Sección 4.7 en el Capítulo 4 del libro de Hogg y Craig (1978).

2. Al menos dos distribuciones de la lista resultan ser un caso especial de la distribución Gama. Menciona dos de ellas.

3. Si X se distribuye como Gama (α, β), donde α es el parámetro de forma y $\beta > 0$ es de escala, cómo se distribuye $Y = X/\beta$?

4. Si $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como Exponencial con tiempo medio de vida θ, da la distribución exacta del mínimo $X_{(1)}$.

EQUIPO 2:

1. Demuestra que la Gumbel pertenece a la familia de localización y escala. Encuentra la relación que hay entre las siguientes dos variables aleatorias Gumbel de mínimos,

$$X \sim Gumbel\ \ (a, b)\ \text{ y } Y \sim Gumbel\ \ (0, 1)\,.$$

   Nota que Y es una versión recorrida y reescalada de X, con moda en cero. El parámetro a de localización de una Gumbel coincide con la moda de la función de densidad. Escribe las densidades de ambas variables y grafícalas para algunos valores de (a, b) que des y así verás la relación que guardan. Demuestra la relación que guardan con el teorema de cambio de variable.

2. Indica cómo se distribuye el promedio $\bar{X}_n$ de n variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como normales con media θ y varianza unitaria. Usa la función generadora de momentos para esto y revisa la Sección 4.7 en el Capítulo 4 del libro de Hogg y Craig (1978).

3. Si $X_1, ..., X_n$ son variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas como Exponencial con tiempo medio de vida θ, da la distribución exacta del máximo $X_{(n)}$.

4. Calcula un estimador de momentos para la media de una Poisson si cuentas con una muestra de n variables $X_1, ..., X_n$ que son independientes e idénticamente distribuidas como Poisson con parámetro θ.

EQUIPO 3:

1. Una variable aleatoria T de Student de k grados de libertad se obtiene de la razón de una normal estándar W dividida entre la raíz de una variable Y independiente, que es Ji cuadrada de k grados de libertad así,
$$T = \frac{W}{\sqrt{\frac{Y}{k}}}.$$
Demuestra que $V = T^2$ se distribuye como una F de $1, k$ grados de libertad. Di cuál es la distribución de W^2 (revisa un teorema del Cap. 3 del Hogg y Craig para ello).

2. Si X pertenece a la familia de Localización y Escala y σ es el parámetro de escala, indica cuál es la distribución de $Y = X/\sigma$.

3. Si $X_1, ..., X_n$ son variables independientes y distribuidas idénticamente como Poisson con parámetro de intensidad λ, indica cómo se distribuye $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$. Usa la función generadora de momentos para esto y revisa la Sección 4.7 en el Capítulo 4 del libro de Hogg y Craig (1978).

4. Si X es una Logística con parámetro de localización μ y de escala σ, entonces da la distribución de $Z = (X - \mu) / \sigma$.

EQUIPO 4:

1. Demuestra si la variable exponencial con tiempo de vida garantizado $\alpha > 0$ y parámetro de escala θ cuya densidad es
$$f(x; \alpha, \theta) = \frac{1}{\theta} \exp\left[-\frac{(x - \alpha)}{\theta}\right] I_{[\alpha,\infty)}(x),$$
pertenece a la familia de localización y escala o no. Di si pertenece a la familia exponencial de distribuciones. Nota que el soporte de la variable X es desde $\alpha > 0$ hasta infinito; es decir $X \geq \alpha > 0$.

2. Si X se distribuye como Gama, cómo se distribuye $Y = aX$ con a una constante positiva?

3. Se tienen k variables aleatorias normales independientes, $X_1, ..., X_k$, donde X_i tiene media μ_i y varianza σ^2. Indica como se distribuye la suma $T = \Sigma_{i=1}^{n} Z_i$ de las k variables asociadas
$$Z_i = \left(\frac{X_i - \mu_1}{\sigma}\right)^2, \text{ para } i = 1, ..., n.$$

4. Considera a una variable Z Cauchy de parámetros (θ, σ) y demuestra que pertenece a la familia de localización y escala. Sabiendo que una variable Cauchy $(0,1)$ se genera como la razón de dos variables normales estándar X/Y, entonces di cómo es que puedes simular realizaciones de Z, a partir de un generador de números aleatorios normales estándar.

EQUIPO 5:

1. Da tres ejemplos de variables aleatorias discretas que sí pertenezcan a la familia exponencial.

2. Si X es una Ji cuadrada con 2 grados de libertad y Y es otra Ji cuadrada independiente con 6 grados de libertad, da el nombre y la expresión de la densidad de
$$W = \ln\left(\frac{X}{2}\right) - \ln\left(\frac{Y}{6}\right).$$

3. Muestra que si X se distribuye como F de Fisher con a, b grados de libertad, entonces que
$$Y = \frac{1}{1 + \frac{a}{b}X}$$
se distribuye como una distribución beta (y da los parámetros de esta distribución).

4. La distribución normal pertenece tanto a la familia de localización y escala así como a la exponencial. Da otro ejemplo de distribución que pertenezca a ambas familias.

EQUIPO 6:

1. Demuestra que la densidad Weibull de tres parámetros (μ, σ, β), de localización, escala y forma respectivamente, no pertenece ni a la familia de distribuciones exponencial ni a la de localización y escala. Nota que la función indicadora depende del parámetro de localización μ llamado umbral, el cual es una cota inferior, $\mu \leq X$, y delimita el soporte de esta variable aleatoria $\{x : f(x; \mu, \sigma, \beta) > 0\}$.

2. La distribución exponencial es un caso particular de otras distribuciones de la lista que se dio en clase. Da dos ejemplos de ello.

3. Demuestra que si X y Z son variables exponenciales unitarias independientes, entonces su razón X/Z (y también Z/X) sigue una distribución F (da los grados de libertad).

4. Demuestra que $V = T^2$ se distribuye como una F de $1, k$ grados de libertad. Di cuál es la distribución de W^2 (revisa un teorema del Cap. 3 del Hogg y Craig para ello).

EQUIPO 7:

1. Usa la función generadora de momentos $M(t)$ como se sugiere en la Sección 4.7 del Hogg y Craig (1978) para mostrar cómo se distribuye la suma $T = \Sigma_i^n X_i$ de n variables independientes $X_1, ..., X_n$ idénticamente distribuidas como Ji Cuadrada con dos grados de libertad cada una.

2. Una Ji cuadrada de k grados de libertad es también una distribución Gama de parámetros α de forma y β de escala. Indica la relación que guardan α, β con k y da la expresión de la densidad Ji Cuadrada (k) para verificarlo.

3. Usando la técnica de la función generadora de momentos indica cómo se distribuye la suma T de n variables $Poisson\,(\theta)$ independientes, $X_1, ..., X_n$.

4. Si X es uniforme continua en $(0, 1)$ y se tiene que $Y = -2\ln X$, da la función de densidad de Y e identifícala por su nombre. Recuerda dar también la función indicadora de Y correspondiente.

EQUIPO 8:

1. La t de Student de k grados de libertad se relaciona con una normal estándar y con una Ji cuadrada independiente. Da la relación explícita (viene en el Hogg y Craig, Caps. 3 y 4) y menciona cómo puede servirte para simular realizaciones de esta variable t de Student si sólo cuentas con un generador de números aleatorios normal estándar.

2. Da el nombre de un par de variables aleatorias y la distribución explícita de ellas tal que sea cóncava (y no sigmoidal). ¿Qué forma tiene necesariamente la función de densidad en tal caso? Identifica la relación que guarda la moda de una densidad con el punto de inflexión de la distribución correspondiente.

3. Usando la técnica de la función generadora de momentos indica cómo se distribuye la suma T de n variables $Gama\,(\alpha, \beta)$ independientes, $X_1, ..., X_n$ y también del promedio $W = T/n$.

4. Cuál es el intervalo más corto para X, una Ji cuadrada de 4 grados de libertad, que cumple con $P\,[a \le X \le b] = 0.95$. (Indica a, b a cuáles cuantiles corresponden y sus probabilidades).