TOÁN RỜI RẠC 1

CHƯƠNG 2

Giảng viên: Vũ Văn Thỏa

CHƯƠNG 2. BÀI TOÁN ĐẾM

2.1 Giới thiệu bài toán

Đặt bài toán:

- Input: Cho tập dữ liệu D = {x};

- Output: Xác định số lượng phần tử của D;

Phương pháp giải:

- Sử dụng các nguyên lý đếm cơ bản: nguyên lý cộng, nguyên lý nhân, nguyên lý bù trừ.
- Qui về các bài toán con: Phân chia bài toán đếm phức tạp thành những bài toán con. Trong đó, mỗi bài toán con có thể giải được bằng các nguyên lý đếm cơ bản.
- Sử dụng hệ thức truy hồi: Xây dựng công thức tính số nghiệm tổng quát bất kỳ dựa vào biểu diễn các số hạng biết trước .
- Sử dụng một số phương pháp đặc biệt khác: Phương pháp hàm sinh, phương pháp hệ đai diện phân biệt…

Ứng dụng:

- Ước lượng số phần tử của tập dữ liệu D

$\Rightarrow$ ước lượng độ phức tạp của không gian lưu trữ và các thao tác xử lý dữ liệu.

- Ước lượng số các phép toán thực hiện của một thuật toán, chương trình

$\Rightarrow$ Đánh giá độ phức tạp thời gian tính toán của thuật toán.

- Ứng dụng trong các hệ mật

2.2 Những nguyên lý đếm cơ bản

- ***<u>Nguyên lý cộng</u>:***

Giả sử một công việc A có thể hoàn thành bằng 1 trong n phương án A_1, A_2, .., A_n:

- Phương án A_1 có m_1 cách thực hiện;

- Phương án A_2 có m_2 cách thực hiện; …

- Phương án A_n có m_n cách thực hiện

- Tất cả các cách trên độc lập với nhau;

$\Rightarrow$ *Số cách thực hiện công việc A:*

$$m = m_1 + m_2 + .. + m_n$$

Ví dụ 1:

Giả sử N, M là hai số tự nhiên đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của S trong đoạn chương trình sau:

```
int S = 0;
for (int i = 1; i <= N; i++)  S++;
for (int j = 1; j <= M; j++)  S++;
```

Lời giải. Số lần thực hiện vòng lặp thứ nhất là N, số thực hiện vòng lặp thứ hai là M. Vì hai vòng lặp thực hiện độc lập nhau nên theo nguyên lý cộng, giá trị của S = N + M.

Nguyên lý nhân:

Giả sử một công việc A được chia thành n giai đoạn A_1, A_2, .., A_n:

- Giai đoạn A_1 có m_1 cách thực hiện;

- Giai đoạn A_2 có m_2 cách thực hiện; …

- Giai đoạn A_n có m_n cách thực hiện

- Tất cả các cách trên độc lập với nhau

$\Rightarrow$ Số cách thực hiện công việc A:

$$m = m_1 \text{ x } m_2 \text{ x } \ldots \text{ x } m_n$$

Ví dụ 2:

Giả sử n_1, n_2 là hai số nguyên dương đã xác định giá trị. Hãy cho biết giá trị của S sau khi thực hiện đoạn chương trình dưới đây:

```
int S = 0;
for ( int i = 1; i <= n1; i++)
        for ( int j =1; j <= n2; j++) S++;
```

Lời giải. Với mỗi giá trị của i=1,2,.., n_1 thì S được cộng n_2 đơn vị. Do vậy, theo nguyên lý nhân, sau n_1 vòng lặp giá trị của S = $n_1 x n_2$.

Ví dụ 3 (Đếm hàm)

Có thể tạo bao nhiêu hàm từ một tập A có m phần tử sang một tập B có n phần tử.

Giải

Các phần tử của A là $a_1, a_2, ..., a_m$.

Hàm f được xác định bằng cách xác định $f(a_i)$:

- Mỗi $f(a_i)$ có n cách chọn.
- Cần chọn m lần $f(a_i)$
- Theo quy tắc nhân có $n \times n \times ... \times n = n^m$ cách tạo hàm f từ A sang B.

Nguyên lý bù trừ:

Khi các phương án A_1, A_2, …, A_n để thực hiện công việc A không độc lập với nhau

⇒ Không thể dùng quy tắc cộng để tính cách thực hiện A.

⇒ Sau khi cộng số cách làm mỗi phương án cần trừ đi số cách làm trùng lặp.

⇒ Có ***nguyên lý bù trừ***.

Ví dụ 4:

Mật khẩu để truy nhập vào một máy tính có độ dài từ 6 đến 8 ký tự, mỗi ký tự là một chữ in hoa tiếng Anh hay chữ số. Mỗi mật khẩu phải chứa ít nhất một chữ số. Hỏi có bao nhiêu mật khẩu?

Giải:

Gọi P là số mật khẩu, P_6, P_7 và P_8 là các mật khẩu có độ dài 6, 7 và 8 ký tự thỏa mãn điều kiện $\Rightarrow P = P_6 + P_7 + P_8$

- Tính P_6 bằng số các xâu 6 ký tự chữ in hoa và chữ số trừ đi số các xâu không có chữ số nào $\Rightarrow P_6 = 36^6 – 26^6 = 1\ 867\ 866\ 560$;
- Tương tự $P_7 = 36^7 – 26^7 = 70\ 332\ 353\ 920$;

  $P_8 = 36^8 – 26^8 = 2\ 612\ 282\ 842\ 880$
- $\Rightarrow P = 2\ 684\ 483\ 063\ 360$

Ví dụ 5:

Có bao nhiêu xâu nhị phân độ dài 8 bit hoặc bắt đầu bằng bit 1 hoặc kết thúc bằng hai bit 00?

Giải:

- Số lượng xâu nhị phân độ dài 8 và bắt đầu bằng 1:

$$2^7 = 128$$

- Số lượng tạo xâu nhị phân độ dài 8 và kết thúc bằng hai bit 00: $2^6 = 64$ xâu.
- Số lượng xâu nhị phân bắt đầu bằng 1 và kết thúc bằng 00: $2^5 = 32$ xâu.
- Như vậy, số lượng xâu cần tìm: 128 + 64 – 32 = 160.

Biểu đồ cây:

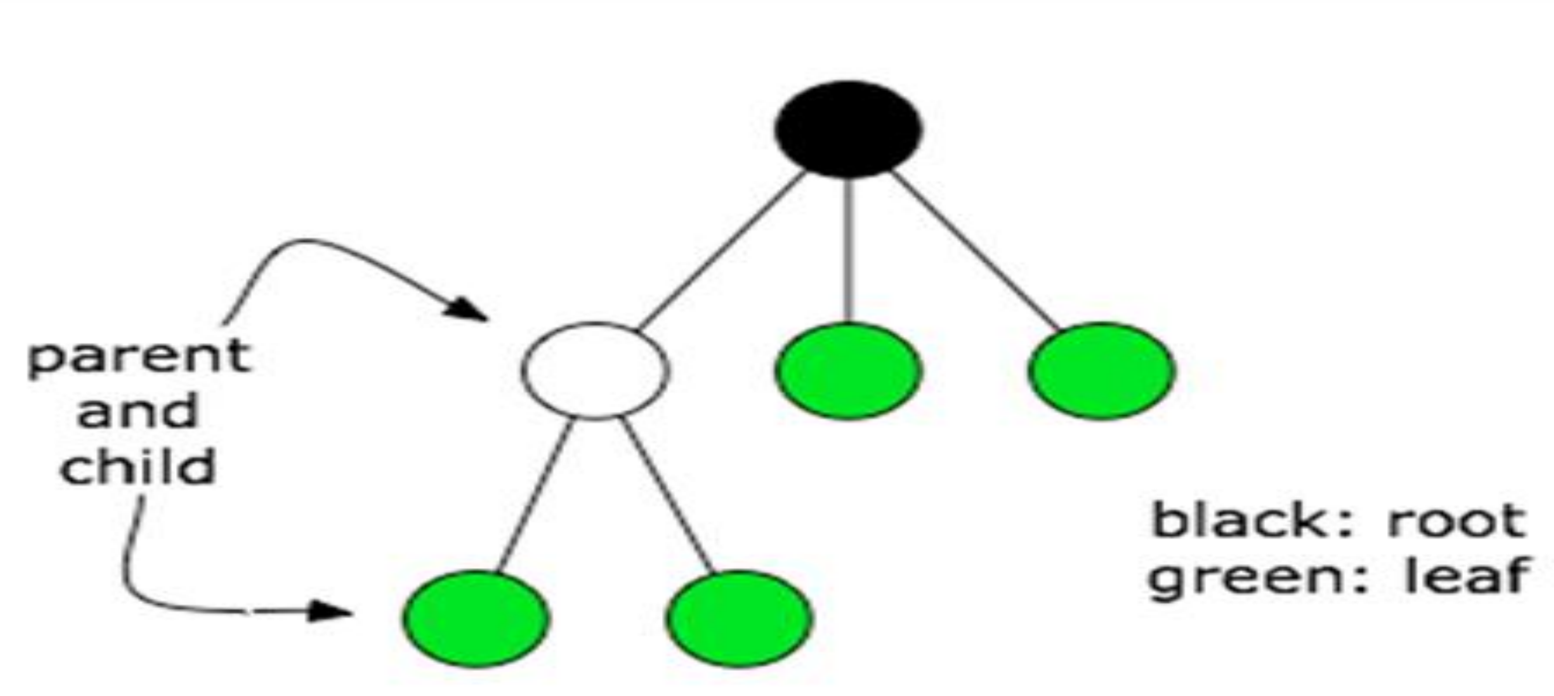
- Cây được định nghĩa đệ quy như sau:

- Tập rỗng T là cây không có nút nào (cây rỗng);

- Tập T có 1 phần tử r là cây có gốc tại r;

- Nếu T_1, …, T_n là các cây với các gốc r_1, …, r_n $\Rightarrow$ cây T với gốc r được tạo bằng cách cho r là nút cha của các nút con r_1, …, r_n.

Ví dụ biểu đồ cây:



Một số khái niệm:

- **Nút gốc**: là nút của cây T không có cha.
- **Nút cha**: Nút r là cha của các nút $r_1, ..., r_n$
- **Nút con**: Các nút $r_1, \ldots, r_n$ là nút con của r.
- **Nút lá:** không có nút con.
- **Đường đi**: Dãy các nút $r_1, \ldots, r_k$, trong đó r_i là cha của r_{i+1} gọi là đường đi từ r_1 đến r_k. Độ dài của đường đi từ r_1 đến r_k bằng k-1.
- **Cây gán nhãn**: là cây mà mỗi đỉnh được gắn với một giá trị (nhãn)

Ứng dụng biểu đồ cây:

- Tính số lượng tổ hợp bằng cách biểu diễn mỗi tổ hợp là một đường đi từ gốc đến lá của cây được gán nhãn.

- Số lượng các đường đi từ gốc đến lá trên cây là số lượng tổ hợp cần tìm

Ví dụ 6:

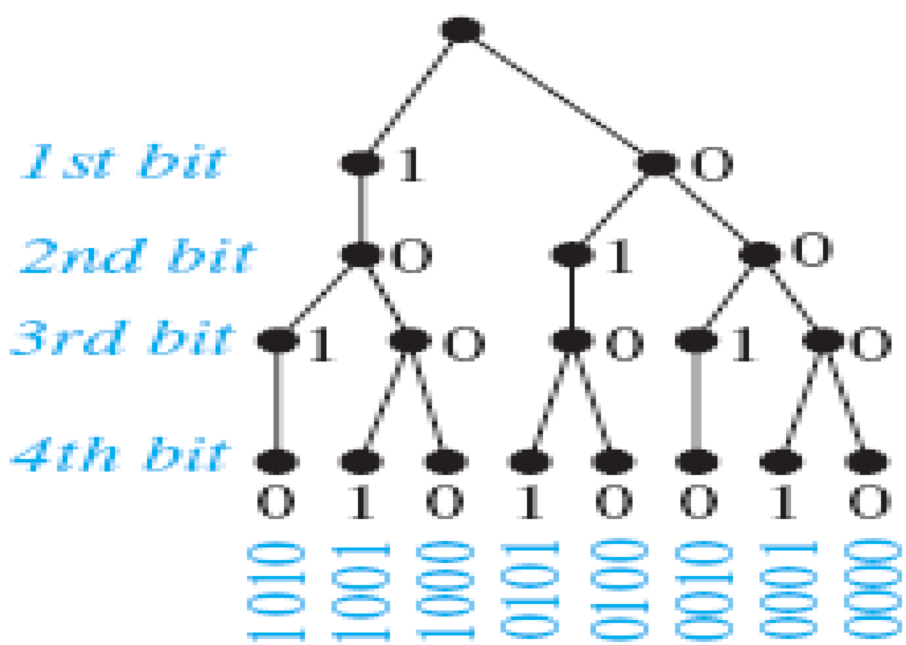
Có bao nhiêu xâu nhị phân có chiều dài 4 bit không có 2 số 1 liên tiếp?

Giải:

Xét một cây nhị phân đầy đủ với độ cao 4 và các nút (trừ nút gốc) được gán nhãn 0 hoặc 1.

$\Rightarrow$ có 8 xâu thỏa mãn.

Biểu đồ cây cho ví dụ 6:



Hoán vị và tổ hợp

1) Hoán vị và chỉnh hợp

Cho tập hợp A có n phần tử khác nhau:

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

- Hoán vị của tập A là một cách sắp xếp có thứ tự n phần tử a_i.

- ***Chỉnh hợp chập k của n phần tử*** là một dãy k phần tử có tính đến thứ tự của A.

Công thức hoán vị và chỉnh hợp:

- **Định lý 1:**

Số hoán vị của tập A có n phần tử là: P(n) = n!

Số chỉnh hợp chập k của tập A có n phần tử là:

$$P(n,k) = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

2) Tổ hợp:

Cho tập hợp A có n phần tử khác nhau:

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

- Một ***tổ hợp chập k*** của tập hợp A là cách chọn không tính đến thứ tự k phần tử từ A.
- Một tổ hợp chập k chính là một tập con có k phần tử của tập hợp A.
- Thường gọi "tổ hợp chập k của n phần tử".

Công thức tổ hợp:

- **Định lý 2:**

Số tổ hợp chập k của tập A có n phần tử là

$$C(n,k) = \frac{P(n,k)}{P(k,k)} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$$

Tính chất của công thức tổ hợp:

- Cho n và k là các số nguyên dương với $n \geq k$:

$$C(n, k) = C(n, n-k)$$

$$C(n+1, k) = C(n, k-1) + C(n, k)$$

- Cho m, n và k là các số nguyên không âm với $k \leq m$ và $k \leq n$:

$$C(m+n,k) = \sum C(m,i)C(n,k-i), \ i = 0..k$$

Chỉnh hợp và tổ hợp suy rộng

- Chỉnh hợp có lặp
- Tổ hợp có lặp
- Hoán vị có lặp
- Sự phân bổ các đồ vật vào trong hộp

1) Chỉnh hợp có lặp

- **Khái niệm**:

- Cho tập hợp A có n phần tử khác nhau:

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

- Một dãy k phần tử không nhất thiết khác nhau có tính đến thứ tự của A gọi là một ***chỉnh hợp lặp chập k của n phần tử***.

Công thức tính số lượng chỉnh hợp lặp:

- **Định lý 3:**

Số các chỉnh hợp lặp chập k từ tập có n phần tử là n^k

Ví dụ 7:

Có bao nhiêu xâu độ dài n được tạo ra từ bảng chữ cái thường tiếng Anh.

Giải:

Có 26 chữ cái thường tiếng Anh.

Theo công thức chỉnh hợp lặp có tất cả 26^n xâu độ dài n.

2) Tổ hợp có lặp:

- **Khái niệm:**

- Cho tập hợp A có n phần tử khác nhau:

$\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

- Một dãy k phần tử không nhất thiết khác nhau và không kể thứ tự của A gọi là một ***tổ hợp lặp chập k của n phần tử***.

Công thức tính số lượng tổ hợp lặp:

- **Định lý 4:**

Số tổ hợp lặp chập k của tập có n phần tử là:

$$C(n+k-1, k)$$

Ví dụ 8:

Phương trình $x_1 + x_2 + x_3 = 11$ có bao nhiêu nghiệm nguyên không âm?

Giải:

Mỗi nghiệm của phương trình tương ứng với một cách chọn 11 phần tử từ một tập có 3 loại gồm: x_1 phần tử loại 1, x_2 phần tử loại 2 và x_3 phần tử loại 3. Vì vậy số nghiệm bằng số tổ hợp lặp chập 11 từ tập có 3 phần tử. Theo định lý 4, số đó bằng:

$$C(3 + 11 - 1,11) = (13.12)/(1.2) = 78$$

Tổng quát:

Phương trình $x_1 + \ldots + x_n = k$ có số lượng nghiệm nguyên không âm là:

$$C(n + k - 1, k)$$

3) Hoán vị lặp

- **Khái niệm**:

- Cho tập hợp A có n phần tử có thể trùng nhau $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

- Hoán vị các phần tử a_i của tập A gọi là hoán vị lặp.

Công thức tính số lượng hoán vị lặp:

- **Định lý 5:**

Số hoán vị lặp của n phần tử trong đó có n_1 phần tử như nhau loại 1, n_2 phần tử như nhau loại 2,..., và n_k phần tử như nhau loại k là:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$

4) Sự phân bổ các đồ vật vào trong hộp

- **Định lý 6:**

Số cách phân chia n đồ vật khác nhau vào k hộp khác nhau sao cho có n_i đồ vật được đặt vào hộp thứ i, với i = 1, 2, ..., k là:

$$\frac{n!}{n_1!n_2!...n_k!}$$

2.3 Phương pháp quy về bài toán con

- Một phương pháp khác để giải bài toán đếm là qui về các bài toán con đơn giản hơn bài toán ban đầu;
- **Cách thực hiện**: sử dụng các nguyên lý cộng, nguyên lý nhân, nguyên lý bù trừ để biểu diễn bài toán ban đầu phức tạp qua các bài toán con đã biết lời giải

Ví dụ 1:

Trong các số tự nhiên có 7 chữ số hãy đếm số các số thuận nghịch (số đối xứng) có tổng các chữ số là 18?

Lời giải.

Số tự nhiên có 7 chữ số là số thuận nghịch có dạng $X=x_1x_2x_3x_4x_3x_2x_1$.

Số lượng các số cần tìm bằng số lượng các nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 18,$$

với điều kiện, $1 \le x_1 \le 9$, $0 \le x_i \le 9$, $i=2, 3, 4$.

Từ đó, x_4 phải là số chẵn: $x_4 = 2x'_4$.

Như vậy, số lượng các số cần tìm bằng số lượng các nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x'_4 = 9,$$

với điều kiện $1 \le x_1 \le 9$, $0 \le x_{2,3} \le 9$, $0 \le x'_4 \le 4$.

Số lượng các số cần tìm bằng số lượng N các nghiệm nguyên không âm của phương trình

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8,$$

với điều kiện $0 \le x_1 \le 8$, $0 \le x_{2,3} \le 9$, $0 \le x_4 \le 4$.

- **Nhận xét**: Do $k = 8 \Rightarrow x_{1,2,3} \le 8$.

- Gọi N_1 là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$:

Có $n = 4$, $k = 8 \Rightarrow N_1 = C(4 + 8 - 1, 8) = C(11, 8) = 165$

- Gọi N_2 là số nghiệm nguyên không âm của phương trình $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 8$, với $x_4 \geq 5$:

Có $n = 4$, $k = 8 - 5 = 3$

$\Rightarrow N_2 = C(4 + 3 - 1, 3) = C(6, 3) = 20.$

- **Kết luận**: Số lượng các số cần tìm

$$N = N_1 - N_2 = 165 - 20 = 145.$$

2.4 Hệ thức truy hồi

- Khái niệm hệ thức truy hồi
- Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi
- Giải các hệ thức truy hồi

2.4.1 Khái niệm hệ thức truy hồi

- **Định nghĩa:**

- Hệ thức truy hồi đối với dãy số $\{a_n\}$ là công thức biểu diễn a_n qua một hay nhiều số hạng đứng trước của dãy:

$$a_n = F(a_{n-k}, a_{n-k+1}, \ldots, a_{n-1}), \ \forall n \geq l \geq k$$

- Các ***điều kiện đầu*** đối với dãy số định rõ giá trị các số hạng đi trước số hạng đầu tiên kể từ đó công thức truy hồi có hiệu lực:

$$a_{l-k} = d_0, \ldots, a_{l-1} = d_{k-1};$$

Nhận xét:

- Hệ thức truy hồi cùng với các điều kiện đầu xác định duy nhất dãy số $\{a_n\}$.
- Hệ thức truy hồi cùng với các điều kiện đầu còn gọi là định nghĩa đệ quy của dãy số.

- Dãy số gọi là ***lời giải*** hay là ***nghiệm*** của hệ thức truy hồi nếu các số hạng của nó thỏa mãn hệ thức truy hồi.

2.4.2 Mô hình hóa bằng hệ thức truy hồi

- **Ví dụ 1**. Lãi kép (lãi sinh lãi)

Giả sử một người gửi 10 000 đô-la vào tài khoản của mình tại một ngân hàng với lãi suất kép 11% mỗi năm. Sau 30 năm người đó có bao nhiêu tiền trong tài khoản của mình?

Giải:

Gọi P_n là số tiền có trong tài khoản sau n năm. Số tiền cần tìm là P_{30}.

Với n = 0 $\Rightarrow$ P_0 = 10 000.

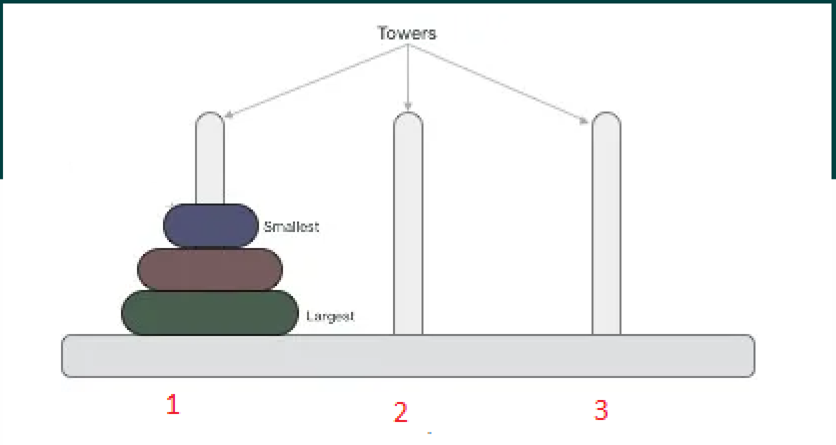
Xét n > 0: Vì số tiền có sau n năm bằng số tiền sau n-1 năm cộng với lãi suất năm thứ n, nên có hệ thức truy hồi:

$$P_n = P_{n-1} + 0.11*P_{n-1} = 1.11*P_{n-1}$$

Điều kiện đầu là P_0 = 10 000.

$$P_{30} = P_0*(1.11)^{30} = 228922.97$$

Ví dụ 2: Tháp Hà Nội



Có n tầng tháp khác nhau đặt tại cọc 1. Cần chuyển n tầng tháp sang cọc 2 với điều kiện:

(1) Mỗi lần chỉ được chuyển 1 tầng tháp;

(2) Không được đặt tầng tháp lớn trên tầng tháp nhỏ

(3) Được sử dụng cọc 3 để đặt các tầng tháp

Tính số lần chuyển tháp ít nhất thỏa mãn bài toán.

Giải ví dụ 2

Gọi H_n là số lần dịch chuyển cần thiết để giải bài toán tháp Hà nội với n tầng tháp.

Với n = 0 $\Rightarrow H_0 = 0$.

Với n = 1 $\Rightarrow H_1 = 1$.

Với n > 1:

(1) Cần chuyển n-1 tầng tháp phía trên ở cọc 1 sang cọc 3

$\Rightarrow$ Cần H_{n-1} lần chuyển.

Giải ví dụ 2

(2) Chuyển tầng tháp lớn nhất từ cọc 1 sang cọc 2

$\Rightarrow$ Cần 1 lần chuyển;

(3) Chuyển (n-1) tầng tháp còn lại từ cọc 3 sang cọc 2

$\Rightarrow$ Cần H_{n-1} lần dịch chuyển.

Do vậy, có hệ thức truy hồi:

$$H_n = 2*H_{n-1} + 1$$

Điều kiện đầu: $H_0 = 0$.

Ví dụ 3:

Tìm hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và không chứa hai số 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu như thế có độ dài bằng 8?

Giải

a) Gọi a_n là số lượng các xâu nhị phân x độ dài n và không chứa 2 số 0 liên tiếp.

- n = 1: Có hai xâu nhị phân {0, 1} $\Rightarrow a_1 = 2$;

- n = 2: Có 4 xâu nhị phân {00, 01, 10, 11} $\Rightarrow a_2 = 3$;

Giải ví dụ 3:

Với n ≥ 3, có các trường hợp sau:

- Nếu x[n] = 1 thì có a_{n-1} xâu không chứa hai số 0 liên tiếp;

- Nếu x[n] = 0 và x[n-1] = 1 thì có a_{n-2} xâu không chứa hai số 0 liên tiếp;

- Nếu x[n] = x[n-1] = 0 thì không có xâu nào thỏa mãn;

$\Rightarrow$ Hệ thức truy hồi: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$;

Điều kiện đầu: $a_1 = 2$, $a_2 = 3$;

Giải ví dụ 3:

b) Số lượng các xâu nhị phân độ dài 8 thỏa mãn là a_8.

Có $a_3 = 5$; $a_4 = 8$;

$a_5 = 13$; $a_6 = 21$;

$a_7 = 34$; $a_8 = 55$.

Kết luận: Có 55 xâu nhị phân độ dài 8 không chứa 2 số 0 liên tiếp.

Ví dụ 4:

Tìm hệ thức truy hồi và các điều kiện đầu để tính số các xâu nhị phân độ dài n và có chứa hai số 0 liên tiếp. Có bao nhiêu xâu như thế có độ dài bằng 8?

Giải

a) Gọi a_n là số lượng các xâu nhị phân x độ dài n và có chứa 2 số 0 liên tiếp.

- n = 1: Có hai xâu nhị phân {0, 1} $\Rightarrow a_1 = 0$;

- n = 2: Có 4 xâu nhị phân {00, 01, 10, 11} $\Rightarrow a_2 = 1$;

Giải ví dụ 4:

Với $n \geq 3$, xét xâu x độ dài n có chứa 2 số 0 liên tiếp.

Có các trường hợp sau:

- Nếu $x[n] = 1$ thì có a_{n-1} xâu có chứa hai số 0 liên tiếp;
- Nếu $x[n] = 0$ và $x[n-1] = 1$ thì có a_{n-2} xâu có chứa hai số 0 liên tiếp;
- Nếu $x[n] = x[n-1] = 0$ thì có 2^{n-2} xâu thỏa mãn;

$\Rightarrow$ Hệ thức truy hồi: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 2^{n-2}$

Điều kiện đầu: $a_1 = 0$, $a_2 = 1$;

Giải ví dụ 4:

b) Số lượng các xâu nhị phân độ dài 8 thỏa mãn là a_8.

Có $a_3 = 3$; $a_4 = 8$;

$a_5 = 19$; $a_6 = 43$;

$a_7 = 94$; $a_8 = 201$.

Kết luận: Có 201 xâu nhị phân độ dài 8 có chứa 2 số 0 liên tiếp.

2.4.3 Giải các hệ thức truy hồi

Định nghĩa:

- Một hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất bậc k với hệ số hằng số là hệ thức truy hồi có dạng:

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2} + \ldots + c_ka_{n-k} \quad (1)$$

trong đó $c_1, c_2, \ldots, c_k$ là các số thực, $c_k \neq 0$.

- k điều kiện đầu:

$$a_0 = d_0,\ a_1 = d_1,\ \ldots,\ a_{k-1} = d_{k-1} \quad (2)$$

Phương pháp giải:

- Phương pháp cơ bản để giải hệ thức truy hồi tuyến tính thuần nhất là tìm nghiệm dưới dạng $a_n = x^n$ trong đó x là các hằng số khác 0.
- Thay vào (1) có:

$$x^n = c_1x^{n-1} + c_2x^{n-2} + \dots + c_kx^{n-k}$$

$$\Rightarrow x^k - c_1x^{k-1} - c_2x^{k-2} - \dots - c_k = 0 \quad (3)$$

- (3) gọi là ***phương trình đặc trưng***
- Nghiệm của (3) gọi là ***nghiệm đặc trưng*** của hệ thức truy hồi.

- **Bổ đề 1**:

Nếu r là nghiệm của (3) thì $a_n = r^n$ là nghiệm của (1).

- **Bổ đề 2**:

Nếu dãy $\{p_n\}$ và $\{q_n\}$ là các nghiệm của hệ thức truy hồi (1), (chưa xét các điều kiện đầu), thì $u_n = \alpha p_n + \beta q_n$ cũng là nghiệm của (1), trong đó α, β là hằng số thực.

Định lý 1:

Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi

$$x^k - c_1x^{k-1} - \ldots - c_{k-1}x - c_k = 0$$

có k nghiệm thực phân biệt là $r_1, r_2, \ldots, r_k$.

Có thể xác định duy nhất các hệ số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ sao cho dãy $\{a_n\}$ được biểu diễn dưới dạng:

$$a_n = \alpha_1 r_1^n + \alpha_2 r_2^n + \ldots + \alpha_k r_k^n$$

Các hệ số $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ được xác định từ hệ:

$$a_0 = d_0, a_1 = d_1, \ldots, a_{k-1} = d_{k-1} \quad (4)$$

Ví dụ 1:

Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi:

$$a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}, \text{ với } n > 1$$

và điều kiện đầu $a_0 = 2$, $a_1 = 7$.

Giải.

Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi:

$$x^2 - x - 2 = 0$$

$\Rightarrow$ Nghiệm là $r_1 = -1$ và $r_2 = 2$.

Nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = \alpha_1(-1)^n + \alpha_2(2)^n$$

Từ điều kiện đầu có:

$a_0 = 2 = \alpha_1 + \alpha_2$

$a_1 = 7 = -\alpha_1 + 2\alpha_2$

Giải hệ được $\alpha_1 = -1$ và $\alpha_2 = 3$.

Vậy, nghiệm của hệ thức truy hồi là

$$a_n = -(-1)^n + 3.\ 2^n,\ n \geq 0$$

Ví dụ 2:

Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi:

$$a_n = a_{n-1} + 4a_{n-2} - 4a_{n-3} \text{ với } n \geq 3$$

và các điều kiện đầu $a_0 = 5$ và $a_1 = -3$, $a_2 = 17$.

Giải

Phương trình đặc trưng:

$$x^3 - x^2 - 4x + 4 = 0$$

$\Rightarrow$ Nghiệm $r_1 = 1$, $r_2 = -2$, $r_3 = 2$;

Nghiệm của hệ thức truy hồi:

$a_n = \alpha_1 1^n + \alpha_2(-2)^n + \alpha_3(2)^n$

Từ điều kiện đầu có hệ:

$a_0 = 5 = \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$a_1 = -3 = \alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3$

$a_2 = 17 = \alpha_1 + 4\alpha_2 + 4\alpha_3$

$\Rightarrow \alpha_1 = 1, \ \alpha_2 = 3, \ \alpha_3 = 1$

Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi là

$$a_n = 1 + 3(-2)^n + 2^n$$

Định lý 2:

Phương trình đặc trưng $x^2 - c_1x - c_2 = 0$ có nghiệm kép $r_0 \neq 0$.

Khi đó dãy $\{a_n\}$ là nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = c_1a_{n-1} + c_2a_{n-2}$$

nếu và chỉ nếu

$$a_n = \alpha_1 r_0^n + \alpha_2 n r_0^n$$

Trong đó α_1 và α_2 các hằng số được xác định nhờ điều kiện đầu: $a_0 = d_0$, $a_1 = d_1$.

Ví dụ 3:

Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi:

$$a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2}, \text{ với } n > 1$$

và điều kiện đầu $a_0 = -1$, $a_1 = 18$.

Giải.

Phương trình đặc trưng của hệ thức truy hồi:

$$x^2 - 6x + 9 = 0$$

$\Rightarrow$ Nghiệm là $r_1 = r_2 = 3$.

Nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = \alpha_1 3^n + \alpha_2 n 3^n$$

Từ điều kiện đầu có:

$a_0 = -1 = \alpha_1$

$a_1 = 18 = \alpha_1 3 + \alpha_2 3$

Giải hệ được $\alpha_1 = -1$ và $\alpha_2 = 7$.

Vậy nghiệm của hệ thức truy hồi là

$$a_n = -3^n + 7n3^n$$

Định lý 3:

Nếu phương trình đặc trưng $x^2 - c_1x - c_2 = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp:

$$r_1 = r(\cos\theta + i\sin\theta),\ r_2 = r(\cos\theta - i\sin\theta)$$

thì nghiệm tổng quát của hệ thức truy hồi bậc 2 là $a_n = r^n(\alpha_1 \cos n\theta + \alpha_2 \sin n\theta)$.

α_1, α_2 được xác định nhờ điều kiện đầu.

Ví dụ 4:

Tìm nghiệm của hệ thức truy hồi

$$a_n = 2a_{n-1} – 4a_{n-2}, \text{ với } a_0 = 1,\ a_1 = 4$$

Giải:

Phương trình đặc trưng $x^2 – 2x + 4 = 0$ có hai nghiệm phức : $r_1 = 2(\cos \pi/3 + i \sin \pi/3)$,

$r_2 = 2(\cos \pi/3 - i \sin \pi/3)$.

Từ đó có

$$a_n = 2^n\left(\cos(n\pi/3) + \sqrt{3}\sin(n\pi/3)\right)$$

Giải hệ thức truy hồi bậc nhất:

- Xét hệ thức truy hồi dạng:

$$a_n = qa_{n-1} + d$$

với điều kiện đầu $a_0 = b$.

- Khi $q = 1 \Rightarrow \{a_n\}$ là cấp số cộng có công sai d

$\Rightarrow$ Có $a_n = b + nd$

- Khi $d = 0 \Rightarrow \{a_n\}$ là cấp số nhân có công bội q

$\Rightarrow$ Có $a_n = bq^n$

Giải hệ thức truy hồi bậc nhất (tiếp):

- Đặt $v_n = a_n - a_{n-1}$ ta có:

$$v_n = qv_{n-1},\ n \geq 2$$

với $v_1 = qb + d - b = (q - 1)b + d$

- $\{v_n\}$ là cấp số nhân công bội q

$\Rightarrow v_n = v_1 q^{n-1}$

- Có $a_n = (a_n - a_{n-1}) + (a_{n-1} - a_{n-2}) + \ldots + (a_1 - a_0) + a_0 = v_n + v_{n-1} + \ldots + v_1 + b$

$\Rightarrow a_n = ((q-1)b + d)(q^n - 1)/(q - 1) + b$

2.5 Phương pháp chia để trị

- **Hệ thức chia để trị**

- Xét thuật toán phân chia một bài toán cỡ n thành p bài toán nhỏ, mỗi bài toán nhỏ có cỡ n/q. (Giả thiết n chia hết cho q).

- Giả sử tổng các phép toán cần thêm vào khi phân chia bài toán cỡ n thành các bài toán có cỡ nhỏ là g(n).

- Đặt f(n) là số các phép toán cần thiết để giải bài toán xuất phát,

- Có f thỏa mãn các hệ thức truy hồi:

$$f(n) = p*f(n/q) + g(n)$$

- Hệ thức trên có tên là ***hệ thức truy hồi chia để trị***.

Định lý 1:

Giả sử f là hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi

f(n) = p*f(n/q) + c, với mọi n chia hết cho q, $p \geq 1$, q là số nguyên > 1, c là số thực dương.

Khi đó:

$$f(n) = \begin{cases} O(n^{\log_q p}) & khi \quad p > 1 \\ O(\log n) & khi \quad p = 1 \end{cases}$$

Định lý 2:

Giả sử f là hàm tăng thỏa mãn hệ thức truy hồi

$f(n) = p*f(n/q) + c*n^d$, với $n = q^k$, $p \geq 1$, q là số nguyên > 1, c và d là các số thực dương.

Khi đó

$$f(n) = \begin{cases} O(n^d) & khi \quad p < q^d \\ O(n^d \log n) & khi \quad p = q^d \\ O(n^{\log_q p}) & khi \quad p > q^d \end{cases}$$

Thảo luận


THANK YOU