ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

**Кудашова Екатерина Алексеевна**

# Математическое моделирование управляемых систем с дискретным управлением

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

## ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Андреев А.С.

Ульяновск 2015

# СОДЕРЖАНИЕ

# ВВЕДЕНИЕ

## Актуальность работы

Разработка управляемых энергетических, промышленных и других процессов и комплексов, бурное развитие робототехники, разработка и эксплуатация новых моделей роботов и промышленных манипуляторов стимулируют активные исследования по математической и прикладной теории управления, моделированию и конструированию управляемых систем.

Моделирование управляемых систем на протяжении длительного времени в значительной степени изучалось на основе непрерывных моделей. Большее преимущество дискретных способов передачи и преобразования сигналов в системах автоматического управления по сравнению с непрерывными, создание современных цифровых управляющих комплексов, процессоров и микропроцессоров требуют развития соответствующего математического и вычислительного аппарата их функционирования.

В число таких задач входят задачи моделирования непрерывных управляемых систем с дискретным управлением, развитие методов исследования устойчивости и стабилизации непрерывных и дискретных управляемых систем, развитие математических методов анализа и конструирования управляемых механических систем.

## Объект исследования

Объектом исследования диссертационной работы являются нелинейные управляемые системы с дискретным управлением.

Линейность и стационарность управляемой системы позволяют применять для ее анализа методы линейных уравнений, что являлось и является предметом многочисленных исследований [43, 44, 58, 62, 89, 94, 139, 146, 170, 173, 179, 181]. Однако более обширный класс систем автоматического управления составляют нелинейные системы, при этом состоящие из непрерывной и дискретной частей. Нестационарность процесса управления вводит дополнительные сложности их анализа. Наиболее эффективным методом исследования устойчивого функционирования таких систем представляется метод Ляпунова [2, 7, 27–29, 33–35, 43, 44, 46, 52–62, 74–78, 89–91, 94, 147, 166, 167, 171–176, 185].

Для анализа непрерывно-дискретной структуры системы автоматического управления обоснованным образом используются разностные уравнения. В работе рассматривается задача развития прямого метода Ляпунова для исследования устойчивости и стабилизации систем, моделируемых указанными уравнениями.

Сведения дифференциальных уравнений движения управляемых механических систем с дискретным управлением к разностным уравнениям широко применяются для их анализа. При этом важным является обоснование адекватности такого сведения. Нелинейность уравнений и нестационарность программных движений значительно усложняют исследования. Для голономных механических систем задача моделирования управляемого движения с дискретным управлением является малоисследованной.

**Предмет исследования**

Методы исследования устойчивости и стабилизации нелинейных нестационарных дискретных систем, математические модели управляемых механических систем с дискретным управлением.

**Цель работы**

Обоснование новой методики исследования устойчивости и стабилизации нелинейных нестационарных дискретных управляемых систем. Разработка новых моделей дискретного управления программными движениями управляемых механических систем, в том числе, робототехнических.

Для достижения этой цели в диссертационной работе поставлены и решены следующие задачи:

1. Развитие методики применения функций Ляпунова в исследовании устойчивости и стабилизации систем, моделируемых разностными уравнениями

2. Теоретическое обоснование модели дискретного управления для механической системы с одной степенью свободы и систем, сводящихся к ней

3. Теоретическое обоснование модели дискретного управления для механической системы со многими степенями свободы

4. Разработка модели дискретного управления программных движений двузвенного манипулятора на подвижном основании

5. Разработка модели дискретного управления движением колесного

робота с омни-колесами

### Методы исследования

В диссертационной работе применялись методы математического моделирования конечномерных управляемых систем, теории управления, нелинейного анализа, теоретической механики, численных методов решения дифференциальных уравнений, структурного и объективно-ориентированного программирования.

### Научная новизна

В диссертации разработана новая методика исследования устойчивости и стабилизации управляемых систем, моделируемых нелинейными дискретными уравнениями, новая методика построения структуры дискретного управления движениями механических систем.

### Основные положения, выносимые на защиту

1. Новые формы достаточных условий устойчивости нелинейных дискретных систем на основе теоремы сравнения

2. Теоремы о стабилизации нелинейных процессов с дискретным управлением

3. Алгоритмы построения ступенчатого импульсного управления в задачах о стабилизации программных движений механических систем, моделируемых уравнениями Лагранжа

4. Математическая модель дискретного управления двузвенным манипулятором на подвижном основании

5. Компьютерная модель управления движения колесного робота с омни-колесами с программным комплексом на языке высокого уровня Java, который представляет собой самостоятельное кроссплатформенное приложение и имеет в своем арсенале собственный математический пакет и графический движок

**Теоретическая и практическая значимость работы**

1. Проведенное в диссертации развитие прямого метода Ляпунова имеет определенное теоретическое значение для исследования устойчивости и стабилизации систем, моделируемых дискретными уравнениями

2. Алгоритм построения структуры дискретного управления программными движениями механических систем, в том числе двузенным манипулятором и колесным роботом, могут быть использованы для конструирования соответствующих управляемых систем

**Достоверность**

Достоверность разработанных научных положений и выводов обеспечена использованием строгого математического аппарата, применением обоснованных математических моделей управляемых систем, соответствием теоретических и экспериментально-численных результатов.

В первой главе диссертации дается общая постановка исследуемой задачи о моделировании процесса управления управляемой системы, описываемой нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, и имеющей дискретное управление (параграф 1.1). Естественным условием реализуемости программного движения является приведение к нему возмущенных движений на конечном отрезке времени или его асимптотическая устойчивость. Соответственно в теории управления ставятся задачи синтеза управления на конечном отрезке времени и задача построения стабилизирующего управляющего воздействия. Исследования этих задач во многих работах проводят посредством приведения модельных уравнений к разностным уравнениям, что требует определенного математического обоснования [43,44,48,144,146, 152].

Соответственно возникает задача определения условий устойчивости нелинейной дискретной системы. Наиболее эффективным методом ее исследования является прямой метод Ляпунова [91,95]. Первые результаты в этой области были получены в работах [43, 44, 146, 147]. В дальнейшем, этой проблеме были посвящены многочисленные исследования. Из соответствующих публикаций выделим монографии [29, 43, 44, 55, 139, 145–147, 166, 173, 175, 176], обзор [102] , работы с результатами современных исследований, близких по тематике [1,7,27,33,34,34,35,74,75,96,147,161,162].

В параграфе 1.2 изучается развитие прямого метода Ляпунова в направлении построения топологической динамики [157–159, 174–

176, 194], применения векторных функций Ляпунова и уравнений сравнения. Представлены новые теоремы о локализации положительного предельного множества, об исследовании устойчивости с использованием знакопостоянных функций Ляпунова. Новизна доказанных теорем состоит в ослаблении условий, достаточных для определения предельных свойств решений нелинейных нестационарных дискретных систем. Эти теоремы используются в следующих параграфах диссертации.

Эффективность новой методики исследования устойчивости нелинейных систем, моделируемых разностными уравнениями, демонстрируется на примере 1.3, где решается задача об устойчивости нелинейной системы типа Вольтерра. Такая модель является широко распространенной моделью как естественнонаучных проблем, так и экономических и технических процессов [30, 31, 49, 132, 133, 160, 169, 191, 193]. В отличие от известных результатов задача исследуется в нестационарной постановке.

Во второй главе представлены результаты по применению полученных теорем развития прямого метода Ляпунова в исследовании задачи о стабилизации для нелинейной дискретной управляемой системы, программных движений модельной механической системы с одной степенью свободы и приводимых к ней систем.

Отсутствие универсальных способов нахождения функций Ляпунова для решения задач об устойчивости и стабилизации стимулирует интенсивные исследования по нахождению эффективных алгоритмов их построения для определенных классов систем. Весьма эффективным для решения задач о стабилизируемости движений и состояний нелинейных систем является алгоритм их пассификации. Из многочисленных работ в этой области выделим работы [35, 140, 177, 178, 183], непосредственно относящиеся к результатам параграфа 2.1. В этом параграфе представлены результаты о приложении теорем об асимптотической устойчивости из параграфа 1.2 к задаче о стабилизации системы, моделируемой дискретными уравнениями. Сформулированы результаты о стабилизации, являющиеся непосредственными следствиями указанных теорем. Получены новые результаты по построению стабилизирующего управления для пассивных систем и систем, приводящихся к ним.

До настоящего времени задача о стабилизации программных движений механических систем дискретными управляющими воздействиями является малоисследованной. В качестве модельной системы в этой задаче для удобства анализа в параграфе 2.2 рассмотрена механическая система с одной степенью свободы. Методика решения основывается на методе векторных функций Ляпунова. Последовательно выводятся результаты о стабилизации программного движения непрерывным управляющим воздействием, затем дискретным. Обосновывается использование дискретной схемы моделирования.

Обширный класс задач об устойчивости и стабилизации движений механических систем составляют многомерные механические системы с одной позиционной и остальными циклическими координатами. Такие системы могут иметь так называемые стационарные и обобщенные стационарные движения, в которых позиционная координата постоянна.

Классической задаче об устойчивости и стабилизации таких движений под действием непрерывных сил и управлений и её развитию посвящены работы [11, 13, 16, 17, 71] и другие.

В параграфе 2.3 представлены результаты о стабилизации обобщенного стационарного движения механической системы с одной позиционной координатой посредством ступенчатого дискретного стабилизирующего воздействия.

В третьей главе представлены результаты по моделированию управляемых механических систем с дискретным ступенчатым управлением.

Задача о стабилизации программных движений управляемых механических систем, являясь актуальной, в то же время представляется сложной для решения. Различным аспектам этой проблемы посвящены многочисленные исследования, из которых выделяются исследования за последние 50 лет, представленные в монографиях [50, 87, 109, 111, 120, 125, 126, 149, 150], в работах [5, 6, 10, 19, 108, 110, 111, 127–130].

Весьма эффективным является подход, приводящий к декомпозиции в задаче об управлении механической системой, наиболее полно обоснованный в работах научных школ Ф.Л. Черноусько и Е.С. Пятницкого. Оказывается, что для управляемых механических систем специальный выбор управления может за конечное время привести системы в движение при режиме полной компенсации динамического взаимовлияния между подсистемами, т.е. при режиме декомпозиции.

Методика исследований работ Ф.Л. Черноусько и его учеников позволяет решать задачу о переводе управляемой механической системы из произвольного начального положения в терминальное состояние за конечное время.

Управления, решающие задачу о стабилизации программных движений механических систем, представленные в работах Е.С. Пятницкого и его учеников, являются робастными. Этот подход использует качественную теорию дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [2, 3, 42, 137, 141, 142], включая построение определенно-положительной функции Ляпунова. Применение знакопостоянной функции Ляпунова [45] позволяет улучшить условия стабилизируемости [10, 15, 18, 19]. При этом учитывается необходимость решения обратной задачи управления манипуляторами [114, 124], предполагающее схожую структуру управляющего воздействия. Результаты параграфа 1 дополняют результаты [10, 15] на случай ступенчатого импульсного управления.

Уравнения Лагранжа движения механических систем часто используются для исследования задач управления робототехническими системами [24, 50, 80, 87, 105–112, 122–131, 138, 153]. В параграфе 3.2 алгоритм из параграфа 3.1 построения управляющего воздействия, стабилизирующего программные движения механической системы, демонстрируется на примере решения задачи о стабилизации программного движения двузвенного манипулятора на подвижном основании.

Одним из широко распространенных классов робототехнических систем является класс мобильных колесных роботов, которые уже широко используются в различных сферах человеческой деятельности. Особый интерес представляют колесные роботы с роликонесущими колесами типа "omnidirectional или с "омни-колесами". В конструкции колес таких роботов закреплены ролики, оси вращения которых лежат в плоскости колес, что позволяет осуществлять движения в любом направлении без предварительного разворота, что, в свою очередь, значительно повышает маневренность робота.

Исследованию динамики omni-роботов и методов управления их движением посвящены известные работы как отечественных [65–67, 94, 100, 115–117], так и зарубежных [163–165, 186–189] и других авторов. Особенностью модели омни-колеса является наличие скоростей в уравнениях связи, таким образом, движение робота моделируется как движения неголономной механической системы [68, 71–73].

В диссертации рассматривается динамическая модель робота, управляемого посредством двигателей постоянного тока, для соответствующего моделирования используются работы [65–67,94,100], также исследована задача об устойчивости и стабилизации стационарных движений. Задача о стабилизации управляемых движений робота рассматривалась в работах [70, 115, 116, 118, 190]. В работе [180] на основе метода вычисляемого момента построено управление, стабилизирующее программное движение робота, обеспечивающее высокую скорость сходимости лишь при достаточно малых отклонениях от этого движения.

Полученные параграфе 3.3 результаты отличаются дискретными законами управления, решающими нелокальную задачу стабилизации программных движений робота, в том числе, при неточно известных массо-инерционных параметрах системы.

В приложении представлена компьютерная модель, реализующая управление колесным роботом с тремя омни-колесами.

Выполненная научно-исследовательская работа была поддержана Государственной стипендией Президента РФ за 2009/2010 уч. год, Государственной стипендией правительства РФ за 2011/2012, 2012/2013, 2013/2014 уч. года.

Результаты диссертационной работы были получены в ходе выполнения задач по следующим проектам:

1. Грант РФФИ «Комплексное моделирование влияния микрочастиц в промышленных системах» (№ 09-08-97004р-поволжье). Исполнитель 2009 г.

2. Проект РФФИ «Развитие научного потенциала высшей школы, 2009-2010 гг.» АВЦП 2.1.1/6194 Исполнитель 2010 г.

3. НИР «Развитие методов и алгоритмов исследования задач об управлении нелинейными механическими системами и компьютерное моделирование управляемого движения системы тел» ФЦП «Научные

и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (Соглашение № 14.B37.21.0373 от 06 августа 2012 г.). Исполнитель 2012-2013 гг.

4. Проект РФФИ «Динамическое моделирование мобильных роботов с омни-колесами и алгоритмы управления их движением» (№ 12-01-31084). Исполнитель 2012-2013 гг.

5. Проект РФФИ «Методы и алгоритмы синтеза управления колесными механическими системами с учетом запаздывания и параметрической неопределенности"(№ 12-01-33082). Исполнитель 2013-2014 гг.

6. Проект РФФИ «Математические методы и вычислительные алгоритмы конструирования структур управления робототехническими и мехатронными системами» (№ 15-01-08482). Исполнитель 2015 г.

7. НИР «Разработка математических методов исследования динамики и устойчивости деформируемых элементов конструкций, установок, приборов, устройств при аэрогидродинамическом, тепловом ударном воздействиях» ( ГЗ № 2014/232 Минобрнауки России). Исполнитель 2015 г.

8. Грант РФФИ «Разработка математических методов исследования динамики и устойчивости механических систем с распределенными параметрами при аэрогидродинамическом и ударном воздействиях» (№ 15-01-08599). Исполнитель 2015 г.

# 1 НОВЫЕР МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ УСТОЙЧИВОСТИ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

## 1.1 Постановка задачи о математическом моделировании управляемой системы с цифровым управлением и стабилизации её движения

Построение динамических моделей управляемых механических систем с конечным числом степеней свободы приводится к совокупности дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = g(t, y, v) \tag{1.1}$$

где $y-$ $m-$мерный вектор фазовых координат или $y \in \mathbb{R}^m-$ $m-$мерному действительному линейному пространству с некоторой нормой $\|y\|$, $v-$ $r-$мерный вектор управления или $v \in \mathbb{R}^r$ с нормой $\|v\|$, $g : \mathbb{R}^+ \times G_y \times G_v \to \mathbb{R}^m-$ некоторая $m-$мерная векторная функция, $G_y \subset \mathbb{R}^m$ и $G_v \subset \mathbb{R}^r-$ определенные области.

Система является общепринятой моделью в теории управления [4, 26, 69, 79, 134, 154]. Применительно к динамическим моделям управляемых механических систем вектор фазовых координат $y$ может представлять собой совокупность обобщенных координат и скоростей (углов, линейных перемещений, угловых и механических скоростей), а также некоторых других переменных (например, характеризующих динамику привода). В качестве управлений $v$ могут выступать моменты и силы, а также другие переменные (в случае приводов, например, напряжения). Вектор-функция $g$ определяется структурой механической системы, а также структурой управления.

Резкое повышение надежности и удешевление компьютеров, микрокомпьютеров позволили существенно изменить подходы к конструированию управляемых систем тем, что компьютер используется непосредственно в контуре управления. Создаваемое при этом управление является дискретным.

Дискретное управление имеет ряд преимуществ: повышенную точность измерений; использование цифровых сигналов (кодов), датчиков и преобразователей; меньшая чувствительность к шумам и помехам; возможность легко изменять программное обеспечение [154].

Для того, чтобы использовать компьютеры в системах непрерывного управления, их соединяют с объектом управления (с механической системой), измерительными устройствами и исполнительными механизмами при помощи преобразователей сигнала (восстановителя, цифроаналогового преобразователя и др.). Тем не менее, удобным для анализа и построения систем управления является использование снимаемых с измерительных устройств и подаваемых сигналов управления непосредственно в виде дискретных величин, постоянными в течение периода отсчета.

Соответственно вводится понятие автоматического управления дискретного действия. Такие системы имеют хотя бы одно звено дискретного действия - звено, выходная величина которого изменяется дискретно, т.е., скачками, даже при плавном изменении входящей величины.

Существуют дискретные САУ, в которых имеются только дискретные сигналы. Такие системы состоят полностью из звеньев дискретного действий, входные и выходные величины которых являются дискретными. Однако в большинстве дискретных систем имеются как дискретные, так и непрерывные сигналы. Поэтому в состав таких систем наряду со звеньями непрерывного и дискретного действия входят звенья, преобразующие непрерывные сигналы в дискретны, и звенья, осуществляющие обратное преобразование.

Преобразование непрерывного сигнала в дискретный называется квантованием сигнала. Существуют два основных вида квантования: по уровню и по времени. Сигнал, квантованный по уровню, может принимать только вполне определенные дискретные значения, соответствующие уровням. Сигнал, квантованный по времени, изменяется скачком в фиксированные моменты времени.

В цифровых системах используется сигнал, квантованный по уровню и по времени.

В соответствии с названными видами дискретных сигналов САУ дискретного действия делятся на три типа: релейные, импульсные и цифровые. Релейные САУ – это системы с квантованием по уровню, импульсные — с квантованием по времени, а цифровые — с применением обоих видов квантования.

Квантование, осуществляемое импульсным элементом в виде преобразования непрерывного сигнала в последовательность импульсов, называется импульсной модуляцией. Импульсная модуляция заключается в изменении одного из параметров выходных импульсов (модулируемого параметра) в функции величины входного сигнала (модулирующего сигнала). Модулируемым параметром для последовательности импульсов на выходе импульсного элемента может быть высота (амплитуда) импульса, его ширина и пауза между импульсами. Соответственно существуют три вида импульсной модуляции: амплитудно-импульсная модуляция, широтно-импульсная модуляция и время-импульсная модуляция.

Основные достоинства импульсных САУ обусловлены прерывистым характером передачи сигналов между отдельными частями системы и состоят в возможности многоточечного управления, многократного использования линий связи, а так же, в повышенной помехозащищенности.

В настоящей работе рассматривается задача об импульсном ступенчатом управлении. Снимаемые и подаваемые сигналы являются постоянными в течение периода отсчета, т.е., в виде

$$v(t) = v(nT), \text{ при } nT \leq t \leq (n+1)T, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

где $T-$период дискретизации, т.е., $t_n = nT$ – равноотстоящие моменты времени, $\mathbb{Z}^+-$множество неотрицательных целых чисел.

Система (1.1) при таком управлении принимает вид

$$\dot{y}(t) = g(t, y, v[n]) \tag{1.2}$$

Одним из алгоритмов управления роботами является дискретное позиционирование, при котором структурная схема следящей системы последовательно обрабатывает заданное приращение управляемой выходной переменной.

При непрерывном программном управлении роботом одним из способов определения управляющей программы состоит в последовательной установке рабочего органа в точках, заранее выбранных на программной траектории с записью показаний датчиков обратной связи, как при программировании систем дискретного позиционного управления. Затем для формирования заданной траектории между этими точками используется интерполятор.

Естественным является использование вместо интерполятора сведение систем (1.2) к системе разностных уравнений. При этом может быть выбрана схема сведения, наиболее удобная с точки зрения интегрирования системы (1.2).

Такой подход является достаточно признанным [43, 44, 46, 91, 145]. Впервые наиболее полно переход от непрерывных систем с дискретным управлением к разностным был обоснован для линейных стационарных управляемых систем систем в работах П. В. Бромберга. Однако этот подход в общем случае требует необходимого обоснования [43, 44]. В диссертации для исследуемых систем такое же обоснование проводится.

Соответственная модель (1.1) в дискретной временной области принимает вид

$$y(n+1) = g(n, y(n), v(n)) \tag{1.3}$$

Будем полагать, что управление $v \in F_v$, $F_v$ – функциональное множество, определяемое имеющимися ресурсами по управлению движением объекта.

Пусть $y = y^*(n)$, $n \in [n_0, n_1)$ $(n_0 \in \mathbb{Z}^+, n_0 < n_1 \leqslant +\infty)$ есть какое-либо программное движение системы из некоторого множества $F_y$ желательных движений с начальным положением $y^*(n_0) = y_0^*$, и $v = v^*(t) \in F_v$ $((y^*(n), v^*(n)) \in G_y \times G_v$ при $n \in [n_0, n_1))$ – програмное управление, реализующее это движение согласно вытекающему из (1.3) тождеству

$$y^*(n+1) \equiv Y(n, y^*(n), v^*(n)) \tag{1.4}$$

Назовем совокупность $\{y^*(n), v^*(n), n \in [n_0, n_1)\}$ программным управляемым процессом, который задается одним из возможных способов: 1) в явном виде, согласно постановке задачи.В этом случае возможно частичное задание процесса вначале и дальнейшее его доопределения позже по условиям задачи. 2) в неявном виде, представляя из себя, например, решение задачи по поиску экстремума. В этом случае, задача может быть решена приближенно, при этом, под программным управляемым движением будет пониматься решение такой задачи. Основным инструментом исследования управляемых механических систем представляет собой задача, носящая название «задача регулирования».

**Определение 1.1.** *Пусть* $\{y^*(n), v^*(n), n \in [n_0, n_1)\}$ *есть программный управляемый процесс,* $y_\tau$ *- некоторое состояние объекта, зафиксированное* *в момент $n = \tau$, $n_0 \leqslant \tau < n_1$, при этом $y_\tau \neq y^*(\tau)$. Задача регулирования программного управляемого процесса состоит в нахождении совокупности управлений $F_v^0 = \{v_\tau(n),\ n \in [\tau, n_1)\} \subset F_v$, таких что для каждого $(\tau, y_\tau) \in [n_0, n_1) \times \{y : ||y - y(\tau)|| < \Delta > 0\}$ найдется $v \in F_v^0$, при котором соответствующее движение $y(n)$, $y(\tau) = y_\tau$, сходится к $y^*(n)$, а именно:*

*а) либо $y(n_2) = y^*(n_2)$ при некотором $n_2 \in [\tau, n_1)$ (сходимость за конечное время)*

*б) либо для $n_1 = \infty$ движение $y(n) \to y^*(n)$ при $n \to +\infty$ (т.е. $||y(n) - y^*(n)|| \to 0$ при $n \to +\infty$)*

Сформулированная задача математически выражает приемы, используемые на практике по регулированию технических систем и процессов. Вначале, для обеспечения желаемого поведения объекта (входа в теории управления) , воздействие на него осуществлялось при помощи конструирования вспомогательной подсистемы, функционирование которой зависело от некоторых выходных параметров (выхода) объекта или от состояния самого объекта. Качественный скачок в развитии вычислительных средств и повсеместная компьютеризация позволили перейти к более общему представлению задачи регулирования.

Будем предполагать, что в момент времени $n = \tau$, $n_0 \leqslant \tau < n_1$, объект находится в состоянии, не совпадающим с заданным $y(\tau) \neq y^*(\tau)$.. Информация о характере отклонения от заданного движения и фактическом движении объекта, в этом случае, может быть получена с помощью измерительных устройств. Далее, из полученной информации извлекаются сведения об отклонении $x(n) = y(n) - y^*(n)$, $n \geqslant \tau$ , на основе которых синтезируются управляющие сигналы.

Процесс обработки первичной информации, фактическое воздействие синтезированного управления на механизмы-исполнители, сами исполнительные механизмы с устройствами, реализующими этот процесс в совокупности представляет из себя систему управления движением. Далее, введем понятие управляемой динамической системы, как совокупности объекта, находящегося в движении, системы, управляющей его движением и термоэлементов, таких как измерительные устройства и исполнительные механизмы.

Связь между движением объекта и управляющими силами и моментами, осуществляемая согласно описанной схеме, называется обратной связью. В общем случае, при наличии возмущений, движение объекта может быть приведено к заданному программному движению путем некоторого воздействия $v$,, отличного от воздействия $v^*(n)$., являющегося программным управлением. Для механики управляемого движения наиболее часто решаемой является задача позиционного управления, в которой реализуется линейная стратегия управления.

$$v = v^*(n) + u(n, x), \quad x = y - y^*(n), \tag{1.5}$$

здесь под $u(n, x)$ понимается дополнительное (позиционное ) управление, которое формируется исполнительными органами системы согласно обратной связи.Линейность управления (1.5) в определенной степени соответствует известному в механике представлению движения как суммы двух движений - переносного и относительного. При этом, предполагается, что управление $v^*(n)$ реализовано таким образом, что существует возможность доопределенияи $u = u(n, x)$, $u \in F_{u},$. Такое дополнительное определение назовем управляющим воздействием.

**Определение 1.2.** *Пусть* $\{y^*(n), v^*(n), n \in [n_0, n_1)\}$ *- управляемый программный процесс. Задача синтеза позиционного управления состоит в построении управления в виде* (1.5) *таким образом, что для каждого* $\tau \in [n_0, n_1)$ *и каждого* $y_\tau \in \{y : ||y - y^*(\tau)|| < \Delta\}$, *где число* $\Delta$ $(0 < \Delta \leqslant +\infty)$ *выбирается согласно постановке конкретной задачи, движение* $y(n)$, $y(\tau) = y_\tau$, *соответствующее управлению* $v = v^*(n) + u(n, x)$, *сходилось к движению* $y^*(n)$.

Введем переменные $x = y - y^*(n)$, характеризующие отклонения управляемого движения объекта от его заданного программного движения $y = y^*(n)$. В соответствии с (1.4) - (1.5) уравнения движения объекта в отклонениях будут описываться системой разностных уравнений

$$x(n+1) = f(n, x(n), u(n)), \tag{1.6}$$

где $f(n, x(n), u(n)) = g(n, x(n) + y^*(n), u(n) + v^*(n)) - y(n, y^*(n), v^*(n))$.

Естественно предположить, что при $v = v^*(n)$, $u(n, x) \equiv 0$, соответствующее движение объекта совпадает с программным $y = y^*(n)$, и соответственно ему отвечает движение $x = 0$ системы в отклонениях (1.6).

Для этого составляющие, входящие в систему (1.6), должны удовлетворять соотношениям

$$u(n,0) \equiv 0, \quad f(n,0,0) \equiv 0, \quad n \in [n_0, n_1) \tag{1.7}$$

Однако из-за инструментальной погрешности измерительных устройств и наличия возмущающих сил и моментов, действующих на объект, возникают соотношения вида

$$u(n,0) = \mu(n), \quad f(n,0,0) = v(n), \quad n \in [n_0, n_1) \tag{1.8}$$

Учет этих соотношений обычно проводится как влияние возмущений. Тем самым, решение задачи синтеза позиционного управления, прежде всего, проводится по отношению к программному движению, отождествляемому с нулевым решением $x = 0$ системы (1.6), при наличии возмущений (1.8).

Задачу позиционного синтеза управления при $n_1 = +\infty$ называют также задачей стабилизации [4, 26], а в некоторых источниках – задачей синтеза асимптотически устойчивых систем [91]. На конечном отрезке времени в такой задаче возмущенное движение попадает в $\varepsilon-$окрестность программного движения, но не совпадает с ним.

Рассмотрим задачу о стабилизации, полагая $n_0 = 0$, $n_1 = \infty$ и условия (1.7) выполненными для всех $n \in \mathbb{Z}^+$.

Соответственно определению (1.2) имеем следующую постановку этой задачи.

**Определение 1.3.** *Управляющее воздействие* $u = u(n,x)$, $u(n,0) = 0$ *называется стабилизирующим, если нулевое состояние системы*

$$x(n+1) = f(n,x,u), \quad f(n,0,0) = 0$$

*является асимптотически устойчивым.*

Применительно к этой задаче могут быть применены известные методы исследования устойчивости для разностных уравнений и их модификации [7, 29, 75, 93, 96, 102, 145–148, 158, 161, 162, 166, 167, 175, 176, 179]. В следующем параграфе дается развитие этих методов в направлении применения векторных функций Ляпунова на основе уравнений сравнения [47, 96, 103, 104, 120].

## 1.2 Развитие метода векторных функций Ляпунова в исследовании устойчивости дискретных систем

Моделирование многих управляемых систем с дискретным управлением приводится к разностным уравнениям

$$x(n+1) = f(n, x(n)) \tag{1.9}$$

где $x$ – $m-$мерный вектор действительного пространства $\mathbb{R}^m$ с некоторой нормой $\|x\|$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^+$ – множество неотрицательных целых чисел. Будем полагать, что правая часть (1.9) есть вектор-функция, определенная для всех $(n,x) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m$ и, если не предполагается иначе, она непрерывна по

$x$ при каждом $n \in \mathbb{Z}^+$.

Задача о стабилизации управляемой системы вида (1.9), обычным образом, приводится к задаче об устойчивости нулевого состояния системы (1.9) в предположении

$$f(n, 0) \equiv 0$$

Соответственно имеют место следующие определения устойчивости состояния покоя $x = 0$ для дискретной системы (1.9) [43, 44, 90, 95, 97, 102, 145–147].

**Определение 1.4.** *Состояние $x = 0$ системы (1.9) называется устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0$, $n_0 \in \mathbb{Z}^+$существует такое число $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$, что условие $\|x_0\| < \delta$ влечет выполнение неравенства $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ для любого $n \geq n_0$.*

**Определение 1.5.** *Состояние $x = 0$ называется аттрактором (точкой притяжения) движений системы (1.9), если при любом $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ существует $\delta_0 = \delta(n_0) > 0$, такое, что из условия $\|x_0\| < \delta_0$ следует что $\lim\limits_{n\to\infty} x(n, n_0, x_0) = 0$*

**Определение 1.6.** *Состояние $x = 0$ системы (1.9) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и является аттрактором.*

**Определение 1.7.** *Асимптотически устойчивым равномерно по $x_0$ называется состояние $x = 0$ системы (1.9), если оно устойчиво и для любых $\varepsilon > 0$ и любого $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ существуют $\delta_0 = \delta(n_0) > 0$,*

*$N = N(n_0, \varepsilon) > 0$, такие, что из условия $\|x_0\| < \delta_0$ следует, что $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ для любого $n \geq n_0 + N$.*

**Определение 1.8.** *Состояние $x = 0$ системы (1.9) называется равномерно устойчивым, если $\forall\, \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{Z}^+\ \exists\, \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из условия $\|x_0\| < \delta$ следует, что $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ для любого $n \geq n_0$.*

**Определение 1.9.** *Состояние $x = 0$ называется равномерным аттрактором движений системы (1.9), если существует значение $\delta_0 >0$, что для любых $\varepsilon > 0$, $n_0 \in Z^+$ найдется $N(\varepsilon) > 0$ такое, что условие $\|x_0\| < \delta_0$ влечет выполнение условия $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ для любого $n \geq n_0 + N(\varepsilon)$. Если это свойство имеет место при произвольном $\delta_0 > 0$, то состояние $x = 0$ называется глобальным равномерным аттрактором.*

**Определение 1.10.** *Состояние $x = 0$ системы (1.9) называется равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и является равномерным аттрактором.*

**Определение 1.11.** *Состояние $x = 0$ системы (1.9) называется неустойчивым, если для некоторых $\varepsilon_0 > 0$ и $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ и любого $\delta > 0$ найдутся $x_0$: $\|x_0\| < \delta$ и $n_1 = n_1(\varepsilon) > n_0$ такие, что $\|x(n_1, n_0, x_0)\| \geq \varepsilon$.*

Для вывода и дальнейшего применения нового принципа квазиинвариантности для неавтономных систем (1.9) с использованием вектор-функции Ляпунова и систем сравнения введем некоторые обозначения и построения из [35].

Обозначим через $F$ множество всех функций $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, непрерывных по $x$, и введем на $F$ следующую сходимость.

**Определение 1.12.** *Последовательность* $\{f_k \in F\}$ *сходится к* $f$*, если* $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{Z}^+$, *для всякого компактного множества* $D \subset \mathbb{R}^m$ *существует* $N_0 \in \mathbb{Z}^+$*, такое что при всех* $k \geq N_0$

$$\|f_k(n,x) - f(n,x)\| < \varepsilon \quad \forall (n,x) \in [0,N] \times D$$

Эта сходимость метризуема, если ввести следующую метрику.

Пусть $\{D_k\}$ – совокупность вложенных компактных множеств, покрывающих пространство $\mathbb{R}^m$:

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \mathbb{R}^m$$

Введем в пространстве $F$ метрику

$$\rho(f,g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\sup(||f(n,x) - g(n,x)||, (n,x) \in [0,k] \times D_k)}{1 + \sup(||f(n,x) - g(n,x)||, (n,x) \in [0,k] \times D_k)}, \tag{1.10}$$

$$f, g \in F$$

Будем полагать, что правая часть (1.9) удовлетворяет следующим условиям:

а) функция $f(n,x)$ равномерно ограничена на множестве $\mathbb{Z}^+ \times D$ для каждого компакта $D \subset \mathbb{R}^m$,

$$\|f(n,x)\| \leq l = l(D) \quad \forall (n,x) \in \mathbb{Z}^+ \times D \tag{1.11}$$

б) функция $f(n,x)$ равномерно непрерывна по $x$ независимо от $n \in \mathbb{Z}^+$ на каждом компактном множестве $D \subset \mathbb{R}^m$ : $\forall D \subset \mathbb{R}^m$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, D) > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и всех $x_1, x_2 \in D : \|x_2 - x_1\| < \delta$

выполнено неравенство

$$\|f(n,x_2)-f(n,x_1)\|<\varepsilon \tag{1.12}$$

**Лемма 1.1.** *При условиях* (1.11) *и* (1.12) *семейство сдвигов* $\{f_k(n,x)=f(k+n,x),\ k\in\mathbb{Z}^+\}$ *содержится в компактном множестве* $F_0\subset F$.

В дальнейшем, если какая-либо функция удовлетворяет условиям вида (1.11) и (1.12), тогда будем говорить, что эта функция удовлетворяет условиям предкомпактности.

**Определение 1.13.** *Будем говорить, что функция* $f^*:\mathbb{Z}^+\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ *есть предельная к* $f$, *если существует последовательность* $n_k\to\infty$ *такая, что последовательность сдвигов* $\{f_k(n,x),\ f_k(n,x)=f(n_k+n,x)\}$ *сходится к функции* $f^*$ *в метрическом пространстве* $F$.

Система

$$x(n+1)=f^*(n,x(n)) \tag{1.13}$$

называется предельной к системе (1.9).

Следующая теорема определяет связь между решениями систем (1.9) и (1.13).

**Теорема 1.1.** *Пусть при* $n_k\to\infty$ *последовательность сдвигов* $\{f_k(n,x)=f(n_k+n,x)\}$ *сходится к предельной функции* $f^*$ *в* $F$, *а последовательность точек* $x_0^{(k)}\to x_0$. *Тогда последовательность решений* $x_k(n,n_0,x_0^{(k)})=x(n_k+n,n_0,x_0^{(k)})$ *системы* $x(n+1)=f_k(n,x(n))$, $f_k(n,x)=f(n_k+n,x)$ *сходится к решению* $x=x^*(n,n_0,x_0)$ *предельной* *системы* (1.13). *При этом сходимость равномерна по* $n \in [n_0, n_0 + N]$ *для каждого* $N \in \mathbb{Z}^+$.

На основе данной теоремы могут быть установлены следующие предельные свойства решений системы (1.9).

**Определение 1.14.** *Пусть решение* $x = x(n, n_0, x_0)$ *системы* (1.9), *определено для всех* $n \geq n_0$. *Будем называть точку* $q \in \mathbb{R}^m$ *его положительной предельной точкой, если существует последовательность* $n_k \to \infty$ *такая, что* $x(n_k, n_0, x_0) \to q$. *Множество всех таких точек образует положительное предельное множество* $\Omega^+(n_0, x_0)$.

Предельная функция $f^*$ может быть продолжена на множество $\mathbb{Z}^- \times \mathbb{R}^m$, так как для каждого $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ сдвиг $f_0(n, x) = f(n_0 + n, x)$ определяется на множестве $[-n_0, +\infty] \times \mathbb{R}^m$. Исходя из этого предположения, можно определить решения системы (1.13) для начальных значений $(n_0, x_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^m$, соответственно определить отображение $x^*(n, n_0, x_0)$, $x^* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

**Определение 1.15.** *Будем говорить, что множество* $H \subset \mathbb{R}^m$ *является квазиинвариантным, если для любой точки* $x_0 \in H$ *существует предельная система* (1.13) *и ее решение* $x = x^*(n)$, $x^*(0) = x_0$ *такое, что* $x^*(n) \in H \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$.

**Теорема 1.2.** *Если решение* $x = x(n, n_0, x_0)$ *системы* (1.9) *ограничено для всех* $n \in \mathbb{Z}^+$, *тогда его положительное предельное множество* $\Omega^+(n_0, x_0)$ *замкнуто и квазиинвариантно, при этом решение* $x(n, n_0, x_0)$

*неограниченно приближается к* $\Omega^+(n_0, x_0)$ *при* $n \to \infty$.

Рассмотрим нелинейную разностную систему

$$V(n+1) = g(n, v(n)) + Q(n, v(n)) \tag{1.14}$$

где функция $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ имеет непрерывные частные производные по $v \in \mathbb{R}^k$ при каждом $n \in \mathbb{Z}^+$, функция $Q(n, v)$ при каждом $n \in \mathbb{Z}^+$ непрерывна по $v \in \mathbb{R}^k$.

Для решения $w = w(n, n_0, w_0)$ соответствующей невозмущенной системы

$$w(n+1) = g(n, w(n)) \tag{1.15}$$

можно определить матрицу [176].

$$\Phi(n, n_0, w_0) = \frac{\partial w(n, n_0, w_0)}{\partial w_0} \tag{1.16}$$

Эта матрица является фундаментальной для линейной системы в вариациях

$$\begin{aligned} &\varphi(n+1) = H(n)\varphi(n+1), \\ &H(n) = \frac{\partial g}{\partial w}(n, w)\bigg|_{w=w(n,n_0,w_0)} \end{aligned} \tag{1.17}$$

удовлетворяя матричному уравнению

$$\Phi(n+1) = H(n)\Phi(n), \quad \Phi(n_0) = I \tag{1.18}$$

где $I$ – единичная матрица.

**Теорема 1.3.** *Пусть* $v = v(n, n_0, v_0)$ *и* $w = w(n, n_0, v_0)$ *есть решения систем* (1.14) - (1.15) *соответственно определенных для всех* $n \geq n_0$.

*Тогда для этих решений имеет место соотношение*

$$v(n,n_0,v_0) = w(n,n_0,v_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1} \int\limits_0^1 \Phi(n,j+1,g(j,v[j]) + sQ(j,v[j])ds\ Q(j,v[j]),$$

$$v[j] = v(j,n_0,v_0) \tag{1.19}$$

*Доказательство.* Для каждого $j = n_0, n_0+1, \ldots, n-1$ имеем по

$$w(n,j+1,v[j+1]) - w(n,j,v[j]) = w(n,j+1,v[j+1]) - w(n,j+1,w[j+1]),$$

$$w[j+1] = w(j+1,j,v[j])$$

или по теореме о среднем

$$w(n,j+1,v[j+1]) - w(n,j,v[j]) =$$

$$= \int\limits_0^1 \Phi(n,j+1,sv[j+1] + (1-s)w[j+1])(v[j+1] - w[j+1])ds =$$

$$= \int\limits_0^1 \Phi(n,j+1,g(j,v[j]) + sQ(j,v[j])ds\ Q(j,v[j])\ .$$

Суммируя эти равенства по $j$ от $n_0$ до $n$ получаем

$$w(n,n_0,v[n]) - w(n,n_0,v[n_0]) =$$

$$\sum_{j=n_0}^{n} \int\limits_0^1 \Phi(n,j+1,g(j,v[j]) + sQ(j,v[j])ds\ Q(j,v[j])$$

Так как $w(n,n,v[n]) = v[n] = v(n,n_0,v_0)$, $w(n,n_0,v[n_0]) = w(n,n_0,v_0)$, отсюда имеем искомую формулу (1.19).

Теорема доказана. □

Для исследования устойчивости нелинейной системы (1.9) широко применяется метод функций Ляпунова. Метод оценки функции Ляпунова, удовлетворяющей разностному неравенству, посредством решения, соответствующего разностного уравнения представляет собой один из наиболее эффективных методов такого исследования.

Представим классические теоремы сравнения, основой которых является использование разностных неравенств [102].

**Теорема 1.4.** *Пусть две функции $g_1, g_2 : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ являются неубывающими по переменной $v$. Предположим, что выполнены неравенства*

$$g_2(n, v) \leq g_1(n, v), \forall (n, v) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}$$

*Тогда будут иметь место следующие неравенства*

$$p_n \leq r_n,$$

*где $p_n$ и $r_n$ есть решения разностных уравнений:*

$$r_{n+1} = g_1(n, r_n),\ r_0 \geq v_0,$$

$$p_{n+1} = g_2(n, p_n),\ p_0 \leq v_0$$

Примем, что непрерывная функция $g : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ является неубывающей по своему векторному аргументу в соответствии со следующим определением:

**Определение 1.16.** *Будем считать, что имеет место векторное неравенство $v \leq w$, если выполнено покоординатное неравенство $v_j \leq w_j$ для всех $j = 1..k$. Функция $g$ является неубывающей по $v \in \mathbb{R}^k$, если из неравенства $v \leq w$, для каждого $n \in \mathbb{Z}^+$ следует неравенство $g(n, v) \leq g(n, w)$.*

**Теорема 1.5.** *Пусть функция* $g : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ *является неубывающей по векторному аргументу* $v \in \mathbb{R}^k$*; функция* $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^k$ *удовлетворяет неравенству* $v(n+1) \leq g(n, v(n))$*, а функция* $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^k$ *соотношению* $w(n+1) \geq g(n, w(n))$*, тогда из условия* $v(n_0) \leq w(n_0)$*, следует* $v(n) \leq w(n)$ *для всех* $n \geq n_0$.

Соответственно теореме 1.5 можно вывести теорему об устойчивости $x = 0$ системы (1.9), если ввести нижеследующие определения.

**Определение 1.17.** *Вектор-функция* $V : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$ *является определенно-положительной, если существует функция типа Хана* $a_1 \in H$ *[168], такая, что*

$$V_j \geq 0, \forall j = 1, 2 \ldots k; \quad V(n, x) > a_1(\|x\|)$$

$$\bar{V}(n, x) = max(V_1(n, x), V_2(n, x), \ldots, V_k(n, x))$$

*или*

$$\bar{V}(n, x) = \sum_{j=1}^{k} V_j(n, x)$$

*она допускает бесконечно малый высший предел, если*

$$V_j(n.x) \leq a_2(\|x\|), a_2 \in H, \quad \forall j = 1, 2 \ldots k$$

**Теорема 1.6.** *Если для системы* (1.9) *можно найти вектор-функцию* $V : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^k$*, удовлетворяющую соотношениям*

$$V(n, x) \geq a_1(\|x\|), \quad V(n+1, f(n, x)) \leq g(n, V(n, x))$$

*при этом* $g(n, 0) = 0$ *и решение* $v = 0$ *уравнения сравнения*

$$v(n+1) = g(n, v(n))$$

*устойчиво.*

*Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.9) также устойчиво. Если решение $v = 0$ равномерно устойчиво и для $V(n,x)$ имеет место оценка $V(n,x) \leq a_2(\|x\|)$, тогда имеет место равномерная устойчивость $x = 0$.*

Выражение вида (1.19) является аналогом формулы В.М. Алексеева [135] нелинейной вариации параметров для разностных систем. Оно позволяет провести развитие метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова для решения задач об асимптотической устойчивости и неустойчивости решений неавтономных дискретных систем с использованием принципа квазиинвариантности.

Предположим, что для системы (1.9) можно найти вектор-функцию Ляпунова, непрерывную по переменной $x$ при каждом фиксированном $n \in \mathbb{Z}^+$, удовлетворяющую соотношению

$$V(n+1, x(n+1)) = g(n, V(n, x(n))) + Q(n, x(n), V(n, x(n))) \tag{1.20}$$

При этом выполнены следующие условия:

1. Функция $g = g(n,w)$ квазимонотонная и непрерывно дифференцируемая по $w \in \mathbb{R}^k$
2. Функции $g = g(n,w)$, $Q = Q(n,x,w)$ удовлетворяют условиям предкомпактности типа (1.11) и (1.12),
3. Имеет место неравенство $Q(n,x,w) \leqslant 0$ для любых $(n,x,w) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$.

Тогда, исходя из введенных предположений, следует, что функция

$V(n,x)$ является вектор-функцией сравнения, а система (1.15) – системой сравнения.

Если $V = V(n,x)$ удовлетворяет уравнению (1.20), причем $V(n_0, x_0) = V_0$, а $w(n) = w(n, n_0, V_0)$ есть решение (1.15), определённое на интервале $[n_0, N]$, $\beta > 0$, согласно теореме 1.3, то для всех $n \in [n_0, N]$ на решении $x(n) = x(n, n_0, x_0)$ системы (1.9) выполняется неравенство

$$V(n, x(n, n_0, x_0)) \leqslant w(n, n_0, V_0)$$

Так как система (1.15) является предкомпактной, для неё можно определить семейство предельных систем сравнения

$$w(n+1) = g^*(n, w(n)), \qquad g^* \in F_g \tag{1.21}$$

Условия, наложенные на правую часть $g = g(n,x)$ системы (1.15) влекут, дифференцируемость по $w_0 \in \mathbb{R}^k$ решений $w = w(n, n_0, w_0)$ этой системы. Так как $w(n, n_0, w_0)$ – неубывающая по $w_0$ функция $w(n, n_0, w_0)$ получим, что матрица

$$\Phi(n, n_0, w_0) = \frac{\partial w(n, n_0, w_0)}{\partial w_0}$$

является неотрицательной, нормированной, $\Phi(n_0, n_0, w_0) = I$, (здесь $I$ – единичная матрица), фундаментальной матрицей для линейной системы в вариациях (1.17) - (1.18).

В дальнейшем будем полагать, что для любого компакта $D \subset \mathbb{R}^k$ существуют числа $M(D)$ и $m(D) > 0$, такие, что для любых точек

$(n, n_0, w_0) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{Z}^+ \times D$ матрица $\Phi(n, n_0, w_0)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \|\Phi(n, n_0, w_0)\| \leqslant M(D) \\ \det \Phi(n, n_0, w_0) \geqslant m(D) \end{cases} \tag{1.22}$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.7.** *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Существует вектор-функция Ляпунова* $V = V(n, x)$, *удовлетворяющая условиям предкомпактности* (1.11) – (1.12) *и равенству* (1.20)

2. *Для системы сравнения* (1.15) *справедливы условия* (1.22)

3. *Решение* $x(n, n_0, x_0)$ *системы* (1.9) *ограничено некоторым компактом* $D \subset \mathbb{R}^m$ *для всех* $n \geq n_0$

4. *Решение* $w(n) = w(n, n_0, V_0)$ *системы сравнения* (1.15), *где* $V_0 = V(n_0, x_0)$, *ограничено при всех* $n \geq n_0$

*Тогда для любой предельной точки* $q \in \Omega^+(n_0, x_0)$ *найдётся набор предельных функций* $(f^*, V^*, g^*, Q^*)$, *такой, что решение* $x = x^*(n, q)$ *системы* (1.13) *с начальным условием* $x^*(0, q) = q$ *удовлетворяет соотношениям*

$$x^*(n, q) \in \Omega^+(n_0, x_0),$$

$$x^*(n, q) \in \{V^*(n, x) = w^*(n)\} \bigcap \{Q^*(n, x, w^*(n)) = 0\} \text{ для всех } n \in \mathbb{Z},$$

*где* $w^*(n)$ *есть решение предельной системы сравнения* (1.21) *с начальным условием* $w^*(0) = V^*(0, q)$.

*Доказательство.* Из равенства (1.20) на основании формулы (1.19) нелинейной вариации параметров будем иметь соотношение между значением $V[n] = V(n, x[n]) = V(n, x(n, n_0, x_0))$ функции $V(n, x)$ на решении $x = x[n] = x(n, n_0, x_0)$ и решением $w = w[n] = w(n, n_0, V_0)$, $V_0 = V(n_0, x_0)$ системы сравнения (1.15).

$$V(n, x[n]) = w[n] + \sum_{j=n_0}^{n-1} \int_0^1 \Phi(n, j+1, sV[j]) + (1-s)w[j]ds\; Q(j, x[j], V[j]) \tag{1.23}$$

Функция $V(n, x(n))$ ограничена снизу на множестве $\mathbb{Z}^+ \times D$ по условию 1). Согласно условию 4) теоремы, решение системы (1.15) $w[n]$ ограничено для всех $n \geq n_0$. Тогда в соответствии с ограничениями (1.22) найдутся постоянные $\alpha_0 > 0$, $\beta_0 > 0$, такие, что для всех $n \geq n_0$ имеет место неравенство

$$\beta_0 \geq \sum_{i=1}^{k} (w^i[n] - V^i[n]) \geq -\alpha_0 \sum_{j=1}^{k} \sum_{r=n_0}^{n-1} Q^j(r, x[r], V[r]) \geq 0 \tag{1.24}$$

Действительно, рассмотрим равенство (1.23) в покомпонентном виде

$$V^i(n, x[n]) = w^i[n] + \sum_{r=1}^{k} \sum_{j=n_0}^{n-1} \int_0^1 \Phi^{ir}(n, j+1, sV[j]) +$$

$$+(1-s)w[j]ds\; Q^r(j, x[j], V[j]), \quad i = 1, 2, \ldots, k$$

Просуммируем эти равенства по $i = 1, 2, \ldots, k$. Получим

$$\sum_{i=1}^{k} (w^i[n] - V^i[n]) =$$

$$= -\sum_{r=1}^{k} \sum_{j=n_0}^{n-1} \int_0^1 \sum_{i=1}^{k} \Phi^{ir}(n, j+1, sV[j]) + (1-s)w[j]ds\; Q^r(j, x[j], V[j])$$

Из второго неравенства (1.22) найдем, что существует число $\alpha_0 > 0$, такое, что для любых $n \geq n_0$ и всех $j = 1, 2, \ldots, k$ имеет место неравенство

$$\int\limits_0^1 \sum_{i=1}^{k} \Phi^{ir}(n, j+1, sV[j]) + (1-s)w[j]ds \geq \alpha_0$$

Отсюда из условий 3) и 4) теоремы следует, что существует число $\beta_0 > 0$, такое, что выполняется неравенство (1.24). Таким образом, каждый функциональный ряд, образованный частичными суммами, входящими в соотношение (1.24), сходится. И, значит, справедливо соотношение

$$\lim_{n \to +\infty} Q(n, x[n], V(n, x[n])) = 0 \qquad (1.25)$$

Пусть $q \in w^+(n_0, x_0)$ – предельная точка, определяемая последовательностью $n_j \to +\infty$, $x(n_j, n_0, x_0) \to q$ при $n_j \to +\infty$. Выберем подпоследовательность $n_{ji} \to +\infty$, для которой имеют место сходимости $f(n_{ji}+n, x) \to f^*(n, x)$, $g(n_{ji}+n, x) \to g^*(n, x)$, $Q(n_{ji}+n, x, w) \to Q^*(n, x, w)$. Отсюда найдем, что равномерно по $n \in [-\beta, \beta]$ для каждого $\beta > 0$ имеют место сходимости

$$x[n_{ji} + n] \to x^*[n], \quad w[n_{ji} + n] \to w^*[n],$$

где $x^*[n] = x^*(n, 0, q)$ и $w^*[n] = w^*(n, 0, q)$ $(w^* = V^*(0, q))$ есть соответствующие решения систем (1.13) и (1.21).При этом из соотношений (1.24) и (1.25) для всех $t \in \mathbb{R}$ получаем равенства

$$V^*[n, x^*[n]] = w^*[n], \quad Q^*[n, x^*[n], V^*[n]] = 0$$

Таким образом, теорема доказана. □

Исходя из приведенного доказательства в теореме 1.7 можно опустить условие предкомпактности относительно функции $V = V(n, x)$. Тем самым, сформулировать следующий результат.

**Теорема 1.8.** *Пусть выполнено равенство* (1.20), *при этом* $Q = Q(n, x)$ *и условия 2–4 теоремы 1.7. Тогда для каждой предельной точки* $q \in \Omega^+(n_0, x_0)$ *найдется набор предельных функций* $(f^*, g^*, Q^*)$, *такой, что решение* $x = x^*(n, q)$ *содержится одновременно во множествах* $\{x^*(n, q), n \in \mathbb{Z}\} \subset \Omega^+(n_0, x_0)$; $x^*(n, q) \in \{Q^*(n, x) = 0\}$.

Теоремы 1.7 и 1.8 представляют собой теоремы о локализации положительного предельного множества на основе вектор-функции Ляпунова и системы сравнения для неавтономных разностных уравнений. Они являются развитием принципа инвариантности Ж.П.Ла-Салля для автономной системы [174–176] и принципа квазиинвариантности для неавтономной разностной системы на основе скалярной функции Ляпунова со знакопостоянной производной [35].

**Теорема 1.9.** *Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова* $V = V(n, x)$, *удовлетворяющая условиям предкомпактности, такая, что:*

1. *функция* $\bar{V}$ *является определённо-положительной,* $\bar{V}(n, x) \geq a(\|x\|), a \in H$
2. *справедливо равенство* (1.20)
3. *нулевое решение* $w = 0$ *системы сравнения* (1.15) *устойчиво*
4. *для любой предельной совокупности* $(f^*, V^*, W^*, Q^*)$ *и каждого*

*ограниченного решения* $w = w^*(n) \neq 0$ *предельной системы сравнения* (1.21) *в множестве*

$$\{V^*(n,x) = w^*(n)\} \bigcap \{Q^*(n,x,w^*(n)) = 0\}$$

*не содержится решений предельной системы* (1.13).

*Тогда нулевое решение* $x = 0$ *системы* (1.9) *асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Из условий 1–3 теоремы следует, что решение $x = 0$ системы (1.9) устойчиво.

Пусть $x = x(n, n_0, x_0)$ – какое-либо решение (1.9) из области устойчивости, и таким образом ограничено. Согласно теореме 1.8 его предельное множество $\Omega^+(n_0, x_0)$ состоит из решений $x = x^*(n, q)$, содержащихся в множестве

$$\{V^*(n,x) = W^*(n)\} \bigcap \{Q^*(n,x,W^*(n)) = 0\}.$$

Но в силу условия 4 теоремы имеем $W^*(n) = 0$, и значит $x^*(n,q) \equiv 0$, $\Omega^+(n_0,x_0) \equiv \{x = 0\}$.

Теорема доказана. $\square$

**Замечание 1.1.** *Условие ограниченности и непрерывности* $V(n,x)$ *равномерной по* $(n,x) \in \mathbb{Z}^+ \times D_+$ *в теоремах 1.7 и 1.8 может быть опущено с соответствующими изменениями в выводах этих теорем. В частности, при* $Q = Q(n,x)$ *условие 4) теоремы 1.9 может быть заменено на условие*

*4 ′. множество* $\{Q^*(n,x) = 0\}$ *не содержит решений* (1.13), *кроме* $x = 0$.

Важным является следующее видоизменение теоремы 1.9 в случае зависимости $Q = Q(n, x)$.

**Теорема 1.10.** *Если в теореме 1.9 положить, что функция* $V(n, x)$ *является определенно-положительной, допускающий бесконечно малый высший предел* $a_1(\|x\|) \leq \bar{V}(n, x), V_j(n, x) \leq a_2(\|x\|)$ *и усилить условия 3) и 4) до условий*

3. *решение* $w = 0$ *системы* (1.15) *равномерно устойчиво*

4. *для любой предельной совокупности* $(f^*, Q^*)$ *множество* $\{Q^* = 0\}$ *не содержит решений системы* (1.21),(1.13), *кроме* $x = 0$.

*Тогда решение* $x = 0$ *системы* (1.9) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Содержащиеся в теореме 1.9 условия позволяют расширить классы используемых систем сравнения и вектор-функций Ляпунова для исследования асимптотической устойчивости неавтономных разностных систем.

Сформулированная теорема представляет собой развитие классической теоремы сравнения, а также теорем, основанных на применении скалярной функции Ляпунова со знакопостоянной производной [27, 32–35, 102, 174–176].

Рассмотрим задачу об устойчивости непрерывных знакопостоянных вектор-функций Ляпунова, для чего сформулируем несколько определений.

**Определение 1.18.** *Будем говорить, что нулевое решение* $x = 0$ *устойчиво относительно множества* $\{\bar{V}^*(n,x) = 0\}$ *и выбранной предельной совокупности* $(f^*, V^*, W^*, Q^*)$, *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *такое, что для любого решения* $x = x^*(n, x_0)$ *системы* (1.13), *при* $n \in \mathbb{Z}^+$ *выполняется неравенство* $|x^*(n, x_0)| < \varepsilon$. *Причем для этого решения справедливо*

$$x^*(0, x_0) = x_0, \quad x_0 \in \{|x| < \delta\} \bigcap \{\bar{V}^*(0,x) = 0\} \bigcap \{Q^*(0,x,0) = 0\},\ \forall n \geq 0$$

**Определение 1.19.** *Нулевое решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\bar{V}^*(n,x) = 0\}$ *и выбранной предельной совокупности* $(f^*, V^*, W^*, Q^*)$, *если оно устойчиво, а также существует число* $\Delta > 0$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $N = N(\varepsilon) > 0$, *такие, что для любого решения* $x = x^*(n, x_0)$ *системы* (1.13), *такого, что*

$$x^*(0, x_0) = x_0, \quad x_0 \in \{|x| < \Delta\} \bigcap \{\bar{V}^*(0,x) = 0\} \bigcap \{Q^*(0,x,0) = 0\},$$

*для всех* $n \geqslant N(\varepsilon)$ *выполняется неравенство* $|x^*(n, x_0)| < \varepsilon$.

**Определение 1.20.** *Нулевое решение* $x = 0$ *равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво) относительно множества* $\{\bar{V}^*(n,x) = 0\}$ *и семейства предельных совокупностей* $\{(f^*, V^*, W^*, Q^*)\}$, *если число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *в определении* (1.18) *не зависит (числа* $\Delta > 0$ *и* $N = N(\varepsilon) > 0$ *в определении* (1.18) *не зависят) от выбора* $(f^*, V^*, W^*, Q^*)$.

Следующая теорема связывает введенные понятия с полученными ранее результатами.

**Теорема 1.11.** *Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова* $V = V(n,x)\geqslant 0$, *удовлетворяющая условиям предкомпактности, такая, что выполнены условия 2–3 теоремы 1.10 , а также условие*

*4. нулевое решение* $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\bar V^*(n,x) = 0\}$ *и семейства предельных совокупностей* $\{(f^*, V^*, W^*, Q^*)\}$.

*Тогда решение* $x = 0$ *системы* (1.9) *устойчиво (равномерно устойчиво).*

*Доказательство.* Прежде всего, убедимся, что решение $x = 0$ системы (1.9) устойчиво. Предположим противное. Тогда, по определению, найдутся числа $\varepsilon_0 > 0$ и $n_0\geqslant 0$ и последовательности
$\eta_j \to +\infty$, $x_j^0 \to 0$, такие, что

$$|x(\eta_j, n_0, x_j^0)| = \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \dots \tag{1.26}$$

Из непрерывности траекторий системы (1.9) и условия (1.26) следует, что для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, найдётся последовательность $n_j \to +\infty$, для которой выполняются соотношения

$$\begin{gathered} |x(n_j, n_0, x_j^0)| = \varepsilon_1, \\ \varepsilon_1 < |x(n, n_0, x_j^0)| < \varepsilon_0 \;\; \forall\, n \in (n_j, \eta_j) \end{gathered} \tag{1.27}$$

Обозначим $x_j = x(n_j, n_0, x_j^0)$ и рассмотрим решение $x(n+n_j, n_j, x_j)$, $n\geqslant 0$, системы (1.9). Не умоляя общности можно считать, что последовательность $n_j \to +\infty$ обеспечивает сходимость $x_j \to x_0^*$ при $n \to +\infty$и, следовательно, определяет предельную совокупность $(f^*, V^*, W^*, Q^*)$. Тогда последовательность решений $x(n+n_j, n_j, x_j)$ системы (1.9) сходится к решению $x^*(n,0,x_0^*)$ предельной системы (1.13) равномерно по $n \in [-\beta;\beta]$, где $\beta \in \mathbb{N}$ – произвольное число.

Условия устойчивости нулевого решения $w = 0$ системы сравнения (1.15) в совокупности с двойным неравенством

$$0 \leqslant \bar{V}(n_j, x_j) \leqslant \sum_{i=1}^{k} w^i(n_j, n_0, w_j^0), \qquad w_j^0 = V(n_0, x_j^0)$$

обеспечивают справедливость соотношения

$$\bar{V}^*(0, x_0^*) = 0 \tag{1.28}$$

Докажем, что $\lim\limits_{j\to\infty}(\eta_j - n_j) = +\infty$. Пусть, это не так, т.е. существует число $\eta = \eta(\varepsilon_1) > 0$, такое, что $\eta_j - n_j \leqslant \eta(\varepsilon_1)$. Тогда существует момент $n_1 \in [0,\eta]$, такой, что

$$|x^*(n_1, 0, x_0^*)| = \varepsilon_0 \tag{1.29}$$

но по условию 4 теоремы выбирая $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{2} > 0$, можно отыскать число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall n \geqslant 0$ будет выполнено неравенство $|x^*(n,0,x_0)| < \varepsilon$. Положив $\varepsilon_1 = \delta$, придем к неравенству $|x^*(n_1,0,x_0^*)| < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, которое противоречит условию (1.29). Откуда следует, что $\eta_j - n_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Согласно условию 4 теоремы, найдётся число $\Delta_1 > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon)$, такие, что $\forall n \geqslant N$ и $\forall x_0$, $\|x_0\| < \Delta_1$ справедливо неравенство

$$|x^*(n, 0, x_0)| < \varepsilon \tag{1.30}$$

Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{3}{2\Delta_1}$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$. Тогда неравенство $|x^*(n,0,x_0^*)| \geqslant \varepsilon_1$ будет справедливо, какое бы $n \geqslant 0$ не выбрали. Однако, данное неравенство противоречит неравенству (1.30). Таким образом, устойчивость нулевого решения $x = 0$ системы (1.9) доказана. $\square$

Аналогично можно провести доказательство равномерной устойчивости решения $x = 0$ системы (1.9). Предположим, что решение $x = 0$ системы (1.9) не является равномерно устойчивым. Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $n_0 \geqslant 0$ и последовательности $\eta_j \to +\infty$, $n_0^j \in \mathbb{Z}^+$ и $x_j^0 \to 0$, такие, что

$$|x(\eta_j, n_0^j, x_j^0)| = \varepsilon_0$$

При сделанных предположениях условия (1.27) запишутся в виде

$$|x(n_j, n_0^j, x_j^0)| = \varepsilon_1,$$

$$\varepsilon_1 < |x(n, n_0^j, x_j^0)| < \varepsilon_0 \ \forall\, n \in (n_j, \eta_j)$$

Обозначим $x_j = x(n_j, n_0^j, x_j^0)$ и, как и прежде, рассматривая решение $x(n + n_j, n_j, x_j)$, $n \geqslant 0$, системы (1.9), повторим предыдущие рассуждения. Необходимое нам равенство (1.28) вытекает из условия равномерной устойчивости нулевого решения $w = 0$ системы сравнения (1.15), неравенств

$$0 \leqslant \bar{V}(n_j, x_j) \leqslant \sum_{i=1}^{k} w^i(n_j, n_0^j, w_j^0), \qquad w_j^0 = V(n_0^j, x_j^0)$$

и из условия предкомпактности. Дальнейшие рассуждения аналогичны использованным нами в доказательстве устойчивости решения.

**Теорема 1.12.** *Предположим, что выполнены условия 1–4 теоремы 1.11, а так же выполнено условие*

5. *множество* $\{V^* > 0\} \bigcap \{Q^*(n, x, w^*(n)) = 0\}$ *не содержит решений системы* (1.13), *кроме* $x = 0$.

*Тогда решение* $x = 0$ *системы* (1.9) *равномерно асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Устойчивость (равномерная устойчивость) нулевого решения $x = 0$ системы (1.9) имеет место на основании выполнения условий теоремы 1.11. Доказательство притяжения (равномерного притяжения) решений системы (1.9) к нулю проводится по схеме, используемой в доказательстве теоремы 1.9. □

## 1.3 Устойчивость дискретной модели типа Вольтерра

Распространенной моделью ряда нелинейных систем и процессов являются дифференциальные, функционально-дифференциальные уравнения, предложенные к рассмотрению в работах В. Вольтерра [49]. Соответствующими разностными уравнениями могут быть описаны модели в медицине, экономике и других естественных, а так же, технических науках [35, 132, 133, 191, 192, 195] . За основу исследования примем эпидемиологическую модель из монографии [175]. Рассмотрим две различные популяции, где инфицированные члены одной популяции могут заражать здоровых членов другой популяции. Простая дискретная модель течения болезни с учетом нестационарности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{12}(n)x_2(n)(1 - x_1(n)) + a_{11}(n)x_1(n) \\ x_2(n+1) = a_{21}(n)x_1(n)(1 - x_2(n)) + a_{22}(n)x_2(n) \end{cases} \tag{1.31}$$

где $n \in \mathbb{Z}^+$, $x_1$ и $x_2$ - относительные инфицированные члены популяции, $0 \le x_1 \le 1, 0 \le x_2 \le 1$, $a_{jk}, j, k = 1, 2$ - коэффициенты, характеризующие процесс заражения для которых могут быть приняты следующие условия $0 < \varepsilon \leq a_{jk}(n) \leq 1 - \varepsilon$

Множество $\Gamma = \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ для системы (1.31) является инвариантным для любых значений $x(n_0) = x_0, (n_0, x_0) \in \mathbb{Z}^+ \times \Gamma$, соответствующих решений $x(n, n_0, x_0) \in \Gamma$ для всех $n \geq n_0$.

Уравнения (1.31) предкомпактны (лемма 1.1), соответствующие предельные уравнения имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a^*_{12}(n)x_2(n)(1 - x_1(n)) + a^*_{11}(n)x_1(n) \\ x_2(n+1) = a^*_{21}(n)x_1(n)(1 - x_2(n)) + a^*_{22}(n)x_2(n) \end{cases} \tag{1.32}$$

В качестве векторной функции Ляпунова можно взять функцию

$$V = (V_1, V_2)^T, V_1 = x_1, V_2 = x_2$$

здесь $(\cdot)^T$–операция транспонирования.

Уравнения для $V_1$ и $V_2$ совпадают с (1.31) и (1.32), а система сравнения имеет вид

$$\begin{aligned} w_1(n+1) &= a_{11}(n)w_1 + a_{12}(n)w_2 - Q_1 \\ w_2(n+1) &= a_{21}(n)w_1 + a_{22}(n)w_2 - Q_2 \end{aligned} \tag{1.33}$$

При этом, в принятых обозначениях, функции

$$Q_1 = a_{12}(n)x_1x_2,\ Q_2 = a_{21}(n)x_1x_2,$$

откуда предельные функции $Q^*_1$ и $Q^*_2$ соответственно задаются равенствами

$$\begin{gathered} Q^*_1 = a^*_{12}(n)x_1(n)x_2(n), Q^*_2 = a^*_{21}(n)x_1(n)x_2(n) \\ a^*_{jk}(n) = \lim_{m\to\infty} a_{jk}(m+n) \end{gathered} \tag{1.34}$$

Положим

$$A(n) = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{pmatrix}$$

Решение $w_1 = w_2 = 0$ системы $w(n+1) = A(n)w(n)$ будет равномерно устойчивым, если для любого $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ и $k \geq k_0$

$$\left\| \prod_{j=k_0}^{k} A(j) \right\| \leq M = const \tag{1.35}$$

где $||B|| = max(|b_{jk}|)$.

Множество $\{Q_1^* = Q_2^* = 0\} = \{x_1(n) = 0$ или $x_2(n) = 0\}$ не содержит решений (1.32), кроме $x_1 = x_2 = 0$. По теореме 1.9 условие (1.35) достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости состояния $x_1 = x_2 = 0$ системы (1.31).

Иное достаточное условие асимптотической устойчивости можно вывести на основе функции Ляпунова.

$V(x_1, x_2) = \alpha|x_1| + \beta|x_2| = \alpha x_1 + \beta x_2$, $\alpha > 0, \beta > 0$.

Находим

$$V(n+1) = \alpha x_1(n+1) + \beta x_2(n+1) = (\alpha a_{11}(n) + \beta a_{21}(n))x_1(n) +$$
$$+(\alpha a_{12}(n) + \beta a_{22}(n))x_2(n) - (\alpha a_{12}(n) + \beta a_{21}(n))x_1(n)x_2(n) = \mu(n)V(n) - Q$$

$Q = (\alpha a_{12}(n) + \beta a_{21}(n))x_1 x_2$,

Пусть

$$\begin{cases} \alpha a_{11}(n) + \beta a_{21}(n) \leq \alpha\mu(n) \\ \alpha a_{12}(n) + \beta a_{22}(n) \leq \beta\mu(n) \end{cases} \tag{1.36}$$

где полагаем, что $\mu(n) > 0$ есть некоторая функция, удовлетворяющая соотношению

$$\prod_{j=n_0}^{n} \mu(j) \leq m_0 = const, \forall\, n > n_0, n_0 \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.37}$$

Находим, что при условиях (1.36) и (1.37) решение $w = 0$ соответствующего уравнения сравнения

$$w(n+1) = \mu(n) w(n)$$

равномерно устойчиво, а множество $Q^* = (\alpha a_{12}^*(n) + \beta a_{21}^*(n)) x_1 x_2$ не содержит решений (1.32), кроме $x_1 = x_2 = 0$. И таким образом, условия (1.36) и (1.37) достаточны для глобальной равномерной асимптотической устойчивости $x_1 = x_2 = 0$ системы (1.31)

Представим неравенства (1.36) в виде

$$\begin{cases} a_{11}(n) + \dfrac{\beta}{\alpha} a_{21}(n) \leq \mu(n) \\ \dfrac{\alpha}{\beta} a_{12}(n) + a_{22}(n) \leq \mu(n) \end{cases} \tag{1.38}$$

Обозначив $\dfrac{\beta}{\alpha} = \gamma, \quad \gamma \in (0, \infty)$ и разрешив полученную систему относительно $\gamma$, получим, что эти условия выполняются, если функция $\mu(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$\mu(n) \geq a_{11}(n) + \gamma a_{21}(n), \mu(n) \geq a_{22}(n) + \tfrac{1}{\gamma} a_{12}(n)$$

Соответственно условия (1.37) обращаются в условие: существует такое число $\gamma > 0$, при котором

$$\prod_{j=n_0}^{n} \max\{a_{11}(j) + \gamma a_{21}(j), a_{22}(j) + \frac{1}{\gamma} a_{12}(j)\} \leq m_0 = const \quad \forall\, n > n_0, n_0 \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.39}$$

**Замечание 1.2.** *Для постоянной матрицы* $A(n) = A_0 = const$ *условия* (1.35) *или* (1.39) *обращаются в условия* $\lambda_{max}(A_0) \le 1$, *здесь* $\lambda_{max}(A_0)$ *-наибольшее собственное значение матрицы* $A_0$. *Что соответственно совпадает с необходимым и достаточным условием для автономной системы* (1.31) *из [175], записанного в виде*

$$1 - (a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \ge 0 \tag{1.40}$$

Если вместо условия (1.35) матрица $A(n)$ удовлетворяет условию вида:

$$\left\| \prod_{j=km}^{(k+1)m} A(j) \right\| \ge 1 + \varepsilon,$$

для некоторых $m \in \mathbb{Z}^+$ и $\varepsilon > 0$ и $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, тогда несложно найти, что состояние $x_1 = x_2 = 0$ системы (1.31) неустойчиво.

При постоянных $a_{jk} = const, j, k = 1, 2$ и нарушении условий (1.40) система (1.31) имеет ненулевое стационарное решение

$$x_1 = x_1^0 = 1 - \frac{(a_{21} - a_{22} + 1)(1 - a_{12})}{(a_{12} - a_{11} + 1)a_{21}},$$
$$x_2 = x_2^0 = 1 - \frac{(a_{11} - a_{12} + 1)(1 - a_{22})}{(a_{21} - a_{22} + 1)a_{11}}$$

В общем случае системы (1.31) это решение существует, если коэффициенты $a_{jk}(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$1 - \frac{(a_{21}(n) - a_{22}(n) + 1)(1 - a_{12}(n))}{(a_{11}(n) - a_{12}(n) + 1)a_{21}(n)} = b_{11}^0 = const < 1,$$

$$1 - \frac{(a_{11}(n) - a_{12}(n) + 1)(1 - a_{22}(n))}{(a_{21}(n) - a_{22}(n) + 1)a_{11}(n)} = b_{22}^0 = const < 1$$

Исследуем вопрос об устойчивости как этого возможного стационарного состояния, так и любого другого решения системы (1.31)

$$x_1 = x_{10}^*(n), \quad x_2 = x_{20}^*(n) \tag{1.41}$$

Вводим возмущения

$$\tilde{x_1}(n) = x_1 - x_{10}^*(n), \quad \tilde{x_2}(n) = x_2 - x_{20}^*(n)$$

Уравнения возмущенного движения будут иметь следующий вид

$$\begin{aligned}
&\tilde{x}_1(n+1) = a_{12}(n)(1 - x_{10}^*(n))\tilde{x}_2(n) + \\
&+(a_{11}(n) - a_{12}(n)x_{20}^*(n))\tilde{x}_1(n) - a_{12}(n)\tilde{x}_2(n)\tilde{x}_1(n) \\
&\tilde{x}_2(n+1) = a_{21}(n)(1 - x_{20}^*(n))\tilde{x}_1(n) + \\
&+(a_{22}(n) - a_{21}(n)x_{10}^*(n))\tilde{x}_2(n) - a_{21}(n)\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n)
\end{aligned} \tag{1.42}$$

Уравнения линейного приближения соответственно будут

$$\tilde{x}(n+1) = A(n)\tilde{x}(n) \tag{1.43}$$

Матрица $\tilde{\mathrm{A}}$ системы (1.42) имеет вид:

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12}x_{20}^* & a_{12}(1 - x_{10}^*) \\ a_{21}(1 - x_{20}^*) & a_{22} - a_{21}x_{10}^* \end{pmatrix} \tag{1.44}$$

Асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1.42) может быть определена в соответствии со следующей теоремой

**Теорема 1.13.** *[175, 176] Рассмотрим систему $x(n+1) = A(n)x(n) + f(n, x(n))$, где $f(n,0) \equiv 0, ||f(n,x)|| \leq \gamma||x||$. Если нулевое решение линейной системы первого приближения $x(n+1) = A(n)x(n)$ равномерно асимптотически устойчиво (а значит, экспоненциально устойчиво) и* *если $\gamma$ достаточно мало, то нулевое решение нелинейной системы также экспоненциально устойчиво.*

Непосредственными вычислениями находим условия равномерной асимптотической устойчивости системы (1.43): для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ и любых $n \geq N$

$$\left\| \prod_{j=n_0}^{n_0+N} \tilde{A}(j) \right\| \leq \varepsilon \tag{1.45}$$

Согласно теореме 1.13 это условие достаточно и для равномерной асимптотической устойчивости решения $\tilde{x_1} = \tilde{x_2} = 0$ системы (1.42).

Рассмотрим задачу об исследовании устойчивости решения (1.42) на основе функции Ляпунова вида :

$$\tilde{V}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \alpha \left| \tilde{x}_1 \right| + \beta \left| \tilde{x}_2 \right|, \quad \alpha, \beta > 0$$

$\tilde{V}(n+1, \tilde{x}_1, \tilde{x}_2) \leq (\alpha \left| a_{11} - a_{12} x_{20}^* \right| + \beta a_{21}(1 - x_{20}^*)) \left| \tilde{x}_1(n) \right| + (\alpha a_{12}(1 - x_{10}^*) + \beta \left| a_{22} - a_{21} x_{10}^* \right|) \left| \tilde{x}_2(n) \right| - (\alpha a_{12} + \beta a_{21}) \left| \tilde{x}_1(n) \right| \left| \tilde{x}_2(n) \right| \leq \mu_1(n) \tilde{V}(n) + \mu_2(n) \tilde{V}^2(n)$

если

$$\begin{aligned} &\alpha \left| a_{11} - a_{12} x_{20}^* \right| + \beta a_{21}(1 - x_{20}^*) \leq \alpha \mu_1(n) \\ &\alpha a_{12}(1 - x_{10}^*) + \beta \left| a_{22} - a_{21} x_{10}^* \right| \leq \beta \mu_1(n) \\ &4 \frac{\alpha a_{12} + \beta a_{21}}{\alpha \beta} \leq \mu_2(n) \end{aligned} \tag{1.46}$$

Соответственно, имеем следующее уравнение сравнения

$$w(n+1) = \mu_1(n) w(n) + \mu_2(n) w^2(n) \tag{1.47}$$

Глобальная

равномерная асимптотическая устойчивость нулевого решения этого уравнения достаточна для глобальной равномерной асимптотической устойчивости решения (1.42).

Решение $w = 0$ будет локально равномерно асимптотически устойчиво, если для $\mu_1(n)$ имеет место соотношение

$$\prod_{j=k_0}^{k_0+k} \mu_1(j) \le \varepsilon, \forall\, k \ge k_0 + N = N(\varepsilon) > 0, k_0 \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.48}$$

Таким образом, согласно теореме 1.12 первые два неравенства (1.46) и соотношение (1.48) достаточны для равномерной асимптотической устойчивости решения $\tilde{x} = 0$ системы (1.42).

Перепишем указанные условия из (1.46) в виде

$$|a_{11} - a_{12}x_{20}^*| + \frac{\beta}{\alpha}a_{21} - \frac{\beta}{\alpha}a_{21}x_{20}^* \le \mu_1(n)$$

$$|a_{22} - a_{21}x_{10}^*| + \frac{\alpha}{\beta}a_{12} - \frac{\alpha}{\beta}a_{12}x_{10}^* \le \mu_1(n)$$

Полагая $\dfrac{\beta}{\alpha} = \gamma$, находим, что эти условия будут выполнены, если функция $\mu_1(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} &\mu_1(n) \ge \mu_1^*(n) \equiv |a_{11} - a_{12}x_{20}^*| + \gamma a_{21}(1 - x_{20}^*) \\ &\mu_1(n) \ge \mu_1^{**}(n) \equiv |a_{22} - a_{21}x_{10}^*| + \frac{1}{\gamma}a_{12}(1 - x_{10}^*) \end{aligned} \tag{1.49}$$

Учитывая требования (1.48), получаем, что решение (1.42) будет локально равномерно асимптотически устойчиво, если найдется число $\gamma > 0$, такое что

$$\prod_{j=k_0}^{n} \max\{\mu_1^*(j), \mu_1^{**}(j)\} \le \varepsilon \quad \forall\, k > k_0 + N, N = N(\varepsilon), k_0 \in \mathbb{Z}^+$$

При постоянных значениях $a_{jk}$, полагая $\mu = 1$, отсюда имеем условия асимптотической устойчивости стационарного режима, совпадающие с соответствующим результатом из [175].

Рассмотрим дискретную динамическую модель третьего порядка, описывающую течение болезни в некоторой биологической системе. Даны три различные популяции, где инфицированные члены первой и второй популяций могут заражать друг друга, а инфицированные члены третьей популяции могут заражать членов всех трех популяций. Будем предполагать, что выздоровление возможно, но иммунитет отсутствует и популяции постоянны. Пусть $x_i-$ инфицированная часть популяции $P_i, i = 1,2,3$. Тогда $(1-x_i)-$ здоровая часть, которая воспринимает инфекцию.

При сделанных предположениях нелинейная дискретная модель течения болезни с учетом нестационарности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a_{12}(n)x_2(n) + a_{13}(n)x_3(n))(1 - x_1(n)) + a_{11}(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a_{21}(n)x_1(n) + a_{23}(n)x_3(n))(1 - x_2(n)) + a_{22}(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a_{34}(n)x_3(n) + a_{31}(n)x_1(n) + a_{32}(n)x_2(n))(1 - x_3(n)) + \\ \qquad\qquad + a_{33}(n)x_3(n), \end{cases} \tag{1.50}$$

где $\varepsilon \le a_{ij} \le 1-\varepsilon, i = 1,2,3, j = 1,2,3,4$. Введем также дополнительные условия, обеспечивающие корректность поставленной задачи, а именно $x_i(n) \in \Gamma = \{x : 0 \le x_i \le 1, i = 1,2,3\}, \forall n \ge n_0, x(n_0) \in \Gamma$

$$\begin{cases} a_{12}(n) + a_{13}(n) \le 1, \\ a_{21}(n) + a_{23}(n) \le 1, \\ a_{31}(n) + a_{32}(n) + a_{34}(n) \le 1, \end{cases} \tag{1.51}$$

Уравнения, предельные к (1.50), имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a^*_{12}(n)x_2(n) + a^*_{13}(n)x_3(n))(1 - x_1(n)) + a^*_{11}(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a^*_{21}(n)x_1(n) + a^*_{23}(n)x_3(n))(1 - x_2(n)) + a^*_{22}(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a^*_{34}(n)x_3(n) + a^*_{31}(n)x_1(n) + a^*_{32}(n)x_2(n))(1 - x_3(n)) + \\ \qquad\qquad + a^*_{33}(n)x_3(n), \end{cases} \tag{1.52}$$

где функции $a^*_{ij}(n)$являются предельными для $a_{ij}$ соответственно для некоторой последовательности $n_k \to +\infty$

$$a^*_{ij}(n) = \lim_{n_k \to +\infty} a_{ij}(n + n_k)$$

Введем вектор-функцию $V = (V_1 = x_1, V_2 = x_2, V_3 = x_3)$. Уравнения для $V_1$ и $V_2$ совпадают с (1.50) и (1.52), а система сравнения имеет вид

$$w(n+1) = A(n)w(n) - Q,$$

где в принятых обозначениях

$$A(n) = \|a_{jk}(n)\|$$

$$Q_1 = (a_{12}(n)x_2(n) + a_{13}(n)x_3(n))x_1(n)$$

$$Q_2 = (a_{21}(n)x_1(n) + a_{23}(n)x_3(n))x_2(n)$$

$$Q_3 = (a_{31}(n)x_1(n) + a_{32}(n)x_2(n) + a_{34}(n)x_3(n))x_3(n)$$

Функции $Q^*$, предельные к $Q$, являются аналогичными. Решение $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ системы $w(n+1) = A(n)w(n)$ равномерно устойчиво, если выполнено условие

$$\left\| \prod_{j=k_0}^{k} A(j) \right\| \le M = const, \forall\, k_0 \in \mathbb{Z}^+, k \ge k_0 \tag{1.53}$$

Множество $Q^* = 0$ не содержит решений (1.52), кроме $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. В соответствии с теоремой 1.13 условия (1.53) достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости положения $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (1.50).

Введем функцию Ляпунова $V = V(x_1, x_2, x_3) = fx_1 + gx_2 + hx_3$, где $f > 0, g > 0, h > 0$.

Аналогично случаю системы (1.31) условия

$$\begin{cases} fa_{11}(n) + ga_{21}(n) + ha_{31}(n) \le f\mu(n), \\ fa_{12}(n) + ga_{22}(n) + ha_{32}(n) \le g\mu(n), \\ fa_{13}(n) + ga_{23}(n) + ha_{33}(n) + ha_{34}(n) \le h\mu(n), \end{cases} \tag{1.54}$$

где функция $\mu(n)$ удовлетворяет соотношению (1.37), являются достаточными для равномерной устойчивости состояния $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

При этом, единственным квазиинвариантным относительно (1.52) подмножеством множества $\{Q_1^* = 0, Q_3^* = 0, Q_3^* = 0\}$ оказывается точка $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Поэтому существование постоянных $f, g, h$ и функции $\mu(n)$, удовлетворяющих условиям (1.54) и (1.37), достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости состояния $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (1.50).

Проведем анализ (1.54), введя параметры $u = \dfrac{f}{g} > 0$ и $v = \dfrac{h}{g} > 0$.

Система неравенств (1.54) преобразуется к виду

$$\begin{cases} \mu(n) > a_{11}(n), \\ \mu(n) > a_{22}(n), \\ \mu(n) > a_{33}(n) + a_{34}(n), \\ v \le \dfrac{\mu(n) - a_{11}(n)}{a_{31}(n)} u - \dfrac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)}, \\ v \le \dfrac{\mu(n) - a_{22}(n)}{a_{32}(n)} - \dfrac{a_{12}(n)}{a_{32}(n)} u, \\ v \le -\dfrac{a_{13}(n)}{a_{33}(n) + a_{34}(n) - \mu(n)} u - \dfrac{a_{23}(n)}{a_{33}(n) + a_{34}(n) - \mu(n)}, \end{cases} \tag{1.55}$$

На плоскости $(u, v)$ последние три неравенства определяют область, изображенную на рис. 1.1

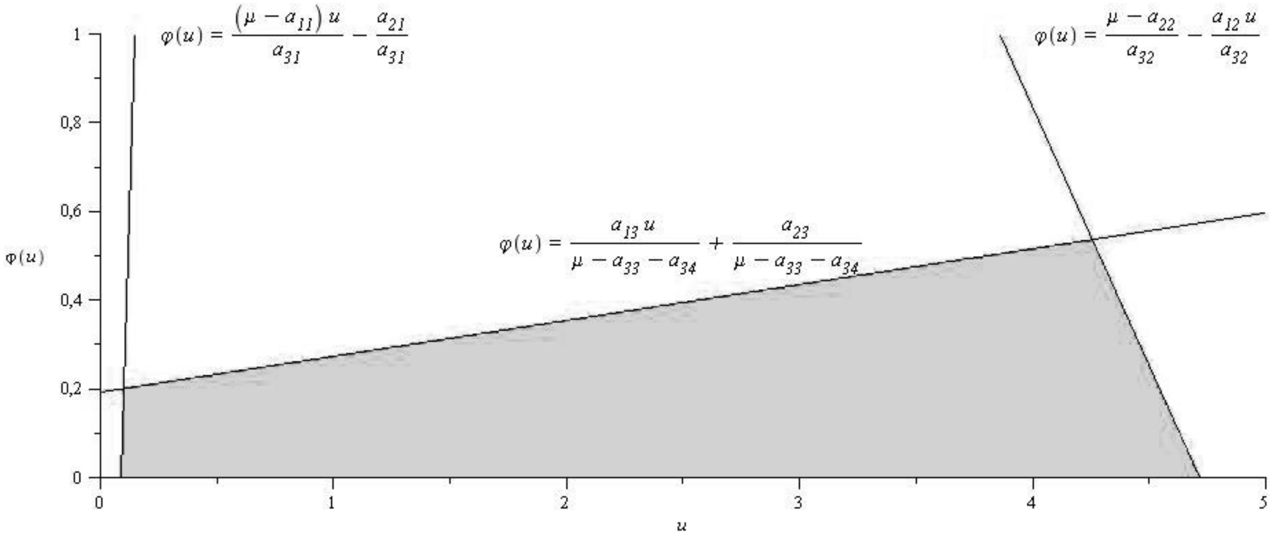


Рис. 1.1: Графическая интерпретация условий (1.55)

Укажем явно точки пересечения полуплоскостей.

1. Минимальное интересующее нас значение $u$ на полуплоскости, заданной четвертым соотношением из системы (1.55), может быть найдено из равенства

$$\frac{\mu(n) - a_{11}(n)}{a_{31}(n)} u = \frac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)},$$

2. Полуплоскости, заданные четвертым и шестым соотношениями из системы (1.55), имеют точку пересечения их границ при

$$u_1^*(n) = \frac{a_{23}a_{31} + a_{21}(\mu - a_{34} - a_{33})}{(\mu - a_{34} - a_{33})(\mu - a_{11}) - a_{13}a_{31}}$$

если выполнено условие

$$(\mu - a_{11})(\mu - a_{34} - a_{33}) > a_{13}a_{31} \tag{1.56}$$

3. Полуплоскости, заданные пятым и шестым соотношениями из системы (1.55), имеют точку пересечения их границ

$$u_2^*(n) = \frac{\mu^2 - (a_{34} + a_{33} + a_{22})\mu + a_{22}a_{34} - a_{23}a_{32} + a_{22}a_{33}}{a_{13}a_{32} + a_{12}(\mu - a_{34} - a_{32})} \tag{1.57}$$

4. Максимальное интересующее нас значение $u$ на полуплоскости, заданной пятым соотношением из системы (1.55), может быть найдено из равенства

$$\frac{\mu(n) - a_{22}(n)}{a_{32}(n)} = \frac{a_{12}(n)}{a_{32}(n)}u,$$

Интервал определения области будет содержать точку $(\alpha^*, \beta^*)$, $\alpha^* > 0, \beta^* > 0$, независимую от $n$ при условиях

$$0<\gamma^*\leq\frac{a_{21}(n)}{\mu(n)-a_{11}(n)}\leq\alpha^*\leq\frac{\mu(n)-a_{22}(n)}{a_{12}(n)}$$

$$\frac{(\mu(n)-a_{11}(n))\alpha^*}{a_{31}(n)}-\frac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)}\geq\beta^*$$

$$\frac{a_{13}(n)\alpha^*+a_{23}(n)}{\mu(n)-a_{33}(n)-a_{34}(n)}\geq\beta^*$$

$$\frac{\mu(n)-a_{22}(n)-a_{12}(n)\alpha^*}{a_{32}(n)}\geq\beta^*$$

выполняемых для всех $n\in\mathbb{Z}^+$.

Таким образом, для функции $\mu(n)$, кроме (1.48) имеем следующую совокупность оценок

$$\mu(n)\geq a_{22}(n)+\alpha^*a_{12}(n)$$

$$\mu(n)\geq a_{11}(n)+\frac{1}{\alpha^*}a_{21}(n)$$

$$\mu(n)\geq a_{11}(n)+\frac{1}{\alpha^*}(a_{21}(n)+\beta^*a_{31}(n))$$

$$\mu(n)\geq a_{22}(n)+a_{12}(n)\alpha^*+\beta^*a_{32}(n)$$

$$\mu(n)\leq a_{11}(n)+\frac{\gamma^*}{a_{21}(n)}$$

$$\mu(n)\leq a_{33}(n)+a_{34}(n)+\frac{1}{\beta^*}(a_{13}(n)\alpha^*+a_{23}(n))$$

Совместимость этих оценок выражается следующим образом:

Пусть существуют постоянные значения $\alpha^* > 0, \beta^* > 0, \gamma^* > 0$ такие, что для функции $\mu = \mu^*(n)$, определяемой равенство

$$\mu^*(n) = \max\left\{a_{11}(n) + \frac{1}{\alpha^*}(a_{21}(n) + \beta^* a_{31}(n)), a_{22}(n) + a_{12}(n)\alpha^* + \beta^* a_{32}(n)\right\}$$

одновременно с условием (1.37) выполняется соотношение

$$\mu^*(n) \leq \min\left\{a_{11}(n) + \frac{\gamma^*}{a_{21}(n)}, a_{33}(n) + a_{34}(n) + \frac{1}{\beta^*}(a_{13}(n)\alpha^* + a_{23}(n))\right\}$$

Тогда состояние $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ процесса (1.50) глобально равномерно асимптотически устойчиво.

# 2 МЕТОД ВЕКТОРНЫХ ФУНКЦИЙ ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧЕ О СТАБИЛИЗАЦИИ СИСТЕМ С ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

## 2.1 Теоремы о стабилизации

Рассмотрим дискретную систему управления, описываемую уравнениями

$$x(n+1) = X(n, x(n), u), \quad X(n, 0, 0) \equiv 0, \tag{2.1}$$

где $x$ — $m$-мерный вектор контролируемых переменных, $x \in \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m$ — $m$-мерное векторное пространство с нормой $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{1/2}$ (или $\|x\| = max(|x_1|, \ldots, |x_m|)$), $u$ — $p$-мерный вектор управления, $u \in \mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p$ — соответствующее пространство с нормой $\|u\| = (u_1^2 + \ldots + u_p^2)^{1/2}$ ( или $\|u\| = max(|u_1|, \ldots, |u_p|)$), $n \in \mathbb{Z}^+$, $X$ — вектор-функция,
$X : \mathbb{Z}^+ \times G_x \times G_u \to \mathbb{R}^m$, $G_x = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < H_1, 0 < H_1 \leq +\infty\}$, $G_u = \{u \in \mathbb{R}^p : \|u\| < H_2, 0 < H_2 \leq +\infty\}$ непрерывная по $(x, u)$ для каждого $n \in \mathbb{Z}^+$.

При $u = 0$ система (2.1) имеет положение равновесия $x = 0$.

Пусть $U$ есть класс управлений $u = u(n, x)$, $u : \mathbb{Z}^+ \times G_x \to G_u$, $u(n, 0) = 0$, непрерывных по $x$ для каждого $n \in \mathbb{Z}^+$.

**Определение 2.1.** *Задача о стабилизации состоит в нахождении управления $u \in U$, при котором положение равновесия $x = 0$ системы* (2.1) *было бы асимптотически устойчивым.*

С точки зрения управляемости более удобным является свойство равномерной асимптотической устойчивости, так как при этом достигается устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Поэтому в определении (2.1) будем полагать наличие указанного свойства в некоторой области притяжения $\Gamma = \{\|x\| \le \Delta > 0\}$, где $\Delta$ не зависит от выбора $n_0 \in \mathbb{Z}^+$.

По отношению к поставленной задаче могут быть использованы теоремы об асимптотической устойчивости для системы вида (1.9), как это сделано в работах [90,91,145]. Представим соответствующие формулировки результатов о стабилизации состояния $x = 0$ системы (2.1) на основе применения теорем из главы 1.

При использовании теорем с предельными уравнениями будем полагать, что функция $X(n, x, u)$ ограничена и непрерывна по $(x, u)$ на каждом компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ равномерно по $n \in \mathbb{Z}^+$, и аналогичные свойства по $x$ имеет класс $U$ управлений $u = u(n, x)$. В дальнейшем, такие ограничения будем называть условиями предкомпактности типа (1.11) и (1.12).

Пусть $u \in U$, $u = u(n, x)$ есть некоторое управление, $x = x[n] = x(n, n_0, x_0)$ — решение системы (2.1) при $u = u(n, x)$, $u = u[n] = u(n,\ x(n, n_0, x_0)) = u(n, x[n])$ — управление, порождающее решение $x = x[n]$,

$$x[n+1] \equiv X(n, x[n], u[n]) \qquad (2.2)$$

**Теорема 2.1.** *Предположим, что существуют вектор-функция Ляпунова $V = V(n, x)$ и управление $u \in U$, такие, что:*

1. *функция* $\bar{V}$ *является определённо-положительной;*

2. *справедливо равенство (1.24);*

3. *нулевое решение* $w = 0$ *системы сравнения (1.25) равномерно устойчиво;*

4. *на каждом ограниченном решении системы сравнения (1.24) выполнено условие (1.27);*

5. *для любой предельной совокупности* $(X^*, V^*, W^*, R^*)$ *и каждого ограниченного решения* $w = w^*(n) \neq 0$ *предельной системы сравнения (1.26) множество*

$$\{V^*(n,x) = w^*(n)\} \bigcap \{R^*(n,x,w^*(n)) = 0\}$$

*не содержит решений предельной системы (1.5).*

*Тогда управление* $u = u(n,x)$ *решает задачу о стабилизации состояния* $x = 0$ *системы* (2.1).

В исследовании задач о стабилизации управляемых процессов важное место отводится методике построения функции Ляпунова, в частности, исходя из известной такой функции для «укороченной системы».

Рассмотрим управляемую систему , описываемую уравнениями

$$x(n+1) = f(n, x(n), u(n)), \tag{2.3}$$

$$y(n) = h(n, x(n), u(n)), \tag{2.4}$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^p$ соответственно векторы состояния, входа и выхода системы; $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$—функции, непрерывные по $(x,u)$, удовлетворяющие также условиям предкомпактности (1.11) и (1.12) по этим переменным.

Будем полагать, что $f(n,0,0) \equiv 0, h(n,0,0) \equiv 0$, так, что при $u = 0$ система (2.3)-(2.4) имеет состояние равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Для системы (2.3)-(2.4) можно определить предельную систему

$$x(n+1) = f^*(n, x(n), u(n)), \tag{2.5}$$

$$y(n) = h^*(n, x(n), u(n)), \tag{2.6}$$

где $(f^*, h^*)$ - какая-либо предельная пара.

**Определение 2.2.** *Система* (2.3)-(2.4) *называется строго наблюдаемой в нулевом состоянии, если для любой предельной пары* $(f^*, h^*)$ *множество* $\{h^*(n,x,0) = 0\}$ *не содержит решений предельной системы* (2.5), *кроме* $x = 0$.

При исследовании задач стабилизации как для непрерывных, так и для дискретных систем, посредством функции Ляпунова, выделяют классы управляемых систем, для которых может быть использован некоторый алгоритм построения функции Ляпунова [35, 140, 177, 178, 183]. К числу таких систем относятся и так называемые пассивные системы [140].

**Определение 2.3.** *Систему* (2.3) *определим как пассивную, если существует некоторая скалярная функция* $V = V(n,x)$, *называемая* *функцией запаса, такая что*

$$V(n+1, f(n,x,u)) \leq W(n, V(n,x)) + y'u \tag{2.7}$$

*где* $W(n,w) \geq 0$, $W(n,0) \equiv 0$, *есть некоторая непрерывная, монотонная по* $w$ *функция, такая что нулевое решение соответствующего уравнения сравнения*

$$w(n+1) = W(n, w(n)) \tag{2.8}$$

*равномерно устойчиво.*

**Теорема 2.2.** *Предположим, что для системы* (2.3)-(2.4) *выполнены условия:*

1. *она является пассивной с определенно положительной, допускающей бесконечно малый высший предел функцией запаса* $V(n,x)$*;*
2. *система строго наблюдаема в нулевом состоянии.*

*Тогда управляющее воздействие* $u = u(n,y)$, *такое что* $y'u(n,y) \leq -\alpha(\|y\|)$, *где* $\alpha \in K$, *решает задачу о стабилизации состояния* $x = 0$ *системы* (2.3)-(2.4).

*Доказательство.* Используем функцию запаса $V(n,x)$ в качестве функции Ляпунова для замкнутой системы

$$x(n+1) = f(n,x,u(n,y)),$$

$$y = h(n,x,u(n,y))$$

В силу (2.7) имеем

$$V(n+1, x(n+1)) = V(n+1, f(n, x, u(n, y))) \le$$

$$\le W(n, V(n, x)) + y'u(n, y) \le W(n, V(n, x)) - \alpha(\|y\|)$$

Для функции $V(n, x)$ имеем уравнение сравнения (2.8). Множество $\{\alpha(\|y\|) = 0\} = \{y = 0\} = \{h^*(n, x, 0) = 0\}$ в силу строгой наблюдаемости не содержит решений системы (2.5), кроме $x = 0$. В соответствии с теоремой (1.9) имеем требуемый результат. □

Область применения теоремы 2.2 может быть расширена посредством преобразования непассивных систем в пассивные.

Рассмотрим специальный случай системы (2.5)

$$x(n+1) = f(n, x(n)) + B(n, x)u \tag{2.9}$$

Допустим, что существует строго положительно определенная квадратичная по $x$ форма $V(x)$

$$V(x) = x'Cx, \quad c_0 \|x\|^2 \le x'Cx, C - const$$

$$c_0 > 0 - const, \quad \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_m^2$$

такая что

$$f'(n, x)Cf(n, x) \le W(n, V(n, x)),$$

где $W$–функция, указанная в уравнении (2.8).

Положим

$$y = 2B'Cf + B'CBu \tag{2.10}$$

Тогда имеем

$$V(f(n,x)+B(n,x)u) = (f+Bu)'C(f+Bu) =$$
$$= f'Cf + 2f'CBu + u'B'CBu =$$
$$= f'(n,x)Cf(n,x) + y'u \le W(n, V(n,x)) + y'u$$

И таким образом, система (2.9) с выходом $y$, определяемым равенством (2.10), оказывается пассивной. К ней может быть применена теорема 2.2.

Как и для непрерывных систем, обратная связь может быть использована для обеспечения пассивности системы. А именно, если для системы (2.9) существуют замена обратной связи

$$u = u_0(n,x) + u_1(n,x)v$$

и функция выхода $h(n,x)$, такие, что система

$$x(n+1) = f(n,x(n)) + B(n,x(n))u_0(n,x) + B(n,x(n))u_1(n,x)v$$
$$y = h(n,x(n))$$

удовлетворяет условиям теоремы 2.2, тогда состояние $x = 0$ стабилизируемо управлением вида $v = v(n,y)$.

Класс пассифицируемых систем может быть расширен за счет систем, представляющих собой каскадное соединение двух подсистем, одна из которых является пассивной, а вторая характеризуется тем, что ее начало координат является точкой равновесия соответствующей разомкнутой системы, а именно системы вида

$$z(n+1) = g(n,z(n)) + B_2(n,y(n))y(n) \tag{2.11}$$

$$x(n+1) = f(n, x(n)) + B_1(n, x(n))u \tag{2.12}$$

$$y(n) = h(n, x(n)) + D(n, x)u \tag{2.13}$$

где функции $g, f, h$, $g(n, 0) \equiv 0$, $f(n, 0) \equiv 0$, $h(n, 0) \equiv 0$, $B_1(n, x)$, $B_2(n, x)$, $D(n, x)$ непрерывны по $x$ и удовлетворяют условиям предкомпактности (1.11) и (1.12).

Эту систему можно рассматривать как каскадное соединение ведущей системы (2.12) и (2.13) и ведомой системы (2.11).

Будем полагать, что ведущая система (2.12) - (2.13) пассивна, так что существует функция запаса $V = V_1(n, x)$, такая что

$$V_1(n+1, x(n+1)) \le \mu(n)V_1(n, x(n)) + y'u \tag{2.14}$$

а для системы $z(n+1) = g(n, z(n))$ имеется положительно определенная квадратичная форма

$$V_2(n, z) = z'Cz$$

такая что

$$V_2(g(n, z)) \le \mu(n)V_2(n, z)$$

где $\mu(n)$ есть функция, удовлетворяющая условию (1.35).

Используя в качестве функции запаса для всей системы (2.11) - (2.13) функцию $V(n, x, z) = V_1(n, x) + V_2(n, z)$, получаем

$$V(n+1,x(n+1),z(n+1)) = V_1(n+1,x(n+1)) + V_2(g(n,z)+$$

$$+B_2(n,y(n))y(n)) = \mu(n)V_1(n,x(n)) + y'(n)u + V_2(g(n,z(n))+$$

$$+2g'(n,z(n))CB_2(n,y)y(n) + y'(n)B_2'(n,y(n))CB_2(n,y(n))y(n) \le$$

$$\le \mu(V_1+V_2) + y'(u + 2B_2'Cg + B_2'CB_2y)$$

При замене обратной связи вида

$$u = -2B_2'(n,y)Cg(n,y) - B_2'(n,y)CB_2(n,y) + v$$

получаем для функции запаса $V$ всей системы (2.11) - (2.13) искомую оценку вида

$$V(n+1,x(n+1),z(n+1)) \le \mu(n)V(n,x(n),z(n)) + y'(n)v$$

Проведенные построения развивают результаты, представленные в монографии [140] для дискретных систем.

Рассмотрим систему второго порядка со скалярным управлением

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \nu(n)(-x_2(n) + x_1^2u(n)), \\ x_2(n+1) = \nu(n)(x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n)) \end{cases} \tag{2.15}$$

$$u(n) = \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^4}} \tag{2.16}$$

где функция $\nu(n)$ удовлетворяет условиям:

1. Для всякой нерасходящейся последовательности $n_k \to \infty$, $0 < n_{k+1} - n_k \le N_0 > 0$ выполнено $\varliminf\limits_{k\to\infty} \nu(n_k) = \nu_0 > 0$
2. функция $\mu(n) = \nu^2(n)$ удовлетворяет соотношению (1.35)

Рассматриваемая система интересна тем, что управление является неполным по одной переменной, оно вырождается при $x_1 = 0$. Система линейного приближения при $\nu(n) = 1$ имеет вид

$$\begin{cases} x_1(n+1) = -x_2(n) \\ x_2(n+1 = x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n) \end{cases}$$

Корни соответствующего характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i)$ таковы, что $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, так что при $\nu(n) \equiv 1$ имеет место критический случай. Покажем, что управление с неполным измерением (2.16) решает задачу о стабилизации состояния $x_1 = x_2 = 0$ системы (2.15).

Рассмотрим функцию Ляпунова
$V(n) = \frac{1}{2}\left(\left(x_1(n) - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2(n)\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2(n)\right)$

Находим

$$V(n+1) = \frac{\nu^2(n)}{2}\left(\left(-x_2(n) + \frac{x_1^3(n)}{\sqrt{1+x_1^4(n)}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n)\right)\right)^2 +\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2}\left(x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n)\right)^2\right) = \frac{\nu^2(n)}{2}\left(\left(\frac{x_1^3(n)}{\sqrt{1+x_1^4(n)}} - \frac{x_1(n)}{\sqrt{2}}\right)^2 +\right.$$

$$\left.\frac{1}{2}\left(x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n)\right)^2\right) = \frac{\nu^2(n)}{2}\left(\frac{x_1^6(n)}{1+x_1^4(n)} - \frac{\sqrt{2}x_1^4(n)}{\sqrt{1+x_1^4(n)}} + x_1^2(n) -\right.$$

$$\left.-\sqrt{2}x_2(n)x_1(n) + 2x_2^2(n)\right) = \frac{\nu^2(n)}{2}\times$$

$$\times\left(\frac{2x_1^6(n) - \sqrt{2}x_1^4(n)\left(x_2(n)x_1(n) + \sqrt{1+x_1^4(n)} + \sqrt{2}x_2^2(n)\right)}{1+x_1^4(n)} +\right.$$

$$+\frac{2x_2^2(n)+x_1^2(n)-\sqrt{2}x_2(n)x_1(n)}{1+x_1^4(n)}\Bigg)$$

$$V(n+1)-v^2V(n)=-\frac{1}{2}\frac{v^2x_1^4(-x_1^2+\sqrt{2}\sqrt{1+x_1^4})}{1+x_1^4}$$

Численное моделирование системы (2.15) с управлением (2.16) при

$$v(n)=\begin{cases}\dfrac{5}{6}, n=2k+1\\[2em] \dfrac{6}{5}, n=2k\end{cases}$$

представлено на рис. 2.1 и рис. 2.2.

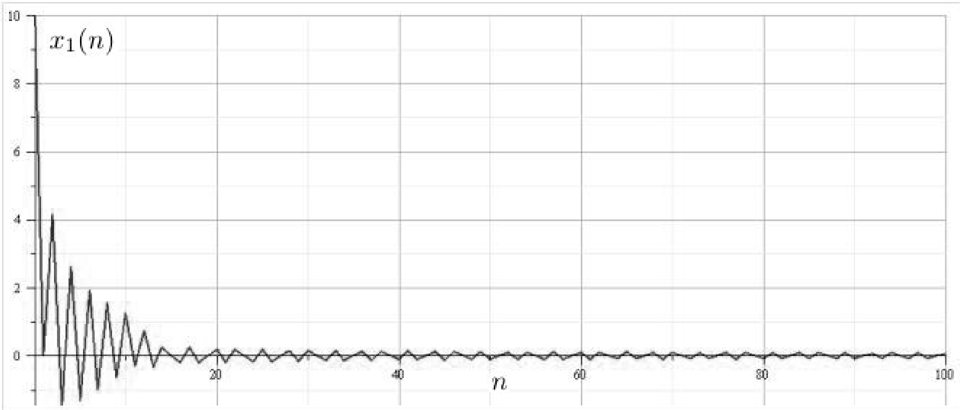


Рис. 2.1: Траектория $x_1(n)$ в примере (2.15) при заданном управлении (2.16) (начальные условия: $x_1=10, \quad x_2=10$, количество итераций N = 100)

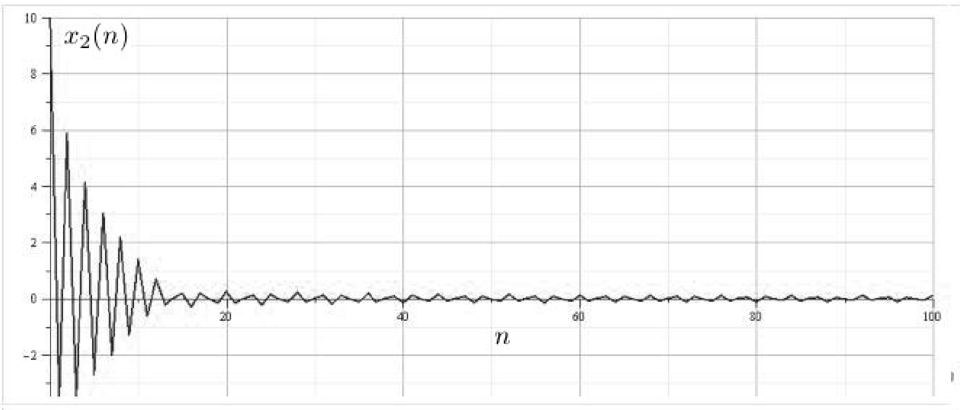


Рис. 2.2: Траектория $x_2(n)$ в примере (2.15) при заданном управлении (2.16) (начальные условия: $x_1=10, \quad x_2=10$, количество итераций N = 100)

## 2.2 Стабилизация положения равновесия модельного уравнения

Задача о стабилизации программного движения механической системы с одной степенью свободы приводится к уравнениям вида [98]

$$\ddot{x} = d(t, x, \dot{x})\dot{x} + f(t, x, \dot{x})x + u \tag{2.17}$$

где $d(t, x, \dot{x})$ и $f(t, x, \dot{x})$ есть некоторые функции, заданные в области $\mathbb{R}^+ \times G_1 \times G_2$, $G_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x| < H_1, 0 < H_1 \leq +\infty\}$, $G_2 = \{\dot{x} \in \mathbb{R} : |\dot{x}| < H_2, 0 < H_2 \leq +\infty\}$, $u$— управляющее воздействие.

Для исследования этой задачи и построения алгоритма её решения цифровым управлением вначале рассмотрим вспомогательную задачу о построении векторной функции Ляпунова в задаче об устойчивости решения $\dot{x} = x = 0$ уравнения

$$\ddot{x} = -\gamma(t, x, \dot{x})\dot{x} - q(t, x, \dot{x})x \tag{2.18}$$

Будем полагать, что коэффициенты $\gamma(t, x, \dot{x})$ и $q(t, x, \dot{x})$ ограничены при $(t, x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^+ \times G_{10} \times G_{20}$ так, что

$$0 < \gamma_0 \leq \gamma(t, x, \dot{x}) \leq \gamma_1, \quad 0 < q_0 \leq q(t, x, \dot{x}) \leq q_1 \tag{2.19}$$

где $G_{10} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq H_{10} < H_1\}$, $G_{20} = \{\dot{x} \in \mathbb{R} : |\dot{x}| \leq H_{20} < H_2\}$.

Введем вектор-функцию Ляпунова

$$V = (V_1, V_2)', \quad V_1 = |x|, V_2 = |\dot{x} + \mu x|\,, \quad \mu = const > 0$$

Для производных функций $V_1$ и $V_2$ имеем следующие оценки

$$\dot{V}_1 = sgn(x)\dot{x} = sgnx(\dot{x} + \mu x - \mu x) \le V_2 - \mu V_1$$

$$\dot{V}_2 = sgn(\dot{x} + \mu x)(\ddot{x} + \mu\dot{x}) = sgn(\dot{x} + \mu x)((\mu - \gamma)\dot{x} - qx) =$$

$$= sgn(\dot{x} + \mu x)((\mu - \gamma)(\dot{x} + \mu x) - (\mu - \gamma)\mu x - qx)) \le$$

$$\le (\mu - \gamma)V_2 + |\mu(\mu - \gamma) + q|\, V_1$$

Если учесть возможность изменения $\gamma$ и $q$ при всех ограничениях (2.19), тогда для производной $\dot{V}_2$ имеем следующую оценку, независимую от $(t, x, \dot{x})$

$$\dot{V}_2 \le -(\gamma_0 - \mu)V_2 + \nu V_1, \quad \mu < \gamma_0$$

$$\nu = max\{(|\mu(\mu - \gamma) + q|), t \in \mathbb{R}^+, (x, \dot{x}) \in G_{10} \times G_{20}\}$$

Таким образом, устойчивость положения $\dot{x} = x = 0$ уравнения (2.18) может быть найдена из условий устойчивости стационарной системы

$$\dot{u}_1 = -\mu u_1 + u_2, \quad \dot{u}_2 = \nu u_1 - (\gamma_0 - \mu)u_2 \tag{2.20}$$

Для нее имеем следующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\mu - \lambda & 1 \\ \nu & -(\gamma_0 - \mu) - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda^2 + \gamma_0\lambda + \mu(\gamma_0 - \mu) - \nu = 0$.

Отсюда получаем, что условия асимптотической устойчивости $\dot{x} = x = 0$, причем экспоненциальной, сводятся к неравенствам

$$\mu < \gamma_0, \quad \mu(\gamma_0 - \mu) - \nu > 0 \tag{2.21}$$

Последнее неравенство будет выполняться для всевозможных законов изменения $\gamma = \gamma(t, x, \dot{x})$ и $q = q(t, x, \dot{x})$, удовлетворяющих (2.19), если выполнены неравенства

$$-\mu(\gamma_0 - \mu) < \nu < \mu(\gamma_0 - \mu)$$

или

$$-\mu(\gamma_0 - \mu) < \mu(\mu - \gamma_1) + q_0 \leq \mu(\mu - \gamma_0) + q_1 < \mu(\gamma_0 - \mu)$$

Последние соотношения сводятся к системе неравенств

$$\begin{cases} (\gamma_1 - \gamma_0)\mu < q_0 \\ 2\mu^2 - 2\mu\gamma_0 + q_1 < 0 \end{cases}$$

Число $0 < \mu < \gamma_0$, удовлетворяющее этой системе неравенств, существует, если выполнены условия

$$\gamma_0^2 > 2q_1, \quad 2q_0 > (\gamma_1 - \gamma_0)(\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - 2q_1}) \tag{2.22}$$

Эти условия можно рассматривать как условия относительно выбора параметров $\gamma_0$ и $\gamma_1$ в соотношениях (2.19) при заданных $q_0$ и $q_1$.

Перейдем к задаче о стабилизации положения равновесия системы (2.17) при помощи ступенчатого импульсного управляющего воздействия с обратной связью вида

$$u = -k_1(t)\dot{x}(T_n) - k_2(t)x(T_n), \quad T = nT, n \in \mathbb{Z}^+, T > 0 \tag{2.23}$$

Таким образом, $T_n = nT$, $T$—период дискретизации.

Модель (2.17) принимает вид

$$\ddot{x} = d(t, x, \dot{x})\dot{x} + f(t, x, \dot{x})x - k_1(t)\dot{x}(T_n) - k_2(t)x(T_n) \tag{2.24}$$

где полагается, что коэффициенты усиления $k_1$ и $k_2$ непрерывны на каждом отрезке $[T_n, T_{n+1})$.

Модель

$$\ddot{x} = -\gamma(t,x,\dot{x})\dot{x} - q(t,x,\dot{x})x$$
$$\gamma(t,x,\dot{x}) = k_1(t) - d(t,x,\dot{x}), q(t,x,\dot{x}) = k_2(t) - f(t,x,\dot{x}) \qquad (2.25)$$

примем за базовую. В этой модели считаем, что измерения $\dot{x}(t)$ и $x(t)$ являются непрерывными, управляющее воздействие

$$u(t,x(t),\dot{x}(t)) = -k_1(t)\dot{x}(t) - k_2(t)x(t) \qquad (2.26)$$

Согласно (2.19) и (2.22) имеем следующие условия асимптотической устойчивости положения $\dot{x} = x = 0$

$$0 < \gamma_0 \leq k_1(t) - d(t,x,\dot{x}) \leq \gamma_1$$
$$0 < q_0 \leq k_2(t) - f(t,x,\dot{x}) \leq q_1$$

где постоянные $\gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$ удовлетворяют соотношению (2.22). Отсюда следует, что для базовой модели (2.21) управляющее воздействие типа (2.26) решает поставленную задачу, если коэффициенты усиления $k_1(t), k_2(t)$ удовлетворяют условиям

$$0 < \gamma_0 + d^*(t) \leq k_1(t) \leq \gamma_1 + d_*(t)$$
$$0 < q_0 + f^*(t) \leq k_2(t) \leq q_1 + f_*(t)$$
$$d^*(t) = max(d(t,x,\dot{x}), (x,\dot{x}) \in G_{10} \times G_{20})$$
$$d_*(t) = min(d(t,x,\dot{x}), (x,\dot{x}) \in G_{10} \times G_{20}) \qquad (2.27)$$
$$f^*(t) = max(f(t,x,\dot{x}), (x,\dot{x}) \in G_{10} \times G_{20})$$
$$f_*(t) = min(f(t,x,\dot{x}), (x,\dot{x}) \in G_{10} \times G_{20})$$

В представлении (2.24) с точностью до $T^2$ при $T_n \leq t < T_{n+1}$ можно разложить

$$\dot{x}(t) = \dot{x}(t) - \ddot{x}(t)(t - T_n), \quad x(t) = x(t) - \dot{x}(t)(t - T_n) \tag{2.28}$$

Тем самым, с точностью до $T^2$ модель (2.24) принимает вид базовой модели, на каждом отрезке $T_n \le t < T_{n+1}$

$$\ddot{x}(t) = -\gamma^{(1)}[t]\dot{x}(t) - q^{(1)}[t]x[t]$$

$$\gamma^{(1)}(T_n, t, x, \dot{x}) = \frac{k_1(t) - d(t, x, \dot{x}) - k_2(t)(t - T_n)}{1 - k_1(t)(t - T_n)}, \tag{2.29}$$

$$q^{(1)}(T_n, t, x, \dot{x}) = \frac{k_2(t) - f(t, x, \dot{x})}{1 - k_1(t)(t - T_n)}$$

Несмотря на то, что полученная модель представляет собой систему с разрывной правой частью, для нее применимы предыдущие рассуждения. И, соответственно, выводимы следующие достаточные условия стабилизируемости

$$0 < \gamma_0 \le \frac{k_1(t) - d(t, x, \dot{x}) - k_2(t)(t - T_n)}{1 - k_1(t)(t - T_n)} \le \gamma_1$$
$$0 < q_0 \le \frac{k_2(t) - f(t, x, \dot{x})}{1 - k_1(t)(t - T_n)} \le q_1$$

где, как ранее для $\gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$, полагается существование соотношений (2.22).

Отсюда для коэффициентов усиления $k_1(t), k_2(t)$ получим следующие условия

$$\begin{gathered} \gamma_0 + d^*(t) + k_2(t)T \le k_1(t) \le (\gamma_1 + d_*(t))/(1 + T\gamma_1) \\ q_0 + f^*(t) \le k_2(t) \le f_*(t) + (1 - k_1(t)T)q_1 \end{gathered} \tag{2.30}$$

Может быть применен следующий алгоритм построения управления (2.23)

1. Из условий (2.26) находятся допустимые коэффициенты усиления $k_1(t)$ и $k_2(t)$. Эти условия достаточно широкие для выбора $k_1(t)$ и $k_2(t)$. Они позволяют подобрать эти коэффициенты из дополнительных условий, например, с учетом оптимизации энергетических затрат.

2. Из условий (2.30) или их усилением находится возможный период дискретизации $T$.

Контроль за импульсным управлением возможен путем дискретизации уравнений (2.17) с воздействием (2.23).

Для этого сделаем замену

$$y_1 = x \quad y_2 = \dot{x}$$

В новых переменных уравнение (2.17) запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= y_2, \\ \dot{y_2} &= d(t, y_1, y_2)y_2 + f(t, y_1, y_2)y_1 + u \end{aligned} \tag{2.31}$$

Используя соотношения

$$\dot{y_1} = \frac{y_1(T_{n+1}) - y_1(T_n)}{T} = \frac{y_1[n+1] - y_1[n]}{T}$$

$$\dot{y_2} = \frac{y_2(T_{n+1}) - y_2(T_n)}{T} = \frac{y_2[n+1] - y_2[n]}{T}$$

получаем модель вида

$$\begin{cases} y_1[n+1] = y_1[n] + Ty_2[n] \\ y_2[n+1] = y_2[n] - T(\gamma_1[n]y_2[n] + q_1[n]y_1[n]) \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\gamma_1[n] = k_1(n) - d[n], \quad q_1[n] = k_2(n) - f[n]$$

$$d[n] = d(T_n, y_1[n], y_1[n]), \quad f[n] = f(T_n, y_1[n], y_1[n])$$

Устойчивость состояния $y_1 = y_2 = 0$ этой системы определим на основе векторной функции Ляпунова

$$V_1 = |y_1|, \quad V_2 = |y_2 + \mu y_1|, \quad \mu > 0$$

Находим, учитывая малость $T > 0$

$$V_1(n+1) = |y_1[n+1]| = |y_1[n] + Ty_2[n]| \leq |1 - \mu T| V_1[n] + TV_2[n]$$

$$V_2(n+1) = |y_2[n+1] + \mu y_1[n+1]| =$$

$$= |y_2[n] + \mu(y_1[n] + Ty_2[n]) - T(\gamma_1[n]y_2[n] + q_1[n]y_1[n])| \leq$$

$$\leq \nu_0 TV_1(n) + |1 + \mu T - \gamma_0 T| V_2(n)$$

$\nu_0 = max(|\mu(\mu - \gamma_1[n]) + q_1[n]|, n \in \mathbb{Z}^+)$, $\gamma_0 = min(\gamma_1[n], n \in \mathbb{Z}^+)$

Для вектор-функции $(V_1(n), V_2(n))$ получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} u_1(n+1) = (1 - \mu T)u_1(n) + Tu_2(n) \\ u_2(n+1) = \nu_0 Tu_1(n) + (1 + \mu T - \gamma_0 T)u_2(n) \end{cases} \tag{2.33}$$

Условия её устойчивости сводятся к исследованию характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 - \mu T - \eta & T \\ \nu_0 & 1 + \mu T - \gamma_0 T - \eta \end{vmatrix}$$

или

$$\eta^2 - (2 + \gamma_0 T)\eta + (1 + \mu(\gamma_0 - \mu)T^2 - v_0 T^2) = 0$$

Асимптотическая устойчивость будет иметь место, если корни этого уравнения удовлетворяют неравенству $|\eta| < 1$. Соответствующее число $\mu > 0$ должно удовлетворять неравенствам вида (2.21). Аналогично предыдущему, оно существует, если имеет место соотношение (2.22), независящее от $T$.

Таким образом, условия асимптотической устойчивости системы (2.29) достаточны и для асимптотической устойчивости системы (2.31). Соответственно, система (2.31) может служить для описания, анализа и дискретного моделирования нулевого состояния системы (2.17) с управляющим воздействием (2.23).

Обоснованность представления (2.17) с (2.23) в виде (2.29) с точностью до $T^2$ зависит от свойств функций $d(t,x,\dot{x})$, $f(t,x,\dot{x})$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$.

Рассмотрим этот вопрос подробно, полагая $d \equiv 0$, $f \equiv 0$, $k_1(t) = k_1^0(t) = const > 0$, $k_2(t) = k_2^0(t) = const > 0$.

В этом случае, в силу того, что $\ddot{x} = const$ $[T_n \le t < T)$ имеем

$$\dot{x}(T_n) = \dot{x}(t) - \ddot{x}(t)(t - T_n)$$
$$x(T_n) = x(t) - \dot{x}(t)(t - T_n) - \frac{1}{2}\ddot{x}(t)(t - T_n)^2$$

Соответственно, система (2.17) с управляющим воздействием (2.23), принимающим вид

$$u(t,x,\dot{x}) = -k_1^0\dot{x}(T_n) - k_2^0 x(T_n) \tag{2.34}$$

может быть стабилизируема, если коэффициенты усиления $k_1^0$ и $k_2^0$ согласно (2.30) удовлетворяют неравенствам

$$\gamma_0 + k_1^0 T \le k_1^0 \le \gamma_1/(1 + T\gamma_1)$$

$$q_0 \le k_2^0 \le (1 + k_1^0 T) q_1$$

Конкретный подбор коэффициентов $k_1^0$ и $k_2^0$ зависит от допустимых значений $T_n$ и выбора чисел $\gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$ второй совокупности соотношений (2.22).

## 2.3 Стабилизация движения голономной механической системы с циклическими координатами

Рассмотрим механическую систему с нестационарными, голономными и идеальными связями, положение которой определяется $n$ обобщенными координатами $q^T = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, и соответственно, кинетическая энергия системы представима в виде

$$T = T_2 + T_1 + T_0,$$

$$T_2(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} \dot{q}^T A(t, q) \dot{q}, \tag{2.35}$$

$$T_1(t, q, \dot{q}) = B^T(t, q) \dot{q}, \quad T_0(t, q) = C(t, q)$$

где $A(t, q)$ – матрица размерности $n \times n$ является положительно-определенной, $B(t, q)$ – матрица-столбец размерности $n \times 1$, $C(t, q)$ – скалярная функция. Предполагаем, что входящие в (2.35) функции переменных $(t, q)$ определены, непрерывно-дифференцируемы в области $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$, $\Gamma = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q\| < H, \ \ 0 < H \le +\infty\}$, где $\|q\| = \max(|q_1|, |q_2|, ..., |q_n|)$, т.е. являются достаточно гладкими функциями.

Примем, что движение системы под действием управляющих сил $U$ и других обобщенных сил (внешних, сил взаимодействия точек системы, трения и т.д.) $Q = Q(t, q, \dot{q})$ описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U$$

Подставив в уравнения движения представление для кинетической энергии (2.35), приведем их к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial q} = -\frac{\partial T_0}{\partial q} + G^T\dot{q} - \frac{\partial B}{\partial t} + Q + U, \tag{2.36}$$

где матрица $G$ определяется равенством

$$G(t, q) = \left(\frac{\partial B}{\partial q}\right)^T - \frac{\partial B}{\partial q} = -G^T$$

Предположим, что кинетическая энергия $T$ механической системы (2.36) не зависит явно от последних $(n-1)$ координат, соответствующие обобщенные силы отсутствуют $Q_2 \equiv 0$. Тогда первая координата является позиционной, остальные – циклическими. Введем обозначения

$$q = q_1, \quad z = (z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})^T$$

В этом случае кинетическая энергия (2.35) представима в виде

$$\begin{gathered} T(t, q, \dot{q}, \dot{z}) = \tfrac{1}{2}a(t, q)\dot{q}^2 + A_1(t, q)\dot{z}\dot{q} + \tfrac{1}{2}\dot{z}^T A(t, q)\dot{z} + \\ + b(t, q)\dot{q} + \dot{z}^T B_1(t, q) + T_0(t, q), \end{gathered} \tag{2.37}$$

где $a(t, q)$ и $b(t, q)$ — скалярные функции, матрица $A(t, q)$ размерности $(n-1)\times(n-1)$ является положительно-определенной, $A_1(t, q)$ — матрица-строка размерности $1 \times (n-1)$, $B_1(t, q)$ — матрица-столбец размерности

$(n-1)\times 1$.

Допустим, что сила $Q_1$ такова, что можно выделить потенциальную силу с энергией $\Pi = \Pi(t,q)$, $Q^1 = Q_0^1 - \dfrac{\partial \Pi}{\partial q}$. Положим $U = (U^1, U^2)$. Предполагаем, что функция $\Pi(t,q)$ непрерывно-дифференцируема в области $\mathbb{R}^+\times\Gamma_1$, $\Gamma_1 = \{q\in\mathbb{R} : |q| < H_1, \quad 0 < H_1 \leq +\infty\}$, функция $Q^1(t,q,\dot q,\dot z)$ определена и непрерывна в области $R^+\times\Gamma_1\times\Gamma_2$ $\Gamma_2 = \{\dot q\in\mathbb{R} : |\dot q| < H_2,\ 0 < H_2 \leq +\infty\}$

Запишем уравнения движения системы (2.36) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q_0^1 + U^1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot z}\right) = U^2 \tag{2.38}$$

Введем циклические импульсы

$$\frac{\partial T}{\partial \dot z} = A_1^T(t,q)\dot q + A(t,q)\dot z + B_1(t,q) = p, \tag{2.39}$$

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})^T$. Разрешая эти циклические соотношения относительно $\dot z$, получаем следующие выражения для $\dot z$ через $p$

$$\dot z = A^{-1}(t,q)\left(p - B_1(t,q) - A_1^T(t,q)\dot q\right) \tag{2.40}$$

Из условий, наложенных на функции, входящие в (2.39) и (2.40), находим, что $\dfrac{\partial T}{\partial \dot z}$ и $\dot z$ являются непрерывными функциями по $(t,q,\dot q,\dot z)\in\mathbb{R}^+\times\Gamma_1\times\Gamma_2\times\Gamma_3$ и $(t,q,\dot q,p)\in\mathbb{R}^+\times\Gamma_1\times\Gamma_2\times\Gamma_4$ соответственно ($\Gamma_4 = \{p\in\mathbb{R}^{n-1} : \|p\| < H_4,\ 0 < H_4 \leq +\infty\}$).

Используя соотношения (2.39) и (2.40), введем функцию Рауса в следующей форме

$$R = \left( T - \Pi - \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right)^T \dot{z} \right) \Bigg|_{\dot{z} = A^{-1}\left(p - B_1 - A_1^T\right)\dot{q}}$$

Представим ее в виде

$$R = R_2 + R_1 - W,$$

$$R_2(t, q, \dot{q}) = \frac{1}{2} r(t, q)\dot{q}^2, \quad r(t, q) = a(t, q) - A_1(t, q)A^{-1}(t, q)A_1^T(t, q),$$

$$R_1(t, q, \dot{q}, p) = e(t, q, p)\dot{q}, \quad e(t, q, p) = b(t, q) + A_1(t, q)A^{-1}(t, q)\left(p - B_1(t, q)\right),$$

$$W(t, q, p) = \Pi(t, q) - T_0(t, q) + \frac{1}{2}\left(p - B_1(t, q)\right)^T A^{-1}(t, q)\left(p - B_1(t, q)\right).$$

Уравнения движения (2.38) можно записать в виде уравнений Рауса

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial R_2}{\partial q} = -\frac{\partial W}{\partial q} - \frac{\partial e}{\partial t} + Q_0^1 + U^1, \quad \frac{dp}{dt} = U^2$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(r(t, q)\dot{q}\right) - \frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial q}(t, q)\dot{q}^2 = -\frac{\partial W}{\partial q}(t, q, p) - \frac{\partial e}{\partial t}(t, q, p) - \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)' U^2 + Q_0^1 + U^1,$$
$$\frac{dp}{dt} = U^2 \tag{2.41}$$

Допустим, управляющие силы $U^1 = U^2 = 0$, и при некоторых $q = q_0$ и $p = p_0$ действующая сила $Q^1(t, q, \dot{q})$ такова, что при всех $t \in \mathbb{R}^+$ имеют место равенства

$$\frac{\partial W}{\partial q}(t, q_0, p_0) + \frac{\partial e}{\partial t}(t, q_0, p_0) = Q_0^1(t, q_0, 0) \tag{2.42}$$

Тогда система, описываемая первым уравнением (2.41), имеет при $p = p_0$

положение относительного равновесия

$$\dot{q}(t) = 0, \quad q(t) = q_0, \tag{2.43}$$

которому соответствует согласно (2.40) обобщенное стационарное движение системы (2.38)

$$\begin{gathered} \dot{q}(t) = 0, \quad q(t) = q_0, \\ \dot{z} = A^{-1}(t, q_0)\left(p_0 - B_1(t, q_0)\right), \quad z(t) = z_0 + \int\limits_0^t \dot{z}(\tau) d\tau \end{gathered} \tag{2.44}$$

В отличие от стационарных движений [17, 71], в этом движении циклические скорости не являются постоянными, а изменяются вместе с циклическими координатами в общем случае по нелинейному закону.

Рассмотрим задачу о стабилизации этого движения. Уравнение (2.41) представим в виде

$$\begin{gathered} r(t,q)\ddot{q} - r_1(t,q,\dot{q})\dot{q} - r_2(t,q,p) = Q_0^1(t,q,\dot{q}) + U^1 - \left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)' U^2 \\ \frac{dp}{dt} = U^2 \end{gathered} \tag{2.45}$$

где введем обозначения

$$r_1(t,q,\dot{q}) = -(\frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial q}(t,q)\dot{q} + \frac{\partial r}{\partial t}(t,q))\dot{q}$$

$$r_2(t,q,p) = -(\frac{\partial W}{\partial q}(t,q,p) + \frac{\partial e}{\partial t}(t,q,p))$$

Предположим, что имеет место следующее представление

$$r_1(t,q,\dot{q})\dot{q} + r_2(t,q,p) + Q_0^1(t,q,p) = d(t,q,\dot{q})\dot{q} + f(t,q,p)q$$

Система (2.45) соответственно примет следующий вид

$$\begin{gathered} r(t,q)\ddot{q} = d(t,q,\dot{q})\dot{q} + f(t,q,p)q + U^1 \\ \frac{dp}{dt} = U^2 \end{gathered} \tag{2.46}$$

Если $U^2 = 0$ при $p = p_0$, тогда эта система имеет положение относительного равновесия

$$p = p_0,\ \dot{q} = 0,\ q = 0$$

которому соответствует обобщенное стационарное движение вида (2.44), а иначе

$$\begin{gathered} \dot{q} = 0, q = 0, \dot{z}(t) = A^{-1}(t,0)(p_0 - B(t,0)) \\ z(t) = z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot{z}(\tau)d\tau \end{gathered} \tag{2.47}$$

Положим

$$U^2(t,p) = -B(t)(p - p_0) \tag{2.48}$$

где $B(t)$ есть ограниченная по $t \in \mathbb{R}^+$, положительно-определенная матрица, и таким образом, имеет место следующее соотношение

$$\alpha_1\, ||p - p_0|\,|^2 \leq (p - p_0)' B(t)(p - p_0) \leq \alpha_2\, ||p - p_0|\,|^2$$

Для производной вспомогательной функции $V_3 = (p - p_0)^2$ в силу второй совокупности уравнений (2.46) получим

$$\dot{V}_3 = -2\alpha_1\, ||p - p_0|\,|^2 = -2\alpha_1 V_3$$

Отсюда следует равномерная асимптотическая и даже экспоненциальная устойчивость положения (2.44) по $p = p_0$. Стабилизация по всем переменным $(\dot{q}, q, p - p_0)$ сводится к задаче о стабилизации положения $\dot{q} = q = 0$, полученного из первого уравнения системы (2.46) при $p = p_0$

$$r(t,q)\ddot{q} = d(t,q,\dot{q})\dot{q} + f(t,q,p_0)q + U^1 \tag{2.49}$$

Для исследования этой задачи могут быть использованы результаты предыдущего параграфа, включая изучение условий устойчивости для модели уравнения.

Вначале рассмотрим задачу о стабилизации состояния $\dot{q} = q = 0$ системы (2.49) под действием управляющего воздействия $U_1$, непрерывному по $(\dot{q}, q)$

$$U^1 = -k_1(t)\dot{q} - k_2(t)q \tag{2.50}$$

Для массоинерционной характеристики $r(t,q)$ в общем случае выполнены соотношения

$$0 < r_0 \leq r(t,q) \leq r_1, \quad (t,q) \in \mathbb{R}^+ \times \Gamma_1$$

Поэтому уравнение (2.49) с (2.50) можно записать в виде

$$\ddot{q} = \frac{d(t,q,\dot{q}) - k_1(t)}{r(t,q)}\dot{q} + \frac{f(t,q,p_0) - k_2(t)}{r(t,q)}q \tag{2.51}$$

По отношению к этому уравнению может быть использована методика определения коэффициентов усиления $k_1(t)$ и $k_2(t)$, представленная в предыдущем параграфе.

Пусть $\Gamma_{10} = \{\|q\| \leq H_{10} < H_1\}$, $\Gamma_{20} = \{\|\dot{q}\| \leq H_{20} < H_2\}$ есть выбранные области.

Положим

$$r_*(t) = min(r(t,q), q \in \Gamma_{10}), r^*(t) = max(r(t,q), q \in \Gamma_{10})$$

$$d_*(t) = min(d(t,q,\dot{q}), (q,\dot{q}) \in \Gamma_{10} \times \Gamma_{20}), d^*(t) = max(d(t,q,\dot{q}), (q,\dot{q}) \in \Gamma_{10} \times \Gamma_{20})$$

$$f_*(t) = min(f(t,q,p_0), q \in \Gamma_{10}), f^*(t) = max(f(t,q,p_0), q \in \Gamma_{10})$$

$$r_0 = min(r_*(t), t \in \mathbb{R}^+), r_1 = max(r^*(t), t \in \mathbb{R}^+)$$

$$d_0 = min(d_*(t), t \in \mathbb{R}^+), d_1 = max(d^*(t), t \in \mathbb{R}^+)$$

$$f_0 = min(f_*(t), t \in \mathbb{R}^+), f_1 = max(f^*(t), t \in \mathbb{R}^+)$$

$$(2.52)$$

Допустим, что существуют постоянные $\gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$, удовлетворяющие следующим соотношениям

$$\gamma_0 \le \gamma_1, \quad q_0 \le q_1$$

$$r_1\gamma_0 + d_1 \le r_0\gamma_1 + d_0$$

$$r_1 q_0 + f_1 \le r_0 q_1 + f_0$$

$$\gamma_0^2 > 2q_1$$

$$2q_0 > (\gamma_1 - \gamma_0)(\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - 2q_1})$$

Выберем коэффициенты усиления $k_1(t)$ и $k_2(t)$, исходя из неравенств

$$\begin{gathered} r^*(t)(\gamma_0 + d^*(t)) \le k_1(t) \le r_*(t)(\gamma_1 + d_*(t)) \\ r^*(t)(q_0 + f^*(t)) \le k_2(t) \le r_*(t)(q_1 + f_*(t)) \end{gathered} \qquad (2.53)$$

Тогда для уравнения (2.51) будут выполнены все условия вида (2.19).

Соответственно результатам предыдущего параграфа и теоремы 1.10 заключаем, что при условии (2.52) управляющее воздействие (2.48) и (2.50) решают задачу о стабилизации движения (2.47).

Рассмотрим задачу о стабилизации этого движения управляющим воздействием импульсного типа

$$\begin{aligned} U^2 &= -B(t)(r(T_s) - p_0) \\ U^1 &= -k_1(t)\dot{q}(T_s) - k_2(t)q(T_s) \end{aligned} \tag{2.54}$$

где $T_s = sT$, $s \in \mathbb{Z}^+$, $T > 0$.

С точностью до $T^2$ введем представления при $T \in [T_s, T_{s+i})$

$$p(T_s) = p(t) - \dot{p}(t)(t - T_s),$$

$$q(T_s) = q(t) - \dot{q}(t)(t - T_s),$$

$$\dot{q}(T_s) = \dot{q}(t) - \ddot{q}(t)(t - T_s),$$

Примем в качестве модели управляемого движения системы (2.36) модель (2.46) с управляющим воздействием (2.54), получим следующие уравнения

$$\frac{dp}{dt} = -(E + B(t)(t - T_n))^{-1}B(t)(p - p_0) \tag{2.55}$$

$$\ddot{q} = \frac{d(t, q, \dot{q}) - k_1(t) + k_2(t)(t - T_s)}{z(t, q) - k_1(t)(t - T_s)}\dot{q} + \frac{f(t, q, p_0) - k_2(t)}{z(t, q) - k_1(t)(t - T_s)}q \tag{2.56}$$

для каждого отрезка $[T_s, T_{s+1})$.

В силу условия (2.48) относительно $B(t)$ для достаточно малых $T$ матрица $(E + B(t)(t - T_n))^{-1}$ также является ограниченной, положительно определенной, так что положение $p = p_0$ системы (2.55) является экспоненциально устойчивым. И таким образом, можно рассматривать устойчивость положения равновесия $\dot{q} = q = 0$ уравнения (2.56) при $p = p_0$.

Исходя из предыдущего параграфа имеем следующий результат.

Пусть для $k_1(t)$ имеет место ограниченность $k_{10} \le k_1(t) \le k_{11}$, $T, \gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$ есть постоянные, удовлетворяющие условиям

$$\gamma_0 \le \gamma_1, \quad q_0 \le q_1, \quad \gamma_0^2 > 2q_1$$
$$2q_0 > (\gamma_1 - \gamma_0)(\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - 2q_1})$$
$$r_1\gamma_0 + k_{11}T + d_1 \le \frac{(r_0\gamma_1 + d_0)}{(1+\gamma_1)}$$
$$r_1 q_0 + f_1 \le r_0 q_1(1 - k_{10}T) + f_0$$

Положим, что коэффициенты $k_1(t)$ и $k_2(t)$ удовлетворяют неравенствам

$$\begin{aligned} r^*(t)\gamma_0 + d^*(t) + k_2(t) \le k_1(t) \le \frac{r_*(t)\gamma_1 + d_*(t)}{1+\gamma_1} \\ r^*(t)q_0 + f^*(t) \le k_2(t) \le f_*(t)(r_*(t) - k_1(t)T) \end{aligned} \tag{2.57}$$

Тогда управляющее воздействие (2.54) решает задачу стабилизации движений (2.47).

Заметим, что коэффициенты усиления $k_1(t)$ и $k_2(t)$ могут быть подобраны, исходя из условий (2.57) в виде кусочно-постоянных функций или постоянных значений.

На этом основании можно провести дискретизацию уравнений (2.46) с управляющими воздействиями (2.54).

Для удобства введем вспомогательные переменные $y_1 = q, y_2 = \dot{q}$.

В новых переменных уравнения (2.46) будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\frac{dp}{dt} = U^2 \\ &\frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ &\frac{dy_2}{dt} = \frac{d(t,q,\dot{q})\dot{q} + f(t,q,p)q + U^1}{r(t,q)} \end{aligned} \tag{2.58}$$

Соответственно (2.48) и (2.50) введем дискретное управляющее воздействие

$$U^2 = -B(T_n)(p(T_n) - p_0), \quad T_n = nT$$
$$U^1 = -k_1(T_n)y_2(T_n) - k_2(T_n)y_1(T_n) \tag{2.59}$$

Используя соотношения

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p(T_{n+1}) - p(T_n)}{T} = \frac{p[n+1] - p[n]}{T}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{y_1(T_{n+1}) - y_1(T_n)}{T} = \frac{y_1[n+1] - y_1[n]}{T}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{y_2(T_{n+1}) - y_2(T_n)}{T} = \frac{y_2[n+1] - y_2[n]}{T}$$

из (2.58) и (2.59) получим дискретную модель

$$p[n+1] = p[n] - B[n](p[n] - p_0)T$$
$$B[n] = B(T_n) \tag{2.60}$$

$$\begin{cases} y_1[n+1] = y_1[n] + y_2[n]T \\ y_2[n+1] = y_2[n] + ((d[n] - k_2[n])y_2[n] + (f[n] - k_1[n])y_1[n])\frac{T}{r[n]} \end{cases} \tag{2.61}$$

$$d[n] = d(T_n, y_1(T_n), y_2(T_n)), \quad f[n] = f(T_n, y_1(T_n), p(T_n))$$
$$k_1[n] = k_1(T_n), \quad k_2[n] = k_2(T_n), \quad r[n] = r(T_n, y_1(T_n))$$

Для исследования устойчивости положения $p = p_0$ системы (2.60) применим функцию Ляпунова $V(n) = \dfrac{1}{2}(p(n) - p_0)^2 = \dfrac{1}{2}(p(n) - p_0)'(p(n) - p_0)$.

С учетом определенной положительной матрицы $B[n]$ находим

$V(n+1) = \dfrac{1}{2}(p(n+1) - p_0)^2 = \dfrac{1}{2}(p(n) - p_0)'(E - B[n]T)^2(p(n) - p_0) \leq$

$\leq (1 - \lambda_{min}(B[n])T)^2 V(n+1)$,

где $\lambda_{min}(B[n]) > 0$ есть наименьшее собственное значение матрицы $B[n]$,

$\lambda_{min}(B[n]) \geq \lambda_{min}(B(t)) \geq \lambda_0 > 0.$

Согласно теореме 1.9 положение $p = p_0$ системы (2.60) является равномерно асимптотически устойчивым. Соответственно теореме 1.11 для системы (2.61) может рассматриваться устойчивость при $p = p_0$ , и значит, когда

$$f[n] = d(T_n, y_1(T_n), p_0)$$

Находим, что из условий равномерной асимптотической устойчивости положения $\dot{q} = q = 0$ уравнения (2.49) следует выполнение аналогичных условий для системы (2.61).

Таким образом, система (2.60) - (2.61) может быть использована для анализа процесса сходимости возмущенных движений (2.48) под действием управляющих воздействий (2.54).

# 3 МОДЕЛИРОВАНИЕ УПРАВЛЯЕМЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ЦИФРОВЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

## 3.1 Стабилизация программных движений голономной механической системы

Решается задача о стабилизации программного движения голономной механической системы. Предложен подход в построении управления, учитывающий нелинейность системы и нестационарность программного движения. С помощью построения вектор-функции Ляпунова и системы сравнения получены достаточные условия стабилизации заданного движения.

Рассматривается управляемая механическая система, положение которой определяется $n$ обобщенными координатами $q_1$, $q_2$, $\ldots$, $q_n$, а движение описывается уравнениями Лагранжа [98]

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U, \tag{3.1}$$

где $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)' \in \mathbb{R}^n$ есть вектор координат, $T = 1/2\dot{q}'A(q)\dot{q}$ — кинетическая энергия системы, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является положительно-определенной и непрерывно дифференцируемой матрицей, $Q = Q(t, q, \dot{q})$ — вектор обобщенных неуправляемых сил, $U \in \mathbb{R}^n$ — вектор управления. Здесь и далее $(\cdot)'$ — операция транспонирования, $\|q\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2}$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, величины, входящие в (3.1), определяются и непрерывны, для простоты, по всем $(t, q, \dot{q}) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Уравнения (3.1) можно представить в виде

$$A(q)\ddot{q} = \{\dot{q}'C(q)\dot{q}\} + Q + U, \tag{3.2}$$

где $\{\dot{q}'C(q)\dot{q}\}$ — набор $n$ квадратичных форм с совокупностью $n$ симметричных матриц $C = (C_{(1)}, C_{(2)}, \ldots, C_{(n)})'$,

$$C_{(k)} = (c_{ij(k)}), \qquad c_{ij(k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} - \frac{\partial a_{jk}}{\partial q_i} + \frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j}\right)$$

Пусть $X = \{(q^{(0)}(t)) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^n\}$ есть заданное множество программных движений, ограниченных областью

$$G_0 = \{(q, \dot{q}, \ddot{q}) \in \mathbb{R}^{3n} : \|q\| \le g_0 = const > 0, \quad \|\dot{q}\| \le g_1 = const > 0,$$
$$\|\ddot{q}\| \le g_2 = const > 0\}$$

Пусть $(q^{(0)}, \dot{q}^{(0)}) \in X$ есть движение, осуществляемое посредством программного управления $U = U^{(0)}(t)$, так что выполнено тождество

$$A^{(0)}(t)\ddot{q}^{(0)}(t) - (\{(\dot{q}^{(0)}(t))'C^{(0)}(t)\dot{q}^{(0)}(t)\} + Q^{(0)}(t) + U^{(0)}(t)) \equiv 0, \tag{3.3}$$

где $A^{(0)}(t) = A(q^{(0)}(t))$, $C^{(0)}(t) = C(q^{(0)}(t))$, $Q^{(0)}(t) = Q(t, q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$.

Введем: возмущение $x = q - q^{(0)}(t)$, управляющее воздействие $U^{(1)} = U - U^{(0)}(t)$. Согласно (3.2), уравнения возмущенного движения могут быть записаны в виде

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = \{\dot{x}'C^{(1)}(t, x)\dot{x}\} + Q^{(1)}(t, x) + Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) + U^{(1)}, \tag{3.4}$$

где $A^{(1)}(t, x) = A(q^{(0)}(t) + x)$, $C^{(1)}(t, x) = C(q^{(0)}(t) + x)$, $Q^{(1)}(t, x) = (A^{(0)}(t) -$

$A^{(1)}(t,x))\ddot{q}^{(0)}(t)+\{(\dot{q}^{(0)}(t))'(C^{(1)}(t,x)-C^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t)\}+Q(t,q^{(0)}(t)+x,\dot{q}^{(0)}(t))-Q(t,q^{(0)}(t),\dot{q}^{(0)}(t))$, $Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = Q(t,q^{(0)}(t)+x,\dot{q}^{(0)}(t)+\dot{x})-Q(t,q^{(0)}(t)+x,\dot{q}^{(0)}(t)) + \underbrace{\{(\dot{q}^{(0)}(t))'C^{(1)}(t,x)\dot{x}\}+\{\dot{x}'C^{(1)}(t,x)\dot{q}^{(0)}(t)\}}_{2\{(\dot{q}^{0}(t))'C^{(1)}(t,x)\dot{x}\}}$

Заметив, что $Q^{(1)}(t,0)\equiv 0$, $Q^{(2)}(t,x,0)\equiv 0$, допустим, что в соответствии с наложенными связями и действующими силами имеют место следующие представления соответствующих (3.4)

$$Q^{(1)}(t,x)=F(t,x)\dot{x}, \qquad \{\dot{x}'C^{(1)}(t,x)\dot{x}\}+Q^{(2)}(t,x,\dot{x})=D(t,x,\dot{x})\dot{x}, \tag{3.5}$$

Следуя [19], рассмотрим задачу о стабилизации невозмущенного движения $x=\dot{x}=0$ системы (3.4) управляющим воздействием вида

$$U^{(1)}(t,x,\dot{x})=-B(t)\dot{x}-P(t)x, \tag{3.6}$$

где $B,P\in\mathbb{R}^{n\times n}$ есть матрицы коэффициентов усиления в структуре обратной связи, подлежащие определению.

Уравнения движения запишутся в виде

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x}=F(t,x)x+D(t,x,\dot{x})\dot{x}-B(t)\dot{x}-P(t)x \tag{3.7}$$

Подбор матрицы коэффициентов усиления $B$ и $P$ проведем на основе векторной функции Ляпунова

$$V=(V_1,V_2)', \qquad V_1=\|x\|, \qquad V_2=\sqrt{(\dot{x}+Sx)'A^{(1)}(t,x)(\dot{x}+Sx)} \tag{3.8}$$

где матрица $S\in\mathbb{R}^{n\times n}$, $S=const$, подлежит определению, при этом исходные уравнения для нее примем

$$detS \neq 0 \quad x'(S'+S)x \geq 2s_0\|x\|^2, \quad s_0 = const > 0 \tag{3.9}$$

Пусть в области $\mathbb{R}^+ \times G_1$, $G_1 = \{(x,\dot{x}) \in \mathbb{R}^{2n} : \|x\| \leq \varepsilon, \|\dot{x}\| \leq \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ имеют место следующие соотношения

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^2\|\dot{x}\|^2 \leq \dot{x}'A^{(1)}\dot{x} \leq \lambda_2^2\|\dot{x}\|^2 \\
&(\dot{x}+Sx)'\left(\frac{1}{2}\frac{dA^{(1)}}{dt} + D - B + A^{(1)}S\right)(\dot{x}+Sx) \leq -\mu_1\|\dot{x}+Sx\|^2 \\
&(\dot{x}+Sx)'(F-P-(D-B+A^{(1)}S)S)x \leq \mu_2\|\dot{x}+Sx\|\|x\|
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2$ – положительные постоянные, удовлетворяющие неравенству

$$s_0\lambda_1^2\mu_1 - \mu_2\lambda_2^2 > 0 \tag{3.11}$$

При этих соотношениях вектор-функция $V$ является определенно положительной, допускающей бесконечно малый высший пределе, для её производных в силу (3.4) имеют место следующие оценки

$$\begin{gathered}
2V_1\dot{V}_1 = 2x'\dot{x} = 2x'(\dot{x}+Sx-Sx) = -x'Sx + 2x'(\dot{x}+Sx) \leq \\
\leq -2s_0\|x\|^2 + 2\|x\|\|\dot{x}+Sx\| \leq -2s_0V_1^2 + \frac{2}{\lambda_1}V_1V_2
\end{gathered}$$

$$\begin{aligned}
&2V_2\dot{V}_2 = (\dot{x}+Sx)'\frac{dA^{(1)}}{dt}(\dot{x}+Sx) + 2(\dot{x}+Sx)'A^{(1)}(\ddot{x}+S\dot{x}) = \\
&= (\dot{x}+Sx)'\frac{dA^{(1)}}{dt}(\dot{x}+Sx) + 2(\dot{x}+Sx)'((D-B+A^{(1)}S)\dot{x} + (F-P)x) = \\
&= (\dot{x}+Sx)'\left(\frac{dA^{(1)}}{dt} + 2(D-B+A^{(1)}S)\right)(\dot{x}+Sx) + \\
&+2(\dot{x}+Sx)'(F-P-(D-B+A^{(1)}S)S)x \leq \\
&\leq -2\mu_1\|\dot{x}+Sx\|^2 + 2\mu_2\|\dot{x}+Sx\|\|x\| \leq -2\frac{\mu_1}{\lambda_2^2}V_2^2 + 2\mu_2\frac{1}{\lambda_1}V_2V_1
\end{aligned}$$

Таким образом, при наличии соотношений (3.9) для вектор-функции $V$

имеем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -s_0 u_1 + \dfrac{1}{\lambda_1} u_2 \\ \dot{u}_2 = \dfrac{\mu_2}{\lambda_1} u_1 - \dfrac{\mu_1}{\lambda_2^2} u_2 \end{cases} \tag{3.12}$$

Нулевое движение системы (3.12) в силу неравенства (3.11) является равномерно асимптотически устойчивым, и даже экспоненциально. Следовательно при выполнении условий (3.9) - (3.11) управляющее воздействие (3.6) решает задачу о стабилизации программного движения $(q^0(t), \dot{q}^0(t))$.

При этом заметим, что форма управления (3.6) и условий (3.9) - (3.11) обеспечивает робастный характер управления.

Перейдем к задаче о стабилизации движения $\dot{x} = x = 0$ системы (3.4) управляющим воздействием дискретного типа

$$\begin{aligned} &U^1[t, x, \dot{x}] = -B(t)\dot{x}(t - T_n) - P(t)x(t - T_n), \\ &\dot{x}(t - T_n) \equiv \dot{x}(T_n), \quad x(t - T_n) \equiv x(Tn) \quad T_n \le t \le T_{n+1} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Уравнения движения (3.4) с учетом соотношений (3.5) будут иметь следующий вид

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = F(t, x)\ddot{x} + D(t, x, \dot{x})\dot{x} - B(t)\dot{x}(t - T_n) - P(t)x(t - T_n) \tag{3.14}$$

С точностью до $T^2$ при $t \in [T_n, T_{n+1})$ введем представления

$$\dot{x}(t - T_n) = \dot{x}(t) - \ddot{x}(t)(t - T_n), x(t - T_n) = x(t) - \dot{x}(t)(t - T_n)$$

В первом представлении заменим $\ddot{x}$ значением

$$\ddot{x} = A^{-1}(t,x)\left(F(t,x)x + D(t,x,\dot{x})\dot{x} - B(t)\dot{x} - P(t)x\right)\Bigg|_{\substack{x = x(t)\\ \dot{x} = \dot{x}(t)}}$$

С точностью до $T^2$ на каждом интервале $[T_n, T_{n+1})$ движения системы могут быть описаны уравнениями

$$\begin{gathered} A^{(1)}(t,x)\ddot{x} = (D(t,x,\dot{x}) + (t-T_n)B(t)A^{-1}(t,x)D(t,x,\dot{x}) - B(t)- \\ -(t-T_n)B(t)A^{-1}(t,x)B(t) + (t-T_n)P(t))\dot{x}+ \\ (F-P(t)) + (t-T_n)B(t)A^{-1}(t,x)(F-P(t))x \end{gathered} \tag{3.15}$$

Полученные уравнения имеют структуру, аналогичную структуре системы уравнений (3.6). Устойчивость её положения $\dot{x} = x = 0$ может быть найдена посредством функции (3.7) в виде соотношений (3.6) и (3.9).

При этом для достаточно малых $T$ матрицы, входящие в (3.15) достаточно мало отличаются от матриц, входящих в (3.6). Отсюда возникает следующий подход к построению управляющего воздействия (3.13)

В качестве начальной модельной системы берется система (3.6). Для нее при соответствующем подборе матрицы $S$ находятся, согласно условиям (3.9) , коэффициенты усиления управляющего воздействия (3.5). Усилением этих условий вида $\mu_1 = \mu_1' + \varepsilon$, $\mu_2 = \mu_2' + \varepsilon$ достигается выполнение условий асимптотической устойчивости положения $\dot{x} = x = 0$ системы (3.15) при малых $T > 0$.

Рассмотрим задачу об анализе процесса стабилизации заданного программного движения при помощи импульсного управляющего воздействия. Для этого проведем замену

$$y = x, z = \dot{x}$$

В новых переменных система (3.14) запишется в виде

$$\dot{y} = z, \quad \dot{z} = \left(A^{(1)}\right)^{-1} \left(F\dot{z} + Dz - B\dot{z}(t - T_n) - Px(t - T_n)\right)$$

Полагая

$$\dot{y} = \frac{y(T_{n+1}) - y(T_n)}{T} = \frac{y[n+1] - y[n]}{T}$$
$$\dot{z} = \frac{z(T_{n+1}) - z(T_n)}{T} = \frac{z[n+1] - z[n]}{T}$$

получим дискретную модель вида

$$\begin{aligned} &y[n+1] = y[n] + Tz[n] \\ &z[n+1] = z[n] + (A^{(1)}[n])^{-1}((D[n] - B[n])z[n] + (F[n] - P[n])y[n])T \end{aligned} \tag{3.16}$$

Исследование устойчивости положения равновесия $y = z = 0$ этой системы можно провести на основе векторной функции $V = V(n)$, аналогичной функции (3.8) для системы (3.7)

$$V = (V_1, V_2)', \qquad V_1(n) = \|y[n]\|,$$
$$V_2(n) = \sqrt{(z[n] + Sy[n])'A^{(1)}[n](z[n] + Sy[n])}$$

где матрица $S = const$, подлежащая определению, удовлетворяет условию (3.9).

Находим с точностью до $T^2$

$$\begin{aligned} &V_1^2(n+1) = \|y[n+1]\|^2 = (y[n] + Tz[n])'(y[n] + Tz[n]) = \\ &= ((E - TS)y[n] + T(z[n] + Sy[n])')((E - TS)y[n] + T(z[n] + Sy[n])) \approx \\ &\approx y'[n](E - T(S + S'))y[n] + 2Ty'[n](z[n] + Sy[n]) \leq \\ &\leq (1 - 2s_0 T)\|y[n]\|^2 + 2T\|y[n]\|\|z[n] + Sy[n]\| \leq \\ &\leq (1 - 2s_0 T)V_1^2(n) + 2T\frac{1}{\lambda_1}V_1(n)V_2(n) \end{aligned}$$

Также имеем

$$V_2^2(n+1) = (z[n+1] + Sy[n+1])' A^{(1)}[n+1](z[n+1] + Sy[n+1]) =$$
$$= (z[n+1] + Sy[n+1])'(A^{(1)}[n+1] - A^{(1)}[n])(z[n+1] + Sy[n+1]) +$$
$$+(z[n+1] + Sy[n+1])' A^{(1)}[n](z[n+1] + Sy[n+1])$$

Для второго слагаемого в этом равенстве с точностью до $T^2$ получаем оценку

$$\begin{aligned}
&(z[n+1] + Sy[n+1])' A^{(1)}[n](z[n+1] + Sy[n+1]) = \\
&= (z[n] + Sy[n] + T(S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n]))(z[n] + Sy[n]) + \\
&+((A^{(1)}[n])^{-1}(F[n] - P[n]) - (S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n]))S)y[n])' \cdot \\
&\cdot A^{(1)}[n](z[n] + Sy[n] + T(S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n])) - \\
&-(S + (A^{(1)}[n])^{-1}(D[n] - B[n]))S)y[n]) \approx \\
&\approx (z[n] + Sy[n])'(A^{(1)}[n] + T(A^{(1)}[n]S + (D[n] - B[n]))) \cdot \\
&\cdot (z[n] + Sy[n]) + 2T(z[n] + Sy[n])'(F[n] - P[n] - \\
&-(A^{(1)}[n]S + D[n] - B[n])S)y[n]
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Воспользуемся соотношением $A^{(1)}[n+1] - A^{(1)}[n] \approx \dfrac{dA^{(1)}}{dt}[n]T$.

Допустим, что для малых $\|z\|$ и $\|y\|$ выполнены соотношения вида (3.10)

$$\lambda_1^2 \|z\|^2 \leq z' A^{(1)}[n] z \leq \lambda_2^2 \|z\|^2$$

$$(z + Sy)'(\frac{dA^{(1)}}{dt}[n] + D[n] + D'[n] - B[n] - B'[n] +$$
$$+A^{(1)}[n]S + S'A^{(1)}[n])(z + Sy) \leq -2\mu_1 \|z + Sy\|^2$$

$$(z + Sy)(F[n] - P[n] - (D[n] - B[n] + A^{(1)}[n]S)S)y \leq \mu_2 \|z + Sy\| \|y\|$$

Тогда для оценки (3.17) получаем следующее неравенство

$$V_2^2(n+1) \leq V_2^2(n) - \frac{2\mu_1 T}{\lambda_2^2} V_2^2(n) + 2\mu_2 \frac{T}{\lambda_1} V_1(n) V_2(n)$$

Таким образом, для векторной функции $V$ имеем следующую систему неравенств

$$\begin{cases} V_1(n+1) \leq (1 - 2s_0 T) V_1(n) + 2T V_2(n) \\ V_2(n+1) \leq \dfrac{2T\mu_2}{\lambda_1} V_1(n) + (1 - \dfrac{2\mu_1 T}{\lambda_2^2} V_2(n)) \end{cases}$$

Соответствующая система сравнения

$$\begin{cases} u_1(n+1) \leq (1 - 2s_0 T) u_1(n) + 2T u_2(n) \\ u_2(n+1) \leq \dfrac{2T\mu_2}{\lambda_1} u_1(n) + (1 - \dfrac{2\mu_1 T}{\lambda_2^2} u_2(n)) \end{cases}$$

будет экспоненциально устойчива, если выполнено неравенство

$$s_0 \lambda_1^2 \mu_1 - \mu_2 \lambda_2^2 > 00$$

Таким образом, получим, что с точностью до $T^2$ условия асимптотической устойчивости системы (3.16), полученной из системы (3.15) дискретизацией, совпадают с условиями устойчивости (3.10) модельной системы (3.7).

## 3.2 Моделирование управляемого движения двузвенного манипулятора на подвижном основании

В параграфе 3.1 рассмотрена задача стабилизации программного движения механических систем, осуществляемая при помощи векторных функций Ляпунова. Управляющие воздействия выбираются универсальными по отношению ко множеству программных движений, достаточно грубыми по отношению к системным параметрам и силам, не поддающимся управлению.

В качестве применения теоретических результатов, рассмотрим задачу построения дискретного управления двухзвенным манипулятором на подвижном основании [24, 120, 149], модель которого представлена на следующем рисунке:

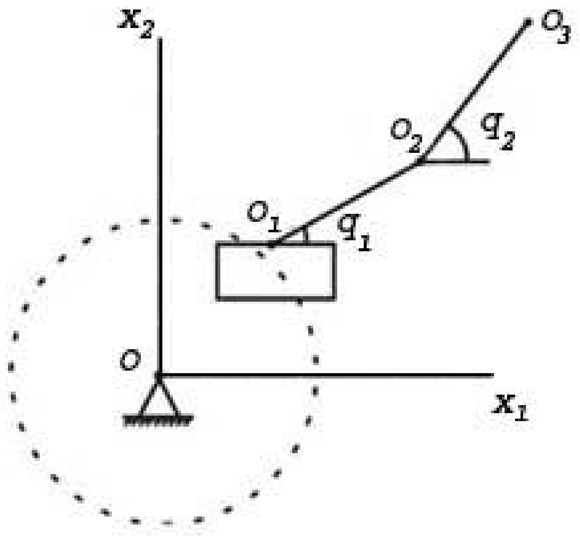


Рис. 3.1: Двузвенный манипулятор на подвижном основании

В рассматриваемой нами модели шарнир $O_1$ связывает первое звено с подвижным основанием. Груз, перемещается манипулятором при помощи схвата, укрепленного на конце второго звена в точке $O_3$. Звенья манипулятора связываются шарниром $O_2$, а оси шарниров параллельны друг другу. Будем полагать, что звенья манипулятора есть однородные стержни, а линейные размеры схвата и груза много меньше, чем длины звеньев манипулятора, следовательно, перемещаемый груз и схват примем за материальную точку.

Исследуя транспортные движения манипулятора, будем считать, что манипулятор совершает действия в горизонтальной плоскости или в невесомости, т.е. в отсутствии силы тяжести, причем основание движется только поступательно.

Пусть положение центра масс основания в инерциальной системе координат описывается функциями $x_1(t)$ и $x_2(t)$. В качестве обобщенных координат системы $q_1$, $q_2$ выберем шарнирные углы звеньев, образуемые с осью $Ox_2$.

Управление манипулятором происходит при помощи двух независимых приводов $D_1$, $D_2$, которые находятся в шарнирах $O_1$ и $O_2$ соответственно. Главные моменты относительно осей шарниров$O_1$, $O_2$ сил, создаваемые приводами $D_1$, $D_2$ и приложенных к звеньям, соответственно равны $U_1$, $U_2$. Действие других сил, за исключением реакции основания, учитывать не будем.

Введем следующие обозначения: $m_0$ — масса платформы, $m_1$, $m_2$ — массы звеньев, $l_1$, $l_2$ — длины звеньев, $m_3$ — масса груза.

Кинетическая энергия системы равна

$$T = \frac{1}{2}\left(a_{11}^0\dot{q}_1^2 + 2a_{12}\dot{q}_1\dot{q}_2 + a_{22}^0\dot{q}_2^2\right) + b_1\dot{q}_1 + b_2\dot{q}_2 + \frac{1}{2}M(\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2)$$

$$a_{11}^0 = \left(\tfrac{m_1}{3} + m_2 + m_3\right)l_1^2, \quad a_{12} = a_{12}^0 cos(q_1 - q_2), a_{12}^0 = \left(\tfrac{m_2}{2} + m_3\right)l_1 l_2,$$

$$a_{22}^0 = \left(\tfrac{m_2}{3} + m_3\right)l_2^2$$

$$M = m_0 + m_1 + m_2 + m_3$$

$$b_1 = b_1^0(\dot{x}_2(t)cos(q_1) - \dot{x}_1(t)sin(q_1)), \quad b_1^2 = \left(\tfrac{m_1}{2} + m_2 + m_3\right)l_1$$

$$b_2 = b_2^0(\dot{x}_2(t)cos(q_2) - \dot{x}_1(t)sin(q_2)), \quad b_2^2 = \left(\tfrac{m_2}{2} + m_3\right)l_2$$

Уравнения движения под действием управляющих моментов, отнесенных к $q_1$ и $q_2$, будут иметь следующий матричный вид

$$A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q}) + W(t,q) = U, \quad U' = (U_1, U_2)$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11}^0 & a_{12}^0 cos(q_1 - q_2) \\ a_{12}^0 cos(q_1 - q_2) & a_{22}^0 \end{pmatrix}$$

$$C(q) = \begin{pmatrix} 0 & a_{12}^0 sin(q_1 - q_2)\dot{q}_2 \\ -a_{12}^0 sin(q_1 - q_2)\dot{q}_1 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.18}$$

$$W(t,q) = \begin{pmatrix} -b_1^0(\ddot{x}_1(t) sin(q_1) - \ddot{x}_2(t) cos(q_1)) \\ -b_2^0(\ddot{x}_1(t) sin(q_2) - \ddot{x}_2(t) cos(q_2)) \end{pmatrix}$$

Пусть $q^0(t) = (q_1^0(t), q_2^0(t))$ — программное движение, создаваемое управляющим моментом

$$U_0(t) = A(q^0(t))\ddot{q}^0(t) + C(q^0(t), \dot{q}^0(t))\dot{q}^0(t) + W(t, q^0(t))$$

Положим

$$x = q - q^0(t), \quad U = U_0(t) + U_1$$

$x$ — возмущение, $U_1$ — управляющее воздействие, создаваемой обратной связи.

Уравнения возмущенного движения в линейном приближении будут иметь следующий вид

$$A^0(t)\ddot{x} = D^0(t)\dot{x} + F^0(t)x + U_1, \quad A^0(t) = A(q^0(t)), \quad D(t) = -2C(q^0(t), \dot{q}^0(t))$$

$$F^0(t) = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{pmatrix}$$

$$f_{11} = a_{12}^0(\ddot{q}_2^0(t)sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) - (\dot{q}_2^0(t))^2 cos(q_1^0(t) - q_2^0(t))) +$$

$$+ b_{10}(\ddot{x}_1(t)cos(q_1^0(t)) + \ddot{x}_2(t)sin(q_1^0(t)))$$

$$f_{12} = -a_{12}^0(\ddot{q}_2^0(t)sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) - (\dot{q}_2^0(t))^2 cos(q_1^0(t) - q_2^0(t)))$$

$$f_{21} = a_{12}^0(\ddot{q}_1^0(t)sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) + (\dot{q}_1^0(t))^2 cos(q_1^0(t) - q_2^0(t)))$$

$$f_{22} = -a_{12}^0(\ddot{q}_1^0(t)sin(q_1^0(t) - q_2^0(t)) - (\dot{q}_1^0(t))^2 cos(q_1^0(t) - q_2^0(t))) +$$

$$+ b_{10}(\ddot{x}_1(t)cos(q_2^0(t)) + \ddot{x}_2(t)sin(q_1^0(t)))$$

В соответствии с условиями (3.10) может быть найдено управляющее воздействие вида (3.8), стабилизирующее положение $x_1 = x_2 = 0$ системы (3.18).

Согласно алгоритму из п. 3.1 движение $(q_1^0(t), q_2^0(t))$ может быть также стабилизируемо соответствующим управлением вида (3.13).

Предположим, что движение основания манипулятора может быть описано следующим законом:

$$x_1(t) = \cos(2t)$$

$$x_2(t) = \sin(2t)$$

Программное движение манипулятора зададим как:

$$q_1^* = 1,1\sin(1,2t + 1) \qquad \dot{q}_1^* = 1,32\cos(1,2t + 1)$$

$$q_2^* = 1,3\sin(1,6t + 1,9) \quad \dot{q}_2^* = 2,08\sin(1,6t + 1,9)$$

С начальными отклонениями:

$$q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0.5 \quad \dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = 0$$

Задав следующие параметры системы

$$m_1 = 20kg, \quad m_2 = 10kg, \quad m_3 = 5kg, \;\; l_1 = 0.8m, \quad l_2 = 0.5m$$

Получим значения параметров управления для такого движения

$$k_1 = 319.407, \quad k_2 = 114.987$$

$$k_1^0 = 170,478, \quad k_2^0 = 61,372$$

где $k_1^0$, $k_2^0$ - значения параметров управления, найденные при нулевом отклонении. Числа $k_1^0$, $k_2^0$ имеют смысл нижних граней параметров $k_1$, $k_2$, т.е. параметры $k_1$, $k_2$ можно представит в виде $k_1 = k_1^0 + \eta_1$, $k_2 = k_2^0 + \eta_2$, где $\eta_1$, $\eta_2$ - положительные постоянные, зависящие от выбора начальных отклонений.

Результаты численного моделирования поведения системы представлены на графиках ниже. При проведении моделирования шаг $\Delta_c$ дискретизации для системы выбран равным шагу $\Delta_y$ дискретизации управления ($\Delta_c = \Delta_y = 0.01$).

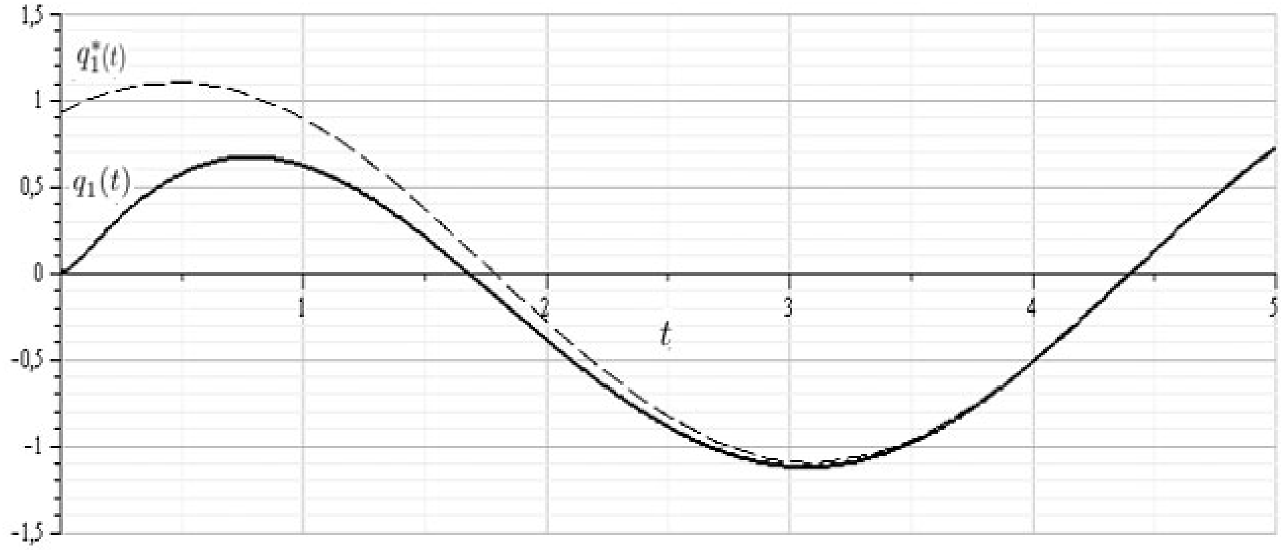


Рис. 3.2: Зависимость координаты $q_1(t)$ от времени $t$. Непрерывная кривая $q_1(t)$- стабилизируемая компонента, штриховая кривая: $q_1^*(t) = 1,1\sin(1,2t+1)$ - программное движение. Время моделирования $t_{\max} = 5$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

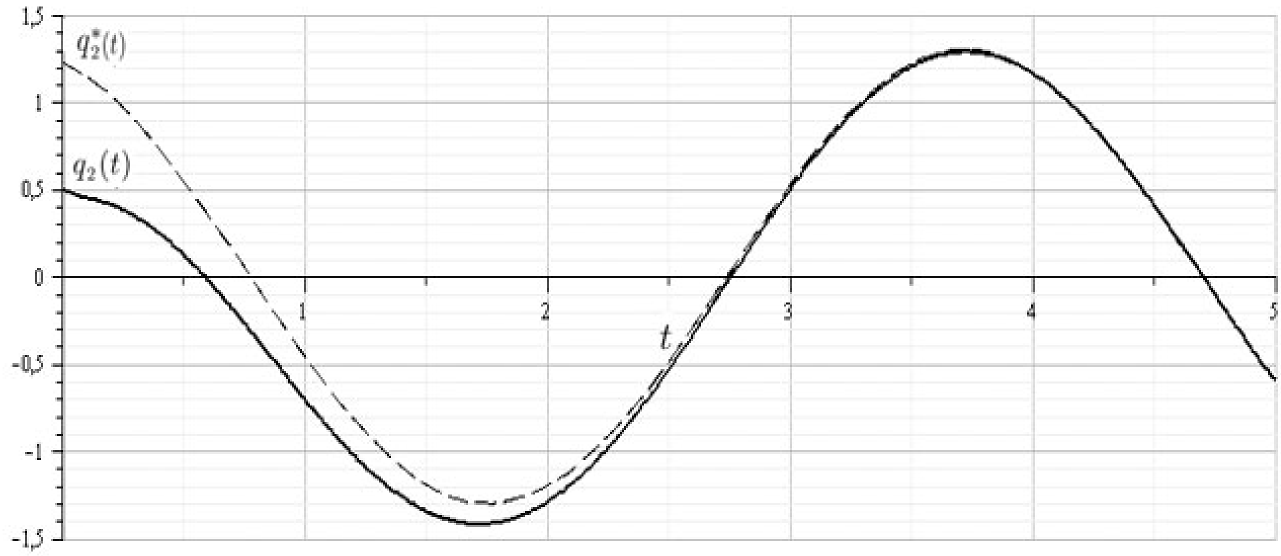


Рис. 3.3: Зависимость координаты $q_2(t)$ от времени $t$. Непрерывная кривая $q_2(t)$ - стабилизируемая компонента, штриховая кривая - программное движение $q_2^*(t) = 1,3\sin(1,6t+1,9)$. Время моделирования $t_{\max} = 5$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

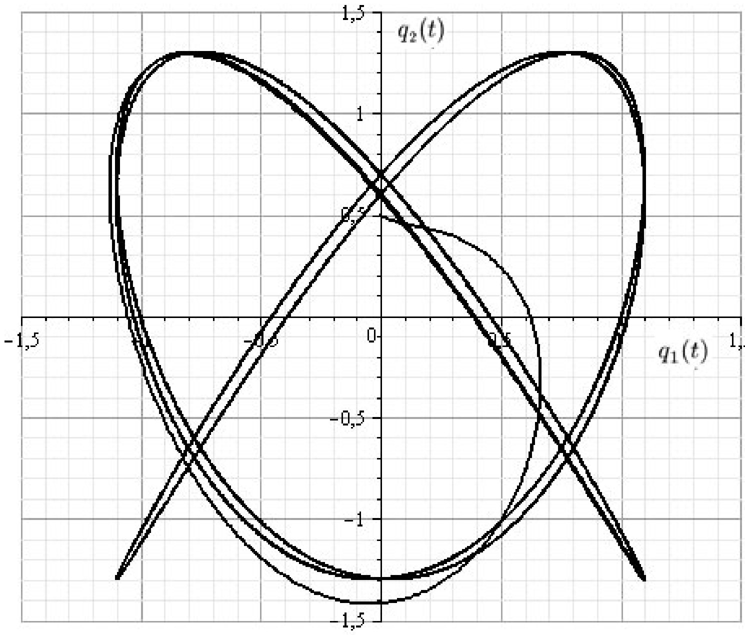


Рис. 3.4: Фазовый портрет движения основания манипулятора. Зависимость координаты $q_2(t)$ от координаты $q_1(t)$. Время моделирования $t_{\max} = 50$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

## 3.3 Моделирование управления в задаче о стабилизации движения колесного робота с омни-колесами

Практическое применение предложенного алгоритма отыскания стабилизирующего управления для механических системы рассмотрим на примере стабилизации движения трехколесного робота.

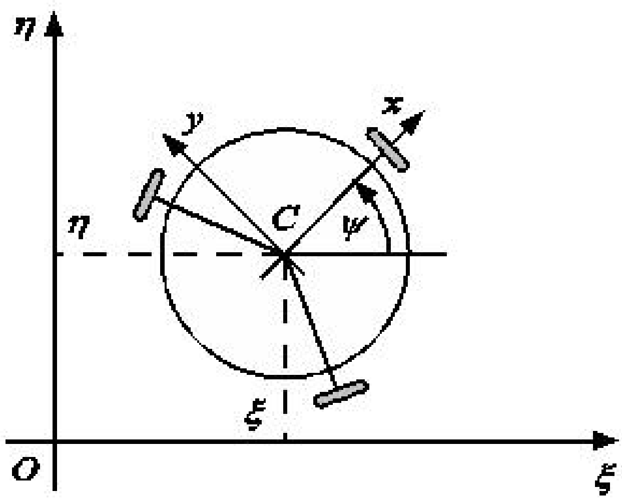


Рис. 3.5: Конструкция колесного робота

Механическая система состоит из платформы, которая может перемещаться по горизонтальной поверхности на трех колесах. Углы между осями колес составляют 120°. На колесах закреплены ролики, оси вращения которых лежат в плоскости колес. Такой тип колес обеспечивает движение платформы в любом направлении с произвольной ориентацией. Движение робота осуществляется без проскальзывания под действием моментов сил трех независимых двигателей, работающих на постоянном токе. Движение такой системы описывается следующими уравнениями [99]

$$L(t, \dot{q}, \ddot{q}) = P(\psi)U(t, q, \dot{q}) \tag{3.19}$$

$$L = \begin{pmatrix} m\ddot{\xi} + h\dot{\xi} + m_d\dot{\psi}\dot{\eta} \\ m\ddot{\eta} + h\dot{\eta} - m_d\dot{\psi}\dot{\xi} \\ I\ddot{\psi} \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} \sin\psi & \sin(\psi + \frac{2\pi}{3}) & \sin(\psi + \frac{4\pi}{3}) \\ -\cos\psi & -\cos(\psi + \frac{2\pi}{3}) & -\cos(\psi + \frac{4\pi}{3}) \\ -a & -a & -a \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

где $\xi$ и $\eta$ – координаты центра масс платформы в неподвижной декартовой системе координат $O\xi\eta\varsigma$, $\psi$ – угол поворота платформы вокруг вертикали, отсчитываемой от оси $O\xi$, $u = (u_1, u_2, u_3)^T$ – управляющие напряжения, подаваемые на электродвигатели постоянного тока, $a$ – расстояние от центра масс платформы до центра каждого колеса:

$$m = m_0 + 3m_1\left(1 + \frac{r_1^2}{2r^2}\right), m_d = \frac{3m_1 r_1^2}{2r^2},$$

$$I_s = m_0\rho_0^2 + 3m_1\left(\rho_1^2 + a^2\left(1 + \frac{2r_1^2}{r^2}\right)\right), n = \frac{3c_v}{2r^2}.$$

Здесь $m_0$ – масса платформы, $m_1$ – масса колеса, $\rho_0$, $\rho_1$ – соответственно радиусы инерции платформы и колеса относительно вертикальной оси, проходящей через их центры масс, $r$ – радиус колеса, $r_1$ – радиус инерции колеса относительно оси вращения, $c_v$ – коэффициент момента противоэлектродвижущей силы.

Рассмотрим задачу о стабилизации программного движения

$$(\xi_0(t), \eta_0(t), \psi_0(t)),\ t \geq 0 \tag{3.20}$$

где $\xi_0(t), \eta_0(t), \psi_0(t)$ – ограниченные и дважды непрерывно дифференцируемые функции, при этом существуют положительные постоянные $\xi^1_{max}, \eta^1_{max}, \psi^1_{max}, \xi^2_{max}, \eta^2_{max}, \psi^2_{max}$, такие, что для всех $t \geq 0$ выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} &|\dot{\xi}_0(t)| \leq \xi^1_{max}, |\dot{\eta}_0(t)| \leq \eta^1_{max}, |\dot{\psi}_0(t)| \leq \psi^1_{max} \\ &|\ddot{\xi}_0(t)| \leq \xi^2_{max}, |\ddot{\eta}_0(t)| \leq \eta^2_{max}, |\ddot{\psi}_0(t)| \leq \psi^2_{max} \end{aligned} \tag{3.21}$$

Считаем, что движение осуществляется под действием программного управления $u_1 = u_1^0(t), u_2 = u_2^0(t), u_3 = u_3^0(t)$:

$$
\begin{aligned}
u_1^0 = \frac{2}{3}[&(m\ddot{\xi}_0(t) + h\dot{\xi}_0(t) + m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\eta}_0(t))sin(\psi_0(t)) - \\
&-(m\ddot{\eta}_0(t) + h\dot{\eta}_0(t) - m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\xi}_0(t))cos(\psi_0(t)) - \\
&-(I\ddot{\psi}_0(t) + 2a^2h\dot{\psi}_0(t))/2a]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
u_2^0 = \frac{2}{3}[&(m\ddot{\xi}_0(t) + h\dot{\xi}_0(t) + m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\eta}_0(t))cos(\psi_0(t) + \frac{\pi}{6}) - \\
&-(m\ddot{\eta}_0(t) + h\dot{\eta}_0(t) - m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\xi}_0(t))sin(\psi_0(t) + \frac{\pi}{6}) - \\
&-(I\ddot{\psi}_0(t) + 2a^2h\dot{\psi}_0(t))/2a]
\end{aligned}
\tag{3.22}
$$

$$
\begin{aligned}
u_3^0 = \frac{2}{3}[&(m\ddot{\xi}_0(t) + h\dot{\xi}_0(t) + m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\eta}_0(t))sin(\psi_0(t) + \frac{\pi}{3}) - \\
&-(m\ddot{\eta}_0(t) + h\dot{\eta}_0(t) - m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\xi}_0(t))cos(\psi_0(t) + \frac{\pi}{3}) - \\
&-(I\ddot{\psi}_0(t) + 2a^2h\dot{\psi}_0(t))/2a]
\end{aligned}
$$

или в векторном виде

$$
U^0(t) = P^{-1}(\psi_0(t)), \quad L^0(t) = \begin{pmatrix} m\ddot{\xi}_0(t) + h\dot{\xi}_0(t) + m_d\dot{\eta}_0(t)\dot{\psi}_0(t) \\ m\ddot{\eta}_0(t) + h\dot{\eta}_0(t) - m_d\dot{\xi}_0(t)\dot{\psi}_0(t) \\ 2a^2h\dot{\psi}_0(t) \end{pmatrix}
$$

На основании результатов из (3.1) можно показать, что задача о стабилизации программного движения (3.2) решается стабилизирующими моментами

$$u_1^* = \frac{2}{3}[(m\ddot{\xi}_0(t) + h\dot{\xi}_0(t) + m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\eta}_0(t) - v(\xi - \xi_0(t)) - \mu(\dot{\xi} - \dot{\xi}_0(t)))sin(\psi) -$$
$$-(m\ddot{\eta}_0(t) + h\dot{\eta}_0(t) - m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\xi}_0(t) - v(\eta - \eta_0(t)) - \mu(\dot{\eta} - \dot{\eta}_0(t)))cos(\psi) -$$
$$-(I\ddot{\psi}_0(t) + 2a^2h\dot{\psi}_0(t) - v(\psi - \psi_0(t)) - \mu(\dot{\psi} - \dot{\psi}_0(t)))/2a]$$

$$u_2^* = \frac{2}{3}[(m\ddot{\xi}_0(t) + h\dot{\xi}_0(t) + m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\eta}_0(t) - v(\xi - \xi_0(t)) - \mu(\dot{\xi} - \dot{\xi}_0(t)))cos(\psi + \frac{\pi}{6}) -$$
$$-(m\ddot{\eta}_0(t) + h\dot{\eta}_0(t) - m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\xi}_0(t) - v(\eta - \eta_0(t)) - \mu(\dot{\eta} - \dot{\eta}_0(t)))sin(\psi + \frac{\pi}{6}) -$$
$$-(I\ddot{\psi}_0(t) + 2a^2h\dot{\psi}_0(t) - v(\psi - \psi_0(t)) - \mu(\dot{\psi} - \dot{\psi}_0(t)))/2a]$$

$$u_3^* = \frac{2}{3}[(m\ddot{\xi}_0(t) + h\dot{\xi}_0(t) + m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\eta}_0(t) - v(\xi - \xi_0(t)) - \mu(\dot{\xi} - \dot{\xi}_0(t)))sin(\psi + \frac{\pi}{3}) -$$
$$-(m\ddot{\eta}_0(t) + h\dot{\eta}_0(t) - m_d\dot{\psi}_0(t)\dot{\xi}_0(t) - v(\eta - \eta_0(t)) - \mu(\dot{\eta} - \dot{\eta}_0(t)))cos(\psi + \frac{\pi}{3}) -$$
$$-(I\ddot{\psi}_0(t) + 2a^2h\dot{\psi}_0(t) - v(\psi - \psi_0(t)) - \mu(\dot{\psi} - \dot{\psi}_0(t)))/2a]$$

$$(3.23)$$

$U^* = P^{-1}(\xi(t))U^1$, или в векторном виде

$$U^1 = \begin{pmatrix} -k_1(\dot{\xi} - \dot{\xi}_0(t)) - k_2(\xi - \xi_0(t)) \\ -k_1(\dot{\eta} - \dot{\eta}_0(t)) - k_2(\eta - \eta_0(t)) \\ -k_3(\dot{\psi} - \dot{\psi}_0(t)) - k_4(\psi - \psi_0(t)) \end{pmatrix}$$

при условиях

$$(\xi_1)^2 + (\eta_1)^2 \le \frac{4(h + k_1)(2a^2h + k_2)}{2m_d^2}, \xi_1 = max(\dot{\xi}_0(t)), \eta_1 = max(\dot{\eta}_0(t))$$

Заметим, что эти условия хуже условий, полученных в работе [], что объясняется меньшей эффективностью метода векторных функций Ляпунова по сравнению со скалярными.

Соответственно методике, обоснованной в подразделе 3.1, задача о стабилизации движения (3.20) решается дискретными стабилизирующими моментами $U^* = P^{-1}(\xi(t))U^1[n]$

$$U^1[n] = \begin{pmatrix} -k_1(\dot{\xi}[nT] - \dot{\xi}_0(t)) - k_2(\xi[nT] - \xi_0(t)) \\ -k_1(\dot{\eta}[nT] - \dot{\eta}_0(t)) - k_2(\eta[nT] - \eta_0(t)) \\ -k_3(\dot{\psi}[nT] - \dot{\psi}_0(t)) - k_4(\psi[nT] - \psi_0(t)) \end{pmatrix}$$

Программное движение (3.20) может быть задано в дискретном виде

$$\begin{aligned} &\xi_0[n] = \xi_0[nT], \eta_0[n] = \eta_0[nT], \psi_0[n] = \xi_0[nT] \\ &\dot{\xi}_0[n] = \dot{\xi}_0[nT], \dot{\eta}_0[n] = \dot{\eta}_0[nT], \dot{\psi}_0[n] = \dot{\xi}_0[nT], \end{aligned} \tag{3.24}$$

Соответственно, законы изменения $(\dot{\xi}_0(t), \dot{\eta}_0(t), \dot{\psi}_0(t))$, $(\ddot{\xi}_0(t), \ddot{\eta}_0(t), \ddot{\psi}_0(t))$ на отрезках времени $[nt, (n+1)T)$ определяются согласно этому соотношению.

Для численного анализа процесса стабилизации программного движения (3.20) разработана программа компьютерного моделирования движения робота. Программа предназначена для моделирования управляемого движения трехколесного робота по заданной траектории. Она разработана на языке Java SE 7u75 и представляет собой самостоятельное приложение для работы на ПК с требованиями к ОС: Windows XP, Windows 7, Windows 8, Linux 3.1 и выше. Приложение включает в себя формы ввода желаемого движения робота, начальных условий, дополнительных коэффициентов в трёх форматах: текстовым файлом, заданием траектории графически, вводом функций, зависящих от времени. Результатом работы программы является графическое представление траекторий моделируемого и заданного движений робота.

На графиках ниже приведены результаты численного моделирования со следующими параметрами системы: $m = 20$кг., $m_d = 3$кг., $I = 3.76$кг·м$^2$, $a = 0.2$м., $\Delta m = 1$кг., $T = 0.05$с., $h = 1.6\times$с/м, $R = 2$м., $w = 0.5$с$^{-1}$. Функции, описывающие желаемое движение робота, выбраны следующие: $\xi_0(t) = R\cos(\omega t)$, $\eta_0(t) = R\sin(\omega t)$ , $\psi_0(t) = \omega t$, а начальные не малые отклонения: $\xi_0^0 = 0.5$, $\eta_0^0 = 1$, $\psi_0^0 = 0.1$, $\dot{\xi}_0^0 = 0.1$, $\dot{\eta}_0^0 = 0.1$, $\dot{\psi}_0^0 = 0.1$.

Тогда параметры управления соответственно будут: $k_1 = 1$, $k_2 = 0.3$, $k_3 = 0.5$, $k_4 = 0.8$.

Обратная к исходной матрица $P^{-1}(\psi_0(t))$ имеет вид

$$P^{-1}(\psi_0(t)) =$$
$$\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\sin(\psi_0(t)) & -2\cos(\psi_0(t)) & -\frac{1}{a} \\ \sqrt{3}\cos(\psi_0(t)) - \sin(\psi_0(t)) & \sqrt{3}\sin(\psi_0(t)) + \cos(\psi_0(t)) & -\frac{1}{a} \\ -\sqrt{3}\cos(\psi_0(t)) - \sin(\psi_0(t)) & -\sqrt{3}\sin(\psi_0(t)) - \cos(\psi_0(t)) & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}$$

тогда в управлении $U(t, q, \dot{q}) = P^{-1}(\psi_0(t) = \omega t) \cdot L^o(\omega t) + P^{-1}(\psi(t)) \cdot V(t)$ первое слагаемое будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sin(\omega t) & -\frac{2}{3}\cos(\omega t) & -\frac{1}{3a} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\cos(\omega t) - \frac{1}{3}\sin(\omega t) & \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\cos(\omega t) & -\frac{1}{3a} \\ -\frac{1}{3}\sin(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos(\omega t) & -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\cos(\omega t) & -\frac{1}{3a} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -m\omega^2 R\cos(\omega t) - h\omega R\sin(\omega t) + md\omega^2 R\cos(\omega t) \\ \\ -m\omega^2 R\sin(\omega t) + h\omega R\cos(\omega t) + md\omega^2 R\sin(\omega t) \\ \\ 2a^2 h\omega \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(R+a)h\omega \\ \left(\sqrt{3}mR\omega - \sqrt{3}mR\omega d - hR + 2ah\right)\omega \\ \left(\sqrt{3}mR\omega d - \sqrt{3}mR\omega - hR + 2ah\right)\omega \end{pmatrix}$$

Результаты численного моделирования поведения системы представлены на графиках ниже. При проведении моделирования шаг $\Delta_c$ дискретизации для системы выбран равным шагу $\Delta_y$ дискретизации управления ($\Delta_c = \Delta_y = 0.01$).

Проведено компьютерное моделирование движения трехколесного робота с омни-колесами. На основе полученных графиков моделируемого движения можно судить о качестве выбранного управления и скорости выхода робота на желаемую траекторию. Полученные результаты подтверждают теоретически обоснованную методику синтеза управления движением рассматриваемой механической системы.

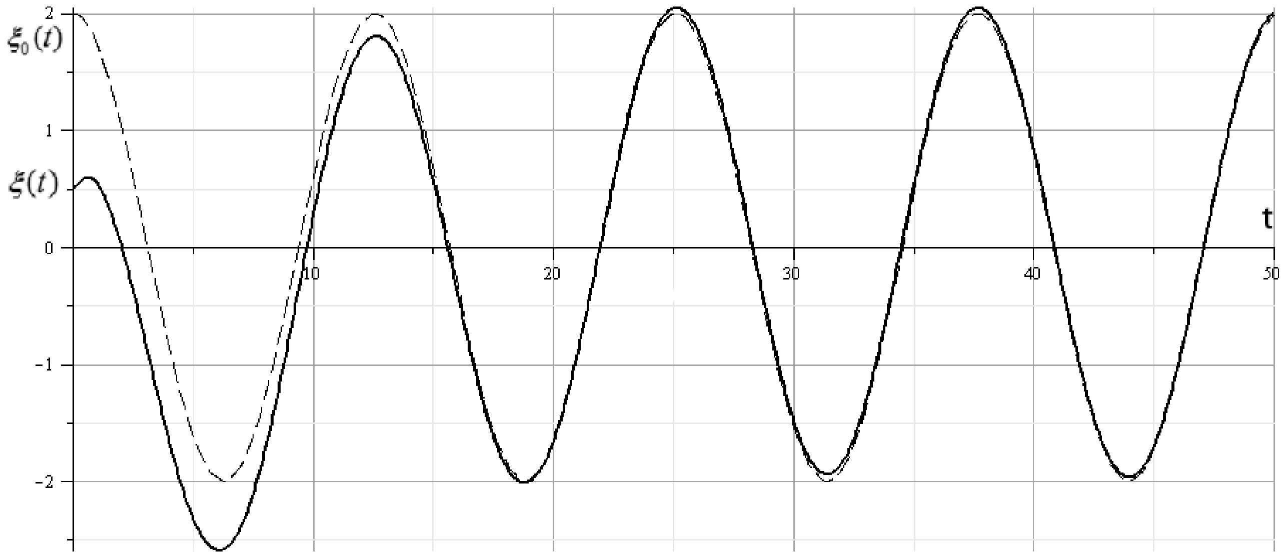


Рис. 3.6: График первой координаты центра масс платформы. Непрерывная кривая $\xi(t)$ - стабилизируемая компонента, штриховая кривая - программное движение $\xi_0(t) = Rcos(wt)$ . Время моделирования $t_{msx} = 50$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

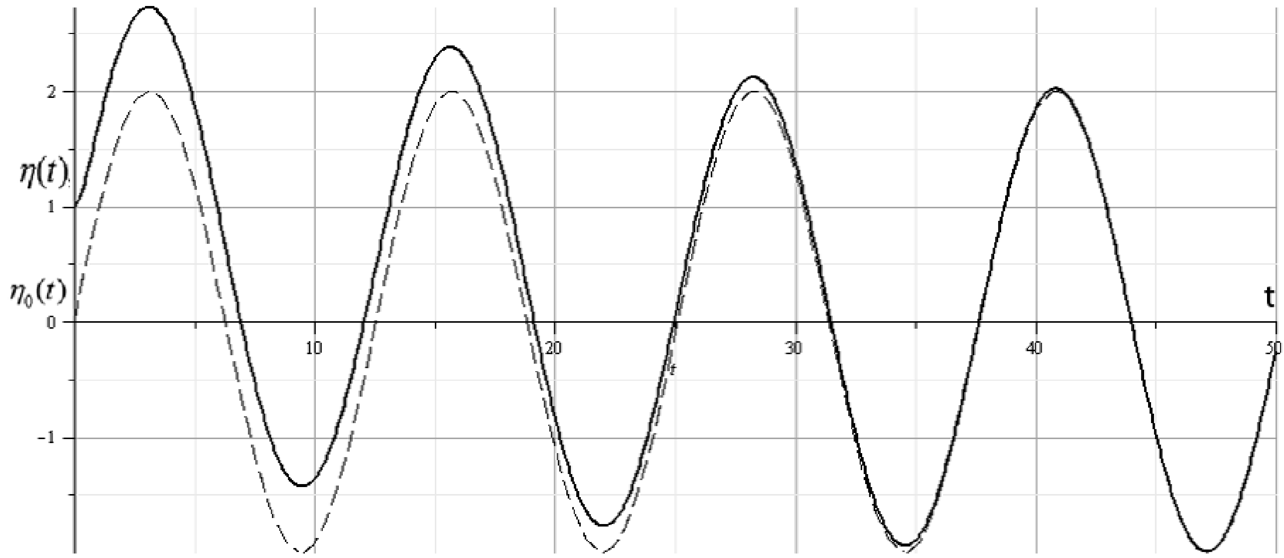


Рис. 3.7: График второй координаты центра масс платформы. Непрерывная кривая $\eta(t)$ - стабилизируемая компонента, штриховая кривая - программное движение $\eta_0(t) = Rsin(wt)$ . Время моделирования $t_{msx} = 50$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

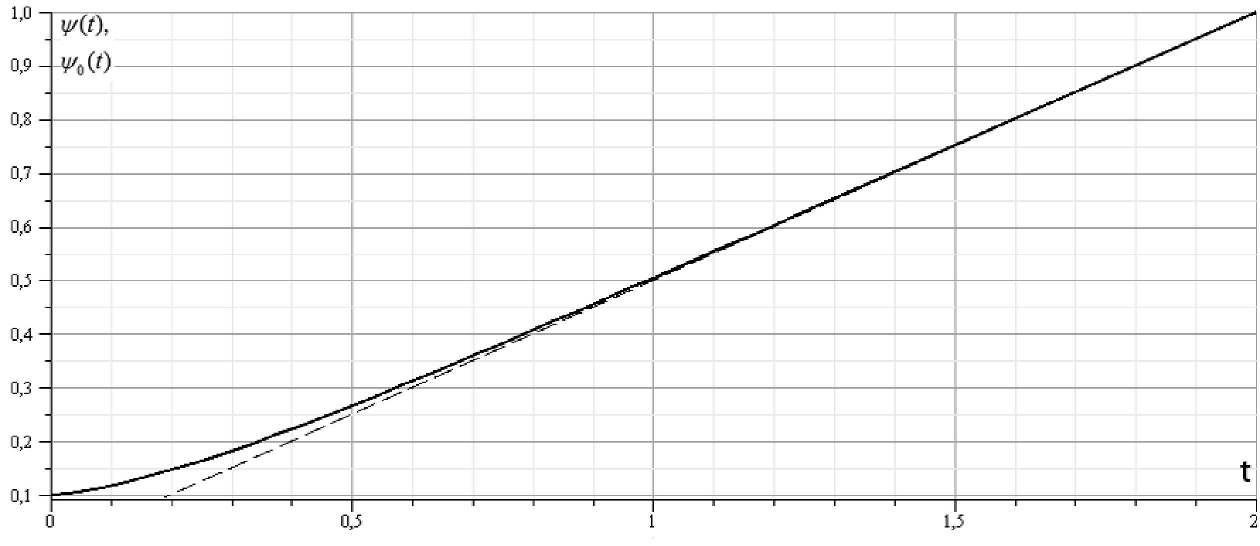


Рис. 3.8: График угла поворота платформы. Непрерывная кривая $\psi(t)$ - стабилизируемая компонента, штриховая линия - программное движение $\psi_0(t) = wt$ . Время моделирования $t_{msx} = 2$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

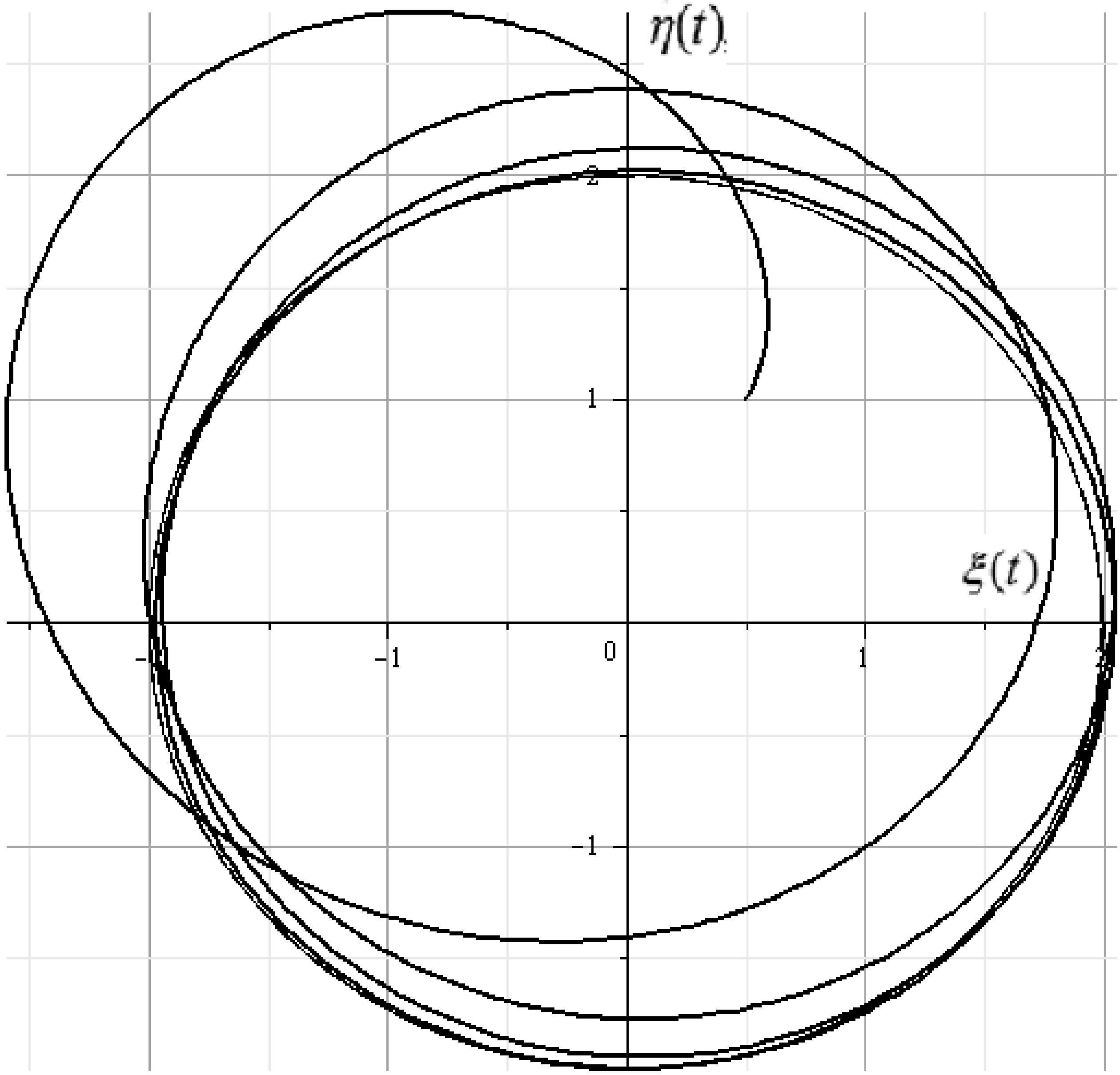


Рис. 3.9: График траектории центра масс платформы на фазовой плоскости. Черная кривая $\eta(\xi(t))$ - стабилизируемая компонента. Время моделирования $t_{msx} = 20$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

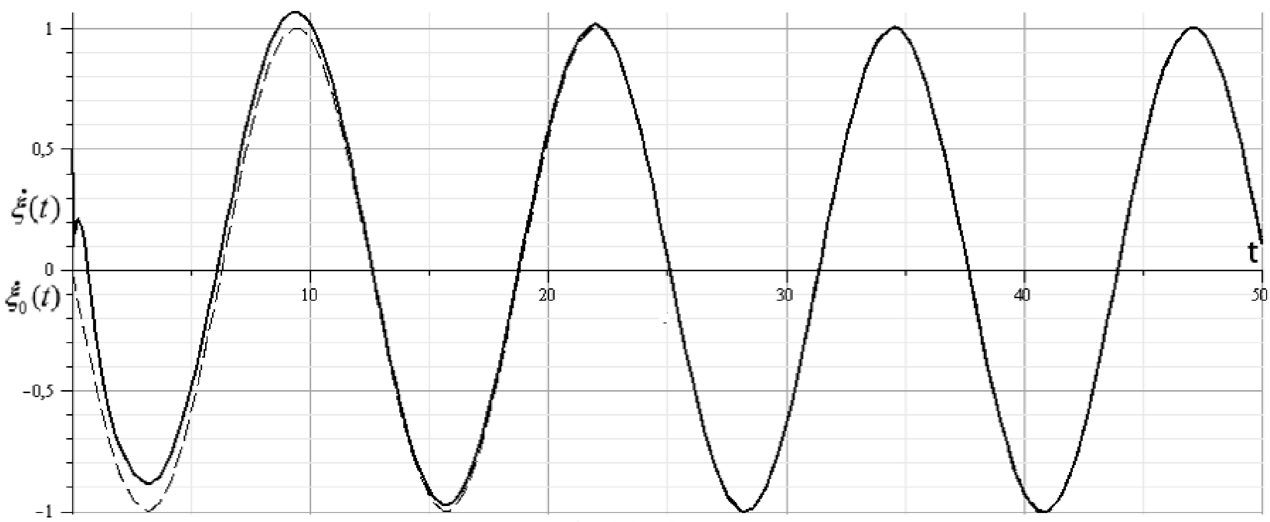


Рис. 3.10: График проекции скорости центра масс платформы на ось $\xi$ . Непрерывная кривая $\dot{\xi}(t)$ - стабилизируемая компонента, штриховая кривая - программное движение $\dot{\xi_0}(t) = -Rwsin(wt)$ . Время моделирования $t_{msx} = 50$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

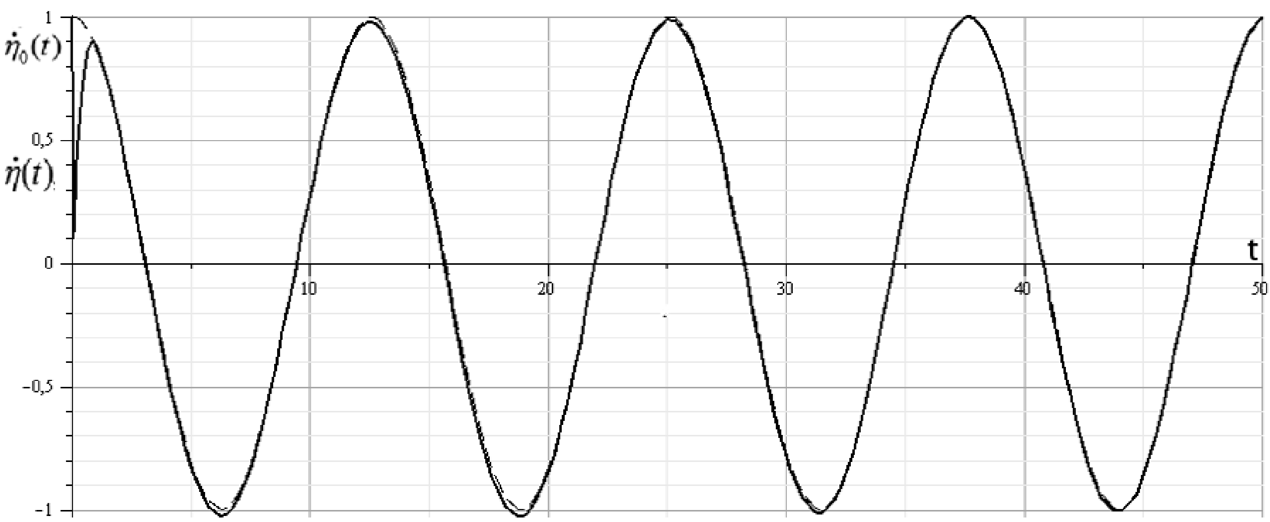


Рис. 3.11: График проекции скорости центра масс платформы на ось $\eta$ . Непрерывная кривая $\dot{\eta}(t)$ - стабилизируемая компонента, штриховая кривая - программное движение $\dot{\eta_0}(t) = Rwcos(wt)$ . Время моделирования $t_{msx} = 50$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

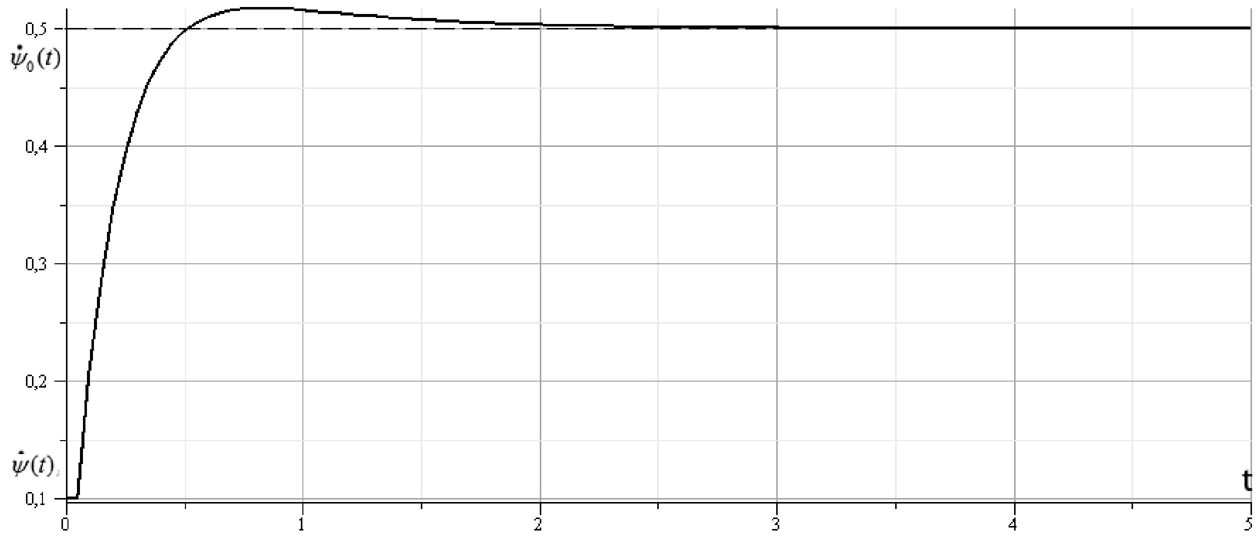


Рис. 3.12: График угловой скорости платформы. Непрерывная кривая $\dot{\psi}(t)$ - стабилизируемая компонента, штриховая линия - программное движение $\dot{\psi}_0(t) = w$ . Время моделирования $t_{msx} = 5$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

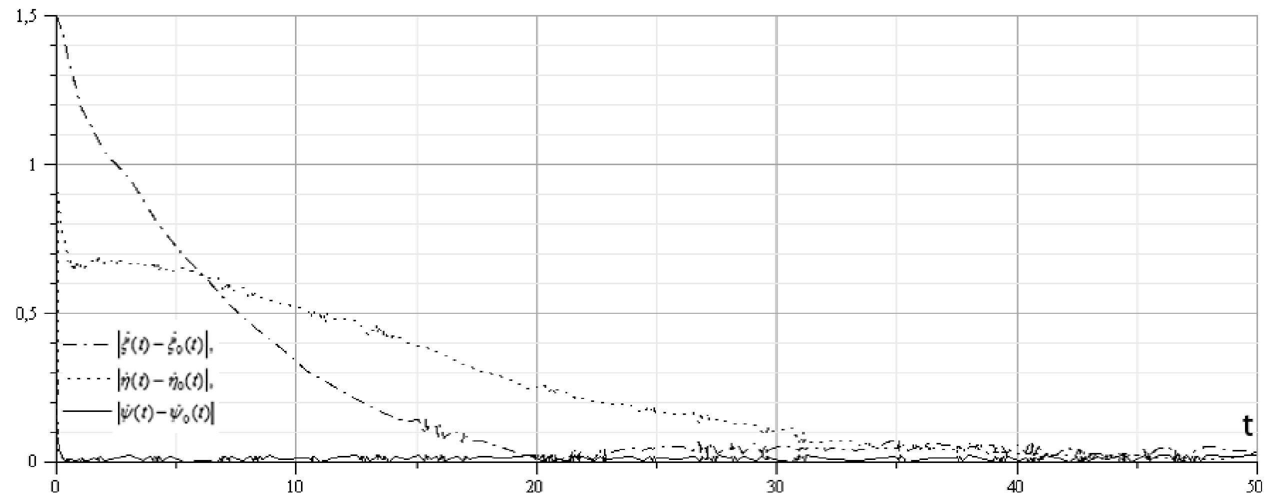


Рис. 3.13: График модулей отклонений скоростей робота от программных скоростей $\left|\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}_0(t)\right|$, $|\dot{\eta}(t) - \dot{\eta}_0(t)|$, $\left|\dot{\psi}(t) - \dot{\psi}_0(t)\right|$. Время моделирования $t_{msx} = 50$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

# ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе разработаны новые методы исследования устойчивости и стабилизации нелинейных управляемых систем, моделируемых дискретными уравнениями; обоснована методика построения моделей дискретного управления движениями управляемых механических систем. Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Проведено развитие метода векторных функций Ляпунова а исследовании устойчивости и стабилизации нелинейных систем, моделируемых дискретными уравнениями.

2. Полученные результаты являются развитием для дискретных систем соответствующих теорем из работ [8, 9, 12] для систем, описываемых дифференциальными уравнениями, обобщением результатов работ из [33, 35, 44, 91, 102, 173–175, 196]. Эффективность новой методики в исследовании устойчивости и стабилизации представлена на примере решения задачи об устойчивости системы, моделируемой уравнениями типа Вольтерра. Получено решение задачи о стабилизации программных движений управляемых механических систем со ступенчатым импульсным управлением. Построены соответствующие модели управления системой с одной и многими степенями свободы, с одной позиционной и остальными циклическими координатами. Эти результаты представляют собой развитие для дискретного управления соответствующих результатов о стабилизации программных

движений механических систем посредством непрерывных и релейных управлений из работ [10, 13, 15, 16, 19, 51, 109, 120–123, 127–129, 143, 155].

3. Представлена модель управляемого двузвенного манипулятора на подвижном основании со ступенчатым импульсным управлением.

4. Разработана компьютерная модель управляемого движения колесного мобильного робота с тремя омни-колесами. Разработанный программный комплекс на языке высокого уровня Java с самостоятельным кроссплатформенным приложением позволяет составить анализ процесса управления при различных способах его задания – в виде функций, в виде поточечного закона и их модификаций.

Основные результаты работы опубликованы в работах [23, 34, 37, 39–41, 81–83, 85] в том числе, в статьях [14, 20–22, 25, 36, 38, 64, 84] опубликованных в журналах из списка ВАК. На программу моделирования управляемого движения мобильного робота получен патент РФ на программу для ЭВМ [86].

# ЛИТЕРАТУРА


[1] *Абдуллин, Р. З.* Метод сравнения в устойчивости нелинейных разностных уравнений с импульсными воздействиями / Р. З. Абдуллин // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 11.— С. 44-56.

[2] *Айзерман, М.В* Основы теории разрывных систем I / М. А. Айзерман, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 1974.— № 7-8.— С. 33–47. С. 39–61.

[3] *Александров, В. В.* Оптимизация динамики управляемых систем / В. В. Александров, В. Г. Болтянский, С. С. Лемак и др.— М.: МГУ, 2000.— 303 с.

[4] *Ананьевский, И. М.* Управление реономными механическими системами с неизвестными параметрами / И. М. Ананьевский // Докл. РАН.— 2001.— Т. 337, № 4.— С. 459–463.

[5] *Ананьевский, И. М.* Два подхода к управлению механической системой с неизвестными параметрами / И. М. Ананьевский // Изв. РАН. Теор. и сист. упр.— 2001.— № 2.— С. 39–47.

[6] *Анапольский, Л. Ю.* Метод сравнения в динамике дискретных систем / Л. Ю. Анапольский; ред. В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский // Вектор-функции Ляпунова и их построение.— Новосибирск: Наука, 1980.— С. 92–128.

[7] *Андреев, А. С.* Об управлении движением колесного мобильного робота / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // ПММ.— 2015.— Т. 79.— № 4.— С. 451–462.

[8] *Андреев, А. С.* О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления / А. С. Андреев, С. П. Безгласный // ПММ.— 1997.— Т. 61.— № 1.— С. 44–51.

[9] *Андреев, А. С.* Метод векторной функции Ляпунова в задаче об управлении систем с мгновенной обратной связью / А. С. Андреев, А. О. Артемова // Ученые записки Ульяновского государственного университета.— 2012.— № 1(4).— С. 15–19.

[10] *Андреев, А. С.* Об управлении движением голономной механической системы / А. С. Андреев, А. О. Артемова // Научно-технический вестник Поволжья.— 2012.— № 6.— С. 80–87.

[11] *Андреев, А. С.* Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости / А. С. Андреев, Т. А. Бойкова // Механика твердого тела.— 2002.— № 32.— С. 109–116.

[12] *Андреев, А. С.* К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // Доклады Академии наук.— 2005.— Т. 400, № 5.— С. 621–624.

[13] *Андреев, А. С.* О стабилизации движения нестационарной управляемой системы / А. С. Андреев, В. В. Румянцев // Автоматика и телемеханика.— 2007.— № 8.— С. 18–31.

[14] *Андреев, А. С.* О моделировании цифрового регулятора на основе прямого метода Ляпунова / А. С. Андреев, Е. А. Кудашова, О. А. Перегудова // Научно-технический вестник Поволжья.— 2013.— № 6.— С. 113–115.

[15] *Андреев, А. С.* Об устойчивости нулевого решения системы с разрывной правой частью / А. С. Андреев, О. Г. Дмитриева, Ю. В. Петровичева // Научно-технический вестник Поволжья.— 2011.— № 1.— С. 15–21.

[16] *Андреев, А. С.* Об устойчивости неустановившегося решения механической системы / А. С. Андреев, Т. А. Бойкова // ПММ.— 2004.— Т. 68.— № 4.— С. 678–686.

[17] *Андреев, А. С.* Об устойчивости обощенного стационарного движения механической системы в зависимости от действующих сил / А. С. Андреев, Р. Б. Зайнетдинов // Труды IX Международной Четаевской Конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением посвященной 105-летию Н. Г. Четаева.— Иркутск: Сибирское отделение РАН.— 2007.— Т. 1.— С. 5–14.

[18] *Андреев, А. С.* Вектор-функции Ляпунова в задачах о стабилизации движениц управляемых систем / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // Журнал Средневолжского математического общества.— 2014.— Т. 16, № 1.— С. 32–44.

[19] *Андреев, А. С.* О стабилизации программных движений голономной

механической системы / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН.— 2014.— С. 1840–1843.

[20] *Андреев А. С.* О моделировании цифрового регулятора на основе прямого метода Ляпунова / А. С. Андреев, О. А. Перегудова, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья №6 2013. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2013 - с. 113-115.

[21] *Андреев А. С.* Синтез непрерывного и кусочно-постоянного управления движением колесного мобильного робота / А. С. Андреев, С. Ю. Раков, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья №5 2014. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2014 — с.97-101

[22] *Андреев А. С.* О моделировании структуры управления для колесного робота с омни-колесами / Андреев А. С., Е. А. Кудашова // Автоматизация процессов управления №2 (40) 2015. Ульяновск: Автоматизация процессов управления, 2015 — с.114-121

[23] *Андреев А. С.* О стабилизации движений механических систем управлениями различного типа / А.С. Андреев, Е.А. Кудашова, О.А. Перегудова // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского «Динамика систем и про-цессы управления», 15-20 сентября 2014г., Екатеринбург. – с. 35-37

[24] *Артемова, А. О.* Моделирование управляемого движения двузвенного манипулятора на подвижном основании / А. О. Артемова // Научно-технический вестник Поволжья.— 2012.— № 6.

[25] *Артемова, А. О.* Об управлении пространственным движением многозвенного манипулятора на подвижном основании / А. О. Артемова, Е. Э. Звягинцева, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья.— 2013.— № 5.— С. 106–109.

[26] *Афанасьев, В. Н.* Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов.— М.: Высшая школа, 1989.— 447 с.

[27] *Барабанов, И. Н.* Динамические модели информационного управления в социальных сетях / И. Н. Барабанов, Н. А. Коргин, Д. А. Новиков, А. Г. Чхартишвили // “Динамические модели информационного управления в социальных сетях”, Автомат. и телемех., 2010, № 11, 172–182

[28] *Баркин, А. И.* Об абсолютной устойчивости дискретных систем / А. И. Баркин // Автоматика и телемеханика.— 1998.— № 10.— С. 3–8.

[29] *Беллман, Р.* Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук.— М.: Мир, 1967.— 548 с.

[30] *Блюмин С. Л.* Дискретные математические модели Вольтерра в экологии и других областях / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Экология ЦЧО РФ.— 2003.— № 2.— С. 16–18.

[31] *Блюмин С. Л.* Нечеткие системы Вольтерра / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Проблемы управления.— 2004.— № 4.— С. 75–58.

[32] *Барабанов, И. Н.* Построение функций Ляпунова для дискретных систем со случайными параметрами / И. Н. Барабанов // Автомат. и телемех., 1995, № 11, 31–41.

[33] *Богданов, А. Ю.* Об устойчивости точки покоя дискретной системы / А. Ю. Богданов, С. В. Черников // Ученые записки УлГУ. Сер. "Фундаментальные проблемы математики и механаники".— Ульяновск: УлГУ, 2004.— Вып. 1(14).- С. 99–115.

[34] *Богданов А. Ю.* Устойчивость неавтономных дискретных систем типа Лотки-Вольтерра / А. Ю. Богданов , Е. А. Кудашова // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. Вып. 1(18) - Ульяновск: УлГУ, 2007. – С. 182-188.

[35] *Богданов А. Ю.* Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления / А. Ю. Богданов // Ульяновск: УлГТУ, 2008.- 262 с.

[36] *Богданов А. Ю.* К вопросу об оптимальной стабилизации дискретных управляемых систем / Ю. А. Матвеев, А. Ю. Богданов, Т. Е. Исаева, Е. А. Кудашова // Обозрение прикладной и промышленной математики. Москва: ТВП. – 2009. – Том 16. – Вып. 3. – С. 505-507.

[37] *Богданов А. Ю.* О равномерной асимптотической устойчивости решений дискретных уравнений с

изменяющейся структурой / А. Ю. Богданов, Е. А. Кудашова // Труды Седьмой международной конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов 2-5 февраля 2009 г., г. Ульяновск, Россия. - Ульяновск, 2009. – С. 46-47.

[38] *Богданов А. Ю.* Развитие прямого метода Ляпунова и равномерная асимптотическая устойчивость решений дискретных уравнений с изменяющейся структурой / А. Ю. Богданов, Е. А. Кудашова // Обозрение прикладной и промышленной математики. Москва: ТВП. – 2009. – Том 16. – Вып. 2. – С. 294-295.

[39] *Богданов А. Ю.* Численные методы синтеза управления в нестационарных дискретных системах / А. Ю. Богданов, Е. А. Кудашова // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. –Вып. 1(3). – Ульяновск: УлГУ, 2010. – С. 9.

[40] *Богданов А. Ю.* Стабилизация нестационарных дискретных систем на основе свойств диссипативности и пассивности / А. Ю. Богданов, Е. А. Кудашова // Труды всероссийского семинара «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 15-18 июня 2010 г., г. Ульяновск. –Ульяновск:УлГУ, 2010. С. 34-37.

[41] *Богданов А. Ю.* Необходимые и достаточные условия диссипативности и беспотерьности для одного класса нестационарных нелинейных управляемых систем / А. Ю. Богданов, Е. А. Кудашова // Труды

всероссийского семинара «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 9-12 июня 2011 г., г. Ульяновск. –Ульяновск:УлГУ, 2011. С. 54-57.

[42] *Борцов, Ю. А.* Автоматические системы с разрывным управлением / Ю. А. Борцов, И. Б. Юнгер.— Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1986.— 168 с.

[43] *Бромберг, П. В.* Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования / П. В. Бромберг.— М.: Оборонгиз, 1953.— 224 с.

[44] *Бромберг, П. В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного управления / П. В. Бромберг.— М.: Наука, 1967.— 324 с.

[45] *Булгаков, Н. Г.* Знакопостоянные функции в теории устойчивости / Н. Г. Булгаков.— Минск: Университетское, 1984.— 78 с.

[46] *Бунич, А. Л.* Синтез и применение дискретных систем управления с идентификатором / А. Л. Бунич, Н. Н. Бухтадзе // .: Наука, 2002

[47] *Васильев, С. Н.* Метод сравнения в анализе систем 1, 2 / С. Н. Васильев // Дифференц. уравнения.— 1981.— Т. 17, № 9.— С. 1562–1573.

[48] *Видаль, П* Нелинейные импульсные системы / П. Видаль.— М.: Энергия, 1974.— 336 с.

[49] *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра.— М.: Наука, 1976.— 286 с.

[50] *Вуковбратович, М. К.* Управление манипуляционными роботами: Теория и применение / М. К. Вуковбратович, Д. М. Стокич // М.: Наука, 1985.— 384 с.

[51] *Вуковбратович, М. К.* Синтез управления возмущенным движением автоматических манипуляторов / М. К. Вуковбратович, Д. М. Стокич // Машиноведение.— 1982.— № 1.

[52] *Гайшун И. В.* Дискретные уравнения с изменяющейся структурой и устойчивость их решений / И. В. Гайшун // Дифференциальные уравнения.— 1997.— Т. 33, № 12.— С. 1607–1614.

[53] *Гайшун И. В.* Устойчивость дискретных процессов Вольтерра с убывающим последействием / И. В. Гайшун // Автомотика и телемеханика.— 1997.— № 6.— С. 118–124.

[54] *Гайшун И. В.* Управляемость система, описываемых линейными дискретными уравнениями Вольтерра / И. В. Гайшун, М. П. Дымков // Автомотика и телемеханика.— 2000.— № 7.— С. 88–100.

[55] *Гайшун И. В.* Системы с дискретным временем / И. В. Гайшун.— М.: Минск, 2011.

[56] *Гайшун И. В.* Системы с дискретным временем / И. В. Гайшун.— Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.

[57] *Гелиг А. Х.* Динамика импульсных системы и нейронных сетей / А. Х. Гелиг.— Л.: Изд-во Ленингр. ан-та, 1982.

[58] *Гелиг А. Х.* Устойчивость нелинейных импульсных систем по первому приближению / А. Х. Гелиг // ПММ.— 2003.— Т. 62, № 8.— С. 231–238.

[59] *Гелиг А. Х.* Стабилизация нестационарных импульсных системы / А. Х. Гелиг, И. Е. Зубер // Автоматика и телемеханика.— 2004.— № 5.— С. 29–37.

[60] *Гелиг А. Х.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / А. Х. Гелиг, Г. А. Леонов, В. А. Якубович // М.: Наука, 1978.

[61] *Гелиг А. Х.* Стабилизируемость двух классов нелинейных импульсных систем с последействием / А. Х. Гелиг, В. А. Муранов // Вестник С.-Петербург. ун-та, Сер. 1.— 2005.— Вып. 3.— С. 3–15.

[62] *Гелиг А. Х.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем / А. Х. Гелиг, А. Н. Чурилов // СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1993.

[63] *Голубев А. Е.* Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотически наблюдателем / А. Е. Голубев, А. П. Крищенко, С. Б. Ткачев // Автоматика и телемеханика.— 2005.— № 7.— С. 3–42.

[64] *Звягинцева Е. Э.* Об управлении механической системой с циклическими координатами / Е. Э. Звягинцева, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья №1 2013. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2013 - с. 217-221.

[65] *Зобова А. А.* Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами / А. А. Зобова, Я. В. Татаринов // Сб. Мобильные роботы и мехатронные системы. М: Изд-во МГУ, 2006.- с. 61-67.

[66] *Зобова А. А.* Свободное и управляемое движение некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами / А. А. Зобова, Я. В. Татаринов // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2008. №6. - с. 62-66.

[67] *Зобова А. А.* Динамика экипажа с роликонесущими колесами / А. А. Зобова, Я. В. Татаринов // ПММ. 2009. Т. 73.- Вып. 1.- с. 13-22.

[68] *Каленова В.И.* Неголономные механические системы и стабилизация движений / Каленова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А. // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005. — Т. 11, вып. 7. — С. 117-158.

[69] *Калман, Р.* Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб.— М.: Мир, 1971.— 400 с.

[70] *Камаева, Р. А.* К задаче слежения для колесного мобильного робота с неизвестной матрицей инерции / Р. А. Камаева, О. А. Перегудова // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009.- Т.16.- Вып. 4.- с. 664-665.

[71] *Карапетян, А. В.* Устойчивость стационарных движений / А. В. Карапетян.— М.: УРСС, 1998.

[72] *Карапетян А.В.* Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ. 1978. - Т. 43, вып. 5. - С. 801-807.

[73] *Карапетян А.В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем // ПММ. 1980. — Т. 44, вып. 3. — С. 418

[74] *Кириченова О. В.* Метод функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнения с почти периодическими коэффициентами / О. В. Кириченова, А. С. Котюргина, Р. К. Романовский // Сиб. мат. журн.ин.— 1996.— Т. 37, № 1.— С. 170–174.

[75] *Кириченова О. В.* Об устойчивости решений нелинейных почти периодических систем разностных уравнений / О. В. Кириченова // Сиб. мат. журн.ин.— 1996.— Т. 39, № 1.— С. 45–48.

[76] *Колмановский В. Б.* Об устойчивости некоторых дискретных процессов Вольтерра / В. Б. Колмановский, А. М. Родионов // Автоматика и телемеханника.— 1995, № 2.— С. 3–13.

[77] *Колмановский В. Б.* О применении второго метода Ляпунова к разностным уравнениям Вольтерра / В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханника.— 1995, № 11.— С. 50–64.

[78] *Колмановский В. Б.* Устойчивостьь дискретных уравнений Вольтерра / В. Б. Колмановский // Доклады Академии наук.— 1996.— Т. 349, № 5.— С. 610–614.

[79] *Красовский, Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений / Н. Н. Красовский // Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4 / И. Г. Малкин.— М.: Наука, 1966.— С. 475–514.

[80] *Крутько, П. Д.* Метод обратных задач динамики в теории конструирования алгоритмов управления манипуляционных роботов. задача стабилизации / П. Д. Крутько, Н. А. Лакота // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1987.— № 3.— С. 23–30.

[81] *Кудашова, Е. А.* Задача об управлении механическими системами. Синтез непрерывного и кусочно-непрерывного стабилизируеющего управления / Е. А. Кудашова // Ученые записки УлГУ. Сер. "Математика и информационные технологии".— Вып. 1. - Ульяновск: УлГУ, 2012.— С. 23–30.

[82] *Кудашова Е. А.* Об асимптотическом поведении решений неавтономной нелинейной системы второго порядка / Е. А. Кудашова // Труды Симбирской молодежной научной школы по аналитической динамике, устойчивости и управлению движениями и процессами, 8-12 июня 2009 г., г. Ульяновск. –Ульяновск:УлГУ, 2009. С. 67-68.

[83] *Кудашова Е. А.* Прямой метод Ляпунова в задаче об устойчивости неавтономных дискретных систем типа Лотки - Вольтерра / Е. А. Кудашова // Труды X международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление», 12-16 июня 2012г., г. Казань. – Том 2. – Сек. 2. Устойчивость. – Казань: КНИТУ КАИ. – с. 316-322.

[84] *Кудашова Е. А.* Метод векторных функций Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости разностных систем / О. А. Перегудова, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья №1 2015. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2015.— с.118-121

[85] *Кудашова Е. А.* О стабилизации механической системы с одной степенью свободы и с цифровым управлением // Труды международной конференции по математической теории управ-ления и механике, 3-7 июля 2015г., г. Суздаль. – с. 80-81

[86] *Кудашова Е. А.* Стабилизация движения трехколесного робота // Патент РФ на программу для ЭВМ №2015615314. Москва, Роспатент, 2015.

[87] *Кулешов, В. С.* Динамика систем управления манипуляторами / В. С. Кулешов, Н. А. Лакота.— М.: Энергия, 1971.— 304 с.

[88] *Кузъмин, А. В.* Программная реализация алгоритма построения управления мобильным колесным роботом при учете проскальзывания колес / О. А. Перегудова, А. В. Кузьмин, Д. Ю. Моторина // Автоматика и телемеханика.— 2011.— № 4.

[89] *Кузнецов, Н. В.* Критерии неустойчивости по первому приближению нелинейных дискретных систем / Н. В. Кузнецов, Г. А. Леонов // Вестник С.-Петерб. ун-та, Сер. 1.— 2005.— Вып. 3. С. 30-42.

[90] *Кунцевич, В. М.* Синтез робастно устойчивых дискретных систем управления нелинейными объектами / В. М. Кунцевич, А. А. Кунцевич // Автоматика и телемеханика.— 2008.— № 12.— С. 105-118.

[91] *Кунцевич, В. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак.— М.: Наука, 1977.— 400 с.

[92] *Лефшец С.* Устойчивость нелинейных систем автоматического управления / С. Лефшец. — М.: Мир, 1967.

[93] *Лакшмикантам В.* Устойчивость движения: метод сравнения / В. Лакшмикантам, С. Лила, А. А. Мартынюк. — Киев: Наукова думка, 1991.— 248 с.

[94] *Леонов, Г. А.* Проблема Броккета для линейных дискретных систем управления / Г. А. Леонов // Автоматика и телемеханика.— 2002.— № 5. С. 92-96.

[95] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М.: Гостехиздат, 1950.

[96] *Маликов, А. И.* Вектор-функции Ляпунова в анализе свойств систем со структурными изменениями / А. И. Маликов, В. М. Матросов // Дифференц. уравнения.— 1998.— № 2.— С. 47–54. 530 с.

[97] *Малкин, И. Г.* Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин.— М.: Наука, 1966.— 530 с.

[98] *Маркеев, А. П.* Теоретическая механика / А. П. Маркеев.— М.: ЧеРо, 1999.— 569 с.

[99] *Мартыненко, Ю. Г.* О движении мобильного робота с роликонесущими колесами / Ю. Г. Мартыненко, А. М. Формальский // Известия РАН. Теория и системы управления.— 2007.— № 6.— С. 142–149.

[100] *Мартыненко, Ю. Г.* Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс / Ю. Г. Мартыненко // ПММ.— 2010.— Т. 74.— Вып. 4.— С. 610–619.

[101] *Мартыненко Ю.Г.* Управление движением мобильных колесных роботов. // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005. — Т. 11, вып. 8. — С. 29-80.

[102] *Мартынюк, А. А.* Анализ устойчивости дискретных систем / А. А. Мартынюк // Прикладная механика.— 2000.— Т. 36, № 7.— С. 3–35.

[103] *Матросов, В. М.* Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова 1, 2 / В. М. Матросов // Дифференц. уравнения.— 1968.— Т. 4, № 8.— С. 1374–1386.

[104] *Матросов, В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем / В. М. Матросов.— М.: Физматлит, 2001.— 380 с.

[105] *Матюхин, В. И.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов / В. И.

Матюхин, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 1989.— № 9.— С. 67–72.

[106] *Матюхин, В. И.* Устойчивость движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции / В. И. Матюхин // Автоматика и телемеханика.— 1989.— № 3.— С. 33–44.

[107] *Матюхин, В. И.* Устойчивость движения механических систем при учете постоянно действующих возмущений / В. И. Матюхин // Автоматика и телемеханика.— 1993.— № 11.— С. 124–134.

[108] *Матюхин, В. И.* Сильная устойчивость движений механических систем / В. И. Матюхин // Автоматика и телемеханика.— 1996.— № 1.— С. 37–56.

[109] *Матюхин, В. И.* Универсальные законы управления механическими системами / В. И. Матюхин.— М.: МАКС Пресс, 2001.— 252 с.

[110] *Матюхин, В. И.* Управляемость механических систем в классе управлений, ограниченных вместе с производной / В. И. Матюхин, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 2004.— № 8.— С. 14–38.

[111] *Матюхин, В. И.* Управление механическими системами / В. И. Матюхин.— М.: Физматлит, 2009.— 320 с.

[112] *Матюхин, В. И.* Управление движением манипулятора / В. И. Матюхин.— М.: ИПУ РАН, 2010.— 96 с.

[113] *Михеев, Ю. В.* Ассимтотический анализ цифровых систем управления / Ю. В. Михеев, В. А. Соболев, Э. М. Фридман // Автоматика и телемеханика.— 1988.— № 5.— С. 83–88.

[114] *Медведев, В. С.* Системы управления манипуляционных роботов / В. С. Медведев, А. Г. Лесков, А. С. Ющенко.— М.: Наука, 1978.— 416 с.

[115] *Моторина, Д. Ю.* Об отслеживании траектории колесного робота с неизвестной массой с помощью непрерывного управления с запаздыванием / О. А. Перегудова, Д. Ю. Моторина // Материалы конференции "Управление в технических системах"(УТС-2010). Санкт-Петербург: ОАО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор.— 2010.— С. 362-365.

[116] *Моторина, Д. Ю.* Алгоритм построения запаздывающего управления для мобильного робота при учете эффекта проскальзывания колес / Д. Ю. Моторина // Обозрение прикладной и промышленной математики.— 2010.— Т.— 17.— Вып. 5.— С. 753-754.

[117] *Моторина, Д. Ю.* Синтез управления для механических систем с неизвестной матрицей инерции при учете запаздывания в структуре обратной связи / Д. Ю. Моторина // Автоматизация процессов управления.— 2010.— №. 4.

[118] *Моторина Д.Ю.* Построение алгоритма синтеза управления с насыщением в задаче слежения для колесного мобильного робота //

Журнал Средневолжского математического общества. — 2010. — Т. 12, №3. -С. 102-110.

[119] *Пахомов, К. В.* Синтез запаздывающего управления движением колесного робота на основе метода бэкстеппинга / К. В. Пахомов, О. А. Перегудова, Е. В. Филаткина // Научно-технический вестник Поволжья.— 2013.— № 2.— С. 37–40.

[120] *Перегудова, О. А.* Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем / О. А. Перегудова.— Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2009.— 253 с.

[121] *Перегудова, О. А.* О стабилизации движений неавтономных механических систем / О. А. Перегудова // ПММ.— 2009.— Т. 72.— Вып. 4.— С. 620.

[122] *Перегудова, О. А.* Уравнения сравнения в задачах об устойчивости движения / О. А. Перегудова // Автоматика и телемеханика.— 2007.— № 9.— С. 56–63.

[123] *Перегудова, О. А.* О стабилизации нелинейных систем с кусочно-постоянным управлением при помощи метода бэкстеппинга / О. А. Перегудова, К. В. Пахомов // Автоматизация процессов управления.— 2013.— № 4(34).

[124] *Петров, Б. Н.* Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики / Б. Н. Петров, П. Д. Крутько, Е. П. Попов // Докл. АН СССР.— 1979.— № 5.— С. 1078–1081.

[125] *Попов, Е. П.* Системы управления манипуляционных роботов / Е. П. Попов, А. Ф. Верещагин, С. Л. Зенкевич.— М.: Наука, 1978.— 400 с.

[126] *Попов, Е. П.* Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы. / Е. П. Попов, А. Ф. Верещагин, С. Л. Зенкевич.— М.: Наука, 1978.— 398 с.

[127] *Пятницкий, Е. С.* Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции / Е. С. Пятницкий // Известия АН СССР. Техническая кибернетика.— 1987.— № 3.— С. 92–99.

[128] *Пятницкий, Е. С.* Принцип декомпозиции и в управлении механическими системами / Е. С. Пятницкий // ДАН СССР.— 1988.— Т.— 300.— № 2.— С. 300-303.

[129] *Пятницкий, Е. С.* Синтез систем стабилизации программных движений нелинейных объектов управления / Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 1993.— № 7.— С. 19-37.

[130] *Ремшин, С. А.* Синтез управления двузвенным манипулятором / С. А. Ремшин // Известия РАН. Теор. и сист. упр.— 1997.— № 2.— С. 146–150.

[131] *Ремшин, С. А.* Синтез управления в нелинейной динамической систему на основе декомпозиции / С. А. Ремшин, Ф. Л. Черноусько // Прикл. матем. и мех. — 1998.— Т. 62, вып. 1.— С. 121–128.

[132] *Родионов, А. М.* Притяжение для дискретных уравнений, приложение к динамике популяций / А. М. Родионов // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 2.— С. 76-85.

[133] *Родионов, А. М.* О некоторых дискретных моделях межвидового взаимодействия / А. М. Родионов // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 12.— С. 122-129.

[134] *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. — М.: Наука, 1971.— 395 с.

[135] *Румянцев, В. В.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В. В. Румянцев, А. С. Озиранер. — М.: Наука, 1987,- 253 с.

[136] *Самарский, А. А.* Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Наука, 1973,- 397 с.

[137] *Самойленко, А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко. — Киев.: Вища школа, 1987.

[138] *Тимофеев А. В.* Устойчивость и стабилизация программного движения робота-манипулятора / А. В. Тимофеев, Ю. В. Экало // Автоматика и телемеханика.— 1996.— № 10.

[139] *Халанай А.* Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. — М.: Мир, 1971.- 309 с.

[140] *Халил Х. К.* Нелинейные системы / Х. К. Халил.— М.: Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт клмпьютерных исследований, 2009.— 832 с.

[141] *Уткин, В. И.* Скользящие режими и их применения в системах с переменной структурой / В. И. Уткин. — М.: Наука, 1974.

[142] *Филиппов, А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985.

[143] *Финогенко, И. А.* О задачах слежения, управляемости и стабилизации для механических систем с использованием комбинаций разрывных обратных связей и импульсных управлений / И. А. Финогенко // Труды IX Международной Четаевской Конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением посвященной 105-летию Н. Г. Четаева.— Иркутск: Сибирское отделение РАН.— 2007.— Т. 2.— С. 299–307.

[144] *Фишман, Л. З.* О сохранении областей притяжения при дискретизации непрерывных систем / А. М. Родионов // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 5.— С. 93-97.

[145] *Фурасов, В. Д.* Устойчивость и стабилизация дискретных процессов / В. Д. Фурасов. — М.: Наука, 1982.- 192 с.

[146] *Цыпкин, Я. З.* Теория линейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин. — М.: Наука, 1963.- 968 с.

[147] *Цыпкин, Я. З.* Теория нелинейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин, Ю. С. Попков. — М.: Наука, 1973.- 414 с.

[148] *Цыпкин, Я. З.* Дискретные адаптивные системы управления / Я. З. Цыпкин, Г. К. Кельманс // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Серия "Техническая кибернетика". — М.: 1984.— № 17.

[149] *Черноусько, Ф. Л.* Методы управления нелинейными механическими системами / Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин.— М.: Физматлит, 2006.— 326 с.

[150] *Черноусько, Ф. Л.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация / Ф. Л. Черноусько, Н. Н. Болотник, В. Г. Градецкий.— М.: Физматлит, 1989.— 368 с.

[151] *Чурилов А. Н.* Стабилизация линейной системы с помощью комбинированной импульсной модяции / А. Н. Чурилов // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 10. С. 71-76.

[152] *Шепелявый А. И.* О качественном исследовании устойчивости в целом и неустойчивости амплитудно-импульсных систем / А. И. Шепелявый // Доклады АН СССР.— 1970.— Т. 190.— № 5. С. 1044-1047.

[153] *Юревич, Е. И.* Основы робототехники / Е. И. Юревич.— 2-е изд.— СПб.: БХВ-Петербург, 2005.— 416 с.

[154] *Юревич, Е. И.* Теория автоматического управления / Е. И. Юревич.— 3-е изд.— СПб.: БХВ-Петербург, 2007.— 560 с.

[155] *Юрков, А. В.* Задачи стабилизации программных движений управляемых динамических систем / А. В. Юрков // Электронный журнал "Исследовано в России".— 2001.— С. 147-164.

[156] *Araki, M.* Stability of sampled-data composite systems with many nonlinearities / M. Araki, K. Ando, B. Kondo // IEEE Trans. Automat. Contr.— AC-16, 1971.— Pp. 22–27.

[157] *Artstein, Z.* Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations. In the Stability of Dynamical Systems, (Appendix A), CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics.— Vol. 25, SIAM, Philadelphia, 1976.— Pp. 57–76.

[158] *Artstein, Z.* On the limiting equations and invariance of time-dependent difference equations // Stability of dynamical systems (Theory and applications) Proceedings of NSF conference, Mississippi State University .— 1976.— Pp. 3–9.

[159] *Artstein, Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation / Z. Artstein // J. Different. Equat.— 1977.— Vol. 23, no. 2.— Pp. 216–223.

[160] *Basson, M.* Harvesting in discrete-time predator-prey systems / M. Basson, M. J. Fogarty // Math. Biosci.— 1977.— Vol. 141, no. 1.— Pp. 41–47.

[161] *Choi S. K.* H-stability for nonlinear perturbated difference systems / S. K. Choi, N. J. Koo, S. M. Song // Bull. Korean Math. Soc. 41 (2004), No. 3.- Pp. 435-450.

[162] *Choi S. K.* Asymptotic behavior of nonlinear volterra difference systems / S. K. Choi, Y. H. Goo, N. J. Koo // Bull. Korean Math. Soc. 44 (2007), No. 1.- Pp. 177-184.

[163] *Corradini M.* Experimental testing of a discrete-time sliding mode controller for trajectory tracking of a wheeled mobile robot in the presence of skidding effects / M. Corradini, T. Leo, G. Orlando // J. of Rob. Syst. 2002. V. 19.- Pp. 177-188.

[164] *Damoto R.* Holonomic omni-directional vehicle with new omni-who mechanism / R. Damoto, W. Cheng, S. Hirose // Proc. of the 2001 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. Seul, Korea, 2001.— Pp. 773–778.

[165] *Dash, A. T.* Polygamy in human and animal species / A. T. Dash, R. Gressman // Math. Biosci.— 1988.— Vol. 88, no. 1.— Pp. 49–66.

[166] *Elaydi S.* An introduction to Difference Equations. Third Edition. Springer-Verlad. - New York, 2004.

[167] *Elaydi S.* Stability of difference equations. Differencial equations and applications / S. Elaydi, A. Peterson // Proc. Int. Conf., Columbus/OH (USA).— 1989.— Pp. 235-238.

[168] *Hahn W.* Theorie and Anwendung der direkten Methode von Lyapunov. Springer-Verlad. — Berlin, 1959.

[169] *Hsien Y.* The phenomenon of unstable oscilation in population models / Y. Hsien // Math. Comput. Model.— 1988.— Vol. 10, no. 6.— Pp. 429–435.

[170] *Kurzweil J.* Structural stability of linear discrete systems via tthe exponential dichotomy / J. Kurzweil, G. Papaschinopoulos // Grech. Math. J.— 1988.— Vol. 38 (113), no. 2.— Pp. 280–284.

[171] *Lacshmikantham V.* Stability analysis of nonlinear systems / V. Lacshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk // Singapore: World Scientific.— 1990.— 207 p.

[172] *Lacshmikantham V.* Stability analysis of nonlinear systems / V. Lacshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk // New York: World Scientific.— 1989.— 207 p.

[173] *Lacshmikantham V.* Theory of difference equations: numerical methods and applications / V. Lacshmikantham, D. Trigiante // New York: Marcel Dekker, Inc.— 2002.— 320 p.

[174] *LaSalle J.P.* The stability of dynamical systems. SIAM, Philadelphia, Pennsilvania, 1976. – 76 p.

[175] *LaSalle J.P.* Stability of difference equations. In a Study in Ordinary Differential Equations (edited by J. K. Hale), Studies in Mathematical Series, Mathematical Association of America, 1977.

[176] *LaSalle J.P.* The stability and control of discrete processes. (Applied mathematical sciences; vol. 62), Springer-Verlag, 1986.- 147 p.

[177] *Lin W.* Feedback stabilization of general nonlinear control systems: a passive systems approach // Systems and control letters.- 1995.- Vol. 25.- Pp. 41-52.

[178] *Lin W.* Passivity and absolute stabilization of a class of discrete-time nonlinear systems / W. Lin, C. I. Byrnes // Automatica.- 1995.- Vol. 32(2).- Pp. 263-267.

[179] *Liu D.* Asymptotic stability of a class of linear discrete systems with multiple independent variables / D. Liu, A. Molchanov // Circuits systems signal processing. Vol. 22,. No. 3, 2003.- Pp. 307-324.

[180] *Liu Y.* Integrated control and navigation for omni-directional mobile robot based on trajectory linearization / Y. Liu, R. L. Williams II, J. J. Zhu // Proceedings of the 2007 American Control Conference. New York. USA. 2007.- Pp. 2153-2158.

[181] *Mickens R.* Applications of nonstandard finite differece schemes. World Scientific. Singapore, 2000.

[182] *Monaco S.* On the conditions of passivity and losslessness in discrete time. / S. Monaco, D. Normand-Cyrot // Proc. European control conference.- 1997.- 5 p.

[183] *Navarro-Lopez E. M.* Implications of dissipativity and passivity in the discrete-time setting. / E. M. Navarro-Lopez, D. Cortes, E. Fossas-Colet.- 1999.

[184] *Navarro-Lopez E. M.* Dissipativity, passivity and feedback passivity in the nonlinear discrete-time setting. / E. M. Navarro-Lopez, E. Fossas-Colet.- 1999.

[185] *Nesic D.* On uniform asymptotic stability of time-varying parameterized discrete-time cascades / D. Nesic, A. Loria // arXiv: math/0307167v1 [math.OC] 11 Jul 2003.

[186] *Nino-Suarez P. A.* Discrete-time feedback linearization of a wheeled mobile robot subject to transport delay / P. A. Nino-Suarez, M. Velasco-Villa, E. Aranda-Bricaire // Congreso Latinoamericano de Control Automatico, La Habana Cuba, 2006.

[187] *Nino-Suarez P. A.* Discrete-time sliding mode path-tracking control for a wheeled mobile robot / P. A. Nino-Suarez, M. Velasco-Villa, E. Aranda-Bricaire // 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA, USA, 2006. Pp. 3052-3057.

[188] *Oliveira H. P* Precise Modeling of a Four Wheeles Omni-directional Robot / H. P. Oliveira, A. J. Sousa, A. P. Moreira, P. J. Costa // Proceedings of the 8th Conference on Autonomous Robot Systems and Competitions, 2008.

[189] *Orosco-Guerro G.* Discrete-time controller for a wheeled mobile robot / G. Orosco-Guerro, M. Velasco-Villa, E. Aranda-Bricaire // Proc., XI Latin-American Congress of Automatic Control, La Habana, Cuba, 2004.

[190] *Purwin O.* Trajectory generation and control for four wheeled omnidirectional vehicles / O. Purwin, R. D'Andrea // Robotics and Autonomous Systems, 2006. V. 54(1).- Pp. 13-22.

[191] *Rondoni L.* Autocatalytic reactions as dynamical systems on the interval / L. Rondoni // J. Math. Phys.- 1993.- Vol. 34.- no. 11.- Pp. 5238-5251.

[192] *Sedaghat H.* A class of nonlinear second order difference equations from macroeconomics / H. Sedaghat // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl.- 1997.- Vol. 29.- no. 5.- Pp. 593-603.

[193] *Tchuente M.* Suites generees par une equation neuronale a memoire (Sequences generated by a neuronal recurrence equation with memory) / M. Tchuente, G. Tindo // C. R. Acad. Sci. Paris.- 1993.- Ser I.- vol. 317.- no. 6.- Pp. 625-630.

[194] *Sell G. R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics 1, 2 / G. R. Sell // Trans. Amer. Math. Soc.— 1967.— Vol. 127.— Pp. 241–283.

[195] *Simonovits A.* Chaotic dynamics of economic systems / A. Simonovits // Szigma.— 1985.— Vol. 18.— Pp. 267–277.

[196] *Yang T.* Impulsive Control Theory.— Berlin, Heidelberg: Springer, 2001.

# A ОПИСАНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ TROWTH.EXE

## A.1 Отличительные особенности

Разработанная программа представляет самостоятельное кроссплатформенное приложение, спроектированное на языке JavaSE 7u75;

Отличительными особенностями приложения являются:

- Математический пакет собственной разработки, а так же модуль наглядного отображения и ввода математических формул. Модуль полностью построен на векторной графике, что позволяет редактору адаптироваться под любые разрешения экрана, описанная идея ранее нигде не использовалась и полностью принадлежит автору.
- В данном продукте реализована идея живого приложения, по возможности автор освобождает пользователя от нажатия на лишние кнопки. Как только пользователь вносит малейшее изменение в параметры, графики, изменяет формулы, незамедлительно происходят все необходимые перерасчеты и перепостроения. Например, в основном разделе моделирования не используется не единой кнопки, а благодаря многопоточной оптимизации внутренних расчетов производительность интерфейса практически не снижается.
- Векторный движок собственной разработки, благодаря нему программный продукт выглядит одинаково хорошо как на большом мониторе, так и на экране мобильного телефона. Кроме

того реализована возможность программного сглаживания готового изображения, что позволяет рисовать дробную часть пикселя и в конечном итоге позволяет получить наилучшее отображение графиков и текста.

Все изображения, используемые в приложении защищены авторским правом, алгоритмы и методы, используемые в приложении являются интеллектуальной собственностью автора. Стабилизация движения трехколесного робота . Патент РФ на программу для ЭВМ №201561534. Москва, Роспатент, заявка № 2015612544. Дата поступления 25.03.2015. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 15.05.2015.

Приложение предназначено для моделирования управляемого движения трехколесного робота, анализа качества управления, скорости выхода робота на желаемую траекторию движения, результаты математического моделирования которого используются в параграфе 3.3 главы 3 настоящей диссертации.

Моделирование начинается с запуска приложения trowth.exe для Windows и trowh.jar - для Linux, в основном меню рис.(A.1) программы пользователю предоставляется возможность ознакомиться с теоретической частью, лежащей в основе математического моделирования управляемого движения колесного робота, ознакомиться с информацией об авторах проекта или перейти к демонстрации работы заложенного закона управления.

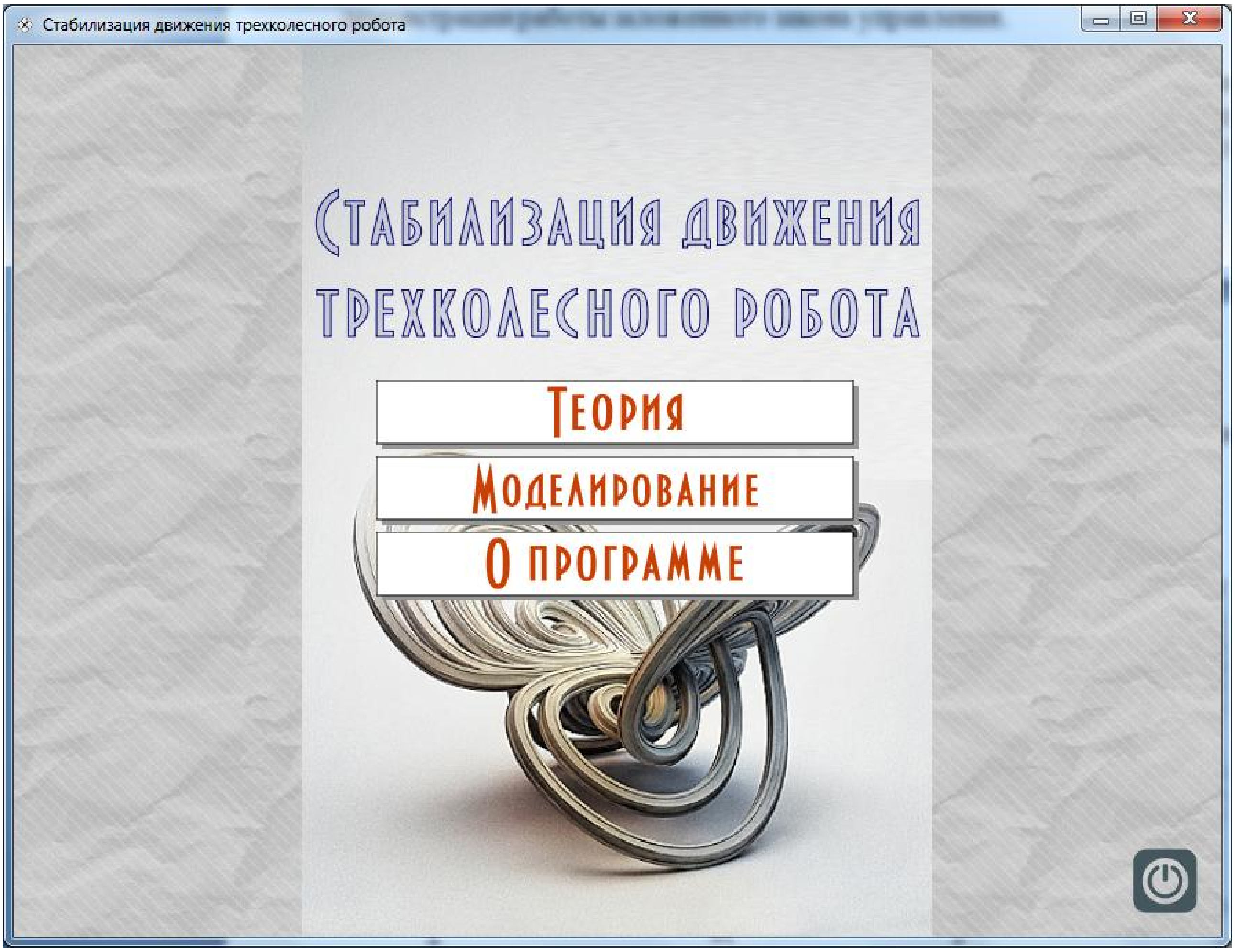


Рис. А.1: Внешний вид главного меню

**Теоретический раздел**

В теоретическую часть входит схематическое изображения управляемого объекта, система дифференциальных уравнений, описывающая движение робота и описание характеристик, использующихся в построении управления рис.(А.2). Подробные теоретические выкладки содержатся в главе 3 настоящей диссертации.

**Раздел моделирование**

При переходе непосредственно к математическому моделированию пользователю предлагается задать параметры системы, параметры управления, а так же начальные точки положения робота, либо согласиться

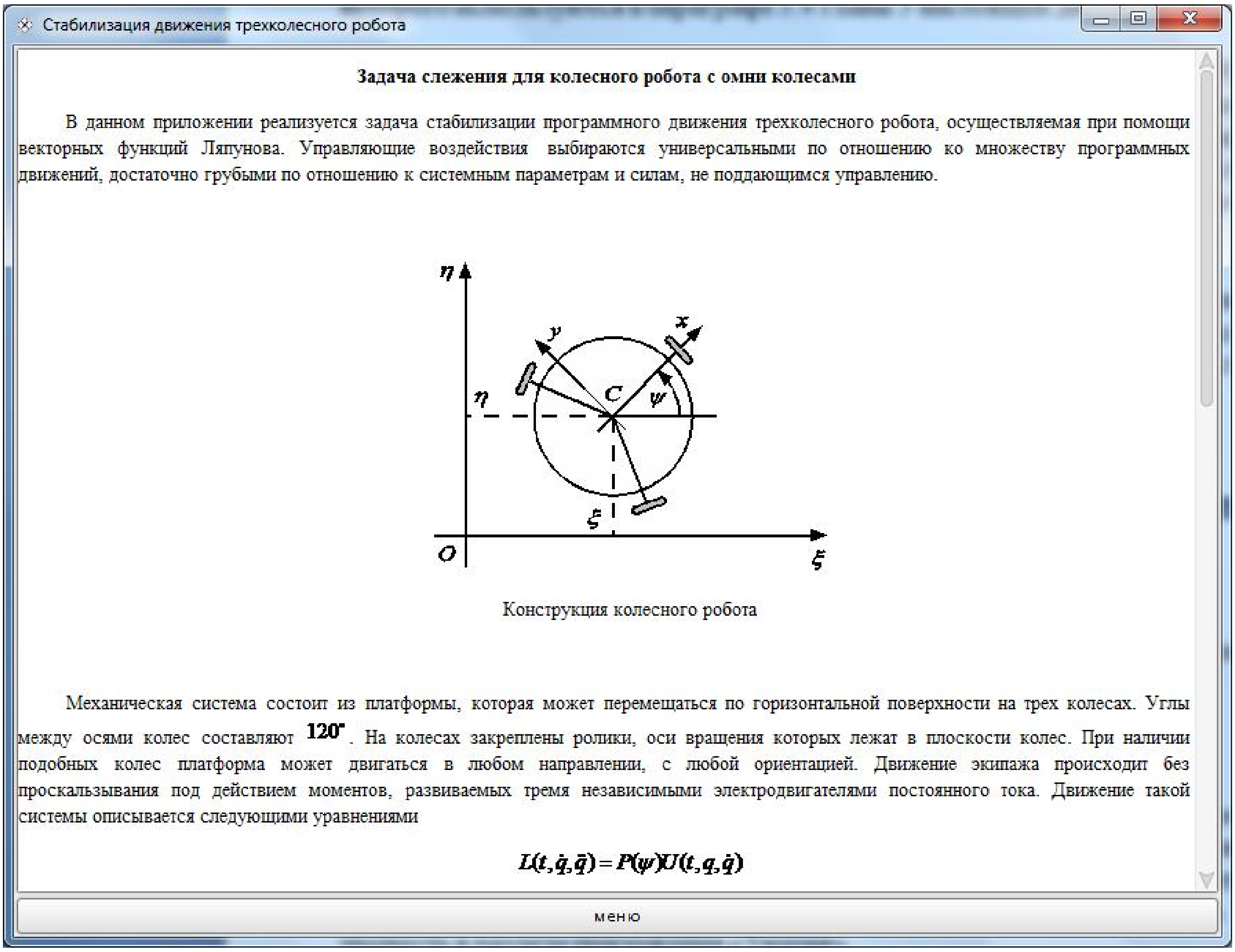


Рис. А.2: Внешний вид теоретического раздела

с предложенными рис.(А.3). О значении каждого из параметров пользователь может прочесть в разделе приложения «Теория».

Следующим этапом работы с программой является задание движения робота одним из следующих способов рис.(А.4):

1. Аналитический ввод функций, описывающих движение робота;

2. Задание траектории движения графически;

3. Загрузить файлы с массивами данных.

В случае возникновения ошибки на одном из этапов ввода данных, пользователь незамедлительно увидит предупреждение о некорректном вводе и возможных методах исправления ошибки.

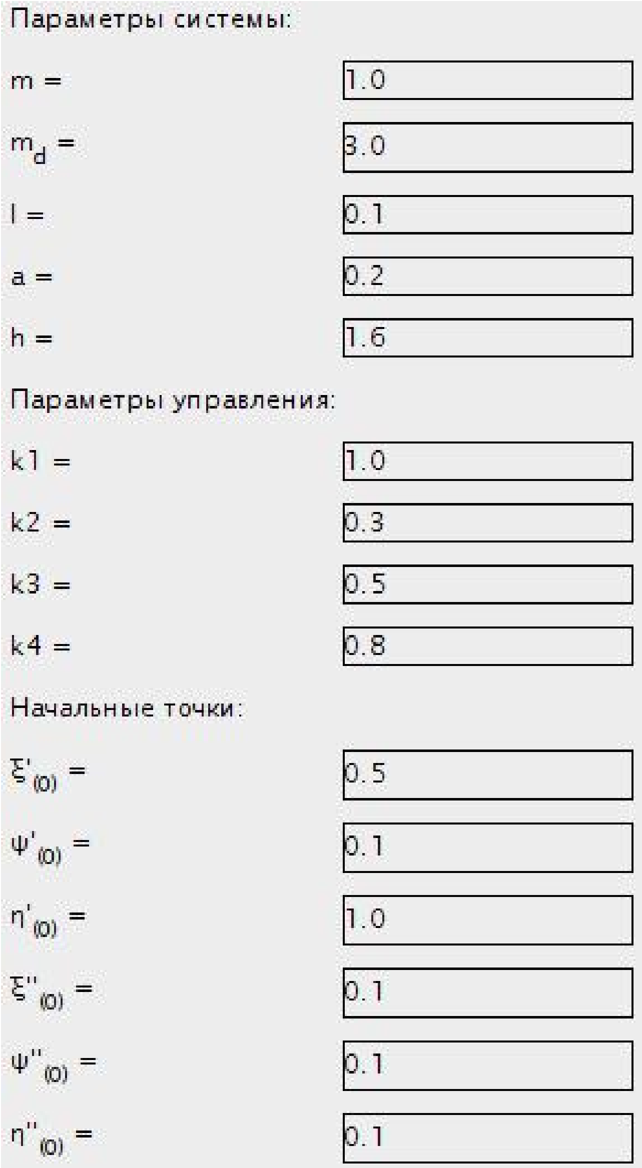


Рис. А.3: Параметры для расчетов

### Задание закона движения робота аналитически

Ввод формул данным методом задействует достаточно мощный математический пакет самостоятельно разработанный автором.

Использование векторной графики позволило сделать ввод формулы интерактивным, формула во время ввода автоматически занимает все доступное для нее место, в правой части стоит приглашение к вводу в виде знака "[?]". При клике мыши на этот значок выпадает список с вариантами возможных операций. Процесс создания формулы

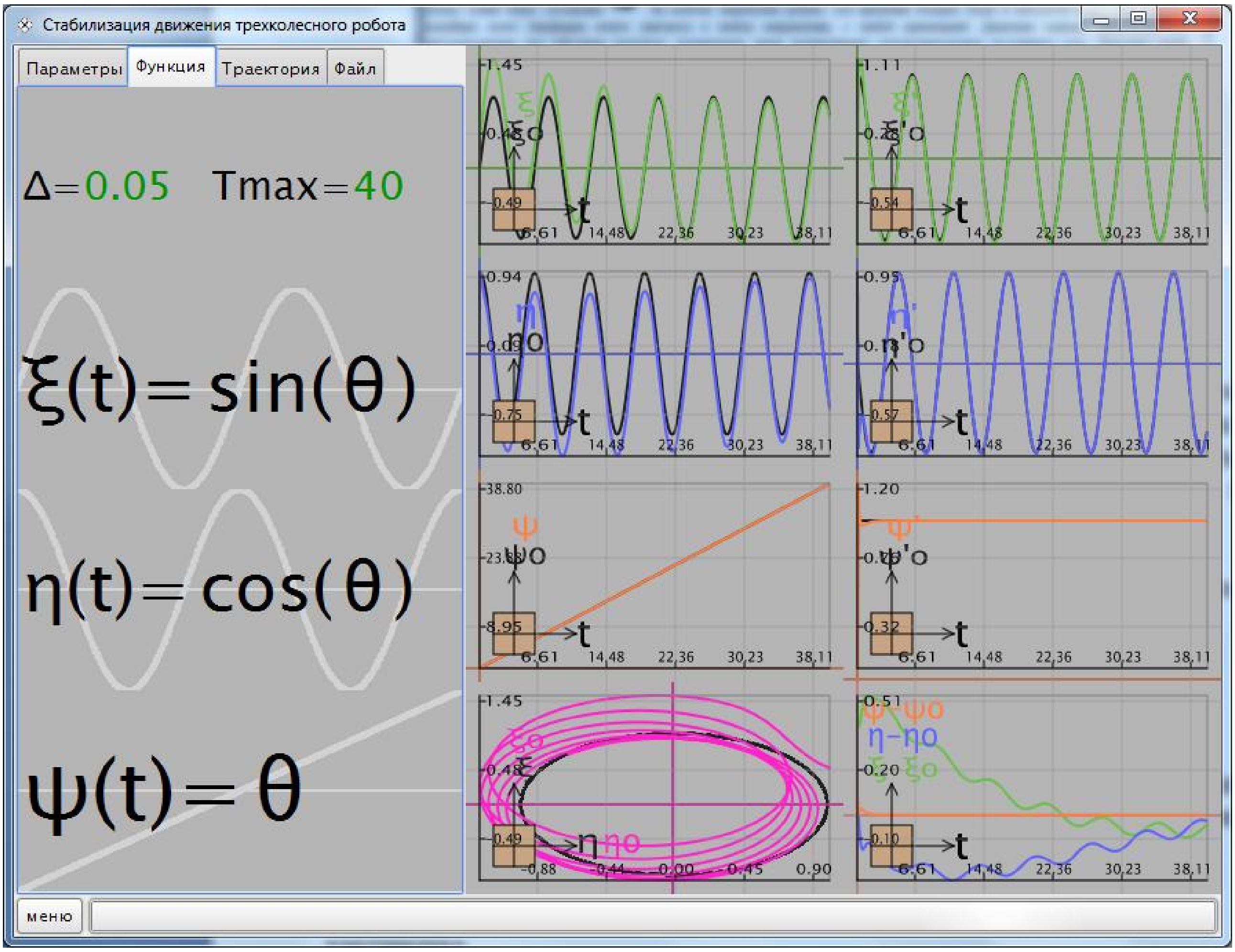


Рис. А.4: Внешний вид раздела моделирование

ведется путем собирания формулы из отдельных функциональных блоков. После ввода формулы происходит её компиляция в оперативную память и при каждом следующем обращении процессор практически не участвует в вычислении, за счет этого достигается высокая скорость производительности пакета. Стоит отметить, что тестирование скорости обработки формул математическим пакетом, выявило его преимущество перед такими известными инструментами, как MathCad 14 и Maple 12. Несомненно, преимущество в скорости обусловлено относительно скромным набором функций, входящих в арсенал разработанного продукта, однако, библиотека формул является более чем достаточной для проведения моделирования и может быть расширена при необходимости.

Для более подробного ознакомления с реализацией математического пакета см. Приложение 2-2.4.

На первом этапе пользователю предлагается ввести функции $\xi = \xi_0(t), \eta = \eta_0(t), \psi = \psi_0(t)$, описывающие движение робота, а так же шаг дискретизации $\delta$ и время моделирования $T_{max}$ рис.(А.5). По мере введения каждой функции под ней рисуется миниатюра графика, что позволяет ориентироваться и подбирать коэффициенты в сложных формулах. По окончанию ввода последней формулы незамедлительно происходит моделирование управляемого движения робота.

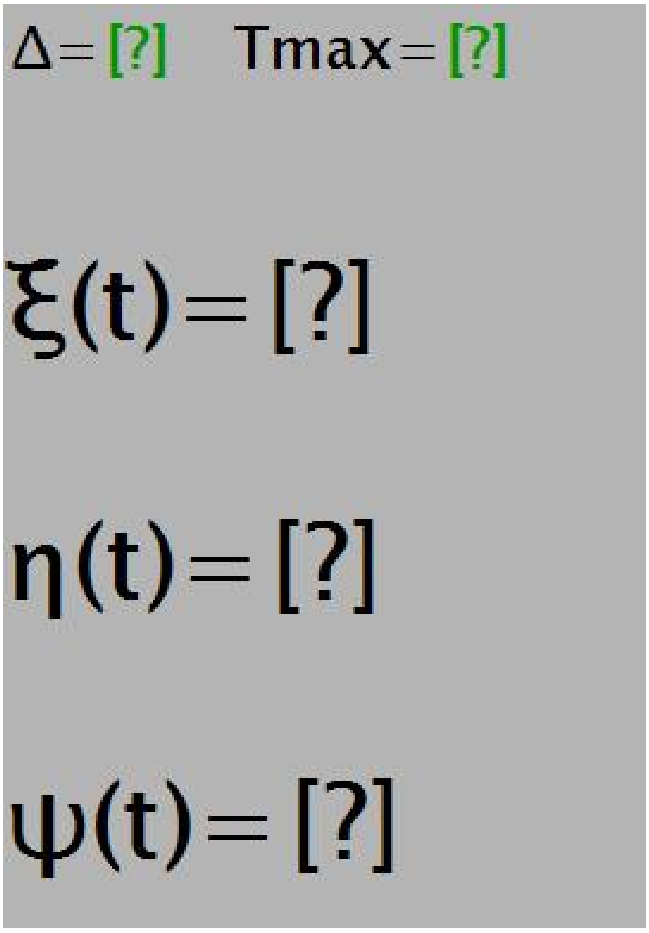


Рис. А.5: Система ожидает ввода управления с помощью формул

При наборе формулы поддерживаются следующие действия:

- все математические операции (умножение, деление, сложение, вычитание, возведение в степень);
- ввод без ограничения по длине формулы;
- ввод без ограничений по количеству вложенных скобок;
- добавление делегированных тригонометрических и алгебраических функций $(sin(t), cos(t), tg(t), ctg(t), exp(t), ln(t)\ )$;
- ввод делегированных констант $\pi$ ;
- ввод независимой переменной $t$;

Приоритеты операций в редакторе являются общепринятыми в математике, так, например в выражении $x + y * z$ сначала будет выполнено умножение, а потом сложение.

Кроме того, редактор дает возможность менять приоритеты по умолчанию, указывая их в явном виде с помощью символов парных скобок. При этом глубина вложенности прямо пропорциональна величине приоритета, то есть более внутренние скобки указывают на больший приоритет, чем внешние, обрамляющие их. В предыдущем примере с суммой и произведением порядок вычисления можно поменять, используя скобки, записав всё выражение так:

$$(x + y) * t$$

Очередность ввода компонент уравнения осуществляется путем движения извне вовнутрь. Пример $sin(t) + 2 * t$, порядок действий ввода:

1. Добавить действие сложение;

2. Левый аргумент блока сложения заменить на функцию $sin([?])$;
3. Добавить переменную времени аргументом функции;
4. Правый аргумент блока сложения заменить на блок умножения;
5. Левый аргумент блока умножения заменить на число(выделен зеленым);
6. Ввести число;
7. Правый аргумент блока умножения заменить на переменную времени;

Если все действия проделаны правильно, на заднем плане отрисуется график функции рис.(А.6).

**Метод ввода траектории движения робота графически**

Если пользователь выбирает графический способ ввода траектории, перед ним открывается поле для поточечного ввода произвольной траектории рис.(А.7). Изначально поле представляется чистым листом на который можно нанести неограниченное количество точек. Каждая из точек имеет три характеристики (координаты на плоскости и угол поворота).

Ввод данных организован при помощи двух совокупных плоскостей $\xi O\psi$, $\eta O\psi$, переключение между которыми производится нажатием на перекрестие в левом нижнем углу. Скорость движения робота в этом случае принимается постоянной на каждом отрезке ломанной.

При редактировании траектории мгновенно происходит расчет управления и управляемого движения и отображается результат

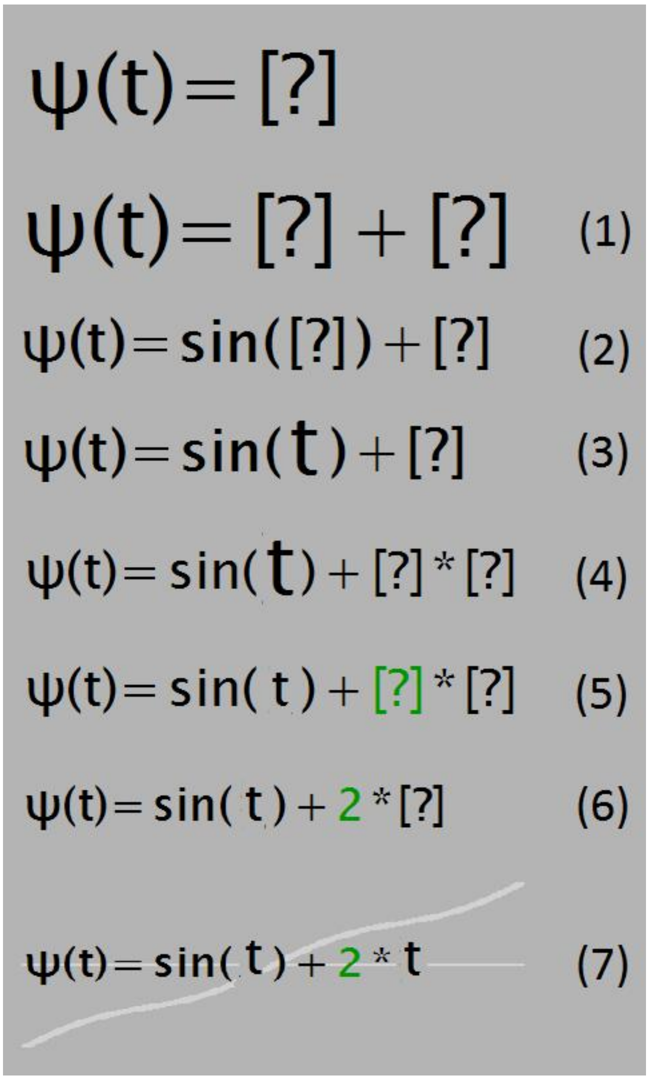


Рис. А.6: Типичный ввод формулы по этапам функции $sin(t) + 2 * t$

математического моделирования.

Редактор является авторской разработкой и предоставляет возможность поточечного ввода траектории. Модуль позволяет вводить любые значения от -1.7e+308 до 1.7e+308 с точность до 1e-12.

Для более подробного ознакомления с модулем ввода траектории см. Приложение 3.

Основные инструменты редактора:

- удалить траекторию;
- добавление точки по клику в любой части рабочей области;

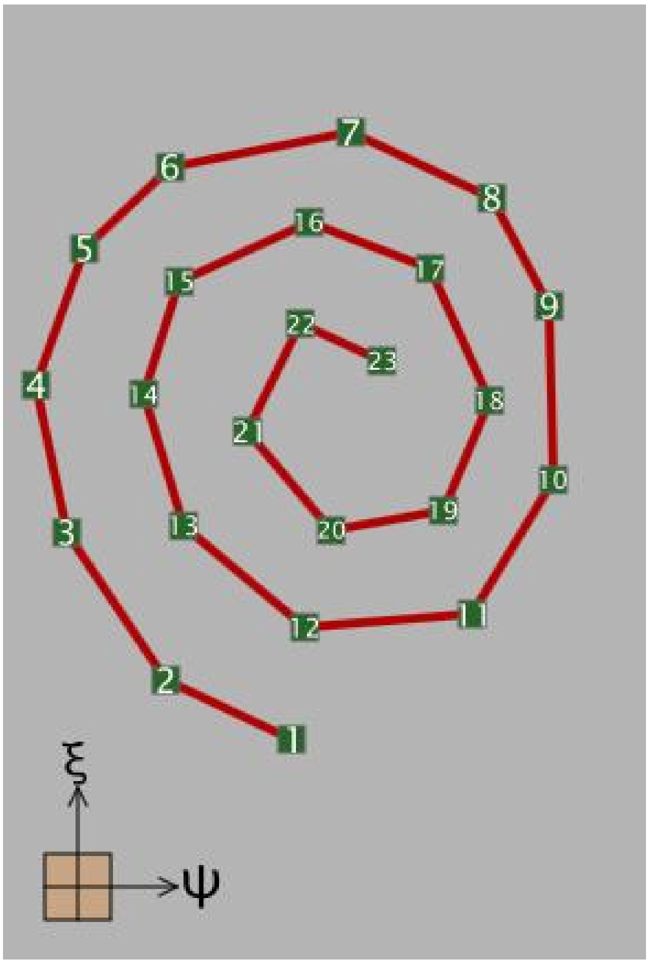


Рис. A.7: Внешний вид модуля ввода траектории

- вставить точку в произвольную часть ломаной;
- переместить точку без разрыва траектории;
- удалить узловую точку без разрыва траектории;
- замкнуть траекторию путем соединения

Благодаря векторной графике, лежащей в основе проектирования приложения, в данном модуле поддерживается масштабирование ломаной в широких пределах, что позволяет пользователю редактировать степень излома траектории. В случае, если траектория скрывается из рабочей области, на границах плоскости появляются ключевые точки, предоставляющие информацию о положении ломаной за пределами рабочей области.

**Метод ввода файлом массивом данных**

При выборе этого метода ввода, пользователю необходимо загрузить в программу файл с уже сформированным управлением. Данный программный продукт позволяет провести импорт из Microsoft Excell рис.(А.8). На данный момент программный продукт поддерживает два расширения файла:

- cvs;
- msr - внутреннее расширение.

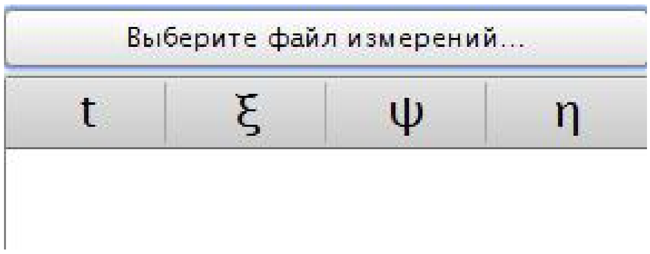


Рис. А.8: Внешний вид формы для ввода массива данных

Данные полученные из массива итерационно подставляются в формулы. Данные следуют потоком в следующем порядке:

- момент времени $t_i$;
- значение $\xi(t_i)$;
- значение $\psi(t_i)$;
- значение $\eta(t_i)$;
- символ перехода на новую строку + символ сдвига каретки;

В качества разделителя данных используется символ ";". Дробные числа записываются через символ ". Пример: 0,1;4;5;6;.

**Расчетная часть**

Для детального ознакомления с реализацией расчета см. Приложение 1. После задания траектории движения робота одним из описанных способов, в правой части приложения выводятся следующие графики рис.(А.9)

1. графики $\xi(t), \xi_0(t)$ траектории центра масс платформы
2. графики $\eta(t), \eta_0(t)$ координаты центра масс платформы
3. графики $\psi(t), \psi_0(t)$ угла поворота платформы
4. графики $\dot{\xi}(t), \dot{\xi}_0(t)$ скорости центра масс платформы
5. графики $\dot{\eta}(t), \dot{\eta}_0(t)$ скорости координаты центра масс платформы
6. графики $\dot{\psi}(t), \dot{\psi}_0(t)$ скорости поворота платформы
7. графики траектории платформы на фазовой плоскости $\xi(\eta(t)), \xi_0(\eta_0(t))$
8. графики $\|\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}_0(t)\|$, $\|\dot{\eta}(t) - \dot{\eta}_0(t)\|$, $\|\dot{\psi}(t) - \dot{\psi}_0(t)\|$

При построении графиков использовался пятиточечный метод численного дифференцирования.

По графикам можно судить, что рассматриваемая система двигается вдоль отслеживаемой траектории на расстоянии, не превышающем погрешности слежения.

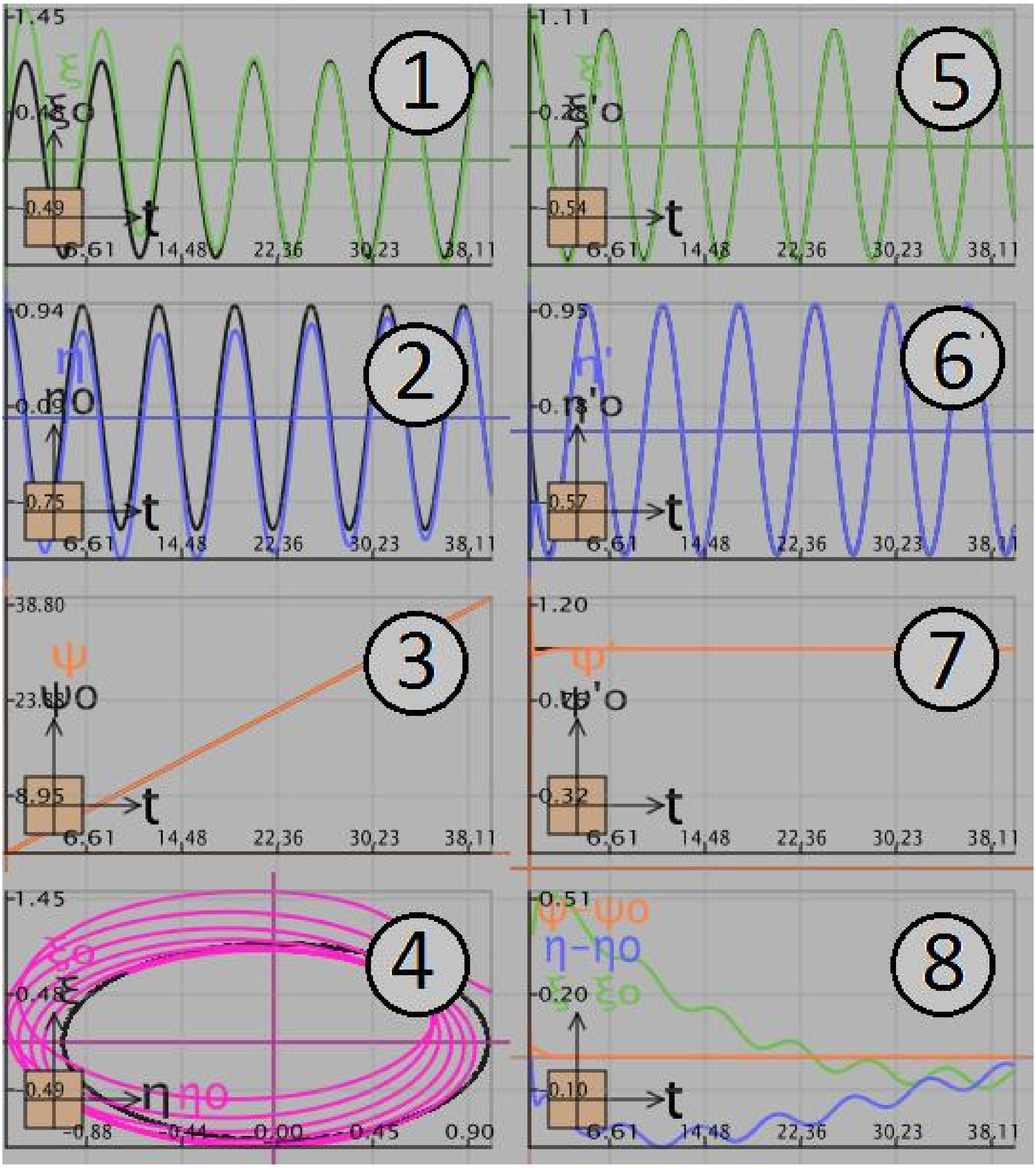

Рис. А.9: Внешний вид расчетной части