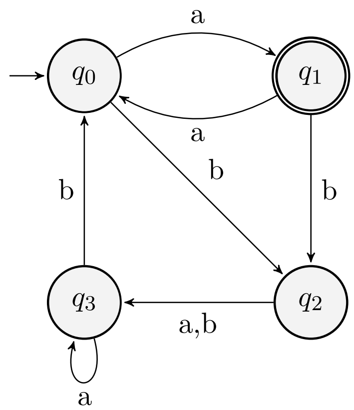
Σ

Ime in priimek

Praktični del (13. februar 2024)

15 točk

1. naloga: Podan imate deterministični končni avtomat:



Naj bo pot v avtomatu definirana kot zaporedje povezav, dolžina poti je število povezav na tej poti. (Povezavo (q_2, q_3) štejemo kot eno samo, četudi je označena z dvema simboloma). Npr. pot dolžine 2 med q_0 in q_3 je $\langle (q_0, q_2), (q_2, q_3) \rangle$

a) Po koliko različnih poteh dolžine 5 lahko pridemo iz q_0 do q_1?

b) Naj bo l_i^n število poti dolžine n, s katerimi pridemo iz stanja q_0 do stanja q_i. Zapišite l_0^0, l_1^0, l_2^0 in l_3^0 ter izrazite l_0^n s pomočjo $l_0^{n-1}, l_1^{n-1}, l_2^{n-1}, l_3^{n-1}$.

c) Enako izrazite še l_1^n, l_2^n, l_3^n s pomočjo vrednosti l-jev ostalih stanj ter krajših dolžin. Po definiranih formulah izračunajte spodnjo tabelo za l_i^n:

$i \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0						
1						
2						
3						

d) Ali je število besed dolžine n, ki jih ta avtomat sprejme, enako l_1^n? Dokaži!

Rešitev:

a) 3

b) $l_0^0 = 1, l_1^0 = l_2^0 = l_3^0 = 0$ $l_0^n = l_3^{n-1} + l_1^{n-1}$

c) $l_1^n = l_0^{n-1}$, $l_2^n = l_0^{n-1} + l_1^{n-1}$, $l_3^n = l_3^{n-1} + l_2^{n-1}$

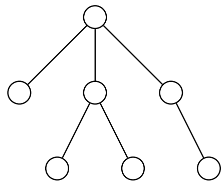
$i \backslash n$	0	1	2	3	4	5
0	1	0	1	1	3	4
1	0	1	0	1	1	3
2	0	1	1	1	2	4
3	0	0	1	2	3	5

d) Ne, recimo $l_1^4 = 1$, besedi dolžine 4, ki pripadata jeziku avtomata sta dve $baba, bbba$.

15 točk

2. naloga:

Ukoreninjeno drevo zapišimo kot $v[d_1 d_2 \ldots d_m]$, kjer v predstavlja koren, d_1, $\ldots$, d_m pa so zapisi poddreves, pripetih na koren. Drevo na desni torej zapišemo kot $v[vv[vv]v[v]]$.



Naj bo D_k množica zapisov dreves, pri katerih nobeno vozlišče nima več kot k otrok. Beseda $v[vv[vv]v[v]]$ torej pripada množicam D_3, D_4 itd., ne pa množici D_2. Definirajmo še $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup \ldots$

a) Zapišite kontekstno neodvisno gramatiko za jezik D_1.

b) Zapišite kontekstno neodvisno gramatiko za jezik D.

c) Poiščite neskončen regularen podjezik jezika D in dokažite, da je regularen.

d) Ali obstaja tak k, da ima jezik D_k neskončen regularen podjezik? Odgovor utemeljite!

Rešitev:

a) Jezik D_1 vsebuje besede v, $v[v]$, $v[v[v]]$, $v[v[v[v]]]$ itd. Pripadajoča kontekstno neodvisna gramatika je torej

$$S \to v \mid v[S]$$

b) Jezik D vsebuje besedo v in besede oblike $v[d_1 d_2 \ldots d_m]$. Ker so d_1, $\ldots$, d_m zapisi dreves, vsak od njih — tako kot celotno drevo — nastane iz začetnega simbola gramatike (S). Simbol S se torej razvije bodisi v niz v bodisi v niz $v[T]$, pri čemer se T razvije v enega ali več simbolov S:

$$\begin{aligned} S &\to v \mid v[T] \\ T &\to S \mid ST \end{aligned}$$

c) Primer takšnega jezika je $\{v[v], v[vv], v[vvv], \ldots\}$. Jezik lahko zapišemo z regularnim izrazom $v[vv^*]$.

d) Tak k ne obstaja. Pri fiksni zgornji meji za število otrok je namreč mogoče neskončno množico dreves zgraditi samo tako, da sprostimo omejitev glede globine, saj obstaja le končno mnogo dreves s fiksno maksimalno globino in fiksnim maksimalnim številom otrok. Če sprostimo omejitev glede globine, pa bomo morali pri tvorbi zapisov takih dreves zagotoviti ujemanje oglatih oklepajev, tega pa ni mogoče doseči samo s končnimi avtomati in regularnimi izrazi.

20 točk

3. naloga:

Dvoskladovni avtomat $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, F)$ je definiran tako kot običajen skladovni avtomat, le da uporablja dva sklada. Vrednost funkcije $\delta(q, a, S_1, S_2)$ oz. $\delta(q, \varepsilon, S, S')$ (v primeru tihega prehoda) je potemtakem množica trojk (q', γ_1, γ_2), kjer je γ_1 zaporedje skladovnih simbolov, s katerim se nadomesti simbol S_1 na vrhu prvega sklada, γ_2 pa zaporedje simbolov, ki nadomesti simbol S_2 na vrhu drugega sklada.

a) V dvoskladovnem avtomatu $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_F\}, \{0, 1\}, \{Z_0, S\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_F\})$ je funkcija δ definirana takole:

$$
\begin{aligned}
\delta(q_0, 0, Z_0, Z_0) &= \{(q_0, SZ_0, Z_0)\} \\
\delta(q_0, 0, S, Z_0) &= \{(q_0, SS, Z_0)\} \\
\delta(q_0, 1, S, Z_0) &= \{(q_1, S, SZ_0)\} \\
\delta(q_1, 1, S, S) &= \{(q_1, S, SS)\} \\
\delta(q_1, 0, S, S) &= \{(q_2, \varepsilon, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, 0, S, S) &= \{(q_2, \varepsilon, \varepsilon)\} \\
\delta(q_2, \varepsilon, Z_0, Z_0) &= \{(q_F, \varepsilon, \varepsilon)\}
\end{aligned}
$$

Ali beseda 00111000 pripada jeziku avtomata? Odgovor utemeljite!

b) Dokažite, da obstaja jezik, ki ga sprejema dvoskladovni avtomat, ne pa tudi običajen enoskladovni avtomat.

c) Naj bo $L_{2\setminus 1}$ jezik opisov Turingovih strojev M, za katere velja, da je $L(M)$ mogoče sprejeti z nekim dvoskladovnim avtomatom, ne pa tudi z običajnim skladovnim avtomatom. Dokažite, da jezik $L_{2\setminus 1}$ ni polodločljiv.

Rešitev:

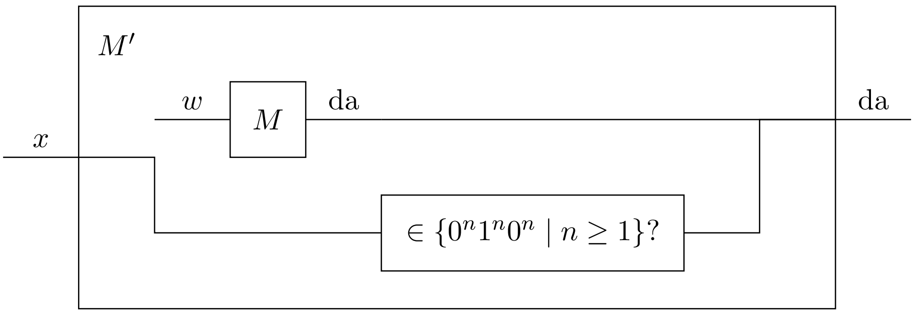
a) Po branju podniza 0011100 bo avtomat v stanju q_2. Na prvem skladu bo Z_0, na drugem pa SZ_0. Ker avtomat v tej situaciji nima nobenega prehoda, se bo predčasno ustavil, zato beseda 00111000 ne pripada jeziku avtomata.

b) Tak primer je ravno jezik $L = \{0^n 1^n 0^n \mid n \geq 1\}$, ki ga sprejema avtomat iz prejšnje alineje. Jezika L ne sprejema noben običajni skladovni avtomat, saj ni kontekstno neodvisen. Da L ni kontekstno neodvisen, lahko dokažemo bodisi z lemo o napihovanju ali pa s pomočjo homomorfizma $h(a) = 0$, $h(b) = 1$, $h(c) = 0$: če bi bil L kontekstno neodvisen, bi bil tak tudi $h^{-1}(L) = \{(a + c)^n b^n (a + c)^n \mid n \geq 1\}$ in tudi $L' = h^{-1}(L) \cap a^*b^*c^* = \{a^n b^n c^n \mid n \geq 1\}$, saj tako inverzni homomorfizem kot presek z regularnim jezikom ohranjata kontekstno neodvisnost. Ker pa vemo, da L' ni kontekstno neodvisen, lahko sklepamo, da L prav tako ni kontekstno neodvisen.

c) Označimo s $\mathcal{C}_{2\setminus 1}$ razred jezikov, ki jih sprejemajo dvoskladovni avtomati, ne pa tudi enoskladovni avtomati. Za dokaz nepolodločljivosti jezika $L_{2\setminus 1}$ bomo poiskali prevedbo $\overline{L_u} \to L_{2\setminus 1}$. Iščemo torej funkcijo $f \colon \langle M, w\rangle \to \langle M'\rangle$, tako da velja $\langle M, w\rangle \in \overline{L_u} \iff \langle M'\rangle \in L_{2\setminus 1}$ oziroma

- $w \notin L(M) \implies L(M') \in \mathcal{C}_{2\setminus 1}$;
- $w \in L(M) \implies L(M') \notin \mathcal{C}_{2\setminus 1}$.

Stroj M' bomo zgradili takole:



Stroj M' vzporedno požene stroj M na besedi w in dvoskladovni avtomat za razpoznavanje jezika $\{0^n1^n0^n \mid n \geq 1\}$ na svojem vhodu x. Stroj M' reče DA, če M sprejme w ali pa če dvoskladovni avtomat sprejme x. Jezik stroja M' je potemtakem $\Sigma^* \notin \mathcal{C}_{2\setminus 1}$, če je $w \in L(M)$, in $\{0^n1^n0^n \mid n \geq 1\} \in \mathcal{C}_{2\setminus 1}$, če $w \notin L(M)$.