ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Макаров Денис Сергеевич

Математическое моделирование динамики манипуляторов с нелинейными типами управления

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Андреев А.С.

Ульяновск 2017

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие производства в XX веке повлекло за собой усложнение средств автоматизации. Использование всевозможных управляемых механизмов вызвало необходимость в развитии математического описания их функционирования для обеспечения оптимальности выполняемых операций. Важная роль в вопросе управляемости механических устройств отведена манипуляторам, как средству выполнения роботом необходимой задачи. Происходит постепенное движение от более простых моделей к более сложным, позволяющим учитывать нелинейную природу движений манипуляторов, решать задачи с запаздыванием, возникающим в цепи обратной связи. Важная роль уделяется также снижению вычислительной сложности расчётов заданного движения. Данное условие необходимо для возможности просчёта движений в реальном времени, что обеспечивает большую гибкость возможностей использования манипуляторов. Так как модели механических систем часто представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений, одним из естественных вариантов решения задачи анализа поведения таких систем становится метод декомпозиции, позволяющей проводить разбиение системы на подсистемы меньшей размерности для их дальнейшего исследования. Методы декомпозиции развиваются научными школами таких учёных как Ф.Л. Черноусько и Е.С. Пятницкий. Проблема управления движением механических систем, в том числе, манипуляционных роботов, без учета измерения скоростей стала активно изучаться с начала 90-х годов прошлого века. В ранних исследованиях [134–136, 142, 152] были получены результаты, решающие задачи стабилизации программной позиции и локального отслеживания траектории. Эти результаты, как правило, были основаны на применении двухшаговой процедуры: 1) построение наблюдателя (фильтра) скоростей; 2) синтез управления с применением метода линеаризации обратной связью и функции Ляпунова квадратичного вида. Такие законы управления являются весьма сложными по структуре, так как содержат вычисляемые в режиме онлайн моменты всех сил, действующих на систему, слагаемое, представляющее собой произведение матрицы инерции системы на программное ускорение. Точная реализация данных законов возможна лишь на имеющейся полной информации о параметрах системы и действующих силах. В работах [144, 147] решены задачи полуглобального и глобального отслеживания траектории механической системы с одной и с N степенями свободы без учета измерения скорости на основе применения приближенного дифференцирования и построения управления при помощи метода линеаризации обратной связью. Как отмечалось ранее, недостатком данного метода является сложность структуры построенного управления, большие объемы вычисления в режиме онлайн и необходимость построения точной динамической модели системы. В работах [42, 138] для решения задач стабилизации программной позиции и программного движения натуральной механической системы без измерения скоростей были построены наблюдатели, имеющие порядок, равный числу степеней свободы системы, не требующие точной информации о динамической модели системы, что является преимуществом перед нелинейными наблюдателями, предложенными в работах [134, 152]. Результаты, полученные в работах [42, 138], применимы лишь для механических систем без учета диссипативных сил. В работе [145] дано решение задачи полуглобального отслеживания траектории механических систем, находящихся под действием лишь потенциальных и ограниченных управляющих сил, что сужает класс рассматриваемых механических систем. В работе [140] на основе применения классического метода Ляпунова построено адаптивное управление многозвенным манипулятором на основе наблюдателя и применения метода бэкстеппинга без измерения скоростей и с учетом неизвестных параметров системы. В работе [130] было получено адаптивное управление манипуляционным роботом без измерения скоростей с использованием фильтров первого порядка. Недостатком работ [130, 140] является сложная структура построенного управления. В работе [141] предложен робастный закон управления, решающий задачу глобального отслеживания траектории робота манипулятора с неточно известными параметрами без измерения скоростей. Недостатком работы является сложный алгоритм построения управления, требующий большого объема вычислений в режиме онлайн. В работе [153] даны решения задач управления нелинейных механических систем под действием диссипативных сил без измерения скоростей с гравитационным компенсатором: о глобальной стабилизации программной позиции на основе динамической обратной связи с насыщением; глобального отслеживания траектории. При этом нерешенной остается задача построения закона управления без гравитационного компенсатора, в том числе, для систем с неточно известными параметрами. В работе [42] решена задача о глобальной стабилизации программной позиции механической системы, находящейся под действием лишь потенциальных и управляющих сил. С помощью нелинейной обратной связи построен закон управления без измерения скоростей. При этом вопрос о робастности построенного закона не рассматривался. Нерешенной остается задача о стабилизации нелинейной обратной связью программного движения более широкого класса механических систем, находящихся под действием не только потенциальных, но и диссипативных сил. В работе [159] построен закон адаптивного управления, обеспечивающего равномерную глобальную асимптотическую

устойчивость заданного движения манипуляционного робота. На основе классического метода Ляпунова и построения нелинейных фильтров задача адаптивного управления решена для механических систем с линейной зависимостью от вектора неизвестных параметров. Отметим, что для реализации построенного в [159] закона требуется проведение громоздких вычислений для построения оценки неизвестных параметров, кроме того, открытым остается вопрос оценки скорости сходимости к программному движению. В работе [145] решена задача об отслеживании нестационарной траектории механических систем без измерения скоростей и без построения наблюдателей. Для нахождения неизвестных скоростей при этом применяется приближенное дифференцирование. Получены условия равномерной глобальной асимптотической устойчивости программного движения системы без диссипации путем построения нелинейного закона управления на основе метода линеаризации обратной связью. Проведенный анализ вышеуказанных работ позволяет утверждать, что к настоящему моменту решение задачи о нелокальной стабилизации нестационарных программных движений нелинейных механических систем с неточно известными параметрами без измерения скоростей далеко от завершения.

В 80-х гг. из-за стремительного развития вычислительной техники, учёные при разработке методов моделирования начинают ориентироваться на эффективность метода с точки зрения применимости для решения на компьютере. Метод оценивается с помощью O – символики. Алгоритмы, разработанные с применением метода Лагранжа, имели сложность $O(N^4)$ и должны были быть адаптированы для систем, работающих в реальном времени. Первые исследователи, разработавшие методы порядка $O(N)$ для решения обратной задачи динамики использовали уравнения Ньютона-Эйлера. Так Степаненко и Вукобратович в 1976 г. разработали рекурсивный метод Ньютона-Эйлера для описания динамики человеческих конечностей. Орин в 1979 году улучшил этот метод, привязав силы и моменты сил к локальным координатам звеньев для контроля ноги шагающей машины в реальном времени. Лу, Уокер и Пол в 1980-м разработали очень эффективный рекурсивный алгоритм на основе уравнений Ньютона-Эйлера (RNEA), привязав все основные параметры к координатам звеньев. Холлербах, разработавший в том же году алгоритм на основании уравнений Лагранжа, однако, оказалось, что он намного менее эффективен, чем RNEA в терминах количества умножений и сложений. Рекурсивные преобразования и формулы Родрига использовали Вукобратович и Потконяк [156] (1979 г.), причем их метод позволял решать и прямую задачу динамики, хотя его вычислительная эффективность и не столь высока. Значительный прогресс в сокращении числа операций достигнут в работах Ренода [148] (1983 г.) и Ли [?] (1988 г.), также применивших рекурсивные соотношения. [39]

Самый ранний первый известный алгоритм сложности $O(N)$ для решения прямой задачи динамики был предложен Верещагиным. Этот алгоритм использует рекурсивную формулу для расчета формы Гиббса-Аппеля уравнения движения, и применим к неразветвлённым цепям с вращательными или призматическими соединениями. В 1988 Балафотисом, Пателем и Митрой были представлены два рекурсивных алгоритма на основе уравнений Ньютона-Эйлера, использующие ортогональные тензоры для решения обратной задачи динамики. Они применимы для разомкнутой кинематической цепи (например, для моделирования движения человеческой руки). Один из этих алгоритмов позволяет рассчитать положение манипулятора с шестью степенями свободы, используя приблизительно 489 операций умножения и 420 сложения. Для манипуляторов с более простой геометрической конфигурацией количество операций может быть уменьшено до 277 и 255 соответственно. [133] Этот алгоритм приблизительно в 1.7 раз быстрее, чем алгоритм RNEA для манипулятора робота с шестью степенями свободы.

В 1954 г. были проведены работы по симуляции эволюции Нильсом Баричелли на компьютере, установленном в Институте Продвинутых Исследований Принстонского университета. Его работа, опубликованная в том же году, привлекла широкое внимание общественности. [?] С 1957 года, австралийский генетик Алекс Фразер опубликовал серию работ по симуляции искусственного отбора среди организмов с множественным контролем измеримых характеристик. Симуляции Фразера включали все важнейшие элементы современных генетических алгоритмов. [?] С ростом исследовательского интереса существенно выросла и вычислительная мощь настольных компьютеров, это позволило использовать новую вычислительную технику на практике. В том числе применять генетические алгоритмы для нахождения оптимального управления робототехническими системами (например, симуляции походки человека). Одна из последних на данное время работ в этом направлении - работа, представленная в 2013 г. В ней Гейтенбик, Ван де Панн и Ван дер Стаппен продемонстрировали метод моделирования двуногой ходьбы с использованием генетических алгоритмов. [?] Их метод основывается на моделировании конечностей существа в виде связанных тел, управляемых мышцами, которые могут перемещать конечности определенным образом и основывается на работе Ванга 2012 г. [?] Проведенные эксперименты показывают, что в обычных условиях модели приходят к стабильному положению ходьбы через 500-3000 поколений. Недостатками, однако, является небольшая производительность (на персональном компьютере время оптимизации 2-12 часов). Также для метода, как в целом для всех генетических алгоритмов характерна сходимость решения к локальному минимуму, что может не обеспечивать достаточной эффективности.

В первой главе диссертации представлены исследования относительно уравнений с запаздыванием. Результаты, полученные в первой главе далее применяются для построения управления манипуляторами во второй и третьей главах.

Во второй главе строится и обосновывается управление двухзвенным манипулятором, моделируемым в виде системы связанных твёрдых тел. Рассматривается модель манипулятора, описываемая уравнениями Лагранжа 2-го рода. В первом параграфе исслледуется поведение манипулятора без учёта динамики приводов, расположенных в шарнирах и приводящих манипулятор в движение. Во втором параграфе система рассматривается с учётом динамики приводов.

Третья глава начинается с построения модели, описывающей поведения трехзвенного манипулятора, имеющего 3 степени свободы, не учитывающей действия электрических приводов. Во втором параграфе рассматривается модель манипулятора с приводами.

Приложение содержит компьютерную модель динамики трехзвенного манипулятора и реализацию данной модели на языке высокого уровня

Java. Представленная программа позволяет задавать закон управления в аналитическом виде, в том числе в виде определенных интегралов с переменным верхним пределом.

1 ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

1.1 Теоремы об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием

Для представления некоторых используемых теорем дадим следующие построения и определения из работ [**?**].

Пусть R^p — линейное действительное пространство p — векторов x с нормой $|x|, R$ — действительная ось, $h > 0$ — заданное действительное число, C — банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^p$ с нормой $\|\varphi\| = sup(|\varphi(s)|, -h \leq s \leq 0).C_H = \{\varphi \in C : \|\varphi\| < H > 0\}$

Рассматривается функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.1}$$

где $f : R \times C_H \to R^p$ — некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее нижеследующим предположениям, в которых для $\alpha \in R$ и $\varphi \in C_H$ функций $x = x(t, \alpha, \varphi)$ обозначает решение этого уравнения удовлетворяющее начальному условию

$$x_\alpha(\alpha, \varphi) = \varphi, \ (x_t(\alpha, \varphi) = x(t + s, \alpha, \varphi), -h \leq s \leq 0).$$

Полагается, что для каждого числа r, $0 < r < H$, существует число m_r

такое, что выполняется неравенство

$$|f(t,\varphi)| \leq m_r, \forall \varphi \in \bar{C}_r = \varphi \in C : \|\varphi\| \leq r < H. \tag{1.2}$$

Пусть $\{r_n\}$ — последовательность чисел такая, что $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$, $r_n \to H$ при $n \to \infty$. Для каждой r_i определяется множество $K_i \subset C$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\varphi(s)| \leq r_i, \qquad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leq m_{r_i}|s_2 - s_1|.$$

Множество K_i является компактным, вводим $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Пусть F — множество всех непрерывных функций f, определенных на $R \times \Gamma$, со значениями в R^p. Через f^τ принимается сдвиг функции f, $f^\tau(t,\varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Для $f \in F$ семейство сдвигов $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R\}$ будет являтся подмножеством F.

Вводится определение сходимости в F как равномерной на каждом компакте $K' \subset R \times \Gamma :$ последовательность $\{f_n \in F\}$ сходится к $f \in F$, если $\forall K' \subset R \times \Gamma$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $|f_n(t,\varphi) - f(t,\varphi)| < \varepsilon$, при $n > N = N(\varepsilon)$ и $(t, \varphi) \in K'$.

Эта сходимость метризуема, для всех n для двух функций $f_1,\ f_2 \in F$ вводится полунорма $\|\cdot\|_n$ и соответствующая псевдометрика ρ_n

$$\|f\|_n = \sup\{|f(t,\varphi)|, \forall (t,\varphi) \in {K'}_n\},$$

$$\rho_n(f_1, f_2) = \frac{\|f_2 - f_1\|_n}{1 + \|f_2 - f_1\|_n},$$

где ${K'}_n = [0, n] \times K_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (K_n определено выше).

Расстояние между функциями $f_1, f_2 \in F$ задается в виде

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f_1, f_2).$$

При этом будут выполнены все аксиомы метрического пространства. И пространство F будет полным по отношению к введенной метрике.

Полагается, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующему предположению.

Для любого $K \subset C_H$ (K - компакт) функция $f = f(t, \varphi)$ равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in R \times K$, т.е. $\forall K \subset C_H$ и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для любых $(t, \varphi) \in R \times K$, $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in R \times K : |t_2 - t_1| < \delta, \varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, выполняются неравенства

$$|f(t_2, \varphi_2) - f(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Доказывается, что при выполнении предположений 1.1 и 1.2 семейство сдвигов $\{f^\tau : \tau \in R\}$ предкомпактно в F.

Вводится определение. Функция $f^* : R \times \Gamma \to R^p$ называется предельной к f, если существует последовательность t_n такая, что $f^{(n)}(t, \varphi) = f(t_n + t, \varphi)$ сходится к $f^*(t, \varphi)$ при $t \to \infty$ в F. Замыкание семейства $\{f^\tau : \tau \in R\}$ в F называется оболочкой $S^+(f)$. Уравнение

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t) \tag{1.4}$$

называется предельным к (1.1). При условиях (1.2) и (1.3) уравнение (1.1) является предкомпактным. [**?**]

Полагается также, что для любого компактного множества $K \subset C_H$ функция $f = f(t,\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица т.е, $\forall K \subset C_H$ существует $L = L(K)$, такое, что для любых $t \in R$; $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ будет выполнено неравенство

$$|f(t,\varphi_2) - f(t,\varphi_1)| \le L\|\varphi_2 - \varphi_1\|. \tag{1.5}$$

При выполнении условия (1.5), каждая предельная функция $f^*(t,\varphi)$ также будет удовлетворять аналогичному условию Липшица относительно компакта $K \subset \Gamma$.

Вследствие этого, решения уравнения (1.1) при начальном условии $(\alpha,\varphi) \in R \times C_H$ и уравнения (1.4) для $(\alpha,\varphi) \in R \times \Gamma$ будут единственными.

Имеет место следующее свойство положительного предельного множества $\omega^+(\alpha,\varphi)$ решения уравнения (1.2) $x = x(t,\alpha,\varphi)$.

Теорема 1.1. *[?] Пусть решение (1.1) $x = x(t,\alpha,\varphi)$ ограничено, $|x(t,\alpha,\varphi)| \le r < H$ для всех $t \ge \alpha - h$. Тогда множество $\omega^+(\alpha,\varphi)$ квазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений $\{\dot{x} = f^*(t,x_t)\}$, а именно, для каждой точки $\psi \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ существует предельное уравнение $\dot{x} = f^*(t,x_t)$, такое, что точки его решения $y(t,0,\psi)$ в пространстве C содержатся в $\omega^+(\alpha,\varphi)$, $\{y_t(0,\psi), t \in R\} \subset \omega^+(\alpha,\varphi)$.*

Прямой метод Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений основан на применении функционалов и функций Ляпунова [].

Пусть $V : R^+ \times C_H \to R$ есть непрерывный функционал Ляпунова и

$x = x(t, \alpha, \varphi)$ — решение уравнения (1.1). Функция $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$ представляет собой непрерывную функцию времени $t \geq \alpha$.

Вводятся следующие определения, в основе которых лежит использование непрерывных, строго возрастающих функций $a : R^+ \to R^+$, $a(0) = 0$ (функций класса $\mathcal{K}$).

Функционал $V(t, \varphi)$ называется определенно-положительным по $|\varphi(0)|$, если $V(t, 0) \equiv 0$ и для некоторого H_1, $0 < H_1 < H$, существует функция $a \in \mathcal{K}$, такая, что для любых $(t, \varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$ выполнено неравенство

$$V(t, \varphi) \geq a(|\varphi(0)|) \quad .$$

Функционал $V = V(t, \varphi)$ допускает бесконечно малый высший предел по $\|\varphi\|$, если для некоторого H_1, $0 < H_1 < H$, существует функция $a \in \mathcal{K}$, такая, что для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$ выполнено неравенство

$$|V(t, \varphi)| \leq a(\|\varphi\|).$$

Верхней правосторонней производной от V вдоль решения $x(t, \alpha, \varphi)$ называется значение [56, 114]

$$\dot{V}^+(t, x_t(\alpha, \varphi)) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{1}{\Delta t} \left[V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(\alpha, \varphi)) - V(t, x_t(\alpha, \varphi)) \right]. \quad (1.6)$$

Для функционала, имеющего инвариантную производную $\partial V_\varphi(t, \varphi)$ удобно следующее вычисление производной: [?]

$$\dot{V}(t, \varphi) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, \varphi) + \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, \varphi) \cdot f_i(t, \varphi) \right) + \partial V_\varphi(t, \varphi). \qquad (1.7)$$

Допустим, что производная $\dot{V}(t,\varphi)$ оценивается неравенством

$$\dot{V}(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0, \tag{1.8}$$

где функционал $W = W(t,\varphi)$ ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве $R\times K$, т.е. для каждого компактного множества $K \subset C_H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m = m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такие, что имеют место неравенства

$$W(t,\varphi) \le m, \qquad |W(t_2,\varphi_2) - W(t_1,\varphi_1)| \le \varepsilon \tag{1.9}$$

для всех $(t,\varphi) \in R \times K$; (t_1,φ_1), $(t_2,\varphi_2) \in R \times K$: $|t_2 - t_1| \le \delta$, $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \le \delta$. Как и в случае f, при этих условиях семейство сдвигов $\{W^\tau(t,\varphi) = W(t+\tau,\varphi), \tau \in R\}$ предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций $F_W = \{W : R \times \Gamma \to R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

Вводятся также следующие определения.

Функция $W^* \subset F_W$ есть предельная к W, если существует $t_n \to +\infty$, такая, что последовательность $\{W_n(t,\varphi) = W(t_n + t,\varphi)\}$ сходится к W^* в F_W.

Будем говорить, что решение $x(t), \alpha - h < t < \beta, \alpha < \beta$ $u : (\alpha,\beta) \to C_H$ ($u : R \to C_H$) содержится во множестве $\{\varphi \in C_H : W(t,\varphi) = 0\}$, если тождество $W(t,x_t) \equiv 0$ выполняется для всех $t \in (\alpha,\beta)$.

Функции $f^* \in F$ и $W^* \in F_W$ образуют предельную пару (f^*, W^*), если они являются предельными к f и W для одной и той же последовательности

$t_n \to +\infty$.

В [?] доказаны следующие, используемые в диссертации теоремы.

Теорема 1.2. *Предположим, что:*

1) существует непрерывный функционал $V : R \times C_H \to R$, *ограниченный снизу на каждом компакте* $K \subset C_H$, $V(t,\varphi) \geq m(K)$ *для всех* $(t,\varphi) \in R \times K$, *и такой, что* $\dot{V}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0$ *для всех* $(t,\varphi) \in R \times C_H$;

2) решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ *уравнения (1.1) ограничено,* $|x(t,\alpha,\varphi)| \leq H_1 < H$ *для всех* $t \geq \alpha - h$.

Тогда для каждой предельной точки $\psi \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ *существуют предельная пара* (f^*, W^*) *и решение* $y = y(t)$, $y_0 = \psi$, *уравнения* $\dot{x} = f^*(t,x_t)$, *такие, что* $y_t \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ *и* $y_t \in \{W^*(t,\varphi) = 0\}$ *для всех* $t \in R$.

Для задачи об асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.1), в предположении $f(t,0) \equiv 0$. фундаментальное значение имеет следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 1.3. *Предположим, что:*

1) существует функционал $V : R \times C_{H_1} \to (0 < H_1 < H)$, *такой, что* $V(t,0) = 0$, $a_1(|\varphi(0)|) \leq V(t,\varphi) \leq a_2(\|\varphi\|)$, $\dot{V}^+(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0$ *для всех* $(t,\varphi) \in R \times C_{H_1}$;

2) для каждой предельной пары (g,U) *множество* $\{U(t,\varphi) = 0\}$ *не содержит решения уравнения* $\dot{x}(t) = g(t,x_t)$, *кроме нулевого.*

Тогда решение (1.1) $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво.*

Для задачи об устойчивости невозмущенного движения уравнения (1.1) относительно части переменных $x_1, x_2, ..., x_m (m > 0, m \leq p)$ переобозначим переменные $y_i = x_i (i = 1...m)$, $z_j = x_{m+j}(j = 1...r = p-m)$. Соответственно, $x^{'} = (x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_p) = (y^{'}, z^{'}), y \in R^m$ есть вектор р — мерного действительного пространства с некоторой нормой $|y|, z \in R^{p-m}$ есть вектор $(p-m)$ — мерного действительного пространства с некоторой нормой $|z|$, при этом норму $|x|$ определим равенством $|x| = |y| + |z|$. Через C^y обозначим банахово пространство непрерывных функций $\psi : [-h, 0] \to R^m$ с нормой $\|\psi\| = sup(|\psi(s)|, -h \leq s \leq 0)$, пространство $C = C^y \times C^z$, для $\varphi \in C$ имеем $\varphi^{'} = (\psi^{'}, \theta^{'})$ и $\|\varphi\| = \|\psi\| + \|\theta\|$. Правая часть уравнения (1.1), вектор-функция $f = f(t, \varphi)$ может быть записана в виде $f = (f^1, f^2)$, а само уравнение можно представить в виде

$$\dot{y}(t) = f^1(t, y_t, z_t), \dot{z}(t) = f^2(t, y_t, z_t). \tag{1.10}$$

Полагается, что функция $f^1(t, \varphi)$ ограничена в области $R^+ \times \bar{C}^y_r \times C^z$; для каждого $r, 0 < r < H$, существует число $m = m(r) > 0$, такое, что для всех $(t, \psi, \theta) \in R^+ \times \bar{C}^y_r \times C^z \times \bar{C}^y_r = \psi \in C^y : \|t\| \leq r$ выполняется неравенство $|f(t, \psi, \varphi)| \leq m$.

Ограниченность решения (1.1) уравнения позволяет применить для выявления устойчивости относительно части переменных свойство квазиинвариантности его положительного предельного множества, определяемое построением предельных уравнений.[]

Пусть $r_1^{(j)}$ есть последовательность чисел, таких, что $r_1^{(1)} < r_1^{(2)} < ... < r_1^{(j)} < ..., r_1^{(j)} \to H$ при $j \to \infty, r_2^{(j)}$ — последовательность $r_2^{(1)} < r_2^{(2)} < ... < r_2^{(j)} < ..., r_2^{(j)} \to \infty$ при $j \to \infty$. Для каждого $j \in N$ определяем множество $K_j \in C^y_H \times C^z$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\psi(s)| \le r_1^{(j)} j_1, |\theta(s)| \le r_2^{(j)} j_2, |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \le m_r |s_2 - s_1| \tag{1.11}$$

и полагаем $\Gamma = \bigcup_{j=1}^{\infty} K_j$.

В области $R \times \Gamma$ строится семейство предельных к $f(t, \varphi)$ функций $g : R \times \Gamma \to R^p$ и соответственно, семейство предельных уравнений

$$\dot{x}(t) = g(t, x_t). \tag{1.12}$$

Имеет место следующая теорема.

Теорема 1.4. *Пусть 1) каждое решение уравнения (1.1) из некоторой* δ_0 *— окрестности* $\{\|\varphi\| < \delta_0 > 0\}$ *точки* $x = 0$ *ограничено по* z; *2) существует функционал* $V = V(t, \varphi), V(t, 0) = 0$, *такой, что для всех* $(t, \varphi) \in R^+ \times C^y_{H_1} \times C^z (0 < H_1 < H)$

$$V(t, \varphi) \ge a(|\psi(0)|), \dot{V}(t, \varphi) \le -W(t, \varphi) \le 0; \tag{1.13}$$

3) для каждой пары (g, U) *и любого числа* $c_0 \ge 0$ *решениями уравнения* $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, *содержащимися во множестве* $\{V^{-1}_{\infty}(t, c) : c = c_0\} \cap \{U(t, \varphi) = 0\}$, *могут быть лишь решения* $x = x(t) : y(t) \equiv 0$.

Тогда решение $x = 0$ *уравнения асимптотически устойчиово по* y.

В следующей теореме полагается, что функционал $V = V(t, \varphi)$ является ограниченным, равномерно непрерывным на каждом множестве $R^+ \times K$.

Теорема 1.5. *Предположим, что: 1) решение уравнения (1.1) из некоторой окрестности* $\|\varphi\| < \delta_0 > 0$ *точки* $x = 0$ *равномерно ограничены по* z;

2) существует функционал $V(t, \varphi)$, *такой, что для* $(t, \varphi) = (t, \psi, \theta) \in$

$R^+ \times C^y_{H_1} \times C^z$ имеют место соотношения

$$V(t,\varphi) \geq a_1(|\psi(0)|), V(t,\varphi) \leq V_2(\varphi),$$

$$\dot{V}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0;$$

3) каждая предельная совокупность (g, U) такова, что множество $\{V_2(\varphi) = c = const > 0\} \cap U(t,\varphi) = 0$ не содержит решений уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$

Тогда решение $x = 0$ уравнения (1.1) равномерно асимптотически устойчиво по y.

Теоремы 1.1 - 1.5 используются в диссертации для решения задачи о стабилизации программных позиций без измерения скоростей.

1.2 Стабилизация программных позиций голономной механической системы без измерения скоростей

Движение управляемой механической системы со стационарными голономными связями, имеющей n обобщенных координат $q_1, q_2, ...q_n$ может быть описано уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U \tag{1.14}$$

В уравнениях введена векторно-матричная запись: $q \in R^n, q = (q_1, q_2, ...q_n)'$ — вектор обобщенных координат, $\dot{q} = (\dot{q}_1, \dot{q}_2, ...\dot{q}_n)'$ — вектор обобщенных скоростей. $T = \frac{1}{2}(\dot{q})' A(q)\dot{q}$ — кинетическая энергия с инерционной матрицей $A(q), A \in R^{n \times n}; Q = Q(t, q, \dot{q})$ — вектор обобщенных сил, которые полагаются зависимыми от $(t, q, \dot{q})$; U - обобщенная управляющая сила; через $()'$ обозначена операция транспонирования.

В дальнейшем обозначим через $|q|$ норму вектора q, $|q|^2 = q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2$.

В общем случае матрица A является определенно-положительной при всех фиксированных допустимых значениях обобщенных координат. Будем полагать, что система (1.14) определяется при всех $q \in R^n$, при этом соответсвующая квадратичная форма $(\dot{q})' A(q)\dot{q}$ является ограниченной определенно-положительной при всех $q \in R^n$, так что имеет место оценка

$$2\alpha_0 \, |\dot{q}|^2 \leq (\dot{q})' A(q)\dot{q} \leq 2\alpha_1 \, |\dot{q}|^2 \, , \alpha_0 > 0 \tag{1.15}$$

При этом полагаем, что $A(q)$ непрерывно-дифференцируема.

В моделировании манипуляторов представляется важным учет потенциальных, гироскопических и диссипативных сил. Соответственно будем полагать, что обобщенные силы непрерывны по $(t, q, \dot{q}) \in R^+ \times R^n \times R^n$, и при этом представимы в виде

$$Q(t, q, \dot{q}) = -\frac{\partial \Pi(t, q)}{\partial q} + Q_g(t, q, \dot{q}) \tag{1.16}$$

где $\Pi = \Pi(t, q)$ — потенциальная энергия, $Q_g(t, q, \dot{q})$ - совокупность диссипативных и гироскопических сил. По их определению для Q_g будут иметь место следующие соотношения

$$Q_g \equiv 0, \quad \dot{q}' Q_g(t, q, \dot{q}) \leq 0 \quad \forall \dot{q} \in R^n \tag{1.17}$$

Задача о стабилизации программной позиции системы (1.14) состоит в нахождении управления U, обеспечивающего стабилизацию положения системы

$$\dot{q} = 0, \quad q = q_0 = const \tag{1.18}$$

Для решения этой задачи могут быть использованы традиционные методы исследования асимптотической устойчивости под действием структуры сил и их развитие []. Эти методы предполагают наличие диссипативных сил с полной, а иногда и с частичной диссипацией. Таким образом для построения управляющих сил требуется измерение всех (и лишь иногда части) обобщенных скоростей.

Использование теорем об устойчивости фунционально-дифференциальных уравнений, представленое в параграфе 1.1 позволяет решить эту задачу только посредством измерения обобщенных координат.

Уравнения движения (1.14) с учетом представленных обобщенных сил (1.16) могут быть записаны в виде

$$A(q)\ddot{q} = C(q,\dot{q})\dot{q} - \frac{\partial \Pi(t,q)}{\partial q} + Q_g(t,q,\dot{q}) + U \tag{1.19}$$

где матрица $C = (c_{j,k})$ инерционных сил определяется равенством

$$c_{j,k} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial a_{ik}}{\partial q_j} - \frac{\partial a_{kj}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k})\dot{q}_i$$

Пусть (1.18) есть некоторая выбранная программная позиция. Введем возмущения

$$x = q - q_0, \quad y = \dot{x} = \dot{q} \tag{1.20}$$

Уравнения движения (1.19) в переменных $(x, \dot{x})$ принимают следующий вид

$$\frac{dx}{dt} = y, \frac{dy}{dt} = A_1^{-1}(x)(C_1(x,y)y - \frac{\partial \Pi_1(t,x)}{\partial x} + Q_1(t,x,y) + U) \tag{1.21}$$

где индексом "$_1$"обозначены функции, получаемые из соответствующих зависимостей (1.19) в результате замены (1.20).

Введем в рассмотрение матрицы $P = P(t,\tau), P \in R^{n\times n}$, учитывающие предыдущее состояние системы в виде зависимостей $P = |p_{jk}(t,\tau)|\,, p_{jk} = p^0_{jk} e^{s^0_{jk}(\tau - t)}$ с постоянными $p^0_{jk} = const, s^0_{jk} = const, p^0_{jk} = p^0_{kj}; s^0_{jk} = s^0_{kj}$ такими, что выполнены условия

$$\begin{gathered} x^{'} P(t,\tau)x \geq 0; x^{'} P_t(t,\tau)x \leq -\beta_0 |x|^2\,, \beta > 0 \\ P_t(t,\tau) = \tfrac{\partial P(t,\tau)}{\partial t} = -\left| p^0_{jk} s^0_{jk} e^{s^0_{jk}(\tau - t)} \right| \end{gathered} \tag{1.22}$$

Покажем, что поставленная задача может быть решена управлением вида

$$U = -\frac{\partial \Pi_2(t,x(t))}{\partial x} - \int\limits_{t-h}^{t} P(t,\tau)(x(t) - x(\tau))d\tau \tag{1.23}$$

Уравнения (1.21) при управлении (1.23) принимают следующий вид

$$\begin{gathered} \tfrac{dx(t)}{dt} = y(t), \\ \tfrac{dy(t)}{dt} = A_1^{-1}(x(t))(C_1(x(t),y(t)) + Q_1(t,x(t),y(t)) - \\ -\tfrac{\partial \Pi_0(t,x)}{\partial x} - \int\limits_{t-h}^{t} P(t,\tau)(x(t) - x(\tau))d\tau) \\ \Pi_0(t,x) = \Pi_1(t,x) + \Pi_2(t,x), \quad \Pi_0(t,0) \equiv 0 \end{gathered} \tag{1.24}$$

Это уравнение представляет собой совокупность функционально-дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом с конечным запаздыванием. Областью определения этого уравнения можно принять область вида $R \times C_1 \times C_2$, где C_1 — пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^n$ с нормой $|\varphi| = \sup(|\varphi(s)|\,, -h \leq s \leq 0), C_2$ — пространство непрерывных функций $\psi : [-h, 0] \to R^n$ с аналогичной нормой.

Для движения $(q(t), \dot{q}(t))$ системы (1.14) с начальным состоянием $(q(t_0), \dot{q}(t_0))$ за начальную функцию системы уравнений (1.24) можно принять функцию $\varphi(s) = x(t_0) = q(t_0) - q_0, \psi(s) = y(t_0) = \dot{q}(t_0), -h \le s \le 0$.

Функции $A_1^{-1}(x(t))$ и $C_1(x(t), y(t))$ представляют собой равномерно непрерывные функции по отношению к непрерывной совокупности $(x(t), y(t)), |x(t)|+|y(t)| \le H, H = const > 0$, на некотором конечном отрезке $[t_0, t_0 + T]$.

Будем полагать, что зависимости $Q = Q(t, x, y)$, $\Pi_0(t, x)$, $\frac{\partial \Pi_0(t,x)}{\partial x}$ представляют собой функции, ограниченные, равномерно непрерывные по (t, x, y) на каждом множестве вида $R \times \{|x| + |y| \le H\}$ при любом $H > 0$.

Соответственно согласно п 1.1. и работе [] семейства предельных функций $\{Q^*(t, x, y)\}$ и $\{\Pi_0^*(t, x)\}$ определяются равенствами

$$Q^*(t, x, y) = \lim_{t_k \to \infty} Q(t_k + t, x, y),$$
$$\Pi_0^*(t, x) = \lim_{t_k \to \infty} \Pi_0(t_k + t, x),$$
$$\frac{\partial \Pi_0^*}{\partial x}(t, x) = \lim_{t_k \to \infty} \frac{\partial \Pi_0}{\partial x}(t_k + t, x)$$

В частности в дальнейшем будем предполагать, что функция $\Pi_0(t, x)$ удовлетворяет условию

$$\frac{\partial \Pi_0(t, x)}{\partial t} \le 0. \tag{1.25}$$

Тогда будет существовать единственная функция $\Pi_0^*(x)$.

При принятых предположениях уравнения (1.24) предкомпактны и для них можно определить семейство предельных уравнений вида

$$\begin{aligned} &\tfrac{dx(t)}{dt} = y(t), \\ &\tfrac{dy(t)}{dt} = A_1^{-1}(x(t))(C_1(x(t), y(t))y(t) - \tfrac{\partial \Pi_0^*(x(t))}{\partial x}) - \\ &- \int\limits_{t-h}^{t} P(t,\tau)(x(t) - x(\tau))d\tau \end{aligned} \tag{1.26}$$

Действительно, в предельном переходе при $t_k \to +\infty$ находим

$$\lim_{t_k \to +\infty} A_1^{-1} x(t_k + t)(C_1(x(t_k + t), y(t_k + t)) - \frac{\partial \Pi_0(t_k + t, x(t_k + t))}{\partial x}) +$$
$$+ \int\limits_{t_k+t-h}^{t_k+t} P(t_k + t, \tau)(x(t_k + t) - x(\tau)d\tau) =$$

$$= A_1^{-1}(x^*(t))(C_1(x^*(t), y^*(t))y^*(t) - \lim_{t_k \to +\infty} \frac{\partial \Pi_0(t_k + t, x(t_k + t))}{\partial x} +$$
$$\lim_{t_k \to +\infty} \int\limits_{t-h}^{t} P(t_k + t, t_k + s)(x(t_k + t) - x(t_k + s))ds) =$$
$$= A_1^{-1}(x^*(t))(C_1(x^*(t), y^*(t))y^*(t) - \frac{\partial \Pi_0^*(x)}{\partial x} + \int\limits_{t-h}^{t} P(t,s)(x^*(t) - x^*(s))ds,$$

так как $P(t_k + t, t_k + s) = P(t, s)$

Докажем следующее утверждение.

Теорема 1.6. *Пусть управление (1.23) выбрано таким образом, что выполнены условия (1.22) относительно* $P(t,\tau)$*, а также*

1) зависимость $\Pi_0(t,x)$ *является функцией определенно-положительной* $\Pi(t,x) \geq a_1(|x|)$

2) для некоторого $\mu > 0$ *и любого малого* $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \mu$*, найдется число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *при котором выполнено неравенство*

$$\left|\left|\frac{\partial \Pi_0}{\partial x}\right|\right| \geq \delta(\varepsilon) \forall x \in \{\varepsilon \leq |x| \leq \mu\}$$

Тогда это управление решает задачу о стабилизации положения (1.20).

Доказательство

Возьмем функционал Ляпунова в виде

$$
\begin{gathered}
V(t,x_t,y_t)=\frac{1}{2}y^{'}(t)A_1(x(t))y(t)+\Pi_0(t,x(t))+ \\
+\frac{1}{2}\int\limits_{t-h}^{t}(x(t)-x(\tau))^{'}P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau
\end{gathered}
\tag{1.27}
$$

В силу условий (1.15), (1.22), (1.25) наложенных на $A(q), P(t,\tau), \Pi_0(t,x)$ и условий теоремы для этого функционала имеем оценку

$$V(t,x_t,y_t)\geq \alpha_0\left|y(t)\right|^2+a_1(|x(t)|)$$

$$V(t,x_t,y_t)\leq \alpha_1\left|y(t)\right|^2+\Pi_0(0,x(t))+|P|\,h\max(\left|x(t)-x(s)\right|^2,t-h\leq s\leq t)$$

$|P|$ - норма матрицы в $R^{n\times n}$

Для производной функционала V в силу (1.14) находим

$$\dot V = y^{'}(t)A_1(x(t))\frac{dy}{dt} + \frac{1}{2}y^{'}(t)\frac{dA(x(t))}{dt}y(t) +$$
$$+\frac{\partial \Pi^0(t,x(t))}{\partial t} + (\dot x(t))^{'}\frac{\partial \Pi^0(t,x(t))}{\partial t} =$$
$$= y^{'}(t)A_1(x(t))(A_1^{-1}(x(t))(C_1(x(t),y(t))y(t) + Q_1(t,x(t),y(t)) - \frac{\partial \Pi_0(t,x)}{\partial x} -$$
$$-\int\limits_{t-h}^{t} P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau) + \frac{1}{2}(x(t)-x(t))^{'}P(t,t)(x(t)-x(t)) -$$
$$-\frac{1}{2}(x(t)-x(t-h))^{'}P(t,t-h)(x(t)-x(t-h)) +$$
$$+\int\limits_{t-h}^{t} \dot x^{'}(t)P(t,\tau)(x(t)-x(\tau))d\tau +$$
$$+\frac{1}{2}y^{'}(t)\frac{dA(x(t))}{dt}y(t) + \frac{\partial \Pi_0(t,x(t))}{\partial t} + y^{'}(t)\frac{\partial \Pi_0(t,x(t))}{\partial x} =$$
$$= y^{'}(t)Q_1(t,x(t),y(t)) + \frac{\partial \Pi_0(t,x(t))}{\partial t} -$$
$$-\frac{1}{2}(x(t)-x(t-h))^{'}P(t,t-h)(x(t)-x(t-h) +$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t-h}^{t}(x(t)-x(\tau))^{'}\frac{\partial P(t,\tau)}{\partial t}(x(t)-x(\tau))d\tau \leq$$
$$\leq -\frac{\beta_0}{2}\int\limits_{t-h}^{t}\left|x(t)-x(\tau)\right|^2 d\tau \leq 0$$

Таким образом, для производной $\dot V(t,x_t)$ имеем оценку

$$\dot V(t,x_t) \leq -W(x_t) \leq 0, W(x_t) = \frac{\beta_0}{2}\int\limits_{t-h}^{t}\left|x(t)-x(\tau)\right|^2 d\tau. \tag{1.28}$$

Множество $\{W(x_t) = 0\}$ есть множество функций, для которых $x(\tau) \equiv x(t)$ для всех $\tau \in [t-h,t]$, при всех $t \in R$ и значит

$$x(t) \equiv x(0) = x_0 = const \tag{1.29}$$

Подставляя $x^{*}(t) = x_0$ в любое предельное уравнение (1.27) получим, что указанное решение должно удовлетворять соотношению

$$\frac{\partial\Pi^*(x^*(t))}{\partial x} \equiv 0 \tag{1.30}$$

Но это в силу условиия 2) теоремы возможно, если только $x^*(t) \equiv 0$, а значит и $y^*(t) \equiv 0$.

Согласно теореме 1.3 имеем искомое доказательство.

Используя оценку производной (1.28) функционала (1.27) на основании теоремы 1.2 получим следующий результат

Теорема 1.7. *Допустим, что для управления (1.23) при условии (1.22) функция* $\Pi_0(t, x) \geq 0$. *Тогда каждое ограниченное для всех* $t \geq t_0$ *движение системы (1.24)* $(\dot{x}(t), x(t))$ *неограниченно приближается к множеству* $\{\dot{x} = 0, \frac{\partial\Pi_0^*(x)}{\partial x}\} = 0$ *при* $t \to +\infty$

Доказательство

Согласно оценке (1.28) максимально инвариантное относительно можества $\{W(x_t) \equiv 0\}$ подмножество состоит из решений (1.26), для которых $x^*(t) \equiv x_0, \dot{x}^*(t) \equiv 0$ и выполняется равенство (1.30). В соответствии с теоремой 1.2 имеем требуемое доказательство.

Теоремы (1.4) и (1.5) позволяют вывести применимость управления (1.23) в задаче о стабилизации программной позиции (1.29) по отношению к скоростям и части координат.

Теорема 1.8. *Пусть управление (1.23) выбрано таким образом, что выполнены условия (1.22) относительно матрицы* $P(t, \tau)$, *а также*

1) движения системы (1.24) из некоторой окрестности положения $\dot{x} = x = 0$ *под действием управления (1.23) ограничены по переменным*

$x_{m+1}, x_{m+2}, ..., x_n$

2) функция $\Pi_0(t,x)$ определенно-положительна по $x_1, x_2, ...x_m$,

$$\Pi_0(t,x) \geq a_1(|x|_m), |x|_m^2 = x_1^2 + x_2^2 + ... + x_m^2$$

3) вне множества $x_1 = x_2 = ... = x_m = 0$ нет положений равновесия (1.24), так что для некоторого $\mu > 0$ и любого малого числа $\varepsilon, 0 < \varepsilon < \mu$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такое, что $\left|\dfrac{\partial \Pi_0(t,x)}{\partial x}\right| \geq \delta(\varepsilon) \forall x \in \{\varepsilon \leq \sum\limits_{k=1}^{m} x_k^2 \leq \mu\}$

Тогда программная позиция (1.18) или положение $\dot{x} = x = 0$ системы (1.23) асимптотически устойчиво по $\dot{x}, x_1, x_2, .., x_m$.

Доказательство

Вновь возьмем функционал Ляпунова в виде (1.28). В силу уравнения 2) имеем оценку

$$V(t, x_t, y_t) \geq \alpha_0 |y|^2 + a_1(|x(t)|_m)$$

Для производной этого функционала по прежнему имеем оценку (1.28) и, таким образом, имеет место устойчивость по $y, x_1, ...x_m$

В силу условия 3) теоремы множество

$$\{W(x_t) = 0\} \cap \{x : \sum_{k=1}^{m} x_k^2 > 0\} =$$
$$= \{x(\tau) = x(t), t - h < \tau < t\} \cap \{\sum_{k=1}^{m} x_k^2 > 0\} =$$
$$= \{x(t) = c = const\} \cap \{\sum_{k=1}^{m} x_k^2 > 0\} =$$
$$= \{x : \frac{\partial \Pi^*(x)}{\partial x} = 0\} \cap \{\sum_{k=1}^{m} x_k^2 > 0\}$$

не содержит решений предельной системы. В соответствие с теоремой

1.4 для каждого ограниченного движения $y(t), x(t)$ имеем

$$\lim_{t\to+\infty} y(t) = 0; \quad \lim_{t\to+\infty} x_k(t) = 0, k = 1..m$$

Теорема доказана.

Теорема 1.9. *Пусть управление (1.23) выбрано таким образом, что выполнены условия (1.22) относительно матрицы $P(t,\tau)$, а также:*

1) движения системы (1.24) из некоторой окрестности положения $\dot{x} = x = 0$ равномерно ограничены по переменным $x_{m+1}, x_{m+2}, ...x_n$

2) функция $\Pi_0(t,x)$ удовлетворяет неравенствам

$$a_1(|x|_m) \leq \Pi_0(t,x) \leq \Pi^*(x)$$

3) множество $\{\Pi^*(x) > 0\}$ не содержит положений равновесия системы (1.27), $\left|\frac{\partial \Pi_0^*(\dot{x})}{\partial x}\right| \geq \delta(\varepsilon) > 0 \forall x \in \{\Pi^*(x) \geq \varepsilon\}$

Тогда программная позиция (1.18) или положение равновесия $\dot{x} = x = 0$ системы (1.23) равномерно асимптотически устойчиво по $\dot{x}, x_1, x_2, ...x_m$.

Доказательство

Вновь используем функционал Ляпунова (1.27), для которого, согласно условию теоремы, имеем оценку

$$a_1(|x(t)|) + \alpha_0 |y(t)|^2 \leq V(t, x_t, y_t) \leq$$
$$\leq V_1(x_t, y_t) = \alpha_1 |y(t)|^2 + \Pi^*(x(t)) + \tfrac{1}{2} |P| \, h \, |x(t) - x(\tau)|^2$$

Согласно соотношению (1.28) для производной этого функционала находим, что множество

$$\{W(x_t)=0\}\cap\{V_1(x_t,y_t)>0\}=$$

$$=\{x(\tau)=x(t),t-h\le t\le t\}\cap$$

$$\cap\{\alpha_1\left|y(t)\right|^2+\Pi^*(x(t))+\tfrac{1}{2}\left|P\right|h\left|x(t)-x(\tau)\right|^2>0\}\equiv\{\Pi^*(x(t))>0\}$$

не может в соответствии с условием 3) теоремы содержать решение предельной системы. Согласно теореме 1.5 имеем требуемое доказательство.

Замечание. Условия 1) теорем 1.7 и 1.8 заведомо выполняются, если переменные $q_{m+1},...q_n$ являются периодическими, например по $mod\quad 2\pi$: $q_k+2\pi=q, k=\overline{m+1,n}$

1.3 О стабилизации стационарных программных движений управляемой механической системы.

Рассмотрим механическую систему, у которой кинетическая энергия не зависит от последних $(n-m)$ координат $q_{m+1},...q_n(0<m<n,n>1)$, и, таким образом, первые m координат $q_1,q_2,...,q_m$ являются периодическими, остальные - циклическими [].

Переобозначим координаты, положим

$z=(z_1,z_2,...z_m)'=(q_1,q_2,...,q_m)'$

$s'=(s_1,s_2,...,s_{n-m})=(q_{m+1},...,q_n)'$

Соответственно, кинетическая энергия системы может быть записана в виде $2T=\dot z'A_{11}(z)\dot z+\dot z'A_{12}(z)\dot s+\dot s'A_{21}(z)\dot z+\dot s'A_{22}(z)\dot s,\quad A_{21}=A_{12}$

где составляющие матрицу A подматрицы $A_{11},A_{12},A_{21},A_{22}$

удовлетворяют условиям

$$\alpha_0 |z|^2 \leq z' A_{11} z \leq \alpha_1 |z|^2$$

$$\alpha_0 |s|^2 \leq s' A_{22} s \leq \alpha_1 |s|^2$$

$$\alpha_0 |s|^2 \leq s' B s \leq \alpha_1 |s|^2$$

$$B = A_{12} A_{22} A_{21}, \alpha_0, \alpha_1 > 0 - const$$

Будем полагать, что обобщенные силы и управление по циклическим координатам отсутствует

$$Q' = (Q'_z, \quad Q'_s), \quad U = (U'_z, U'_s), Q_s = 0, \quad U_s = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial s} = 0 \tag{1.31}$$

Введем циклические импульсы

$$v = \frac{\partial T}{\partial \dot{s}} = A_{21}(z)\dot{z} + A_{22}(z)\dot{s} \tag{1.32}$$

Из последних $n - m$ уравнений (1.14) и предположений (1.31) получаем

$$\frac{dv}{dt} = 0 \tag{1.33}$$

т.е. циклические импульсы для движения системы (1.14) являются постоянными.

Следуя [], введем функцию Рауса. Для этого из (1.32) находим

$$\dot{s} = A_{22}^{-1}(z)(v - A_{21}(z)\dot{z}) \tag{1.34}$$

Тогда функция Рауса []

$$
\begin{gathered}
2R = 2T - 2\dot{s}'v = \\
= \dot{z}'A_{11}\dot{z} + \dot{z}'A_{12}A_{22}^{-1}(v - A_{21}\dot{z}) + (v - A_{21}\dot{z})'A_{21}\dot{z} + \\
+(v - A_21\dot{z})'A_{22}^{-1}(v - A_{21}\dot{z}) - 2(v - A_{21}\dot{z})'A_{22}^{-1}P = \\
= 2R_2 + 2R_1 + 2R_0, 2R_2 = \dot{z}'B(z)\dot{z}, R_1 = vA_{22}^{-1}A_{21}\dot{z}, 2R_0 = -v'A_{22}^{-1}v
\end{gathered} \tag{1.35}
$$

При этом матрица $B(z)$ является определенно-положительной.

Уравнения движения системы (1.14) могут быть записаны в виде равенств (1.33) и (1.34) и уравнений

$$
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial R}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z} + Q_z + U_z \tag{1.36}
$$

После подстановки выражения для функции R получаем следующие уравнения движения

$$
\begin{gathered}
\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot{z}}\right) - \frac{\partial R_2}{\partial z} = \frac{\partial R_0}{\partial z} - \frac{\partial \Pi}{\partial z} - G\dot{z} + U_z + Q_z, \\
dvdt = 0, \\
\dot{s} = A_{22}^{-1}(z)(v - A_{21}(z)\dot{z})
\end{gathered} \tag{1.37}
$$

где $G = G(z, v) = (\frac{\partial g}{\partial z}) - (\frac{\partial g}{\partial z})', g(z, v) = A_{12}A_{22}^{-1}v$ есть кососимметрическая матрица, $G' = -G$.

Допустим, что при некотором значении $z = z_0$ и $v = v_0$ управление U_z подобрано так, что

$$
U_z^0(t) = -\frac{\partial R_0}{\partial z}(v_0, z_0) + \frac{\partial \Pi(t, z_0)}{\partial z} \tag{1.38}
$$

Тогда система (1.35) будет иметь программное движения

$$
\dot{z} = 0, \quad z = z_0, \quad v = v_0, \quad \dot{s} = \dot{s}_0 = A_{22}^{-1}(z_0)v_0 \tag{1.39}
$$

Рассмотрим задачу о стабилизации этого движения управлением вида

$$U_z = U_z^0(t) - \frac{\partial \Pi_U(t,v,z)}{\partial z} - \int\limits_{t-h}^{t} P_z(t,\tau)(z(t)-z(\tau))d\tau \qquad (1.40)$$

где $\Pi_U = \Pi_U(t,v,z)$ есть некоторые непрерывно-дифференцируемая (по z дважды) ограниченная вместе со своими производными $\frac{\partial \Pi}{\partial t}(t,v,z_0)0, P_z(t,z)$ есть матрица размерности $m \times m$ выражения вида $P_z = |p_{jk}(t,\tau)|\,, p_{jk}(t,\tau) = p_{jk}^0 e^{s_{jk}^0(\tau-t)}, p_{jk}^0, s_{jk}^0 - const$

удовлетворяющая условиям

$$\begin{gathered} \dot{z}P(t,\tau)z \geq 0, \quad z^{'}P_t(t,\tau)z \leq -\beta_0 \left|z\right|^2, \quad \beta_0 > 0, \\ P_t(t,\tau) = \tfrac{\partial P_z(t,\tau)}{\partial t} = -\left|p_{jk}^0 s_{jk}^0 e^{s_{jk}^0(\tau-t)}\right|, \\ \left|z\right|^2 = z_1^2 + ... + z_m^2 \end{gathered} \qquad (1.41)$$

Уравнения (1.36) с управлением (1.40), (1.41) могут быть записаны в виде

$$\begin{gathered} \frac{dz(t)}{dt} = r(t), \\ \frac{dr(t)}{dt} = B^{-1}(z(t))(E(z(t),r(t))r(t) - G(z(t),v(t))r(t) + Q_z(t,z(t),r(t)) - \\ -\frac{\partial S(t,v(t),z(t))}{\partial z}) - \int\limits_{t-h}^{t} P_z(t,\tau)(z(t)-z(\tau))d\tau, \\ \frac{dv(t)}{dt} = 0 \quad \frac{ds(t)}{dt} = A_{22}^{-1}(z(t)(v(t) - A_{21})(z(t))r(t)) \end{gathered} \qquad (1.42)$$

где $E = (e_{kj})-$ матрица, определяемая равенством

$$e_{kj} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial b_{ik}}{\partial z_j} - \frac{\partial b_{kj}}{\partial z_i} - \frac{\partial b_{ij}}{\partial z_k})r_k$$

функция $S(t,v,z) = \Pi(t,z) - R_0(v,z) - \frac{\partial \Pi(t,z_0)}{\partial z}z + \frac{\partial R_0(v,z_0)}{\partial z}z + \Pi_U(t,v,z)$

В силу подбора U_z имеем $\frac{\partial S(t,v_0,z_0)}{\partial z} = 0$, так что система (1.42) имеет решение

$$z(t) = z_0, \quad r(t) = 0, \quad v = v_0, \quad \dot{s}_0 = A_{22}^{-1}(z_0)v_0,$$

отвечающее программному движению (1.39).

Полагаем, что функции $Q_z(t,z,r)$, $S(t,v,z)$, $\frac{\partial S}{\partial t}(t,v,z)$, $\frac{\partial S(t,v,z)}{\partial z}$ являются ограниченными, равномерно непрерывными на множествах вида $R \times K$, $K \in R^n$ - компакт, при этом

$$\frac{\partial S}{\partial t}(t,v,z) \le 0, \quad S(t,v_0,z_0) = 0 \tag{1.43}$$

Уравнения (1.42) имеют аналогичный им вид с функциями $Q_z^*(t,z,r)$ и $S = S^*(v,z)$, предельными к Q_z и S

$$S^*(v,z) = \lim_{t \to +\infty} S(t,v,z).$$

Введем функционал

$$V = \frac{1}{2} r^{'}(t) B(z(t)) r(t) + S(t,v_0,z) + \frac{1}{2} \left| v(t) - v_0 \right|^2 + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{t-h}^{t} (z(t) - z(\tau))^{'} P_z(t,\tau)(z(t) - z(\tau)) d\tau$$

Его производная в силу уравнений (1.42) в соответствии с соотношениями (1.41) и (1.43) будет иметь следующую оценку

$$\begin{gathered} \dot{V} = -z^{'}(t) G(z(t), v(t)) r(t) + z^{'}(t) Q_z(t, z(t), r(t)) + \frac{\partial S(t,v_0,t)}{\partial t} + \\ + \frac{1}{2} \int\limits_{t-h}^{t} (z(t) - z(\tau))^{'} P_t(t,\tau)(z(t) - z(\tau)) d\tau \le -W(z_t) = \\ = -\frac{\beta_0}{2} \int\limits_{t-h}^{t} \left| z(t) - z(\tau) \right|^2 d\tau \end{gathered} \tag{1.44}$$

Соответственно имеем следующую теорему.

Теорема 1.10. *Предположим, что:*

1) функция $s = s(t, v_0, z)$ является определенно-положительной по z;

2) функция $s^*(v_0, z)$ имеет изолированный минимум в точке

$$\left|\frac{\partial S^*(v_0, z)}{\partial z}\right| \neq 0 \quad \forall z \in \{0 < |z - z_0| < \delta\}$$

Тогда под действием управления (1.40)) программное стационарное движение (1.39) устойчиво, асимптотически устойчиво относительно движений, отвечающих значению $v = v_0$, а каждое иное возмущенное движение неограниченно приближается при $t \to +\infty$ к движению

$$\dot{z} = 0, \quad \dot{z} = z_1 = const, \quad v = v_1 = const, \quad \dot{s} = \dot{s}_1 = A_{22}^{-1}(z_1)v_1$$

Доказательство: Из условия 1) теоремы и условий относительно функций, входящих в функционал V, следует, что он является определенно положительным, допускающим бесконечно малый высший предел по переменным $r, z, v - v_0$.

В силу (1.44) имеем устойчивость движения (1.39).

Множество $\{W(z_t) = 0\}$ может содержать только те предельные решения, для которых $z(t) = z_1 = const$. Но такими решениями могут быть решения для которых одновременно

$$r(t) = 0, \quad v(t) = v_1 = const, \quad \frac{\partial S^*(v_1, z_1)}{\partial z} = 0.$$

Тем самым, в силу теорем 1.1 и 1.2 имеем искомое доказательство.

1.4 О стабилизации положения равновесия перевернутого маятника.

Рассмотрим задачу о стабилизации математического маятника в верхнем неустойчивом положении за счет момента U, приложенного на его оси, при этом имеется возможность измерить лишь отклонение маятника от вертикали без его производной или угловой скорости [].

Обозначим угол отклонения φ. Нормируя, если нужно, соответствующим образом масштабы времени, координат, уравнения возмущенного движения можно записать в виде

$$\frac{d\varphi}{dt} = \psi, \quad \frac{d\psi}{dt} = sin\varphi + U \tag{1.45}$$

Сигнал обратной связи измеряется в виде $y = sin\varphi$. Эта задача решалась в работе [57] нахождением закона регулирования

$$\frac{dU}{dt} = aU(t) + \int\limits_{t-h}^{t} (a(\tau g(\tau) + bU(\tau)))d\tau.$$

Найден стабилизирующий закон регулирования в виде уравнения

$$\begin{gathered} \frac{dU}{dt} = -4,6116\varphi(t) - 3,1974u(t) - \\ -4,6116 \int\limits_{t-1}^{t} (7,358ch(t+s) + 4,329sh(t+\tau))\varphi(t) + \\ +u(\tau) \int\limits_{t-1}^{t+\tau} (7,358ch(s+t) + 4,328sh(s+t))sh(s-r)ds)d\tau \end{gathered} \tag{1.46}$$

Этот закон управления представляется достаточно сложным. Покажем, что рассматриваемая задача о стабилизации решается управлением вида

$$U = -a\sin\varphi(t) - \int\limits_{t-h}^{t} Le^{b(\tau-t)}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(\tau))d\tau\cos(\varphi(t)) \qquad (1.47)$$

где a, b и L есть некоторые искомые постоянные $a > 1,\ b, L > 0$

Введем функционал

$$V = \frac{1}{2}\psi^2(t) + (a-1)(1-\cos\varphi(t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{t-h}^{t} Le^{b(\tau-t)}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(\tau))^2 d\tau$$

Несложно видеть, что он является определенно-положительным, допускающим бесконечно малый высший предел относительно $\varphi = \varphi(t)$ и $\psi = \psi(t)$

Для его производной находим оценку

$$\dot{V} = \psi(t)(\sin\varphi(t) - a\sin\varphi(t) -$$
$$-L\int\limits_{t-h}^{t} e^{b(\tau-t)}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(\tau))d\tau\cos\varphi(t)) + (a-1)\sin\varphi(t)\psi(t) -$$
$$-\frac{1}{2}be^{-Lh}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(t-h))^2 + \cos\varphi(t)\int\limits_{t-h}^{t} Le^{b(\tau-t)}(\sin\varphi(t) -$$
$$-\sin\varphi(\tau))d\tau - \frac{1}{2}bL\int\limits_{t-h}^{t} e^{b(\tau-t)}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(\tau))^2 d\tau =$$
$$= -\frac{1}{2}be^{-Lh}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(t-h))^2 - \frac{1}{2}bL\int\limits_{t-h}^{t} e^{L(\tau-t)}(\sin\varphi(t) - \sin\varphi(\tau))^2 d\tau \le 0$$

Множество $\{\dot{V} = 0\}$ может содержать лишь движения $\psi(t) = const$, или $\dot{\psi} \equiv 0, \quad \varphi = \pi k, \quad k \in Z$

Соответственно, получаем, что управление (1.47) решает поставленную задачу о стабилизации.

Проведем численный анализ управлений (1.46) и (1.47) при $a = 1.1, L =$

$1, b = 0.8, h = 1$

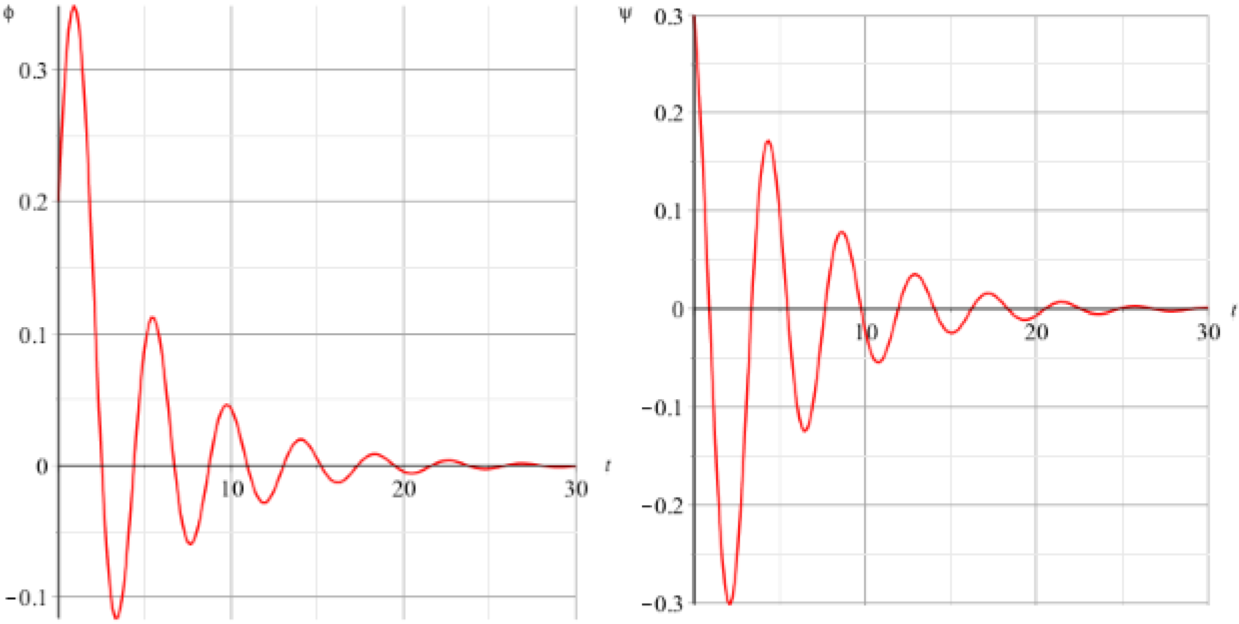


Рис. 1.1: Результаты моделирования при управлении (1.47)

2 УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ДВУЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА

2.1 Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель двухзвенного манипулятора. Манипулятор состоит из неподвижного основания и двух абсолютно жестких звеньев G_1, G_2. Элементы конструкции соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, и O_2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в горизонтальной или вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2.

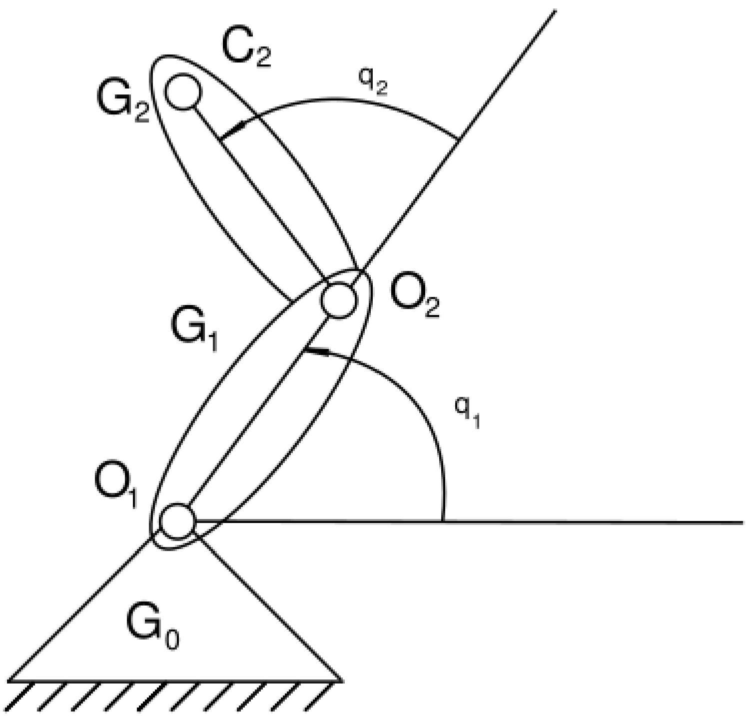


Рис. 2.1: Модель двузвенного манипулятора

Введем обозначения: $q_i (i = 1, 2)$ —углы поворотов звеньев манипулятора, показанные на рисунке; l_i — длина отрезка O_iC_i; l — длина отрезка O_1O_2; m_i — масса i-го звена; I_i — момент инерции i-го звена относительно оси шарнира O_i; g — ускорение свободного падения.

Выражение для кинетической энергии манипулятора имеет в таком случае следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}((I_1 + I_2 + m_2 l^2 + 2m_2 l l_2 \cos q_2)\dot{q}_1^2 + (I_2 + m_2 l l_2 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + I_2\dot{q}_2^2) \quad (2.1)$$

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_1} = M_1 + U_1, \\ \dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}\right) - \dfrac{\partial T}{\partial q_2} = M_2 + U_2, \end{cases}$$

где M_i — момент, создаваемый силой тяжести в i-м шарнире. В случае манипулятора, совершающего движения в вертикальной плоскости,

$$M_1 = (m_1 l_1 + m_2 l) g \cos q_1,$$

$$M_2 = m_2 l_2 g \cos(q_1 + q_2),$$

U_i — управление.

Из выражения (2.1) для кинетической энергии T находим уравнения движения

$$\begin{aligned} & a_{11}\ddot{q}_1 + a_{12}\ddot{q}_2 - 2m_2 l l_2 \sin q_2 \dot{q}_1 \dot{q}_2 - m_2 l l_2 \sin q_2 \dot{q}_2^2 = U_1, \\ & a_{12}\ddot{q}_1 + a_{22}\ddot{q}_2 + m_2 l l_2 \sin q_2 \dot{q}_1^2 = U_2, \\ & a_{11}(q_2) = m_2 l_1^2 + I_1 + I_2 + 2m_2 l l_2 \cos q_2, \\ & a_{12}(q_2) = I_2 + m_2 l l_2 \cos q_2, \\ & a_{22} = I_2 \end{aligned} \quad (2.2)$$

Пусть $q = q(q_1, q_2)'$ — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и

$$X = \{(q^0(t), \dot{q}^0(t)) : [t_0, +\infty) \to R^4, \left|q^0(t)\right| \leq g_0, \left|\dot{q}^0(t)\right| \leq g_1, \left|\ddot{q}^0(t)\right| \leq g_2\}$$

есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q = q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$. Символом $|\cdot|$ обозначена евклидова норма вектора.

Пусть $(q^0(t), \dot{q}^0(t)) \in X$ — какое-либо программное движение, реализуемое программным управлением $U = U^0(t)$. Таким образом, для обеспечения такого движения имеет место следующее управление

$$\begin{aligned} &U_1^0(t) = a_{11}(q_2^0(t))\ddot{q}_1^0(t) + a_{12}(q_2^0(t))\ddot{q}_2^0(t) - 2m_2 l l_2 \sin q_2^0(t)\dot{q}_1^0(t)\dot{q}_2^0(t) - \\ &-m_2 l l_2 \sin q_2^0(t)\dot{q}_2^0(t)^2 - M_1^0(t) \\ &U_2^0(t) = a_{12}^0(t)\ddot{q}_1^0(t) + I_2\ddot{q}_2^0(t) - M_2^0(t) \end{aligned} \tag{2.3}$$

где

$$M_1^0(t) = M_2^0(t) = 0$$

для случая манипулятора в горизонтальной плоскости

$$\begin{aligned} M_1^0(t) &= (m_1 l_1 + m_2 l) g \cos q_1^0(t), \\ M_2^0(t) &= m_2 l_2 g \cos(q_1^0(t) + q_2^0(t)) \end{aligned} \tag{2.4}$$

в случае манипулятора, функционирующего в вертикальной плоскости.

Введем возмущения $x_k = q_k - q_k^0(t), \quad \dot{x}_k = \dot{q}_k - \dot{q}_k^0(t), \quad k = 1, 2$

Составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x} = \dot{x}' C^{(1)}(t,x)\dot{x} + Q^{(1)}(t,x) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) + U^{(1)}, \tag{2.5}$$

$$A^{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} a_{11}(q_2^0(t)+x_2) & a_{12}(q_2^0(t)+x_2) \\ a_{12}(q_2^0(t)+x_2) & I_2 \end{pmatrix}$$

$$Q^{(1)}(t,x) = F(t,x)p(x), \quad Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = D(t,x)\dot{x},$$

$$C^{(1)}(t,x) = C_1^{(1)}(t,x) + C_2^{(1)}(t,x),$$

$$C_1^{(1)}(t,x) = m_2 l l_2 \sin(q_2^0(t)+x_2) \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C_2^{(1)}(t,x) = -m_2 l l_2 \sin(q_2^0(t)+x_2) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} f_{11}(t,x) & f_{12}(t,x) \\ f_{21}(t,x) & f_{22}(t,x) \end{pmatrix},$$

$$p(x) = \begin{pmatrix} \sin(x_1/2) \\ \sin(x_2/2) \end{pmatrix},$$

$$D(t,x) = \begin{pmatrix} d_{11}(t,x) & d_{12}(t,x) \\ d_{21}(t,x) & d_{22}(t,x) \end{pmatrix},$$

$$f_{11}(t,x) = 0\{+(-2m_1 l_1 - 2m_2 l)g\sin(q_1^0(t)+x_1/2)\}$$

$$f_{12}(t,x) = 4m_2 g l l_2 \ddot{q}_1^0(t)\sin(q_2^0(t)+x_2/2) + 2m_2 l l_2 \ddot{q}_2^0(t) *$$

$* \sin(q_2^0(t) + x_2/2) + 4m_2ll_2\cos(q_2(t) + x_2/2)\dot{q}_1^0(t)\dot{q}_2^0(t) +$

$+ 2m_2ll_2\cos(q_2^0(t) + x_2/2)(\dot{q}_2^0)^2$

$f_{21}(t,x) = 0\{+(-4m_2l_2g\sin(q_1^0(t) + q_2^0(t) + x_1/2 + x_2/2\cos x_2/2))\}$

$f_{22}(t,x) = 2m_2ll_2\ddot{q}_2^0(t)\sin(q_2^0(t) + x_2/2) + 2m_2ll_2\cos(q_2^0(t) + x_2/2) *$

$* (q_1^0(t))^2\{+(-4m_2l_2\sin(q_1^0(t) + q_2^0(t) + x_1/2 + x_2/2)\cos x_1/2)\}$

$d_{11}(t,x) = 2m_2ll_2\sin(q_2^0(t + x_1)\dot{q}_2^0(t))$

$d_{12}(t,x) = 2m_2ll_2\sin(q_2^0(t + x_1)\dot{q}_1^0(t)) + 2m_2ll_2\sin(q_1^0(t) + x_2)\dot{q}_2^0(t)$

$d_{21}(t,x) = -2m_2ll_2\sin(q_2^0(t) + x_2)\dot{q}_1^0(t)$

$d_{22}(t,x) = 0$

где слагаемые, заключенные в фигурные скобки, добавляются в случае вертикального манипулятора.

$$U^{(1)} = U - U^0(t)$$

В главе рассматривается задача построения управляющего воздействия

$$U^{(1)} = U^{(1)}(t, x, \dot{x}), \quad U^{(1)}(t, 0, 0) \equiv 0,$$

при котором бы невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ системы (2.5) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иными словами, управление

$$U = U^0(t) + U^{(1)}(t, q - q^0(t), \dot{q} - \dot{q}^0(t)),$$

где $U^0(t)$ определяется согласно (2.3) и (2.4), обеспечивало бы стабилизацию программного движения $(q^0(t), \dot{q}^0(t)) \in X$ системы (2.1).

2.2 Стабилизация программных движений двузвенного манипулятора без измерения скоростей.

Вначале рассмотрим задачу о стабилизации программного положения горизонтального манипулятора без измерения скоростей в случае

$$q_1^0(t) = q_1^0 = const, \quad q_0^2(t) = q_0^2 = const \tag{2.6}$$

Эта задача в соответствии с представленным в параграфе 1.2 общим решением для голономной механической системы решается управлением вида

$$\begin{aligned} U_1^{(1)}(x_1) &= -k_1 \sin\frac{x_1(t)}{2} - \int\limits_{t-h}^{t} p_1^0 e^{s_1^0(\tau - t)}(x_1(t) - x_1(\tau))d\tau, \\ U_1^{(2)}(x_1) &= -k_2 \sin\frac{x_2(t)}{2} - \int\limits_{t-h}^{t} p_2^0 e^{s_2^0(\tau - t)}(x_2(t) - x_2(\tau))d\tau \end{aligned} \tag{2.7}$$

$k_1,\ k_2,\ p_1^0,\ p_2^0,\ s_1^0,\ s_2^0 - const$

При этом, согласно теореме каждое возмущенное движение будет неограниченно приближаться при $t \to \infty$ к положению равновесия, определяемое равенствами

$$\sin\frac{x_1(t)}{2} = 0 \quad \sin\frac{x_2(t)}{2} = 0$$

или $x_1(t) = 2\pi k, \quad x_2(t) = 2\pi k, \quad k \in Z.$

Численное моделирование движения манипулятора при управлении (2.7) (а также для всех последующих случаях в настоящей главе), проводилось при значениях:

$$m_1 = 5 \quad \text{кг}, \quad m_2 = 5\text{кг}, \quad l = 1\text{м}, \quad l_2 = 0,5\text{м} \;, \quad I_1 = I_2 = 3,33 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

На рисунках 2.2-2.3 представлены результаты моделирования для параметров $k_1 = k_2 = 1, p_1^0 = 90, s_1^0 = 10, q_1^0 = \frac{\pi}{4}, q_2^0 = \frac{\pi}{4}$

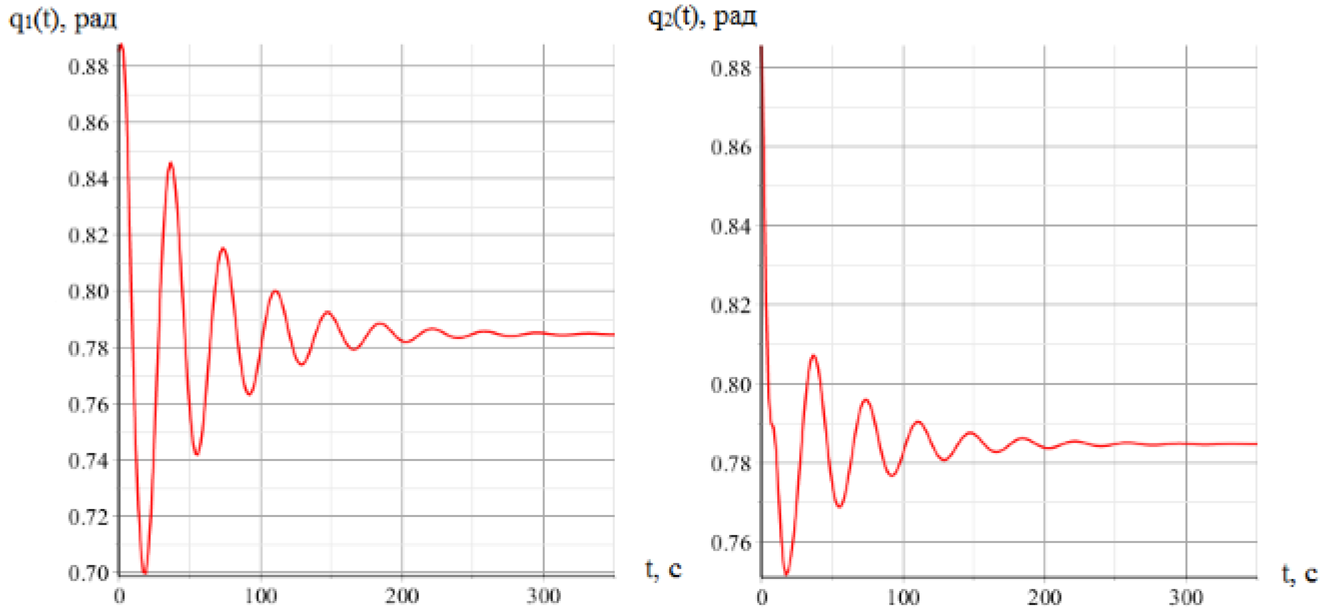


Рис. 2.2: Результаты моделирования при управлении (координаты звеньев) (2.7)

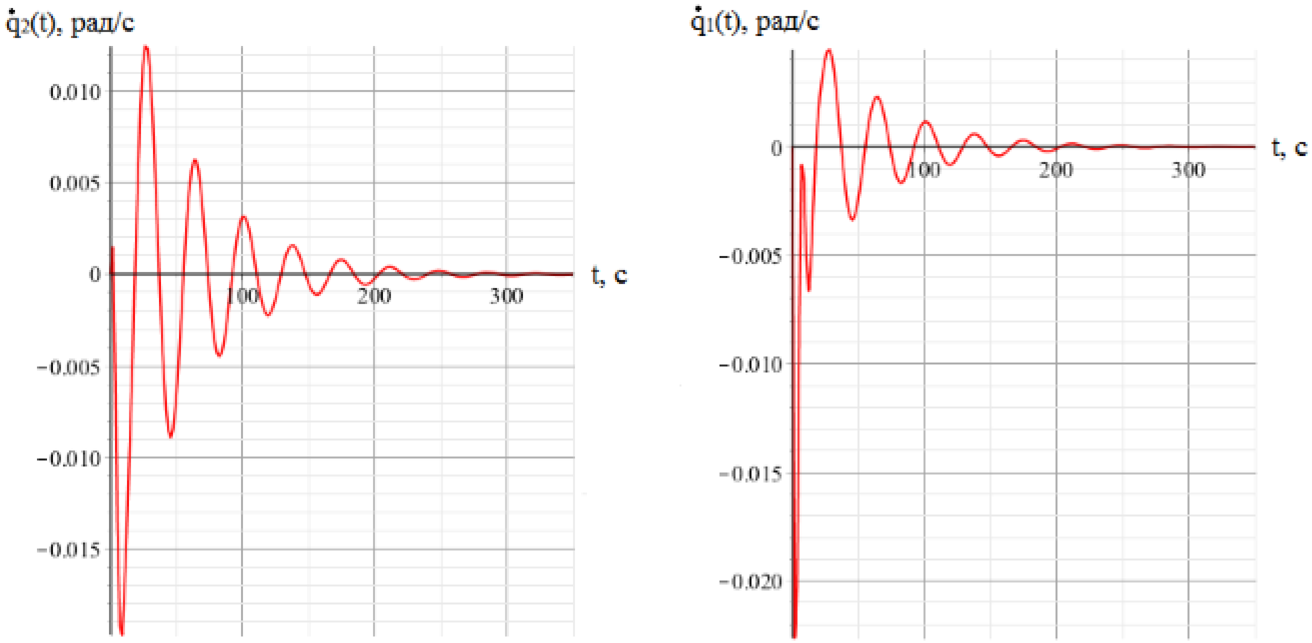


Рис. 2.3: Результаты моделирования при управлении (скорости звеньев) (2.7)

Соответственно в переменных q_1 и q_2 для каждого возмущенного движения имеем при $t \to +\infty$

$$q_1(t) \to q_1^0 + 2\pi k, \quad q_2(t) \to q_2^0 + 2\pi k \tag{2.8}$$

Таким образом, так как положение манипулятора в переменных q_1 и q_2 определяются с точностью до 2π, управлением (2.7) достигается глобальная стабилизация положения (2.6).

Выражение для кинетической энергии не содержит координату q_1 в явном виде, т.е. она является циклической. Вводим циклический импульс

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} = a_{11}\dot{q}_1 + a_{12}\dot{q}_2 = v$$

Составим функцию Рауса. Для этого находим $\dot{q}_1 = (v - a_12\dot{q}_2)/a_{11}$

$$R = \frac{1}{2}(v - a_{12}\dot{q}_2)^2/a_{11} + a_{22}(v - a_{12}\dot{q}_2)\dot{q}_2/a_{11} + \frac{1}{2}a_{22}\dot{q}_2^2 - v(v - a_{12}\dot{q}_2)/a_{11} =$$
$$= \frac{1}{2}(a_{22} - a_{12}^2/a_{11})\dot{q}_2^2 - \frac{1}{2}v^2/a_{11} + a_{12}v\dot{q}_2/a_{11}$$

Отсюда имеем следующие уравнения движения в переменных $q_2,\ \dot{q}_2, v$

$$\frac{d}{dt}((a_{22} - a_{12}^2/a_{11})\dot{q}_2) - \frac{1}{2}\frac{\partial a_{11}}{\partial q_2}v_0^2/a_{11}^2 = M_1$$

$$v = v_0 = const$$

Эти уравнения допускают движения вида

$$v = v_0 = const, \quad \dot{q}_2 = 0, \quad q_2 = q_2^0 = const \tag{2.9}$$

если

$$U_1^0 = m_2 l l_2 \sin q_2^0 v_0^2/(m_2 l^2 + I_1 + I_2 + 2m_2 l l_2 \cos q_2^0)^2$$

В соответствии с представленным в параграфе 2.3 общим решением в задаче о стабилизации установленного движения голономной механической системы с циклической координатой получаем, что задача о стабилизации движения (2.9) по q_2 и $\dot{q}_2$ решается управлением

$$U_2 = U_2^0 - k_2 \sin x_2(t) - \int\limits_{t-h}^{t} p_2^0 e^{s_2^0(\tau - t)}(x_2(t) - x_2(\tau))d\tau$$

$$k_2 = \frac{m_2 l l_2 \cos q_2^0 v_0^2}{(ml^2 + I_1 + I_2 + 2m_2 l l_2 \cos q_2^0)^2}; \quad p_2^0, \quad s_2^0 - const > 0.$$

Рассмотрим задачу о стабилизации заданного программного положения вертикального двузвенного манипулятора. Согласно (2.3) и (2.4) находим, что положение (2.6) будет иметь место если

$$U_1^0 = -(m_1 l_1 + m_2 l_2) g \cos q_1^0, \quad U_2^0 = -m_2 l_2 g \cos(q_1^0 + q_2^0).$$

В соответствии в параграфе 1.2 общим решением получаем, что задачи о стабилизации программного положения (2.6) без измерения скоростей решается управлением

$$\begin{aligned} U_1 &= U_1^0 - k_1(q_1(t) - q_1^0) - \int\limits_{t-h}^{t} p_1^0 e^{s_1^0(\tau - t)}(q_1(t) - q_1(\tau))d\tau \\ U_2 &= U_2^0 - k_2(q_2(t) - q_2^0) - \int\limits_{t-h}^{t} p_2^0 e^{s_2^0(\tau - t)}(q_2(t) - q_2(\tau))d\tau \end{aligned} \tag{2.10}$$

где коэффициенты k_1 и k_2 удовлетворяет условиям

$$\alpha_1 k_1 - (m_1 l_1 + m_2 l) g \sin q_1^0 - m_2 l_2 g \sin(q_1^0 + q_2^0) > 0$$

$$\alpha_1 (k_2 - m_2 l_2 g \sin(q_1^0 + q_2^0)) - (m_2 l_2 g \sin(q_1^0 + q_2^0))^2 > 0$$

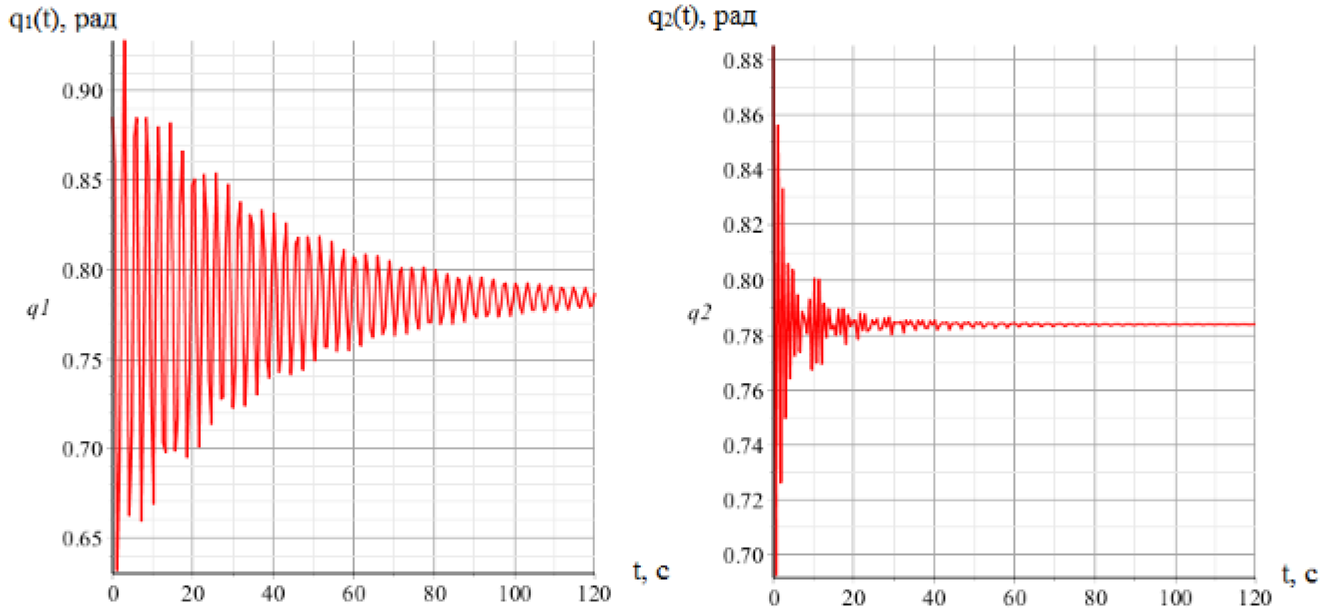


Рис. 2.4: Результаты моделирования при управлении (координаты звеньев) (2.10)

2.3 О стабилизации программных движений двузвенного манипулятора

Рассмотрим решение задачи о стабилизации программного движения $(q_0(t), \dot{q}_0(t))$ в области

$$G = (x, \dot{x}) \in R^4 : \|x\| < \varepsilon, \quad \|\dot{x}\| < \varepsilon, \quad \varepsilon = const > 0$$

$$x = q - q_0(t),\ \ \dot{x} = \dot{q} - \dot{q}_0(t)$$

с помощью непрерывного управления вида

$$U^{(1)}(x, \dot{x}) = B(\dot{x} + p(x)) \tag{2.11}$$

где $B \in R^{2\times 2}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению. Возьмем для системы (2.5) вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)'$ с коэффициентами вида

$$V^1 = \|p(x)\|, \quad V^2 = \sqrt{(\dot{x} + p(x))' A^{(1)}(t, x)(\dot{x} + p(x))}.$$

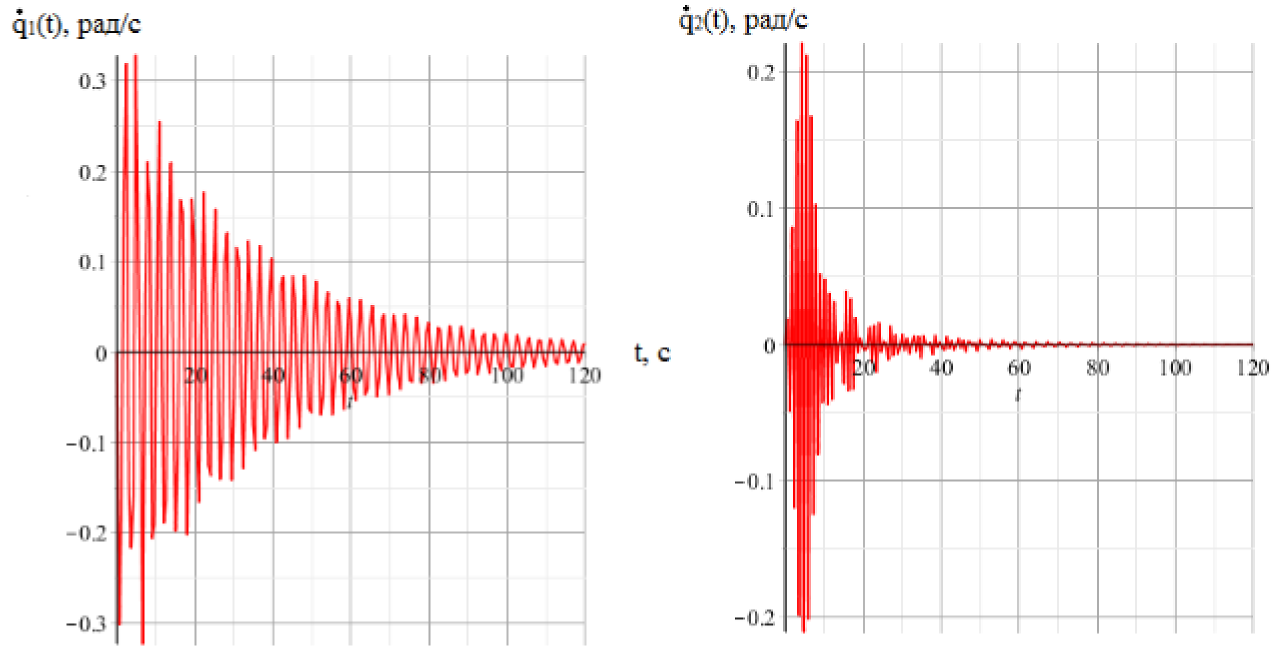


Рис. 2.5: Результаты моделирования при управлении (скорости звеньев) (2.10)

Вычисляя производную по времени вектор-функции Ляпунова V в силу системы (2.5), получим следующие оценки:

$$\begin{aligned} &\dot{V}^1 \leq -mu_1 V^1 + \tfrac{m_1}{\lambda_1}, \\ &\dot{V}^2 \leq m_2 V^1 - \mu_2 V^2 + m_3 (V^1)^2 + m_4 (V^2)^2 + m_5 V^1 V^2, \end{aligned} \tag{2.12}$$

где положительные постоянные $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, m_i (i = 1, 2, ..., 5)$ определяются из следующих условий:

$$\begin{aligned} &\lambda_1^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 - \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2} \\ &\lambda_2^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 + \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2} \\ &\mu_1 = \frac{1}{2} \cos(\frac{\varepsilon}{2}), \quad m_1 = \frac{1}{2}, \\ &m_2 = \max \frac{\lambda_2^2 + 2\sqrt{\lambda_{max}[(D-F)'(D-F)]}}{2\lambda_1}, \\ &m_3 = \frac{m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, \quad m_4 = \frac{2 m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, \quad m_5 = \frac{3 m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, \\ &\mu_2 = \frac{-\lambda_2^2 - 4 g_1 m_2 l_q l_{g_2} - \lambda_{max}(B + B')}{2\lambda_2} \end{aligned}$$

Здесь λ_{max} есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (2.9) можно построить следующую систему сравнения:

$$\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda_1} u^2, \quad \dot{u}^2 = m_2 u^1 - \mu_2 u^2 + m_3 (u^1)^2 + m_4 (u^2)^2 + m_5 u^1 u^2 \quad (2.13)$$

Согласно теореме сравнения об асимптотической устойчивости [70] из свойства асимптотической устойчивости нулевого решения системы сравнения (2.13) следует свойство равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.2). Получим условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.13) с областью притяжения

$$(u^1, u^2) \in R^2 : 0 \leq u^1 \leq \delta_1 = const > 0, 0 \leq u^2 \leq \delta_2 = const > 0.$$

Пусть найдется такое число $\gamma > 0$, что выполняются соотношения:

$$\gamma = \frac{\delta_2 m_1}{\delta_1 \lambda_1 \mu_1}, \quad \mu_2 > \frac{m_1}{\gamma \lambda_1 \mu_1}(m_2 + \delta_1 m_3) + m_4 \delta_2 + m_5 \delta_1 \quad (2.14)$$

Тогда можно показать, что функция $\widetilde{u}(t) = \max(u^1(t), \delta_1 u^2(t)/\delta_2)$ будет монотонно стремиться к нулю при $t \to \infty$, и, значит, нулевое решение системы сравнения (2.13) будет асимптотически устойчиво. При невозможности практической реализации программного управления (2.3) и (2.4) стабилизацию программного движения можно осуществить[] при помощи релейного управления вида

$$U^{(1)}(x, \dot{x}) = B\ sign(\dot{x} + p(x)) \quad (2.15)$$

Численное моделирование управляемого движения манипулятора проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории:

$$q_1^0(t) = \sin(0,5t), \quad q_1^0(t) = \cos(0,5t) + \pi/2$$

На рисунках 2.6 и 2.6 представлены результаты моделирования при управлениях (2.11) и (2.15) соответственно при начальных значениях $q_{10} = 0.5, \dot{q}_1 0 = -0.5, q_{20} = 2.1, \dot{q}_{20} = 0.3$

Стоит отметить, что при использовании непрерывного управления (2.11) использовалась матрица коэффициентов в виде $B = 35E$, где E — единичная матрица. А при использовании релейного закона (2.15) сократились энергозатраты на управление, так как матрица коэффициентов усиления была найдена в виде $B = diag\{5, 2\}$.

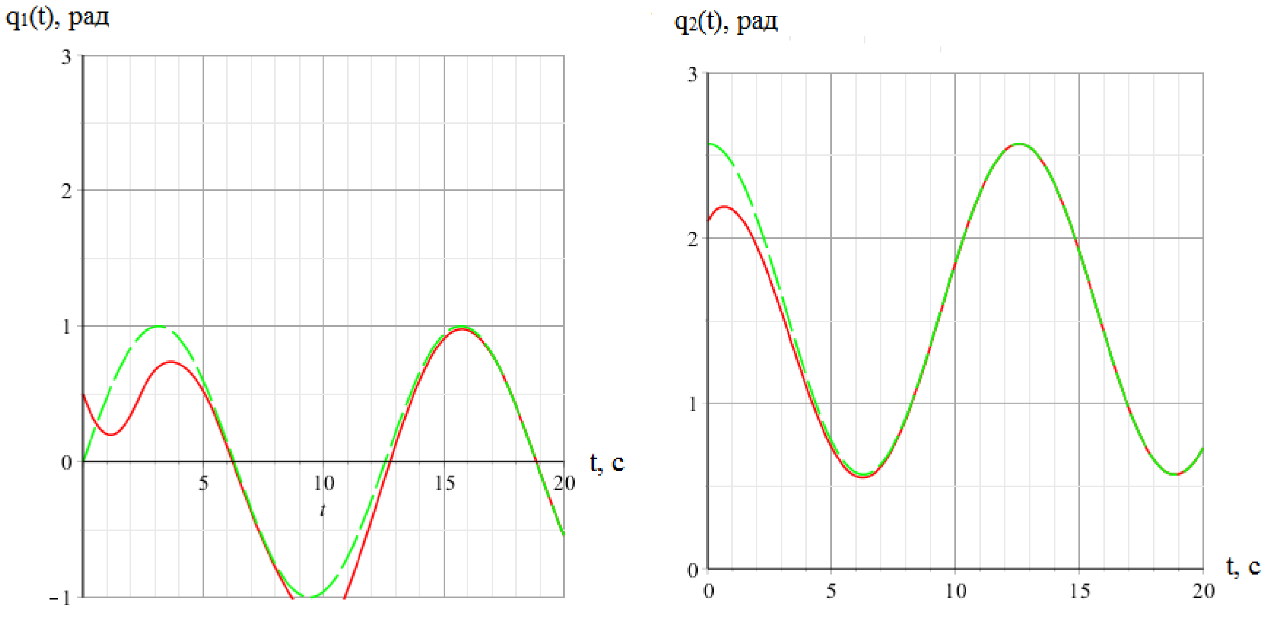


Рис. 2.6: Результаты моделирования при управлении (2.11)

2.4 Об управлении двузвенным манипулятором с приводом

Рассмотрим манипулятор, моделируемый в виде механической системы, состоящей из неподвижного основания G_0 и двух абсолютно жестких

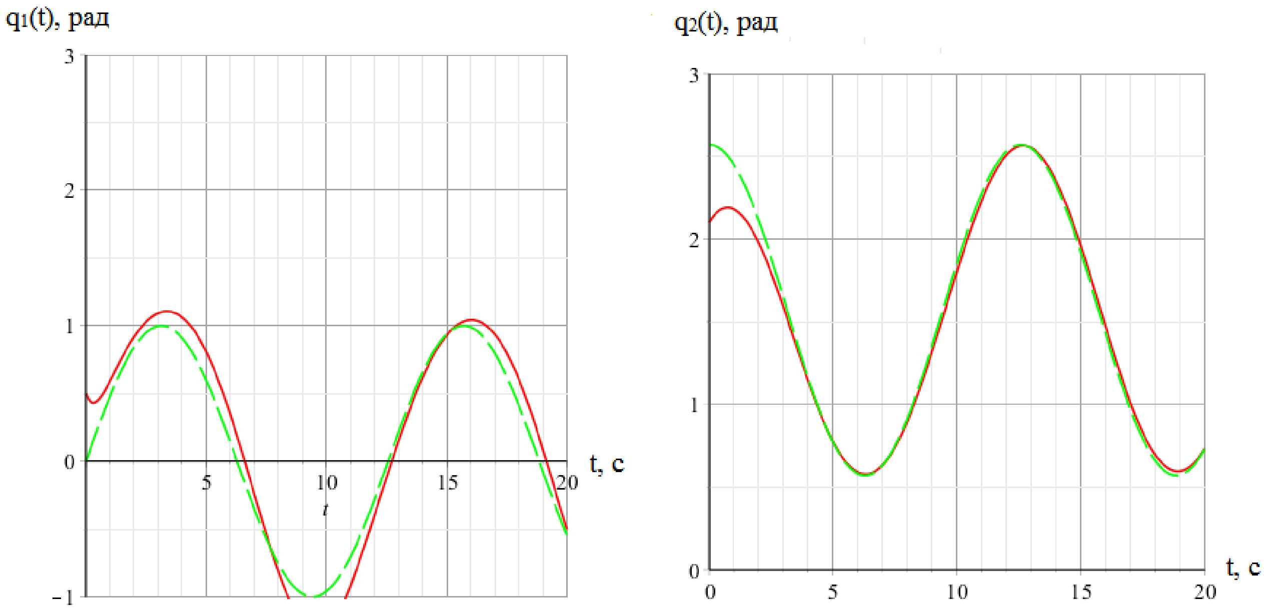


Рис. 2.7: Результаты моделирования при управлении (2.15)

звеньев G_1, G_2. Элементы конструкции соединены между собой двумя цилиндрическими шарнирами O_1, O_2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в горизонтальной плоскости под действием приводов, приложенных в этих шарнирах.

Будем считать, что приводы управляются некоторыми воздействиями L_i в соответствии с уравнениями

$$\frac{dM_i}{dt} = L_i \tag{2.16}$$

Рассматривается задача построения структуры обратной связи в виде зависимости $L_i = L_i(t, q, \dot{q}, M)$ таким образом, чтобы каждое программное движение системы $(q_1(t), q_2(t))$ являлось бы асимптотически устойчивым.

Продемонстрируем решение этой задачи для случая положения равновесия системы

$$\dot{q}_1 = \dot{q}_2 = 0, \quad q_1 = q_2 = 0, \quad M_1 = M_2 = 0 \tag{2.17}$$

Покажем, что такая задача решается управлением приводами со следующим видом обратной связи

$$L_1 = -M_1 - k_1(\dot q_1 + \beta_1 \sin\frac{q_1}{4}), \quad L_2 = -M_2 - k_2(\dot q_2 + \beta_2 \sin\frac{q_2}{4}) \qquad (2.18)$$

где $k_1, k_2, \beta_1, \beta_2 > 0$ есть некоторые постоянные, определяемые из условия стабилизации положения равновесия (2.17).

Для нахождения этих условий применим метод векторых функций Ляпунова [70], в соотвтетствии с методикой их построения, представленной в [17].

Векторную функцию Ляпунова возьмем в виде

$$V_1 = \sqrt{c_1 \sin^2\tfrac{q_1}{4} + c_2 \sin^2\tfrac{q_2}{4}}, \quad c_1, c_2 > 0$$
$$V_2 = \sqrt{a_{11}(\dot q_1 + \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4})^2 + 2a_{12}(\dot q_1 + \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4})(\dot q_2 + \beta_2 \sin\tfrac{q_2}{4}) + a_{22}(\dot q_2 + \beta_2 \sin\tfrac{q_2}{4})^2}$$
$$V_3 = \sqrt{p_{11}(M_1 + k_1(\dot q_1 + \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4})^2) + 2p_{12}(M_1 + k_1(\dot q_1 + \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4}))(M_2 + k_2(\dot q_2 + \beta_2}$$
$$a_{11} > 0, a_{11}a_{22} > 0, p_{11} > 0, p_{11}p_{22} - p_{12}^2 > 0$$

Для производной функции V_1 в силу (2.2), (2.15) и (2.17) при малых $\|q_1\| + \|q_2\|$ находим оценку

$$\dot V_1 = \tfrac{1}{4V_1}(c_1 \sin\tfrac{q_1}{4}\cos\tfrac{q_1}{4} - \dot q_1 + c_2 \sin\tfrac{q_2}{4}\cos\tfrac{q_1}{4}\dot q_2) =$$
$$= \tfrac{1}{4V_1}(c_1 \sin\tfrac{q_1}{4}\cos\tfrac{q_1}{4}(\dot q_1 + \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4} - \beta_2 \sin\tfrac{q_1}{4}) +$$
$$+ c_2 \sin\tfrac{q_2}{4}\cos\tfrac{q_2}{4}(\dot q_2 + \beta_2 \sin\tfrac{q_2}{4} - \beta_2 \sin\tfrac{q_2}{4})) \le$$
$$\le \tfrac{1}{4V_1}(\sqrt{c_1 \sin^2\tfrac{q_1}{4} + c_2 \sin^2\tfrac{q_2}{4}}\sqrt{c_1(\dot q_1 + \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4})^2 +}$$
$$+ c_2(\dot q_2 + \beta_2 \sin\tfrac{q_2}{4})^2 - \tfrac{\sqrt2}{2}(c_1\beta_1 \sin^2\tfrac{q_1}{4} c_2\beta_2 \sin^2\tfrac{q_2}{4})) \le$$
$$\le -\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2, \alpha_1 = \tfrac{\sqrt2}{8} min(\sqrt{c_1}\beta_1, \sqrt{c_2}, \beta_2), \alpha_2 = \tfrac14\sqrt{\lambda_{AC}^{max}}$$

где λ_{AC}^{max} - наибольшее характеристическое значение матрицы $c =$

$diag(c_1, c_2)$ на пучке матриц $A = A(q)$.

Для производной от функции V_2 в силу (2.2), (2.15) и (2.17) имеем более сложную оценку.

$$\dot{V}_2 = \tfrac{1}{V_2}((\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4})((M_1 + k_1(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4}))-$$

$$-k_1(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4}) + \tfrac{1}{4}a_{11}\beta_2 \cos\tfrac{q_1}{4}(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4}) - \tfrac{1}{4}a_{11}\beta_1^2 \cos\tfrac{q_1}{4}\sin\tfrac{q_1}{4})+$$

$$+2m_2 l_1 l_2 \sin q_2(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\tfrac{q_2}{4} - \beta_2 \sin\tfrac{q_2}{4})^2)+$$

$$+(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\tfrac{q_2}{4})(M_2 + k_2(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\tfrac{q_2}{4})-$$

$$-k_2(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\tfrac{q_1}{4}) + \tfrac{1}{4}a_{12}\beta_2 \cos\tfrac{q_2}{4}(\dot{q}_2 + \beta_2 \sin\tfrac{q_2}{4})-$$

$$-\tfrac{1}{4}a_{22}\beta_2^2 \cos\tfrac{q_2}{4}\sin\tfrac{q_2}{4}-$$

$$-m_2 l_1 l_2 \sin q_2(\dot{q}_1 + \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4} - \beta_1 \sin\tfrac{q_1}{4})^2) \leq$$

$$\leq \gamma_1 V_1 - \gamma_2 V_2 + \gamma_3 V_3 + \mu_{21}V_1^2 + \mu_{22}V_2^2 + \mu_{23}V_3^2, \gamma_1 =$$

$$= \tfrac{p_{max}}{\lambda_{min}}, \gamma_2 = \tfrac{1}{\lambda_{min}}, \gamma_3 = \tfrac{1}{4}a_{max}\beta_{max}$$

где $\mu_{21}, \mu_{22}, \mu_{23}$ зависят от параметров системы и управления.

Для производной функции V_3 ещё более сложными вычислениями получим оценку

$$\dot{V}_3 \leq V_1 + V_2 - V_3 + \mu_{31}V_1^2 + \mu_{32}V_2^2 + \mu_{33}V_3^2$$

$$\nu_1 = \tfrac{2}{\sqrt{\lambda_{min}}}(a_{11} + \|a_{12}\|)\beta_1, \nu_2 = \tfrac{2}{\sqrt{\lambda_{min}}}(\|a_{12}\| + a_{22})\beta_1$$

$$\nu_3 = k - 2((a_{11} + \|a_{12}\|)\beta_1 + (\|a_{12}\| + a_{22})\beta_2), k = \min(k_1, k_2),$$

где $\mu_{3i} > 0$ - некоторые коэффициенты, выражаемые через параметры k_i, β_i.

Стабилизация движения (2.16) согласно теореме об асимптотической устойчивости из [70] в самой общей постановке может определяться системой

$$\dot{y}_1 = -\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2$$

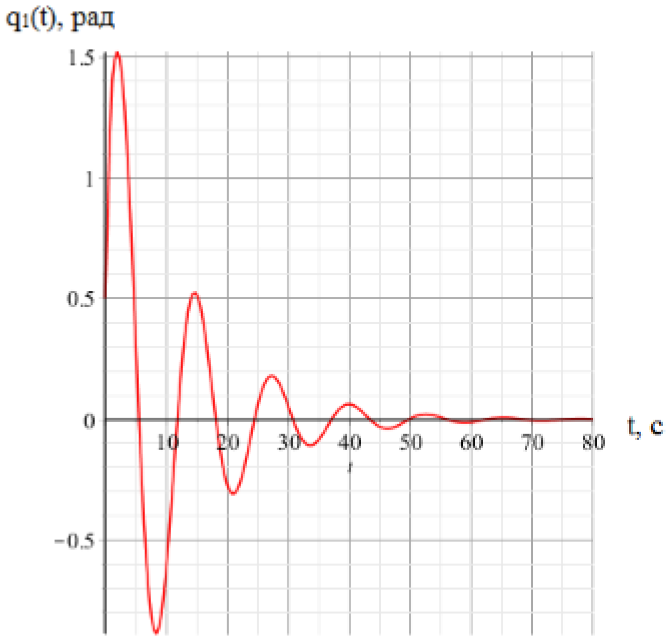
$$\dot{y}_2 = \gamma_1 y_1 - \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3 + \gamma_{31} y_1^2 + \mu_{22} y_2^2 + \mu_{33} y_3^2$$

$$\dot{y}_3 = \nu_1 y_1 + \nu_2 y_2 - \nu_3 y_3 + \mu_{31} y_1^2 + \mu_{32} y_2^2 + \mu_{33} y_3^2$$

При малых возмущениях стабилизация находится из асимптотической устойчивости линейной системы

$$\dot{y}_1 = -\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2, \dot{y}_2 = \gamma_1 y_1 - \gamma_2 y_2 + \gamma_3 y_3, \dot{y}_3 = \nu_1 y_1 + \nu_2 y_2 - \nu_3 y_3$$

Ниже представлены результаты численного моделирования процесса стабилизации положения при следующих численных значениях $\mu_1 = 1, k_1 = 5, \beta_1 = 6, \mu_2 = 1, k_2 = 4, \beta_2 = 7, q_{10} = 0,5, q_2 = 0,8, \dot{q}_{10} = 0,6, \dot{q}_{20} = 0,8.$



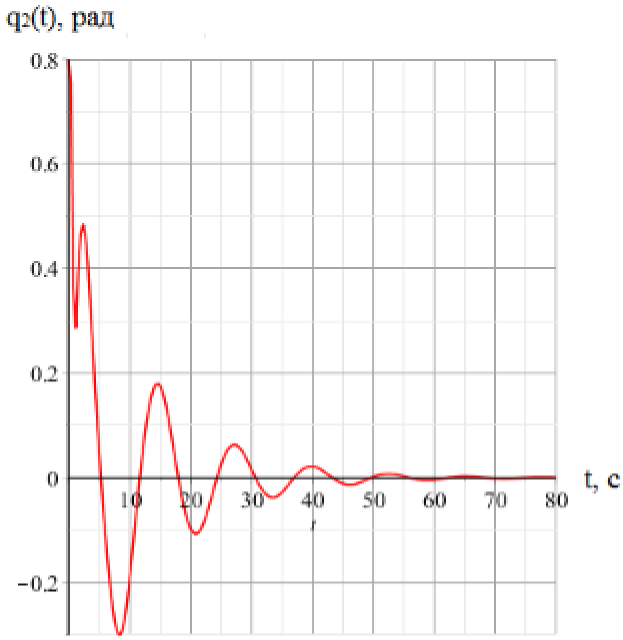


Рис. 2.8: Результаты моделирования при управлении (2.18)

2.5 Стабилизация программного движения манипуляционных роботов на основе измерения координат звеньев

Будем искать стабилизирующий закон управления в виде

$$U = U^{(0)}(t) + U^{(1)}(t, x, y), \tag{2.19}$$

где $U^{(0)}(t)$ - програмное управление, функция $U^{(1)}(t,x,y)$ имеет вид

$$U^{(1)}(t,x,y) = -K_1(t)p(x) - K_2(t)y, U^{(1)}(t,0,0) \equiv 0. \tag{2.20}$$

Здесь матрицы $K_i \in R^{n\times n}(i = 1,2)$ являются кусочно-непрерывными функциями времени, вектор $y \in R^n$ есть решение следующего дифференциального уравнения

$$\dot{y} = -a(y + b\dot{x} + cp(x)), \tag{2.21}$$

где a, b и c - некоторые положительные постоянные, $p : R^n \to R^n p(0) = 0, \|p(x)\| \geq p_0(x), p_0(x) \leq l\|x\|^m (l = const > 0, m = const \geq 1), p_0(x) = 0 \iff x = 0$.

Уравнения возмущенного движения имеют вид

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x} = C^{(1)}(t,x,2\dot{q}^{(0)}+\dot{x})\dot{x} + Q^{(1)}(t,x) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) - K_1(t)p(x) - K_2(t)y, \tag{2.22}$$

где

$$\begin{aligned}
&A^{(1)}(t,x) = A(q^{(0)}(t) + x),\\
&C^{(1)}(t,x,y) = C(q^{(0)}(t) + x, y),\\
&Q^{(1)}(t,x) = (A^{(0)}(t) - A^{(1)}(t,x)\ddot{q}^{(0)}(t)) - Q(t, q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t)),\\
&Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = Q(t, q^{(0)}(t) + x, \dot{q}^{(0)}(t) + \dot{x}) - Q(t, q^{(0)} + x, \dot{q}^{(0)}(t)).
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Предположим, что функции $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ имеют следующий вид

$$Q^{(1)}(t,x) = F(t,x)p(x), \quad Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = D(t,x,\dot{x})\dot{x} \tag{2.24}$$

где матрицы функции $F : R^+ \times R^n \to R^{n\times n}$ и $D : R^+ \times R^n \times R^n \to R^{n\times n}$ являются непрерывными и ограниченными.

Для решения задачи стабилизации программного движения будем использовать метод сравнения с вектор-функцией Ляпунова. Выберем вектор-функцию Ляпунова в виде

$$V = (V_1, V_2, V_3)', \tag{2.25}$$

где $V_1 = \|p(x)\|, V_2 = \|y - \alpha p\|, V_3 = \sqrt{(\dot{x} + \beta y)' A^{(1)}(t, x)(\dot{x} + \beta y)}, \alpha = const > 0, \beta = const > 0.$

Вычисляя производные по времени функций V_1^2, V_2^2, V_3^2 в силу системы (2.22) получим

$$2V_1\dot{V}_1 = -2\alpha\beta p' \frac{\partial p}{\partial x} p - 2\beta p' \frac{\partial p}{\partial x}(y - \alpha p) + 2p' \frac{\partial p}{\partial x}(\dot{x} + \beta y),$$

$$2V_2\dot{V}_2 = 2(y - \alpha p)'(-a(\alpha + c + \alpha b\beta)E + \alpha^2\beta\tfrac{\partial p}{\partial x})p+$$
$$+2(y - \alpha p)'(-a(1 - b\beta)E) + \alpha\beta\tfrac{\partial p}{\partial x})(y - \alpha p) - 2(y - \alpha p)'(abE + \alpha\tfrac{\partial p}{\partial x})(\dot{x} + \beta y),$$

$$2V_3\dot{V}_3 = 2(\dot{x} + \beta y)'(F - ac\beta A^{(1)} - K_1(t))p+$$
$$+2(\dot{x} + \beta y)'(-\beta D - K_2(t) - a\beta(1 - b\beta)A^{(1)}+$$
$$+(C^{(1)}(t, x, -2\beta\dot{q}^{(0)}(t) + \beta^2 y))')y+$$
$$+2(\dot{x} + \beta y)'(C^{(1)}(t, x, \dot{q}^{(0)}(t)) + D - ab\beta A^{(1)})(\dot{x} + \beta y).$$

Определим следующие функции времени t и координат x, y

$$\mu_1(x) = lgn\| - \frac{\partial p}{\partial x}\|, \mu_2(x) = lgn\| - \frac{\partial p}{\partial x}\|, m_1(x) = \mu_1(x) = \|\frac{\partial p}{\partial x}\| \tag{2.26}$$

$$m_2(t, x) = \|F - ac\beta A^{(1)} - K_1\| \tag{2.27}$$

$$m_3(t, x, y) = \| - \beta D - K_2 - a\beta(1 - b\beta)A^{(1)} + (C^{(1)}(t, x, -2\beta\dot{q}^{(0)}(t) + \beta^2 y))'\| \tag{2.28}$$

$$\mu_3(t,x,y) = lgn\|C^{(1)}(t,x,\dot{q}^{(0)} - \beta y) + D - ab\beta A^{(1)}\| \qquad (2.29)$$

где символ $lgn\|\|$ означает логарифмическую норму матрицы,. соответсвующую евклидовой векторной норме и вычисляемой по формуле: $lgn\|M\| = \frac{1}{2}\lambda_{max}(M + M^{'})\forall M \in R^{n\times n}, \lambda_{max}()$ - максимальное собственное значение соответствующей матрицы.

Для производных по времени компонент вектор-функции Ляпунова (2.25) в силу системы (2.22) получим оценки

$$\dot{V}_1 \leq -\alpha\beta\mu_1 V_1 + \beta m_1 V_2 + \frac{m_1}{\lambda(t,x,y,\dot{x})}V_3, \qquad (2.30)$$

$$\dot{V}_2 \leq (a(\alpha + c + \alpha\beta b) + \alpha^2\beta m_1)V_1 + (a(b\beta - 1) + \alpha\beta\mu_2)V_2 + \frac{ab + \alpha m_1}{\lambda(t,x,y,\dot{x})}V_3 \qquad (2.31)$$

$$\dot{V}_3 \leq \frac{m_2 + \alpha m_3}{\lambda(t,x,y,\dot{x})}V_1 + \frac{m_3}{\lambda(t,x,y,\dot{x})}V_2 + \frac{\mu_3}{(\lambda(t,x,y,\dot{x}))^2}V_3, \qquad (2.32)$$

где функция $\lambda(t,x,y,\dot{x})$ определяется из следующего соотношения

$$\lambda(t,x,y,\dot{x})\|\dot{x} + \beta y\| = V_3, \lambda_1 \leq \lambda(t,x,y,\dot{x}) \leq \lambda_2, \lambda_1 = const > 0, \lambda_2 = const > 0. \qquad (2.33)$$

Используя оценки (2.30) - (2.32), получим следующую систему сравнения

$$\begin{aligned}
&\dot{u}_1 = -\alpha\beta\mu_1 u_1 + \beta m_1 u_2 + \tfrac{m_1}{\lambda(t,x,y,\dot{x})}u_3,\\
&\dot{u}_2 = (a(\alpha + c + \alpha\beta b) + \alpha^2\beta m_1)u_1 + (a(b\beta - 1) + \alpha\beta\mu_2)u_2 + \tfrac{ab+\alpha m_1}{\lambda(t,x,y,\dot{x})}u_3,\\
&\dot{u}_3 = \tfrac{m_2+\alpha m_3}{\lambda(t,x,y,\dot{x})}u_1 + \tfrac{m_3}{\lambda(t,x,y,\dot{x})}u_2 + \tfrac{\mu_3}{(\lambda(t,x,y,\dot{x}))^2}u_3.
\end{aligned} \qquad (2.34)$$

Используя модификацию метода сравнения, получим, что обобщенная система (2.25), (2.34) является экспоненциально u-устойчивой, если выполняется следующее условие

$$\frac{(\beta m_1+a(\alpha+c+\alpha\beta b)+\alpha^2\beta m_1)^2}{\alpha\beta\mu_1(a(1-b\beta)-\alpha\beta\mu_2)}-\frac{(m_1+m_2+\alpha m_3)^2}{\alpha\beta\mu_1\mu_3}+$$

$$+\frac{(ab+\alpha m_1+m_3)^2}{(a(b\beta-1)+\alpha\beta\mu_2)\mu_3}+\frac{(\beta m_1+a(\alpha+c+\alpha\beta b)+\alpha^2\beta m_1)(m_1+m_2+\alpha m_3)(ab+\alpha m_1+m_3)}{\alpha\beta\mu_1(a(b\beta-1)+\alpha\beta\mu_2)\mu_3}\leq const\leq 4,$$

$$\mu_1\leq const\leq 0, a(b\beta-1)+\alpha\beta\mu_2\leq const\leq 0, \mu_3\leq const\leq 0. \tag{2.35}$$

3 УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ТРЕХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА

3.1 Постановка задачи

Рассмотрим математическую модель трехзвенного манипулятора, состоящую из трех абсолютно жестких звеньев G_1, G_2, G_3, представляющих собой однородные стержни. Манипулятор установлен на неподвижном основании, на которое опирается звено G_1. Звено G_1 таким образом, может совершать только вращения вокруг вертикальной оси. Звенья соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, и O_2 таким образом, что звенья G_2 и G_3 могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2. На конце звена G_3 находится груз, перемещаемый манипулятором.

Введем обозначения: $q_i(i = 1,2,3)$ — углы поворотов звеньев манипулятора; $Q_i(i = 1,2,3)$ — управляющие моменты относительно осей соответствующих звеньев; l_i — длина i-го звена; m_i — масса i-го звена; m_0 — масса перемещаемого груза; $m_{30} = m_0 + m_3$; J_{01} — момент инерции первого звена относительно оси вращения; r_2 и r_3 — соответственно расстояния от центров тяжести второго и третьего звеньев с перемещаемым грузом относительно осей соответствующих звеньев; g — ускорение свободного падения.

Кинетическая энергия системы в векторно-матричном виде может быть

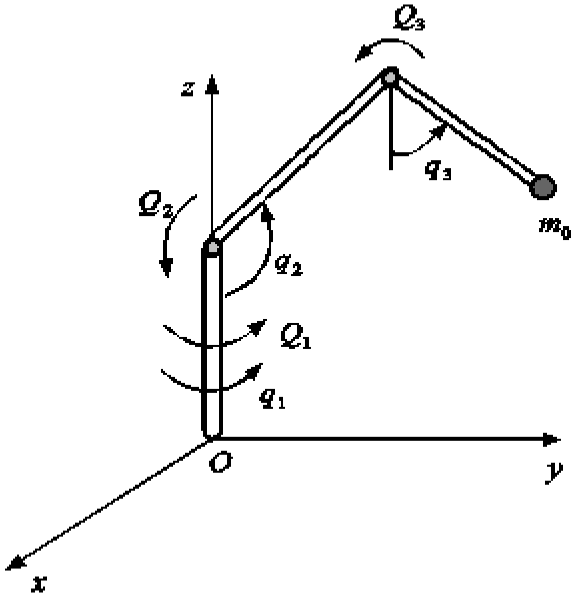


Рис. 3.1: Модель трехзвенного манипулятора

записана в виде:

$$T = \frac{1}{2}\dot{q}^{'} A(q)\dot{q}, \quad q^{'} = (q_1, q_2, q_3),$$

$$A(q) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$a_{11} = J_{01} + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2$$

$$a_{22} = m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2$$

$$a_{23} = \tfrac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)$$

$$a_{32} = a_{23}$$

$$a_{33} = m_{30} r_3^2$$

Учитывая действие сил тяжести, уравнения движения можно записать в векторно-матричной форме

$$A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + K(q) = Q \tag{3.1}$$

$$C(q,\dot q)=\begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13}\\ c_{21} & 0 & c_{23}\\ c_{31} & c_{32} & 0\end{pmatrix}$$

$$c_{11}=2(m_2r_2^2\sin q_2\cos q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)l_2\cos q_2)\dot q_2$$

$$c_{13}=2m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)r_3\cos q_3\dot q_3$$

$$c_{21}=-(m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)l_2+m_2r_2^2\sin q_2)\cos q_2\dot q_1$$

$$c_{23}=\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin(q_2-q_3)\dot q_3$$

$$c_{31}=-m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)r_3\cos q_3\dot q_1$$

$$c_{32}=-\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin(q_2-q_3)\dot q_2$$

$$K^{'}(q)=(0,(m_2r_2+m_{30}l_2)g\sin q_2,m_{30}gr_3\sin q_3)$$

Пусть $q=(q_1,q_2,q_3)^{'}$ — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и

$$X=q^0(t):[t_0,+\infty)\to R^3,\|q^0(t)\|\le q_0,\|\dot q^0\|\le g_1,\|q^0(t)\|\le q_0,\|\ddot q^0\|\le g_2$$

есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q=q^0(t)$ с ограниченными производными при $t\in[t_0,+\infty)$. Символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма вектора. Пусть $q^0(t)\in X$ — какое-либо программное движение системы (3.1), реализуемое программным управлением $Q^{(0)}$, так что $Q^0(t)=Q(t)$ при $q=q^0(t),\dot q=\dot q^0(t)$ т.е. имеет место тождество

$$A(q^0(t))\ddot q^0(t)+C(q^0(t),\dot q^0(t))\dot q^0(t)+K(q^0(t))\equiv Q^{(0)}(t).$$

Введем возмущения $x = q - q^0(t)$ и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x} + C^{(1)}(t,x,\dot{x})\dot{x} + K^{(1)}(t,x) = Q^{(1)}(t,x,\dot{x}) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x}), \qquad (3.2)$$

где

$$A^{(1)}(t,x) = A(x+q^0(t)),\ C^{(1)}(t,x,\dot{x}) = C(x+q^0(t),\dot{x}+\dot{q}^0(t)),$$
$$K^{(1)}(t,x) = K(q^0(t)+x) - K(q^0(t)),$$
$$Q^{(1)}(t,x,\dot{x}) = Q - Q^{(0)},$$
$$Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = (A^{(1)}(t,0) - A^{(1)}(t,x))\ddot{q}^0(t) + (C^{(1)}(t,0,0) - C^{(1)}(t,x,\dot{x}))\dot{q}^0(t)$$

Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $Q^{(1)}(t,x,\dot{x})$, при котором невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ системы (3.3) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иначе, управление $Q = Q^{(1)}(t, q-q^{(0)}(t), \dot{q}-\dot{q}^{(0)})+Q^{(0)}$ обеспечивало бы стабилизацию программного движения системы (3.2).

3.2 Приведение манипулятора в заданное программное положение

Рассмотрим задачу приведения манипулятора в заданное программное положение $q = q^0 = const$ без измерения скоростей.

В соответствии с проведенной постановкой задачи получаем

$$\begin{aligned} &q^0(t) \equiv q^0, \quad (q^0)' = (q_1^0, q_2^0, q_3^0), \quad \dot{q}^0(t) \equiv U_x, \\ &x_1 = q_1 - q_1^0, \quad x_2 = q_2 - q_2^0, \quad x_3 = q_3 - q_3^0 \end{aligned} \qquad (3.3)$$

Соответственно, это положение имеет место если

$$
\begin{aligned}
&Q_1^{(0)} = 0,\\
&Q_2^{(0)} = (m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \sin q_2^0 \cos x_2,\\
&Q_3^{(0)} = m_{30} g r_3 \sin q_3^0 \cos x_3
\end{aligned}
\tag{3.4}
$$

Возмущенное движение системы описывается уравнением (3.2), в координатах

$$
A^{(1)}(x) = A(q^0 + x), \quad C^1(x, \dot{x}) = C(q^0 + x, \dot{x}) \tag{3.5}
$$

Рассматриваемая задача состоит в нахождении управлеющего воздействия

$$
Q^{(2)} = Q - Q^{(0)}
$$

обеспечивающего глобальную стабилизацию положения (3.3) при измерении значений

$$
x_1 = q_1 - q_1^0, \quad x_2 = q_2 - q_2^0, \quad x_3 = q_3 - q_3^0
$$

Покажем, что поставленная задача решается управляющим воздействием

$$
\begin{aligned}
Q_1^{(2)}(x_1) &= -k_1 \sin\frac{x_1(t)}{2} - \cos\frac{x_1(t)}{2} \int\limits_{t-h}^{t} p_1^0 e^{s_1^0(\tau - t)} \left(\sin\frac{x_1(t)}{2} - \sin\frac{x_1(\tau)}{2}\right) d\tau\\
Q_2^{(2)}(x_2) &= -k_2 \sin\frac{x_2(t)}{2} - \cos\frac{x_2(t)}{2} \int\limits_{t-h}^{t} p_2^0 e^{s_2^0(\tau - t)} \left(\sin\frac{x_2(t)}{2} - \sin\frac{x_2(\tau)}{2}\right) d\tau\\
Q_3^{(2)}(x_3) &= -k_3 \sin\frac{x_3(t)}{2} - \cos\frac{x_3(t)}{2} \int\limits_{t-h}^{t} p_3^0 e^{s_3^0(\tau - t)} \left(\sin\frac{x_3(t)}{2} - \sin\frac{x_3(\tau)}{2}\right) d\tau
\end{aligned}
$$

(3.6)

где коэффициенты $h > 0, p_j^0 > 0, s_j^0 > 0$, а k_j удовлетворяет неравенствам

$$k_1 > 0,$$

$$k_2 > -2(m_2r_2 + m_{30}l_2)g\sin q_2^0,$$

$$k_3 > -2m_{30}gr_3\sin q_3^0$$

Выберем функционал Ляпунова в виде

$$\begin{aligned}
&V(\dot{x}(t), x_t) = \frac{1}{2}(\dot{x}(t))'A^{(1)}(x(t))\dot{x}(t) + \\
&+(m_2r_2 + m_{30}l_2)g\sin q_2^0(1-\cos x_2) + m_{30}gr_3(1-\cos x_3) + \\
&+2k_1\left(1-\cos\frac{x_1(t)}{2}\right) + 2k_2\left(1-\cos\frac{x_2(t)}{2}\right) + 2k_3\left(1-\cos\frac{x_3(t)}{2}\right) + \\
&+2\int\limits_{t-h}^{t} p_1^0 e^{s_1^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{x_1(t)}{2} - \sin\frac{x_1(\tau)}{2}\right)^2 d\tau + \\
&+2\int\limits_{t-h}^{t} p_2^0 e^{s_2^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{x_2(t)}{2} - \sin\frac{x_2(\tau)}{2}\right)^2 d\tau + \\
&+2\int\limits_{t-h}^{t} p_3^0 e^{s_3^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{x_3(t)}{2} - \sin\frac{x_3(\tau)}{2}\right)^2 d\tau
\end{aligned}$$

Несложно определить, что этот фукнционал удовлетворяет условию 1) теоремы 1.3. Для полной производной этого функционала в силу уравнений (3.2) с учетом (3.4) - (3.6) находим

$$\begin{aligned}
\dot{V} = -2&\int\limits_{t-h}^{t} p_1^0 s_1^0 e^{s_1^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{x_1(t)}{2} - \sin\frac{x_1(\tau)}{2}\right)^2 d\tau + \\
&+\int\limits_{t-h}^{t} p_2^0 s_2^0 e^{s_2^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{x_2(t)}{2} - \sin\frac{x_2(\tau)}{2}\right)^2 d\tau + \\
&+\int\limits_{t-h}^{t} p_3^0 s_3^0 e^{s_3^0(\tau-t)}\left(\sin\frac{x_3(t)}{2} - \sin\frac{x_3(\tau)}{2}\right)^2 d\tau
\end{aligned}$$

Множество $\{\dot{V} = 0\}$ состоит из движений $x(\tau) = x(t), t - h \le \tau \le t$, или $x(t) = const$. Из уравнений движений находим, что для таких движений должны удовлетворяться соотношения

$$\sin\frac{x_1(t)}{2}\equiv 0,\quad \sin\frac{x_2(t)}{2}\equiv 0,\quad \sin\frac{x_3(t)}{2}$$

Согласно теореме 1.3 равномерную асимптотическую устойчивость положения $\dot{x}(t)\equiv 0, x(t)\equiv 0$ или программного положения (3.4).

В соответствии с теоремой 1.2 каждое возмущенное движение системы будет при $t\to+\infty$ неограниченно приближается к положению

$$\dot{x}_k(t)=0,\quad \sin\frac{x_k(t)}{2}\equiv 0$$

или

$$\dot{x}_k(t)\equiv 0,\quad x_k(t)=2\pi k,\quad k=1,3$$

Тем самым, можно утверждать о глобальной стабилизации заданного программного движения (3.2).

3.3 Стабилизация стационарного вращения манипулятора вокруг вертикальной оси

Координата q_1, определяющая вращение манипулятора вокруг вертикальной оси является циклической.

Вводим соответствующий циклический импульс

$$(J_0+m_2r_2^2\sin^2 q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)^2)\dot{q}_1=v_1$$

Вводим функцию Рауса

$$R=T-\dot{q}_1v_1=\frac{1}{2}(m_2r_2^2+m_3l_2^2)\dot{q}_2^2+\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\cos(q_2-q_1)\dot{q}_2\dot{q}_3+\frac{1}{2}m_{30}r_3^2\dot{q}_3^2-$$
$$-\frac{1}{2}\frac{v_1^2}{J_0+m_2r_2^2\sin^2 q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)^2}\equiv R_2-R_0$$

Уравнение движения системы в форме Рауса записано в виде

$$(m_2r_2^2+m_3l_3^2)\ddot{q}_2+\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\cos(q_2-q_1)\ddot{q}_3+\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin(q_2-q_1)\dot{q}_3^2-$$
$$-\frac{v_1^2(m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)l_2+m_2r_2^2\sin q_2)\cos q_2}{(J_0+m_2r_2^2\sin^2 q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)^2)^2}+(m_2r_2+m_{30}l_2)g\sin q_2=Q_2$$
$$\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\cos(q_2-q_1)\ddot{q}_2+m_{30}r_2^2\ddot{q}_3-\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin(q_2-q_3)\dot{q}_2^2-$$
$$-\frac{v_1^2m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)r_3\cos q_3}{(J_0+m_2r_2^2\sin^2 q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)^2)^2}+m_{30}gr_3\sin q_3=Q_3$$
$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{v_1}{J_0+m_2r_2^2\sin^2 q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)^2}$$
$$\frac{dv_1}{dt}=Q_1$$

Система может совершать стационарное вращательное движение вида

$$\dot{q}_2=0,\quad q_2=q_2^0=const,\quad \dot{q}_3=0,\quad q_3=q_3^0=const$$
$$v_1=v_1^0=const,\quad \dot{q}_1=\dot{q}_1^0=\frac{v_1^0}{(J_0+m_2r_2^2\sin^2 q_2^0+m_{30}(l_2\sin q_2^0+r_3\sin q_3^0)^2)}$$

под действием моментов

$$Q_1=0Q_2=Q_2^0=(m_2r_2^2+m_3l_3^2)\ddot{q}_2^0+\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\cos(q_2^0-q_1^0)\ddot{q}_3^0+\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin(q_2^0-q_1^0$$
$$-\frac{v_1^2(m_{30}(l_2\sin q_2^0+r_3\sin q_3^0)l_2+m_2r_2^2\sin q_2^0)\cos q_2^0}{(J_0+m_2r_2^2\sin^2 q_2^0+m_{30}(l_2\sin q_2^0+r_3\sin q_3^0)^2)^2}+(m_2r_2+m_{30}l_2)g\sin q_2^0$$
$$Q_3=Q_3^0=\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\cos(q_2^0-q_1^0)\ddot{q}_2^0+m_{30}r_2^2\ddot{q}_3^0-\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin(q_2^0-q_3^0)\dot{(q_2^0)}^2-$$
$$-\frac{v_1^2m_{30}(l_2\sin q_2^0+r_3\sin q_3^0)r_3\cos q_3^0}{(J_0+m_2r_2^2\sin^2 q_2^0+m_{30}(l_2\sin q_2^0+r_3\sin q_3^0)^2)^2}+m_{30}gr_3\sin q_3^0$$
$$\frac{dq_1}{dt}=\frac{v_1}{J_0+m_2r_2^2\sin^2 q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)^2}$$

На основании теоремы 1.10 можно найти, что это стационарное движение будет устойчиво, асимптотически устойчиво по $\dot{q}_2,\dot{q}_3,q_2-q_2^0,q_3-q_3^0$ под действием стабилизирующих моментов

$$Q_1=0Q_2^1=Q_2-Q_2^0=-k_2^0x_2(t)-x_2(t)\int\limits_{t-h}^{t}p_2^0e^{s_2^0(\tau-t)}(x_2(t)-x_2(\tau))$$
$$Q_3^1=Q_3-Q_3^0=-k_3^0x_3(t)-x_3(t)\int\limits_{t-h}^{t}p_3^0e^{s_3^0(\tau-t)}(x_3(t)-x_3(\tau))$$

где постоянные $p_2^0, p_3^0, s_2, s_3^0 > 0$, а k_2^0 и k_3^0 удовлетворяют неравенствам

$$k_2 + (m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \cos q_2^0 - \left.\frac{\partial^2 R_0}{\partial q_2^2}\right|_{q_2=q_2^0} = \mu_2 > 0$$

$$k_3 + m_{30} g r_2 \cos q_3^0 - \left.\frac{\partial^2 R_0}{\partial q_3^2}\right|_{\substack{q_2=q_2^0\\ q_3=q_3^0}} = \mu_3 > 0$$

$$\mu_2 \mu_3 - \left(\left.\frac{\partial^2 R_0}{\partial q_2 \partial q_3}\right|_{\substack{q_2=q_2^0\\ q_3=q_3^0}} \right)^2 > 0$$

Численное моделирование движения манипулятора при действии управления (3.4) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории

На

рисунках 3.2–3.4 представлены результаты моделирования, проведенного при следующих значениях параметров манипулятора

$$m_2 = 15 \text{ кг}, \quad m_3 = 2,5 \text{ кг}, \quad m_0 = 2 \text{ кг}, \quad l_2 = 1 \text{ м}, \quad r_2 = 0,5 \text{ м}, \quad r_3 = 0,5 \text{ м},$$

$$J_{01} = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2.$$

3.4 Синтез управления в задаче о стабилизации нестационарного программного движения манипулятора

Рассмотрим решение задачи стабилизации в области $G = (x, \dot{x}) \in R^6 : \|x\| < \varepsilon, \quad \|\dot{x}\| < \varepsilon, \quad \varepsilon = const > 0$ с помощью непрерывного управления вида

$$Q^{(1)}(x, \dot{x}) = B(\dot{x} + p(x)), p^{'}(x) = (\sin\frac{x_1}{2}, \sin\frac{x_2}{2}, \sin\frac{x_3}{2}) \tag{3.7}$$

где $B \in R^{3\times 3}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению; $p(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-

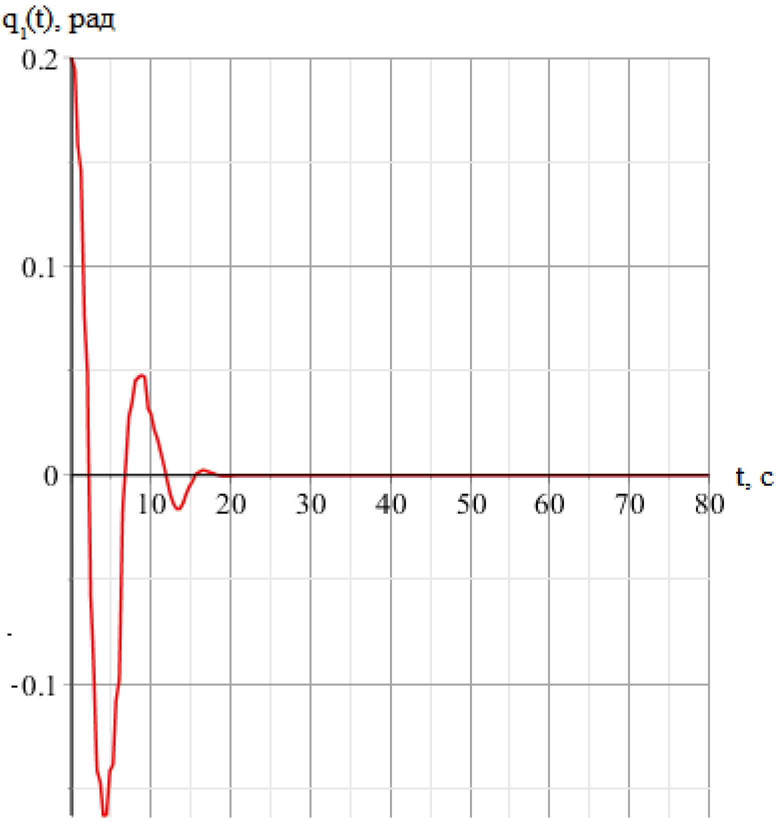


Рис. 3.2: Зависимость угла поворота первого звена от времени при управлении (3.6)

функция, такая, что $\|p(x)\| \geq p_0(x) > 0, p_0(0) = 0$. Возьмем для системы (3.3) вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)'$ с коэффициентами вида $V^1 = \|p(x)\|, \quad V^2 = \sqrt{(\dot{x} + p(x))' A^{(1)}(t,x)(\dot{x} + p(x))}$.

Вычисляя производные по времени от квадратов компонент вектор-функции Ляпунова в силу системы (3.3), получим

$$\frac{d}{dt}(V^1(x))^2 = 2V^1\dot{V}^1 = 2p'\dot{p} = 2p'\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x} = -2p'\frac{\partial p}{\partial x}p + 2p'\frac{\partial p}{\partial x}(\dot{x} + p),$$

$$\frac{d}{dt}(V^2(x))^2 = 2V^2\dot{V}^2 =$$

$$= 2(\ddot{x} + \dot{p})'A^{(1)}(\dot{x} + p) + (\dot{x} + p)'\dot{A}^{(1)}(\dot{x} + p) =$$

$$= 2(-C^{(1)}(t,x,\dot{x})\dot{x} - K(t,x) + Q^{(1)}(x,\dot{x}) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x}))'(\dot{x} + p) +$$

$$+ 2\dot{p}'A^{(1)}(\dot{x} + p) + (\dot{x} + p)'\dot{A}^{(1)}(\dot{x} + p).$$

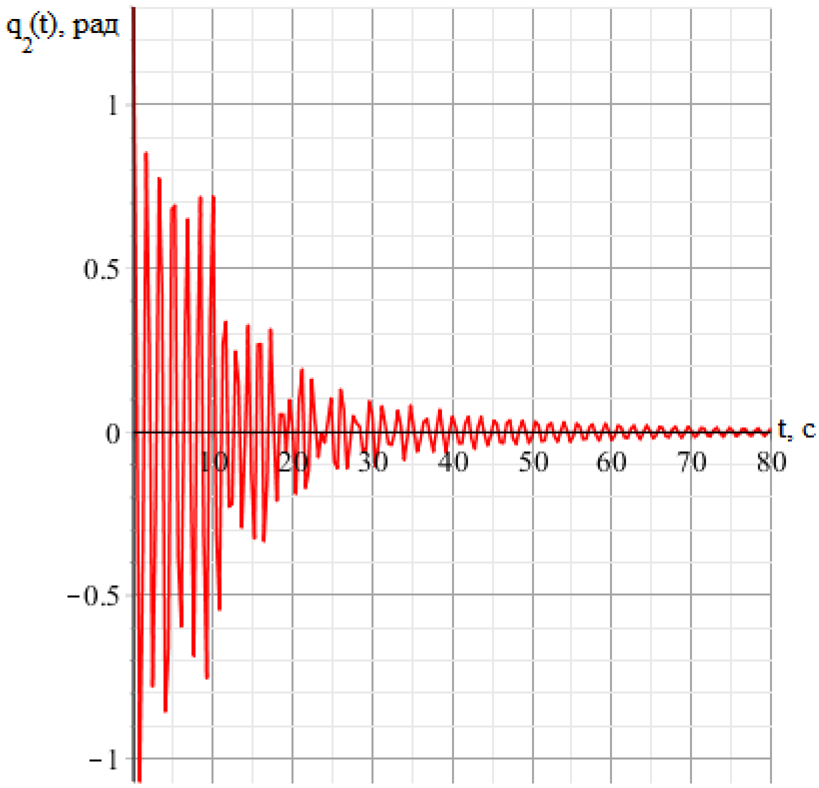


Рис. 3.3: Зависимость угла поворота второго звена от времени при управлении (3.6)

Отсюда получим следующие оценки:

$$\dot{V}^1 \leq -\mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)} V^2, \quad \dot{V}^2 \leq \frac{m_2}{\lambda(t,x)} V^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)},$$

где положительные постоянные μ_2, μ_2, m_1, m_2 и функция $\lambda(t,x)$ определяются из следующих условий:

$$p^{'} \frac{\partial p}{\partial x} p \geq \mu_1 \|p\|^2, \quad \left\|\frac{\partial p}{\partial x}\right\| \leq m_1, \lambda(t,x)\|\dot{x}+p\| = V^2, \tag{3.8}$$

$$\|Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) \leq \left(m_2 - \left\|C^{(1)}(t,x,\dot{x}) + K - A^{(1)}(t,x)\frac{\partial p}{\partial x}\right\|\right)\|p\| \tag{3.9}$$

$$\lambda_{max}\left(B + B^{'} - K - K^{'} + A^{(1)}(t,x)\frac{\partial p}{\partial x} + \left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^{'} A^{(1)}(t,x)\right) \leq -2\mu_2 \tag{3.10}$$

Здесь $\lambda_{max}(\cdot)$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (3.3) можно построить следующую систему

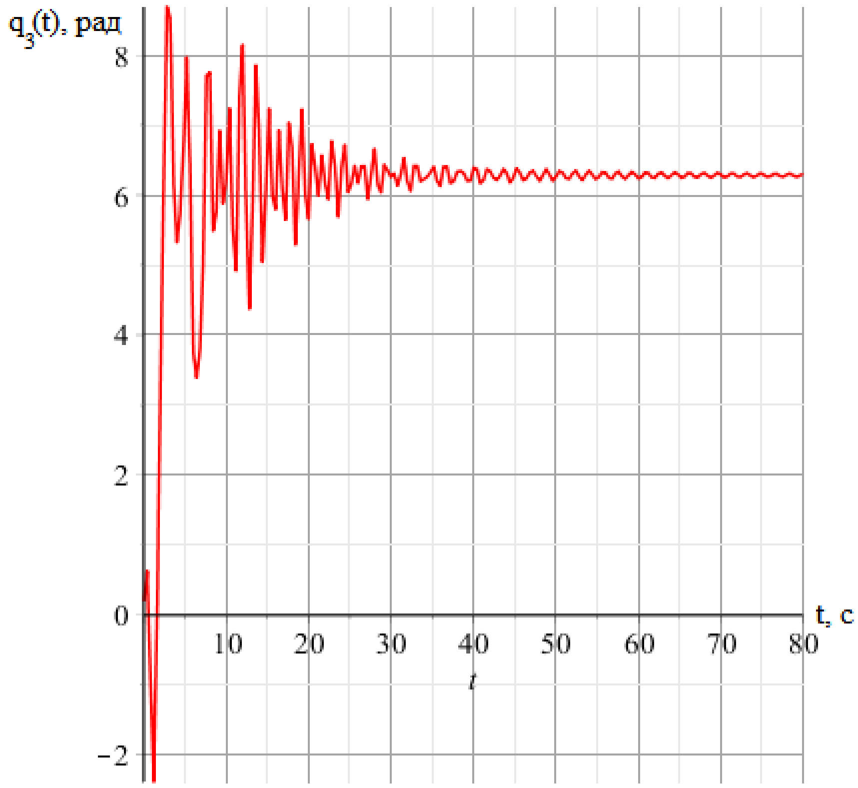


Рис. 3.4: Зависимость угла поворота третьего звена от времени при управлении (3.6)

сравнения:

$$\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)}u^2, \dot{u}^2 = \frac{m_2}{\lambda(t,x)}u^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)}u^2. \tag{3.11}$$

Согласно теореме сравнения об экспоненциальной устойчивости [92] из свойства экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы сравнения (3.5) следует аналогичное свойство нулевого решения системы (3.3). Можно показать, что нулевое решение системы сравнения (3.5) будет экспоненциально устойчиво при следующем условии

$$4\mu_1\mu_2 > (m_1/k + m_2 k)^2, \quad k = const > 0.$$

Численное моделирование движения манипулятора при действии управления (3.4) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории

$$m_2 = 15 \text{ кг}, \quad m_3 = 2,5 \text{ кг}, \quad m_0 = 2 \text{ кг}, \quad l_2 = 1 \text{ м}, \quad r_2 = 0,5 \text{ м}, \quad r_3 = 0,5 \text{ м},$$

$$J_{01} = 0,1 \text{ кг} \cdot \text{м}^2, \quad q_1^0(t) = 0,2t, \quad q_2^0(t) = 1,5 + 0,5\sin t, \quad q_3^0(t) = 0,5\sin(0,5t)$$

На рисунках 3.5–3.7 представлены результаты моделирования. Пунктирной линией обозначены составляющие программного движения, а сплошной – реального движения системы.

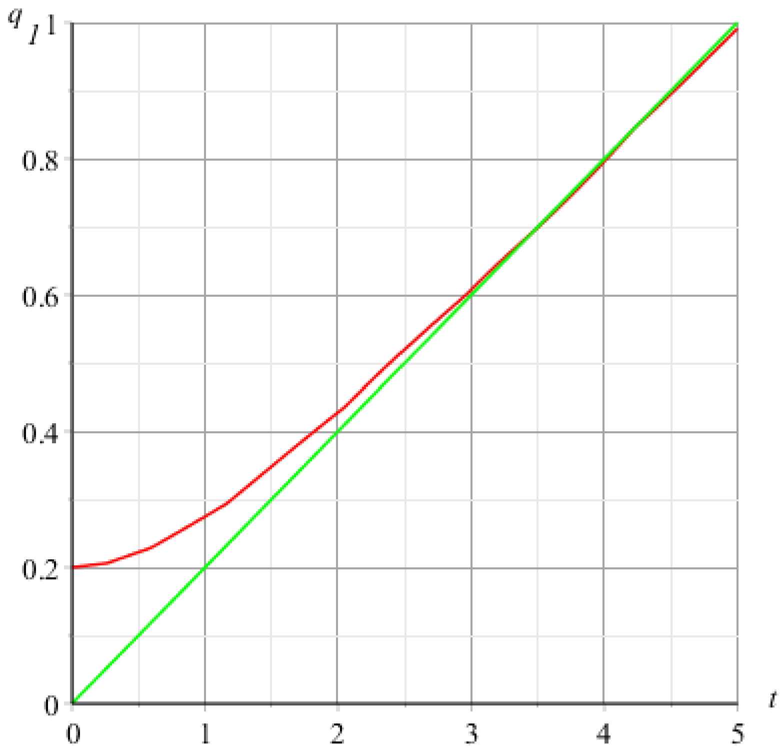


Рис. 3.5: Зависимость угла поворота первого звена от времени при управлении (3.4)

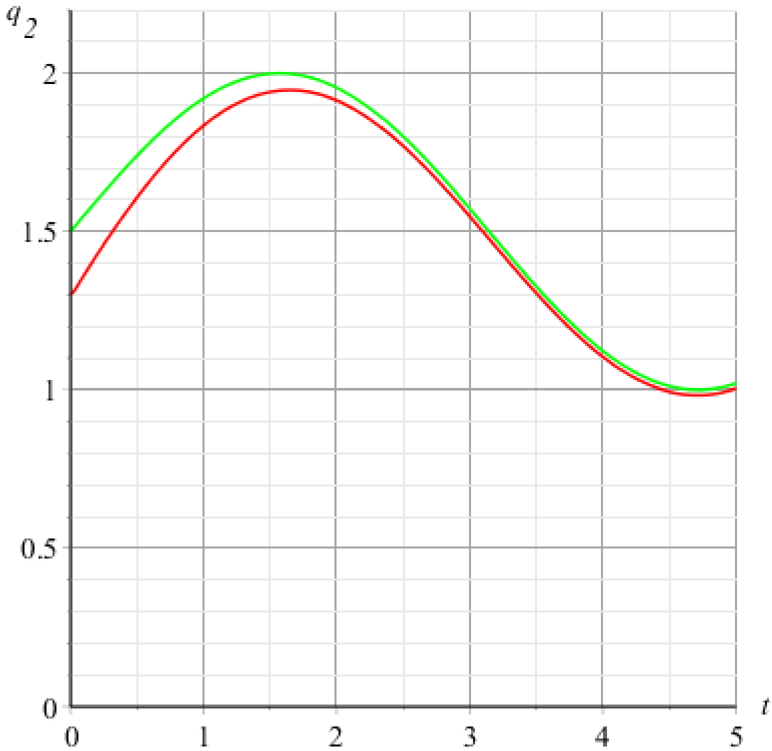


Рис. 3.6: Зависимость угла поворота второго звена от времени при управлении (3.4)

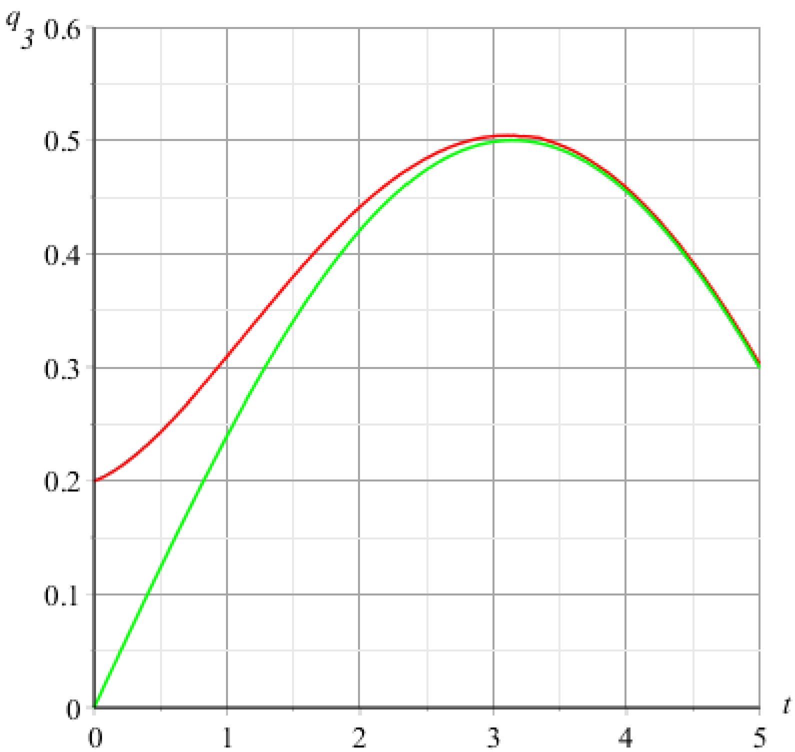


Рис. 3.7: Зависимость угла поворота третьего звена от времени при управлении (3.4)

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В представленной диссертационной работе разработаны новые методы стабилизации нелинейных управляемых систем, в частности многозвенных манипуляторов. Представлены новые методы исследования устойчивости.

Ниже представлены основные результаты работы.

1. Развитие метода векторных функций Ляпунова для исследования устойчивости нелинейных систем.

2. Полученные результаты являются развитием соответствующих теорем из работ. Эффективность новой методики в исследовании и стабилизации представлена на примере решения задач стабилизации двух- и трехзвенных манипуляторов.

3. Представлены модели двух- и трехзвенных манипуляторов, модель перевернутого маятника

4. Разработана компьютерная модель движения трехзвенного манипулятора на неподвижном основании. Программный комплекс разработан на языке Java с использованием фреймворка JavaFX. Приложение является кроссплатформенным, позволяет задавать законы управления в аналитическом виде.

Основные результаты работы опубликованы в работах, в том числе, в статьях из списка ВАК. Получен патент РФ на программу для ЭВМ на программу моделирования движения трехзвенного манипулятора.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Александров, В. В.* Оптимизация динамики управляемых систем / В. В. Александров, В. Г. Болтянский, С. С. Лемак и др.— М.: МГУ, 2000.— 303 с.

[2] *Ананьевский И.М.* О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием / И.М. Ананьевский, В.Б. Колмановский // Автоматика и телемеханика. – 1989. - № 9. – С. 34 – 42.

[3] *Ананьевский, И. М.* Два подхода к управлению механической системой с неизвестными параметрами / И. М. Ананьевский // Изв. РАН. Теор. и сист. упр.— 2001.— № 2.— С. 39–47.

[4] *Ананьевский, И. М.* Управление реономными механическими системами с неизвестными параметрами / И. М. Ананьевский // Докл. РАН.— 2001.— Т. 337, № 4.— С. 459–463.

[5] *Ананьевский, И. М.* Метод декомпозиции в задаче об отслеживании траектории механических систем / И.М. Ананьевский, С.А. Решмин // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2002. - № 5. – С. 25 – 32.

[6] *Андреев, А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем / А.С. Андреев // Прикладная математика и механика. – 1979. – Т. 49, Вып. 5. – С. 796 – 805.

[7] *Андреев, А. С.* Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы / А.С. Андреев // Прикладная математика и механика. – 1984. – Т. 48, Вып. 2. – С. 225 – 232.

[8] *Андреев, А. С.* Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений / А.С. Андреев // Прикладная математика и механика. – 1987. – Т. 51, Вып. 2. – С. 253-259.

[9] *Андреев, А. С.* Об устойчивости положения равновесия неавтономной механической системы // Прикладная математика и механика. 1996. Т. 60, Вып. 3. С.388-396.

[10] *Андреев, А. С.* Устойчивость неавтономных функционально-дифференциальных уравнений / А.С. Андреев. – Ульяновск: УлГУ, 2005. – 328 с.

[11] *Андреев, А. С.* Метод функционалов Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений / А.С. Андреев // Автоматика и телемеханика. – 2009, № 9. – С. 4 – 55.

[12] *Андреев, А. С.* Метод векторной функции Ляпунова в задаче об управлении систем с мгновенной обратной связью / А. С. Андреев, А. О. Артемова // Ученые записки Ульяновского государственного университета.— 2012.— № 1(4).— С. 15–19.

[13] *Андреев, А. С.* Об управлении движением голономной механической системы / А. С. Андреев, А. О. Артемова // Научно-технический вестник Поволжья.— 2012.— № 6.— С. 80–87.

[14] *Андреев, А. С.* Уравнения Вольтерра в моделировании ПИ- и ПИД-регуляторов / Андреев А.С., Благодатнов В.В., Кильметова А.Р. // Научно- технический вестник Поволжья. – 2013. – № 1. – С.84-90

[15] *Андреев, А. С.* Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости / А. С. Андреев, Т. А. Бойкова // Механика твердого тела.— 2002.— № 32.— С. 109–116.

[16] *Андреев, А. С.* Об устойчивости неустановившегося решения механической системы / А. С. Андреев, Т. А. Бойкова // Прикладная математика и механика.— 2004.— Т. 68.— № 4.— С. 678–686.

[17] *Андреев, А. С.* Об устойчивости нулевого решения системы с разрывной правой частью / А. С. Андреев, О. Г. Дмитриева, Ю. В. Петровичева // Научно-технический вестник Поволжья.— 2011.— № 1.— С. 15–21.

[18] *Андреев, А. С.* Об устойчивости обобщенного стационарного движения механической системы в зависимости от действующих сил / А. С. Андреев, Р. Б. Зайнетдинов // Труды IX Международной Четаевской Конференции ”Аналитическая механика, устойчивость

и управление движением посвященной 105-летию Н. Г. Четаева.— Иркутск: Сибирское отделение РАН.— 2007.— Т. 1.— С. 5–14.

[19] *Андреев, А. С.* О стабилизации движений механических систем с переменными массами / Андреев А.С., Зайнетдинов Р.Б. // Прикладная математика и механика.- 2009.- Т.73.- Вып.1.- С. 3-12.

[20] *Андреев А. С.* О моделировании структуры управления для колесного робота с омни-колесами / Андреев А. С., Е. А. Кудашова // Автоматизация процессов управления №2 (40) 2015. Ульяновск: Автоматизация процессов управления, 2015 — с.114-121

[21] *Андреев А. С.* О стабилизации движений механических систем управлениями различного типа / А.С. Андреев, Е.А. Кудашова, О.А. Перегудова // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского «Динамика систем и про-цессы управления», 15-20 сентября 2014г., Екатеринбург. – с. 35-37

[22] *Андреев А.С.* О стабилизации стационарных программных движений управляемой механической системы / А. С. Андреев, Д. С. Макаров // Ученые записки УлГУ. Сер. "Математика и информационные технологии". – Вып. 1(8). – Ульяновск: УлГУ, 2016. – С. 11-16.

[23] *Андреев А. С.*Об управлении манипуляторами без измерения скоростей / А.С. Андреев, Д.С. Макаров, О.А. Перегудова // Научно-технический вестник Поволжья. — 2016. – № 6. – С.105-108.

[24] *Андреев, А. С.* Об управлении двузвенным манипулятором с приводом / Андреев А.С., Макаров Д.С., Таджиев Д.А. // Научно-технический вестник Поволжья. – 2013. – № 5. – С.102-105.

[25] *Андреев, А. С.* Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально-дифференциального уравнения / А.С. Андреев, С.В. Павликов // Прикладная математика и механика. – 1999. – Т. 63, Вып. 1. – С. 3 – 12.

[26] *Андреев, А. С.* К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // Доклады Академии наук.— 2005.— Т. 400, № 5.— С. 621–624.

[27] *Андреев, А. С.* К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости / А.С. Андреев, О.А. Перегудова // Прикладная математика и механика. – 2006. – Т. 70, Вып. 6. – С. 965 – 976.

[28] *Андреев, А. С.* О стабилизации программных движений голономной механической системы / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН.— 2014.— С. 1840–1843.

[29] *Андреев, А. С.* Вектор-функции Ляпунова в задачах о стабилизации движениц управляемых систем / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // Журнал Средневолжского математического общества.— 2014.— Т. 16, № 1.— С. 32–44.

[30] *Андреев, А. С.* Об управлении двухзвенным манипулятором с упругими шарнирами / Андреев А.С., Перегудова О.А. // Нелинейная динамика. – 2015. – Т. 11, № 2. – С.267-277

[31] *Андреев, А. С.* Об управлении движением колесного мобильного робота / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // Прикладная математика и механика.— 2015.— Т. 79.— № 4.— С. 451–462.

[32] *Андреев, А. С.* Об устойчивости обобщенного стационарного движения / Андреев А.С., Ризито К. // Прикладная математика и механика. 2002. Т. 66. Вып.3. С.339-349

[33] *Андреев, А. С.* О стабилизации движения нестационарной управляемой системы / А. С. Андреев, В. В. Румянцев // Автоматика и телемеханика.— 2007.— № 8.— С. 18–31.

[34] *Андреев, А. С.* Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения / Андреев А.С., Хусанов Д.Х. // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34, № 4. – С. 435 – 440.

[35] *Андреев, А. С.* К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости / Андреев А.С., Хусанов Д.Х. // Дифференциальные уравнения. – 1998. – Т. 34, №7. С.876-885.

[36] *Артемова, А. О.* Моделирование управляемого движения двузвенного манипулятора на подвижном основании / А. О. Артемова // Научно-

технический вестник Поволжья.— 2012.— № 6.

[37] *Артемова, А. О.* Об управлении пространственным движением многозвенного манипулятора на подвижном основании / А. О. Артемова, Е. Э. Звягинцева, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья.— 2013.— № 5.— С. 106–109.

[38] *Афанасьев, В. Н.* Математическая теория конструирования систем управления: Учеб. для вузов / В.Н. Афанасьев, В.Б. Колмановский, В.Р. Носов – 3-е изд., испр. и доп. М.: Высш. шк., 2003. – 614 с.

[39] *Балакирева Т.Н.* Управление движением сборочного робота с переменной динамической моделью и ограничениями на нормальные силы // Балакирева Т.Н., Воробьев Е.И. / Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела 1986, № 2, 99-102 – РЖМех, 1986, 8А166.

[40] *Белоусов И.Р.* Формирование уравнений динамики роботов-манипуляторов / И.Р. Белоусов.- М.: ИПМ им. М.В.Келдыша РАН, 2002

[41] *Борцов, Ю. А.* Автоматические системы с разрывным управлением / Ю. А. Борцов, И. Б. Юнгер.— Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1986.— 168 с.

[42] *Булгаков, Н. Г.* Знакопостоянные функции в теории устойчивости / Н. Г. Булгаков.— Минск: Университетское, 1984.— 78 с.

[43] *Бурков И.В* Стабилизация натуральной механической системы без измерения ее скоростей с приложением к управлению твердым телом/

И. В. Бурков // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, Вып. 6. С. 923-933.

[44] *Бурков И.В* Динамика пространственного упругого манипулятора с распределенными параметрами / Бурков И.В., Заремба А.П. // Изв. АН СССР. Мех. тверд. тела, 1988, № 3, 43 – 52 – РЖМех, 1988, 11А199.

[45] *Бурков И.В* Стабилизация положения лагранжевой системы с упругими элементами при ограничениях на управление с измерением и без измерения скоростей / И.В. Бурков, Л.Б. Фрейдович // Прикладная математика и механика. – 1997. – Т. 61, Вып. 3. – С. 447 – 456.

[46] *Васильев, С. Н.* Метод сравнения в анализе систем 1, 2 / С. Н. Васильев // Дифференциальные уравнения.— 1981.— Т. 17, № 9.— С. 1562–1573.

[47] *Вербюк В.Е.* Динамика и оптимизация роботехинических систем / Вербюк В.Е. // Киев: Наук. думка, 1989, 187 с. – РЖМех, 1989, 7А193.

[48] *Верещагин А.Ф.* Принцип наименьшего принуждения Гаусса для моделирования на ЭВМ динамики роботов-манипуляторов / Верещагин А.Ф. // Докл. АН СССР, 1975, 220, № 1, 51 – 53.

[49] *Голубев А. Е.* Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотически наблюдателем / А. Е. Голубев, А. П. Крищенко, С. Б. Ткачев // Автоматика и телемеханика.— 2005.— № 7.— С. 3–42.

[50] *Звягинцева Е. Э.* Об управлении механической системой с циклическими координатами / Е. Э. Звягинцева, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья №1 2013. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2013 - с. 217-221

[51] *Игнатьев М.Б.* Алгоритмы управления роботами-манипуляторами. / Игнатьев М.Б., Кулаков Ф.М., Покровский А.М. // Л.: Машиностроение, 1972. – 360 с.

[52] *Карапетян, А. В.* Устойчивость стационарных движений / А. В. Карапетян.— М.: УРСС, 1998.

[53] *Карапетян А.В.* О влиянии диссипативных и постоянных сил на вид и устойчивость стационарных движений механических систем с циклическими координатами / А.В. Карапетян, И.С. Лагутина // Прикладная математика и механика. – 1998. – Т.62, Вып. 4. – С. 539 – 547.

[54] *Карапетян А.В.* Устойчивость консервативных и диссипативных систем / А.В. Карапетян, В.В. Румянцев – М.: ВИНИТИ, 1983. – (Итоги науки техники. Сер. Общая механика; Т.6).

[55] *Кобринский А.А.* Манипуляционные системы роботов / Кобринский А.А., Кобринский А.Е. // М.: Наука, 1985, 344 с.

[56] *Колмановский В. Б.* Устойчивость дискретных уравнений Вольтерра / В. Б. Колмановский // Доклады Академии наук.— 1996.— Т. 349, № 5.— С. 610–614.

[57] *Красовский, Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. / Красовский Н.Н.// М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

[58] *Красовский, Н. Н.* О стабилизации неустойчивых движений дополнительными силами при неполной обратной связи / Н. Н. Красовский, // Прикладная математика и механика.— 1963.— Т. XXVII, № 4.— С. 641–663.

[59] *Красовский, Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений / Н. Н. Красовский // Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4 / И. Г. Малкин.— М.: Наука, 1966.— С. 475–514.

[60] *Крутько, П. Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: линейные модели / Крутько П.Д. // М.: Наука, 1987, 304 с.

[61] *Крутько, П. Д.* Обратные задачи динамики управляемых систем: нелинейные модели / Крутько П.Д. // М.: Наука, 1988, 328 с.

[62] *Крутько, П. Д.* Метод обратных задач динамики в теории конструирования алгоритмов управления манипуляционных роботов. задача стабилизации / П. Д. Крутько, Н. А. Лакота // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1987.— № 3.— С. 23–30.

[63] *Крутько П.Д.* Построение алгоритмов управления движением манипуляционных роботов / Крутько П.Д., Попов Е.П. // Докл. АН СССР, 1980, 255, № 1, 40 – 43.

[64] *Кулаков Ф.М.* Супервизорное управление манипуляционными роботами / Кулаков Ф.М. // М.: Наука, 1989, 448 с.

[65] *Кулешов, В. С.* Динамика систем управления манипуляторами / В. С. Кулешов, Н. А. Лакота.— М.: Энергия, 1971.— 304 с.

[66] *Ляпунов А. М.* Избранные труды. Работы по теории устойчивости / А.М. Ляпунов – М.: Наука, 2007. – 574 с.

[67] *Макаров Д.С.* О стабилизации программных движений трехзвенного манипулятора / Д.С. Макаров, Л.С. Тахтенкова // Тезисы международной конференции по математической теории управления и механике, 3-7 июля 2015г., г. Суздаль. – с.

[68] *Макаров Д.С.* Программа моделирования динамики трехзвенного манипулятора с заданием закона управления / Д. С. Макаров // Ученые записки УлГУ. Сер. "Математика и информационные технологии". – Вып. 1(8). – Ульяновск: УлГУ, 2016. – С. 73-75.

[69] *Маликов, А. И.* Вектор-функции Ляпунова в анализе свойств систем со структурными изменениями / А. И. Маликов, В. М. Матросов // Дифференциальные уравнения.— 1998.— № 2.— С. 47–54, 530 с.

[70] *Малкин, И. Г.* Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин.— М.: Наука, 1966.— 530 с.

[71] *Маркеев, А. П.* Теоретическая механика / А. П. Маркеев.— М.: ЧеРо, 1999.— 569 с.

[72] *Матросов, В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем / В. М. Матросов.— М.: Физматлит, 2001.— 380 с.

[73] *Матюхин, В. И.* Устойчивость движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции / В. И. Матюхин // Автоматика и телемеханика.— 1989.— № 3.— С. 33–44.

[74] *Матюхин, В. И.* Сильная устойчивость движений механических систем / В. И. Матюхин // Автоматика и телемеханика.— 1996.— № 1.— С. 37–56.

[75] *Матюхин, В. И.* Универсальные законы управления механическими системами / В. И. Матюхин.— М.: МАКС Пресс, 2001.— 252 с.

[76] *Матюхин, В. И.* Управление механическими системами / В. И. Матюхин.— М.: Физматлит, 2009.— 320 с.

[77] *Матюхин, В. И.* Управление движением манипулятора / В. И. Матюхин.— М.: ИПУ РАН, 2010.— 96 с.

[78] *Матюхин, В. И.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов / В. И. Матюхин, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 1989.— № 9.— С. 67–72.

[79] *Матюхин, В. И.* Управляемость механических систем в классе управлений, ограниченных вместе с производной / В. И. Матюхин, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 2004.— № 8.— С. 14–38.

[80] *Медведев, В. С.* Системы управления манипуляционных роботов / В. С. Медведев, А. Г. Лесков, А. С. Ющенко.— М.: Наука, 1978.— 416 с.

[81] Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в задах устойчивости / С.В. Павликов – Набережные Челны: Ин-т управления, 2006. 253 с.

[82] *Павликов С.В.* К задаче о стабилизации управляемых механических систем / С.В. Павликов // Автоматика и телемеханика. – 2007. - № 9. – С. 16 – 26.

[83] *Павликов С.В.* О стабилизации движений управляемых систем с запаздывающим регулятором / С.В. Павликов // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 412, № 2. – С. 176 – 178.

[84] *Перегудова, О. А.* Функции Ляпунова вида векторных норм в задачах устойчивости / О.А. Перегудова // Уч. зап. Ульян. гос. ун-та. Сер. «Фундаментальные проблемы математики и механики». – Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2006. – Вып. 1(16). – С. 43 – 51

[85] *Перегудова, О. А.* Знакопостоянные функции Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений / О.А. Перегудова // Международный сборник «Проблемы нелинейного

анализа в инженерных системах». – 2007. – Т. 13, №2(28). – С. 97 – 108.

[86] *Перегудова, О. А.* Уравнения сравнения в задачах об устойчивости движения / О. А. Перегудова // Автоматика и телемеханика.— 2007.— № 9.— С. 56–63.

[87] *Перегудова, О. А.* Логарифмические матричные нормы в задачах устойчивости движения / О.А. Перегудова // Прикладная математика и механика. – 2008. – Т. 72, Вып. 3. – С. 410 – 420.

[88] *Перегудова, О. А.* Развитие метода функций Ляпунова в задаче устойчивости функционально-дифференциальных уравнений / О.А. Перегудова // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т. 44, № 12. – С. 1638 – 1647.

[89] *Перегудова, О А.* Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем / О. А. Перегудова.— Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2009.— 253 с.

[90] *Перегудова, О.А.* О стабилизации движений неавтономных механических систем // Прикладная математика и механика. – 2009. – Т.73. – Вып.2. – С.176-188.

[91] *Перегудова, О.А.* О стабилизации движений неавтономных механических систем / О. А. Перегудова // Прикладная математика и механика.— 2009. — Т. 72.— Вып. 4.— С. 620.

[92] *Перегудова О.А.* К задаче слежения для механических систем с запаздыванием в управлении / О.А. Перегудова // Автоматика и телемеханика. – 2009. - № 5. – С. 95 – 105.

[93] *Перегудова, О. А.* О стабилизации программного движения нелинейных механических систем при помощи кусочно-непрерывных управлений // Автоматизация процессов управления. 2011. №1(23) . – С. 78-82.

[94] *Перегудова, О. А.* Синтез управления двухзвенным манипулятором / Перегудова О.А., Макаров Д.С. // Автоматизация процессов управления. – 2014. – № 4(38). – С. 36–41.

[95] *Перегудова, О. А.* Синтез управления трехзвенным манипулятором / Перегудова О.А., Макаров Д.С. // Автоматизация процессов управления. – 2015. – № 2. – С.109-113.

[96] *Перегудова, О. А.* Стабилизация программного движения манипуляционных роботов на основе измерения координат звеньев / О.А. Перегудова, Д.С. Макаров // СВМО. — 2016. — Том 18. — № 4. — С. 46-51.

[97] *Перегудова, О. А.* О стабилизации программных позиций голономной механической системы без измерения скоростей / О. А. Перегудова, Д. С. Макаров // Ученые записки УлГУ. Сер. "Математика и информационные технологии". – Вып. 1(8). – Ульяновск: УлГУ, 2016. – С. 76-85.

[98] *Перегудова, О. А.* О стабилизации нелинейных систем с кусочно-постоянным управлением при помощи метода бэкстеппинга / О. А. Перегудова, К. В. Пахомов // Автоматизация процессов управления.— 2013.— № 4(34).

[99] *Петров, Б. Н.* Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики / Б. Н. Петров, П. Д. Крутько, Е. П. Попов // Докл. АН СССР.— 1979.— № 5.— С. 1078–1081.

[100] *Погорелов Д.Ю.* Современные алгоритмы компьютерного синтеза уравнений движения систем тел / Д.Ю. Погорелов // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2005. - № 4. – С. 5 – 15.

[101] *Пол Р.* Моделирование, планирвоание тракторий и управление движением робота-манипулятора / Пол. Р. // Перевод с англ. – М.: Наука, 1976. – 103 с.

[102] *Попов, Е. П.* Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы. / Е. П. Попов, А. Ф. Верещагин, С. Л. Зенкевич.— М.: Наука, 1978.— 398 с.

[103] *Попов, Е. П.* Системы управления манипуляционных роботов / Е. П. Попов, А. Ф. Верещагин, С. Л. Зенкевич.— М.: Наука, 1978.— 400 с.

[104] *Попов Э.В.* Алгоритмические основы интеллектуальных роботов и искусственного интеллекта / Попов Э.В., Фридман Г.Р. // М.: Наука, 1976. – 456 с.

[105] *Пятницкий, Е. С.* Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции / Е. С. Пятницкий // Известия АН СССР. Техническая кибернетика.— 1987.— № 3.— С. 92–99.

[106] *Пятницкий, Е. С.* Принцип декомпозиции и в управлении механическими системами / Е. С. Пятницкий // ДАН СССР.— 1988.— Т.— 300.— № 2.— С. 300-303.

[107] *Пятницкий, Е. С.* Синтез систем стабилизации программных движений нелинейных объектов управления / Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 1993.— № 7.— С. 19-37.

[108] *Ремшин, С. А.* Синтез управления двузвенным манипулятором / С. А. Ремшин // Известия РАН. Теор. и сист. упр.— 1997.— № 2.— С. 146–150.

[109] *Ремшин, С. А.* Синтез управления в нелинейной динамической систему на основе декомпозиции / С. А. Ремшин, Ф. Л. Черноусько // Прикладная математика и механика. — 1998.— Т. 62, вып. 1.— С. 121–128.

[110] *Румянцев, В. В.* О стабилизации движения нестационарной управляемой системы / В.В. Румянцев, А.С. Андреев // Доклады Академии наук. – 2007. – Т. 416, № 5. – С. 627-629.

[111] *Румянцев, В. В.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В. В. Румянцев, А. С. Озиранер.

— М.: Наука, 1987,- 253 с.

[112] *Руш Н.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости / Н. Руш, П. Абетс, М. Лалуа – М.: Мир, 1980. – 300 с.

[113] *Таджиев Д.А.* Об управлении движением голономной системы с учетом динамики приводов / Д.А. Таждиев // Научно-технический вестник Поволжья. – 2012. - № 6.

[114] *Тимофеев А.В.* Управление роботами / Тимофеев А.В. // Л.: Ленингр. ун-т, 1986, 276 с.

[115] *Тимофеев А. В.* Устойчивость и стабилизация программного движения робота-манипулятора / А. В. Тимофеев, Ю. В. Экало // Автоматика и телемеханика.— 1996.— № 10.

[116] *Халил Х. К.* Нелинейные системы / Х. К. Халил.— М.: Ижевск: НИЦ ”Регулярная и хаотическая динамика Институт клмпьютерных исследований, 2009.— 832 с.

[117] *Хейл Дж.* Хейл Дж. Теория функционально-дифферепнциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

[118] *Филиппов, А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985.

[119] *Финогенко, И. А.* О задачах слежения, управляемости и стабилизации для механических систем с использованием комбинаций разрывных обратных связей и импульсных управлений / И. А. Финогенко // Труды IX Международной Четаевской Конференции ”Аналитическая

механика, устойчивость и управление движением посвященной 105-летию Н. Г. Четаева.— Иркутск: Сибирское отделение РАН.— 2007.— Т. 2.— С. 299–307.

[120] *Формальский А.М.* Управляемость и устойчивость систем с ограниченными ресурсами / Формальский А.М. // М.: Наука, 1974. – 367 с.

[121] *Фролов К.В.* Механика промышленных роботов. Кн. 1. Кинематика и динамика / Фролов К.В., Воробьев Е.И. // М.: Высш. шк., 1988. – 304 с.

[122] *Фролов К.В.* Механика промышленных роботов. Кн. 2. Расчет и проектирование механизмов. / Фролов К.В., Воробьев Е.И. // М.: Высш. шк., 1988. – 367 с.

[123] *Фролов К.В.* Механика промышленных роботов. Кн. 3. Основы конструирования / Фролов К.В., Воробьев Е.И. // М.: Высш. шк., 1988. – 383 с.

[124] *Фу К.* Робототехника / Фу К., Гонсалес Р., Ли К. // Перевод с англ. – М.: Мир, 1989. – 624 с.

[125] *Черноусько, Ф. Л.* Динамика управляемых движений упругого манипулятора / Черноусько Ф.Л. // Изв. АН СССР. Техн. Кибернет. 1981. №5. С. 142-152.

[126] *Черноусько, Ф. Л.* Методы управления нелинейными механическими системами / Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин.— М.: Физматлит, 2006.— 326 с.

[127] *Черноусько, Ф. Л.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация / Ф. Л. Черноусько, Н. Н. Болотник, В. Г. Градецкий.— М.: Физматлит, 1989.— 368 с.

[128] *Шахинпур М.* Курс робототехники / Шахинпур М. // Перевод с англ. – М.: Мир, 1990. – 527 с.

[129] *Юревич, Е. И.* Основы робототехники / Е. И. Юревич.— 2-е изд.— СПб.: БХВ-Петербург, 2005.— 416 с.

[130] *Alessandro De Luca* Dynamic control of robots with joint elasticity / Alessandro De Luca // Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation. 1988. P. 152-158.

[131] *Alessandro De Luca* Feedforward/Feedback laws for the control of flexible robots / Alessandro De Luca // Proceedings of the 2000 IEEE International Conference on Robotics and Automation. San Francisco. CA. 2000. P. 233-240.

[132] *Alessandro De Luca* PD control with on-line gravity compensation for robots with elastic joints: Theory and experiments / Alessandro De Luca, Bruno Siciliano, Loredana Zollo. // Automatica. 2005. Vol. 41. P. 1809-1819.

[133] *Alonge F.* An adaptive control law for robotic manipulator without velocity feedback / Alonge F., D'Ippolito F., Raimondi F.M. // Control Engineering Practice. 2003. 11. P. 999-1005.

[134] *Andreev A.* Motion Control of Multilink Manipulators without Velocity Measurement / A. S. Andreev, O. A. Peregudova, D.S. Makarov // OASTAB - 16

[135] *Araki, M.* Stability of sampled-data composite systems with many nonlinearities / M. Araki, K. Ando, B. Kondo // IEEE Trans. Automat. Contr.— AC-16, 1971.— Pp. 22–27.

[136] *Balafoutis C.* Efficient modeling and computation of manipulator dynamics using orthogonal cartesian tensors. / Balafoutis C., Patel R., Misra P. // IEEE J. of Rob. and Autom., 4, N 6, pp.665-676.

[137] *Berghuis H.* Tracking control of robots using only position measurements / Berghuis H., Lèohnberg P., Nijmeijer H. // 30th Conf. on Decision and Control. 1991. Vol. 1. P. 1039-1040.

[138] *Berghuis H.* A passivity approach to controller-observer design for robots / Berghuis H. and Nijmeijer H. // IEEE Transactions on robotics and automation. 1993. Vol. 9. No 6. P. 740-754.

[139] *Berghuis H.* Global regulation of robots using only position measurements / Berghuis H. and Nijmeijer H. // Systems and Contr. Letters, vol. 21, 1993, pp. 289–293.

[140] *Brogliato B.* Global tracking controllers for flexible-joint manipulators: a comparative study / Brogliato B., Ortega R., Lozano R. // Automatica. 1995. Vol. 31. No 7. P. 941-956.

[141] *Burkov I.V.* Stabilization of mechanical systems via bounded control and without velocity measurement / Burkov I.V. // 2nd Russian-Swedish Control Conf. St. Petersburg: St. Petersburg Technical Univ. 1995. P. 37-41.

[142] *Burkov I.V.* Stabilization of position of uniform motion of mechanical systems via bounded control and without velocity measurements / Burkov I.V. // 3rd IEEE Multti - conference on Systems and Control. St. Petersburg. 2009. P.400-405.

[143] *Calugi F.* Output feedback adaptive control of robot manipulators using observer backstepping / Calugi F., Robertsson A., Johansson R. // Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ Int. Conference of Intelligent Robots and Systems. Lausanne, Switzerland. 2002. P.2091-2096.

[144] *Dixon W.E.* Global robust output feedback tracking control of robot manipulators / Dixon W.E., Zergeroglu E. and Dawson D.M. // Robotica. 2004. Vol. 22. P. 352-357.

[145] *Kelly R.* A simple set-point robot controller by using only position measurements / Kelly R. // In Preprint 12th IFAC World Congress, vol. 6, Sydney, 1993, pp. 173–176.

[146] *Lindtner E.* Nichtlineare Stabilitatsuntersuchungen eines DD-Manipulators / Lindtner E., Steindl

A., Troger H. // Z. angew. Math. und Mech., 1988, 68, № 4, 75 – 77 – РЖМех, 1988, 10A74.

[147] *Loria A.* Global tracking control of one degree of freedom Euler-Lagrange systems without velocity measurements / Loria A. // European J. Contr., vol. 2, 1996, pp. 144–151.

[148] *Loria A.* Loria A., Nijmeijer H. Bounded output feedback tracking control of fully actuated Euler–Lagrange systems // Systems and Control Letters. 1998. 33 (3). P. 151-161.

[149] *Loria A.* Observer-less output feedback global tracking control of lossless Lagrangian systems / Loria A. // arXiv preprint arXiv: 1307.4659, 2013/7/17.

[150] *Loria A.* On tracking control of rigid and flexible joints robots / Loria A., Ortega R. // Appl. Math. Comput. Sci. 5(2), 1995, pp.101-113.

[151] *Mahil S.* On the application of Lagrange's method to the description of dynamic systems. / Mahil S. // IEEE Trans. on SMC, vol SMC-12, N 6, 1982.

[152] *Moberg S.* On modeling and control of flexible manipulators. / Moberg S. // Linkoping: Linkoping University, 2007. 148 p.

[153] *Natvani L.* On the asymptotic stability for functional differential equations by Lyapunov functionals / Natvani L. // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. – 2001. – V. 47, No. 7. – P . 4333 – 4343. – P. 315 – 323.

[154] *Navarro-Lopez E. M.* Dissipativity, passivity and feedback passivity in the nonlinear discrete-time setting. / E. M. Navarro-Lopez, E. Fossas-Colet.- 1999.

[155] *Nicosia S.* Nicosia S., Tomei P. Robot control by using only joint position measurements // IEEE Trans. Aut. Contr. 1990. V. 35, № 9. P. 1058-1061.

[156] *Nunes E.* Arbitrarily small damping allows global output feedback tracking of a class of Euler-Lagrange systems / Eduardo V. L. Nunes, Liu Hsu and Fernando Lizarralde. // American Control Conference Westin Seattle Hotel, Seattle, Washington, USA, June 11-13, 2008. P. 377-382.

[157] *Sell G. R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics 1, 2 / G. R. Sell // Trans. Amer. Math. Soc.— 1967.— Vol. 127.— Pp. 241–283.

[158] *Tomei, P.* A simple PD controller for robots with elastic joints / Tomei, P. // IEEE Transactions on Automatic Control. 1991. 36(10). P. 1208-1213.

[159] *Vukobratovic M.* Contribution to automatic forming of active chain models via Lagrangian form. / Vukobratovic M., Potkonjak V. //J of Appl. Mech., N 1, 1979.

[160] *Vukobratovic M.* Scientific fundamentals of robotics, control of manipulations robots: theory and application. / Vukobratovic M., Stokic D. // – Berlin: Springer-Verlang, 1982. Перевод: Вукобратович М.К., Стокич Д.М. Управление манипуляционными роботами: Теория и применение. – М.: Наука, 1985. – 384 с.

[161] *Vukobratovic M.* Non-adaptive and adaptive control of manipulation robots. / Vukobratovic M., Stokic D., Kircanski N. // – Berlin: Springer-Verlag, 1985. Перевод: Вукобратович М., Стокич Д., Кирчански Н., Неадаптивное и адаптивное управление манипуляционными роботами. – М.: Мир, 1989ю – 376 с.

[162] *Yarza A.* Uniform Global Asymptotic Stability of an Adaptive Output Feedback Tracking Controller for Robot Manipulators / Yarza A., Santibanez V., Moreno-Valenzuela J. // Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011. P. 14590-14595.

А ОПИСАНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ МАНИПУЛЯТОРА

А.1 Отличительные особенности

Данная программа является отдельным кроссплатформенным приложением, имеющим графический интерфейс. Приложение написано на языке высокого уровня Java. Для построения графического интерфейса был использован фреймворк JavaFX.

Особенности приложения:

- Возможность ввода пользователем собственного закона управления для манипулятора в аналитическом виде. Причем, при вводе допускаются как использование элементарных функций, так и интегралов, в том числе, приводящих к уравнениям с запаздыванием (пределы интегрирования зависят от времени)

Патент РФ на программу для ЭВМ №2016616365. Москва, Роспатент, заявка №2016613909. Дата поступления 15.04.2016. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 09.06.2016.

Приложение служит для моделирования движения управляемого трехзвенного манипулятора, анализа управления, времени стабилизации движения манипулятора относительно заданного положения или траектории. Результаты моделирования используются в главе 3 настоящей диссертации.

Для запуска приложения вне зависимости от операционной системы, на которой оно исполняется, необходимо запустить файл manipulator.jar.

На главном экране пользователю предлагается задать параметры системы, такие как геометрические характеристики манипулятора (длины звеньев, расстояния до их центров масс), массы звеньев, начальные положения звеньев, а также законы управления в аналитическом виде. Также присутствует возможность автоматического заполнения заранее подобранными значениями по умолчанию для демонстрации работы программы.

Рис. А.1: Основной экран

В случае возникновения ошибки, программа сообщает о ней, выделяет незаполненные поля в случае недостаточных данных.

Задание закона управления манипулятором аналитически

Для обработки введенных формул используется открытая сторонняя библиотека, позволяющая пользователю вводить элементарные функции. Также библиотека была доработана для того, чтобы иметь возможность распознавать определенные интегралы с переменным верхним или нижним пределом.

Формулы вводятся в поля ввода в качестве строк текста. В формулах допускается использование констант, основных математических операций и параметров системы, таких, например, как массы звеньев, заданные в виде переменных. При обработке формул происходит преобразование текста в объекты языка Java и сохранение в оперативной памяти. Дальнейшие вычисления проводятся с помощью присвоения соответствующим переменным значений, необходимых для работы на текущем шаге. Таким образом, обработка формулы производится только на первых шагах, что положительно сказывается на скорости работы программы.

При необходимости библиотека работы с формулами может быть расширена.

После ввода уравнений управления и параметров системы пользователь нажимает на кнопку построения графиков, после чего программа производит моделирование движения манипулятора и отображает результаты в виде графиков, показывающих соответствующее изменение координат каждого из звеньев, а также изменения скоростей звеньев с течением времени, ограничиваясь максимальным временем, заданным пользователем.

При наборе формулы поддерживаются следующие действия:

- основные математические операции (сложение, вычитание, умножения, деление, возведение в степень);
- ввод формул без ограничения на длину;
- ввод без ограничений по количеству вложенных скобок;
- добавление делегированных тригонометрических и алгебраических функций $(sin(t), cos(t), tg(t), ctg(t), exp(t), ln(t)\ )$;
- ввод определенных интегралов в том числе с подынтегральной функцией и пределов интегрирования в зависимости от времени t;
- ввод независимой переменной t;