TOÁN RỜI RẠC 1

CHUONG 5

Giảng viên: Vũ Văn Thỏa

CHƯƠNG 5. BÀI TOÁN TỒN TẠI

- Giới thiệu bài toán tồn tại
- Phương pháp phản chứng
- Phương pháp thiết kế

5.1 Giới thiệu bài toán tồn tại

- **<u>Đặt bài toán</u>**

Input: Cho tập dữ liệu D = {x}, x = (x_1, x_2, …, x_n) và một tính chất P;

Output: Tồn tại hay không phần tử x $\in$ D có tính chất P;

Ý nghĩa của bài toán tồn tại

- Nếu biết chắc chắn không có phần tử x nào thuộc D có tính chất P $\Rightarrow$ Không cần tiến hành tìm kiếm x mà xuất NO.

  $\Rightarrow$ Tiết kiệm thời gian, công sức.

- Về mặt lý thuyết, sử dụng các phương pháp tìm kiếm $x \in D$ có tính chất P $\Rightarrow$ Giải được bài toán tồn tại.

$\Rightarrow$ Nghiên cứu, đề xuất các thuật toán tìm kiếm.

Một số bài toán tồn tai:

1. (Bài toán Fermat)

Input:

Cho số nguyên dương $n > 2$;

Output:

Tìm các số nguyên dương x, y, z thỏa mãn

$$x^n + y^n = z^n;$$

Kết quả: Không tồn tại x, y, z.

2. Bài toán xếp hàng (Euler)

- **Input**:
  - Cho n đơn vị;
  - Mỗi đơn vị có n đại diện, mỗi đại diện có thẩm quyền khác nhau;
- **Output**: Phương án sắp xếp nxn đại diện thành
  - Một hình vuông n hàng và n cột;
  - Mỗi hàng và mỗi cột gồm đại diện của các đơn vị khác nhau và có thẩm quyền khác nhau;
- **Kết quả**:

Tồn tại phương án xếp hàng với n = 4k + 2 với k > 1.

Bài toán 36 sĩ quan

- **Với n = 6:**
  - Cần xếp hàng 36 Sĩ quan thuộc 6 đơn vị A, B, C, D, E, F và có 6 cấp bậc khác nhau a, b, c, d, e, f.
  - Bài toán không tồn tại phương án xếp hàng thỏa mãn điều kiện.
- Bài toán có áp dụng trong quy hoạch thực nghiệm, xếp lịch thi đấu, …

Lời giải bài toán xếp hàng với n = 4

A a	D d	B a	C c
B c	C a	A d	D b
C d	B b	D c	A a
D a	A c	C b	B d

Lời giải bài toán xếp hàng với n = 5

A a	B b	C c	D d	E e
C d	D e	E a	A b	B c
E b	A c	B d	C e	D a
B e	C a	D b	E c	A d
D c	E d	A e	B a	C b

3. Bài toán 4 màu

Input:

Cho bản đồ phẳng được chia thành n quốc gia, mỗi quốc gia có chung biên giới là một đường liên tục với một số quốc gia khác;

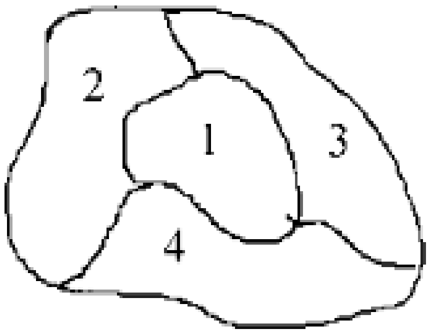
Output:

Tìm k nhỏ nhất các màu khác nhau để tô màu bản đồ sao cho hai quốc gia có biên giới chung được tô bởi hai màu khác nhau;

Kết quả: k = 4.

Không thể tô màu bản đồ với k < 4

Xét bản đồ



Vì mỗi nước đều có chung biên giới với 3 nước khác

- **Kết luận**:

Bản đồ đã cho không thể tô màu với số màu k = 3.

Số màu tối thiểu là k = 4.

4. Bài toán hệ đại diện phân biệt

- **Input:**

  Cho S_1, S_2, …, S_n là các tập con của S;

- **Output:**

Họ $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$, với $a_i \in S_i$, $a_i \neq a_j$; i,j=1..n.

(Gọi là hệ đại diện phân biệt - TRAN)

- **Kết quả**: Tìm được các điều kiện đủ để tồn tại TRAN.

Phương pháp giải bài toán tồn tại

- **Phương pháp phản chứng**:

(1) Phủ định kết luận của bài toán tồn tại;

(2) Dùng lập luận toán học để tìm ra mâu thuẫn;

- Phương pháp thiết kế:

(1) Xây dựng thành phần thứ nhất của x;

(2) Chỉ ra cách xây dựng thành phần thứ k của x trên cơ sở đã biết các thành phần 1, 2, …, k-1;

5.2 Phương pháp phản chứng

- **Nguyên lý Dirichlet:**

  Xếp n đối tượng vào k hộp. Nếu n > k thì tồn tại hộp chứa > 1 đối tượng.

- **Nguyên lý Dirichlet tổng quát:**

  Xếp n đối tượng vào k hộp. Tồn tại hộp chứa không ít hơn $\lceil n/k \rceil$ đối tượng.

Ghi chú:

- Hàm trần $\lceil n/k \rceil$ nhận giá trị là số nguyên nhỏ nhất x sao cho $kx \geq n$.

Ví dụ: $n = 7, k = 2 \Rightarrow \lceil 7/2 \rceil = 4$.

Từ đó, $\lceil n/k \rceil = x \Leftrightarrow n = k(x - 1) + r, 0 < r < k$.

$\Rightarrow n_{min} = k(x - 1) + 1$.

- Hàm sàn $\lfloor n/k \rfloor$ nhận giá trị là số nguyên lớn nhất x sao cho $kx \leq n$.

Ví dụ: $n = 7, k = 2 \Rightarrow \lfloor 7/2 \rfloor = 3$.

- Từ đó, $\lfloor n/k \rfloor = [n/k]$.

Áp dung:

- **<u>Ví dụ 1:</u>**

Trong một tháng 30 ngày, một đội bóng chày chơi ít nhất mỗi ngày một trận, nhưng cả tháng chơi không quá 45 trận.

Hãy chỉ ra rằng, trong một số ngày liên tiếp nào đó của tháng, đội bóng chơi tất cả 14 trận.

Giải ví dụ 1

- Gọi a_i là số trận mà đội bóng đã chơi kể từ đầu tháng đến hết ngày i. Khi đó $a_1, a_2, \ldots, a_{30}$ là một dãy các số nguyên dương tăng với $1 \le a_i \le 45$.
- Đặt $b_i = a_i + 14$ nên dãy $\{b_i\}$ cũng là một dãy tăng: $15 \le b_i \le 59$.
- Dãy 60 phần tử $a_1, a_2, \ldots, a_{30}, b_1, b_2, \ldots, b_{30}$ nhận các giá trị từ 1 và đến 59. Theo nguyên lý Dirichlet có ít nhất hai phần tử bằng nhau.

$\Rightarrow$ tồn tại i, j để $a_i = b_j \Rightarrow a_i = a_j + 14 \Rightarrow a_i - a_j = 14$. Điều này có nghĩa là từ ngày j+1 cho đến ngày i đội đã chơi tất cả đúng 14 trận.

Ví dụ 2:

Cho một nhóm 6 người.

Chứng tỏ rằng, tìm được 3 người trong nhóm hoặc là đôi một quen nhau hoặc là đôi một không quen nhau.

Giải

- Gọi A là một trong 6 người;
- 5 người còn lại được chia làm 2 nhóm:
  - Nhóm đều quen A;
  - Nhóm đều không quen A.
- Theo nguyên lý Dirichlet tổng quát, có $\lceil 5/2 \rceil = 3$, do đó trong hai nhóm phải có một nhóm có ít nhất là 3 người.
- Xét trường hợp trong nhóm có 3 người đều quen A:
  - Nếu trong nhóm có 2 người quen nhau thì 2 người này cùng với A lập thành một nhóm 3 người đều quen nhau.
  - Nếu trong nhóm không có 2 người nào quen nhau thì chứng tỏ họ là bộ ba không quen nhau.
- Tương tự có thể chứng minh cho trường hợp có ít nhất 3 người đều không quen A.

Ví dụ 3:

Cho tập A = {(x,y), x, y là các số nguyên từ 10 đến 41}.

Cần lấy ra từ A ít nhất bao nhiêu phần tử để chắc chắn có cặp số (a,b) sao cho a*b chia hết cho 4.

Giải

- Trong 32 số nguyên từ 10 đến 41 có 16 số lẻ và 8 số chẵn không chia hết cho 4.
- Cần tính số lượng k các cặp (x,y) mà tích xy không chia hết cho 4. Có các trường hợp sau:

- x và y đều lẻ

$\Rightarrow$ có 16x16 = 256 cặp

- x lẻ và y chẵn không chia hết cho 4 $\Rightarrow$ có 16x8 = 128 cặp
- x chẵn không chia hết cho 4 và y lẻ $\Rightarrow$ có 8x16 = 128 cặp

$\Rightarrow$ có k = 512 cặp.

- **Kết luận**: Số phần tử ít nhất cần lấy ra từ A thỏa mãn điều kiện là n_{min} = k+1 = 513.

5.3 Phương pháp thiết kế

- **Định lý Hall**

Cho S_1, S_2, …, S_n là các tập con của S thỏa mãn:

- Mỗi tập con chứa ít nhất t phần tử;

- Hợp của k tập con bất kỳ có ít nhất k phần tử;

Khi đó:

- Nếu $t \leq n \Rightarrow$ có ít nhất t! hệ đại diện phân biệt;
- Nếu $t > n \Rightarrow$ có ít nhất t!/(t-n)! hệ đại diện phân biệt;

Chứng minh

Sử dụng phương pháp quy nạp theo n:

- Với n = 1 $\Rightarrow$ có t!/(t-1)! hệ đại diện phân biệt

$\Rightarrow$ định lý đúng.

- Giả sử định lý đúng với n $\leq$ m. Chứng minh định lý đúng với n = m + 1.

Thảo luận


THANK YOU