ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Макаров Денис Сергеевич

Моделирование робототехнических систем в виде систем связанных твердых и упруго-твердых тел

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Андреев А.С.

Ульяновск 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие производства в XX веке повлекло за собой совершенствование средств

автоматизации. Использование всевозможных управляемых механизмов повлекло за собой необходимость в развитии математического описания их функционирования для обеспечения оптимальности выполняемых операций. Важная роль в вопросе управляемости механических устройств отведена манипуляторам, как средству выполнения роботом необходимой задачи. Происходит постепенное движение от более простых моделей к более сложным, позволяющим учитывать нелинейную движений манипуляторов, решать задачи с запаздыванием, возникающим в цепи обратной связи. Важная роль уделяется также снижению вычислительной сложности расчётов заданного движения. Данное условие необходимо для возможности просчёта движений онлайн, что обеспечивает большую гибкость возможностей использования манипуляторов. Так как модели механических систем часто представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений, одним из естественных вариантов решения задачи анализа поведения таких систем становится метод декомпозиции, позволяющей проводить разбиение системы на подсистемы меньшей размерности для их дальнейшего исследования. Методы декомпозиции развиваются научными школами таких учёных как Ф.Л. Черноусько и Е.С. Пятницкий. Проблема управления движением механических систем, в том числе, манипуляционных роботов, без учета измерения скоростей стала активно изучаться с начала 90-х годов прошлого века. В ранних исследованиях [?, ?, ?, ?, ?] были получены результаты, решающие задачи стабилизации программной позиции и локального отслеживания траектории. Эти результаты, как правило, были основаны на применении двухшаговой процедуры: 1) построение наблюдателя (фильтра) скоростей; 2) синтез управления с применением метода линеаризации обратной связью и функции Ляпунова квадратичного вида. Такие законы управления являются весьма сложными по структуре, так как содержат вычисляемые в режиме он-лайн моменты всех сил, действующих на систему, слагаемое, представляющее собой произведение матрицы инерции системы на программное ускорение. Точная реализация данных законов возможна лишь на имеющейся полной информации о параметрах системы и действующих силах. В работах [?, ?] решены задачи полуглобального и глобального отслеживания траектории механической системы с одной и с n степенями свободы без учета измерения скорости на основе применения приближенного дифференцирования и построения управления при помощи метода линеаризации обратной связью. Как отмечалось ранее, недостатком данного метода является сложность структуры построенного управления, большие объемы вычисления в режиме он-лайн и необходимость построения точной динамической модели системы. В работах [?, ?] для решения задач стабилизации программной позиции и программного движения натуральной механической системы без измерения скоростей были построены наблюдатели, имеющие порядок, равный числу степеней свободы системы, не требующие точной информации о динамической модели системы, что является преимуществом перед нелинейными наблюдателями, предложенными в работах [?,?]. Результаты, полученные в работах [?, ?], применимы лишь для механических систем без учета диссипативных сил, кроме того, решение задачи о стабилизации программного движения получено в малом, что ссужает область применимости данных результатов. В работе [?] дано решение задачи полуглобального отслеживания траектории механических систем, находящихся под действием лишь потенциальных и ограниченных управляющих сил, что ссужает класс рассматриваемых механических систем. В работе [?] на основе применения классического метода Ляпунова построено адаптивное управление многозвенным манипулятором на основе наблюдателя и применения метода бэкстеппинга без измерения скоростей и с учетом неизвестных параметров системы. В работе [?] было получено адаптивное управление манипуляционным роботом без измерения скоростей с использованием фильтров первого порядка. Недостатком работ [?, ?] является сложная структура построенного управления. В работе [?] предложен робастный закон управления, решающий задачу глобального отслеживания траектории

робота манипулятора с неточно известными параметрами без измерения скоростей, недостатком работы является сложный алгоритм построения управления, требующий большого объема вычислений в режиме он-лайн. В работе [?] даны решения задач управления нелинейных механических систем под действием диссипативных сил без измерения скоростей с гравитационным компенсатором: о глобальной стабилизации программной позиции на основе динамической обратной связи с насыщением; глобального отслеживания траектории. При этом нерешенной остается задача построения закона управления без гравитационного компенсатора, в том числе, для систем с неточно известными параметрами. В работе [?] решена задача о глобальной стабилизации программной позиции механической системы, находящейся под действием лишь потенциальных и управляющих сил. С помощью нелинейной обратной связи построен закон управления без измерения скоростей. При этом вопрос о робастности построенного закона не рассматривался. Нерешенной остается задача о стабилизации нелинейной обратной связью программного движения более широкого класса механических систем, находящихся под действием не только потенциальных, но и диссипативных сил. В работе [?] построен закон адаптивного управления, обеспечивающего равномерную глобальную асимптотическую устойчивость заданного движения манипуляционного робота. На основе классического метода Ляпунова и построения нелинейных фильтров задача адаптивного управления решена для механических систем с линейной зависимостью от вектора неизвестных параметров. Отметим, что для реализации построенного в [?] закона требуется проведение громоздких вычислений для построения оценки неизвестных параметров, кроме того, открытым остается вопрос оценки скорости сходимости к программному движению. В работе [?] решена задача об отслеживании нестационарной траектории механических систем без измерения скоростей и без построения наблюдателей. При этом для нахождения

неизвестных скоростей применяется приближенное дифференцирование. Получены условия равномерной глобальной асимптотической устойчивости программного движения системы без диссипации путем построения нелинейного закона управления на основе метода линеаризации обратной связью. Проведенный анализ работ [?] - [?] позволяет утверждать, что к настоящему моменту решение задачи о нелокальной стабилизации нестационарных программных движений нелинейных механических систем с неточно известными параметрами без измерения скоростей далеко от завершения.

В

80-х гг. из-за развития вычислительной техники, учёные при разработке методов моделирования начинают ориентироваться на эффективность метода с точки зрения применимости для решения на компьютере. Метод оценивается с помощью О – символики. Алгоритмы, разработанные с применением метода Лагранжа, имели сложность $O(N^4)$ и должны были быть адаптированы для систем, работающих в реальном времени. Первые исследователи, разработавшие методы порядка $O(N)$ для решения обратной задачи динамики использовали уравнения Ньютона-Эйлера. Так Степаненко и Вукобратович в 1976-м разработали рекурсивный метод Ньютона-Эйлера для описания динамики человеческих конечностей. Орин в 1979 году улучшил этот метод, привязав силы и моменты сил к локальным координатам звеньев для контроля ноги шагающей машины в реальном времени. Лу, Уокер и Пол в 1980-м разработали очень эффективный рекурсивный алгоритм на основе уравнений Ньютона-Эйлера (RNEA), привязав все основные параметры к координатам звеньев. Холлербах, разработавший в том же году алгоритм на основании уравнений Лагранжа, однако, оказалось, что он намного менее эффективен, чем RNEA в терминах количества умножений и сложений. Рекурсивные преобразования и формулы Родрига использовали Вукобратович и Потконяк [И29] (1979 г.), причем их метод позволял решать и прямую задачу динамики, хотя его вычислительная эффективность и не столь высока. Значительный прогресс в сокращении числа операций достигнут в работах Ренода [И24] (1983 г.) и Ли [И15] (1988 г.), также применивших рекурсивные соотношения.[И1]

Самый ранний первый известный алгоритм сложности $O(N)$ для решения прямой задачи динамики был предложен Верещагиным. Этот алгоритм использует рекурсивную формулу для расчета формы Гиббса-Аппеля уравнения движения, и применим к неразветвлённым цепям с вращательными или призматическими соединениями. В 1988 Балафотисом, Пателем и Митрой были представлены дварекурсивных алгоритма на основе уравнений Ньютона-Эйлера, использующие ортогональные тензоры для решения обратной задачи динамики. Они применимы для разомкнутой кинематической цепи (например, для моделирования движения человеческой руки). Один из этих алгоритмов позволяет рассчитать положение манипулятора с шестью степенями свободы, используя приблизительно 489 операций умножения и 420 сложения. Для манипуляторов с более простой геометрической конфигурацией количество операций может быть уменьшено до 277 и 255 соответственно. [И19] Этот алгоритм приблизительно в 1.7 раз быстрее, чем алгоритм RNEA для манипулятора робота с шестью степенями свободы.

В 1954 г. были проведены работы по симуляции эволюции Нильсом Баричелли на компьютере, установленном в Институте Продвинутых Исследований Принстонского университета. Его работа, опубликованная в том же году, привлекла широкое внимание общественности. [И20] С 1957 года, австралийский генетик Алекс Фразер опубликовал серию работ по симуляции искусственного отбора среди организмов с множественным контролем измеримых характеристик. Симуляции Фразера включали все важнейшие элементы современных генетических алгоритмов. [И21] С ростом исследовательского интереса существенно выросла и вычислительная мощь настольных компьютеров, это позволило использовать новую вычислительную технику на практике. В том числе применять генетические алгоритмы для нахождения оптимального управления робототехническими системами (например, симуляции походки человека). Одна из последних на данное время работ в этом направлении - работа, представленная в 2013 г. В ней Гейтенбик, Ван де Панн и Ван дер Стаппен продемонстрировали метод моделирования двуногой ходьбы с использованием генетических алгоритмов. [И22] Их метод основывается на моделировании конечностей существа в виде связанных тел, управляемых мышцами, которые могут перемещать конечности определенным образом и основывается на работе Ванга 2012 г. [И30] Проведенные эксперименты показывают, что в обычных условиях модели приходят к стабильному положению ходьбы через 500-3000 поколений. Недостатками, однако, является небольшая производительность (на персональном компьютере время оптимизации 2-12 часов). Также для метода, как в целом для всех генетических алгоритмов характерна сходимость решения к локальному минимуму, что может не обеспечивать достаточной эффективности.

В первой главе диссертации представлены исследования относительно уравнений с запаздыванием. Результаты, полученные в первой главе далее применяются для построения управления манипуляторами во второй и третьей главах.

Во второй главе строится и обосновывается управление двухзвенным манипулятором, моделируемым в виде системы связанных твёрдых тел. Рассматривается модель манипулятора, описываемая уравнениями Лагранжа 2-го рода. В первом параграфе исслледуется поведение манипулятора без учёта динамики приводов, расположенных в шарнирах и приводящих манипулятор в движение. Во втором параграфе система рассматривается с учётом динамики приводов.

Третья глава начинается с построения модели, описывающей поведения трехзвенного манипулятора, имеющего 3 степени свободы, не учитывающей действия электрических приводов. Во втором параграфе рассматривается модель манипулятора с приводами.

Приложение содержит компьютерную модель динамики трехзвенного манипулятора и реализацию данной модели на языке высокого уровня Java. Представленная программа позволяет задавать закон управления в аналитическом виде, в том числе в виде определенных интегралов с переменным верхним пределом.

Стабилизация программных движений двузвенного манипулятора без измерения скоростей. Сначала рассмотрим задачу о стабилизации программного положения горизонтального манипулятора. В этом случае без измерения скоростей $q_1^0(t) = q_1^0 = const, q_0^2(t) = q_0^2 = const$

В соответствии с представленным в параграфе 2.2 общим решением для голономной механической системы эта задача решается управлением вида $U_1^{(1)}(x_1) = -k_1 \sin \frac{x_1(t)}{2} - \int_{t-h}^{t} p_1^0 e^{S_1^0(\tau - t)}(x_1(t) - x_1(\tau))$ $U_1^{(2)}(x_1) = -k_2 \sin \frac{x_2(t)}{2} - \int_{t-h}^{t} p_2^0 e^{S_2^0(\tau - t)}(x_2(t) - x_2(\tau))$

$k_1, k_2, p_1^0, p_2^0 - const$ При этом, согласно теореме каждое возмущенное движение будет неограниченно приближаться при $t \to \infty$ к положению равновесия $\sin \frac{x_1(t)}{2} = 0$

1 ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

1.1 Теоремы об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием

Для представления некоторых используемых теорем дадим следующие построения и определения из работ [].

Пусть R^p — линейное действительное пространство p — векторов x с нормой $|x|, R$ — действительная ось, $h > 0$ — заданное действительное число, C — банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^p$ с нормой $\|\varphi\| = sup(|\varphi(s)|, -h \leq s \leq 0).C_H = \varphi \in C : \|\varphi\| < H > 0$

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.1}$$

где $f : R \times C_H \to R^p$ - некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее нижеследующим предположениям, в которых для $\alpha \in R$ и $\varphi \in C_n$ функций $x = x(t, \alpha, \varphi)$ обозначает решение этого уравнения удовлетворяющее начальному условию $\varphi(x_t(\alpha, \varphi)) = x_\alpha(\alpha, \varphi) = x(t + s, \alpha, \varphi), -h \leq s \leq 0)$.

Определение 1.1. *Для каждого числа* r, $0 < r < H$, *существует число*

m_r *такое, что выполняется неравенство*

$$|f(t,\varphi)| \le m_r, \forall \varphi \in \bar{C}_r = \varphi \in C : \|\varphi\| \le r < H. \tag{1.2}$$

Пусть $\{r_n\}$ — последовательность чисел такая, что $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$, $r_n \to H$ при $n \to \infty$. Для каждой r_i определяется множество $K_i \subset C$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\varphi(s)| \le r_i, \qquad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \le m_{r_i}|s_2 - s_1|.$$

Множество K_i является компактным, вводим $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Пусть F - множество всех непрерывных функций f, определенных на $R \times \Gamma$, со значениями в R^p. Через f^τ принимается сдвиг функции f, $f^\tau(t,\varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Для $f \in F$ семейство сдвигов $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R\}$ будет являтся подмножеством F.

Дадим определение сходимости в F как равномерной на каждом компакте $K' \subset R \times \Gamma$: последовательность $\{f_n \in F\}$ сходится к $f \in F$, если $\forall K' \subset R \times \Gamma$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $|f_n(t,\varphi) - f(t,\varphi)| < \varepsilon$, при $n > N = N(\varepsilon)$ и $(t,\varphi) \in K'$.

Эта сходимость метризуема, для всех n для двух функций f_1, $f_2 \in F$ вводится полунорма $\|\cdot\|_n$ и соответствующая псевдометрика ρ_n

$$\|f\|_n = \sup\{|f(t,\varphi)|, \forall (t,\varphi) \in {K'}_n\},$$

$$\rho_n(f_1, f_2) = \frac{\|f_2 - f_1\|_n}{1 + \|f_2 - f_1\|_n},$$

где ${K'}_n = [0, n] \times K_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (K_n определено выше).

Расстояние между функциями $f_1, f_2 \in F$ задается в виде $\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f_1, f_2)$.

При этом будут выполнены все аксиомы метрического пространства. И пространство F будет полным по отношению к введенной метрике.

Получается, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующему предположению.

Определение 1.2. *Для любого $K \subset C_H$ (K - компакт) функция $f = f(t, \varphi)$ равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in R \times K$, т.е. $\forall K \subset C_H$ и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для любых $(t, \varphi) \in R \times K$, $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in R \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, выполняются неравенства*

$$|f(t_2, \varphi_2) - f(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Выводится следующая лемма:

Лемма 1.1. *При условии выполнения предположений 1.10 и 1.2 семейство сдвигов $\{f^\tau : \tau \in R\}$ предкомпактно в F.*

Определение 1.3. *Функция $f^* : R \times \Gamma \to R^p$ называется предельной к f, если существует последовательность t_n такая, что $f^{(n)}(t, \varphi) = f(t_n + t, \varphi)$ сходится к $f^*(t, \varphi)$ при $t \to \infty$ в F. Замыкание семейства $\{f^\tau : \tau \in R\}$ в F называется оболочкой $S^+(f)$. Уравнение*

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t) \tag{1.4}$$

называется предельным к (1.1).

При условиях (1.2) и (1.3) уравнение (1.1) является предкомпактным.

Определение 1.4. *Для любого компактного множества* $K \subset C_H$ *функция* $f = f(t, \varphi)$ *удовлетворяет условию Липшица т.е,* $\forall K \subset C_H$ *существует* $L = L(K)$, *такое, что для любых* $t \in R$; $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ *будет выполнено неравенство*

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq L\|\varphi_2 - \varphi_1\|. \tag{1.5}$$

При выполнении условия (1.5), каждая предельная функция $f^*(t, \varphi)$ также будет удовлетворять аналогичному условию Липшица относительно компакта $K \subset \Gamma$.

Вследствие этого согласно предположению 1.4 решения уравнения (1.1) при начальном условии $(t, \varphi) \in R \times C_H$ и уравнения (1.4) для $(t, \varphi) \in R \times \Gamma$ будут единственными.

Связь между решениями уравнений (1.1) и (1.4) определяется следующими теоремами:

Имеет место следующее свойство положительного предельного множества $\omega^+(\alpha, \varphi)$ решения уравнения (1.2) $x = x(t, \alpha, \varphi)$.

Теорема 1.1. *Пусть решение (1.1)* $x = x(t, \alpha, \varphi)$ *ограничено,* $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq r < H$ *для всех* $t \geq \alpha - h$. *Тогда множество* $\omega^+(\alpha, \varphi)$ *квазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений* $\{\dot{x} = f^*(t, x_t)\}$, *а именно, для каждой точки* $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ *существует предельное уравнение* $\dot{x} = f^*(t, x_t)$, *такое, что точки его решения* $y(t, 0, \psi)$ *в пространстве* C *содержатся в* $\omega^+(\alpha, \varphi)$, $\{y_t(0, \psi), t \in R\} \subset \omega^+(\alpha, \varphi)$.

Прямой метод Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений основан на применении функционалов и функций Ляпунова [].

Пусть $V : R^+ \times C_H \to R$ есть непрерывный функционал Ляпунова и $x = x(t, \alpha, \varphi)$ — решение уравнения (1.1). Функция $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$ представляет собой непрерывную функцию времени $t \geq \alpha$.

Вводят следующие определения, в основе которых лежит использование непрерывных, строго возрастающих функций $a : R^+ \to R^+$, $a(0) = 0$ (функций класса $\mathcal{K}$).

Определение 1.5. *Функционал $V(t, \varphi)$ называется определенно-положительным по $|\varphi(0)|$, если $V(t, 0) \equiv 0$ и для некоторого H_1, $0 < H_1 < H$, существует функция $a \in \mathcal{K}$, такая, что для любых $(t, \varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$ выполнено неравенство*

$$V(t, \varphi) \geq a(|\varphi(0)|) \quad .$$

Определение 1.6. *Функционал $V = V(t, \varphi)$ допускает бесконечно малый высший предел по $\|\varphi\|$, если для некоторого H_1, $0 < H_1 < H$, существует функция $a \in \mathcal{K}$, такая, что для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$ выполнено неравенство*

$$|V(t, \varphi)| \leq a(\|\varphi\|).$$

Верхней правосторонней производной от V вдоль решения $x(t, \alpha, \varphi)$

называется значение [**?**, **?**]

$$\dot{V}^{+}(t, x_t(\alpha, \varphi)) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{1}{\Delta t} \left[V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(\alpha, \varphi)) - V(t, x_t(\alpha, \varphi)) \right]. \quad (1.6)$$

Для функционала, имеющего инвариантную производную $\partial V(t, \varphi)$ удобно следующее вычисление производной:

$$\dot{V}(t, \varphi) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, \varphi) + \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, \varphi) \cdot f_i(t, \varphi) \right) + \partial V_{\varphi}(t, \varphi). \qquad (1.7)$$

Допустим, что производная $\dot{V}(t, \varphi)$ оценивается неравенством

$$\dot{V}(t, \varphi) \le -W(t, \varphi) \le 0, \qquad (1.8)$$

где функционал $W = W(t, \varphi)$ ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве $R \times K$, т.е. для каждого компактного множества $K \subset C_H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m = m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такие, что имеют место неравенства

$$W(t, \varphi) \le m, \qquad |W(t_2, \varphi_2) - W(t_1, \varphi_1)| \le \varepsilon \qquad (1.9)$$

для всех $(t, \varphi) \in R \times K$; (t_1, φ_1), $(t_2, \varphi_2) \in R \times K$: $|t_2 - t_1| \le \delta$, $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \le \delta$. Как и в случае f, при этих условиях семейство сдвигов $\{W^{\tau}(t, \varphi) = W(t + \tau, \varphi), \tau \in\}$ предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций $F_W = \{W : R \times \Gamma \to R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

Определение 1.7. *Функция $W^* \subset F_W$ есть предельная к W, если существует $t_n \to +\infty$, такая, что последовательность $\{W_n(t, \varphi) = W(t_n + t, \varphi)\}$ сходится к W^* в F_W.*

Определение 1.8. *Будем говорить, что решение* $x(t), \alpha - h < t < \beta, \alpha < \beta$ *и* $: (\alpha, \beta) \to C_H$ *(и* $: R \to C_H$*) содержится во множестве* $\{\varphi \in C_H : W(t, \varphi) = 0\}$, *если тождество* $W(t, x(t)) \equiv 0$ *выполняется для всех* $t \in (\alpha, \beta)$.

Определение 1.9. *Функции* $f^* \in F$ *и* $W^* \in F_W$ *образуют предельную пару* (f^*, W^*), *если они являются предельными к* f *и* W *для одной и той же последовательности* $t_n \to +\infty$.

На основании теорем 1.1. и 1.2 достигаются следующие результаты.

Теорема 1.2. *Предположим, что:*

1) уст непрерывный функционал $V : R \times C_H \to R$, *ограниченный снизу на каждом компакте* $K \subset C_H$, $V(t, \varphi) \geq m(K)$ *для всех* $(t, \varphi) \in R \times K$, *и такой, что* $\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$ *для всех* $(t, \varphi) \in R \times C_H$;

2) решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ *уравнения (1.1) ограничено,* $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq H_1 < H$ *для всех* $t \geq \alpha - h$.

Тогда для каждой предельной точки $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ *существуют предельная пара* (f^*, W^*) *решение* $y = y(t)$, $y_0 = \psi$, *уравнения* $\dot{x} = f^*(t, x_t)$, *такие, что* $y_t \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ *и* $y_t \subset \ W^*(t, \varphi) = 0$ *для всех* $t \in R$.

Для задачи об асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.1), в предположении $f(t, 0) \equiv 0$. фундаментальное значение имеет следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 1.3. *Предположим, что:*

1) существует функционал $V : R \times C_{H_1} \to (0 < H_1 < H)$, *такой, что* $V(t, 0) = 0$, $a_1(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq a_2(\|\varphi\|)$, $\dot{V}^+(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$ *для всех*

$(t, \varphi) \in R \times C_{H_1}$;

2) для каждой предельной пары (g, U) множество $\{U(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решения уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, кроме нулевого.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Рассмотрим задачу об устойчивости невозмущенного движения уравнения (1.1) относительно части переменных $x_1, x_2, ..., x_m (m > 0, m \leq p)$. Для удобства переобозначим эти переменные $y_i = x_i (i = 1...m)$, а остальные — через $z_j = x_{m+j} (j = 1...r = p - m)$. Соответственно, $x^{'} = (x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_p) = (y^{'}, z^{'}), y \in R^m$ есть вектор р — мерного действительного пространства с некоторой нормой $||, z \in R^{p-m}$ есть вектор $(p - m)$ — мерного действительного пространства с некоторой нормой, при этом норму $|x|$ определим равенством $|x| = |y| + |z|$. Через C^y обозначим банахово пространство непрерывных функций $\psi : [-h, 0] \to R^m$ с нормой $\|\psi\| = sup(|\psi(s)|, -h \leq s \leq 0)$, пространство $C = C^y \times C^z$, для $\varphi \in C$ имеем $\varphi^{'} = (\psi^{'}, \theta^{'})$ и $\|\varphi\| = \|\psi\| + \|\theta\|$. Правая часть уравнения (1.1), вектор-функция $f = f(t, \varphi)$ может быть записана в виде $f = (f^1, f^2)$

а само уравнение можно представить в виде

$$\dot{y}(t) = f^1(t, y_t, z_t), \dot{z}(t) = f^2(t, y_t, z_t). \tag{1.10}$$

Определение 1.10. *Пусть функция $f^1(t, \varphi)$ ограничена в области $R^+ \times \bar{C}_r^y \times C^z$; для каждого $r, 0 < r < H$, существует число $m = m(r) > 0$, такое, что для всех $(t, \psi, \theta) \in R^+ \times \bar{C}_r^y \times C^z \times \bar{C}_r^y = \psi \in C^y : \|t\| \leq r$ выполняется неравенство $|f(t, \psi, \varphi) \leq m$.*

Ограниченность решения уравнения позволяет применить для выявления устойчивости относительно части переменных свойство квазиинвариантности его положительного предельного множества, определяемое построением предельных уравнений.

Область Γ, в данной задаче строится следующим образом.

Пусть $r_1^{(j)}$ есть последовательность чисел, таких, что $r_1^{(1)} < r_1^{(2)} < ... < r_1^{(j)} < ..., r_1^{(j)} \to H$ при $j \to \infty, r_2^{(j)}$ — последовательность $r_2^{(1)} < r_2^{(2)} < ... < r_2^{(j)} < ..., r_2^{(j)} \to \infty$ при $j \to \infty$. Для каждого $j \in N$ определяем множество $K_j \in C_H^y \times C^z$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\psi(s)| \leq r_1^{(j)} j_1, |\theta(s)| \leq r_2^{(j)} j_2, |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leq m_r |s_2 - s_1| \qquad (1.11)$$

и полагаем $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

В области $R \times \Gamma$ строится семейство предельных к $f(t, \varphi)$ функций $g : R \times \Gamma \to R^p$ и соответственно, семейство предельных уравнений

$$\dot{x}(t) = g(t, x_t). \qquad (1.12)$$

Существование функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную, позволяет применить к решению задачи об устойчивости по части переменных принцип квазиинвариантности. При этом, существенной особенностью является требование ограниченности решений.

Теорема 1.4. *Пусть 1) каждое решение уравнения () из некоторой* δ_0 *— окрестности* $\|\varphi\| < \delta_0 > 0$ *точки* $x = 0$ *ограниченно по* z; *2) существует функционал* $V = V(t, \varphi), V(t, 0) = 0$, *такой, что для всех* $(t, \varphi) \in R^+ \times C_{H_1}^y \times C^z (0 < H_1 < H)$

$$V(t,\varphi) \geq a(|\psi(0)|), \dot{V}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0; \tag{1.13}$$

3) для каждой пары (g,U) и любого числа $c_0 \geq 0$ решениями уравнения $\dot{x}(t) = g(t,x_t)$, содержащимися во множестве $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0\} \cap \{U(t,\varphi) = 0\}$, могут быть лишь решения $x = x(t) : y(t) \equiv 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения асимптотически устойчиово по y.

В следующей теореме будем полагать, что функционал $V = V(t,\varphi)$ является ограниченным, равномерно непрерывным на каждом множестве $R^+ \times K$.

Теорема 1.5. *Предположим, что: 1) решение уравнения из некоторой окрестности $\|\varphi\| < \delta_0 > 0$ точки $x = 0$ равномерно ограничены по z;*

2) существует функционал $V(t,\varphi)$, такой, что для $(t,\varphi) = (t,\psi,\theta) \in R^+ \times C^y_{H_1} \times C^z$ имеют место соотношения

$V(t,\varphi) \geq a_1(|\psi(0)|), V(t,\varphi) \leq V_2(\varphi), \dot{V}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0;$

3) каждая предельная совокупность (g,U) такова, что множество $\{V_2^(\varphi) = c = const\} \cap U(t,\varphi) = 0$ не содержит решений уравнения $\dot{x}(t) = g(t,x_t)$

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) равномерно асимптотически устойчиво по y.

1.2 Стабилизация программных позиций голономной механической системы без измерения скоростей

Движение управляемой механической системы с стационарными голономными связями, имеющей n обобщенных координат $q_1, q_2, ...q_n$ может быть описано уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U \qquad (1.14)$$

В уравнениях введена векторно-матричная запись: $q \in R^n, q = (q_1, q_2, ...q_n)'$ — вектор обобщенных координат, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, ...\dot{q}_n)'$ — вектор обобщенных скоростей. $T = \frac{1}{2}(\dot{q})' A(q)\dot{q}$ — кинетическая энергия с инерциальной матрицей $A(q), A \in R^{n\times n}; Q = Q(t, q, \dot{q})$ — вектор обобщенных сил, которые полагаются зависимыми от $(t, q, \dot{q})$; U - обобщенная управляющая сила; через $()'$ обозначена операция транспонирования.

В дальнейшем обозначим через $\|q\|$ норму вектора q, $\|q\|^2 = q_1^2 + q_2^2 + ... + q_n^2$.

Инерционная

матрица A в общем случае является определенно-положительной при всех фиксированных допустимых значениях обобщенных координат. Будем полагать, что система (2.1) определяется при всех $q \in R^n$, при этом соответсвующая квадратичная форма $(\dot{q})' A(q)\dot{q}$ является ограниченной определенно-положительной при всех $q \in R^n$, так что имеет место оценка

$$2\alpha_0\|\dot{q}\|^2 \leq (\dot{q})' A(q)\dot{q} \leq 2\alpha_1\|\dot{q}\|^2, \alpha_0 > 0 \qquad (1.15)$$

При этом полагаем, что $A(q)$ непрерывно-дифференцируема.

В моделировании манипуляторов представляется важным учет потенциальных гироскопических и диссипативных сил. Соответственно будем полагать, что обобщенные силы непрерывны по $(t, q, \dot{q}) \in R^+ \times R^n \times R^n$, и при этом представимы в виде

$$Q(t,q,\dot{q}) = -\frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q} + Q_g(t,q,\dot{q}) \quad (1.16)$$

где $\Pi = \Pi(t,q)$ — потенциальная энергия, $Q_g(t,q,\dot{q})$ - совокупность диссипативных и гироскопических сил. По их определению для Q_g будут иметь место следующие соотношения

$$Q_g \equiv 0, \dot{q}^{'} Q_g(t,q,\dot{q}) \leq 0 \forall \dot{q} \in R^n \quad (1.17)$$

Задача о стабилизации программной позиции системы (2.1) состоит в нахождении управления U, обеспечивающего стабилизацию положения системы

$$\dot{q} = 0, q = q_0 = const \quad (1.18)$$

Для решения этой задачи могут быть использованы традиционные методы исследования асимптотической устойчивости под действием структуры сил и их развитие []. Эти методы предполагают наличие диссипативных сил с полной, а иногда и с частичной диссипацией. Таким образом для построения управляющих сил требуется измерение всех (и лишь иногда части) обобщенных скоростей.

Использование теорем об устойчивости фунционально-дифференциальных уравнений, представленое в параграфе 1.1 позволяет решить эту задачу только посредством измерения обобщенных координат.

Уравнения движения (2.1) с учетом представленных обобщенных сил (2.3) могут быть записаны в виде

$$A(q)\ddot{q} = C(q,\dot{q})\dot{q} - \frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q} + Q_g(t,q,\dot{q}) + U \quad (1.19)$$

где матрица $C = (c_{j,k})$ инерционных сил определяется равенством $c_{j,k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k})\dot{q}_i$

Пусть (2.5) есть некоторая выбранная программная позиция. Введем возмущение

$$x = q - q_0, y = \dot{x} = \dot{q} \tag{1.20}$$

Уравнения движения (2.6) в переменных $(x, \dot{x})$ принимают следующий вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = A_1^{-1}(x)(C_1(x,y)y - \frac{\partial \Pi_1(t,x)}{\partial x} + Q_1(t,x,y) + U) \tag{1.21}$$

где индексом "$_1$"обозначены функции, получаемые из соответствующих зависимостей (2.6) в результате замены (2.7).

Введем в рассмотрение матрицы $P = P(t,\tau), P \in R^{n\times n}$, учитывающие предыдущее состояние системы в виде зависимостей $P = \|p_{jk}(t,\tau)\|, p_{jk} = p^0_{jk}e^{S^0_{jk}(\tau-t)}$ с постоянными $p^0_{jk} = const, s^0_{jk} = const, p^0_{jk} = p^0_{kj}; s^0_{jk} = s^0_{kj}$ такими, что выполнены условия

$$x^{'}P(t,\tau)x \geq 0; x^{'}P_t(t,\tau)x \leq -\beta_0\|x\|^2, \beta > 0 P_t(t,\tau) = \frac{\partial P(t,\tau)}{\partial t} = = -\|p^0_{jk}s^0_{jk}e^{S^0_{jk}(\tau-} \tag{1.22}$$

Покажем, что поставленная задача может быть решена управлением вида

$$U = -\frac{\partial \Pi(t,x(t))}{\partial x} - \int\limits_{t-h}^{t} P(t,\tau)(x(t) - x(\tau))d\tau \tag{1.23}$$

Уравнения (2.8) при управлении (2.10) принимают следующий вид

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t), \frac{dy(t)}{dt} = A_1^{-1}(x(t))(C_1(x(t), y(t)) + Q_1(t, x(t), y(t)) - \frac{\partial \Pi_0(t,x)}{\partial x} - \int\limits_{t-h}^{t} P(t, \tag{1.24}$$

Это уравнение представляет собой совокупность функционально-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с конечным запаздыванием. Областью определения этого уравнения можно принять область вида $R \times C_1 \times C_2$, где C_1 — пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^n$ с нормой $\|\varphi\|_c = \sup(\|\varphi(s)\|, -h \le s \le 0), C_2$ — пространство непрерывных функций $\psi : [-h, 0] \to R^n$ с аналогичной нормой.

Для движения $(q(t), \dot{q}(t))$ системы (1.1) с начальным состоянием $(q(t_0), \dot{q}(t_0))$ за начальную функцию системы уравнений (2.11) можно принять функцию $\varphi(s) = x(t_0) = q(t_0) - q_0, \psi(s) = y(t_0) = \dot{q}(t_0), -h \le s \le 0$.

Функции $A_1^{-1}(x(t))$ и $C_1(x(t), y(t))$ представляют собой равномерно непрерывные функции по отношению к непрерывной совокупности $(x(t), y(t)), \|x(t)\| + \|y(t)\| \le H, H = const > 0$, на некотором конечном отрезке $[t_0, t_0 + T]$.

Будем полагать, что зависимости $Q = Q(t, x, y), \Pi_0(t, x), \frac{\partial \Pi_0(t,x)}{\partial x}$ представляют собой функции, ограниченные, равномерно непрерывные по (t, x, y) на каждом множестве вида $R \times \{\|x\| + \|y\| \le H\}$ при любом $H > 0$.

Соответственно согласно п 1.1. и работе [] семейства предельных функций $\{Q^*(t, x, y)\}$ и $\{\Pi_0^*(t, x)\}$ определяются равенствами $Q^*(t, x, y) = \lim_{t_k \to \infty} Q(t_k + t, x, y), \Pi_0^*(t, x) = \lim_{t_k \to \infty} \Pi_0(t_k + t, x) \frac{\partial \Pi_0^*}{\partial x}(t, x) = \lim_{t_k \to \infty} \frac{\partial \Pi_0}{\partial x}(t_k + t, x)$

В частности в дальнейшем будем предполагать, что функция $\Pi_0(t,x)$ удовлетворяет условию (2.12) $\frac{\partial \Pi_0(t,x)}{\partial t} \leq 0$ Тогда будет существовать единственная функция $\Pi_0^*(x)$

При принятых предположениях уравнения (2.11) предкомпактны и для них можно определить семейство предельных уравнений вида

$$\frac{dx(t)}{dt} = y(t), \frac{dy(t)}{dt} = A_1^{-1}(x(t))(C_1(x(t),y(t))y(t) - \frac{\partial \Pi_0^*(x(t))}{\partial x}) - \int\limits_{t-h}^{t} P(t,\tau)(x(t)-x(\tau \tag{1.25}$$

Действительно, в предельном переходе, согласно теореме 1.2 при $t_n \to +\infty$ находим

$\lim_{t_k\to+\infty} A_1^{-1}x(t_k+t)(C_1(x(t_k+t),y(t_k+t)) - \frac{\partial \Pi_0(t_k+t,x(t_k+t))}{\partial x}) + \int_{t_k+t-h}^{t_k+t} P(t_k+t,\tau)(x(t_k+t) - x(\tau)d\tau) = A_1^{-1}(x^*(t))(C_1(x^*(t),y^*(t))y^*(t) - \lim_{t_k\to+\infty} \frac{\partial \Pi_0(t_k+t,x(t_k+t))}{\partial x} + \lim_{t_k\to+\infty}\int_{t-h}^{t} P(t_n+t,t_n+s)(x(t_n+t)-x(t_n+s))ds) = A_1^{-1}(x^*(t))(C_1(x^*(t),y^*(t))y^*(t) - \frac{\partial \Pi_0^*(x)}{\partial x} + \int_{t-h}^{t})P(t,s)(x^*(t)-x^*(s))ds$, так как $P(t_k+t,t_k+s) = P(t,s)$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Пусть уравнение (2.10) выбрано таким образом, что выполнены условия (2.9) относительно $P(t,\tau)$, а также*

1) зависимость $\Pi_0(t,x)$ является функцией определенно-положительной $\Pi(t,x) \geq a_1(\|x\|)$

2) для некоторого $\mu > 0$ и любого малого $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \mu$, найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ при котором выполнено неравенство $\|\frac{\partial \Pi_0}{\partial x}\| \geq \delta(\varepsilon) \forall x \in \{\varepsilon \leq \|x\| \leq \mu\}$

Тогда управляющее воздействие (2.10) решает задачу о стабилизации *положения (2.5).*

Доказательство

Возьмем функционал Ляпуова в виде

$$V(t,x_t,y_t)=\frac{1}{2}y'(t)A_1(x(t))y(t)+\Pi_0(t,x(t))+\frac{1}{2}\int\limits_{t-h}^{t}(x(t)-x(\tau))'P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau \qquad (1.26)$$

В силу условий (2.2), (2.9), (2.12) наложенных на $A(q), P(t,\tau), \Pi_0(t,x)$ *и условия теоремы для этого функционала имеем оценку*

$V(t,x_t,y_t)\geq \alpha_0\|y(t)\|^2+a_1(\|x(t)\|)$ $V(t,x_t,y_t)\leq \alpha_1\|y(t)\|^2+\Pi_0(0,x(t))+\|P\|h\max(\|x(t)-x(s)\|^2, t-h\leq s\leq t)$

$\|P\|$ - *норма матрицы в* $R^{n\times n}$

Для производной функционала V *в силу (2.1) находим* $\dot V = y'(t)A_1(\alpha(t))\frac{dy}{dt}+\frac{1}{2}y'(t)\frac{dA(x(t))}{dt}y(t)+\frac{\partial\Pi^0(t,x(t))}{\partial t}+(\dot x(t))'\frac{\partial\Pi^0(t,x(t))}{\partial t}=y'(t)A_1(x(t))(A_1^{-1}(x(t))(C_1(x(t),y(t))y(t)+Q_1(t,x(t),y(t))-\frac{\partial\Pi_0(t,x)}{\partial x})-\int_{t-h}^t P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau)+\frac{1}{2}(x(t)-x(t))'P(t,t)(x(t)-x(t))-\frac{1}{2}(x(t)-x(t-h))'P(t,t-h)(x(t)-x(t-h))+\int_{t-h}^t \dot x'(t)P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau+\frac{1}{2}\int_{t-h}^t(x(t)-x(\tau))'\frac{\partial\Pi_0(t,x(t))}{\partial t}(x(t)-x(\tau))d\tau+\frac{1}{2}y'(t)\frac{dA(x(t))}{dt}y(t)+\frac{\partial\Pi_0(t,x(t))}{\partial t}+y'(t)\frac{\partial\Pi_0(t,x(t))}{\partial x}=y'(t)Q_1(t,x(t),y(t))+\frac{\partial\Pi_0(t,x(t))}{\partial t}-\frac{1}{2}(x(t)-x(t-h))'P(t,t-h)(x(t)-x(t-h)+\frac{1}{2}\int_{t-h}^t(x(t)-x(\tau))'\frac{\partial P(t,\tau)}{t}(x(t)-x(\tau))d\tau\leq-\frac{\beta_0}{2}\int_{t-h}^t\|x(t)-x(\tau)\|^2d\tau\leq 0$

Таким образом, для производной $\dot V(t,x_t)$ *имеем оценку*

$$\dot V(t,x_t)\leq -W(t,x_t)\leq 0, W(t,x_t)=\frac{\beta_0}{2}\int\limits_{t-h}^{t}\|x(t)-x(\tau)\|^2d\tau, \{W^*(t,x_t)=0\} \qquad (1.27)$$

Множество $\{V\equiv W(t,x_t)=0\}$ *есть множество функций, для которых* $x(\tau)\equiv x(t)$ *для всех* $\tau\in[t-h,t]$, *при всех* $t\in R$ *и значит*

$$x(t) \equiv x(0) = x_0 = const \tag{1.28}$$

Подставляя $x^*(t) = x_0$ *в любое предельное уравнение (2.13) получим, что указанное решение должно удовлетворять соотношению*

$$\frac{\partial \Pi^*(x^*(t))}{\partial x} \equiv 0 \tag{1.29}$$

Но это в силу условиия 2) теоремы возможно, если только $x^*(t) \equiv 0$, *а значит и* $y^*(t) \equiv 0$.

Согласно теореме 1.4 имеем искомое доказательство.

Используя оценку производной (1.2.15) функционала (1.2.14) на основании теорем 1.2 и 1.3 получим следующий результат

Теорема 1.7. *Допустим, что для уравнения (2.10) при условии (1.9) функция* $\Pi_0(t, x) \geq 0$. *Тогда каждое ограниченное для всех* $t \geq t_0$ *движение системы (2.11)* $(\dot{x}(t), x(t))$ *неограниченно приближается к множеству* $\{\dot{x} = 0, \frac{\partial \Pi_0^*(x)}{\partial x}\} = 0$ *при* $t \to +\infty$

Доказательство

Согласно оценке (1.2.15) максимально инвариантное относительно можества $\{W^*(t, x_t) \equiv 0\}$ *подмножество состоит из решений (1.2.16), для которых* $x^*(t) \equiv x_0, \dot{x}^*(t) \equiv 0$ *и выполняется равенство (1.2.17). В соответствии с теоремой 1.3 имеем требуемое доказательство.*

Теоремы 1.5 и 1.6 позволяют вывести применимость уравнения (2.10) в задаче о стабилизации программной позиции (2.15) по отношению к скоростям и части координат.

Теорема 1.8. *Теорема 1.9. Пусть уравнение (2.10) выбрано таким* *образом, что выполнены условия (2.9) относительно матрицы* $P(t,\tau)$, *а также*

1) движения системы (2.11) из некоторой окрестности положения $\dot{x} = x = 0$ *под действием управления (2.10) ограничены по переменным* $x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$

2) функция $\Pi_0(t,x)$ *определенно-положительна по* $x_1, x_2, ...x_m, \Pi_0(t,x) \geq a_1(\|x\|_m), \|x\|_m^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2$

3) вне множества $x_1 = x_2 = ... = x_m = 0$ *нет поожений равновесия (2.11), так что для некоторого* $\mu > 0$ *и любого малого числа* $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \mu$ *найдется* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *такое, что* $\|\frac{\partial \Pi_0(t,x)}{dx}\| \geq \delta(\varepsilon) \forall x \in \{\varepsilon \leq \sum_{k=1}^m x_k^2 \leq \mu\}$

Тогда программная позиция (2.5) или положение $\dot{x} = x = 0$ *системы (2.10) асимптотически устойчиво по* $\dot{x}, x_1, x_2, .., x_m$.

Доказательство

Вновь возьмем функционал Ляпунова в виде (1.2.14). В силу уравнения 2) имеем оценку

$$V(t, x_t, y_t) \geq \alpha_0 \|y\|^2 + a_1(\|x(t)\|_m) \tag{1.30}$$

Для производной этого функционала по прежнему имеем оценку (1.2.15) и, таким образом, имеет место устойчивость по $y, x_1, ...x_m$

В силу условия 3) теоремы множество

$\{W^*(t, x_t) = 0\} \cap \{x : \sum_{k=1}^m x_k^2 > 0\} = \{x(\tau) = x(t), t - h < \tau < t\} \cap \{\sum_{k=1}^m x_k^2 > 0\} = \{x(t) = c = const\} \cap \{\sum_{k=1}^m x_k^2 > 0\} = \{x : \frac{\partial \Pi^*(x)}{\partial x} = 0\} \cap \{\sum_{k=1}^m x_k^2 > 0\}$

не содержит решений предельной системы. В соответствие с *теоремой 1.8 для каждого ограниченного движения* $y(t), x(t)$ *имеем.*

$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0; \lim_{t\to+\infty} x_k(t) = 0, k = 1..m$

Теорема доказана

Теорема 1.9. *Пусть уравнение (2.10) выбрано таким образом, что выполнены условия (2.9) относительно матрицы* $P(t,\tau)$*, а также:*

1) движения системы (2.11) из некоторой окрестности положения $\dot{x} = x = 0$ *равномерно ограничены по переменным* $x_{m+1}, x_{m+2}, ...x_n$

2) функция $\Pi_0(t,x)$ *удовлетворяет неравенствам* $a_1(\|x\|_m) \le \Pi_0(t,x) \le \Pi^*(x)$

3) множество $\{\Pi^*(x) > 0\}$ *не содержит положений равновесия системы (2.13),* $\|\frac{\partial \Pi_0^*(\dot{x})}{\partial x}\| \ge \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \{\Pi^*(x) \ge \varepsilon\}$

Тогда программная позиция (2.5) или положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ *системы (1.2.10) равномерно асимптотически устойчиво по* $\dot{x}, x_1, x_2, ...x_m$.

Доказательство

Вновь используем функционал Ляпунова (1.2.14), для которого, согласно условию теоремы, имеем оценку $a_1(\|x(t)\|) + \alpha_0\|y(t)\|^2 \le V(t, x_t, y_t) \le V_1(x_t, y_t) = \alpha_1\|y(t)\|^2|\Pi^*(x(t)) + \frac{1}{2}\|P\|h\|x(t) - x(\tau)\|^2$

Согласно соотношению (1.2.15) для производной этого функционала находим, что множество $\{W^*(t, x_t) = 0\} \cap \{V_1(x_t, y_t) > 0\} = \{x(\tau) = x(t), t - h \le t \le t\} \cap \{\alpha_1\|y(t)\|^2 + \Pi^*(x(t)) + \frac{1}{2}\|P\|h\|x(t) - x(\tau)\|^2 > 0\} \equiv \{\Pi^*(x(t)) > 0\}$

не может в соответствии с условием 3) теоремы содеражать решение предельной системы. Согласно теореме 1.6 имеем требуемое *доказательство.*

Замечание. Условиея 1) теорем 1.8 и 1.9 заведомо выполняются, если переменные $q_{m+1}, ...q_n$ *являются периодическими, например по* $mod 2\pi$: $q_k + 2\pi = q, k = m+1, n$

1.3 О стабилизации движений управляемой механической системы.

Рассмотрим механическую систему, у которой кинетическая энергия не зависит от последних $(n-m)$ *координат* $q_{m+1}, ...q_n (0 < m < n, n > 1)$, *и, таким образом, первые* m *координат* $q_1, q_2, ..., q_m$ *являются периодическими, остальные - циклическими [].*

Переобозначим координаты, положим

$z = (z_1, z_2, ...z_m)' = (q_1, q_2, ..., q_m)'$

$s' = (s_1, s_2, ..., s_{n-m}) = (q_{m+1}, ..., q_n)'$

Соответственно, кинетическая энергия системы может быть записана в виде $2T = \dot{z}' A_{11}(z)\dot{z} + \dot{z}' A_{12}(z)\dot{s} + \dot{s}' A_{21}(z)\dot{z} + \dot{s}' A_{22}(z)\dot{s}, A_2 1' = A_{12}$

где составляющие матрицу A *подматрицы* $A_{11}, A_{12}, A_{21}, A_{22}$ *удовлетворяют условиям*

$\alpha_0 \|z\|^2 \le z' A_{11} z \le \alpha_1 \|z\|^2$

$\alpha_0 \|s\|^2 \le s' A_{22} s \le \alpha_1 \|s\|^2$

$\alpha_0 \|s\|^2 \le s' B s \le \alpha_1 \|s\|^2$

$B = A_{12} A_{22} A_{21}, \alpha_0, \alpha_1 > 0 - const$

Будем полагать, что обобщенные силы и управление по циклическим координатам отсутствует

$$Q^{'} = (Q_z^{'}, Q_s^{'}), U = (U_z^{'}, U_s^{'}), Q_s = 0, U_s = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial s} = 0 \tag{1.31}$$

Возьмем циклические импульсы

$$V = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = A_{21}(z)\dot{z} + A_{22}(z)\dot{s} \tag{1.32}$$

Из последних $n-m$ уравнений (1.2.1) и предположений (1.3.1) получаем

$$\frac{dV}{dt} = 0 \tag{1.33}$$

т.е. циклические импульсы для движения системы (1.2.1) являются постоянными.

Следуя [], введем функцию Рауса. Для этого из (1.3.2) находим

$$\dot{s} = A_{22}^{-1}(z)(V - A_{21}(z)\dot{z}) \tag{1.34}$$

Тогда функция Рауса []

$$2R = 2T - 2\dot{s}^{'} = \dot{z}^{'} A_{11}\dot{z} + \dot{z}^{'} A_{12} A_{22}^{-1}(V - A_{21}\dot{z}) + (V - A_{21}\dot{z})^{'} A_{21}\dot{z} + (V - A_{2}1\dot{z})^{'} A_{22}^{-1}(V - A \tag{1.35}$$

При этом матрица $B(z)$ является опредленно-положительной.

Уравнения движения системы (1.2.1) могут быть записаны в виде равенств (1.3.3) и (1.3.4) и уравнений

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial R}{\partial \dot{z}}) - \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + Q_z + U_z \tag{1.36}$$

После подстановки выражения для функции R получаем следующие уравнения движения

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial R_z}{\partial \dot{z}}) - \frac{\partial R_z}{\partial z} = \frac{\partial R_0}{\partial z} - \frac{\partial \Pi}{\partial z} - G\dot{z} + U_z + Q_z \partial dV dt = 0, \dot{s} = A_{22}^{-1}(z)(V - A_{21}(z)\dot{z}) \tag{1.37}$$

где $G = G(z,v) = (\frac{\partial g}{\partial z}) - (\frac{\partial g}{\partial z})', g(z,V) = A_{12}A_{22}^{-1}V$ *есть кососимметрическая матрица,* $G^{'} = G$.

Допустим, что при некотором значении $z = z_0$ *и* $V = V_0$ *управление* U_z *подобрано так, что*

$$U_z^0(t) = -\frac{\partial R_0}{\partial z}(V_0, z_0) + \frac{\partial \Pi(t, z_0)}{\partial z} \qquad (1.38)$$

Тогда система (1.3.5) будет иметь програмное движения

$$\dot z = 0, z = z_0, V = V_0, \dot s = \dot s_0 = A_{22}^{-1}(z_0)V_0 \qquad (1.39)$$

Рассмотрим задачу о стабилизации этого движения управлением вида

$$U_z = U_z^0(t) - \frac{\partial \Pi_U(t,v,z)}{\partial z} - \int\limits_{t-h}^{t} P_z(t,\tau)(z(t) - z(\tau))d\tau \qquad (1.40)$$

где $\Pi_U = \Pi_U(t, V, z)$ *есть некоторые непрерывно-дифференцируемая (по* z *дважды) ограниченная вместе со своими производными* $\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t, V, z_0)0, P_z(t,z)$ *есть матрица размерности* $m \times m$ *выражения вида* $P_z = \|p_{jk}(t,\tau)\|, p_{jk}(t,\tau) = p_{jk}^0 e^{s_{jk}^0(\tau - t)}, p_{jk}^0, s_{jk}^0 - const$

удовлетворяющая условиям

$$\dot z P(t,\tau)z \geq 0, z^{'}P_t(t,\tau)z \leq -\beta_0\|z\|^2, \beta_0 > 0, P_t(t,\tau) = \frac{\partial P_z(t,\tau)}{\partial t} = -\|p_{jk}^0 s_{jk}^0 e^{s_{jk}^0(\tau-t)}\| \qquad (1.41)$$

Уравнения (1.3.5) с управлением (1.3.6), (1.3.8) могут быть записаны в виде

$$\frac{dz(t)}{dt} = r(t), \frac{dr(t)}{dt} = B^{-1}(z(t))(E(z(t), r(t))r(t) - G(z(t), v(t))r(t) + Q_z(t, z(t), r(t)) - \qquad (1.42)$$

$$\frac{dV(t)}{dt} = 0\frac{ds(t)}{dt} = A_2 2^{-1}(z(t)(v(t) - A)21(z(t))r(t))$$

где $E = (e_{kj})-$ *матрица, определяемая равенством* $e_{kj} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial b_{ik}}{\partial z_j} - \frac{\partial b_{kj}}{\partial z_i} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial z_k})r_k$ *функция* $s(t,v,z) = \Pi(t,z) - R_0(V,z) - \frac{\partial \Pi(t,z_0)}{\partial z}z + \frac{\partial R_0(V,z_0)}{\partial z}z + \Pi_U(t,V,z)$

В силу U_z *имеем* $\frac{\partial S(t,V_0,z_0)}{\partial z} = 0$

так что система (1.3.10) имеем решение $z(t) = z_0, r(t) = 0, V = V_0, \dot{S}_0 = A_{22}^{-1}(z_0)V_0$, *отвечающее программному движению (1.3.7)*

Полагаем, что функция $Q_z(t,z,r), S(t,V,z), \frac{\partial S}{\partial t}(t,V,z), \frac{\partial S(t,V,z)}{\partial z}$ *являются ограниченными, равномерно непрерывными на множествах вида* $R \times K, K \in R^n$ *- компакт, при этом*

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,V,z) \leq 0, S(t,V_0,z_0) = 0 \qquad (1.43)$$

Уравнение к (1.3.9) имеют аналогичный им вид с функциями $Q_z^*(t,z,r)$ *и* $S = S^*(V,z)$, *к* Q_z *и* S.

$$S^*(V,z) = \lim_{t\to+\infty} S(t,V,z)$$

Введем функционал

$V = \frac{1}{2}r^{'}(t)B(z(t))r(t) + S(t,V_0,z) + \frac{1}{2}\|V(t) - V_0\|^2 + \frac{1}{2}\int\limits_{t-h}^{t}(z(t) - z(\tau))^{'}P_z(t,\tau)(z(t) - z(\tau))d\tau$

Его производная в силу уравнений (1.3.10) в соответствии с соотношениями (1.3.9) и (1.3.12) будет иметь следующую оценку

$$\dot{V} = -z^{'}(t)G(z(t),V(t))r(t) + z^{'}(t)Q_z(t,z(t),r(t)) + \frac{\partial S(t,V_0,t)}{\partial t} + \frac{1}{2}\int\limits_{t-h}^{t}(z(t) - z(\tau))^{'}P_t(\qquad (1.44)$$

Соответственно иммем следующую теорему.

Теорема 1.10. *Предположим, что:*

1) функция $s = s(t, V_0, z)$ *являются определенно-положительными по* z*;*

2) функция $s^*(V_0, z)$ *имеет изолированный минимум в точке* $z = z_0, \|\frac{\partial S^*(V_0,z)}{\partial z}\| \neq 0 \forall z \in \{0 < \|z - z_0\| < \delta\}$

Тогда под действием управления (1.3.8) программное стационарное движение (1.3.7) устойчиво, асимптотически устойчиво относительно движений, отвечающих значению $V = V_0$*, а каждое иное возмущенное движение неограниченно приближается при* $t \to +\infty$ *к движению* $\dot{z} = 0, \dot{z} = z_1 = const, V = V_1 = const, \dot{s} = \dot{s}_1 = A_{22}^{-1}(z_1)V_1$

Доказательство: Из условия 1) теоремы и условий относительно функций, входящих в функционал V*, следует, что он является определенно положительным, допускающим бесконечно малый высший предел по переменным* $r, z, V - V_0$*.*

В силу (1.3.13) имеем устойчивость движения (1.3.7).

Множество $\{W(z_t) = 0\}$ *может содержать только те предельных систем для которых* $z(t) = z_1 = const$*. Но такими решениями могут быть решения для которых одновременно* $r(t) = 0 V(t) = V_1 = const, \frac{\partial S^*(V_1,z_1)}{\partial z} = 0$*. Тем самым, имеем искомое доказательство.*

1.4 О стабилизации положения равновесия перевернутого маятника.

Рассмотрим задачу о стабилизации математического маятника в верхнем неустойчивом положении за счет момента U*, приложенного на его оси, при этом имеется возможность изменить лишь отклонение* *маятника от вертикали без его производной и угловой скорости [].*

Обозначим угол отклонения φ. *Нормируя, если нужно, соотвествующим образом маситабы времени, координат, уравнения возмущенного движения можно записать в виде*

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Psi, \frac{d\Psi}{dt} = sin\varphi + U \tag{1.45}$$

Сигнал обратной связи измеряется в виде $y = sin\varphi$. *Эта задача решалась в работе [] нахождением закона регулирования* $\frac{dU}{dt} = aU(t) + \int_{t-h}^{t}(a(\tau g(\tau) + bU(\tau)))d\tau$.

Найден стабилизирующий закон регулирования

$$\frac{dU}{dt} = -4,6116y(t) - 3,1974u(t) - 4,6116\int\limits_{t-1}^{t}(7,358ch(t+s) + 4,329sh(t+\tau))\sin\varphi(t) + \tag{1.46}$$

Этот закон управления представляется достаточно сложным. Покажем, что рассматриваемая задача о стабилизации решается управлением вида

$$U = -a\sin\varphi(t) - \int\limits_{t-h}^{t} bLe^{(\tau-t)}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(\tau))d\tau\cos\varphi(t) \tag{1.47}$$

где a *и* b *есть некоторые искомые постоянные* $a > 1, b > 0$

Введем функционал $V = \frac{1}{2}\psi^2(t) + (a-1)(1-\cos\varphi(t)) + \frac{1}{2}\int_{t-h}^{t} be^{L(\tau-t)}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(\tau))^2 d\tau$

Несложно видеть, что он является определенно-положительным, допускающим бесконечно малый высший предел относительно $\varphi = \varphi(t)$ *и* $\psi = \psi(t)$

Для его производной находм оценку

$\dot{V} = \psi(t)(\sin\varphi(t) - a\sin\varphi(t) - b\int_{t-h}^{t} e^{L(\tau-t)}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(\tau))d\tau\cos\varphi(t)) + (a-1)\sin\varphi(t)\psi(t) - \frac{1}{2}be^{-Lh}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(t-h))^2 + \cos\varphi(t)\int_{t-h}^{t} be^{L(\tau-t)}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(\tau))d\tau - \frac{1}{2}bL\int_{t-h}^{t} e^{L(\tau-t)}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(\tau))^2 d\tau = -\frac{1}{2}be^{-Lh}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(t-h))^2 - \frac{1}{2}bL\int_{t-h}^{t} e^{L(\tau-t)}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(\tau))^2 d\tau \leq 0$

Множество $\{\dot{V} =\}$ *может содержать лишь движения* $\psi(t) = const$, *или* $\dot{\psi} \equiv 0, \varphi = \pi$

Соответственно, получаем, что управление (1.4.3) решает поставленную задачу о стабилизации.

Проведем численный анализ управлений (1.4.2) и (1.4.3) при $a = 1, L = 1, b = 0.8, h = 1$

1.5 Стабилизация программных движений двузвенного манипулятора без измерения скоростей.

Сначала рассмотрим задачу о стабилизации программного положения горизонтального манипулятора. В этом случае без измерения скоростей

$$q_1^0(t) = q_1^0 = const, q_0^2(t) = q_0^2 = const \tag{1.48}$$

В соответствии с представленным в параграфе 2.2 общим решением для голономной механической системы эта задача решается управлением вида

$$U_1^{(1)}(x_1) = -k_1 \sin\frac{x_1(t)}{2} - \int\limits_{t-h}^{t} p_1^0 e^{S_1^0(\tau-t)}(x_1(t) - x_1(\tau))$$

$U_1^{(2)}(x_1) = -k_2\sin\frac{x_2(t)}{2} - \int_{t-h}^{t} p_2^0 e^{S_2^0(\tau-t)}(x_2(t) - x_2(\tau))(1.49)$

$k_1, k_2, p_1^0, p_2^0 - const$

При этом, согласно теореме каждое возмущенное движение будет неограниченно приближаться при $t \to \infty$ *к положению равновесия, определяемое равенствами*

$$\sin\frac{x_1(t)}{2} = 0 \sin\frac{x_2(t)}{2} = 0$$

или $x_1(t) = \pi k, x_2(t) = 2\pi k, k \in Z$

Соответственно в переменных q_1 *и* q_2 *для каждого возмущенного движения имеем при* $t \to +\infty$

$$q_1(t) \to q_1^0 + 2\pi k, q_2(t) \to q_2^0 + 2\pi k \tag{1.50}$$

Таким образом, так как положение манипулятора в переменных q_1 *и* q_2 *определяются с точности до* 2π, *управлением (2.2.2) достигается глобальная стабилизация положения (2.1.1)*

Выражение для кинетической энергии не содержит координату q_1 *в явном виде, т.е. она является циклической. Вводим циклический импульс* $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2$

Составим функцию Рауса. Для этого находим $\dot{q}_1 = (p - a_1 2\dot{q}_2)/a_{11}$

$R = \frac{1}{2}(p - a_{12}\dot{q}_2)^2/a_{11} + a_{22}(p - a_{12}\dot{q}_2)\dot{q}_2/a_{11} + \frac{1}{2}a_{22}\dot{q}_2^2 - p(p - a_{12}\dot{q}_2)/a_{11} = \frac{1}{2}(a_2 2 - a_{12}^2/a_{11})\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}p^2/a_{11} + a_{12}p\dot{q}_2/a_{11}$

Отсюда имеем следующие уравнения движения в переменных $q_2, \dot{q}_2, p, p = p_0 = const$

$\frac{d}{dt}((a_{22} - a_{12}^2/a_{11})\dot{q}_2) - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial q_2}p_0^2/a_{11}^2 = M_1$

Эти уравнения допускают движения вида

$$p = p_0 = const, \dot{q}_2 = 0, q_2 = q_2^0 = const \tag{1.51}$$

если $U_1^0 = m_2 l l_2 \sin q_2^0 p_0^2/(m_2 l^2 + I_1 + I_2 + 2m_2 l l_2 \cos q_2^0)^2$

В соответствии с представленным в параграфе 2.3 общим решением в задаче о стабилизации установленного движения голономной механической системы с циклической координатой получаем, что задача о стабилизации движения (2.2.4) по q_2 *и* $\dot{q}_2$ *решается уравнением*

$U_2 = U_2^0 - k_2 \sin x_2(t) - \int_{t-h}^{t} p_2^0 e^{S_2^0(\tau - t)}(x_2(t) - x_2(\tau))d\tau$

$k_2 = \frac{m_2 l l_2 \cos q_2^0 p_0^2}{(ml^2 + I_1 + I_2 + 2m_2 l l_2 \cos q_2^0)^2}; p_2^0, p_2^0 - const > 0$

может быть достигнута также стабилизацией движения (2.2.4) по $p, \dot{q}_2$ *и* q_2.

Рассмотрим

задачу о стабилизации заданного программного положения двузвенного манипулятора. Из уравнений движения (2.2.3) находим, что положение (2.2.1) будет иметь место управление $U_1^0 = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \cos q_1^0, U_2^0 = m_2 l_2 g \cos(q_1^0 + q_2^0)$

В соответствии в параграфе 1.2 общим решением получаем, что задачи о стабилизации программного положения (2.2.1) без измерения скоростей решается управлением

$U_1 = U_1^0 - k_1(q_1(t) - q_1^0) - \int_{t-h}^{t} p_1^0 e^{S_1^0(\tau - t)}(q_1(t) - q_1(\tau))d\tau$

$U_2 = U_2^0 - k_2(q_2(t) - q_2^0) - \int_{t-h}^{t} p_2^0 e^{S_2^0(\tau - t)}(q_2(t) - q_2(\tau))d\tau$

где коэффициенты k_1 *и* k_2 *удовлетворяет условиям*

$\alpha_1 k_1 - (m_1 l_1 + m_2 l) g \sin q_1^0 - m_2 l_2 g \sin(q_1^0 + q_2^0) > 0$

$$\alpha_1(k_2 - m_2 l_2 g \sin(q_1^0 + q_2^0)) - (m_2 l_2 g \sin(q_1^0 + q_2^0))^2 > 0$$

2 УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ДВУЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель двухзвенного манипулятора. Манипулятор состоит из неподвижного основания и двух абсолютно жестких звеньев G_1, G_2. Элементы конструкции соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, и O_2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в горизонтальной или вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2.

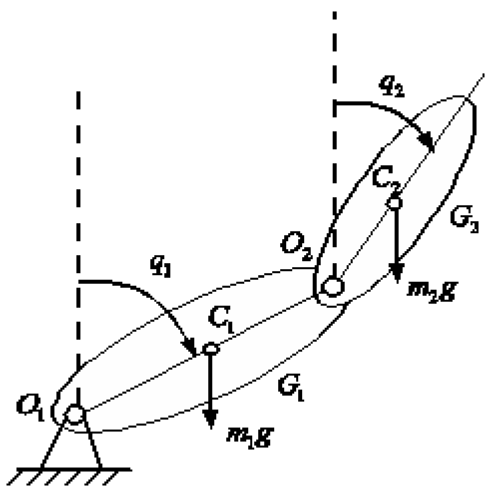

Рис. 2.1: Модель двузвенного манипулятора

Введем обозначения: $q_i (i = 1, 2)$ *— углы поворотов звеньев манипулятора, показанные на рисунке;* l_i *— длина отрезка* O_iC_i; l *— длина отрезка* O_1O_2; m_i *— масса* i*-го звена;* I_i *— момент инерции* i*-го звена относительно оси шарнира* O_i; g *— ускорение свободного падения.*

Выражение для кинетической энергии манипулятора имеет в таком случае следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}((I_1 + I_2 + m_2 l^2 + 2m_2 l l_2 \cos q_2)\dot{q}_1^2 + (I_2 + m_2 l l_2 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + I_2\dot{q}_2^2) \quad (2.1)$$

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = M_1 + U_1, \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = M_2 + U_2, \end{cases} \quad (2.2)$$

где M_i *— момент, создаваемый силой тяжести в* i*-м шарнире. В случае манипулятора, совершающего движения в вертикальной плоскости,* $M_1 = (m_1 l_1 + m_2 l) g \cos q_1, M_2 = m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2), U_i$ *— управление.*

Из выражения для кинетической энергии T *находим уравнения движения*

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_1\dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_2^2 = M_1 + U_1, a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2$$

$$(2.3)$$

Пусть $q = q(q_1, q_2)'$ *-- вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и* $X = (q^0(t), \dot{q}^0(t)) : [t_0, +\infty) \to R^4, \|q^0(t)\| \le g_0, \|\dot{q}^0(t)\| \le g_1, \|\ddot{q}^0(t)\| \le g_2$ *есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций* $q = q^0(t)$ *с ограниченными производными при* $t \in [t_0, +\infty)$*. Символом* $\|\cdot\|$ *обозначена евклидова норма вектора.*

Пусть $(q^0(t), \dot{q}^0(t)) \in X$ *— какое-либо программное движение, реализуемое программным управлением* $U = U^0(t)$*. Таким образом, для* *обеспечения такого движения имеет место следующее управление*

$U_1^0(t) = m_2 l_1^2 + I_1 I_2 + 2m_2 l l_2 \cos q_2 \ddot{q}_1^0(t)$

$U_2^0(t) = I_2 \ddot{q}_2^0(t) + m_2 l l_2 \cos(q_2^0(t) - q_1^0(t)) \dot{q}_1^0(t) + m_2 l l_2 \sin(q_2^0(t) - q_1^0(t))(\dot{q}_1^0(t))^2 - M_2^0(t)$,

где $M_1^0(t) = M_2^0(t) = 0$ *для случая манипулятора в горизонтальной плоскости.*

Введем возмущения $x_k = q_k - q_k^0(t), \dot{x}_k = \dot{q}_k - \dot{q}_k^0(t), k = 1,2$

Составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x} = \dot{x}' C^{(1)}(t,x)\dot{x} + Q^{(1)}(t,x) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) + U^{(1)}, \qquad (2.4)$$

$$A^{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} I_1 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2^0(t)) + x_2 \\ m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2^0(t)) + x_2 & I_2 \end{pmatrix}$$

$$C^{(1)}(t,x), Q^{(1)}(t,x) = F(t,x)p(x), Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = D(t,x)\dot{x},$$

$$C^{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} -m_2 l l_2 \sin(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & m_2 l l_2 \sin(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) \end{pmatrix}$$

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} f_{11}(t,x) & f_{12}(t,x) \\ f_{21}(t,x) & f_{22}(t,x) \end{pmatrix},$$

$$p(x) = \begin{pmatrix} \sin(x_1/2) \\ \sin(x_2/2) \end{pmatrix},$$

$$D(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & c^{(1)}_{22(1)}(t,x)\dot{q}^0_2(t) \\ c^{(1)}_{11(1)}(t,x)\dot{q}^0_1(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$f_{11}(t,x) = 2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_2/2)(\ddot{q}^0_2(t)\sin(-q^0_2(t) - \frac{x_2}{2}) -$

$- (\dot{q}^0_2(t))^2\cos(-q^0_2(t) - \frac{x_2}{2}) + 2g(m_1l_{g_2} + m_2l_2)\cos(x_1/2)$

$f_{12}(t,x) = -2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_1/2)(\ddot{q}^0_2(t)\sin(-q^0_2(t) - x_2/2) +$

$+ (\dot{q}^0_2(t))^2\cos(-q^0_2(t) - x_2/2))$

$f_{21}(t,x) = 2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_2/2)(\ddot{q}^0_1(t)\sin(-q^0_2(t) - x_2/2) +$

$+ (\dot{q}^0_2(t))^2\cos(-q^0_2(t) - x_2/2))$

$f_{22}(t,x) = -2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_1/2)(\ddot{q}^0_1(t)\sin(-q^0_2(t) - x_2/2) -$

$- (\dot{q}^0_2(t))^2\cos(-q^0_2(t) - x_2/2)) + 2gm_2l_{g_2}\cos(q^0_2(t) + x_2/2)$

$$c_11^0(t,x) = -m_2ll_2\sin(q^0_2(t) - q^0_1(t) + x_2 - x_1)$$

$$c_22^0(t,x) = m_2ll_2\sin(q^0_2(t) - q^0_1(t) + x_2 - x_1)$$

$$U^{(1)} = U - U^0(t)$$

Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $U^{(1)} = U^{(1)}(t,x,\dot{x})$, $U^{(1)}(t,0,0) \equiv 0$, *при котором бы невозмущенное движение* $\dot{x} = x = 0$ *системы (2.2) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иными словами, управление*

$$U = U^0(t) + U^{(1)}(t, q - q^0(t), \dot{q} - \dot{q}^0(t))$$

обеспечивало бы стабилизацию программного движения $(q^0(t), \dot{q}^0(t)) \in X$ *системы (2.1).*

2.2 Стабилизация программных движений двузвенного манипулятора без измерения скоростей.

Сначала рассмотрим задачу о стабилизации программного положения горизонтального манипулятора. В этом случае без измерения скоростей

$$q_1^0(t) = q_1^0 = const, q_0^2(t) = q_0^2 = const \qquad (2.5)$$

В соответствии с представленным в параграфе 2.2 общим решением для голономной механической системы эта задача решается управлением вида

$$U_1^{(1)}(x_1) = -k_1 \sin\frac{x_1(t)}{2} - \int\limits_{t-h}^{t} p_1^0 e^{S_1^0(\tau - t)}(x_1(t) - x_1(\tau))$$

$U_1^{(2)}(x_1) = -k_2 \sin\frac{x_2(t)}{2} - \int_{t-h}^{t} p_2^0 e^{S_2^0(\tau-t)}(x_2(t) - x_2(\tau))(2.6)$

$k_1, k_2, p_1^0, p_2^0 - const$

При этом, согласно теореме каждое возмущенное движение будет неограниченно приближаться при $t \to \infty$ *к положению равновесия, определяемое равенствами*

$$\sin\frac{x_1(t)}{2} = 0 \sin\frac{x_2(t)}{2} = 0$$

или $x_1(t) = \pi k, x_2(t) = 2\pi k, k \in Z$

Соответственно в переменных q_1 *и* q_2 *для каждого возмущенного* *движения имеем при* $t \to +\infty$

$$q_1(t) \to q_1^0 + 2\pi k, q_2(t) \to q_2^0 + 2\pi k \tag{2.7}$$

Таким образом, так как положение манипулятора в переменных q_1 *и* q_2 *определяются с точности до* 2π, *управлением (2.2.2) достигается глобальная стабилизация положения (2.1.1)*

Выражение для кинетической энергии не содержит координату q_1 *в явном виде, т.е. она является циклической. Вводим циклический импульс* $\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2$

Составим функцию Рауса. Для этого находим $\dot{q}_1 = (p - a_1 2\dot{q}_2)/a_{11}$

$R = \frac{1}{2}(p - a_{12}\dot{q}_2)^2/a_{11} + a_{22}(p - a_{12}\dot{q}_2)\dot{q}_2/a_{11} + \frac{1}{2}a_{22}\dot{q}_2^2 - p(p - a_{12}\dot{q}_2)/a_{11} = \frac{1}{2}(a_2 2 - a_{12}^2/a_{11})\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}p^2/a_{11} + a_{12}p\dot{q}_2/a_{11}$

Отсюда имеем следующие уравнения движения в переменных $q_2, \dot{q}_2, p, p = p_0 = const$

$\frac{d}{dt}((a_{22} - a_{12}^2/a_{11})\dot{q}_2) - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial q_2}p_0^2/a_{11}^2 = M_1$

Эти уравнения допускают движения вида

$$p = p_0 = const, \dot{q}_2 = 0, q_2 = q_2^0 = const \tag{2.8}$$

если $U_1^0 = m_2 l l_2 \sin q_2^0 p_0^2/(m_2 l^2 + I_1 + I_2 + 2m_2 l l_2 \cos q_2^0)^2$

В соответствии с представленным в параграфе 2.3 общим решением в задаче о стабилизации установленного движения голономной механической системы с циклической координатой получаем, что задача о стабилизации движения (2.2.4) по q_2 *и* $\dot{q}_2$ *решается уравнением*

$U_2 = U_2^0 - k_2 \sin x_2(t) - \int_{t-h}^{t} p_2^0 e^{S_2^0(\tau - t)}(x_2(t) - x_2(\tau))d\tau$

$k_2 = \frac{m_2 l l_2 \cos q_2^0 p_0^2}{(ml^2+I_1+I_2+2m_2 l l_2 \cos q_2^0)^2}; p_2^0, p_2^0 - const > 0$

может быть достигнута также стабилизацией движения (2.2.4) по $p, \dot{q}_2$ *и* q_2.

Рассмотрим

задачу о стабилизации заданного программного положения двузвенного манипулятора. Из уравнений движения (2.2.3) находим, что положение (2.2.1) будет иметь место управление $U_1^0 = (m_1 l_1 + m_2 l_2) g \cos q_1^0, U_2^0 = m_2 l_2 g \cos(q_1^0 + q_2^0)$

В соответствии в параграфе 1.2 общим решением получаем, что задачи о стабилизации программного положения (2.2.1) без измерения скоростей решается управлением

$U_1 = U_1^0 - k_1(q_1(t) - q_1^0) - \int_{t-h}^t p_1^0 e^{S_1^0(\tau - t)}(q_1(t) - q_1(\tau))d\tau$

$U_2 = U_2^0 - k_2(q_2(t) - q_2^0) - \int_{t-h}^t p_2^0 e^{S_2^0(\tau - t)}(q_2(t) - q_2(\tau))d\tau$

где коэффициенты k_1 *и* k_2 *удовлетворяет условиям*

$\alpha_1 k_1 - (m_1 l_1 + m_2 l) g \sin q_1^0 - m_2 l_2 g \sin(q_1^0 + q_2^0) > 0$

$\alpha_1 (k_2 - m_2 l_2 g \sin(q_1^0 + q_2^0)) - (m_2 l_2 g \sin(q_1^0 + q_2^0))^2 > 0$

2.3 Об управлении двузвенным манипулятором с приводом

Рассмотрим решение задачи стабилизации в области $G = (x, \dot{x}) \in R^4 : \|x\| < \epsilon, \|\dot{x}\| < \epsilon, \epsilon = const > 0$ *с помощью непрерывного управления вида*

$$U^{(1)}(x, \dot{x}) = B(\dot{x} + p(x))$$

где $B \in R^{2\times 2}$ *есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению. Возьмем для системы (2.2) вектор-функцию Ляпунова* $V = (V^1, V^2)'$ *с коэффициентами вида* $V^1 = \|p(x)\|, V^2 = \sqrt{(\dot{x} + p(x))' A^{(1)}(t,x)(\dot{x} + p(x))}$.

Вычисляя производную по времени вектор-функции Ляпунова V *в силу системы (2.1), получим следующие оценки:*

$$\dot{V}^1 \leq -mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda_1}, \dot{V}^2 lem_2 V^1 - \mu_2 V^2 + m_3 (V^1)^2 + m_4 (V^2)^2 + m_5 V^1 V^2,$$

где

положительные постоянные $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, m_i (i = 1, 2, ..., 5)$ *определяются из следующих условий:*

$$\lambda_1^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 - \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 + \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2}$$

$\mu_1 = \frac{1}{2}\cos(\frac{\epsilon}{2}), m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \max \frac{\lambda_2^2 + 2\sqrt{\lambda_{max}[(D-F)'(D-F)]}}{2\lambda_1}, m_3 = \frac{m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, m_4 = \frac{2m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, m_5 = \frac{3m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, \mu_2 = \frac{-\lambda_2^2 - 4g_1 m_2 l_q l_{g_2} - \lambda_{max}(B+B')}{2\lambda_2}$

Здесь $\lambda_m ax$ *есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (2.1) можно построить следующую систему сравнения:*

$$\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda_1} u^2, \dot{u}^2 = m_2 u^1 - \mu_2 u^2 + m_3 (u^1)^2 + m_4 (u^2)^2 + m_5 u^1 u^2 \quad (2.9)$$

Согласно теореме сравнения об асимптотической устойчивости [5] из свойства

асимптотической устойчивости нулевого решения системы сравнения (2.4) следует свойство равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.2). Получим условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.4) с областью притяжения $(u^1, u^2) \in R^2 : 0 \leq u^1 \leq \delta_1 = const > 0, 0 \leq u^2 \leq \delta_2 = const > 0$. *Пусть найдется такое число* $\gamma > 0$, *что выполняются соотношения:*

$$\gamma = \frac{\delta_2 m_1}{\delta_1 \lambda_1 \mu_1}, \mu_2 > \frac{m_1}{\gamma \lambda_1 \mu_1}(m_2 + \delta_1 m_3) + m_4 \delta_2 + m_5 \delta_1 \qquad (2.10)$$

Тогда можно показать, что функция $\widetilde{u}(t) = \max(u^1(t), \delta_1 u^2(t)/\delta_2)$ *будет монотонно стремиться к нулю при* $t \to \infty$, *и, значит, нулевое решение системы сравнения (2.4) будет асимптотически устойчиво. При невозможности практической реализации программного управления стабилизацию программного движения можно осуществить при помощи разрывного управления вида*

$$U^{(1)}(x, \dot{x}) = B\ sign(\dot{x} + p(x)) \qquad (2.11)$$

Численное

моделирование движения манипулятора при действии управлений (2.3) и (2.6) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории:

$m_1 = 0,5кг, m_2 = 0,3кг, l_1 = 0,5м, l_2 = 0,5м\ , l_{g_1} = 0,25\ м, l_{g_2} = 0,3, I_1 = 0,01\ кг\cdot$

На рисунках 2 и 3 представлены результаты моделирования при управлениях (2.3) и (2.6) соответственно.

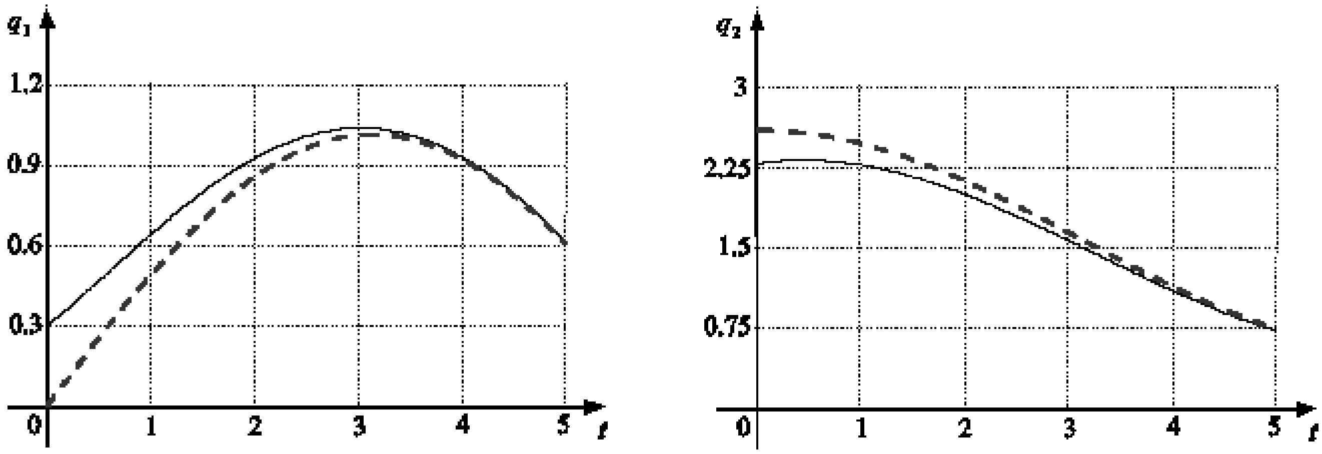

Рис. 2.2: Результаты моделирования при управлении (2.3)

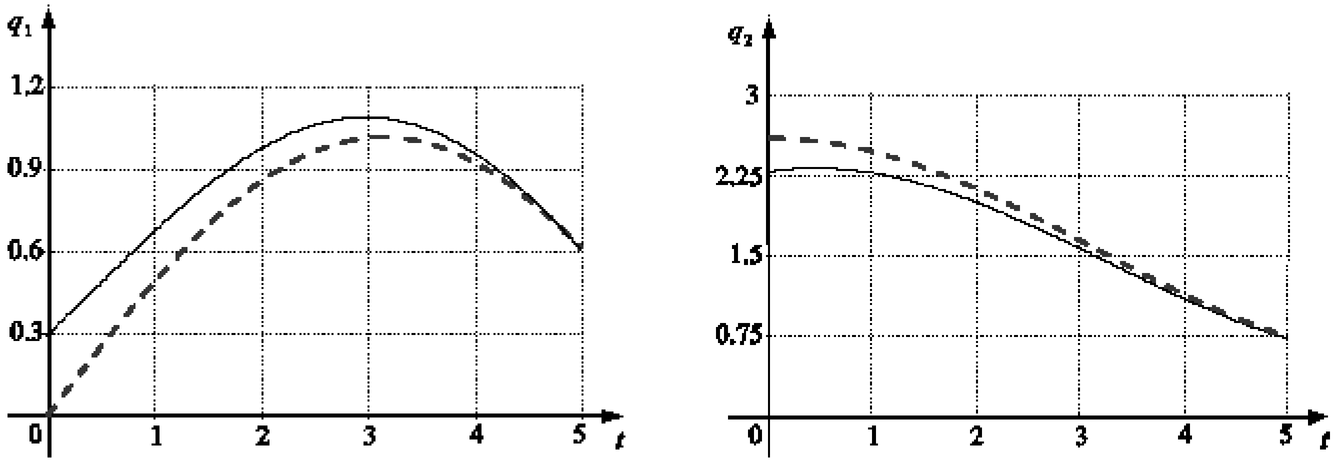

Рис. 2.3: Результаты моделирования при управлении (2.6)

2.4 Об управлении двузвенным манипулятором с приводом

Рассмотрим манипулятор, моделируемый в виде механической системы, состоящей из неподвижного основания G_0 *и двух абсолютно жестких звеньев* G_1, G_2. *Элементы конструкции соединены между собой двумя цилиндрическими шарнирами* O_1, O_2 *таким образом, что оба звена могут совершать движения только в горизонтальной плоскости под действием* *приводов, приложенных в этих шарнирах.*

Уравнение кинетической энергии будет иметь вид

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2\dot{q}_2^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2 + m_2 l l_2 \cos q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 \qquad (2.12)$$

Таким образом, уравнения Лагранжа, описывающие движения данной системы, имеют вид:

$$a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 - 2m_2 l_1 l_2 \sin q_2\dot{q}_1\dot{q}_2 - m_2 l_1 l_2 \sin q_2\dot{q}_2^2 = M_1 + U_1,$$

$a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_2 \sin q_2\dot{q}_1^2 = M_2 + U_2,$

$a_{11} = m_2 l_1^2 + I_1 + I_2 + 2m_2 l_1 l_{g_2} \cos q_2,$

$a_{12} = I_2 + m_2 l_1 l_{g_2} \cos q_2,$

$a_{22} = I_2 (2.13)$

Будем считать, что приводы управляются некоторыми воздействиями L_i *в соответствии с уравнениями*

$$\frac{dM_i}{dt} = L_i \qquad (2.14)$$

Рассматривается задача построения структуры обратной связи в виде зависимости

$L_i = L_i(t, q, \dot{q}, M)$ *таким образом, чтобы каждое программное движение системы* $(q_1(t), q_2(t))$ *являлось бы асимптотически устойчивым.*

Продемонстрируем решение этой задачи для случая положения равновесия системы

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0, q_1 = q_2 = 0, M_1 = M_2 = 0 \qquad (2.15)$$

Покажем, что такая задача решается управлением приводами со *следующим видом обратной связи*

$$L_1 = -M_1 - k_1(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4}), L_2 = -M_2 - k_2(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\frac{q_2}{4}) \qquad (2.16)$$

где $k_1, k_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ *есть некоторые постоянные, определяемые из условия стабилизации положения равновесия (3).*

Для нахождения этих условий применим метод векторых функций Ляпунова [], в соответствии с методикой их построения, представленной в [].

Векторную функцию Ляпунова возьмем в виде

$V_1 = \sqrt{c_1 \sin^2 \frac{q_1}{4} + c_2 \sin^2 \frac{q_2}{4}}, c_1, c_2 > 0$

$V_2 = \sqrt{a_{11}(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4})^2 + 2a_{12}(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4})(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\frac{q_2}{4}) + a_{22}(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\frac{q_2}{4})^2}$

$V_3 = \sqrt{p_{11}(M_1 + k_1(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4})^2) + 2p_{12}(M_1 + k_1(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4}))(M_2 + k_2(\dot{q}_2 + }$

$a_{11} > 0, a_{11}a_{22} > 0, p_{11} > 0, p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$

Для производной функции V_1 *в силу (1), (2), (4) при* $\|q_1\| \leq \Pi, \|q_2\| \leq \Pi$ *находим оценку*

$\dot{V}_1 = \frac{1}{4V_1}(c_1 \sin\frac{q_1}{4} \cos\frac{q_1}{4} - \dot{q}_1 + c_2 \sin\frac{q_2}{4} \cos\frac{q_1}{4}\dot{q}_2) = \frac{1}{4V_1}(c_1 \sin\frac{q_1}{4} \cos\frac{q_1}{4}(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4} - \beta_2 \sin\frac{q_1}{4}) + c_2 \sin\frac{q_2}{4} \cos\frac{q_2}{4}(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\frac{q_2}{4} - \beta_2 \sin\frac{q_2}{4})) \leq \frac{1}{4V_1}(\sqrt{c_1 \sin^2\frac{q_1}{4} + c_2 \sin^2\frac{q_2}{4}}\sqrt{c_1(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4})^2 + c_2(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\frac{q_2}{4})^2} - \frac{\sqrt{2}}{2}(c_1\beta_1 \sin^2\frac{q_1}{4} c_2\beta_2 \sin^2\frac{q_2}{4})) \leq -\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2, \alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{8} min(\sqrt{c_1}\beta_1, \sqrt{c_2}, \beta_2), \alpha_2 = \frac{1}{4}\sqrt{\lambda_{AC}^{max}}$

где λ_{AC}^{max} *- наибольшее характеристическое значение матрицы* $c = diag(c_1, c_2)$ *на пучке матриц* $A = A(q)$.

Для производной от функции V_2 *в силу (1), (2), (4) имеем более* *сложную оценку.*

$\dot{V}_2 = \frac{1}{V_2}((\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4})((M_1 + k_1(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4})) - k_1(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4}) + \frac{1}{4}a_{11}\beta_2 \cos\frac{q_1}{4}(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4}) - \frac{1}{4}a_{11}\beta_1^2 \cos\frac{q_1}{4}\sin\frac{q_1}{4}) + 2m_2l_1l_2 \sin q_2(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\frac{q_2}{4} - \beta_2 \sin\frac{q_2}{4})^2) + (\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\frac{q_2}{4})(M_2 + k_2(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\frac{q_2}{4}) - k_2(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\frac{q_1}{4}) + \frac{1}{4}a_{12}\beta_2 \cos\frac{q_2}{4}(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\frac{q_2}{4}) - \frac{1}{4}a_{22}\beta_2^2 \cos\frac{q_2}{4}\sin\frac{q_2}{4} - m_2l_1l_2 \sin q_2(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4} - \beta_1 \sin\frac{q_1}{4})^2) \leq \gamma_1 V_1 - \gamma_2 V_2 + \gamma_3 V_3 + \mu_{21}V_1^2 + \mu_{22}V_2^2 + \mu_{23}V_3^2, \gamma_1 = \frac{p_{max}}{\lambda_{min}}, \gamma_2 = \frac{1}{\lambda_{min}}, \gamma_3 = \frac{1}{4}a_{max}\beta_{max}$

где $\mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}$ *зависят от параметров системы и управления.*

Для производной функции V_3 *более сложными вычислениями получим оценку*

$\dot{V}_3 \leq V_1 + V_2 - V_3 + \mu_{31}V_1^2 + \mu_{32}V_2^2 + \mu_{33}V_3^2$

$\nu_1 = \frac{2}{\sqrt{\lambda_{min}}}(a_{11} + \|a_{12}\|)\beta_1, \nu_2 = \frac{2}{\sqrt{\lambda_{min}}}(\|a_{12}\| + a_{22})\beta_1$

$\nu_3 = k - 2((a_{11} + \|a_{12}\|)\beta_1 + (\|a_{12}\| + a_{22})\beta_2), k = \min(k_1, k_2),$

где $\mu_{3i} > 0$ *- некоторые коэффициенты, выражаемые через параметры* k_i, β_i.

Стабилизация движения (3) согласно теореме об асимптотической устойчивости из [] в самой общей постановке может определяться системой

$\dot{y}_1 = -\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$

$\dot{y}_2 = \gamma_1 y_1 - \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3 + \gamma_{31} y_1^2 + \mu_{22} y_2^2 + \mu_{33} y_3^2$

$\dot{y}_3 = \nu_1 y_1 + \nu_2 y_2 - \nu_3 y_3 + \mu_{31} y_1^2 + \mu_{32} y_2^2 + \mu_{33} y_3^2$

При малых возмущениях стабилизация находится из асимптотической устойчивости линейной *системы*

$$\dot{y}_1 = -\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \dot{y}_2 = \gamma_1 y_1 - \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3, \dot{y}_3 = \nu_1 y_1 + \nu_2 y_2 - \nu_3 y_3$$

Ниже представлены результаты численного моделирования процесса стабилизации положения при следующих численных значениях $\mu_1 = 1, k_1 = 5, \beta_1 = 6, \mu_2 = 1, k_2 = 4, \beta_2 = 7, q_{10} = 0,5, q_2 = 0,8, \dot{q}_{10} = 0,6, \dot{q}_{20} = 0,8, M_{10} = 0,9, M_{20} = 0,7, \mu_{20} = 0,7, l_1 = 1, l_{g_2} = 0,5, I_1 = I_2 = 3,333, m_2 = 10$

3 УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ТРЕХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА (БЕЗ ПРИВОДА И С ПРИВОДОМ)

3.1 Стабилизация программных движений голономной механической системы

Рассмотрим математическую модель трехзвенного манипулятора, состоящую из трех абсолютно жестких звеньев G_1, G_2, G_3, представляющих собой однородные стержни. Манипулятор установлен на неподвижном основании, на которое опирается звено G_1. Звено G_1 таким образом, может совершать только вращения вокруг вертикальной оси. Звенья соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, и O_2 таким образом, что звенья G_2 и G_3 могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2. На конце звена G_3 находится груз, перемещаемый манипулятором.

Введем обозначения: $q_i (i = 1,2,3)$ — углы поворотов звеньев манипулятора; $Q_i (i = 1,2,3)$ — управляющие моменты относительно осей соответствующих звеньев; l_i — длина i-го звена; m_i — масса i-го звена; m_0 — масса перемещаемого груза; $m_{30} = m_0 + m_3$; J_{01} — момент инерции первого звена относительно оси вращения; r_2 и r_3 — соответственно расстояния от центров тяжести второго и третьего *звеньев с перемещаемым грузом относительно осей соответствующих звеньев;* g *— ускорение свободного падения. Уравнения движения манипулятора имеют вид:*

$$\begin{cases}
(J_{01}+m_2r_2^2\sin^2 q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)^2)\ddot{q}_1+\\
+2(m_2r_2^2\sin q_2\cos q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)l_2\cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2+\\
+2m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)r_3\cos q_3\dot{q}_1\dot{q}_3=Q_1,\\
(m_2r_2^2+m_3l_2^2)\ddot{q}_2+\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\cos(q_2-q_3)\ddot{q}_3+\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin(q_2-q_3)\dot{q}_3^2-\\
-(m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)l_2+m_2r_2^2\sin q_2)\cos q_2\dot{q}_1^2+(m_2r_2+m_{30}l_2)g\sin q_2=Q_2,\\
\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\cos(q_2-q_3)\ddot{q}_2+m_{30}r_3^2\ddot{q}_3-\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin(q_2-q_3)\dot{q}_2^2-\\
-m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)r_3\cos q_3\dot{q}_1^2+m_{30}gr_3\sin q_3=Q_3.
\end{cases} \tag{3.1}$$

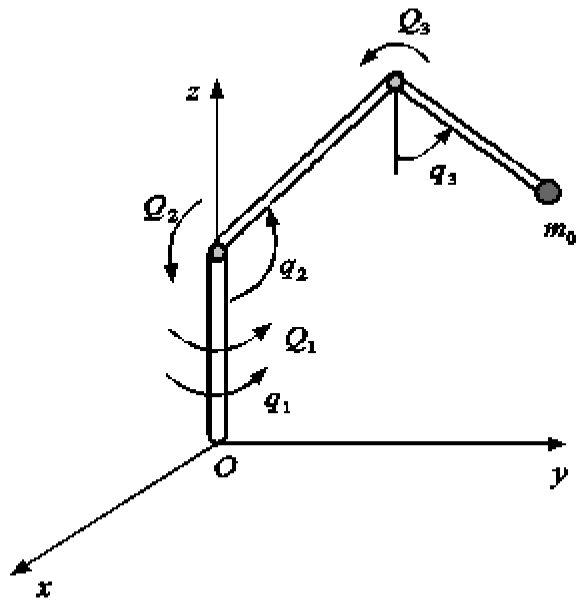

Рис. 3.1: Модель трехзвенного манипулятора

Пусть $q=(q_1,q_2,q_3)$ *— вектор обобщенных координат представленной выше системы. Таким образом, уравнения движения можно представить* *в следующей векторно-матричной форме:* $A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + K\dot{q} = Q$ *где*

$$A(q) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Элеменыт матрицы инерции $A(q)$:

$$a_{11} = J_{01} + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2$$

$$a_{22} = m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2$$

$$a_{23} = \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)$$

$$a_{32} = a_{23}$$

$$a_{33} = m_{30} r_3^2$$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы $C(q,\dot{q})$:

$$c_{11} = 2(m_2 r_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 \cos q_2)\dot{q}_2$$

$$c_{13} = 2m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_3$$

$$c_{21} = -(m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2) \cos q_2 \dot{q}_1$$

$$c_{31} = -m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1$$

$$c_{32} = -\frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3) \dot{q}_2$$

$A(q)$ — положительно определенная матрица инерции системы.

3.2 Построение управления

Пусть $q = (q_1, q_2, q_3)'$ — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и $X = q^0(t) : [t_0, +\infty) \to R^3, \|q^0(t)\| \le q_0, \|\dot{q}^0\| \le g_1, \|q^0(t)\| \le q_0, \|\ddot{q}^0\| \le g_2$ есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q = q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$. Символом $\| \cdot \|$ обозначена евклидова норма вектора. Уравнения движения (3.1) можно представить в следующей векторно-матричной форме:

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K\dot{q} = Q, \tag{3.2}$$

где $A(q)$ — положительно определенная матрица инерции системы, $C(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i C_{(i)}(q)$, , j, k-ый элемент $c_{(i)jk}(q)$ матрицы $C_{(i)}(q)$ определяется в виде $c_{(i)jk}(q) = \frac{1}{2}(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_j})$; K — матрица коэффициентов моментов сил вязкого трения, действующих в системе. Система (3.2) имеет следующее свойство: матрица $\dot{A}(q(t)) - 2C(q(t), \dot{q}(t))$ является кососимметричной. Пусть $q^0(t) \in X$ — какое-либо программное движение системы (3.2), реализуемое программным управлением $Q = Q^{(0)}(t)$, т.е. имеет место тождество $A(q^0(t))\ddot{q}^0(t) + C(q^0(t), \dot{q}^0(t))\dot{q}^0(t) +$

$K\dot{q}^0(t) \equiv Q^{(0)}(t)$. *Введем возмущения* $x = q - q^0(t)$ *и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:*

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x} + C^{(1)}(t,x,\dot{x})\dot{x} + K\dot{x} = Q^{(1)}(t,x,\dot{x}) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x}), \qquad (3.3)$$

где $A^{(1)}(t,x) = A(x+q^0(t))$, $C^{(1)}(t,x,\dot{x}) = C(x+q^0(t),\, \dot{x}+\dot{q}^0(t))$, $Q^{(1)}(t,x,\dot{x}) = Q - Q^{(0)}(t)$, $Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = (A^{(1)}(t,0) - A^{(1)}(t,x))\ddot{q}^0(t) + (C^{(1)}(t,0,0) - C^{(1)}(t,x,\dot{x}))\dot{q}^0(t)$. *Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия* $Q^{(1)}(t,x,\dot{x})$, *при котором невозмущенное движение* $\dot{x} = x = 0$ *системы (3.3) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иначе, управление* $Q = Q^{(1)}(t, q - q^{(0)}(t), \dot{q} - \dot{q}^{(0)}) + Q^{(0)}(t)$ *обеспечивало бы стабилизацию программного движения системы (3.2).*

3.3 Синтез управления в задаче стабилизации программного движения манипулятора

Рассмотрим решение задачи стабилизации в области $G = (x,\dot{x}) \in R^6 : \|x\| < \epsilon, \|\dot{x}\| < \epsilon, \epsilon = const > 0$ *с помощью непрерывного управления вида*

$$Q^{(1)}(x,\dot{)} = B(\dot{x} + p(x)),$$

где $B \in R^{3\times3}$ *есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению;* $p(x)$ *— непрерывно дифференцируемая вектор-функция, такая, что* $\|p(x)\| \geq p_0(x) > 0, p_0(0) = 0$. *Возьмем для системы (3.3) вектор-функцию Ляпунова* $V = (V^1, V^2)'$ *с коэффициентами вида*

$V^1 = \|p(x)\|, V^2 = \sqrt{(\dot{x}+p(x))' A^{(1)}(t,x)(\dot{x}+p(x))}.$

Вычисляя производные по времени от квадратов компонент вектор-функции Ляпунова в силу системы (3.3), получим

$$\frac{d}{dt}(V^1(x))^2 = 2V^1\dot{V}^1 = 2p^{'}\dot{p} = 2p^{'}\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x} = -2p^{'}\frac{\partial p}{\partial x}p + 2p^{'}\frac{\partial p}{\partial x}(\dot{x}+p),$$

$$\frac{d}{dt}(V^2(x))^2 = 2V^2\dot{V}^2 = 2(\ddot{x}+\dot{p})^{'}A^{(1)}(\dot{x}+p)+(\dot{x}+p)^{'}\dot{A}^{(1)}(\dot{x}+p) = 2(-C^{(1)}(t,x,\dot{x})\dot{x}-R\dot{x}$$

Отсюда получим следующие оценки: $\dot{V}^1 \le -\mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)}V^2, \dot{V}^2 \le \frac{m_2}{\lambda(t,x)}V^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)}$, *где положительные постоянные* μ_2, μ_2, m_1, m_2 *и функция* $\lambda(t,x)$ *определяются из следующих условий:*

$$p^{'}\frac{\partial p}{\partial x}p \ge \mu_1\|p\|^2, \|\frac{\partial p}{\partial x}\| \le m_1, \lambda(t,x)\|\dot{x}+p\| = V^2, \tag{3.4}$$

$$\|Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) \le (m_2 - \|C^{(1)}(t,x,\dot{x}) + K - A^{(1)}(t,x)\frac{\partial p}{\partial x}\|)\|p\| \tag{3.5}$$

$$\lambda_{max}(B + B^{'} - K - K^{'} + A^{(1)}(t,x)\frac{\partial p}{\partial x} + (\frac{\partial p}{\partial x})^{'}A^{(1)}(t,x)) \le -2\mu_2 \tag{3.6}$$

Здесь $\lambda_m ax()$ *есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (3.3) можно построить следующую систему сравнения:*

$$\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)}u^2, \dot{u}^2 = \frac{m_2}{\lambda(t,x)}u^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)}u^2. \tag{3.7}$$

Согласно теореме сравнения об экспоненциальной устойчивости [5] из свойства экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы сравнения (3.5) следует аналогичное свойство нулевого решения системы (3.3). Можно показать, что нулевое решение системы сравнения (3.5) *будет экспоненциально устойчиво при следующем условии* $4\mu_1\mu_2 > (m_1/k + m_2k)^2, k = const > 0$. *Численное моделирование движения манипулятора при действии управления (3.4) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории*

$m_2 = 15$ *кг*, $m_3 = 2,5$ *кг*, $m_0 = 2$ *кг*, $l_2 = 1$ *м*, $r_2 = 0,5$ *м*, $r_3 = 0,5$ *м*, $J_{01} = 0,1$ *кг·*

На рисунках 2–4 представлены результаты моделирования. Пунктирной линией обозначены составляющие программного движения, а сплошной – реального движения системы.

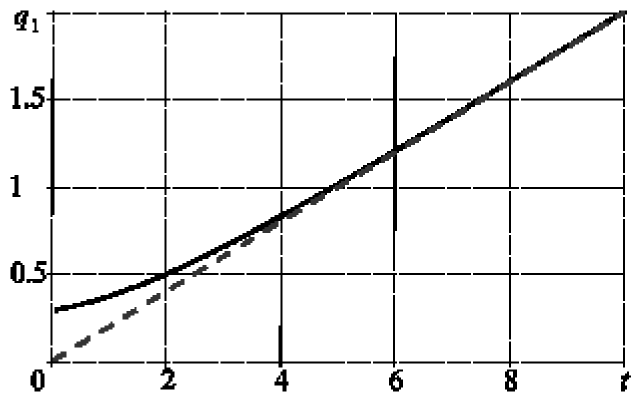

Рис. 3.2: Зависимость угла поворота первого звена от времени при управлении (3.4)

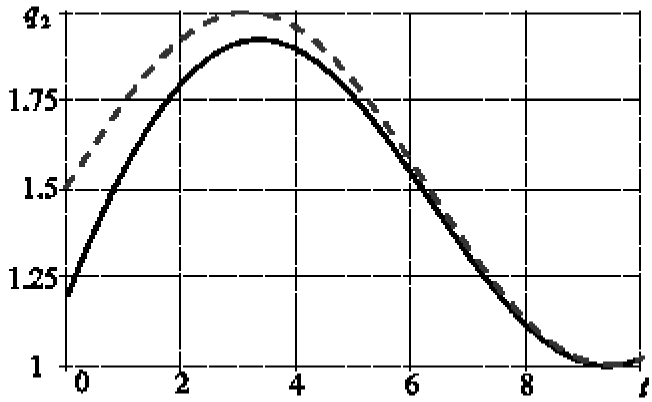

Рис. 3.3: Зависимость угла поворота второго звена от времени при управлении (3.4)

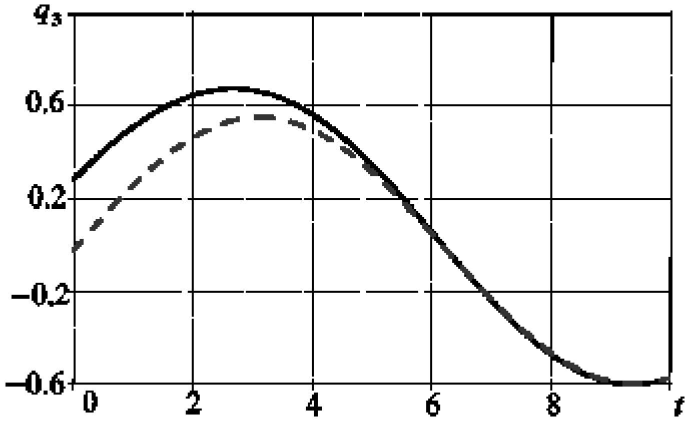

Рис. 3.4: Зависимость угла поворота третьего звена от времени при управлении (3.4)

3.4 Моделирование управляемого движения двузвенного манипулятора на подвижном основании

Здесь будет второй параграф третьей главы.

3.5 Моделирование управления в задаче о стабилизации движения колесного робота с омни-колесами

Здесь будет третий параграф третьей главы.