Глава 1

•

1.1 •

1.2 Развитие метода векторных функций Ляпунова в исследовании устойчивости дискретных систем

Моделирование многих управляемых систем с дискретным управлением приводится к уравнениям вида

$$x(n+1) = f(n, x(n)) \tag{1.1}$$

где $x - m-$мерный вектор действительного пространства $\mathbb{R}^m$ с некоторой нормой $\|x\|$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^+-$множество неотрицательных целых чисел. Будем полагать, что правая часть (1.1) есть вектор-функция, определенная для всех $(n, x) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m$ и, если не предполагается иначе, она непрерывна по x при каждом $n \in \mathbb{Z}^+$.

Задача о стабилизации управляемой системы вида (1.1) обычным образом приводится к задаче об устойчивости нулевого состояния системы (1.1) в предположении

$$f(n, 0) \equiv 0$$

Соответственно имеют место следующие определения устойчивости состояния покоя $x = 0$ для дискретной системы (1.1) [16,17].

Определение 1.1. *Состояние $x = 0$ системы (1.1) называется устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{Z}^+$существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$, что условие $\|x_0\| < \delta$ влечет выполнение неравенства $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ для любого $n \geq n_0$.*

Определение 1.2. *Состояние $x = 0$ называется аттрактором (точкой притяжения) движений системы (1.1), если при любом $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ существует $\delta_0 = \delta(n_0) > 0$, такое, что из условия $\|x_0\| < \delta_0$ следует что $\lim\limits_{n \to \infty} x(n, n_0, x_0) = 0$*

Определение 1.3. *Состояние* $x = 0$ *системы* (1.1) *называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и является аттрактором.*

Определение 1.4. *Асимптотически устойчивым равномерно по* x_0 *называется состояние* $x = 0$ *системы* (1.1), *если оно устойчиво и для любых* $\varepsilon > 0$ *и любого* $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ *существуют* $\delta_0 = \delta(n_0) > 0$, $N = N(n_0, \varepsilon) > 0$, *такие, что из условия* $\|x_0\| < \delta_0$ *следует, что* $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ *для любого* $n \geq n_0 + N$.

Определение 1.5. *Состояние* $x = 0$ *системы* (1.1) *называется равномерно устойчивым, если* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\forall n_0 \in \mathbb{Z}^+\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что из условия* $\|x_0\| < \delta$ *следует, что* $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ *для любого* $n \geq n_0$.

Определение 1.6. *Состояние* $x = 0$ *называется равномерным аттрактором движений системы* (1.1), *если существует значение* $\delta_0 > 0$, *что для любых* $\varepsilon > 0$, $n_0 \in Z^+$ *найдется* $N(\varepsilon) > 0$ *такое, что условие* $\|x_0\| < \delta_0$ *влечет выполнение условия* $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ *для любого* $n \geq n_0 + N(\varepsilon)$. *Если это свойство имеет место при произвольном* $\delta_0 > 0$, *то состояние* $x = 0$ *называется глобальным равномерным аттрактором.*

Определение 1.7. *Состояние* $x = 0$ *системы* (1.1) *называется равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и является равномерным аттрактором.*

Определение 1.8. *Состояние* $x = 0$ *системы* (1.1) *называется неустойчивым, если для некоторых* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ *и любого* $\delta > 0$ *найдутся* x_0: $\|x_0\| < \delta$ *и* $n_1 = n_1(\varepsilon) > n_0$ *такие, что* $\|x(n_1, n_0, x_0)\| \geq \varepsilon$.

Для вывода и дальнейшего применения нового принципа квазиинвариантности для неавтономных систем (1.1) с использованием вектор-функции Ляпунова и систем сравнения введем некоторые обозначения и построения из (**??**).

Обозначим через F множество всех функций $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, непрерывных по x, и введем на F следующую сходимость.

Определение 1.9. *Последовательность* $\{f_k \in F\}$ *сходится к* f, *если* $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{Z}^+$, *для всякого компактного множества* $D \subset \mathbb{R}^m$ *существует* $N_0 \in \mathbb{Z}^+$, *такое что при всех* $k \geq N_0$

$$\|f_k(n, x) - f(n, x)\| < \varepsilon \quad \forall (n, x) \in [0, N] \times D$$

Эта сходимость метризуема, если ввести следующую метрику.

Пусть $\{D_k\}$ – совокупность вложенных компактных множеств, покрывающих пространство $\mathbb{R}^m$:

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \mathbb{R}^m$$

Введем в пространстве F метрику

$$\rho(f,g)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\frac{\sup(||f(n,x)-g(n,x)||)}{1+\sup(||f(n,x)-g(n,x)||)}, \tag{1.2}$$

$$f,g\in F,\ (n,x)\in[0,k]\times D_k$$

Будем полагать, что правая часть (1.1) удовлетворяет следующим условиям:

а) функция $f(n,x)$ равномерно ограничена на множестве $\mathbb{Z}^+\times D$ для каждого компакта $D\subset\mathbb{R}^m$,

$$\|f(n,x)\|\le l=l(D)\quad\forall(n,x)\in\mathbb{Z}^+\times D \tag{1.3}$$

б) функция $f(n,x)$ равномерно непрерывна по x независимо от $n\in\mathbb{Z}^+$ на каждом компактном множестве $D\subset\mathbb{R}^m$: $\forall D\subset\mathbb{R}^m$ и $\forall\varepsilon>0$ $\exists\delta=\delta(\varepsilon,D)>0$ такое, что для всех $n\in\mathbb{Z}^+$ и всех $x_1,x_2\in D:\|x_2-x_1\|<\delta$ выполнено неравенство

$$\|f(n,x_2)-f(n,x_1)\|<\varepsilon \tag{1.4}$$

Лемма 1.1. *При условиях* (1.3) *и* (1.4) *семейство сдвигов* $\{f_k(n,x)=f(k+n,x),\ k\in\mathbb{Z}^+\}$ *содержится в компактном множестве* $F_0\subset F$.

В дальнейшем, если функция удовлетворяет условиям вида (1.3) и (1.4), тогда будем говорить, что эта функция удовлетворяет условиям предкомпактности.

Определение 1.10. *Будем говорить, что функция* $f^*:\mathbb{Z}^+\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ *есть предельная к* f, *если существует последовательность* $n_k\to\infty$ *такая, что последовательность сдвигов* $\{f_k(n,x),\ f_k(n,x)=f(n_k+n,x)\}$ *сходится к функции* f^* *в метрическом пространстве* F.

Система

$$x(n+1)=f^*(n,x(n)) \tag{1.5}$$

называется предельной к системе (1.1).

Следующая теорема определяет связь между решениями систем (1.1) и (1.5).

Теорема 1.1. *Пусть при* $n_k\to\infty$ *последовательность сдвигов* $\{f_k(n,x)=f(n_k+n,x)\}$ *сходится к предельной функции* f^* *в* F, *а последовательность точек* $x_0^{(k)}\to x_0$. *Тогда последовательность решений* $x_k(n,n_0,x_0^{(k)})=x(n_k+n,n_0,x_0^{(k)})$ *системы* $x(n+1)=f_k(n,x(n))$,

$f_k(n,x) = f(n_k+n,x)$ сходится к решению $x = x^*(n,n_0,x_0)$ предельной системы (1.5). *При этом сходимость равномерна по $n \in [n_0, n_0+N]$ для каждого $N \in \mathbb{Z}^+$.*

На основе данной теоремы могут быть установлены следующие предельные свойства решений системы (1.1).

Определение 1.11. *Пусть решение $x = x(n,n_0,x_0)$ системы* (1.1), *определено для всех $n \geq n_0$. Будем называть точку $q \in \mathbb{R}^m$ его положительной предельной точкой, если существует последовательность $n_k \to \infty$ такая, что $x(n_k,n_0,x_0) \to q$. Множество всех таких точек образует положительное предельное множество $\Omega^+(n_0,x_0)$.*

Предельная функция f^* может быть продолжена на множество $\mathbb{Z}^- \times \mathbb{R}^m$, так как для каждого $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ сдвиг $f_0(n,x) = f(n_0+n,x)$ определяется на множестве $[-n_0,+\infty] \times \mathbb{R}^m$. Исходя из этого предположения, можно определить решения системы (1.5) для начальных значений $(n_0,x_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^m$, соответственно определить отображение $x^*(n,n_0,x_0)$, $x^* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Определение 1.12. *Будем говорить, что множество $H \subset \mathbb{R}^m$ является квазиинвариантным, если для любой точки $x_0 \in H$ существует предельная система* (1.5) *и ее решение $x = x^*(n)$, $x^*(0) = x_0$ такое, что $x^*(n) \in H \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$.*

Теорема 1.2. *Если решение $x = x(n,n_0,x_0)$ системы* (1.1) *ограничено для всех $n \in \mathbb{Z}^+$, тогда его положительное предельное множество $\Omega^+(n_0,x_0)$ замкнуто и квазиинвариантно, при этом решение $x(n,n_0,x_0)$ неограниченно приближается к $\Omega^+(n_0,x_0)$ при $n \to \infty$.*

Для исследования устойчивости нелинейной системы (1.1) широко применяется метод функций Ляпунова. Метод оценки функции Ляпунова, удовлетворяющей разностному неравенству, посредством решения, соответствующего разностного уравнения представляет собой один из наиболее эффективных методов такого исследования.

Представим классические теоремы сравнения, основой которых является использование разностных неравенств [16,17].

Теорема
1.3. *Пусть две функции $g_1, g_2 : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ являются неубывающими по переменной v. Предположим, что выполнены неравенства*

$$g_2(n,v) \leq g_1(n,v), \forall (n,v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}$$

Тогда будут иметь место следующие неравенства

$$p_n \le r_n,$$

где p_n и r_n есть решения разностных уравнений:

$$r_{n+1} = g_1(n, r_n),\ r_0 \ge v_0,$$
$$p_{n+1} = g_2(n, p_n),\ p_0 \le v_0$$

Примем, что непрерывная функция $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ является неубывающей по своему векторному аргументу в соответствии со следующим определением:

Определение 1.13. *Будем считать, что имеет место векторное неравенство $v \le w$, если выполнено покоординатное неравенство $v_j \le w_j$ для всех $j = 1..k$. Функция g является неубываеющей по $v \in \mathbb{R}^k$, если из неравенства $v \le w$, для каждого $n \in \mathbb{Z}^+$ следует неравенство $g(n, v) \le g(n, w)$.*

Теорема 1.4. *Пусть функция $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ является неубывающей по векторному аргументу $v \in \mathbb{R}^k$; функция $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^k$ удовлетворяет неравенству $v(n+1) \le g(n, v(n))$, а функция $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^k$ соотношению $w(n+1) \ge g(n, w(n))$, тогда из условия $v(n_0) \le w(n_0)$, следует $v(n) \le w(n)$ для всех $n \ge n_0$.*

Соответственно теоремам (1.3) и (1.4) имеют место следующие теоремы об устойчивости $x = 0$ системы (1.1).

Определение 1.14. *Вектор-функция $V : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$ является определенно-положительной, если существует функция типа Хана $a \in H$ [ ], такая, что*

$$V_j \ge 0, \quad min(V_1(n, x_1, \dots, x_k), \dots, V_k(n, x_1, \dots, x_k)) \ge a_1(\|x\|)$$

она допускает бесконечно малый высший предел, если

$$max(V_1, \dots, V_k) \le a_2(\|x\|)$$

Теорема 1.5. *Если для системы (1.1) можно найти вектор-функцию $V : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$, удовлетворяющую соотношениям*

$$V(n, x) \ge a_1(\|x\|), \quad V(n+1, f(n, x)) \le g(n, V(n, x))$$

при этом $g(n, 0) = 0$ и решение $v = 0$ уравнения сравнения

$$v(n+1) = g(n, v(n))$$

устойчиво.

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) также устойчиво. Если решение $v = 0$ равномерно устойчиво и для $V(n, x)$ имеет место оценка $V(n, x) \le a_2(\|x\|)$, тогда имеет место равномерная устойчивость $x = 0$.

Рассмотрим нелинейную разностную систему

$$V(n+1) = g(n, v(n)) + Q(n, v(n)) \tag{1.6}$$

где функция $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ имеет непрерывные частные производные по $v \in \mathbb{R}^k$ при каждом $n \in \mathbb{Z}^+$, функция $Q(n, v)$ при каждом $n \in \mathbb{Z}^+$ непрерывна по $v \in \mathbb{R}^k$.

Для решения $W = W(n, n_0, W_0)$ соответствующей невозмущенной системы

$$W(n+1) = g(n, W(n)) \tag{1.7}$$

можно определить матрицу

$$\Phi(n, n_0, W_0) = \frac{\partial W(n, n_0, W_0)}{\partial W_0} \tag{1.8}$$

Эта матрица является фундаментальной для линейной системы в вариациях

$$\begin{aligned} &\varphi(n+1) = H(n)\varphi(n+1), \\ &H(n) = \frac{\partial g}{\partial W}(n, W)\bigg|_{W=W(n,n_0,W_0)} \end{aligned} \tag{1.9}$$

удовлетворяя матричному уравнению

$$\Phi(n+1) = H(n)\Phi(n), \quad \Phi(n_0) = I \tag{1.10}$$

где I – единичная матрица.

Теорема 1.6. *Пусть $v = v(n, n_0, v_0)$ и $W = W(n, n_0, v_0)$ есть решения систем* (1.6) - (1.7) *соответственно определенных для всех $n \geq n_0$. Тогда для этих решений имеет место соотношение*

$$\begin{aligned} &v(n, n_0, v_0) = W(n, n_0, v_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} \int\limits_0^1 \Phi(n, j+1, g(j, v[j]) + sQ(j, v[j])ds\, Q(j, v[j]), \\ &v[j] = v(j, n_0, v_0) \end{aligned} \tag{1.11}$$

Доказательство. Для каждого $j = n_0, n_0+1, \ldots, n-1$ имеем по
$W(n, j+1, v[j+1]) - W(n, j, v[j]) = W(n, j+1, v[j+1]) - W(n, j+1, W[j+1])$,
$W[j+1] = W(j+1, j, v[j])$
или по теореме о среднем
$W(n, j+1, v[j+1]) - W(n, j, v[j]) =$

$$= \int\limits_0^1 \Phi(n, j+1, sv[j+1] + (1-s)W[j+1])(v[j+1] - W[j+1])ds =$$

$$= \int_0^1 \Phi(n, j+1, g(j, v[j]) + sQ(j, v[j])ds\, Q(j, v[j]) .$$

Суммируя эти равенства по j от n_0 до n получаем $W(n, n_0, v[n]) - W(n, n_0, v[n_0]) = \sum_{j=n_0}^{n} \int_0^1 \Phi(n, j+1, g(j, v[j]) + sQ(j, v[j])ds\, Q(j, v[j])$

Так как $W(n, n, v[n]) = v[n] = v(n, n_0, v_0)$, $W(n, n_0, v[n_0]) = W(n, n_0, v_0)$. Отсюда имеем искомую формулу.

Теорема доказана. □

Выражение вида (1.9) является аналогом формулы В.М. Алексеева [1] нелинейной вариации параметров для разностных систем. Оно позволяет провести развитие метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова для решения задач об асимптотической устойчивости и неустойчивости решений неавтономных дискретных систем с использованием принципа квазиинвариантности.

Предположим, что для системы (1.1) можно найти вектор-функцию Ляпунова, непрерывную по переменной x при каждом фиксированном $n \in \mathbb{Z}^+$, удовлетворяющую соотношению

$$V(n+1, x(n+1)) = g(n, V(n, x(n))) + Q(n, x(n), V(n, x(n))) \qquad (1.12)$$

При этом выполнены следующие условия:

1. Функция $g = g(n, w)$ квазимонотонная и непрерывно дифференцируемая по $w \in \mathbb{R}^k$
2. Функции $g = g(n, w)$, $Q = Q(n, x, w)$ удовлетворяют условиям предкомпактности типа (1.3) и (1.4),
3. Имеет место неравенство $Q(n, x, w) \leqslant 0$ для любых $(n, x, w) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$.

Тогда, исходя из введенных предположений, следует, что функция $V(n, x)$ является вектор-функцией сравнения, а система (1.7) – системой сравнения.

Если $V = V(n, x)$ удовлетворяет уравнению (1.12), причем $V(n_0, x_0) = V_0$, а $w(n) = w(n, n_0, V_0)$ есть решение (1.7), определённое на интервале $[n_0, N]$, $\beta > 0$, согласно теореме (1.6), то для всех $n \in [n_0, N]$ на решении $x(n) = x(n, n_0, x_0)$ системы (1.1) выполняется неравенство

$$V(n, x(n, n_0, x_0)) \leqslant w(n, n_0, V_0)$$

Так как система (1.7) является предкомпактной, для неё можно определить семейство предельных систем сравнения

$$w(n+1) = g^*(n, w(n)), \qquad g^* \in F_g \tag{1.13}$$

Условия, наложенные на правую часть $g = g(n, x)$ системы (1.7) влекут, дифференцируемость по $w_0 \in \mathbb{R}^k$ решений $w = w(n, n_0, w_0)$ этой системы. Так как $w(n, n_0, w_0)$ - неубывающая по w_0 функция $w(n, n_0, w_0)$ получим, что матрица

$$\Phi(n, n_0, w_0) = \frac{\partial w(n, n_0, w_0)}{\partial w_0}$$

является неотрицательной, нормированной, $\Phi(n_0, n_0, w_0) = I$, (здесь I – единичная матрица), фундаментальной матрицей для линейной системы в вариациях (1.9) - (1.10).

В дальнейшем будем полагать, что для любого компакта $D \subset \mathbb{R}^k$ существуют числа $M(D)$ и $\alpha(D) > 0$, такие, что для любых точек $(n, n_0, w_0) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times D$ матрица $\Phi(n, n_0, w_0)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \|\Phi(n, n_0, w_0)\| \leqslant M(D) \\ \det \Phi(n, n_0, w_0) \geqslant \alpha(D) \end{cases} \tag{1.14}$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1.7. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Существует вектор-функция Ляпунова* $V = V(n, x)$, *удовлетворяющая условиям предкомпактности* (1.3) – (1.4) *и равенству* (1.12)
2. *Для системы сравнения* (1.7) *справедливы условия* (1.14)
3. *Решение* $x(n, n_0, x_0)$ *системы* (1.1) *ограничено некоторым компактом* $D \subset \mathbb{R}^m$ *для всех* $n \geq n_0$
4. *Решение* $w(n) = w(n, n_0, V_0)$ *системы сравнения* (1.7), *где* $V_0 = V(n_0, x_0)$, *ограничено при всех* $n \geq n_0$

Тогда для любой предельной точки $q \in \Omega^+(n_0, x_0)$ *найдётся набор предельных функций* (f^*, V^*, g^*, Q^*), *такой, что решение* $x = x^*(n, q)$ *системы* (1.5) *с начальным условием* $x^*(0, q) = q$ *удовлетворяет соотношениям*

$$x^*(n, q) \in \Omega^+(n_0, x_0),$$
$$x^*(n, q) \in \{V^*(n, x) = w^*(n)\} \bigcap \{Q^*(n, x, w^*(n)) = 0\} \text{ для всех } n \in \mathbb{Z},$$

где $w^*(n)$ есть решение предельной системы сравнения (1.13) *с начальным условием $w^*(0) = V^*(0, q)$.*

Доказательство. Из равенства (1.12) на основании формулы (1.11) нелинейной вариации параметров будем иметь соотношение между значением $V[n] = V(n, x[n]) = V(n, x(n, n_0, x_0))$ функции $V(n, x)$ на решении $x = x[n] = x(n, n_0, x_0)$ и решением $w = w[n] = w(n, n_0, V_0)$, $V_0 = V(n_0, x_0)$ системы сравнения (1.7).

$$V(n, x[n]) = w[n] + \sum_{j=n_0}^{n-1} \int_0^1 \Phi(n, j+1, sV[j]) + (1-s)W[j]ds\; Q(j, x[j], V[j]) \tag{1.15}$$

Функция $V(n, x(n))$ ограничена снизу на множестве $\mathbb{Z}^+ \times D$ по условию 1). Согласно условию 4) теоремы, решение системы (1.7) $w[n]$ ограничено сверху для всех $n \geq n_0$. Тогда в соответствии с ограничениями (1.14) найдутся постоянные $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, такие, что для всех $n \geq n_0$ имеет место неравенство

$$\beta_0 \geq \sum_{i=1}^{k} (w^i[n] - V^i[n]) \geq -\alpha_0 \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=n_0}^{n-1} Q^j(r, x[r], V[r]) \geq 0 \tag{1.16}$$

Действительно, рассмотрим равенство (1.15) в покомпонентном виде

$$V^i(n, x[n]) = w^i[n] + \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=n_0}^{n-1} \int_0^1 \Phi^{ir}(n, j+1, sV[j]) +$$
$$+(1-s)W[j]ds\; Q^r(j, x[j], V[j]), \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

Просуммируем эти равенства по $i = 1, 2, \ldots, k$. Получим

$$\sum_{i=1}^{k} (w^i[n] - V^i[n]) =$$
$$= -\sum_{r=1}^{k} \sum_{j=n_0}^{n-1} \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} \Phi^{ir}(n, j+1, sV[j]) + (1-s)W[j]ds\; Q^r(j, x[j], V[j])$$

Из второго неравенства (1.14) найдем, что существует число $\alpha_0 > 0$, такое, что для любых $t \geq t_0$, $\tau \in [t_0, t]$ и всех $j = 1, 2, \ldots, k$ имеет место неравенство

$$\int_0^1 \sum_{i=1}^{k} \Phi^{ir}(n, j+1, sV[j]) + (1-s)W[j]ds \geq \alpha_0$$

Отсюда из условий 3 и 4 теоремы следует, что существует число $\beta_0 > 0$, такое, что выполняется неравнство (1.16). Таким образом, каждый функциональный ряд, образованный частичными суммами, входящими в соотношение (1.16), сходится. И, значит, справедливо соотношение

$$\lim_{n\to+\infty} Q(n, x[n], V(n, x[n])) = 0 \tag{1.17}$$

Пусть $q \in w^+(n_0, x_0)$ – предельная точка, определяемая последовательностью $n_j \to +\infty$, $x(n_j, n_0, x_0) \to q$ при $n_j \to +\infty$. Выберем подпоследовательность $n_{ji} \to +\infty$, для которой имеют место сходимости $f(n_{ji}+n, x) \to f^*(n, x)$, $g(n_{ji}+n, x) \to g^*(n, x)$, $Q(n_{ji}+n, x, w) \to Q^*(n, x, w)$. Отсюда найдем, что равномерно по $n \in [-\beta, \beta]$ для каждого $\beta > 0$ имеют место сходимости

$$x[n_{ji} + n] \to x^*[n], \quad w[n_{ji} + n] \to w^*[n],$$

где $x^*[n] = x^*(n, 0, q)$ и $w^*[n] = w^*(n, 0, q)$ ($w^* = V^*(0, q)$) есть соответствующие решения систем (1.5) и (1.14).При этом из соотношений (1.16) и (1.17) для всех $t \in \mathbb{R}$ получаем равенства

$$V^*[n, x^*[n]] = w^*[n], \quad Q^*[n, x^*[n], V^*[n]] = 0$$

Таким образом, теорема доказана. $\square$

Исходя из приведенного доказательства в теореме (1.7) можно опустить условие предкомпактности относительно функции $V = V(n, x)$. Тем самым, сформулировать следующий результат.

Теорема 1.8. *Пусть выполнено равенство* (1.12)*, при этом* $Q = Q(n, x)$ *и условия 2–4 теоремы* (1.7)*. Тогда для каждой предельной точки* $q \in \Omega^+(n_0, x_0)$ *найдется набор предельных функций* (f^*, g^*, Q^*)*, такой, что решение* $x = x^*(n, q)$ *содержится одновременно во множествах* $\{x^*(n, q), n \in \mathbb{Z}\} \subset \Omega^+(n_0, x_0)$*;* $x^*(n, q) \in \{Q^*(n, x)\}$.

Теоремы (1.7) и (1.8) представляют собой теоремы о локализации положительного предельного множества на основе вектор-функции Ляпунова и системы сравнения для неавтономных разностных уравнений. Они являются развитием прнципа инвариантности Ж.П.Ла-Салля для автономной системы [122] и принципа квазиинвариантности для неавтономной разностной системы на основе скаляной функции Ляпунова со знакопостоянной производной.

Введем в рассмотрение скалярную функцию $\bar{V} = \bar{V}(n, x)$ для соотвествующей вектор-функции $V = V(n, x)$ определяемую соотношением

$$\bar{V}(n, x) = \sum_{i=1}^{k} V^i(n, x) \text{ или } \bar{V}(n, x) = \max_{i=1,2,\ldots,k} V^i(n, x)$$

Теорема 1.9. *Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова $V = V(n,x)$, удовлетворяющая условиям предкомпактности, такая, что:*

1. *функция $\bar{V}$ является определённо-положительной, $\bar{V}(n,x) \geq a(\|x\|), a \in H$*
2. *справедливо равенство* (1.12)
3. *нулевое решение $w = 0$ системы сравнения* (1.7) *устойчиво*
4. *для любой предельной совокупности (f^*, V^*, W^*, Q^*) и каждого ограниченного решения $w = w^*(n) \neq 0$ предельной системы сравнения* (1.13) *в множестве*

$$\{V^*(n,x) = w^*(n)\} \bigcap \{Q^*(n,x,w^*(n)) = 0\}$$

   не содержится решений предельной системы (1.5).

Тогда нулевое решение $x = 0$ системы (1.1) *асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Из условий 1–3 теоремы следует, что решение $x = 0$ системы (1.1) устойчиво.

Пусть $x = x(n,n_0,x_0)$ – какое-либо решение (1.1) из области устойчивости, и таким образом ограничено. Согласно теореме (1.8) его предельное множество $\Omega^+(n_0,x_0)$ состоит из решений $x = x^*(n,q)$, содержащихся в множестве

$$\{V^*(n,x) = W^*(n)\} \bigcap \{Q^*(n,x,W^*(n)) = 0\}.$$

Но в силу условия 4 теоремы имеем $W^*(n) = 0$, и значит $x^*(n,q) \equiv 0$, $\Omega^+(n_0,x_0) \equiv \{x = 0\}$.

Теорема доказана. □

Замечание 1.1. *Условие ограниченности и непрерывности $V(n,x)$ равномерной по $(n,x) \in \mathbb{Z}^+ \times D_+$ в теоремах* (1.7) *и* (1.8) *может быть опущено с соответствующими изменениями в выводах этих теорем. В частности, при $Q = Q(n,x)$ условие 4) теоремы* (1.9) *может быть заменено на условие*

4. *' множество $\{Q^*(n,x) = 0\}$ не сождержит решений* (1.5), *кроме $x = 0$.*

Важным является следующее видоизменение теоремы (1.9) в случае зависимости $Q = Q(n,x)$.

Теорема 1.10. *Если в теореме* (1.9) *положить, что функция $V(n,x)$ является опрделенно-положительной, допускающий бесконечно малый высший предел $a_1(\|x\|) \leq V(n.x) \leq a_2(\|x\|)$ и усилить условия 3) и 4) до условий*

3. решение $w = 0$ системы (1.7) равномерно устойчиво

4. для любой предельной совокупности (f^*, Q^*) множество $\{Q^* = 0\}$ не содержит решений системы (1.13),(1.5), кроме $x = 0$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) равномерно асимптотически устойчиво.

Содержащиеся в теореме (1.9) условия позволяют расширить классы используемых систем сравнения и вектор-функций Ляпунова для исследования асимптотической устойчивости неавтономных разностных систем.

Сформулировонная теорема представляет собой развитие классической теоремы сравнения, а также теорем, основанных на применении скалярной функции Ляпунова со знакопостоянной производной [19].

Рассмотрим задачу об устойчивости непрерывных знакопостоянных вектор-функций Ляпунова, для чего сформулируем несколько определений.

Определение 1.15. *Будем говорить, что нулевое решение $x = 0$ устойчиво относительно множества $\{\bar{V}^*(n,x) = 0\}$ и выбранной предельной совокупности (f^*, V^*, W^*, Q^*), если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что для любого решения $x = x^*(n, x_0)$ системы (1.5), выполняется неравенство $|x^*(n,x_0)| < \varepsilon$. Причем для этого решения справедливо*

$$x^*(0,x_0) = x_0, \quad x_0 \in \{|x| < \delta\} \bigcap \{\bar{V}^*(0,x) = 0\} \bigcap \{Q^*(0,x,0) = 0\},\ \forall n \geq 0$$

Определение 1.16. *Нулевое решение $x = 0$ асимптотически устойчиво относительно множества $\{\bar{V}^*(n,x) = 0\}$ и выбранной предельной совокупности (f^*, V^*, W^*, Q^*), если оно устойчиво, а также существует число $\Delta > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon) > 0$, такие, что для любого решения $x = x^*(n, x_0)$ системы (1.5), такого, что*

$$x^*(0,x_0) = x_0, \quad x_0 \in \{|x| < \Delta\} \bigcap \{\bar{V}^*(0,x) = 0\} \bigcap \{Q^*(0,x,0) = 0\},$$

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ выполняется неравенство $|x^*(n,x_0)| < \varepsilon$.

Определение 1.17. *Нулевое решение $x = 0$ равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво) относительно множества $\{\bar{V}^*(n,x) = 0\}$ и семейства предельных совокупностей $\{(f^*, V^*, W^*, Q^*)\}$, если число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ в определении (1.15) не зависит (числа $\Delta > 0$ и $N = N(\varepsilon) > 0$ в определении (1.15) не зависят) от выбора (f^*, V^*, W^*, Q^*).*

Следующая теорема связывает введенные понятия с полученными ранее результатами.

Теорема 1.11. *Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова $V = V(n, x)\geqslant 0$, удовлетворяющая условиям предкомпактности, такая, что выполнены условия 2–3 теоремы* (1.10) *, а также условие*

4. *нулевое решение $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво относительно множества $\{\bar{V}^*(n, x) = 0\}$ и семейства предельных совокупностей $\{(f^*, V^*, W^*, Q^*)\}$.*

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) *устойчиво (равномерно устойчиво).*

Доказательство. Прежде всего, убедимся, что решение $x = 0$ системы (1.1) устойчиво. Предположим противное. Тогда, по определению, найдутся числа $\varepsilon_0 > 0$ и $n_0\geqslant 0$ и последовательности
$\eta_j \to +\infty$, $x_j^0 \to 0$, такие, что

$$|x(\eta_j, n_0, x_j^0)| = \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{1.18}$$

Из непрерывности траекторий системы (1.1) и условия (1.18) следует, что для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, найдётся последовательность $n_j \to +\infty$, для которой выполняются соотношения

$$\begin{gathered} |x(n_j, n_0, x_j^0)| = \varepsilon_1, \\ \varepsilon_1 < |x(n, n_0, x_j^0)| < \varepsilon_0 \;\; \forall\, n \in (n_j, \eta_j) \end{gathered} \tag{1.19}$$

Обозначим $x_j = x(n_j, n_0, x_j^0)$ и рассмотрим решение $x(n+n_j, n_j, x_j)$, $n\geqslant 0$, системы (1.1). Не умоляя общности можно считать, что последовательность $n_j \to +\infty$ обеспечивает сходимость $x_j \to x_0^*$ при $n \to +\infty$и, следовательно, определяет предельную совокупность (f^*, V^*, W^*, Q^*). Тогда последовательность решений $x(n + n_j, n_j, x_j)$ системы (1.1) сходится к решению $x^*(n, 0, x_0^*)$ предельной системы (1.5) равномерно по $n \in [-\beta; \beta]$, где $\beta \in \mathbb{N}$ – произвольное число.

Условия устойчивости нулевого решения $w = 0$ системы сравнения (1.7) в совокупности с двойным неравенством

$$0\leqslant\bar{V}(n_j, x_j)\leqslant\sum_{i=1}^{k} w^i(n_j, n_0, w_j^0), \qquad w_j^0 = V(n_0, x_j^0)$$

обеспечивают справедливость соотношения

$$\bar{V}^*(0, x_0^*) = 0 \tag{1.20}$$

Докажем, что $\lim\limits_{j\to\infty}(\eta_j - n_j) = +\infty$. Пусть, это не так, т.е. существует число $\eta = \eta(\varepsilon_1) > 0$, такое, что $\eta_j - n_j\leqslant\eta(\varepsilon_1)$. Тогда существует момент $n_1 \in [0, \eta]$, такой, что

$$|x^*(n_1, 0, x_0^*)| = \varepsilon_0 \tag{1.21}$$

но по условию 4 теоремы выбирая $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{2} > 0$, можно отыскать число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall n \geqslant 0$ будет выполнено неравенство $|x^*(n, 0, x_0)| < \varepsilon$. Положив $\varepsilon_1 = \delta$, придем к неравенству $|x^*(n_1, 0, x_0^*)| < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, которое противоречит условию (1.21). Откуда следует, что $\eta_j - n_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Согласно условию 4 теоремы, найдётся число $\Delta_1 > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon)$, такие, что $\forall n \geqslant N$ и $\forall x_0$, $\|x_0\| < \Delta_1$ справедливо неравенство

$$|x^*(n, 0, x_0)| < \varepsilon \tag{1.22}$$

Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{3}{2\Delta_1}$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$. Тогда неравенство $|x^*(n, 0, x_0^*)| \geqslant \varepsilon_1$ будет справедливо, какое бы $n \geqslant 0$ не выбрали. Однако, данное неравенство противоречит неравенству (1.22). Таким образом, устойчивость нулевого решения $x = 0$ системы (1.1) доказана. □

Аналогично можно провести доказательство равномерной устойчивости решения $x = 0$ системы (1.1). Предположим, что решение $x = 0$ системы (1.1) не является равномерно устойчивым. Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $n_0 \geqslant 0$ и последовательности $\eta_j \to +\infty$, $n_0^j \in \mathbb{Z}^+$ и $x_j^0 \to 0$, такие, что

$$|x(\eta_j, n_0^j, x_j^0)| = \varepsilon_0$$

При сделанных предположениях условия (1.19) запишутся в виде

$$|x(n_j, n_0^j, x_j^0)| = \varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_1 < |x(n, n_0^j, x_j^0)| < \varepsilon_0 \ \forall\ n \in (n_j, \eta_j)$$

Обозначим $x_j = x(n_j, n_0^j, x_j^0)$ и, как и прежде, рассматривая решение $x(n + n_j, n_j, x_j)$, $n \geqslant 0$, системы (1.1), повторим предыдущие рассуждения. Необходимое нам равенство (1.20) вытекает из условия равномерной устойчивости нулевого решения $w = 0$ системы сравнения (1.7), неравенств

$$0 \leqslant \bar{V}(n_j, x_j) \leqslant \sum_{i=1}^{k} w^i(n_j, n_0^j, w_j^0), \qquad w_j^0 = V(n_0^j, x_j^0)$$

и из условия предкомпактности. Дальнейшие рассуждения аналогичны использованным нами в доказательстве устойчивости решения.

Теорема 1.12. *Предположим, что выполнены условия 1–4 теоремы* (1.11), *а так же выполнено условие*

5. *множество* $\{V^* > 0\} \bigcap \{Q^*(n, x, w^*(n)) = 0\}$ *не содержит решений системы* (1.5), *кроме* $x = 0$.

Тогда решение $x = 0$ системы (1.1) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Устойчивость (равномерная устойчивость) нулевого решения $x = 0$ системы (1.1) имеет место на основании выполнения условий теоремы (1.11). Доказательство притяжения (равномерного притяжения) решений системы (1.1) к нулю проводится по схеме, использумой в доказательстве теоремы (1.9). $\square$