## 代数系统

1. 构成和分类

载体 运算 代数常数

如果两个代数系统包含同样个数的运算和常数，且对应运算种类和个数相同+相同公理=同种类的

1. 代数常数

幺元=>逆元和零元

1. 子代数

如果A的常数集合在运算下是封闭的，即为最小子代数。+A自身=平凡子代数，其余称为真子代数

四．同构就是映射函数h(双射函数)，注意双射意味着集合大小相同

运算的映射h=映射h后再运算

特殊元素同样存在

1. 同态

类似同构，但是集合大小无要求，相当于原代数的放大和缩小

此时<h(s),o’,k’>称为同态象(同态象为同态的子代数)，当h满射(S’被射满)时，才称S和S’同态。

双射即同构。

同态象的实质就是运算等价类的划分。

1. 同余关系(等价关系在代数系统中的别名)

同态<=>同余关系

同余关系=>商代数

1. 积代数

A’和A”相同构成成分

A’×A”={S’×S”，\*，△，<k’,k”>}

1. 半群

广群：只要求运算封闭性

半群：在广群基础上结合律

独异点(含么半群)：在半群基础上有单位元

8.1幂次方性质

a^0=e

其他与幂运算类似

8.2名词扩展

子代数：子半群 子独异点

积代数：半群直积 独异点直积

商代数：商半群 商独异点

8.3.子代数系统运算

非空子半群的交为子半群

子独异点的交为子独异点

8.4合成运算

S^s={f|S->S},这是同态

8.4

V=<S,\*> B是V的一个子集合，B生成的子半群

由B生成一个子半群，即运算结果包含

并以<B>表示，利用运算封闭性质

<B>={A|A是S的子半群，B属于A}

应用：字母表构成单词，空字是一个单位元，即为特异点

这种方法形成的叫做：自由半群

1. 群<G,o,e,-1>

9.1从半群到群

逆运算（一元运算）和单位元（零元运算）以及结合律

9.2性质

幂运算规则

方程唯一解（ax=b,ya=b有解）

消去律

运算表的置换

元素阶性质

9.3等价定义

<G，o>o可结合，存在有单位元e,并且每个元素a相对e存在右逆元，则为群

9.4群的术语

平凡群：只含单位元<{0}，+>

交换群：Abel群，a\*b=b\*a

群G的阶=G的基数

元素的阶：a^k=e的最小正整数k

Eg：<Z6,模六> |1|=6，不超过群的阶，因此有限群必存在元素的阶

但元素的阶存在，不代表群是有限群。

9.5幂运算规则

9.5.1（a^-1）^(-1)=a

9.5.2 (ab)^-1=(b^-1)(a^-1)

9.5.3 若G为Abel群，（ab）^n=(a^n)(b^n)

5.1和5.2利用单位元的定义和结合律，证（ab）（b^-1 a^-1）=e和（b^-1 a^-1）（ab）=e

9.6群方程有解

ax=b的解(a^-1)b,再设存在c为解，即ac=b。

c=ec=(a-1 a)c=a^-1(ac)=(a^-1)b,即唯一解

=>G是半群，若任意a,b属于G，满足方程，即G为群

证明：右单位元->右逆->等价定义

9.7消去律

利用同乘逆元就可以证明

=>G是有限半群，不含零元，成立消去律即使群

G中{a1,a2,......an},则a2G={a2a1,a2a2,.......a2an},若群中有a2ai=a2aj相等，由消去律ai=aj,则a2G也正好等于G。

由运算表，满足方程有解，运算表中的每行、每列都是群的置换，也就是排列。可用于证明是不是群。

9.8元素的阶

（a^-1）^n=(a^n)^-1=e^-1=e,|a^-1|=n

1. 子群

1.判定定理

G是群，H是G的非空子集，任意a,b属于H

1.1 ab属于H，b^-1属于H。

1.2 ab^-1属于H

1.3 ab属于H，H是有限非空子集（列举法）

2.子群实例

2.1 a生成子群 <a>={a^k|k属于Z}，a属于G

2.2 B生成子群，B为G一个子集合，B中元素进行运算，得出一个群

2.3 中心，C={a|a属于G,任意x属于G，ax=xa},最小为单位元

2.4 a的正规化 N(a)={x|x属于G，xa=ax}a属于G

2.5 共轭子群 xH(x^-1)={xh(x^-1)|h属于H}

2.6 H的正规化 N(H)={x|x属于G，xH(x^-1)=H},H属于G

2.7 子群的交是子群

子群的并，需要一个包含一个才能是子群

1. A、B构成子群，AB={ab|a属于A，b属于B}
2. 特殊群

循环群

1.定义

G=<a>={a^k|k属于Z},a属于G

分为无限循环群生成元a和a^-1

n阶循环群由Φ（n）即与n互为质数

2.性质

G是循环群

a.G的子群也是循环群

b.若是无限阶，则G的子群除{e}也是无限阶

c.若是n阶，子群是n的因子阶（生成元的阶是其因子）

变换群

1.定义

E（A）={f:A->A为双射}即自己射自己的双射函数总体

2.n元置换群：即集合元素有限的变换群

2.1轮换：循环双射

注意外面从右向左里面从左向右

不存在相交，且次序无影响

轮换指数，可表示为x1+2x2+...nxn=n

n元置换群可以表示为轮换的乘积

并由此可得置换的乘法

2.2对换 外面从右向左里面从左向右

2.3特殊群

对称群：包含所有可能的置换

交代群：所有偶置换

2.4阶

k阶轮换的阶k，由此置换的阶为所有轮换的阶的最小公倍数

1. 群的分解

1.陪集

定义：G为群，集合H<=G,a属于G

右陪集：Ha={ha|h属于H}

性质：

1.Ha=H

2.a属于Hb，则有Ha=Hb则有a（b^-1）属于H

3.陪集是一个等价类

H的左陪集和右陪集数相等

2.拉格朗日定理

|G|=|H(子群)|子群的阶是群的阶的因子

推论：元素的阶是|G|的阶的因子

素数阶群一定是循环群

结论：6阶群若无6阶元必含有3阶元

由此6阶群要么6阶循环群或3元对称群

3.共轭关系

aRb<=>存在x（x属于G(群)，b=xax^-1）

a代表共轭群

|a|=[G:N(a)]

共轭群个数与a陪集的数量相同