Univerza v Ljubljani
Fakulteta za računalništvo in informatiko

Ime in priimek (TISKANO):

____

Vpisna:

____

1	2	3	4	5
		Σ		

Izpit pri predmetu
Izračunljivost in računska zahtevnost

22. 1. 2021

Pišite čitljivo. Odgovore utemeljite in obrazložite.
Čas reševanja: 80 minut.

1. naloga [6]
SLO. Kašna je zgradba in naloge komponent (a) determinističnega končnega avtomata, (b) determinističnega skladovnega avtomata in (c) determinističnega Turingovega stroja?
ENG. What is the structure and function of the components of the (a) finite automaton; (b) stack automaton; and (c) Turing machine.

2. naloga [6]
SLO. (a) Kaj je značilnost nedeterminističnega računanja? (b) S kakšnim namenom ga vpeljemo v računske modele?
ENG. (a) What are the characteristics of nondetermninistic computation. (b) For what reasons is introduced into models of computation?

3. naloga [6]
SLO. Katere formalne jezike sprejemajo: (a) končni avtomat; (b) nedeterministični končni avtomat; (c) skladovni avtomat; (d) deterministični skladovni avtomat; (e) Turingov stroj; (f) nedeterministični Turingov stroj?
ENG. Which formal languages are accepted by: (a) finite automata; (b) nedeterministic finite automata; (c) stack automata; (d) deterministic stack automata; (e) Turing machine; (f) nedeterministic turing machine?

4. naloga [6]
SLO. (a) Strogo in intuitivno definirajte razreda P in NP. (b) V kakšni relaciji sta ta razreda? (c) Strogo in intuitivno definirajte, kdaj je računski problem NP-poln in kdaj NP-težek.
ENG. (a) Define (formally and intuitively) the classes P and NP. (b) Define (formally and intuitively) when is a problem NP-complete and when NP-hard.

5. naloga [8]
SLO. Dokažite ali ovrzite: (a) Če sta A, B poljubna kontekstno neodvisna jezika, je $AB \cup BA$ kontekstno neodvisen. (b) Če sta A, B poljubna kontekstno neodvisna jezika, je $AB \cap BA$ kontekstno neodvisen.
ENG. Prove or disprove: (a) If A, B are arbitrary context free languages, then $AB \cup BA$

is a context free language. (b) If A, B are arbitrary context free languages, then $AB \cap BA$ is a context free language.

6. naloga [8]
SLO. Dokažite: PSPACE = NPSPACE.
ENG. Prove: PSPACE = NPSPACE.

7. naloga [10]
SLO. Za problem Π smo razvili nedeterministični algoritem z nedeterministično prostorsko zahtevnostjo $\log_2 n$. Ali to zagotavlja, da je $\Pi \in P$? Odgovor utemelji.
ENG. For a given problem Π we designed a nondeterministic algorithm of nondeterministic space complexity $\log n$. Does this guarantee that $\Pi \in P$? Explain.

Odgovori na teoretična vprašanja:

1. (a) Omejen trak z enakimi celicami + okno nad celico, ki se premika le v desno in skozi katerega se lahko le bere vsebina celice + nadzorna enota, ki vidi skozi okno, je vedno v nekem stanju in ima det.program. Trak vsebuje vhodno besedo; nadzorna enota menjava stanja in izvaja tekoce ukaze glede na stanje in simbol v oknu
   (b) Omejen trak z enakimi celicami + okno nad celico, ki se premika le v desno in skozi katerega se le bere vsebina celice + nadzorna enota, ki vidi skozi okno, je vedno v nekem stanju in ima det.program + sklad. Trak ima vhodno besedo; nadzorna enota menjava stanja in izvaja tekoce ukaze glede na stanje in simbola v oknu in vrhu sklada
   (c) Potencialno neomejen trak z enakimi celicami + okno nad celico, ki se lahko premika v desno, levo ali miruje, in skozenj lahko bere in spreminja vsebino celice + nadzorna enota, ki vidi skozi okno, je vedno v nekem stanju in ima det.program. Trak vsebuje vhodno besedo, nanj pise vmesne besede in koncno besedo (rezultat)
2. (a) Ce so med racunanjem mozne alternative, lahko brez racunanja razpozna in izbere najboljso alternativo (kar je nerealisticno).
   (b) Omogoca, da najdemo spodnjo mejo rac.zahtevnosti problema + vcasih omogoca enostaven razvoj nedet.algoritma (ki ga nato lahko simuliramo z deterministicnim – kar je za zacetek ok)
3. (a) regularne b) regularne c) KNJ d) nekatere (ne vse) KNJ e) polodlocljive (c.e.) f) polodlocljive (c.e.)
4. (a) $\mathrm{P} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{DTIME}(n^k)$. Razred jezikov, ki imajo polinomsko det. casovno zahtevnost (= razred odlocitvenih problemov, ki imajo polinomsko det.casovno zahtevnost.). $\mathrm{NP} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{NTIME}(n^k)$. Razred jezikov, ki imajo polinomsko nedet.casovno zahtevnost (= razred odlocitvenih problemov, ki imajo polinomsko nedet.casovno zahtevnost.).
   (b) P$\subseteq$NP (in P$\subset$?NP)
   (c) D je NP-tezek: vsak problem D' iz NP se da prevesti nanj v polinomskem casu; $\forall D' \in \mathrm{NP} : D' \leq^p D$. D je NP-poln: je v NP in vsak problem D' iz NP se da prevesti nanj v polinomskem casu; $D \in \mathrm{NP} \wedge \forall D' \in \mathrm{NP} : D' \leq^p D$.
5. (a) Razred KNJ jezikov je zaprt za konkatenacijo, zato sta AB in BA KNJ; razred KNJ jezikov je zaprt za unijo, zato je $AB \cup BA$.
   (b) Razred KNJ ni zaprt za presek, zato v splosnem $AB \cap BA$ ni v KNJ.
6. PSPACE $\subseteq$ NPSPACE je trivialno, ker je vsak DTM tudi NTM. Obratno: NPSPACE $= \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{NSPACE}(n^i) \subseteq$ /Savitch/ $\subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} \mathrm{DSPACE}(n^{2i}) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathrm{DSPACE}(n^k) =$ PSPACE
7. Alg. ima nedet. prost. zahtevnost $\log_2 n$. Zato $\Pi \in \mathrm{NSPACE}(\log n)$.
   Savitch: $\Pi \in \mathrm{DSPACE}(\log^2 n)$. Izrek: $\Pi \in \mathrm{DTIME}(c^{\log^2 n})$, za neki $c > 1$.
   Toda $\Pi \in \mathrm{DTIME}(c^{\log^2 n}) = \mathrm{DTIME}((c^{\log n})^{\log n}) =$ /za neki $k > 1$/
   $= \mathrm{DTIME}((c^{k \log_c n})^{\log n}) = \mathrm{DTIME}((c^{\log_c n})^{k \log n}) = \mathrm{DTIME}(n^{k \log n})$.
   Ker $n^{k \log n}$ narasca hitreje od polinomskih funkcij, Π *ni nujno v P*.

	1
	2
	3
	Σ

PRAKTIČNI DEL
Izračunljivost in računska zahtevnost (22. 1. 2021)
Ime in priimek (TISKANO):

1. (15 točk) Spodaj imate podan končni avtomat.

   (a) Zapišite najdaljšo besedo, ki je v jeziku tega avtomata, ni pa mogoče najti nobene delitve te besede, da bi z napihovanjem ostala vedno v jeziku. Argumentirajte!

   (b) Zapišite regularni izraz za jezik podanega avtomata.

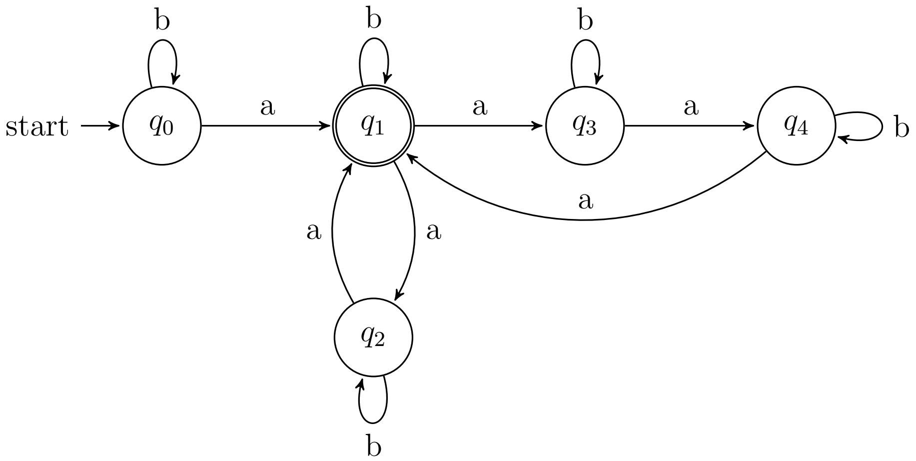
   (c) Pretvorite (po postopku, ki smo si ga ogledali na vajah) ta NKA v DKA.

A finite automaton is given below.

(a) Find the longest word that is accepted by this automaton but it is not possible to find any partition of this word (as in the pumping lemma) such that the pumped word would remain in the language. Write down why is that so!

(b) Construct a regular expression for the language of this finite automaton.

(c) Transform this non-deterministic automaton into a deterministic automaton with the procedure that we used in our practical sessions.



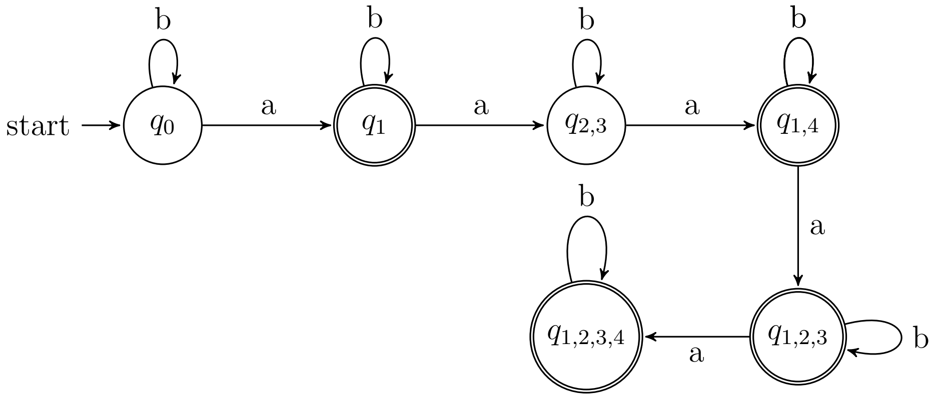
Rešitve

(a) Beseda **a** je najdaljša, ker vse daljše besede, ki so v jeziku, gredo pri sprejemanju v tem avtomatu skozi cikel. In tak cikel lahko uporabimo za napihovanje.

(b) Najlažje dobimo regularni izraz iz DKA-ja, ki ga razvijemo pod točko c). Možnih je pa seveda veliko rešitev.

$$b^*ab^* + b^*ab^*ab^*ab^*(a+b)^*$$

(c) Po postopku, ki tvori samo dosegljiva stanja, dobimo sledeči avtomat:


start
b
a
q_0
q_1
$q_{2,3}$
$q_{1,4}$
$q_{1,2,3}$
$q_{1,2,3,4}$

2. (15 točk) Želeli bi napisati kontekstno neodvisno gramatiko za generiranje logičnih izrazov, npr.:

$$a \wedge a \vee \neg a$$

Operacije so torej $\wedge, \vee$ in $\neg$. spremenljivka pa naj bo samo a.

(a) Zapišite dvoumno gramatiko za vse izraze te oblike in pokažite dvoumnost.

(b) Zapišite nedvoumno gramatiko, kjer bo imela negacija najvišjo prioriteto, drugo najvišjo naj ima $\wedge$ in najnižjo $\vee$.

(c) Zapišite nedvoumno gramatiko, kjer bo imela $\vee$ najvišjo prioriteto, drugo najvišjo naj ima $\wedge$ in najnižjo $\neg$.

(d) Prikažite drevesi izpeljav v obeh gramatikah za izraz

$$\neg a \wedge a \vee a$$

Let us write a context-free grammar for the language of logical expressions, e.g.:

$$a \wedge a \vee \neg a$$

The operations are $\wedge, \vee$ in $\neg$ and let us have a single variable a.

(a) Construct an ambiguous grammar for these types of expressions and show that it is indeed ambiguous.

(b) Construct an unambiguous grammar for these expressions so that negation will have the highest priority, $\wedge$ the second highest, and $\vee$ the lowest priority.

(c) Construct an unambiguous grammar for these expressions so that $\vee$ will have the highest priority, $\wedge$ the second highest, and $\neg$ the lowest priority.

(d) For each grammar, show the unique derivation tree for the expression:

$$\neg a \wedge a \vee a$$

Rešitve

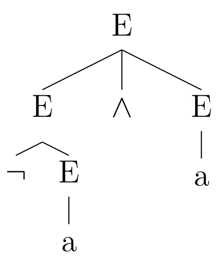
(a) Gramatika je, npr.

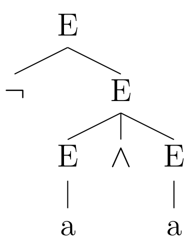
$$E \to a \mid E \wedge E \mid E \vee E \mid \neg E$$

Dvoumnosti je tukaj veliko, npr za izraz:

$$\neg a \wedge a$$

dobimo drevesi izpeljave:





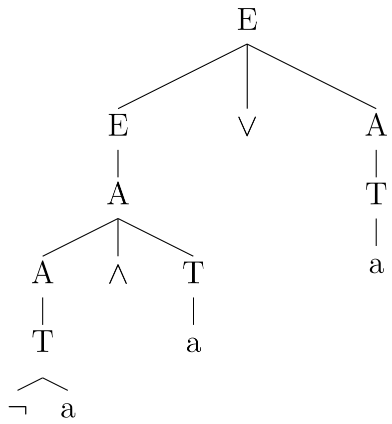
(b) Gramatika je, npr. (začetni simbol je E)

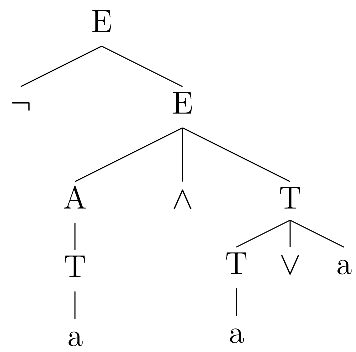
$$T \to a \mid \neg a$$
$$A \to T \mid A \wedge T$$
$$E \to A \mid E \vee A$$

(c) Gramatika je, npr. (začetni simbol je E)

$$
\begin{aligned}
T &\to T \lor a \mid a \\
A &\to T \mid A \land T \\
E &\to \neg E \mid A
\end{aligned}
$$

(d)





(20 točk) Podan imate jezik

$$L = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \setminus L(M_2) \neq \emptyset\}$$

Spodaj je podan nastavek prevedbe iz jezika L_e, spomnimo:

$$L_e = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$$

3. (a) Podajte en par strojev, ki pripada L, in en par strojev, L ne pripada.
   (b) Kakšen pogoj (ekvivalenca) mora veljati, da bo spodaj podana prevedba veljavna?
   (c) Ali je podana prevedba veljavna? Pokažite zakaj!
   (d) Če je to veljavna prevedba, kaj izvemo o L? Če to ni veljavna prevedba, kaj izvemo o L?

Given the language¿

$$L = \{\langle M_1, M_2 \rangle \mid L(M_1) \setminus L(M_2) \neq \emptyset\}$$

Below, an attempt to give a reduction from the language L_e is given.

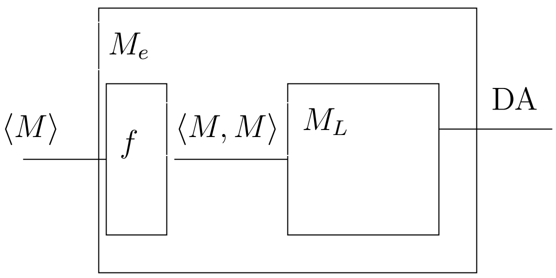
$$L_e = \{\langle M \rangle \mid L(M) = \emptyset\}$$

(a) Write down a pair od Turing machines that belong to L and a pair that does not belong to L.

(b) What is the condition (equivalence) than needs to hold for this particular reduction so that the the construction would be valid?

(c) Does the equivalence hold in this case? Demonstrate why!

(d) If this is a valid reduction, what do you know about L? If this is not a valid reduction, what do you know about L?



Rešitve

(a) Recimo, da imamo dva stroja: M_1 in M_2, prvi naj sprejme vse besede, drugi naj vse zavrne - torej $L(M_1) = \Sigma^*$ in $L(M_2) = \emptyset$. Par, ki pripada temu jeziku je $\langle M_1, M_2 \rangle$. Par, ki ne pripada pa $\langle M_1, M_1 \rangle$.

(b) Veljati mora:

$$L(M) = \emptyset \iff L(M) \setminus L(M) \neq \emptyset$$

(c) Ekvivalenca seveda ne drži, saj je razlika množice same s sabo vedno prazna množica, tudi takrat ko $L(M)$ ni prazna množica.

(d) Če bi to bila veljavna prevedba, bi izvedeli, da L ni polodločljiv. Ker pa to ni veljavna prevedba, o odločljivosti L ne vemo ničesar.