ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Кудашова Екатерина Алексеевна

УСТОЙЧИВОСТЬ, УПРАВЛЕНИЕ И ОПТИМАЛЬНАЯ СТАБИЛИЗАЦИЯ ДИСКРЕТНЫХ И НЕПРЕРЫВНЫХ МЕХАНИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Андреев А.С.

Ульяновск 2015

Оглавление

Глава 1

Новые методы исследования устойчивости дискретных систем

1.1 Математическое моделирование управляемых механических систем

Построение динамических моделей управляемых механических систем с конечным числом степеней свободы приводится к совокупности дифференциальных уравнений вида

$$\dot{y} = g(t, y, v) \tag{1.1}$$

где $y-$ $m-$ мерный вектор фазовых координат или $y \in \mathbb{R}^m-$ $m-$ мерному действительному линейному пространству с некоторой нормой $\|y\|$, $v-$ $r-$ мерный вектор управления или $v \in \mathbb{R}^r$ с нормой $\|v\|$, $g : \mathbb{R}^+ \times G_y \times G_v \to \mathbb{R}^m-$ некоторая $m-$ мерная векторная функция, $G_y \subset \mathbb{R}^m$ и $G_v \subset \mathbb{R}^r-$ определенные области.

Система является общепринятой моделью в теории управления [1]. Применительно к динамическим моделям управляемых механических систем вектор фазовых координат y может представлять собой совокупность обобщенных координат и скоростей (углов, линейных перемещений, угловых и механических скоростей), а также некоторых других переменных (например, характеризующих динамику привода). В качестве управлений v могут выступать моменты и силы, а также другие переменные (в случае приводов, например, напряжения). Вектор-функция g определяется структурой механической системы, а также структурой управления.

Резкое повышение надежности и удешевление компьютеров, микрокомпьютеров позволили существенно изменить подходы к конструированию управляемых систем тем, что компьютер используется непосредственно в контуре управления. Создаваемое при этом управление является цифровым.

Цифровое управление имеет ряд преимуществ: повышенную точность измерений; использование цифровых сигналов (кодов), датчиков и преобразователей; меньшая чувствительность к шумам и помехам; возможность легко изменять программное обеспечение. [2]

Для того, чтобы использовать компьютеры в системах непрерывного управления, их соединяют с объектом управления (с механической системой),

измерительными устройствами и исполнительными механизмами при помощи преобразователей сигнала (восстановителя, цифроаналогового преобразователя и др.). Тем не менее, удобным для анализа и построения систем управления является использование снимаемых с измерительных устройств и подаваемых сигналов управления непосредственно в виде величин, являющихся постоянными в течение периода отсчета, т.е., в виде

$$v(t) = v(nT), \text{ при } nT \leq t \leq (n+1)T, \quad n \in \mathbb{Z}^+$$

где $T-$период дискретизации, т.е., $t_n = nT-$равноотстоящие моменты времени [2], $\mathbb{Z}^+-$множество неотрицательных целых чисел.

Таким образом, система (1.1) при таком управлении принимает вид

$$\dot{y}(t) = g(t, y, v[n]) \tag{1.2}$$

Одним из алгоритмов управления роботами является дискретное позиционирование, при котором структурная схема следящей системы последовательно обрабатывает заданное приращение управляемой выходной переменной.

При непрерывном программном управлении роботом одним из способов определения
управляющей программы состоит в последовательной установке рабочего органа в точках, заранее выбранных на программной траектории с записью показаний датчиков обратной связи, как при программировании систем дискретного позиционного управления. Затем для формирования заданной траектории между этими точками используется интерполятор.

Естественным является использование вместо интерполятора сведение систем (1.2) к системе разностных уравнений. При этом может быть выбрана схема сведения, наиболее удобная с точки зрения интегрирования системы (1.2).

Такой подход является достаточно признанным.[]

Соответственная модель (1.1) в дискретной временной области принимает вид

$$y(n+1) = g(n, y(n), v(n)) \tag{1.3}$$

Будем полагать, что управление $v \in F_v$, F_v – функциональное множество, определяемое имеющимися ресурсами по управлению движением объекта.

Пусть $y = y^*(n)$, $n \in [n_0, n_1)$ $(n_0 \in \mathbb{Z}^+, n_0 < n_1 \leqslant +\infty)$ есть какое-либо программное движение системы из некоторого множества F_y желательных движений с начальным положением $y^*(n_0) = y_0^*$, и $v = v^*(t) \in F_v$ $((y^*(n), v^*(n)) \in G_y \times G_v$ при $n \in [n_0, n_1))$ – программное управление, реализующее это движение согласно вытекающему из (1.3) тождеству

$$y^*(n+1) \equiv Y(n, y^*(n), v^*(n)) \tag{1.4}$$

Совокупность $\{y^*(n), v^*(n), n \in [n_0, n_1)\}$ может быть названа программным управляемым процессом. Этот процесс может быть задан в явном виде, причем вначале частично, исходя из постановки, а затем доопределен в соответствии с ее условиями. Он может быть задан в неявном виде, например, как решение экстремальной задачи. Как правило, решение такой задачи находится приближенно, и это приближение принимается за программное управляемое движение.

По отношению к управляемым механическим системам основополагающей является следующая задача, называемая обычно задачей регулирования [4].

Определение 1.1. *Пусть* $\{y^*(n), v^*(n), n \in [n_0, n_1)\}$ *есть программный управляемый процесс,* y_τ *- некоторое состояние объекта, зафиксированное в момент* $n = \tau$, $n_0 \leqslant \tau < n_1$, *при этом* $y_\tau \neq y^*(\tau)$. *Задача регулирования программного управляемого процесса состоит в нахождении совокупности управлений* $F_v^0 = \{v_\tau(n),\ n \in [\tau, n_1)\} \subset F_v$, *таких что для каждого* $(\tau, y_\tau) \in [n_0, n_1) \times \{y : ||y - y(\tau)|| < \Delta > 0\}$ *найдется* $v \in F_v^0$, *при котором соответствующее движение* $y(n)$, $y(\tau) = y_\tau$, *сходится к* $y^*(n)$, *а именно:*

а) либо $y(n_2) = y^*(n_2)$ *при некотором* $n_2 \in [\tau, n_1)$ *(сходимость за конечное время)*

б) либо для $n_1 = \infty$ *движение* $y(n) \to y^*(n)$ *при* $n \to +\infty$ *(т.е.* $||y(n) - y^*(n)|| \to 0$ *при* $n \to +\infty$*)*

Введенная задача является математическим оформлением практического опыта по регулированию технических систем и процессов. Воздействие на объект (называемое в теории управления входом) с целью его заданного функционирования вначале осуществлялось посредством конструирования некоторой технической подсистемы, которая в зависимости от состояния объекта или некоторых его выходных параметров (выход) обеспечила бы это функционирование.

Дальнейшее развитие техники, и особенно вычислительных средств, приводит к следующему обобщенному представлению задачи регулирования.

Допустим, что фактическое состояние объекта в момент $n = \tau$, $n_0 \leqslant \tau < n_1$, не совпадает с заданным $y(\tau) \neq y^*(\tau)$. Поскольку это отклонение может быть любым, требуется наличие измерительных устройств, позволяющих получить первичную информацию о реальном движении. После ее обработки можно получить информацию об отклонении $x(n) = y(n) - y^*(n)$, $n \geqslant \tau$, а затем сформировать управляющие сигналы.

Информационный процесс от обработки первичной информации до воздействия управляющих сигналов на исполнительные механизмы вместе с устройствами, реализующими этот процесс, называют системой управления движением. Всю совокупность, состоящую из движущегося объекта, системы управления движением этого объекта и терминальных элементов (измерительных устройств и исполнительных механизмов), определяют как управляемую динамическую систему [4, 6]. Осуществляемую согласно этой схеме связь между движением объекта и управляющими силами и моментами называют обратной связью.

Для приведения объекта к заданному программному движению требуется осуществить при возмущении, в общем случае, воздействие v, отличное от программного управления $v^*(n)$. Для механики управляемого движения наиболее распространенной является задача позиционного управления, в которой принимается линейная стратегия управления

$$v = v^*(n) + u(n, x), \quad x = y - y^*(n), \tag{1.5}$$

где $u(n, x)$ - дополнительное (позиционное) управляющее воздействие на объект, создаваемое исполнительными механизмами согласно обратной связи. Линейность управления (1.5) в определенной степени соответствует известному в механике представлению движения как суммы двух движений - переносного и относительного. При этом полагается, что реализация управления $v^*(n)$ такова, что имеется возможность дополнительного определения $u = u(n, x)$, $u \in F_u$, которое в дальнейшем будем называть управляющим воздействием.

Определение 1.2. *Пусть* $\{y^*(n), v^*(n), n \in [n_0, n_1)\}$ *- управляемый программный процесс. Задача синтеза позиционного управления состоит в построении управления в виде* (1.5) *таким образом, что для каждого* $\tau \in [n_0, n_1)$ *и каждого* $y_\tau \in \{y : ||y - y^*(\tau)|| < \Delta\}$, *где число* Δ $(0 < \Delta \leqslant +\infty)$ *выбирается согласно постановке конкретной задачи, движение* $y(n)$, $y(\tau) = y_\tau$, *соответствующее управлению* $v = v^*(n) + u(n, x)$, *сходилось к движению* $y^*(n)$.

Введем переменные $x = y - y^*(n)$, характеризующие отклонения управляемого движения объекта от его заданного программного движения $y = y^*(n)$. В соответствии с (1.4) - (1.5) уравнения движения объекта в отклонениях будут описываться системой разностных уравнений

$$x(n+1) = f(n, x(n), u(n)), \tag{1.6}$$

где $f(n, x(n), u(n)) = g(n, x(n) + y^*(n), u(n) + v^*(n)) - y(n, y^*(n), v^*(n))$.

Естественно предположить, что при $v = v^*(n)$, $u(n, x) \equiv 0$, соответствующее движение объекта совпадает с программным $y = y^*(n)$, и соответственно ему отвечает движение $x = 0$ системы в отклонениях (1.6). Для этого составляющие, входящие в систему (1.6), должны удовлетворять соотношениям

$$u(n,0) \equiv 0, \quad f(n,0,0) \equiv 0, \quad n \in [n_0, n_1) \tag{1.7}$$

Однако из-за инструментальной погрешности измерительных устройств и наличия возмущающих сил и моментов, действующих на объект, возникают соотношения вида

$$u(n,0) = \mu(n), \quad f(n,0,0) = v(n), \quad n \in [n_0, n_1) \tag{1.8}$$

Учет этих соотношений обычно проводится как влияние возмущений. Тем
самым, решение задачи синтеза позиционного управления, прежде всего, проводится по отношению к программному движению, отождествляемому с нулевым решением $x = 0$ системы (1.6), при наличии возмущений (1.8).

Задачу позиционного синтеза управления при $n_1 = +\infty$ называют также задачей стабилизации [4, 8], а в некоторых источниках [13] - задачей синтеза асимптотически устойчивых систем. На конечном отрезке времени в такой задаче возмущенное движение попадает в $\varepsilon-$окрестность программного движения, но не совпадает с ним.

Рассмотрим задачу о стабилизации, полагая $n_0 = 0$, $n_1 = \infty$ и условия (1.7) выполненными для всех $n \in \mathbb{Z}^+$.

Соответственно определению (1.2) имеем следующую постановку этой задачи.

Определение 1.3. *Управляющее воздействие $u = u(n,x)$, $u(n,0) = 0$ называется стабилизирующим, если нулевое состояние системы*

$$x(n+1) = f(n,x,u), \quad f(n,0,0) = 0$$

является асимптотически устойчивым.

Применительно к этой задаче могут быть применены известные методы исследования устойчивости для разностных уравнений и их модификации []. В следующем параграфе дается развитие этих методов в направлении применения векторных функций Ляпунова на основе уравнений сравнения.

1.2 Метод векторных функций Ляпунова в исследовании устойчивости

Как показано в параграфе 1.1, моделирование управляемой механической системой с цифровым регулятором приводится к уравнениям вида

$$x(n+1) = f(n, x(n)) \tag{1.9}$$

где $x - m-$мерный вектор действительного пространства $\mathbb{R}^m$ с некоторой нормой $\|x\|$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $\mathbb{Z}^+-$множество неотрицательных целых чисел. Будем полагать, что правая часть (1.9) есть вектор-функция, определенная для всех $(n, x) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m$ и, если не предполагается иначе, она непрерывна по xпри каждом $n \in \mathbb{Z}^+$.

Задача о стабилизации моделируемой управляемой системы обычным образом приводится к задаче об устойчивости нулевого состояния системы (1.9) в предположении

$$f(n, 0) \equiv 0$$

Соответственно имеют место следующие определения устойчивости состояния покоя $x = 0$ для дискретной системы (1.9) [16,17].

Определение 1.4. *Состояние $x = 0$ системы (1.9) называется устойчивым, если для любых $\varepsilon > 0, n_0 \in \mathbb{Z}^+$существует такое непрерывное $\delta = \delta(\varepsilon, n_0) > 0$, что условие $\|x_0\| < \delta(\varepsilon, n_0)$ влечет выполнение неравенства $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ для любого $n \geq n_0$.*

Определение 1.5. *Состояние $x = 0$ называется аттрактором (точкой притяжения) движений системы (1.9), если при любом $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ существует $\delta_0 = \delta_0(n_0) > 0$, такое, что из условия $\|x_0\| < \delta(n_0)$ следует что $\lim\limits_{n\to\infty} x(n, n_0, x_0) = 0$*

Определение 1.6. *Состояние $x = 0$ системы (1.9) называется асимптотически устойчивым, если оно устойчиво и является аттрактором.*

Определение 1.7. *Равномерно асимптотически устойчивым по x_0 называется состояние $x = 0$ системы (1.9), если оно устойчиво и $\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{Z}^+\ \exists\ \delta(n_0) > 0,\ \ N = N(n_0, \varepsilon) > 0$, такие, что из условия $\|x_0\| < \delta_0$ следует, что $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ для любого $n \geq n_0 + N$.*

Определение 1.8. *Равномерно устойчивым называется состояние $x = 0$ системы (1.9), если $\forall\ \varepsilon > 0,\ \forall n_0 \in \mathbb{Z}^+\ \exists\ \delta = \delta(\varepsilon) > 0$ такие, что из условия $\|x_0\| < \delta(\varepsilon)$ следует, что $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ для любого $n \geq n_0$.*

Определение 1.9. *Состояние* $x = 0$ *называется равномерным аттрактором движений системы* (1.9), *если существует значение* $\delta_0 > 0$, *что для любых* $\varepsilon > 0$, $n_0 \in Z^+$ *найдется* $N(\varepsilon) > 0$ *такое, что условие* $\|x_0\| < \delta_0$ *влечет выполнение условия* $\|x(n, n_0, x_0)\| < \varepsilon$ *для любого* $n \geq n_0 + N(\varepsilon)$. *Если это свойство имеет место при произвольном* δ_0, *то состояние* $x = 0$ *называется глобальным равномерным аттрактором.*

Определение 1.10. *Состояние* $x = 0$ *системы* (1.9) *называется равномерно асимптотически устойчивым, если оно равномерно устойчиво и является равномерным аттрактором.*

Определение 1.11. *Состояние* $x = 0$ *системы* (1.9) *называется неустойчивым, если для некоторых* $\varepsilon_0 > 0$ *и* $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ *и любого* $\delta > 0$ *найдутся* $x(n, n_0, x_0)$ *и* $n_1 = n_1(\varepsilon) > n_0$ *такие, что* $\|x_0\| < \delta$ *и* $\|x(n_1, n_0, x_0)\| \geq \varepsilon$.

Для формулировки и дальнейшего применения нового принципа квазиинвариантности для неавтономных разностных систем с использованием вектор-функции Ляпунова и систем сравнения введем некоторые обозначения и построения.

Обозначим через F множество всех функций $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, непрерывных по x, и введем на F следующую сходимость.

Определение 1.12. *Последовательность* $\{f_k \in F\}$ *сходится к* f, *если* $\forall \varepsilon > 0$, $\forall N \in \mathbb{Z}^+$, *для всякого компактного множества* $D \subset \mathbb{R}^m$ *существует* $K \in \mathbb{Z}^+$, *такое что при всех* $k \geq K$

$$\|f_k(n, x) - f(n, x)\| < \varepsilon \forall (n, x) \in [0, N] \times D$$

Эта сходимость метризуема, если ввести следующую метрику.

Пусть $\{D_k\}$ – совокупность вложенных компактных множеств, покрывающих пространство $\mathbb{R}^m$:

$$D_1 \subset D_2 \subset \ldots \subset D_k \subset \ldots, \quad \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k = \mathbb{R}^m$$

Введем в пространстве F метрику

$$\rho(f, g) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \frac{\sup(||f(n, x) - g(n, x)||)}{1 + \sup(||f(n, x) - g(n, x)||)}, \tag{1.10}$$

$$f, g \in F, \ (n, x) \in [0, k] \times D_k$$

Пространство F будет полным с такой метрикой.

Будем полагать, что правая часть (1.9) удовлетворяет следующим условиям:

а) функция $f(n,x)$ равномерно ограничена на множестве $\mathbb{Z}^+ \times D$ для каждого компакта $D \subset \mathbb{R}^m$ и

$$\|f(n,x)\| \le l = l(D) \quad \forall (n,x) \in \mathbb{Z}^+ \times D \tag{1.11}$$

б) функция $f(n,x)$ равномерно непрерывна по x независимо от $n \in \mathbb{Z}^+$ на каждом компактном множестве $D \subset \mathbb{R}^m$: $\forall D \subset \mathbb{R}^m$ и $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta = \delta(\varepsilon, D) > 0$ такое, что для всех $n \in \mathbb{Z}^+$ и всех $x_1, x_2 \in D : \|x_2 - x_1\| < \delta$ выполнено неравенство

$$\|f(n,x_2) - f(n,x_1)\| < \varepsilon \tag{1.12}$$

Лемма 1.1. *При условиях* (1.11) *и* (1.12) *семейство сдвигов* $\{f_k(n,x) = f(k+n,x),\ k \in \mathbb{Z}^+\}$ *содержится в компактном множестве* $F_0 \subset F$.

В дальнейшем, если функции удовлетворяют условиям (1.11) и (1.12), тогда будем говорить, что эти функции удовлетворяют условиям предкомпактности.

Определение 1.13. *Будем говорить, что функция* $f^* : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *есть предельная к* f, *если существует последовательность* $n_k \to \infty$ *такая, что последовательность сдвигов* $\{f_k(n,x),\ f_k(n,x) = f(n_k+n,x)\}$ *сходится к функции* f^* *в метрическом пространстве* F.

Система

$$x(n+1) = f^*(n, x(n)) \tag{1.13}$$

называется предельной к системе (1.9).

Следующая теорема определяет связь между решениями систем (1.9) и (1.13).

Теорема 1.1. *Пусть при* $n_k \to \infty$ *последовательность сдвигов* $\{f_k(n,x) = f(n_k+n,x)\}$ *сходится к предельной функции* f^* *в* F, *а последовательность точек* $x_0^{(k)} \to x_0$. *Тогда последовательность решений* $x_k(n,n_0,x_0^{(k)}) = x(n_k+n,n_0,x_0^{(k)})$ *системы* $x(n+1) = f_k(n,x(n))$, $f_k(n,x) = f(n_k+n,x)$ *сходится к решению* $x = x^*(n,n_0,x_0)$ *предельной системы* (1.13). *При этом сходимость равномерна по* $n \in [n_0, n_0+N]$ *для каждого* $N \in \mathbb{Z}^+$.

На основе данной теоремы могут быть установлены следующие предельные свойства решений системы (1.9).

Определение 1.14. *Пусть решение* $x = x(n,n_0,x_0)$ *системы* (1.9), *определено для всех* $n \ge n_0$. *Будем называть точку*

$p \in \mathbb{R}^m$ *его положительной предельной точкой, если существует последовательность* $n_k \to \infty$ *такая, что* $x(n_k, n_0, x_0) \to p$. *Множество всех таких точек образует положительное предельное множество* $\Omega^+(n_0, x_0)$.

Теорема 1.2. *Непустое положительное множество* $\Omega^+(n_0, x_0)$ *решения* $x = x(n, n_0, x_0)$ *системы* (1.9) *является положительно квазиинвариантным относительно семейства предельных систем* (1.13).

Предельная функция f^* может быть продолжена на множество $\mathbb{Z}^- \times \mathbb{R}^m$, так как для каждого $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ сдвиг $f_0(n, x) = f(n_0 + n, x)$ определяется на множестве $[-n_0, +\infty] \times \mathbb{R}^m$. Исходя из этого предположения, можно определить решения системы (1.13) для начальных значений $(n_0, x_0) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^m$, соответственно определить отображение $x^*(n, n_0, x_0)$, $x^* : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$.

Определение 1.15. *Будем говорить, что множество* $H \subset \mathbb{R}^m$ *является квазиинвариантным, если для любой точки* $x_0 \in H$ *существует предельная система* (1.13) *и ее решение* $x = x^*(n)$, $x^*(0) = x_0$ *такое, что* $x^*(n) \in H \;\; \forall n \in \mathbb{Z}$.

Теорема 1.3. *Если решение* $x = x(n, n_0, x_0)$ *системы* (1.9) *ограничено для всех* $n \in \mathbb{Z}^+$, *тогда его положительное предельное множество* $\Omega^+(n_0, x_0)$ *замкнуто и квазиинвариантно, при этом решение* $x(n, n_0, x_0)$ *неограниченно приближается к* $\Omega^+(n_0, x_0)$ *при* $n \to \infty$.

Для исследования устойчивости нелинейной системы (1.9) широко применяется метод функций Ляпунова. Метод оценки функции Ляпунова, удовлетворяющей разностному неравенству, посредством решения, соответствующего разностного уравнения представляет собой один из наиболее эффективных методов такого исследования.

Представим классические теоремы сравнения, основой которых является использование разностных неравенств [16,17].

Теорема 1.4. *Пусть для* $n \in \mathbb{Z}^+$, $r \in \mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$ *функция* $g(n, r)$, *является неубывающей по переменной* r *для фиксированного* n. *Предположим, что для всех* $n \in \mathbb{Z}^+$ *имеют место неравенства*

$$y_{n+1} \le g(n, y_n), \tag{1.14}$$

$$v_{n+1} \ge g(n, v_n) \tag{1.15}$$

Тогда из неравенства

$$y_{n_0} \le v_{n_0}, n_0 \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.16}$$

следует, что $y_n \le v_n$, *для всех* $n \ge n_0$.

Теорема 1.5. *Пусть функция $g(n, s, y)$ определена на множестве $\mathbb{Z}^+_{n_0} \times \mathbb{Z}^+_{n_0} \times \mathbb{R}$ и является неубывающей по переменной y. Предположим, что для любого $n \geq n_0$, $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ выполняется неравенство*

$$y_n \leq \sum_{s=0}^{n-1} g(n, s, y_s) + p_n$$

Тогда из условия $y_{n_0} \leq p_{n_0}$, следует, что $y_n \leq u_n$, $n \geq n_0$, где u_n есть решение разностного уравнения

$$v_n = \sum_{s=0}^{n-1} g(n, s, v_s) + p_n, v_{n_0} = p_{n_0}$$

Теорема 1.6. *Пусть даны две функции $g_1(n, v)$ и $g_2(n, v)$, определенные на множестве $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^+$ и неубывающие по переменной u. Предположим, что выполнены неравенства*

$$g_2(n, v_n) \leq v_{n+1} \leq g_1(n, v_n)$$

Тогда будут иметь место следующие неравенства

$$P_n \leq v_n \leq r_n,$$

где P_n и r_n есть решения разностных уравнений:

$$\begin{gathered} r_{n+1} = g_1(n, r_n),\ r_0 \leq v_0, \\ P_{n+1} = g_2(n, P_n),\ P_0 \geq v_0 \end{gathered}$$

Теоремы (1.4) и (1.7) несложно обобщить на случай векторной функции.

Будем считать, что функция $W : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ является непрерывной и неубывающей по своему векторному аргументу согласно следующему определению:

Определение 1.16. *Будем считать, что имеет место векторное неравенство $v \leq w$, если выполнено покоординатное неравенство $v_j \leq w_j$ для всех $j = 1..k$. Функция g является неубываеющей по $v \in \mathbb{R}^k$, если из неравенства $v \leq w$, для каждого $n \in \mathbb{Z}^+$ следует неравенство $W(n, v) \leq W(n, w)$.*

Теорема 1.7. *Пусть функция $W : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ является неубывающей по векторному аргументу $w \in \mathbb{R}^k$; функция $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^k$ удовлетворяет неравенству $V(n+1) \leq V(n, v(n))$, а функция $w : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^k$ соотношению $W(n+1) \leq W(n, v(n))$, тогда из условия $V(n_0) \leq W(n_0)$, следует $V(n) \leq W(n)$ для всех $n \leq n_0$.*

Рассмотрим нелинейное разностное уравнение вида

$$y_{n+1} = f(n, y_n) + R(n, y_n) \tag{1.17}$$

Предположим, что $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $R : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, непрерывная функция f имеет частные производные по второму аргументу на множестве $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m$. Для решения $x(n, n_0, x_0)$ можно определить матрицу $\Phi(n, n_0, x_0)$ следующим образом

$$\Phi(n, n_0, x_0) = \frac{\partial x(n, n_0, x_0)}{\partial x_0}$$

Эта матрица представляет собой решение уравнения

$$\Phi(n+1, n_0, x_0) = H(n, n_0, x_0)\Phi(n, n_0, x_0)$$

с начальным условием

$$\Phi(n_0, n_0, x_0) = I,$$

где $I-$ единичная матрица.

Справедлива следующая теорема о нелинейной вариации параметров [16,17,18].

Теорема 1.8. *Пусть* $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, $Q : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ *и существует матрица* $\dfrac{\partial f(n,x)}{\partial x}$, *непрерывная и обратимая по* x *при каждом* n *на* $\mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m$. *Тогда для любого решение уравнения* (1.9) *выполняется соотношение*

$$y(n, n_0, x_0) = x(n, n_0, x_0 + \sum_{j=n_0}^{n-1} \Psi^{-1}(j+1, n_0, v_j, v_{j+1})Q(j, y_j)),$$

где

$$\Psi(n, n_0, v_j, v_{j+1}) = \int\limits_0^1 \Phi(n, n_0, s v_{j+1} + (1-s)v_j)ds,$$

а переменные v_j *удовлетворяют неявному уравнению*

$$\Psi(n+1, n_0, v_n, v_{n+1})(v_{n+1} - v_n) = Q(n, y_n)$$

Следствие 1.1. *[16,17] При выполнении условий теоремы* (1.8) *решение* $y\ (n, y_0, y_0)$ *уравнения* (1.17) *может быть записано в следующем виде:*

$$y(n, n_0, x_0) = x(n, n_0, x_0) + \Psi(n, n_0, v_n, x_0) \sum_{j=n_0}^{n-1} \Psi^{-1}(j+1, n_0, v_j, v_{j+1})Q(j, y_j)$$

Введем обозначение $y(n) = y(n, n_0, x_0)$ и рассмотрим разность

$$x(n,j+1,y(j+1))-x(n,j,y(j)) = x(n,j+1,y(j+1))-x(n,j+1,f(j,y(j)))$$

По теореме о среднем получим:

$$x(n,j+1,y(j+1))-x(n,j+1,f(j,y(j))) =$$
$$\int\limits_0^1 \frac{\partial x(n,j+1,sy(j+1)+(1-s)f(j,y(j)))}{\partial x_0} ds(y(j+1)-f(j,y(j)))$$

Учитывая определение матрицы $\Phi(n,n_0,x_0)$, непосредственно получим

$$x(n,j+1,y(j+1))-x(n,j,y(j)) =$$

$$\int\limits_0^1 \Phi(n,j+1,sy(j+1)+(1-s)f(j,y(j)))ds(Q(j,y(j))) \tag{1.18}$$

Просуммировав по $j=n_0,...,n-1$ выражения (1.18), будем иметь

$$x(n,n,y(n))-x(n,n_0,y(n_0)) =$$
$$\sum_{j=n_0}^{n-1}\int\limits_0^1 \Phi(n,j+1,sy(j+1)+(1-s)f(j,y(j)))ds(Q(j,y(j))),$$

или, так как $x(n,n,y(n)) = y(n)$ и $x(n,n_0,y(n_0)) = x(n,n_0,x_0)$, окончательно получим

$$\begin{gathered} y(n,n_0,x_0) = x(n,n_0,x_0) + \sum_{j=n_0}^{n-1}\int\limits_0^1 \Phi(n,j+1,sy(j+1)+ \\ +(1-s)f(j,y(j)))ds(Q(j,y(j))) \end{gathered} \tag{1.19}$$

Выражение вида (1.19) является аналогом формулы В.М. Алексеева [1] нелинейной вариации параметров для разностных систем. Оно позволяет провести развитие метода сравнения с вектор-функцией Ляпунова для решения задач об асимптотической устойчивости и неустойчивости решений неавтономных дискретных систем с использованием принципа квазиинвариантности.

Обозначим через K класс функций $V:\mathbb{Z}^+\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$, непрерывных по $v\in\mathbb{R}^m$, равномерных по $n\in\mathbb{Z}^+$, через H – класс функций $h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$, таких что $h(0)=0, h(a)$ строго монотонно возрастает по $a\in\mathbb{R}^+$

Предположим, что для системы (1.9) существует функция $V\in\mathbb{K}$, непрерывная по переменной x при каждом фиксированном $n\in\mathbb{Z}^+$, удовлетворяющая соотношению

$$
\begin{gathered}
V(n+1, x(n+1)) = W(n, V(n, x(n))) + Q(n, x(n), V(n, x(n))), \\
W(n, 0) \equiv 0, \quad Q(n, 0, V(n, 0)) \equiv 0,
\end{gathered} \tag{1.20}
$$

При этом выполнены следующие условия:

1. Функция $W = W(n, w)$ монотонная и непрерывно дифференцируемая по $w \in \mathbb{R}^k$, причем $\dfrac{\partial W}{\partial w^j} \in \mathbb{K}_2$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$
2. Функции $W = W(n, w)$, $Q = Q(n, x, w)$ удовлетворяют условиям предкомпактности типа (1.11) и (1.12),
3. Имеет место неравенство $Q(n, x, w) \leqslant 0$ для любых $(n, x, w) \in \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^k$.

Тогда, исходя из введенных предположений, следует, что функция $V(n, x)$ является вектор-функцией сравнения, а система

$$
w(n+1) = W(n, w(n)) \tag{1.21}
$$

– системой сравнения.

Если $V = V(n, x)$ удовлетворяет уравнению (1.20), причем $V(n_0, x_0) = V_0$, а $w(n) = w(n, n_0, V_0)$ есть решение (1.21), определённое на интервале $[n_0, n_0 + \beta)$, $\beta > 0$, то для всех $n \in [n_0, n_0 + \beta)$ на решении $x(n) = x(n, n_0, x_0)$ системы (1.9) выполняется неравенство

$$
V(n, x(n, n_0, x_0)) \leqslant w(n, n_0, V_0)
$$

Так как система (1.21) является предкомпактной, для неё можно определить семейство предельных систем сравнения

$$
w(n+1) = W^*(n, w(n)), \qquad W^* \in F_W \tag{1.22}
$$

Условия, наложенные на правую часть $W = W(n, x)$ системы (1.21) влекут, дифференцируемость по $w_0 \in \mathbb{R}^k$ решений$w = w(n, n_0, w_0)$ этой системы. Так как $w(n, n_0, w_0)$ - неубывающая по w_0 функция $w(n, n_0, w_0)$ получим, что матрица

$$
\Phi(n, n_0, w_0) = \frac{\partial w(n, n_0, w_0)}{\partial w_0}
$$

является неотрицательной, нормированной, $\Phi(n_0, n_0, w_0) = I$, (здесь I – единичная матрица), фундаментальной матрицей для линейной системы в вариациях

$$
y(n+1) = H(n, n_0, w_0) y, \quad H = \left. \frac{\partial W(n, w)}{\partial w} \right|_{w = w(n, n_0, w_0)}
$$

Предположим, что для любого компакта $K \subset \mathbb{R}^k$ существуют числа $M(K)$ и $\alpha(K) > 0$, такие, что для любых точек $(n, n_0, w_0) \in \mathbb{N}^+ \times \mathbb{N}^+ \times K$ матрица $\Phi(n, n_0, w_0)$ удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \|\Phi(n, n_0, w_0)\| \leqslant M(K) \\ \det \Phi(n, n_0, w_0) \geqslant \alpha(K) \end{cases} \tag{1.23}$$

Тогда справедлива следующая теорема [7,8].

Теорема 1.9. *Пусть выполнены следующие условия:*

1. *Существует вектор-функция Ляпунова $V = V(n, x)$, удовлетворяющая условиям предкомпактности и равенству* (1.20)
2. *Для системы сравнения* (1.21) *справедливы условия* (1.23)
3. *Решение $x(n, n_0, x_0)$ системы* (1.9) *ограничено некоторым компактом $K \subset S_\nu$ для всех $n \geq n_0$*
4. *Решение $w(n) = w(n, n_0, V_0)$ системы сравнения* (1.21), *где $V_0 = V(n_0, x_0)$, ограничено при всех $n \geq n_0$*

Тогда для любой предельной точки $p \in \Omega^+(n_0, x_0)$ найдётся набор предельных функций (f^*, V^*, W^*, Q^*), такой, что решение $x = x^*(n, p)$ системы (1.13) *с начальным условием $x^*(0, p) = p$ удовлетворяет соотношениям*

$$x^*(n, p) \in \Omega^+(n_0, x_0),$$
$$x^*(n, p) \in \{V^*(n, x) = w^*(n)\} \bigcap \{Q^*(n, x, w^*(n)) = 0\} \text{ для всех } n \in \mathbb{N},$$

где $w^*(n)$ есть решение предельной системы сравнения (1.22) *с начальным условием $w^*(0) = V^*(0, p)$.*

Классическая теорема сравнения[ ] основывается на проверке асимптотической устойчивости нулевого решения системы сравнения. Однако, применение принципа квазиинвариантности, в виде теоремы (1.9), позволяет ослабить требование ассимтотической устойчивости (не асимтотической) нулевого решения системы сравнения.

Введем в рассмотрение скалярную функцию $\bar{V} = \bar{V}(n, x)$ для соотвествующей вектор-функции $V = V(n, x)$ определяемую соотношением

$$\bar{V}(n, x) = \sum_{i=1}^{k} V^i(n, x) \text{ или } \bar{V}(n, x) = \max_{i=1,2,\ldots,k} V^i(n, x)$$

Теорема 1.10. *[ ] Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова $V = V(n,x)$, удовлетворяющая условиям предкомпактности, такая, что:*

1. *функция $\bar{V}$ является определённо-положительной, $\bar{V}(n,x) \geq a(|x|), a \in H$*
2. *справедливо равенство* (1.20)
3. *нулевое решение $w = 0$ системы сравнения* (1.21) *устойчиво*
4. *на каждом ограниченном решении системы сравнения* (1.21) *выполненяется условие* (1.23)*;*
5. *для любой предельной совокупности (f^*, V^*, W^*, Q^*) и каждого ограниченного решения $w = w^*(n) \neq 0$ предельной системы сравнения* (1.22) *в множестве*

$$\{V^*(n,x) = w^*(n)\} \bigcap \{Q^*(n,x,w^*(n)) = 0\}$$

не содержится решений предельной системы (1.13).

Тогда нулевое решение $x = 0$ системы (1.9) *асимптотически устойчиво.*

Теорема 1.11. *Если в теореме* (1.9) *усилить условия 3) и 5) до условий*

3. *решение $w = 0$ системы* (1.21) *равномерно устойчиво*

5. *для любой предельной совокупности (f^*, W^*, Q^*) множество $\{W^* = 0\}$ не содержит решений системы* (1.22),(1.13)*, кроме $w = 0$.*

Тогда решение $x = 0$ системы (1.9) *равномерно асимптотически устойчиво.*

Содержащиеся в теореме (1.10) условия позволяют расширить классы используемых систем сравнения и вектор-функций Ляпунова для исследования асимптотической устойчивости неавтономных разностных систем.

Сформулировонная теорема представляет собой развитие классической теоремы сравнения, а также теорем, основанных на применении скалярной функции Ляпунова со знакопостоянной производной [19].

Рассмотрим задачу об устойчивости непрерывных знакопостоянных вектор-функций Ляпунова, для чего сформулируем несколько определений.

Определение 1.17. *Будем говорить, что нулевое решение* $x = 0$ *устойчиво относительно множества* $\{\bar{V}^*(n,x) = 0\}$ *и выбранной предельной совокупности* (f^*, V^*, W^*, Q^*), *если для любого числа* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, *такое, что для любого решения* $x = x^*(n, x_0)$ *системы* (1.13), *выполняется неравенство* $|x^*(n, x_0)| < \varepsilon$. *Причем для этого решения справедливо*

$$x^*(0,x_0) = x_0, \quad x_0 \in \{|x| < \delta\} \bigcap \{\bar{V}^*(0,x) = 0\} \bigcap \{Q^*(0,x,0) = 0\},\ \forall n \geq 0$$

Определение 1.18. *Нулевое решение* $x = 0$ *асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\bar{V}^*(n,x) = 0\}$ *и выбранной предельной совокупности* (f^*, V^*, W^*, Q^*), *если оно устойчиво, а также существует число* $\Delta > 0$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *найдётся* $N = N(\varepsilon) > 0$, *такие, что для любого решения* $x = x^*(n, x_0)$ *системы* (1.13), *такого, что*

$$x^*(0,x_0) = x_0, \quad x_0 \in \{|x| < \Delta\} \bigcap \{\bar{V}^*(0,x) = 0\} \bigcap \{Q^*(0,x,0) = 0\},$$

для всех $n \geqslant N(\varepsilon)$ *выполняется неравенство* $|x^*(n, x_0)| < \varepsilon$.

Определение 1.19. *Нулевое решение* $x = 0$ *равномерно устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво) относительно множества* $\{\bar{V}^*(n,x) = 0\}$ *и семейства предельных совокупностей* $\{(f^*, V^*, W^*, Q^*)\}$, *если число* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *в определении* (1.17) *не зависит (числа* $\Delta > 0$ *и* $N = N(\varepsilon) > 0$ *в определении* (1.17) *не зависят) от выбора* (f^*, V^*, W^*, Q^*).

Следующая теорема связывает введенные понятия с полученными ранее результатами.

Теорема 1.12. *Предположим, что существует вектор-функция Ляпунова* $V = V(n,x) \geqslant 0$, *удовлетворяющая условиям предкомпактности и условиям 1–3 теоремы* (1.10) , *а также условию*

5. *нулевое решение* $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво относительно множества* $\{\bar{V}^*(n,x) = 0\}$ *и семейства предельных совокупностей* $\{(f^*, V^*, W^*, Q^*)\}$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (1.9) *устойчиво (равномерно устойчиво).*

Доказательство. Прежде всего, убедимся, что решение $x = 0$ системы (1.9) устойчиво. Предположим противное. Тогда, по определению, найдутся числа $\varepsilon_0 > 0$ и $n_0 \geqslant 0$ и последовательности
$\eta_j \to +\infty$, $x_j^0 \to 0$, такие, что

$$|x(\eta_j, n_0, x_j^0)| = \varepsilon_0, \quad j = 1, 2, \ldots \tag{1.24}$$

Из непрерывности траекторий системы (1.9) и условия (1.24) следует, что для любых $\varepsilon_1 > 0$, $\varepsilon_1 < \varepsilon_0$, найдётся последовательность $n_j \to +\infty$, для которой выполняются соотношения

$$
\begin{gathered}
|x(n_j, n_0, x_j^0)| = \varepsilon_1, \\
\varepsilon_1 < |x(n, n_0, x_j^0)| < \varepsilon_0 \;\; \forall\, n \in (n_j, \eta_j)
\end{gathered}
\tag{1.25}
$$

Обозначим $x_j = x(n_j, n_0, x_j^0)$ и рассмотрим решение $x(n+n_j, n_j, x_j)$, $n\geqslant 0$, системы (1.9). Не умоляя общности можно считать, что последовательность $n_j \to +\infty$ обеспечивает сходимость $x_j \to x_0^*$ при $n \to +\infty$и, следовательно, определяет предельную совокупность (f^*, V^*, W^*, Q^*). Тогда последовательность решений $x(n+n_j, n_j, x_j)$ системы (1.9) сходится к решению $x^*(n, 0, x_0^*)$ предельной системы (1.13) равномерно по $n \in [-\beta; \beta]$, где $\beta \in \mathbb{N}$ – произвольное число.

Условия устойчивости нулевого решения $w = 0$ системы сравнения (1.21) в совокупности с двойным неравенством

$$
0\leqslant \bar{V}(n_j, x_j)\leqslant \sum_{i=1}^{k} w^i(n_j, n_0, w_j^0), \qquad w_j^0 = V(n_0, x_j^0)
$$

обеспечивают справедливость соотношения

$$
\bar{V}^*(0, x_0^*) = 0 \tag{1.26}
$$

Докажем, что $\lim\limits_{j\to\infty}(\eta_j - n_j) = +\infty$. Пусть, это не так, т.е. существует число $\eta = \eta(\varepsilon_1) > 0$, такое, что $\eta_j - n_j\leqslant \eta(\varepsilon_1)$. Тогда существует момент $n_1 \in [0, \eta]$, такой, что

$$
|x^*(n_1, 0, x_0^*)| = \varepsilon_0 \tag{1.27}
$$

но по условию 4 теоремы выбирая $\varepsilon = \dfrac{\varepsilon_0}{2} > 0$, можно отыскать число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, такое, что $\forall n\geqslant 0$ будет выполнено неравенство $|x^*(n, 0, x_0)| < \varepsilon$. Положив $\varepsilon_1 = \delta$, придем к неравенству $|x^*(n_1, 0, x_0^*)| < \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, которое противоречит условию (1.27). Откуда следует, что $\eta_j - n_j \to +\infty$ при $j \to +\infty$. Согласно условию 4 теоремы, найдётся число $\Delta_1 > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $N = N(\varepsilon)$, такие, что $\forall n\geqslant N$ и $\forall x_0$, $\|x_0\| < \Delta_1$ справедливо неравенство

$$
|x^*(n, 0, x_0)| < \varepsilon \tag{1.28}
$$

Положим $\varepsilon_1 = \dfrac{3}{2\Delta_1}$ и $\varepsilon = \varepsilon_1$. Тогда неравенство $|x^*(n, 0, x_0^*)|\geqslant \varepsilon_1$ будет справедливо, какое бы $n\geqslant 0$ не выбрали. Однако, данное неравенство противоречит неравенству (1.28). Таким образом, устойчивость нулевого решения $x = 0$ системы (1.9) доказана. □

Аналогично можно провести доказательство равномерной устойчивости решения $x = 0$ системы (1.9). Предположим, что решение $x = 0$ системы (1.9) не является равномерно устойчивым. Тогда существуют числа $\varepsilon_0 > 0$ и $n_0 \geqslant 0$ и последовательности $\eta_j \to +\infty$, $n_0^j \in \mathbb{Z}^+$ и $x_j^0 \to 0$, такие, что

$$|x(\eta_j, n_0^j, x_j^0)| = \varepsilon_0$$

При сделанных предположениях условия (1.25) запишутся в виде

$$|x(n_j, n_0^j, x_j^0)| = \varepsilon_1,$$
$$\varepsilon_1 < |x(n, n_0^j, x_j^0)| < \varepsilon_0 \ \forall\, n \in (n_j, \eta_j)$$

Обозначим $x_j = x(n_j, n_0^j, x_j^0)$ и, как и прежде, рассматривая решение $x(n + n_j, n_j, x_j)$, $n \geqslant 0$, системы (1.9), повторим предыдущие рассуждения. Необходимое нам равенство (1.26) вытекает из условия равномерной устойчивости нулевого решения $w = 0$ системы сравнения (1.21), неравенств

$$0 \leqslant \bar{V}(n_j, x_j) \leqslant \sum_{i=1}^{k} w^i(n_j, n_0^j, w_j^0), \qquad w_j^0 = V(n_0^j, x_j^0)$$

и из условия предкомпактности. Дальнейшие рассуждения аналогичны использованным нами в доказательстве устойчивости решения.

Теорема (1.12) приводит непосредственно к следующему заключению.

Теорема 1.13. *Предположим, что выполнены условия 1–4 теоремы* (1.12), *а так же выполнено условие*

6. *множество* $\{V^* = 0\} \bigcap \{Q^*(n, x, w^*(n)) = 0\}$ *не содержит решений системы* (1.13), *кроме* $x = 0$.

Тогда решение $x = 0$ *системы* (1.9) *асимптотически устойчиво (равномерно асимптотически устойчиво).*

Доказательство. Устойчивость (равномерная устойчивость) нулевого решения $x = 0$ системы (1.9) присутствует на основании выполнения условий теоремы (1.12). Доказательство притяжения (равномерного притяжения) решений системы (1.9) к нулю проводится по схеме, использумой в доказательстве теоремы (1.10). □

Результатом теоремы (1.13) является более общая формулировка требований асимптотической устойчивости на основе знакопостоянной функции Ляпунова [24,60].

1.3 Исследование устойчивости в эпидемических моделях

Рассмотрим две различные популяции, где инфицированные члены одной популяции могут заражать здоровых членов другой популяции. Простая дискретная модель течения болезни с учетом нестационарности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{12}(n)x_2(n)(1 - x_1(n)) + a_{11}(n)x_1(n) \\ x_2(n+1) = a_{21}(n)x_1(n)(1 - x_2(n)) + a_{22}(n)x_2(n) \end{cases} \tag{1.29}$$

где $n \in \mathbb{Z}^+$, x_1 и x_2 - относительные инфецированные члены популяции, $0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1$, $a_{jk}, j, k = 1, 2$ - коэффициенты, характеризующие процесс заражения для которых могут быть приняты следующие условия $0 < \varepsilon \leq a_{jk}(n) \leq 1 - \varepsilon$

Множество $\Gamma = \{0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$ для системы (1.29) является инвариантным для любых значений $x(n_0) = x_0, (n_0, x_0) \in \mathbb{Z}^+ \times \Gamma$, соответствующих решений $x(n, n_0, x_0) \in \Gamma$ для всех $n \geq n_0$.

Уравнения (1.29) предкомпактны (лемма 1.1), соответствующие предельные уравнения имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a^*_{12}(n)x_2(n)(1 - x_1(n)) + a^*_{11}(n)x_1(n) \\ x_2(n+1) = a^*_{21}(n)x_1(n)(1 - x_2(n)) + a^*_{22}(n)x_2(n) \end{cases} \tag{1.30}$$

В качестве векторной функции Ляпунова можно взять функцию

$$V = (V_1, V_2)^T, V_1 = x_1, V_2 = x_2$$

здесь $(\cdot)^T-$операция транспонирования.

Уравнения для V_1 и V_2 совпадают с (1.29) и (1.30), а система сравнения имеет вид

$$\begin{aligned} w_1(n+1) = a_{11}(n)w_1 + a_{12}(n)w_2 - Q_1 \\ w_2(n+1) = a_{21}(n)w_1 + a_{22}(n)w_2 - Q_2 \end{aligned} \tag{1.31}$$

При этом, в принятых обозначениях, функции

$$Q_1 = a_{12}(n)x_1x_2,\ Q_2 = a_{22}(n)x_1x_2,$$

откуда предельные функции Q^*_1 и Q^*_2 соответственно задаются равенствами

$$\begin{gathered} Q^*_1 = a^*_{12}(n)x_1(n)x_2(n), Q^*_2 = a^*_{22}(n)x_1(n)x_2(n) \\ a^*_{jk}(n) = \lim_{m\to\infty} a_{jk}(m+n) \end{gathered} \tag{1.32}$$

Положим

$$A(n) = \begin{pmatrix} a_{11}(n) & a_{12}(n) \\ a_{21}(n) & a_{22}(n) \end{pmatrix}$$

Решение $w_1 = w_2 = 0$ системы $w(n+1) = A(n)w(n)$ будет равномерно устойчивым, если для любого $k_0 \in \mathbb{Z}^+$ и $k \geq k_0$

$$\left\| \prod_{j=k_0}^{k} A(j) \right\| \leq M = const \tag{1.33}$$

где $||B|| = max(|b_{jk}|)$.

Множество $\{Q_1^* = Q_2^* = 0\} = \{x_1(n) = 0$ или $x_2(n) = 0\}$ не содержит решений (1.30), кроме $x_1 = x_2 = 0$. По теореме 1.9 условие (1.33) достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости состояния $x_1 = x_2 = 0$ системы (1.29).

Иное достаточное условие асимптотической устойчивости можно вывести на основе функции Ляпунова.

$V(x_1, x_2) = \alpha|x_1| + \beta|x_2| = \alpha x_1 + \beta x_2$, $\alpha > 0, \beta > 0$.

Находим

$$\begin{gathered} V(n+1) = \alpha x_1(n+1) + \beta x_2(n+1) = (\alpha a_{11}(n) + \beta a_{21}(n))x_1(n) + \\ +(\alpha a_{12}(n) + \beta a_{22}(n))x_2(n) - (\alpha a_{12}(n) + \beta a_{21}(n))x_1(n)x_2(n) = \mu(n)V(n) - Q \end{gathered}$$

$Q = (\alpha a_{12}(n) + \beta a_{21}(n))x_1 x_2$,

Пусть

$$\begin{cases} \alpha a_{11}(n) + \beta a_{21}(n) \leq \alpha\mu(n) \\ \alpha a_{12}(n) + \beta a_{22}(n) \leq \beta\mu(n) \end{cases} \tag{1.34}$$

где полагаем, что $\mu(n)$ есть некоторая функция, удовлетворяющая соотношению

$$\prod_{j=n_0}^{n} \mu(j) \leq m_0 = const, \forall\, n > n_0, n_0 \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.35}$$

Находим, что при условиях (1.34) и (1.35) решение $w = 0$ соответствующего уравнения сравнения

$$w(n+1) = \mu(n)w(n)$$

равномерно устойчиво, а множество $Q^* = (\alpha a_{12}^*(n) + \beta a_{21}^*(n))x_1 x_2$ не содержит решений (1.30), кроме $x_1 = x_2 = 0$. И таким образом, условия (1.34) и (1.35) достаточны для глобальной равномерной асимптотической устойчивости $x_1 = x_2 = 0$ системы (1.29)

Представим неравенства (1.34) в виде

$$\begin{cases} a_{11}(n) + \dfrac{\beta}{\alpha} a_{21}(n) \leq \mu(n) \\ \dfrac{\alpha}{\beta} a_{12}(n) + a_{22}(n) \leq \mu(n) \end{cases} \tag{1.36}$$

Обозначив $\dfrac{\beta}{\alpha} = \gamma, \quad \gamma \in (0, \infty)$ и разрешив полученную систему относительно γ, получим, что эти условия выполняются, если функция $\mu(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$\mu(n) \geq a_{11}(n) + \gamma a_{21}(n), \mu(n) \geq a_{22}(n) + \tfrac{1}{\gamma} a_{12}(n)$$

Соответственно условия (1.35) обращаются в условие: существует такое число $\gamma > 0$, при котором

$$\prod_{j=n_0}^{n} \max\{a_{11}(j) + \gamma a_{21}(j), a_{22}(j) + \frac{1}{\gamma} a_{12}(j)\} \leq m_0 = const \quad \forall\, n > n_0, n_0 \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.37}$$

Замечание 1.1. *Для постоянной матрицы* $A(n) = A_0 = const$ *условия* (1.33) *или* (1.37) *обращаются в условия* $\lambda_{max}(A_0) \leq 1$, *здесь* $\lambda_{max}(A_0)$ *-наибольшее собственное значение матрицы* A_0. *Что соответственно совпадает с необходимым и достаточным условием для автономной системы* (1.29) *из [LaSalle], записанного в виде*

$$1 - (a_{11} + a_{22}) + a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \geq 0 \tag{1.38}$$

Если вместо условия (1.33) матрица $A(n)$ удовлетворяет условию вида:

$$\left\| \prod_{j=km}^{(k+1)m} A(j) \right\| \geq 1 + \varepsilon,$$

для некоторых $m \in \mathbb{Z}^+$ и $\varepsilon > 0$ и $\forall k \in \mathbb{Z}^+$, тогда несложно найти, что состояние $x_1 = x_2 = 0$ системы (1.29) неустойчиво.

При постоянных $a_{jk} = const, j, k = 1, 2$ и нарушении условий (1.38) система (1.29) имеет ненулевое стационарное решение

$$x_1 = x_1^0 = 1 - \frac{(a_{21} - a_{22} + 1)(1 - a_{12})}{(a_{12} - a_{11} + 1)a_{21}},$$
$$x_2 = x_2^0 = 1 - \frac{(a_{11} - a_{12} + 1)(1 - a_{22})}{(a_{21} - a_{22} + 1)a_{11}}$$

В общем случае системы (1.29) это решение существует, если коэффициенты $a_{jk}(n)$ удовлетворяют соотношениям

$$1 - \frac{(a_{21}(n) - a_{22}(n) + 1)(1 - a_{12}(n))}{(a_{11}(n) - a_{12}(n) + 1)a_{21}(n)} = b_{11}^0 = const < 1,$$

$$1 - \frac{(a_{11}(n) - a_{12}(n) + 1)(1 - a_{22}(n))}{(a_{21}(n) - a_{22}(n) + 1)a_{11}(n)} = b_{22}^0 = const < 1$$

Исследуем вопрос об устойчивости как этого возможного стационарного состояния, так и любого другого решения системы (1.29)

$$x_1 = x_{10}^*(n), \quad x_2 = x_{20}^*(n) \tag{1.39}$$

Вводим возмущения

$$\tilde{x_1}(n) = x_1 - x_{10}^*(n), \quad \tilde{x_2}(n) = x_2 - x_{20}^*(n)$$

Уравнения возмущенного движения будут иметь следующий вид

$$\begin{array}{l} \tilde{x}_1(n+1) = a_{12}(n)(1 - x_{10}^*(n))\tilde{x}_2(n) + \\ +(a_{11}(n) - a_{12}(n)x_{20}^*(n))\tilde{x}_1(n) - a_{12}(n)\tilde{x}_2(n)\tilde{x}_1(n) \\ \tilde{x}_2(n+1) = a_{21}(n)(1 - x_{20}^*(n))\tilde{x}_1(n) + \\ +(a_{22}(n) - a_{21}(n)x_{10}^*(n))\tilde{x}_2(n) - a_{21}(n)\tilde{x}_1(n)\tilde{x}_2(n) \end{array} \tag{1.40}$$

Уравнения линейного приближения соотвественно будут

$$\tilde{x}(n+1) = A(n)\tilde{x}(n) \tag{1.41}$$

Матрица $\tilde{\mathrm{A}}$ системы (1.40) имеет вид:

$$\tilde{\mathrm{A}} = \begin{pmatrix} a_{11} - a_{12}x_{20}^* & a_{12}(1 - x_{10}^*) \\ a_{21}(1 - x_{20}^*) & a_{22} - a_{21}x_{10}^* \end{pmatrix} \tag{1.42}$$

Асимптотическая устойчивость нулевого решения системы (1.40) может быть определена в соответствии со следующей теоремой

Теорема 1.14. *[127] Рассмотрим систему $x(n+1) = A(n)x(n) + f(n, x(n))$, где $f(n, 0) \equiv 0, ||f(n, x)|| \le \gamma ||x||$. Если нулевое решение линейной системы первого приближения $x(n+1) = A(n)x(n)$ равномерно асимптотически устойчиво (а значит, экспоненциально устойчиво) и если γ достаточно мало, то нулевое решение нелинейной системы также экспоненциально устойчиво.*

Непосредственными вычислениями находим условия равномерной асимптотической устойчивости системы (1.41): для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $N = N(\varepsilon) > 0$, такое, что для любых $n_0 \in \mathbb{Z}^+$ и любых $n \ge N$

$$\left\| \left| \prod_{j=n_0}^{n_0+N} \tilde{A}(j) \right| \right\| \le \varepsilon \tag{1.43}$$

Согласно теореме (1.14) это условие достаточно и для равномерной асимптотической устойчивости решения $\tilde{x}_1 = \tilde{x}_2 = 0$ системы (1.40).

Рассмотрим задачу об исследовании устойчивости решения (1.40) на основе функции Ляпунова вида :

$$\tilde{V}(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2) = \alpha \left| \tilde{x}_1 \right| + \beta \left| \tilde{x}_2 \right|, \quad \alpha, \beta > 0$$

$\tilde{V}(n+1,\tilde{x}_1,\tilde{x}_2) \le (\alpha\,|a_{11}-a_{12}x^*_{20}| + \beta a_{21}(1-x^*_{20}))\,|\tilde{x}_1(n)| + (\alpha a_{12}(1-x^*_{10}) + \beta\,|a_{22}-a_{21}x^*_{10}|)\,|\tilde{x}_2(n)| - (\alpha a_{12}+\beta a_{21})\,|\tilde{x}_1(n)|\,|\tilde{x}_2(n)| \le \mu_1(n)\tilde{V}(n)+\mu_2(n)\tilde{V}^2(n)$ если

$$\begin{aligned} &\alpha\,|a_{11}-a_{12}x^*_{20}| + \beta a_{21}(1-x^*_{20}) \le \alpha\mu_1(n) \\ &\alpha a_{12}(1-x^*_{10}) + \beta\,|a_{22}-a_{21}x^*_{10}| \le \beta\mu_1(n) \\ &4\frac{\alpha a_{12}+\beta a_{21}}{\alpha\beta} \le \mu_2(n) \end{aligned} \tag{1.44}$$

Соответственно, имеем следующее уравнение сравнения

$$w(n+1) = \mu_1(n)w(n) + \mu_2(n)w^2(n) \tag{1.45}$$

Глобальная равномерная асимптотическая устойчивость нулевого рещения этого уравнения достаточна для глобальной равномерной асимтотической устойчивости решения (1.40).

Решение $w = 0$ будет локально равномерно асимптотически устойчиво, если для $\mu_1(n)$ имеет место соотношение

$$\prod_{j=k_0}^{k_0+k} \mu_1(j) \le \varepsilon, \forall\, k \ge k_0 + N = N(\varepsilon) > 0, k_0 \in \mathbb{Z}^+ \tag{1.46}$$

Таким образом, согласно теореме (1.13) первые два неравенства (1.44) и соотношение (1.46) достаточны для равномерной асимптотической устойчивости решения $\tilde{x} = 0$ системы (1.40).

Перепишем указанные условия из (1.44) в виде

$$|a_{11}-a_{12}x^*_{20}| + \frac{\beta}{\alpha}a_{21} - \frac{\beta}{\alpha}a_{21}x^*_{20} \le \mu_1(n)$$

$$|a_{22}-a_{21}x^*_{10}| + \frac{\alpha}{\beta}a_{12} - \frac{\alpha}{\beta}a_{12}x^*_{10} \le \mu_1(n)$$

Полагая $\dfrac{\beta}{\alpha} = \gamma$, находим, что эти условия будут выполенены, если функция $\mu_1(n)$ удовлетворяет соотношениям

$$\begin{aligned} &\mu_1(n) \ge \mu_1^*(n) \equiv |a_{11}-a_{12}x^*_{20}| + \gamma a_{21}(1-x^*_{20}) \\ &\mu_1(n) \ge \mu_1^{**}(n) \equiv |a_{22}-a_{21}x^*_{10}| + \frac{1}{\gamma}a_{12}(1-x^*_{10}) \end{aligned} \tag{1.47}$$

Учитывая требования (1.46), получаем, что решение (1.40) будет локально равномерно ассимптотически устойчиво, если найдется число $\gamma > 0$, такое что

$$\prod_{j=k_0}^{n} \max\{\mu_1^*(j), \mu_1^{**}(j)\} \le \varepsilon \quad \forall\, k > k_0 + N, N = N(\varepsilon), k_0 \in \mathbb{Z}^+$$

При постоянных значениях a_{jk}, полагая $\mu = 1$, отсюда имеем условия асимптотической устойчивости стационарного режима, совпадающие с соответствуищим результатом из [LaSalle]

Рассмотрим дискретную динамическую модель третьего порядка, описывающую течение болезни в некоторой биологической системе. Даны три различные популяции, где инфицированные члены первой и второй популяций могут заражать друг друга, а инфицированные члены третьей популяции могут заражать членов всех трех популяций. Будем предполагать, что выздоровление возможно, но иммунитет отсутствует и популяции постоянны. Пусть x_i- инфицированная часть популяции $P_i, i = 1, 2, 3$. Тогда $(1 - x_i)-$ здоровая часть, которая воспринимает инфекцию.

При сделанных предположениях нелинейная дискретная модель течения болезни с учетом нестационарности имеет следующий вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a_{12}(n)x_2(n) + a_{13}(n)x_3(n))(1 - x_1(n)) + a_{11}(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a_{21}(n)x_1(n) + a_{23}(n)x_3(n))(1 - x_2(n)) + a_{22}(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a_{34}(n)x_3(n) + a_{31}(n)x_1(n) + a_{32}(n)x_2(n))(1 - x_3(n)) + \\ \qquad\qquad + a_{33}(n)x_3(n), \end{cases} \tag{1.48}$$

где $\varepsilon \le a_{ij} \le 1 - \varepsilon, i = 1, 2, 3, j = 1, 2, 3, 4$. Введем также дополнительные условия, обеспечивающие корректность поставленной задачи, а именно $x_i(n) \in \Gamma = \{x : 0 \le x_i \le 1, i = 1, 2, 3\}, \forall n \ge n_0, x(n_0) \in \Gamma$

$$\begin{cases} a_{12}(n) + a_{13}(n) \le 1, \\ a_{21}(n) + a_{23}(n) \le 1, \\ a_{31}(n) + a_{32}(n) + a_{34}(n) \le 1, \end{cases} \tag{1.49}$$

Уравнения, предельные к (1.48), имеют аналогичный вид:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = (a^*_{12}(n)x_2(n) + a^*_{13}(n)x_3(n))(1 - x_1(n)) + a^*_{11}(n)x_1(n), \\ x_2(n+1) = (a^*_{21}(n)x_1(n) + a^*_{23}(n)x_3(n))(1 - x_2(n)) + a^*_{22}(n)x_2(n), \\ x_3(n+1) = (a^*_{34}(n)x_3(n) + a^*_{31}(n)x_1(n) + a^*_{32}(n)x_2(n))(1 - x_3(n)) + \\ \qquad\qquad + a^*_{33}(n)x_3(n), \end{cases} \tag{1.50}$$

где функции $a^*_{ij}(n)$являются предельными для a_{ij} соответственно для некоторой последовательности $n_k \to +\infty$

$$a^*_{ij}(n) = \lim_{n_k \to +\infty} a_{ij}(n + n_k)$$

Введем вектор-функцию $V = (V_1 = x_1, V_2 = x_2, V_3 = x_3)$. Уравнения для V_1 и V_2 совпадают с (1.48) и (1.50), а система сравнения имеет вид

$$w(n+1) = A(n)w(n) - Q,$$

где в принятых обозначениях

$$\begin{aligned}
&A(n) = \|a_{jk}(n)\| \\
&Q_1 = (a_{12}(n)x_2(n) + a_{13}(n)x_3(n))x_1(n) \\
&Q_2 = (a_{21}(n)x_1(n) + a_{23}(n)x_3(n))x_2(n) \\
&Q_3 = (a_{31}(n)x_1(n) + a_{32}(n)x_2(n) + a_{34}(n)x_3(n))x_3(n)
\end{aligned}$$

Функции Q^*, предельные к Q, являются аналогичными. Решение $w_1 = w_2 = w_3 = 0$ системы $w(n+1) = A(n)w(n)$ равномерно устойчиво, если выполнено условие

$$\left\| \prod_{j=k_0}^{k} A(j) \right\| \leq M = const, \forall\, k_0 \in \mathbb{Z}^+, k \geq k_0 \tag{1.51}$$

Множество $Q^* = 0$ не содержит решений (1.50), кроме $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. В соответствии с теоремой (1.14) условия (1.51) достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости положения $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (1.48).

Введем функцию Ляпунова $V = V(x_1, x_2, x_3) = fx_1 + gx_2 + hx_3$, где $f > 0, g > 0, h > 0$.

Аналогично случаю системы (1.29) условия

$$\begin{cases} fa_{11}(n) + ga_{21}(n) + ha_{31}(n) \leq f\mu(n), \\ fa_{12}(n) + ga_{22}(n) + ha_{32}(n) \leq g\mu(n), \\ fa_{13}(n) + ga_{23}(n) + ha_{33}(n) + ha_{34}(n) \leq h\mu(n), \end{cases} \tag{1.52}$$

где функция $\mu(n)$ удовлетворяет соотношению (1.35), являются достаточными для равномерной устойчивости состояния $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

При этом, единственным квазиинвариантным относительно (1.50) подмножеством множества $\{Q_1^* = 0, Q_3^* = 0, Q_3^* = 0\}$ оказывается точка $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Поэтому существование постоянных f, g, h и функции $\mu(n)$, удовлетворяющих условиям (1.52) и (1.35), достаточно для глобальной равномерной асимптотической устойчивости состояния $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ системы (1.48).

Проведем анализ (1.52), введя параметры $u = \dfrac{f}{g} > 0$ и $v = \dfrac{h}{g} > 0$. Система неравенств (1.52) преобразуется к виду

$$
\begin{cases}
\mu(n) > a_{11}(n), \\
\mu(n) > a_{22}(n), \\
\mu(n) > a_{33}(n) + a_{34}(n), \\
v \le \dfrac{\mu(n) - a_{11}(n)}{a_{31}(n)} u - \dfrac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)}, \\
v \le \dfrac{\mu(n) - a_{22}(n)}{a_{32}(n)} - \dfrac{a_{12}(n)}{a_{32}(n)} u, \\
v \le -\dfrac{a_{13}(n)}{a_{33}(n) + a_{34}(n) - \mu(n)} u - \dfrac{a_{23}(n)}{a_{33}(n) + a_{34}(n) - \mu(n)},
\end{cases} \tag{1.53}
$$

На плоскости (u, v) последние три неравенства определяют область, изображенную на рис. 1.1

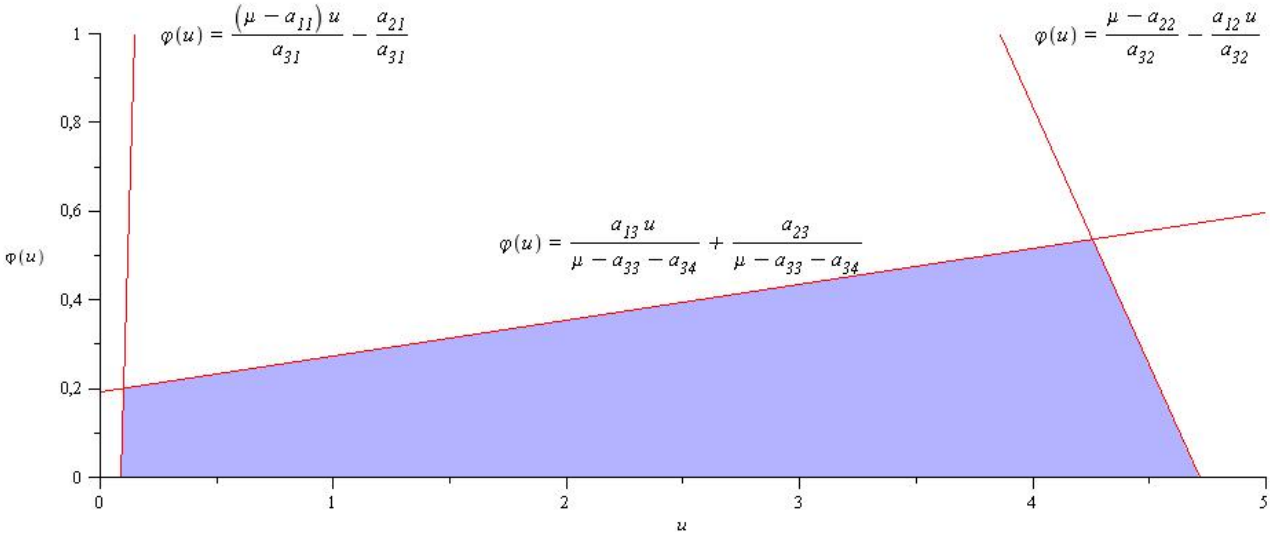

Рис. 1.1: Графическая интерпритация условий (1.53)

Укажем явно точки перечения полуплоскостей.

1. Минимальное интересующее нас значение u на полуплоскости, заданной четвертым соотношением из системы (1.53), может быть найдено из равенства

$$
\frac{\mu(n) - a_{11}(n)}{a_{31}(n)} u = \frac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)},
$$

2. Полуплоскости, заданные четвертым и шестым соотношениями из системы (1.53), имеют точку пересечения их границ при

$$
u_1^*(n) = \frac{a_{23}a_{31} + a_{21}(\mu - a_{34} - a_{33})}{(\mu - a_{34} - a_{33})(\mu - a_{11}) - a_{13}a_{31}}
$$

если выполнено условие

$$(\mu - a_{11})(\mu - a_{34} - a_{33}) > a_{13}a_{31} \tag{1.54}$$

3. Полуплоскости, заданные пятым и шестым соотношениями из системы (1.53), имеют точку пересечения их границ

$$u_2^*(n) = \frac{\mu^2 - (a_{34} + a_{33} + a_{22})\mu + a_{22}a_{34} - a_{23}a_{32} + a_{22}a_{33}}{a_{13}a_{32} + a_{12}(\mu - a_{34} - a_{32})} \tag{1.55}$$

4. Максимальное интересующее нас значение u на полуплоскости, заданной пятым соотношением из системы (1.53), может быть найдено из равенства

$$\frac{\mu(n) - a_{22}(n)}{a_{32}(n)} = \frac{a_{12}(n)}{a_{32}(n)}u,$$

Интервал определения области будет содержать точку (α^*, β^*), $\alpha^* > 0, \beta^* > 0$, независимую от n при условиях

$$0 < \gamma^* \leq \frac{a_{21}(n)}{\mu(n) - a_{11}(n)} \leq \alpha^* \leq \frac{\mu(n) - a_{22}(n)}{a_{12}(n)}$$

$$\frac{(\mu(n) - a_{11}(n))\alpha^*}{a_{31}(n)} - \frac{a_{21}(n)}{a_{31}(n)} \geq \beta^*$$

$$\frac{a_{13}(n)\alpha^* + a_{23}(n)}{\mu(n) - a_{33}(n) - a_{34}(n)} \geq \beta^*$$

$$\frac{\mu(n) - a_{22}(n) - a_{12}(n)\alpha^*}{a_{32}(n)} \geq \beta^*$$

выполняемых для всех $n \in \mathbb{Z}^+$.

Таким образом, для функции $\mu(n)$, кроме (1.46) имеем следующую совокупность оценок

$$\mu(n) \geq a_{22}(n) + \alpha^* a_{12}(n)$$

$$\mu(n) \geq a_{11}(n) + \frac{1}{\alpha^*}a_{21}(n)$$

$$\mu(n) \geq a_{11}(n) + \frac{1}{\alpha^*}(a_{21}(n) + \beta^* a_{31}(n))$$

$$\mu(n) \geq a_{22}(n) + a_{12}(n)\alpha^* + \beta^* a_{32}(n)$$

$$\mu(n) \leq a_{11}(n) + \frac{\gamma^*}{a_{21}(n)}$$

$$\mu(n) \leq a_{33}(n) + a_{34}(n) + \frac{1}{\beta^*}(a_{13}(n)\alpha^* + a_{23}(n))$$

Совместимость этих оценок выражается следующим образом:

Пусть существуют постоянные значения $\alpha^* > 0, \beta^* > 0, \gamma^* > 0$ такие, что для функции $\mu = \mu^*(n)$, определяемой равенство

$$\mu^*(n) = \max\left\{a_{11}(n) + \frac{1}{\alpha^*}(a_{21}(n) + \beta^* a_{31}(n)), a_{22}(n) + a_{12}(n)\alpha^* + \beta^* a_{32}(n)\right\}$$

одновременно с условием (1.35) выполняется соотношение

$$\mu^*(n) \leq \min\left\{a_{11}(n) + \frac{\gamma^*}{a_{21}(n)}, a_{33}(n) + a_{34}(n) + \frac{1}{\beta^*}(a_{13}(n)\alpha^* + a_{23}(n))\right\}$$

Тогда состояние $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ процесса (1.48) глобально равномерно асимптотически устойчиво.

Глава 2

•

2.1 Стабилизация дискретных систем на основе функций Ляпунова

Рассмотрим дискретную систему управления, описываемую уравнениями

$$x(n+1) = X(n, x(n), u), \quad X(n, 0, 0) \equiv 0, \tag{2.1}$$

где x — m-мерный вектор контролируемых переменных, $x \in \mathbb{R}^m$, $\mathbb{R}^m$ — m-мерное векторное пространство с нормой $\|x\| = (x_1^2 + \ldots + x_m^2)^{1/2}$ (или $\|x\| = max(|x_1|, \ldots, |x_m|)$), u — p-мерный вектор управления, $u \in \mathbb{R}^p$, $\mathbb{R}^p$ — соответствующее пространство с нормой $\|u\| = (u_1^2 + \ldots + u_p^2)^{1/2}$ (или $\|u\| = max(|u_1|, \ldots, |u_p|)$), $n \in \mathbb{Z}^+$, X — вектор-функция, $X : \mathbb{Z}^+ \times G_x \times G_u \to \mathbb{R}^m$, $G_x = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| < H_1, 0 < H_1 \leq +\infty\}$, $G_u = \{u \in \mathbb{R}^p : \|u\| < H_2, 0 < H_2 \leq +\infty\}$ непрерывная по (x, u) для каждого $n \in \mathbb{Z}^+$.

При $u = 0$ система (2.1) имеет положение равновесия $x = 0$.

Пусть U есть класс управлений $u = u(n, x)$, $u : \mathbb{Z}^+ \times G_x \to G_u$, $u(n, 0) = 0$, непрерывных по x для каждого $n \in \mathbb{Z}^+$.

Определение 2.1. *Задача о стабилизации состоит в нахождении управления $u \in U$, при котором положение равновесия $x = 0$ системы (2.1) было бы асимптотически устойчивым.*

С точки зрения управляемости более удобным является свойство равномерной асимптотической устойчивости, так как при этом достигается устойчивость при постоянно действующих возмущениях. Поэтому в определении (2.1) будем полагать наличие указанного свойства в некоторой области притяжения $\Gamma = \{\|x\| \leq \Delta > 0\}$, где Δ не зависит от выбора $n_0 \in \mathbb{Z}^+$.

По отношению к поставленной задаче могут быть использованы теоремы об асимптотической устойчивости для системы вида (1.9), как это сделано в монографиях []. Представим соответствующие формулировки результатов о стабилизации состояния $x = 0$ системы (2.1) на основе применения теорем из главы 1.

При использовании теорем с предельными уравнениями будем полагать, что функция $X(n, x, u)$ ограничена и непрерывна по (x, u) на каждом компактном множестве $K \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p$ равномерно по $n \in \mathbb{Z}^+$, и аналогичные свойства по x имеет класс U управлений $u = u(n, x)$. В дальнейшем, такие ограничения будем называть условиями предкомпактности типа (1.11) и (1.12).

Пусть $u \in U$, $u = u(n, x)$ есть некоторое управление, $x = x[n] = x(n, n_0, x_0)$ — решение системы (2.1) при $u = u(n, x)$, $u = u[n] = u(n, \ x(n, n_0, x_0)) = u(n, x[n])$ — управление, порождающее решение $x =$

$x[n]$,

$$x[n+1] \equiv X(n, x[n], u[n]) \tag{2.2}$$

Теорема 2.1. *Предположим, что существуют вектор-функция Ляпунова $V = V(n, x)$ и управление $u \in U$, такие, что:*

1. *функция $\bar{V}$ является определённо-положительной;*
2. *справедливо равенство (1.24);*
3. *нулевое решение $w = 0$ системы сравнения (1.25) равномерно устойчиво;*
4. *на каждом ограниченном решении системы сравнения (1.24) выполнено условие (1.27);*
5. *для любой предельной совокупности (X^*, V^*, W^*, R^*) и каждого ограниченного решения $w = w^*(n) \neq 0$ предельной системы сравнения (1.26) множество*

$$\{V^*(n, x) = w^*(n)\} \bigcap \{R^*(n, x, w^*(n)) = 0\}$$

   не содержит решений предельной системы (1.5).

Тогда управление $u = u(n, x)$ решает задачу о стабилизации состояния $x = 0$ системы (2.1).

В исследовании задач о стабилизации управляемых процессов важное место отводится методике построения функции Ляпунова, в частности, исходя из известной такой функции для «укороченной системы».

Рассмотрим управляемую систему , описываемую уравнениями

$$x(n+1) = f(n, x(n), u(n)), \tag{2.3}$$

$$y(n) = h(n, x(n), u(n)), \tag{2.4}$$

где $x \in \mathbb{R}^m$, $u \in \mathbb{R}^p$, $y \in \mathbb{R}^p$ соответственно векторы состояния, входа и выхода системы; $f : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^m$, $h : \mathbb{Z}^+ \times \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$—функции, непрерывные по (x, u), удовлетворяющие также условиям предкомпактности (1.11) и (1.12) по этим переменным.

Будем полагать, что $f(n, 0, 0) \equiv 0, h(n, 0, 0) \equiv 0$, так, что при $u = 0$ система (2.3)-(2.4) имеет состояние равновесия $x = 0$, $y = 0$.

Для системы (2.3)-(2.4) можно определить предельную систему

$$x(n+1) = f^*(n, x(n), u(n)), \tag{2.5}$$

$$y(n) = h^*(n, x(n), u(n)), \tag{2.6}$$

где (f^*, h^*) - какая-либо предельная пара.

Определение 2.2. *Система* (2.3)-(2.4) *называется строго наблюдаемой в нулевом состоянии, если для любой предельной пары* (f^*, h^*) *множество* $\{h^*(n, x, 0) = 0\}$ *не содержит решений предельной системы* (2.5), *кроме* $x = 0$.

При исследовании задач стабилизации как для непрерывных, так и для дискретных систем, посредством функции Ляпунова, выделяют классы управляемых систем, для которых может быть использован некоторый алгоритм построения функции Ляпунова []. К числу таких систем относятся и так называемые пассивные системы.

Определение 2.3. *Систему* (2.3) *определим как пассивную, если существует некоторая скалярная функция* $V = V(n, x)$, *называемая функцией запаса, такая что*

$$V(n+1, f(n, x, u)) \leq W(n, V(n, x)) + y'u \tag{2.7}$$

где $W(n, w) \geq 0$, $W(n, 0) \equiv 0$, *есть некоторая непрерывная, монотонная по* w *функция, такая что нулевое решение соответствующего уравнения сравнения*

$$w(n+1) = W(n, w(n)) \tag{2.8}$$

равномерно устойчиво.

Теорема 2.2. *Предположим, что для системы* (2.3)-(2.4) *выполнены условия:*

1. *она является пассивной с определенно положительной, допускающей бесконечно малый высший предел функцией запаса* $V(n, x)$;
2. *система строго наблюдаема в нулевом состоянии.*

Тогда управляющее воздействие $u = u(n, y)$, *такое что*
$y'u(n, y) \leq -\alpha(\|y\|)$, *где* $\alpha \in K$, *решает задачу о стабилизации состояния* $x = 0$ *системы* (2.3)-(2.4).

Доказательство. Используем функцию запаса $V(n, x)$ в качестве функции Ляпунова для замкнутой системы

$$\begin{aligned} &x(n+1) = f(n, x, u(n, y)), \\ &y = h(n, x, u(n, y)) \end{aligned}$$

В силу (2.7) имеем

$$\begin{aligned} &V(n+1, x(n+1)) = V(n+1, f(n, x, u(n, y))) \leq \\ &\leq W(n, V(n, x)) + y'u(n, y) \leq W(n, V(n, x)) - \alpha(\|y\|) \end{aligned}$$

Для функции $V(n, x)$ имеем уравнение сравнения (2.8). Множество $\{\alpha(\|y\|) = 0\} = \{y = 0\} = \{h^*(n, x, 0) = 0\}$ в силу строгой наблюдаемости не содержит решений системы (2.5), кроме $x = 0$. В соответствии с теоремой (1.9) имеем требуемый результат. $\square$

Область применения теоремы (2.2) может быть расширена посредством преобразования непассивных систем в пассивные.

Рассмотрим специальный случай системы (2.5)

$$x(n+1) = f(n, x(n)) + B(n, x)u \tag{2.9}$$

Допустим, что существует строго положительно определенная квадратичная по x форма $V(x)$

$$\begin{aligned} &V(x) = x'Cx, \quad c_0 \|x\|^2 \le x'Cx, \\ &c_0 > 0 - const, \quad \|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_m^2 \end{aligned}$$

такая что

$$f'(n, x)Cf(n, x) \le W(n, V(n, x)),$$

где W–функция, указанная в уравнении (2.8).

Положим

$$y = 2B'Cf + B'CBu \tag{2.10}$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} &V(f(n, x) + B(n, x)u) = (f + Bu)'C(f + Bu) = \\ &= f'Cf + 2f'CBu + u'B'CBu = \\ &= f'(n, x)Cf(n, x) + y'u \le W(n, V(n, x)) + y'u \end{aligned}$$

И таким образом, система (2.9) с выходом y, определяемым равенством (2.10), оказывается пассивной. К ней может быть применена теорема (2.2).

Как и для непрерывных систем, обратная связь может быть использована для обеспечения пассивности системы. А именно, если для системы (2.9) существуют замена обратной связи

$$u = u_0(n, x) + u_1(n, x)v$$

и функция выхода $h(n, x)$, такие, что система

$$\begin{aligned} &x(n+1) = f(n, x(n)) + B(n, x(n))u_0(n, x) + B(n, x(n))u_1(n, x)v \\ &y = h(n, x(n)) \end{aligned}$$

удовлетворяет условиям теоремы (2.2), тогда состояние $x = 0$ стабилизируемо управлением вида $v = v(n, y)$.

Класс пассифицируемых систем может быть расширен за счет систем, представляющих собой каскадное соединение двух подсистем, одна из которых является пассивной, а вторая характеризуется тем, что ее начало координат является точкой равновесия соответствующей разомкнутой системы, а именно системы вида

$$z(n+1) = g(n, z(n)) + B_2(n, y(n))y(n) \tag{2.11}$$

$$x(n+1) = f(n, x(n)) + B_1(n, x(n))u \tag{2.12}$$

$$y(n) = h(n, x(n)) + D(n, x)u \tag{2.13}$$

где функции $g, f, h,$ $g(n, 0) \equiv 0,$ $f(n, 0) \equiv 0,$ $h(n, 0) \equiv 0,$ $B_1(n, x),$ $B_2(n, x),$ $D(n, x)$ непрерывны по x и удовлетворяют условиям предкомпактности (1.11) и (1.12).

Эту систему согласно [] можно рассматривать как каскадное соединение ведущей системы (2.12) и (2.13) и ведомой системы (2.11).

Будем полагать, что ведущая система (2.12) - (2.13) пассивна, так что существует функция запаса $V = V_1(n, x)$, такая что

$$V_1(n+1, x(n+1)) \leq \mu(n)V_1(n, x(n)) + y'u \tag{2.14}$$

а для системы $z(n+1) = g(n, z(n))$ имеется положительно определенная квадратичная форма

$$V_2(n, z) = z'Cz$$

такая что

$$V_2(g(n, z)) \leq \mu(n)V_2(n, z)$$

где $\mu(n)$ есть функция, удовлетворяющая условию (1.35).

Используя в качестве функции запаса для всей системы (2.11) - (2.13) функцию $V(n, x, z) = V_1(n, x) + V_2(n, z)$, получаем

$$\begin{aligned}
&V(n+1, x(n+1), z(n+1)) = V_1(n+1, x(n+1)) + V_2(g(n, z)+\\
&+B_2(n, y(n))y(n)) = \mu(n)V_1(n, x(n)) + y'(n)u + V_2(g(n, z(n))+\\
&+2g'(n, z(n))CB_2(n, y)y(n) + y'(n)B_2'(n, y(n))CB_2(n, y(n))y(n) \leq\\
&\leq \mu(V_1 + V_2) + y'(u + 2B_2'Cg + B_2'CB_2y)
\end{aligned}$$

При замене обратной связи вида

$$u = -2B_2'(n, y)Cg(n, y) - B_2'(n, y)CB_2(n, y) + v$$

получаем для функции запаса V всей системы (2.11) - (2.13) искомую оценку вида

$$V(n+1, x(n+1), z(n+1)) \leq \mu(n)V(n, x(n), z(n)) + y'(n)u$$

Проведенные построения развивают результаты, представленные в монографии [Халил] для дискретных систем.

Рассмотрим систему второго порядка со скалярным управлением

$$\begin{cases} x_1(n+1) = \nu(n)(-x_2(n) + x_1^2 u(n)), \\ x_2(n+1) = \nu(n)(x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n)) \end{cases} \tag{2.15}$$

$$u(n) = \frac{x_1}{\sqrt{1+x_1^4}} \tag{2.16}$$

где функция $\nu(n)$ удовлетворяет условиям:

1. Для всякой нерасходящейся последовательности $n_k \to \infty$, $0 < n_{k+1} - n_k \leq N_0 > 0$ выполнено $\varliminf\limits_{k\to\infty} \nu(n_k) = \nu_0 > 0$
2. функция $\mu(n) = \nu^2(n)$ удовлетворяет соотношению (1.35)

Рассматриваемая система интересна тем, что управнение является неполным по одной пременной, оно вырождается при $x_1 = 0$. Система линейного приближения при $\nu(n) = 1$ имеет вид

$$\begin{cases} x_1(n+1) = -x_2(n) \\ x_2(n+1 = x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n) \end{cases}$$

Корни соответствующего характеристического уравнения $\lambda_{1,2} = \dfrac{1}{2}(\sqrt{2} \pm \sqrt{2}i)$ таковы, что $|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1$, так что при $\nu(n) \equiv 1$ имеет место критический случай. Покажем, что управление с неполным измерением (2.16) решает задачу о стабилизации состояния $x_1 = x_2 = 0$ системы (2.15).

Рассмотрим функцию Ляпунова $V(n) = \frac{1}{2}\left(\left(x_1(n) - \frac{1}{\sqrt{2}}x_2(n)\right)^2 + \frac{1}{2}x_2^2(n)\right)$

Находим

$$V(n+1) = \frac{\nu^2(n)}{2}\left(\left(-x_2(n) + \frac{x_1^3(n)}{\sqrt{1+x_1^4(n)}} - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n)\right)\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n)\right)^2\right) = \frac{\nu^2(n)}{2}\left(\left(\frac{x_1^3(n)}{\sqrt{1+x_1^4(n)}} - \frac{x_1(n)}{\sqrt{2}}\right)^2 + \right.$$

$$\left. \frac{1}{2}\left(x_1(n) - \sqrt{2}x_2(n)\right)^2\right) = \frac{\nu^2(n)}{2}\left(\frac{x_1^6(n)}{1+x_1^4(n)} - \frac{\sqrt{2}x_1^4(n)}{\sqrt{1+x_1^4(n)}} + x_1^2(n) - \right.$$

$$\left. -\sqrt{2}x_2(n)x_1(n) + 2x_2^2(n)\right) = \frac{\nu^2(n)}{2} \times$$

$$\times\left(\frac{2x_1^6(n)-\sqrt{2}x_1^4(n)\left(x_2(n)x_1(n)+\sqrt{1+x_1^4(n)}+\sqrt{2}x_2^2(n)\right)}{1+x_1^4(n)}+\right.$$

$$\left.+\frac{2x_2^2(n)+x_1^2(n)-\sqrt{2}x_2(n)x_1(n)}{1+x_1^4(n)}\right)$$

$$V(n+1)-v^2V(n)=-\frac{1}{2}\frac{v^2x_1^4(-x_1^2+\sqrt{2}\sqrt{1+x_1^4})}{1+x_1^4}$$

Численное моделирование системы (2.15) с управлением (2.16) при
$$v(n)=\begin{cases}\dfrac{5}{6}, n=2k+1\\[2ex]\dfrac{6}{5}, n=2k\end{cases}$$
представлено на рис. 2.1 и рис. 2.2.

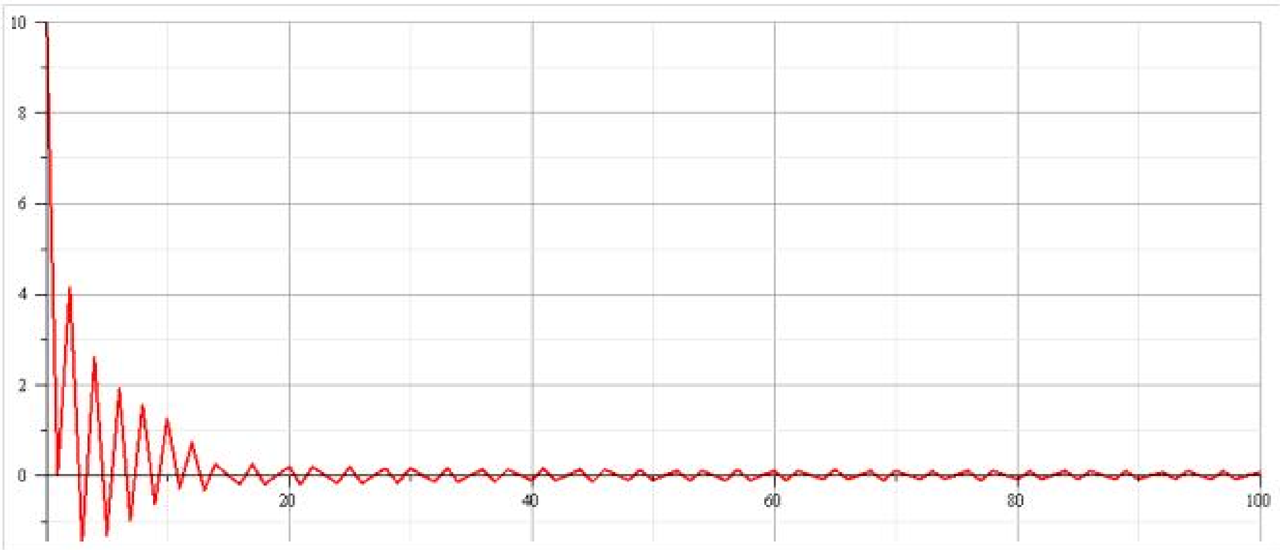

Рис. 2.1: Траектория $x_1(n)$ в примере (2.15) при заданном управлении (2.16)(начальные условия: $x_1 = 10,\quad x_2 = 10$, количество итераций N = 100)

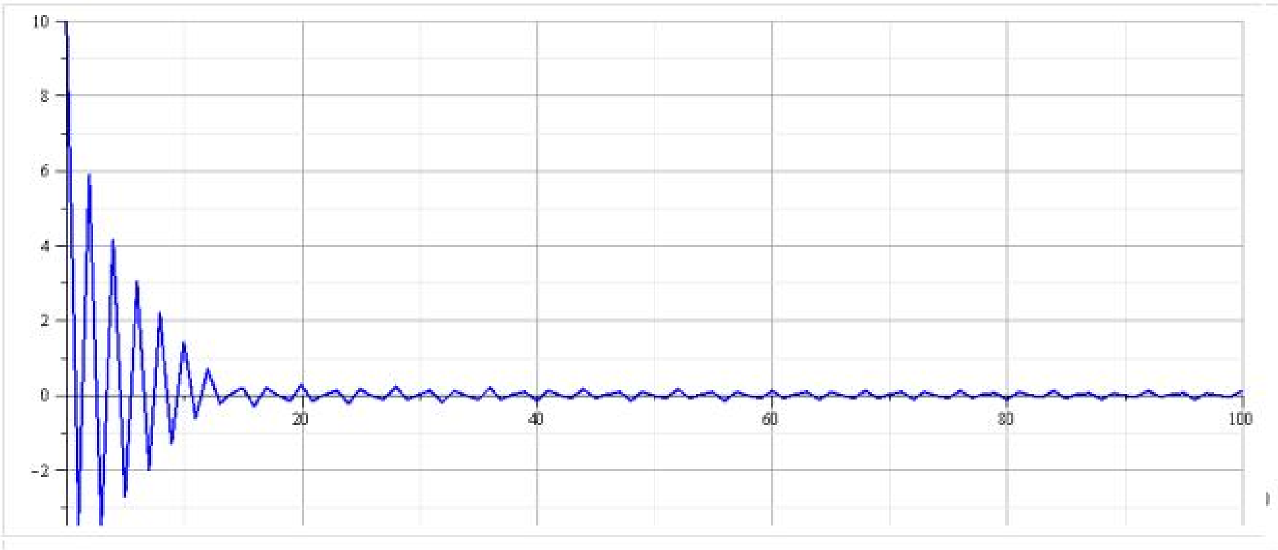

Рис. 2.2: Траектория $x_2(n)$ в примере (2.15) при заданном управлении (2.16)(начальные условия: $x_1 = 10, \quad x_2 = 10$, количество итераций N = 100)

2.2 О стабилизации движения механической системы с одной степенью свободы и с цифровым управлением

Задача о стабилизации программного движения механической системы с одной степенью свободы приводится к уравнениям вида

$$\ddot{x} = d(t, x, \dot{x})\dot{x} + f(t, x, \dot{x})x + u \tag{2.17}$$

где $d(t, x, \dot{x})$ и $f(t, x, \dot{x})$ есть некоторые функции, заданные в области $\mathbb{R}^+ \times G_1 \times G_2$, $G_1 = \{x \in \mathbb{R} : |x| < H_1, 0 < H_1 \leq +\infty\}$, $G_2 = \{\dot{x} \in \mathbb{R} : |\dot{x}| < H_2, 0 < H_2 \leq +\infty\}$, u— управляющее воздействие.

Для исследования этой задачи и построения алгоритма её решения цифровым управлением вначале рассмотрим вспомогательную задачу о построении векторной функции Ляпунова в задаче об устойчивости решения $\dot{x} = x = 0$ уравнения

$$\ddot{x} = -\gamma(t, x, \dot{x})\dot{x} - q(t, x, \dot{x})x \tag{2.18}$$

Будем полагать, что коэффициенты $\gamma(t, x, \dot{x})$ и $q(t, x, \dot{x})$ ограничены при $(t, x, \dot{x}) \in \mathbb{R}^+ \times G_{10} \times G_{20}$ так, что

$$0 < \gamma_0 \leq \gamma(t, x, \dot{x}) \leq \gamma_1, \quad 0 < q_0 \leq q(t, x, \dot{x}) \leq q_1 \tag{2.19}$$

где $G_{10} = \{x \in \mathbb{R} : |x| \leq H_{10} < H_1\}$, $G_{20} = \{\dot{x} \in \mathbb{R} : |\dot{x}| \leq H_{20} < H_2\}$.

Введем вектор-функцию Ляпунова

$$V = (V_1, V_2)', \quad V_1 = |x|, V_2 = |\dot{x} + \mu x|, \quad \mu = const > 0$$

Для проиизводных функций V_1 и V_2 имеем следующие оценки

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_1 = sgn(x)\dot{x} = sgnx(\dot{x} + \mu x - \mu x) \leq V_2 - \mu V_1 \\
&\dot{V}_2 = sgn(\dot{x} + \mu x)(\ddot{x} + \mu\dot{x}) = sgn(\dot{x} + \mu x)((\mu - \gamma)\dot{x} - qx) = \\
&= sgn(\dot{x} + \mu x)((\mu - \gamma)(\dot{x} + \mu x) - (\mu - \gamma)\mu x - qx)) \leq \\
&\leq (\mu - \gamma)V_2 + |\mu(\mu - \gamma) + q|\, V_1
\end{aligned}$$

Если учесть возможность изменения γ и q при всех ограничениях (2.19), тогда для производной $\dot{V}_2$ имеем следующую оценку, независимую от $(t, x, \dot{x})$

$$\begin{aligned}
&\dot{V}_2 \leq -(\gamma_0 - \mu)V_2 + \nu V_1, \quad \mu < \gamma_0 \\
&\nu = max\{(|\mu(\mu - \gamma) + q|), t \in \mathbb{R}^+, (x, \dot{x}) \in G_{10} \times G_{20}\}
\end{aligned}$$

Таким образом, устойчивость положения $\dot{x} = x = 0$ уравнения (2.18) может быть найдена из условий устойчивости стационарной системы

$$\dot{u}_1 = -\mu u_1 + u_2, \quad \dot{u}_2 = \nu u_1 - (\gamma_0 - \mu)u_2 \tag{2.20}$$

Для нее имеем следующее характеристическое уравнение

$$\begin{vmatrix} -\mu-\lambda & 1 \\ \nu & -(\gamma_0-\mu)-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

или $\lambda^2 + \gamma_0\lambda + \mu(\gamma_0 - \mu) - \nu = 0$.

Отсюда получаем, что условия ассимптотической устойчивости $\dot{x} = x = 0$, причем экспоненциальной, сводятся к неравенствам

$$\mu < \gamma_0, \quad \mu(\gamma_0 - \mu) - \nu > 0 \tag{2.21}$$

Последнее неравенство будет выполняться для всевозможных законов изменения $\gamma = \gamma(t, x, \dot{x})$ и $q = q(t, x, \dot{x})$, удовлетворяющих (2.19), если выполнены неравенства

$$-\mu(\gamma_0 - \mu) < \nu < \mu(\gamma_0 - \mu)$$

или

$$-\mu(\gamma_0 - \mu) < \mu(\mu - \gamma_1) + q_0 \leq \mu(\mu - \gamma_0) + q_1 < \mu(\gamma_0 - \mu)$$

Последние соотношения сводятся к системе неравнств

$$\begin{cases} (\gamma_1 - \gamma_0)\mu < q_0 \\ 2\mu^2 - 2\mu\gamma_0 + q_1 < 0 \end{cases}$$

Число $0 < \mu < \gamma_0$, удовлетворяющее этой системе неравенств, существует, если выполнены условия

$$\gamma_0^2 > 2q_1, \quad 2q_0 > (\gamma_1 - \gamma_0)(\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - 2q_1}) \tag{2.22}$$

Эти условия можно рассматривать как условия относительно выбора параметров γ_0 и γ_1 в соотношениях (2.19) при заданных q_0 и q_1.

Перейдем к задаче о стабилизации положения равновесия системы (2.17) при помощи цифрового уравляющего воздействия с обратной связью вида

$$u = -k_1(t)\dot{x}(t - T_n) - k_2(t)x(t - T_n) \tag{2.23}$$

где $T_n = nT$, T—период дискретизации, при измерениях $t = Tn$, значения $\dot{x}(t)$ и $x(t)$ остаются постоянными на отрезке $[nT, (n+1)T)$,

$$\dot{x}(t - T_n) \equiv \dot{x}(T_n),\ x(t - T_n) \equiv x(T_n) \quad T_n \leq t < T_{n+1}$$

Модель (2.17) принимает вид

$$\ddot{x} = d(t, x, \dot{x})\dot{x} + f(t, x, \dot{x})x - k_1(t)\dot{x}(t - T_n) - k_2(t)x(t - T_n) \tag{2.24}$$

где полагается, что коэффициенты усиления k_1 и k_2 непрерывны на каждом отрезке $[T_n, T_{n+1})$.

Модель

$$\begin{gathered}\ddot{x} = -\gamma(t, x, \dot{x})\dot{x} - q(t, x, \dot{x})x \\ \gamma(t, x, \dot{x}) = k_1(t) - d(t, x, \dot{x}), q(t, x, \dot{x}) = k_2(t) - f(t, x, \dot{x})\end{gathered} \tag{2.25}$$

примем за базовую. В этой модели измерения $\dot{x}(t)$ и $x(t)$ являются непрерывными, управляющее воздействие

$$u(t, x(t), \dot{x}(t)) = -k_1(t)\dot{x}(t) - k_2(t)x(t) \tag{2.26}$$

Согласно предыдущему имеем следующие условия асимптотической устойчивости положения $\dot{x} = x = 0$

$$\begin{gathered}0 < \gamma_0 \le k_1(t) - d(t, x, \dot{x}) \le \gamma_1 \\ 0 < q_0 \le k_2(t) - f(t, x, \dot{x}) \le q_1\end{gathered}$$

где постоянные $\gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$ удовлетворяют соотношению (2.22). Отсюда следует, что для базовой модели управляющее воздействие типа (2.26) решает поставленную задачу, если коэффециенты усиления $k_1(t), k_2(t)$ удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered}0 < \gamma_0 + d^*(t) \le k_1(t) \le \gamma_1 + d_*(t) \\ 0 < q_0 + f^*(t) \le k_2(t) \le q_1 + f_*(t) \\ d^*(t) = max(d(t, x, \dot{x}), (x, \dot{x}) \in G_{10} \times G_{20}) \\ d_*(t) = min(d(t, x, \dot{x}), (x, \dot{x}) \in G_{10} \times G_{20}) \\ f^*(t) = max(f(t, x, \dot{x}), (x, \dot{x}) \in G_{10} \times G_{20}) \\ f_*(t) = min(f(t, x, \dot{x}), (x, \dot{x}) \in G_{10} \times G_{20})\end{gathered} \tag{2.27}$$

В представлении (2.24) с точностью до T^2 при $T_n \le t < T_{n+1}$ можно разложить

$$\dot{x}(t - T_n) = \dot{x}(t) - \ddot{x}(t)(t - T_n), \quad x(t - T_n) = x(t) - \dot{x}(t)(t - T_n) \tag{2.28}$$

Тем самым, с точностью до T^2 модель (2.24) принимает вид базовой модели, на каждом отрезке $T_n \le t < T_{n+1}$

$$\begin{aligned}&\ddot{x}(t) = -\gamma^{(1)}[t]\dot{x}(t) - q^{(1)}[t]x[t] \\ &\gamma^{(1)}(T_n, t, x, \dot{x}) = \frac{k_1(t) - d(t, x, \dot{x}) - k_2(t)(t - T_n)}{1 - k_1(t)(t - T_n)}, \\ &q^{(1)}(T_n, t, x, \dot{x}) = \frac{k_2(t) - f(t, x, \dot{x})}{1 - k_1(t)(t - T_n)}\end{aligned} \tag{2.29}$$

Несмотря на то, что полученная модель представляет собой систему с разрывной правой частью, для нее применимы предыдущие рассуждения. И, соответственно, выводимы следующие достаточные условия стабилизируемости

$$0 < \gamma_0 \le \frac{k_1(t) - d(t,x,\dot{x}) - k_2(t)(t - T_n)}{1 - k_1(t)(t - T_n)} \le \gamma_1$$
$$0 < q_0 \le \frac{k_2(t) - f(t,x,\dot{x})}{1 - k_1(t)(t - T_n)} \le q_1$$

где, как ранее для $\gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$, полагается существование соотношений (2.22).

Отсюда для коэффециентов усиления $k_1(t), k_2(t)$ получим следующие условия

$$\begin{gathered} \gamma_0 + d^* + k_1(t)T \le k_1(t) \le (\gamma_1 + d_*(t))/(1+\gamma_1) \\ q_0 + f^*(t) \le k_2(t) \le f_*(t) + (1 + k_1(t)T)q_1 \end{gathered} \tag{2.30}$$

Может быть применен следующий алгоритм построения управления (2.23)

1. Из условий (2.26) находятся допустимые коэффициенты усиления $k_1(t)$ и $k_2(t)$. Эти условия достаточно широкие для выбора $k_1(t)$ и $k_2(t)$. Они позволяют подобрать эти коэффициенты из дополнительных условий, например, с учетом оптимизации энергетических затрат.

2. Из условий (2.30) или их усилением находится возможный период дискретизации T.

Реализация цифрового управлния предполагает дискретизацию уравнений (2.17) с воздействием (2.23).

Для дискретизации сделаем замену

$$y_1 = x \quad y_2 = \dot{x}$$

В новых переменных уравнение (2.17) запишется в виде

$$\begin{aligned} \dot{y_1} &= y_2, \\ \dot{y_2} &= d(t, y_1, y_2)y_2 + f(t, y_1, y_2)y_1 + u \end{aligned} \tag{2.31}$$

Используя соотношения

$$\dot{y_1} = \frac{y_1(T_{n+1}) - y_1(T_n)}{T} = \frac{y_1[n+1] - y_1[n]}{T}$$

$$\dot{y_2} = \frac{y_2(T_{n+1}) - y_2(T_n)}{T} = \frac{y_2[n+1] - y_2[n]}{T}$$

получаем модель вида

$$\begin{cases} y_1[n+1] = y_1[n] + Ty_2[n] \\ y_2[n+1] = y_2[n] - T(\gamma_1[n]y_2[n] + q_1[n]y_1[n]) \end{cases} \tag{2.32}$$

$$\gamma_1[n] = k_1(n) - d[n], \quad q_1[n] = k_2(n) - f[n]$$
$$d[n] = d(T_n, y_1[n], y_1[n]), \quad f[n] = f(T_n, y_1[n], y_1[n])$$

Устойчивость состояния $y_1 = y_2 = 0$ этой системы определим на основе векторной функции Ляпунова

$$V_1 = |y_1|, \quad V_2 = |y_2 + \mu y_1|, \quad \mu > 0$$

Находим, учитывая малость $T > 0$

$$V_1(n+1) = |y_1[n+1]| = |y_1[n] + Ty_2[n]| \leq |1 - \mu T| V_1[n] + TV_2[n]$$

$$\begin{aligned}
&V_2(n+1) = |y_2[n+1] + \mu y_1[n+1]| = \\
&= |y_2[n] + \mu(y_1[n] + Ty_2[n]) - T(\gamma_1[n]y_2[n] + q_1[n]y_1[n])| \leq \\
&\leq \nu_0 TV_1(n) + |1 + \mu T - \gamma_0 T| V_2(n)
\end{aligned}$$

$\nu_0 = max(|\mu(\mu - \gamma_1[n]) + q_1[n]|, n \in \mathbb{Z}^+)$, $\gamma_0 = min(\gamma_1[n], n \in \mathbb{Z}^+)$

Для вектор-функции $(V_1(n), V_2(n))$ получаем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} u_1(n+1) = (1 - \mu T)u_1(n) + Tu_2(n) \\ u_2(n+1) = \nu_0 Tu_1(n) + (1 + \mu T - \gamma_0 T)u_2(n) \end{cases} \tag{2.33}$$

Условия её устойчивости сводятся к исследованию характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} 1 - \mu T - \eta & T \\ \nu_0 & 1 + \mu T - \gamma_0 T - \eta \end{vmatrix}$$

или

$$\eta^2 - (2 + \gamma_0 T)\eta + (1 + \mu(\gamma_0 - \mu)T^2 - v_0 T^2) = 0$$

Асимптотическая устойчивость будет иметь место, если корни этого уравнения удовлетворяют неравенству $|\eta| < 1$. Соответствующее число $\mu > 0$ должно удовлетворять неравенствам вида (2.21). Аналогично предыдущему, оно существует, если имеет место соотношение (2.22), независящее от T.

Таким образом, условие (2.29) асимптотической устойчивости системы (2.29) достаточны и для асимптотической устойчивости системы (2.31). Соответственно, система (2.31) может служить для описания, анализа и дискретного моделирования нулевого состояния системы (2.17) с управляющим воздействием (2.23).

Обоснованность представления (2.17) с (2.23) в виде (2.29) с точностью до T^2 зависит от свойств функций $d(t, x, \dot{x})$, $f(t, x, \dot{x})$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$.

Рассмотрим этот вопрос подробно, полагая $d \equiv 0$, $f \equiv 0$, $k_1(t) = k_1^0(t) = const > 0$, $k_2(t) = k_2^0(t) = const > 0$.

В этом случае, в силу того, что $\ddot{x} = const$ $[T_n \leq t < T)$ имеем

$$\dot{x}(T_n) = \dot{x}(t) - \ddot{x}(t)(t - T_n)$$
$$x(T_n) = x(t) - \dot{x}(t)(t - T_n) - \frac{1}{2}\ddot{x}(t)(t - T_n)^2$$

Соответственно, система (2.17) с управляющим воздействием (2.23), принимающим вид

$$u(t, x, \dot{x}) = -k_1^0 \dot{x}(T_n) - k_2^0 x(T_n) \tag{2.34}$$

может быть стабилизируема, если коэффициенты усиления k_1^0 и k_2^0 согласно (2.30) довлетворяют неравнствам

$$\gamma_0 + k_1^0 T \leq k_1^0 \leq \gamma_1/(1 + \gamma_1)$$
$$q_0 \leq k_2^0 \leq (1 + k_1^0 T) q_1$$

Конкретный подбор коэффициентов k_1^0 и k_2^0 зависит от допустимых значений T_n и выбора чисел $\gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$ второй совокупности соотношений (2.22).

2.3 О стабилизации движения механической системы с одной позиционной координатой

Рассмотрим механическую систему с нестационарными, голономными и идеальными связями, положение которой определяется n обобщенными координатами $q^T = (q_1, q_2, \dots, q_n)$, и соответственно, кинетическая энергия системы представима в виде

$$\begin{gathered} T = T_2 + T_1 + T_0, \\ T_2(t,q,\dot{q}) = \frac{1}{2}\dot{q}^T A(t,q)\dot{q}, \\ T_1(t,q,\dot{q}) = B^T(t,q)\dot{q}, \quad T_0(t,q) = C(t,q) \end{gathered} \tag{2.35}$$

где $A(t,q)$ – матрица размерности $n \times n$ является положительно-определенной, $B(t,q)$ – матрица-столбец размерности $n \times 1$, $C(t,q)$ – скалярная функция. Предполагаем, что входящие в (2.35) функции переменных (t,q) определены, непрерывно-дифференцируемы в области $\mathbb{R}^+ \times \Gamma$, $\Gamma = \{q \in \mathbb{R}^n : \|q\| < H, \ \ 0 < H \leq +\infty\}$, где $\|q\| = \max(|q_1|, |q_2|, ..., |q_n|)$, т.е. являются достаточно гладкими функциями.

Примем, что движение системы под действием управляющих сил U и других обобщенных сил (внешних, сил взаимодействия точек системы, трения и т.д.) $Q = Q(t,q,\dot{q})$ описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U$$

Подставив в уравнения движения представление для кинетической энергии (2.35), приведем их к виду

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T_2}{\partial \dot{q}}\right) - \frac{\partial T_2}{\partial q} = -\frac{\partial T_0}{\partial q} + G^T\dot{q} - \frac{\partial B}{\partial t} + Q + U, \tag{2.36}$$

где матрица G определяется равенством

$$G(t,q) = \left(\frac{\partial B}{\partial q}\right)^T - \frac{\partial B}{\partial q} = -G^T$$

Предположим, что кинетическая энергия T механической системы (2.36) не зависит явно от последних $(n-1)$ координат, соответствующие обобщенные силы отсутствуют $Q_2 \equiv 0$. Тогда первая координата является позиционной, остальные – циклическими. Введем обозначения

$$q = q_1, \quad z = (z_1, z_2, \dots, z_{n-1})^T$$

В этом случае кинетическая энергия (2.35) представима в виде

$$\begin{aligned} T(t,q,\dot q,\dot z) = \tfrac{1}{2}a(t,q)\dot q^2 + A_1(t,q)\dot z\dot q + \tfrac{1}{2}\dot z^T A(t,q)\dot z + \\ + b(t,q)\dot q + \dot z^T B_1(t,q) + T_0(t,q), \end{aligned} \tag{2.37}$$

где $a(t,q)$ и $b(t,q)$ — скалярные функции, матрица $A(t,q)$ размерности $(n-1)\times(n-1)$ является положительно-определенной, $A_1(t,q)$ — матрица-строка размерности $1\times(n-1)$, $B_1(t,q)$ — матрица-столбец размерности $(n-1)\times 1$.

Допустим, что сила Q_1 такова, что можно выделить потенциальную силу с энергией $\Pi = \Pi(t,q)$, $Q^1 = Q^1_0 - \dfrac{\partial \Pi}{\partial q}$. Положим $U = (U^1, U^2)$. Предполагаем, что функция $\Pi(t,q)$ непрерывно-дифференцируема в области $\mathbb{R}^+\times\Gamma_1$, $\Gamma_1 = \{q\in\mathbb{R} : |q| < H_1, \quad 0 < H_1 \le +\infty\}$, функция $Q^1(t,q,\dot q,\dot z)$ определена и непрерывна в области $R^+\times\Gamma_1\times\Gamma_2$ $\Gamma_2 = \{\dot q\in\mathbb{R} : |\dot q| < H_2,\, 0 < H_2 \le +\infty\}$

Запишем уравнения движения системы (2.36) в виде

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = -\frac{\partial \Pi}{\partial q} + Q^1_0 + U^1, \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot z}\right) = U^2 \tag{2.38}$$

Введем циклические импульсы

$$\frac{\partial T}{\partial \dot z} = A_1^T(t,q)\dot q + A(t,q)\dot z + B_1(t,q) = p, \tag{2.39}$$

где $p = (p_1, p_2, \ldots, p_{n-1})^T$. Разрешая эти циклические соотношения относительно $\dot z$, получаем следующие выражения для $\dot z$ через p

$$\dot z = A^{-1}(t,q)\left(p - B_1(t,q) - A_1^T(t,q)\dot q\right) \tag{2.40}$$

Из условий, наложенных на функции, входящие в (2.39) и (2.40), находим, что $\dfrac{\partial T}{\partial \dot z}$ и $\dot z$ являются непрерывными функциями по $(t,q,\dot q,\dot z)\in\mathbb{R}^+\times\Gamma_1\times\Gamma_2\times\Gamma_3$ и $(t,q,\dot q,p)\in\mathbb{R}^+\times\Gamma_1\times\Gamma_2\times\Gamma_4$ соответственно ($\Gamma_4 = \{p\in\mathbb{R}^{n-1} : \|p\| < H_4,\, 0 < H_4 \le +\infty\}$).

Используя соотношения (2.39) и (2.40), введем функцию Рауса в следующей форме

$$R = \left(T - \Pi - \left(\frac{\partial T}{\partial \dot z}\right)^T \dot z\right)\Bigg|_{\dot z = A^{-1}\left(p - B_1 - A_1^T\right)\dot q}$$

Представим ее в виде

$$R = R_2 + R_1 - W,$$

$$R_2(t,q,\dot q) = \frac{1}{2}r(t,q)\dot q^2, \quad r(t,q) = a(t,q) - A_1(t,q)A^{-1}(t,q)A_1^T(t,q),$$

$$R_1(t,q,\dot q,p)=e(t,q,p)\dot q,\quad e(t,q,p)=b(t,q)+A_1(t,q)A^{-1}(t,q)\left(p-B_1(t,q)\right),$$
$$W(t,q,p)=\Pi(t,q)-T_0(t,q)+\frac{1}{2}\left(p-B_1(t,q)\right)^T A^{-1}(t,q)\left(p-B_1(t,q)\right).$$

Уравнения движения (2.38) можно записать в виде уравнений Рауса

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial R_2}{\partial \dot q}\right)-\frac{\partial R_2}{\partial q}=-\frac{\partial W}{\partial q}-\frac{\partial e}{\partial t}+Q_0^1+U^1,\quad \frac{dp}{dt}=U^2$$

или

$$\frac{d}{dt}\left(r(t,q)\dot q\right)-\frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial q}(t,q)\dot q^2=-\frac{\partial W}{\partial q}(t,q,p)-\frac{\partial e}{\partial t}(t,q,p)-\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)'U^2+Q_0^1+U^1,$$
$$\frac{dp}{dt}=U^2 \tag{2.41}$$

Допустим, управляющие силы $U^1=U^2=0$, и при некоторых $q=q_0$ и $p=p_0$ действующая сила $Q^1(t,q,\dot q)$ такова, что при всех $t\in\mathbb{R}^+$ имеют место равенства

$$\frac{\partial W}{\partial q}(t,q_0,p_0)+\frac{\partial e}{\partial t}(t,q_0,p_0)=Q_0^1(t,q_0,0) \tag{2.42}$$

Тогда система, описываемая первым уравнением (2.41), имеет при $p=p_0$ положение относительного равновесия

$$\dot q(t)=0,\quad q(t)=q_0, \tag{2.43}$$

которому соответствует согласно (2.40) обобщенное стационарное движение системы (2.38)

$$\begin{gathered}\dot q(t)=0,\quad q(t)=q_0,\\ \dot z=A^{-1}(t,q_0)\left(p_0-B_1(t,q_0)\right),\quad z(t)=z_0+\int\limits_0^t \dot z(\tau)d\tau\end{gathered} \tag{2.44}$$

В отличие от стационарных движений [], в этом движении циклические скорости не являются постоянными, а изменяются вместе с циклическими координатами в общем случае по нелинейному закону.

Рассмотрим задачу о стабилизации этого движения. Уравнение (2.41) представим в виде

$$\begin{gathered}r(t,q)\ddot q-r_1(t,q,\dot q)\dot q-r_2(t,q,p)=Q_0^1(t,q,\dot q)+U^1-\left(\frac{\partial e}{\partial p}\right)'U^2\\ \frac{dp}{dt}=U^2\end{gathered} \tag{2.45}$$

где введем обозначения

$$r_1(t,q,\dot q) = -(\frac{1}{2}\frac{\partial r}{\partial q}(t,q)\dot q + \frac{\partial r}{\partial t}(t,q))\dot q$$

$$r_2(t,q,p) = -(\frac{\partial W}{\partial q}(t,q,p) + \frac{\partial e}{\partial t}(t,q,p))$$

Предположим, что имеет место следующее представление

$$r_1(t,q,\dot q)\dot q + r_2(t,q,p) + Q_0^1(t,q,\dot p) = d(t,q,\dot q)\dot q + f(t,q,p)q$$

Система (2.45) соответственно примет следующий вид

$$\begin{gathered} r(t,q)\ddot q = d(t,q,\dot q)q + f(t,q,p)q + U^1 \\ \frac{dp}{dt} = U^2 \end{gathered} \tag{2.46}$$

Если при $p = p_0$ $U^2 = 0$, тогда эта система имеет положение относительного равновесия

$$p = p_0,\ \dot q = 0,\ q = 0$$

которому соответствует обобщенное стационарное движение вида (2.44), а иначе

$$\begin{gathered} \dot q = 0, q = 0, \dot z(t) = A^{-1}(t,0)(p_0 - B(t,0)) \\ z(t) = z_0 + \int\limits_{t_0}^{t} \dot z(\tau)d\tau \end{gathered} \tag{2.47}$$

Положим

$$U^2(t,p) = -B(t)(p - p_0) \tag{2.48}$$

где $B(t)$ есть ограниченная по $t \in \mathbb{R}^+$, положительно-определенная матрица, и таким образом, имеет место следующее соотношение

$$\alpha_1\,||p - p_0|\,|^2 \le (p - p_0)'B(t)(p - p_0) \le \alpha_2\,||p - p_0|\,|^2$$

Для производной вспомогательной функции $V = (p - p_0)^2$ в силу второй совокупности уравнений (2.46) получим

$$\dot V = -2\alpha_1\,||p - p_0|\,|^2 = -2\alpha_1 V_3$$

Отсюда следует равномерная асимптотическая и даже экспоненциальная устойчивость положения (2.44) по ($p = p_0$). Стабилизация по всем переменным $(\dot q, q, p - p_0)$ сводится к задаче о стабилизации положения $\dot q = q = 0$, полученного из первого уравнения системы (2.46) при $p = p_0$

$$r(t,q)\ddot q = d(t,q,\dot q)\dot q + f(t,q,p_0)q + U^1 \tag{2.49}$$

Для исследования этой задачи могут быть использованы результаты предыдущего параграфа, включая изучение условий устойчивости для модели уравнения.

Вначале рассмотрим задачу о стабилизации состояния $\dot{q} = q = 0$ системы (2.49) под действием управляющего воздействия U_1, непрерывному по $(\dot{q}, q)$

$$U^1 = -k_1(t)\dot{q} - k_2(t)q \tag{2.50}$$

Для массоинерционной характеристики $r(t,q)$ в общем случае выполнены соотношения

$$0 < r_0 \leq r(t,q) \leq r_1, \quad (t,q) \in \mathbb{R}^+ \times \Gamma_1$$

Поэтому уравнение (2.49) с (2.50) можно записать в виде

$$\ddot{q} = \frac{d(t,q,\dot{q}) - k_1(t)}{r(t,q)}\dot{q} + \frac{f(t,q,p_0) - k_2(t)}{r(t,q)}q \tag{2.51}$$

По отношению к этому уравнению может быть использована методика определения коэффициентов усиления $k_1(t)$ и $k_2(t)$, представленная в предыдущем параграфе.

Пусть $\Gamma_{10} = \{\|q\| \leq H_{10} < H_1\}$, $\Gamma_{20} = \{\|\dot{q}\| \leq H_{20} < H_2\}$ есть выбранные области.

Положим

$$\begin{aligned}
&r_*(t) = min(r(t,q), q \in \Gamma_{10}), r^*(t) = max(r(t,q), q \in \Gamma_{10})\\
&d_*(t) = min(d(t,q,\dot{q}), (q,\dot{q}) \in \Gamma_{10} \times \Gamma_{20}), d^*(t) = max(d(t,q,\dot{q}), (q,\dot{q}) \in \Gamma_{10} \times \Gamma_{20})\\
&f_*(t) = min(f(t,q,p_0), q \in \Gamma_{10}), f^*(t) = max(f(t,q,p_0), q \in \Gamma_{10})\\
&r_0 = min(r_*(t), t \in \mathbb{R}^+), r_1 = max(r^*(t), t \in \mathbb{R}^+)\\
&d_0(t) = min(d_*(t), t \in \mathbb{R}^+), d_1(t) = max(d^*(t), t \in \mathbb{R}^+)\\
&f_0(t) = min(f_*(t), t \in \mathbb{R}^+), f_1(t) = max(f^*(t), t \in \mathbb{R}^+)
\end{aligned} \tag{2.52}$$

Допустим, что существуют постоянные $\gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$, удовлетворяющие следующим соотношениям

$$\begin{gathered}
\gamma_0 \leq \gamma_1, \quad q_0 \leq q_1\\
r_1\gamma_0 + d_1 \leq r_0\gamma_1 + d_0\\
r_1 q_0 + f_1 \leq r_0 q_1 + f_0\\
\gamma_0^2 > 2q_1\\
2q_0 > (\gamma_1 - \gamma_0)(\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - 2q_1})
\end{gathered}$$

Выберем коэффициенты усиления $k_1(t)$ и $k_2(t)$, исходя из неравнств

$$\begin{aligned}
r^*(t)(\gamma_0 + d^*(t)) \leq k_1(t) \leq r_*(t)(\gamma_1 + d_*(t))\\
r^*(t)(q_0 + f^*(t)) \leq k_2(t) \leq r_*(t)(q_1 + f_*(t))
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Тогда для уравнения (2.51) будут выполнены все условия вида (2.19).

Соответственно результатам предыдущего параграфа и [] заключаем, что при условии (2.52) управляющее воздействие (2.48) и (2.50) решают задачу о стабилизации движения (2.47).

Рассмотрим задачу о стабилизации этого движения управляющим воздействием дискретного типа

$$
\begin{aligned}
U^2 &= -B(t)(p(t-T_s)-p_0) \\
U^1 &= -k_1(t)\dot{q}(t-T_s)-k_2(t)q(t-T_s)
\end{aligned}
\tag{2.54}
$$

где $T_s = sT$, $s \in \mathbb{Z}^+$, $T > 0$ при $t \in [T_s, T_{s+i})$ значения $p(t-T_s) \equiv p(T_s)$, $\dot{q}(t-T_s) \equiv \dot{q}(T_s)$, $q(t-T_s) \equiv q(T_s)$.

С точностью до T^2 введем представления

$$
\begin{aligned}
p(t-T_s) &= p(t) - \dot{p}(t)(t-T_s), \\
q(t-T_s) &= q(t) - \dot{q}(t)(t-T_s),
\end{aligned}
$$

$$
\dot{q}(t-T_s) = \dot{q}(t) - \ddot{q}(t)(t-T_s),
$$

Примем в качестве модели управляемого движения системы (2.36) модель (2.46) с упрвляющим воздействием (2.54), получим следующие уравнения

$$
\frac{dp}{dt} = -(E+B(t)(t-T_n))^{-1}B(t)(p-p_0) \tag{2.55}
$$

$$
\ddot{q} = \frac{d(t,q,\dot{q}) - k_1(t) + k_2(t)(t-T_n)}{z(t,q)-k_1(t)(t-T_n)}\dot{q} + \frac{f(t,q,p_0)-k_2(t)}{z(t,q)-k_1(t)(t-T_n)}q \tag{2.56}
$$

для каждого отрезка $[T_n, T_{n+1})$.

В силу условия (2.48) относительно $B(t)$ для достаточно малых T матрица $(E+B(t)(t-T_n))^{-1}$ также является ограниченной, положительно определенной, так что положение $p = p_0$ системы (2.55) является экспоненциально устойчивым. И таким образом, согласно [] можно рассматривать устойчивость положения равновесия $\dot{q} = q = 0$ уравнения (2.56) при $p = p_0$.

Исходя из предыдущего параграфа имеем следующий результат.

Пусть для $k_1(t)$ имеет место ограниченность $k_{10} \leq k_1(t) \leq k_{11}$, $T, \gamma_0, \gamma_1, q_0, q_1$ есть постоянные, удовлетворяющие условиям

$$
\begin{gathered}
\gamma_0 \leq \gamma_1, \quad q_0 \leq q_1, \quad \gamma_0^2 > 2q_1 \\
2q_0 > (\gamma_1-\gamma_0)(\gamma_0 - \sqrt{\gamma_0^2 - 2q_1}) \\
r_1\gamma_0 + k_{11}T + d_1 \leq \frac{(r_0\gamma_1 + d_0)}{(1+\gamma_1)} \\
r_1 q_0 + f_1 \leq r_0 q_1(1-k_{10}T) + f_0
\end{gathered}
$$

Положим, что коэффициенты $k_1(t)$ и $k_2(t)$ удовлетворяют неравнствам

$$
\begin{aligned}
r^*(t)\gamma_0 + d^*(t) + k_2(t) \leq k_1(t) \leq \frac{r_*(t)\gamma_1 + d_*(t)}{1+\gamma_1} \\
r^*(t)q_0 + f^*(t) \leq k_2(t) \leq f_*(t)(r_*(t) - k_1(t)T)
\end{aligned}
\tag{2.57}
$$

Тогда управляющее воздействие (2.54) дискретное по $(p, \dot{q}, q)$ решает задачу стабилизации движения (2.47).

Заметим, что коэффициенты усиления $k_1(t)$ и $k_2(t)$ могут быть подобраны, исходя из условий (2.57) в виде кусочно-постоянных функций или постоянных значений.

На этом основании можно провести дискретизацию уравнений (2.46) с управляющими воздействиями (2.54).

Для удобства введем вспомогательные переменные $y_1 = q, y_2 = \dot{q}$.

В новых переменных уравнения (2.46) будут иметь вид

$$\begin{aligned} &\frac{dp}{dt} = U^2 \\ &\frac{dy_1}{dt} = y_2 \\ &\frac{dy_2}{dt} = \frac{d(t,q,\dot{q})\dot{q} + f(t,q,p)q + U^1}{r(t,q)} \end{aligned} \tag{2.58}$$

Соответственно (2.48) и (2.50) введем дискретное управляющее воздействие

$$\begin{aligned} &U^2 = -B(T_n)(p(T_n) - p_0), \quad T_n = nT \\ &U^1 = -k_1(T_n)y_2(T_n) - k_2(T_n)y_1(T_n) \end{aligned} \tag{2.59}$$

Используя соотношения

$$\frac{dp}{dt} = \frac{p(T_{n+1}) - p(T_n)}{T} = \frac{p[n+1] - p[n]}{T}$$

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{y_1(T_{n+1}) - y_1(T_n)}{T} = \frac{y_1[n+1] - y_1[n]}{T}$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{y_2(T_{n+1}) - y_2(T_n)}{T} = \frac{y_2[n+1] - y_2[n]}{T}$$

из (2.58) и (2.59) получим дискретную модель

$$\begin{aligned} &p[n+1] = p[n] - B[n](p[n] - p_0)T \\ &B[n] = B(T_n) \end{aligned} \tag{2.60}$$

$$\begin{cases} y_1[n+1] = y_1[n] + y_2[n]T \\ y_2[n+1] = y_2[n] + ((d[n] - k_2[n])y_2[n] + (f[n] - k_1[n])y_1[n])\frac{T}{r[n]} \end{cases} \tag{2.61}$$

$$\begin{aligned} &d[n] = d(T_n, y_1(T_n), y_2(T_n)), \quad f[n] = f(T_n, y_1(T_n), p(T_n)) \\ &k_1[n] = k_1(T_n), \quad k_2[n] = k_2(T_n), \quad r[n] = r(T_n, y_1(T_n)) \end{aligned}$$

Для исследования устойчивости положения $p = p_0$ системы (2.60) применим функцию Ляпунова $V(n) = \dfrac{1}{2}(p(n) - p_0)^2 = \dfrac{1}{2}(p(n) - p_0)'(p(n) - p_0)$.

С учетом определенной положительной матрицы $B[n]$ находим

$V(n+1) = \dfrac{1}{2}(p(n+1) - p_0)^2 = \dfrac{1}{2}(p(n) - p_0)'(E - B[n]T)^2(p(n) - p_0) \leq$
$\leq (1 - \lambda_{min}(B[n])T)^2 V(n+1),$

где $\lambda_{min}(B[n]) > 0$ есть наименьшее собственное значение матрицы $B[n]$, $\lambda_{min}(B[n]) \geq \lambda_{min}(B(t)) \geq \lambda_0 > 0$.

Согласно теореме () положение $p = p_0$ системы (2.60) является равномерно асимптотически устойчивым. Соответственно теореме () для системы (2.61) может рассматриваться устойчивость при $p = p_0$, и значит, когда

$$f[n] = d(T_n, y_1(T_n), p_0)$$

Также как и в подразделе 2.3 находим, что из условий равномерной асимптотической устойчивости положения $\dot{q} = q = 0$ уравнения (2.49) следует выполнение аналогичных условий для системы (2.61).

Таким образом, система (2.60) - (2.61) может быть использована для анализа процесса сходимости возмущенных движений (2.48) под действием управляющих воздействий (2.54)

Глава 3

-

3.1 О стабилизации программных движений голономной механической системы

Решается задача о стабилизации программного движения голономной механической системы. Предложен подход в построении управления, учитывающий нелинейность системы и нестационарность программного движения. С помощью построения вектор-функции Ляпунова и системы сравнения получены достаточные условия стабилизации заданного движения.

Рассматривается
управляемая механическая система, положение которой определяется n обобщенными координатами q_1, q_2, $\ldots$, q_n, а движение описывается уравнениями Лагранжа

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial T}{\partial \dot q}\right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q + U, \tag{3.1}$$

где $q = (q_1, q_2, \ldots, q_n)' \in \mathbb{R}^n$ есть вектор координат, $T = 1/2\dot q' A(q)\dot q$ — кинетическая энергия системы, $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ является положительно-определенной и непрерывно дифференцируемой матрицей, $Q = Q(t, q, \dot q)$ — вектор обобщенных неуправляемых сил, $U \in \mathbb{R}^n$ — вектор управления. Здесь и далее $(\cdot)'$ — операция транспонирования, $\|q\| = \sqrt{q_1^2 + q_2^2 + \ldots + q_n^2}$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$, величины, входящие в (3.1), определяются и непрерывны, для простоты, по всем $(t, q, \dot q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.

Уравнения (3.1) можно представить в виде

$$A(q)\ddot q = \{\dot q' C(q)\dot q\} + Q + U, \tag{3.2}$$

где $\{\dot q' C(q)\dot q\}$ — набор n квадратичных форм с совокупностью n симметричных матриц $C = (C_{(1)}, C_{(2)}, \ldots, C_{(n)})'$,

$$C_{(k)} = (c_{ij(k)}), \qquad c_{ij(k)} = \frac{1}{2}\partial a_{jk}/\partial q_i - \frac{1}{2}\partial a_{ij}/\partial q_k + \frac{1}{2}\partial a_{ik}/\partial q_j.$$

Пусть $X = \{(q^{(0)}(t), \dot q^{(0)}(t)) : [t_0, +\infty) \to \mathbb{R}^{2n}\}$ есть заданное множество программных движений, ограниченных областью

$$G_0 = \{(q, \dot q) \in \mathbb{R}^{2n} : \|q\| \le g_0 = const > 0, \quad \|\dot q\| \le g_1 = const > 0\}.$$

Пусть $(q^{(0)}, \dot q^{(0)}) \in X$ есть движение, осуществляемое посредством программного управления $U = U^{(0)}(t)$, так что выполнено тождество

$$A^{(0)}(t)\ddot q^{(0)}(t) - (\{(\dot q^{(0)}(t))' C^{(0)}(t)\dot q^{(0)}(t)\} + Q^{(0)}(t) + U^{(0)}(t)) \equiv 0, \tag{3.3}$$

где $A^{(0)}(t) = A(q^{(0)}(t))$, $C^{(0)}(t) = C(q^{(0)}(t))$, $Q^{(0)}(t) = Q(t, q^{(0)}(t), \dot q^{(0)}(t))$.

Введем: возмущение $x = q - q^{(0)}(t)$, управляющее воздействие $U^{(1)} = U - U^{(0)}(t)$. Согласно (3.2), уравнения возмущенного движения могут быть записаны в виде

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x} = \{\dot{x}'C^{(1)}(t,x)\dot{x}\} + Q^{(1)}(t,x) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) + U^{(1)}, \tag{3.4}$$

где $A^{(1)}(t,x) = A(q^{(0)}(t)+x)$, $C^{(1)}(t,x) = C(q^{(0)}(t)+x)$, $Q^{(1)}(t,x) = (A^{(0)}(t) - A^{(1)}(t,x))\ddot{q}^{(0)}(t) + \{(\dot{q}^{(0)}(t))'(C^{(1)}(t,x) - C^{(0)}(t))\dot{q}^{(0)}(t)\} + Q(t, q^{(0)}(t)+x, \dot{q}^{(0)}(t)) - Q(t, q^{(0)}(t), \dot{q}^{(0)}(t))$, $Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = Q(t, q^{(0)}(t)+x, \dot{q}^{(0)}(t)+\dot{x}) - Q(t, q^{(0)}(t)+x, \dot{q}^{(0)}(t)) + \{(\dot{q}^{(0)}(t))'C^{(1)}(t,x)\dot{x} + \dot{x}'C^{(1)}(t,x)q^{(0)}(t)\}$.

Заметив, что $Q^{(1)}(t,0) \equiv 0$, $Q^{(2)}(t,x,0) \equiv 0$, допустим, что в соответствии с наложенными связями и действующими силами имеют место следующие представления соответствующих (3.4)

$$Q^{(1)}(t,x) = F(t,x)\dot{x}, \qquad \{\dot{x}'C(t,x)\dot{x}\} + Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = D(t,x,\dot{x})\dot{x}, \tag{3.5}$$

Исследуем задачу о стабилизации невозмущенного движения $x = \dot{x} = 0$ системы (3.4) управляющим воздействием вида

$$U^{(1)}(t,x,\dot{x}) = -B(t)\dot{x} - P(t)x, \tag{3.6}$$

где $B, P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ есть матрицы коэффициентов усиления в структуре обратной связи, подлежащие определению.

Уравнения движения запишутся в виде

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x} = F(t,x)x + D(t,x,\dot{x})\dot{x} - B(t)\dot{x} - P(t)x \tag{3.7}$$

Подбор матрицы коэффициентов усиления B и P проведем на основе векторной функции Ляпунова

$$V = (V_1, V_2)', \qquad V_1 = \|x\|, \qquad V_2 = \sqrt{(\dot{x}+Sx)'A^{(1)}(t,x)(\dot{x}+Sx)} \tag{3.8}$$

где матрица $S \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $S = const$, подлежит определению, при этом исходные уравнения для нее примем

$$detS \neq 0 \quad x'(S'+S)x \geq 2s_0\|x\|^2, \quad s_0 = const > 0 \tag{3.9}$$

Пусть в области $\mathbb{R}^+ \times G_1$, $G_1 = \{(x,\dot{x}) \in \mathbb{R}^{2n} : \|x\| \leq 2g_0 + \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ имеет место следующее соотношение

$$\begin{aligned}
&\lambda_1^2\|\dot{x}\|^2 \leq \dot{x}'A^{(1)}x \leq \lambda_2^2\|\dot{x}\|^2 \\
&(\dot{x}+Sx)'\left(\frac{1}{2}\frac{dA^{(1)}}{dt} + D - B + A^{(1)}S\right)(\dot{x}+Sx) \leq -\mu_1\|\dot{x}+Sx\|^2 \\
&(\dot{x}+Sx)'(F - P - (D - B + S)S)x \leq \mu_2\|\dot{x}+Sx\|\|x\|
\end{aligned} \tag{3.10}$$

где μ_1, μ_2 - положительные постоянные, удовлетворяющие неравнству

$$s_0\lambda_1^2\mu_1 - \mu_2\lambda_1^2 > 0$$

При этих соотношениях вектор-функция V является определенно положительной, допускающей бесконечно малый высший пределе, для её производных в силу (3.4) имеют место следующие оценки

$$2V_1\dot{V}_1 = 2x'\dot{x} = 2x'(\dot{x} + Sx - Sx) = -x'(S + S')x + 2x'(\dot{x} + Sx) \leq$$
$$\leq -2s_0\|x\|^2 + 2\|x\|\|\dot{x} + Sx\| \leq -2s_0V_1^2 + \frac{2}{\lambda_1}V_1V_2$$

$$\begin{aligned}
&2V_2\dot{V}_2 = (\dot{x} + Sx)'\frac{dA^{(1)}}{dt}(\dot{x} + Sx) + 2(\dot{x} + Sx)'A^{(1)}(\ddot{x} + S\dot{x}) = \\
&= (\dot{x} + Sx)'\frac{dA^{(1)}}{dt}(\dot{x} + Sx) + 2(\dot{x} + Sx)'((D - B + A^{(1)}S)\dot{x} + (F - P)x) = \\
&= (\dot{x} + Sx)'\left(\frac{dA^{(1)}}{dt} + 2(D - B + A^{(1)}S)\right)(\dot{x} + Sx) + \\
&+ 2(\dot{x} + Sx)'(F - P - S(D - B + A^{(1)}S))x \leq \\
&\leq -2\mu_1\|\dot{x} + Sx\|^2 + 2\mu_2\|\dot{x} + Sx\|\|x\| \leq -2\frac{\mu_1}{\lambda_2^2}V_2^2 + 2\mu_2\frac{1}{\lambda_1}V_2V_1
\end{aligned} \tag{3.11}$$

Таким образом, при наличии соотношений (3.9) для вектор-функции V имеем следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \dot{u}_1 = -s_0u_1 + \dfrac{1}{\lambda_1}u_2 \\ \dot{u}_2 = \dfrac{\mu_2}{\lambda_1}u_1 - \dfrac{\mu_1}{\lambda_2^2}u_2 \end{cases} \tag{3.12}$$

Нулевое движение этой системы в силу неравенства (3.10) является равномерно асимптотически устойчивым, и даже экспоненциально. Следовательно при выполнении условий (3.9) управляющее воздействие (3.6) решает задачу о стабилизации программного движения $(q^0(t), \dot{q}^0(t))$.

При этом заметим, что форма управления (3.6) и условия (3.9) обеспечивает робастный характер управления.

Перейдем к задаче о стабилизации движения $\dot{x} = x = 0$ системы (3.4) управляющим воздействием дискретного типа

$$\begin{aligned}
&U^1[t, x, \dot{x}] = -B(t)\dot{x}(t - T_n) - P(t)x(t - T_n), \\
&\dot{x}(t - T_n) \equiv \dot{x}(T_n), \quad x(t - T_n) \equiv x(Tn) \quad T_n \leq t \leq T_{n+1}
\end{aligned} \tag{3.13}$$

Уравнения движения (3.4) с учетом соотношений (3.5) будут иметь следующий вид

$$A^{(1)}(t, x)\ddot{x} = F(t, x)\ddot{x} + D(t, x, \dot{x})\dot{x} - B(t)\dot{x}(t - T_n) - P(t)x(t - T_n) \tag{3.14}$$

С точностью до T^2 при $t \in [T_n, T_{n+1})$ введем представления

$$\dot{x}(t - T_n) = \dot{x}(t) - \ddot{x}(t)(t - T_n), x(t - T_n) = x(t) - \dot{x}(t)(t - T_n)$$

В первом представлении заменим $\ddot{x}$ значением

$$\ddot{x} = A^{-1}(t,x)\left(F(t,x)x + D(t,x,\dot{x})\dot{x} - B(t)\dot{x} - P(t)x\right)\Big|_{\substack{x = x(t)\\ \dot{x} = \dot{x}(t)}}$$

С точностью до T^2 на каждом интервале $[T_n, T_{n+1})$ движения системы могут быть описаны уравнениями

$$\begin{gathered} A^{(1)}(t,x)\ddot{x} = (D(t,x,\dot{x}) + (t-T_n)B(t)A^{-1}(t,x)D(t,x,\dot{x}) - B(t) - \\ -(t-T_n)B(t)A^{-1}(t,x)B(t) + (t-T_n)P(t))\dot{x} + (F - P(t)) + \\ +(t-T_n)P(t)A^{-1}(t,x)P(t))x \end{gathered} \tag{3.15}$$

Полученные уравнения имеют структуру, аналогичную структуре системы уравнений (3.6). Устойчивость её положения $\dot{x} = x = 0$ может быть найдена посредством функции (3.7) в виде соотношений (3.6) и (3.9).

При этом для достаточно малых T матрицы, входящие в (3.15) достаточно мало отличаются от матриц, входящих в (3.6). Отсюда возникает следующий подход к построению управляющего воздействия (3.13)

В качестве начальной модельной системы берется система (3.6). Для нее при соответствующем подборе матрицы S находятся, согласно условиям (3.9) , коэффициенты усиления управляющего воздействия (3.5). Усилением этих условий вида $\mu_1 = \mu_1' + \varepsilon$, $\mu_2 = \mu_2' + \varepsilon$ достигается выполнение условий ассимптотической устойчивости положения $\dot{x} = x = 0$ системы (3.15) при малых $T > 0$.

Рассмотрим задачу об анализе процесса стабилизации заданного программного движения при помощи импульсного управляющего воздействия. Для этого проведем замену

$$y = x, x = \dot{x}$$

В новых переменных система (3.14) запишется в виде

$$\dot{y} = z, \quad \dot{z} = \left(A^{(1)}\right)^{-1}(F\dot{z} + Dz - B\dot{z}(t-T_n) - Px(t-T_n))$$

Полагая

$$\begin{aligned} \dot{y} &= \frac{y(T_{n+1}) - y(T_n)}{T} = \frac{y[n+1] - y[n]}{T} \\ \dot{z} &= \frac{z(T_{n+1}) - z(T_n)}{T} = \frac{z[n+1] - z[n]}{T} \end{aligned}$$

получим дискретную модель вида

$$\begin{aligned} &y[n+1] = y[n] + Tz[n] \\ &z[n+1] = z[n] + \left(A^{(1)}\right)^{-1}((F-B)z[n] + (D-B)y[n])T \end{aligned}$$

3.2 Моделирование управляемого движения двухзвенного манипулятора на подвижном основании

В данном параграфе рассматривается задача стабилизации программного движения механических систем, осуществляемая при помощи векторных функций Ляпунова. Управляющие воздействия выбираются универсальными по отношению ко множеству программных движений, достаточно грубыми по отношению к системным параметрам и силам, не поддающимся управлению.

В качестве применения теоретических результатов, рассмотрим задачу построения дискретного управления двухзвенным манипулятора на подвижном основании, модель которого представлена на следующем рисунке:

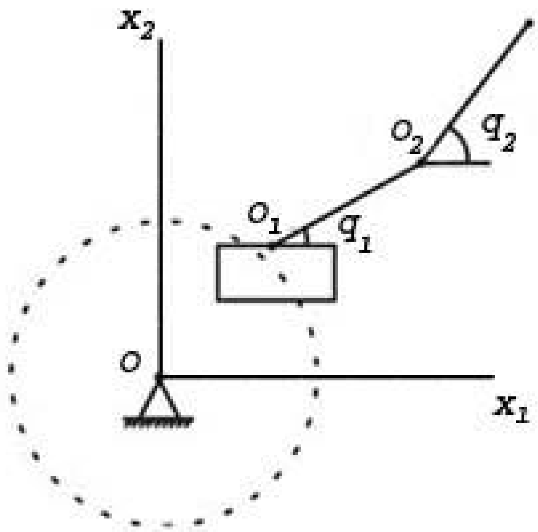

Рис. 3.1: Двузвенный манипулятор на подвижном основании

В рассматриваемой нами модели шарнир O_1 связывает первое звено с подвижным основанием. Груз, перемещается манипулятором при помощи схвата, укрепленного на конце второго звена в точке O_3. Звенья манипулятора связываются шарниром O_2, а оси шарниров параллельны друг другу. Будем полагать, что звенья манипулятора есть однородные стержни, а линейные размеры схвата и груза много меньше, чем длины звеньев манипулятора, следовательно, перемещаемый груз и схват примем за материальную точку.

Исследуя транспортные движения манипулятора, будем считать, что манипулятор совершает действия в горизонтальной плоскости или в невесомости, т.е. в отсутствии силы тяжести, причем основание движется только поступательно.

Пусть положение центра масс основания в инерциальной системе координат описывается функциями $x_1(t)$ и $x_2(t)$. В качестве обобщенных координат системы q_1, q_2 выберем шарнирные углы звеньев.

Управление манипулятором происходит при помощи двух независимых приводов D_1, D_2, которые находятся в шарнирах O_1 и O_2 соответственно. Главные моменты относительно осей шарнировO_1, O_2 сил, создаваемые приводами D_1, D_2 и приложенных к звеньям, соответственно равны M_1, M_2. Действие других сил, за исключением реакции основания, учитывать не будем.

Введем следующие обозначения: m_1, m_2 - массы звеньев, l_1, l_2 - длины звеньев, m_3 - масса груза.

Положим, что в исследуемой системе имеется следующие параметры:

$$\begin{array}{ll} h_1 = (\frac{m_1}{3} + m_2 + m_3)l_1^2 & h_4 = (\frac{m_1}{2} + m_2 + m_3)l_1 \\ h_2 = (\frac{m_2}{3} + m_3)l_2^2 & h_5 = (\frac{m_2}{2} + m_3)l_2 \\ h_3 = (\frac{m_2}{2} + m_3)l_1 l_2 & \end{array}$$

Тогда уравнения Лагранжа для рассматриваемой механической системы имеют вид

$$\begin{cases} h_1\ddot{q}_1 + h_3\cos(q_1 - q_2)\ddot{q}_2 + h_3\sin(q_1 - q_2)\dot{q}_2^2 + h_4(\ddot{x}_2\cos(q_1) - \ddot{x}_1\sin(q_1)) = U_1 \\ h_2\ddot{q}_2 + h_3\cos(q_1 - q_2)\ddot{q}_1 + h_3\sin(q_1 - q_2)\dot{q}_1^2 + h_5(\ddot{x}_2\cos(q_2) - \ddot{x}_1\sin(q_2)) = U_2 \end{cases}$$

Запишем систему уравнений движения манипулятора в матричном виде $H(q)\ddot{q} + P(t, q, \dot{q}) = u$, где $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}$, $\dot{q} = \begin{pmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{pmatrix}$, $\ddot{q} = \begin{pmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{pmatrix}$, $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \end{pmatrix}$

Матрица *H(q)* коэффициентов перед вторыми производными и вектор P имеют вид

$$H(q) = \begin{pmatrix} h_1 & h_3\cos(q_1 - q_2) \\ h_3\cos(q_1 - q_2) & h_2 \end{pmatrix},$$

$$P(t, q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} h_3\sin(q_1 - q_2)\dot{q}_2^2 + h_4\left(\ddot{x}_2(t)\cos q_1 - \ddot{x}_1(t)\sin q_1\right) \\ h_3\sin(q_1 - q_2)\dot{q}_1^2 + h_5\left(\ddot{x}_2(t)\cos q_2 - \ddot{x}_1(t)\sin q_2\right) \end{pmatrix}.$$

Тогда, согласно теории, управление, стабилизирующее программное движение описываемой системы, может быть найдено из следующих уравнений:

$$U_1 = U_1^* - k_1((\dot{q}_1(t) - \dot{q}_1^*(t)) + (q_1(t) - q_1^*(t))$$

$$U_2 = U_2^* - k_2((\dot{q}_2(t) - \dot{q}_2^*(t)) + (q_2(t) - q_2^*(t))$$

где

$$U_1^* = h_1\ddot{q}_1^* + h_3\cos(q_1^* - q_2^*)\ddot{q}_2^* + h_3\sin(q_1^* - q_2^*)\dot{q}_2^{*2} + h_4(\ddot{x}_2\cos(q_1^*) - \ddot{x}_1\sin(q_1^*))$$
$$U_2^* = h_2\ddot{q}_2^* + h_3\cos(q_1^* - q_2^*)\ddot{q}_1^* + h_3\sin(q_1^* - q_2^*)\dot{q}_1^{*2} + h_5(\ddot{x}_2\cos(q_2^*) - \ddot{x}_1\sin(q_2^*))$$

Предположим, что движение основания манипулятора может быть описано следующим законом:

$$x_1(t) = \cos(2t)$$
$$x_2(t) = \sin(2t)$$

Программное движение манипулятора зададим как:

$$q_1^* = 1,1\sin(1,2t+1) \qquad \dot{q}_1^* = 1,32\cos(1,2t+1)$$
$$q_2^* = 1,3\sin(1,6t+1,9) \quad \dot{q}_2^* = 2,08\sin(1,6t+1,9)$$

С начальными отклонениями:

$$q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 0.5 \quad \dot{q}_1(0) = 0, \quad \dot{q}_2(0) = 0$$

Задав следующие параметры системы

$$m_1 = 20kg, \quad m_2 = 10kg, \quad m_3 = 5kg, \;\; l_1 = 0.8m, \quad l_2 = 0.5m$$

Получим значения параметров управления для такого движения

$$k_1 = 319.407, \quad k_2 = 114.987$$
$$k_1^0 = 170,478, \quad k_2^0 = 61,372$$

где k_1^0, k_2^0 - значения параметров управления, найденные при нулевом отклонении. Числа k_1^0, k_2^0 имеют смысл нижних граней параметров k_1, k_2, т.е. параметры k_1, k_2 можно представит в виде $k_1 = k_1^0 + \eta_1$, $k_2 = k_2^0 + \eta_2$, где η_1, η_2 - положительные постоянные, зависящие от выбора начальных отклонений.

Результаты численного моделирования поведения системы представлены на графиках ниже. При проведении моделирования шаг Δ_c дискретизации для системы выбран равным шагу Δ_y дискретизации управления ($\Delta_c = \Delta_y = 0.01$).

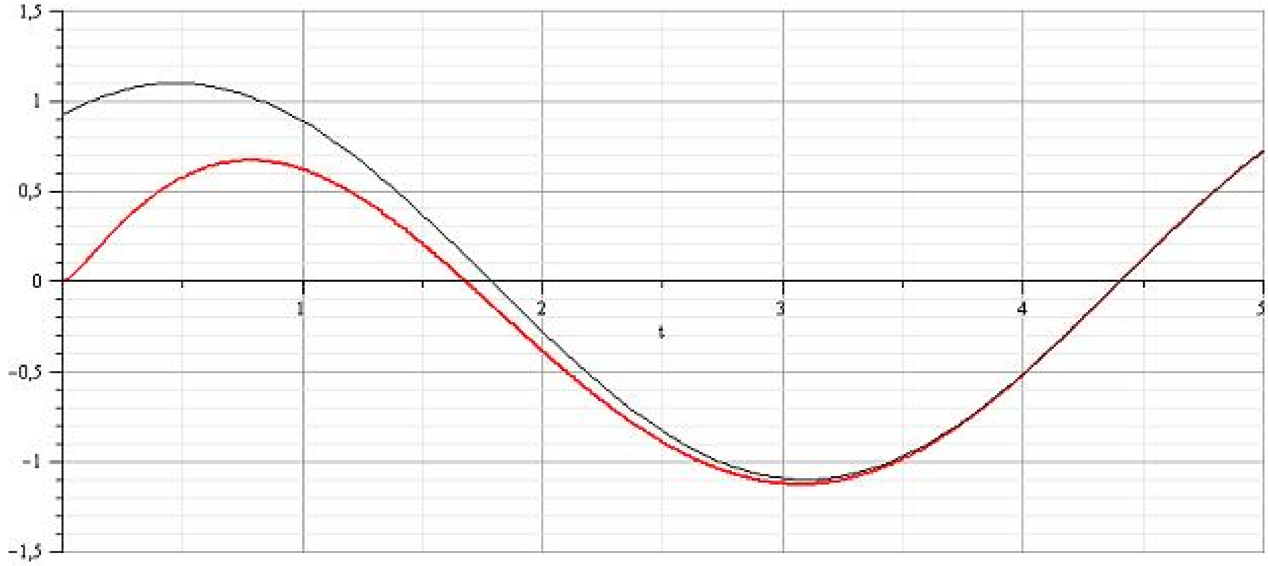

Рис. 3.2: Зависимость координаты $q_1(t)$ от времени t.Красная кривая $q_1(t)$- стабилизируемая компонента, черная кривая: $q_1^* = 1,1\sin(1,2t+1)$ - програмное движение. Время моделирования $t_{\max} = 5$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

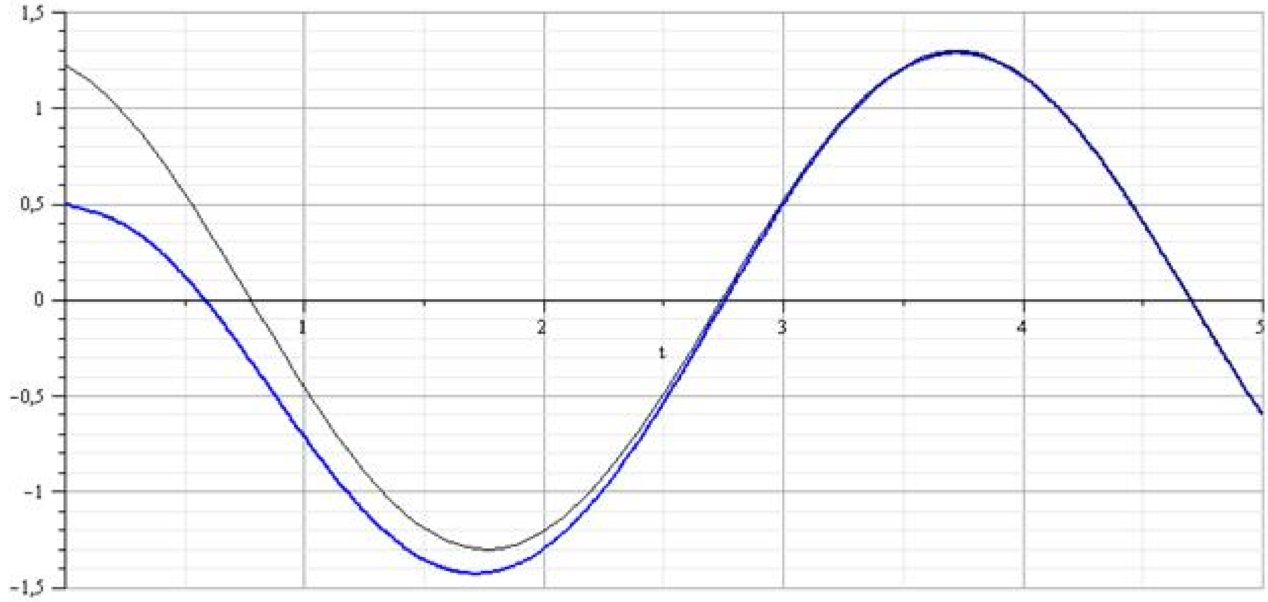

Рис. 3.3: Зависимость координаты $q_2(t)$ от времени t. Синяя кривая $q_2(t)$ - стабилизируемая компонента, черная кривая - програмное движение $q_2^* = 1,3\sin(1,6t+1,9)$. Время моделирования $t_{\max} = 5$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

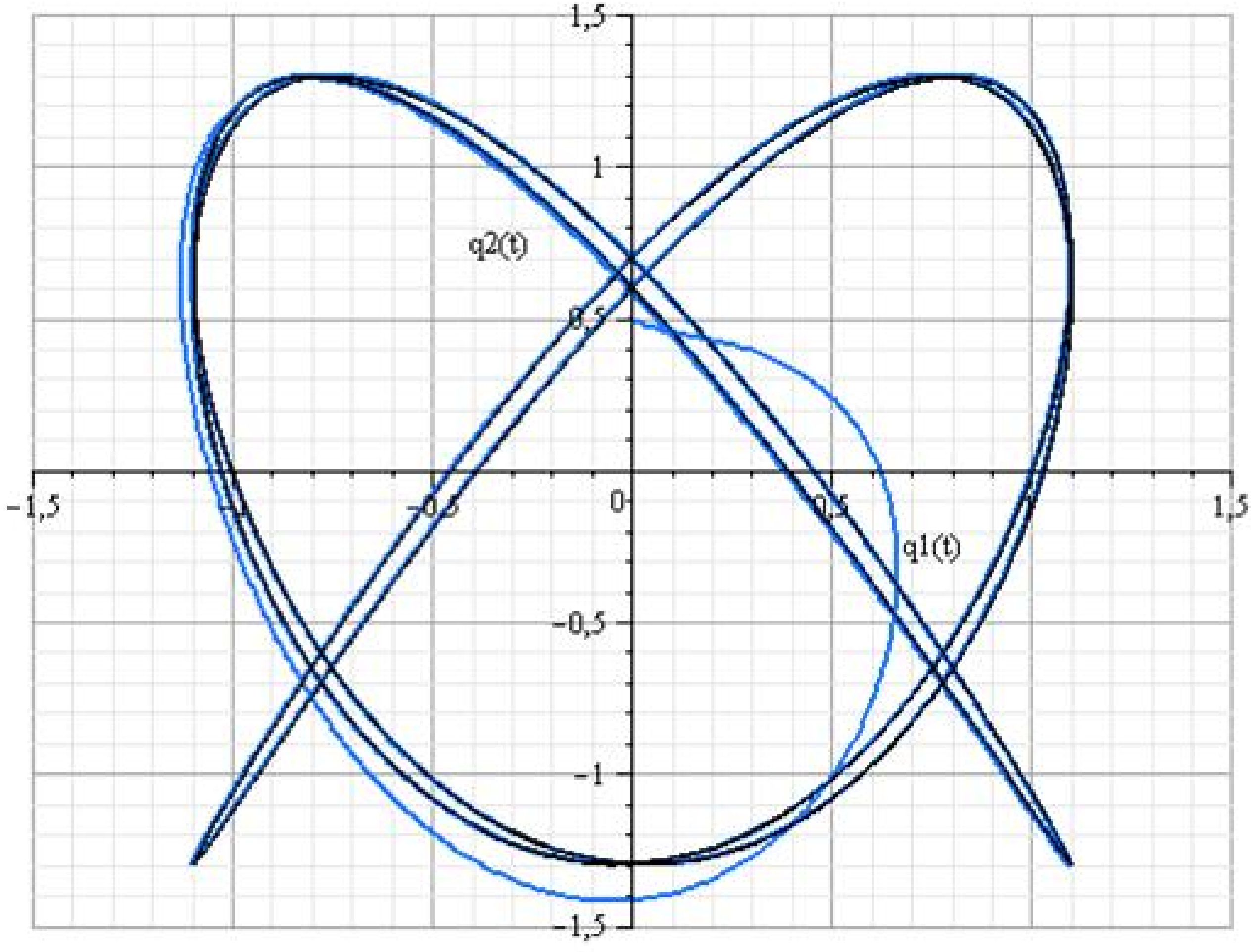

Рис. 3.4: Фазовый портрет движения основания манипулятора. Зависимость координаты $q_2(t)$ от координаты $q_1(t)$. Голубая кривая $q_2(q_1(t))$ - стабилизируемая компонента, черная кривая - программное движение $q_2^*(q_1^*(t))$. Время моделирования $t_{\max} = 50$, шаг дискретизации $\Delta_c = \Delta_y = 0.01$

3.3 Задача слежения для колесного робота с омни колесами

Практическое применение предложенного алгоритма отыскания стабилизирующего управления для механических системы рассмотрим на примере стабилизации движения трехколесного робота.

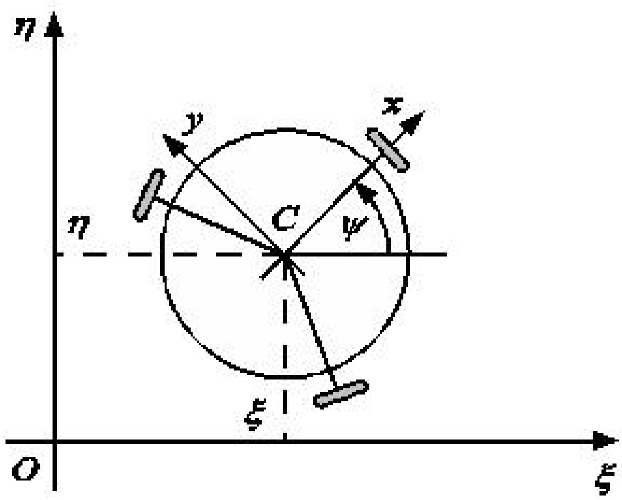

Рис. 3.5: Конструкция колесного робота

Механическая система состоит из платформы, которая может перемещаться по горизонтальной поверхности на трех колесах. Углы между осями колес составляют 120°. На колесах закреплены ролики, оси вращения которых лежат в плоскости колес. При наличии подобных колес платформа может двигаться в любом направлении, с любой ориентацией. Движение экипажа происходит без проскальзывания под действием моментов, развиваемых тремя независимыми электродвигателями постоянного тока. Движение такой системы описывается следующими уравнениями

$$L(t,\dot q,\ddot q) = P(\psi)U(t,q,\dot q)$$

$$L = \begin{pmatrix} m\ddot\xi + h\dot\xi + m_d\dot\psi\dot\eta \\ m\ddot\eta + h\dot\eta - m_d\dot\psi\dot\xi \\ I\ddot\psi \end{pmatrix},$$

$$P = \begin{pmatrix} \sin\psi & \sin(\psi+\frac{2\pi}{3}) & \sin(\psi+\frac{4\pi}{3}) \\ -\cos\psi & -\cos(\psi+\frac{2\pi}{3}) & -\cos(\psi+\frac{4\pi}{3}) \\ -a & -a & -a \end{pmatrix}, U = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

где ξ и η – координаты центра масс платформы в неподвижной декартовой системе координат $O\xi\eta\varsigma$, ψ – угол поворота платформы вокруг вертикали, отсчитываемой от оси $O\xi$, $u = (u_1,u_2,u_3)^T$ – управляющие напряжения, подаваемые на электродвигатели постоянного тока, a – расстояние от центра масс платформы до центра каждого колеса:

$$m = m_0 + 3m_1\left(1 + \frac{r_1^2}{2r^2}\right), m_d = \frac{3m_1 r_1^2}{2r^2},$$

$$I_s = m_0\rho_0^2 + 3m_1\left(\rho_1^2 + a^2\left(1 + \frac{2r_1^2}{r^2}\right)\right), n = \frac{3c_v}{2r^2}.$$

Здесь m_0 – масса платформы, m_1 – масса колеса, ρ_0, ρ_1 – соответственно радиусы инерции платформы и колеса относительно вертикальной оси, проходящей через их центры масс, r – радиус колеса, r_1 – радиус инерции колеса относительно оси вращения, c_v – коэффициент момента противоэлектродвижущей силы.

Введем функции, описывающие желаемое движение робота

$$\begin{cases} \xi_0(t) = R\cos(\omega t) \\ \eta_0(t) = R\sin(\omega t) \\ \psi_0(t) = \omega t \end{cases}$$

Тогда искомое управление будет складываться из двух компонент $U = U^o + U^*$.

$$U(t,q,\dot{q}) = U^o(t,q,\dot{q}) + U^*(t,q,\dot{q}) = P^{-1}(\psi_0(t)) \cdot L^o(t) + P^{-1}(\psi(t)) \cdot V(t)$$

Введем матрицу $L^o(t) = \begin{pmatrix} m\ddot{\xi}_0(t) + h\dot{\xi}_0(t) + m_d\dot{\eta}_0(t)\dot{\psi}_0(t) \\ m\ddot{\eta}_0(t) + h\dot{\eta}_0(t) - m_d\dot{\xi}_0(t)\dot{\psi}_0(t) \\ 2a^2h\dot{\psi}_0(t) \end{pmatrix}$ и

вектор $V(t) = \begin{pmatrix} -k_1(\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}_0(t)) - k_2(\xi(t) - \xi_0(t)) \\ -k_1(\dot{\eta}(t) - \dot{\eta}_0(t)) - k_2(\eta(t) - \eta_0(t)) \\ -k_3(\dot{\psi}(t) - \dot{\psi}_0(t)) - k_4(\psi(t) - \psi_0(t)) \end{pmatrix}$.

Обратная к исходной матрица $P^{-1}(\psi_0(t))$ имеет вид $P^{-1}(\psi_0(t)) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2\sin(\psi_0(t)) & -2\cos(\psi_0(t)) & -\frac{1}{a} \\ \sqrt{3}\cos(\psi_0(t)) - \sin(\psi_0(t)) & \sqrt{3}\sin(\psi_0(t)) + \cos(\psi_0(t)) & -\frac{1}{a} \\ -\sqrt{3}\cos(\psi_0(t)) - \sin(\psi_0(t)) & -\sqrt{3}\sin(\psi_0(t)) - \cos(\psi_0(t)) & -\frac{1}{a} \end{pmatrix}$

тогда в управлении $U(t,q,\dot{q}) = P^{-1}(\psi_0(t) = \omega t) \cdot L^o(\omega t) + P^{-1}(\psi(t)) \cdot V(t)$ первое слагаемое будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3}\sin(\omega t) & -\frac{2}{3}\cos(\omega t) & -\frac{1}{3a} \\ \frac{\sqrt{3}}{3}\cos(\omega t) - \frac{1}{3}\sin(\omega t) & \frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\cos(\omega t) & -\frac{1}{3a} \\ -\frac{1}{3}\sin(\omega t) - \frac{\sqrt{3}}{3}\cos(\omega t) & -\frac{\sqrt{3}}{3}\sin(\omega t) + \frac{1}{3}\cos(\omega t) & -\frac{1}{3a} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} -m\omega^2 R\cos(\omega t) - h\omega R\sin(\omega t) + md\omega^2 R\cos(\omega t) \\ \\ -m\omega^2 R\sin(\omega t) + h\omega R\cos(\omega t) + md\omega^2 R\sin(\omega t) \\ \\ 2a^2 h\omega \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2(R+a)h\omega \\ \left(\sqrt{3}mR\omega - \sqrt{3}mR\omega d - hR + 2ah\right)\omega \\ \left(\sqrt{3}mR\omega d - \sqrt{3}mR\omega - hR + 2ah\right)\omega \end{pmatrix}$$

Возьмем следующие параметры системы:

$m = 20 : 3, m_d = 3 : 3, I = 3.76 : 3\times <^2, a = 0.2 <, \Delta m = 1 : 3, T = 0.05A,$
$h = 1.6 \times A/ <, R = 2 <, w = 0.51/A,$

Начальные не малые отклонения выберем следующим образом:

$$\xi_0^0 = 0.5, \;\; \eta_0^0 = 1 \;\; \psi_0^0 = 0.1 \qquad \dot{\xi}_0^0 = 0.1, \;\; \dot{\eta}_0^0 = 0.1 \;\; \dot{\psi}_0^0 = 0.1$$

Тогда параметры управления соответственно будут:

$$k_1 = \; 1, \; \mathrm{k}_2 = \; 0.3, \; \mathrm{k}_3 = \; 0.5, \; \mathrm{k}_4 = \; 0.8$$

Результаты численного моделирования поведения системы представлены на графиках ниже. При проведении моделирования шаг Δ_c дискретизации для системы выбран равным шагу Δ_y дискретизации управления ($\Delta_c = \Delta_y = 0.01$).

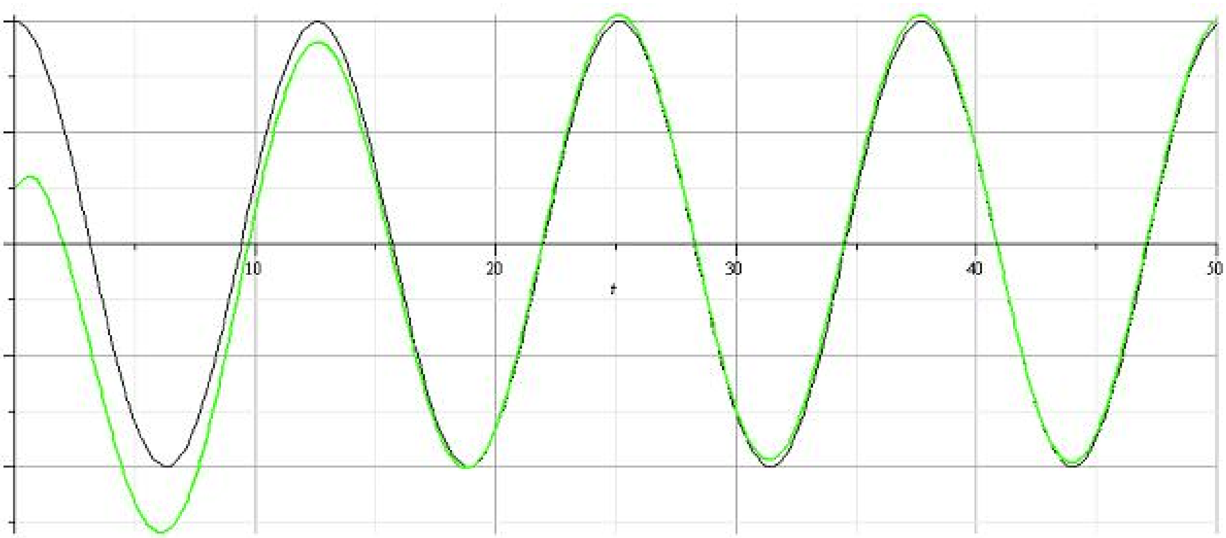

Рис. 3.6: график $t, \xi(t)$ траектории центра масс платформы

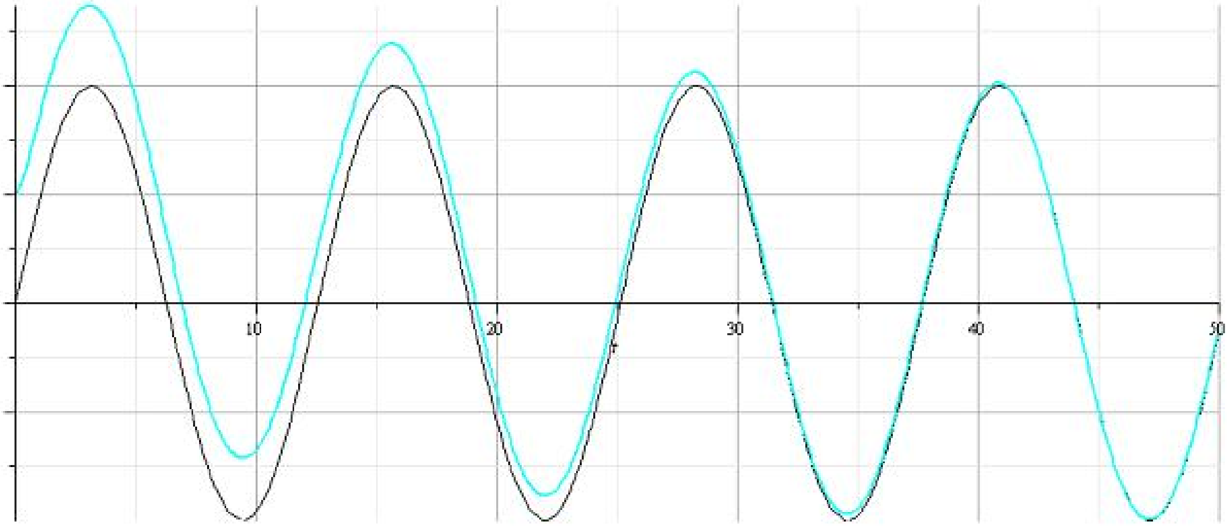

Рис. 3.7: График$t, \eta(t)$ координаты центра масс платформы η

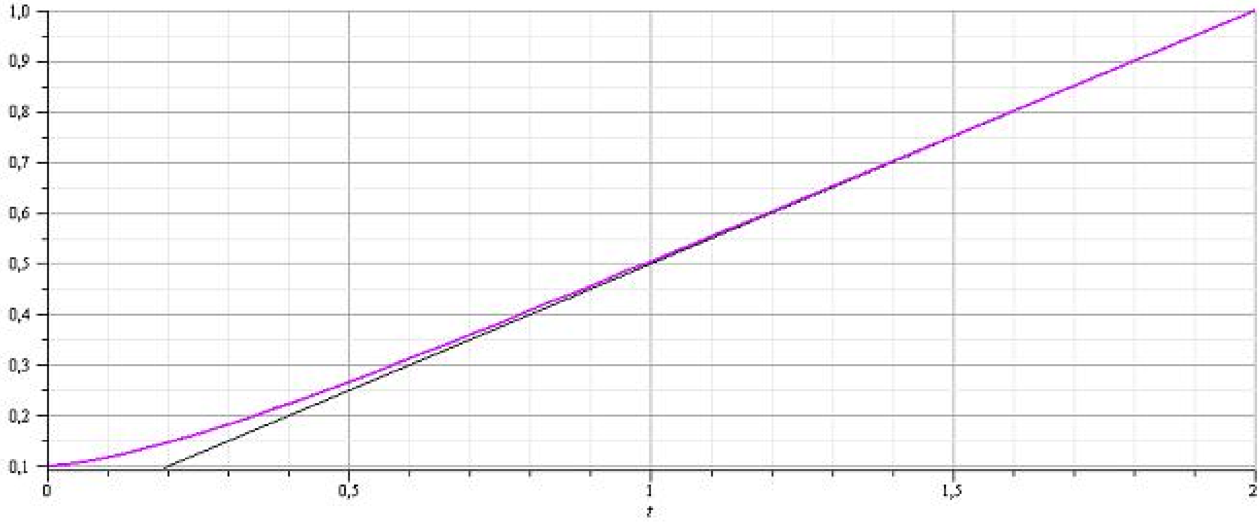

Рис. 3.8: График $t, \psi(t)$угла поворота платформы ψ

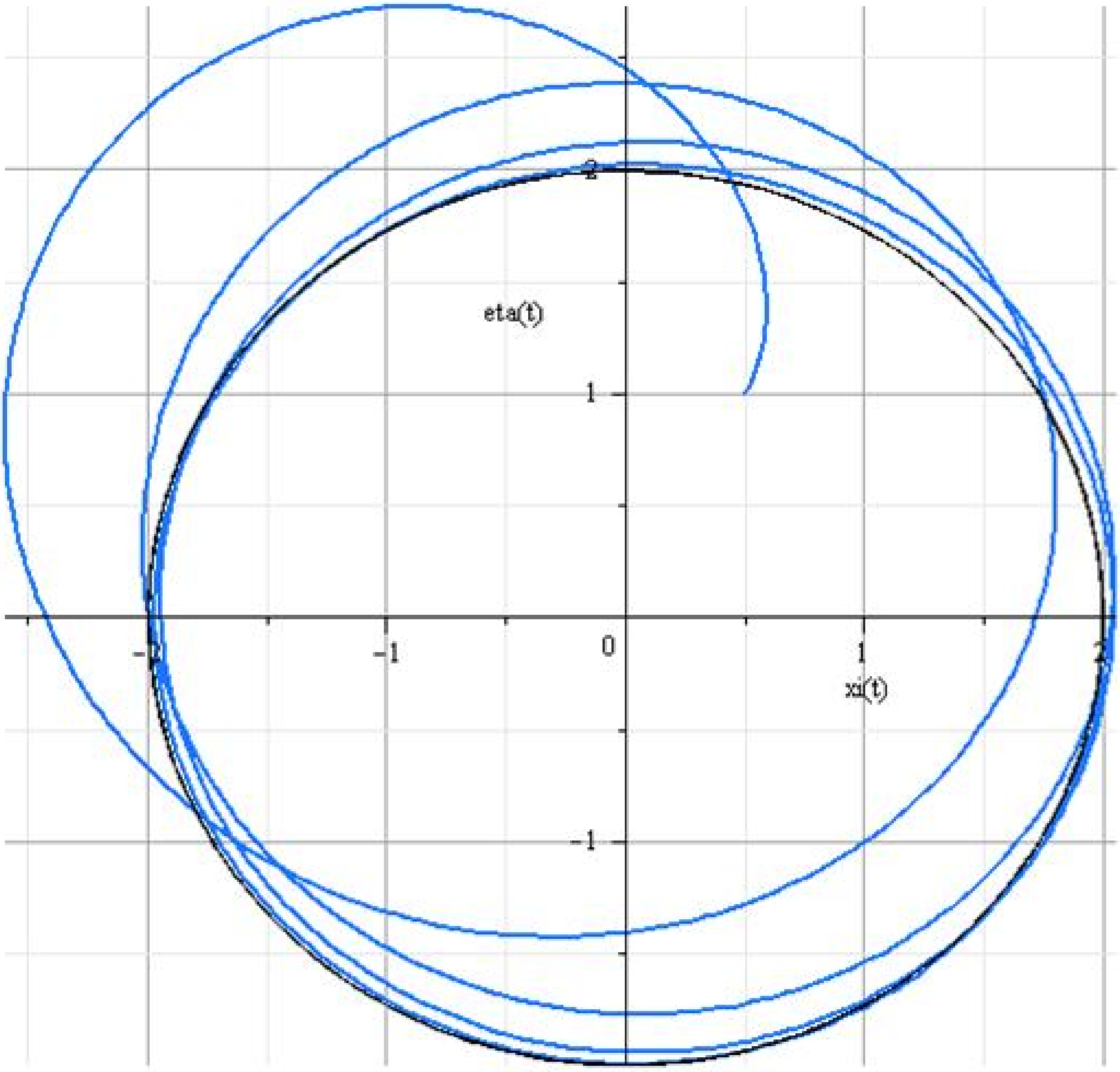

Рис. 3.9: График траектории центра масс платформы

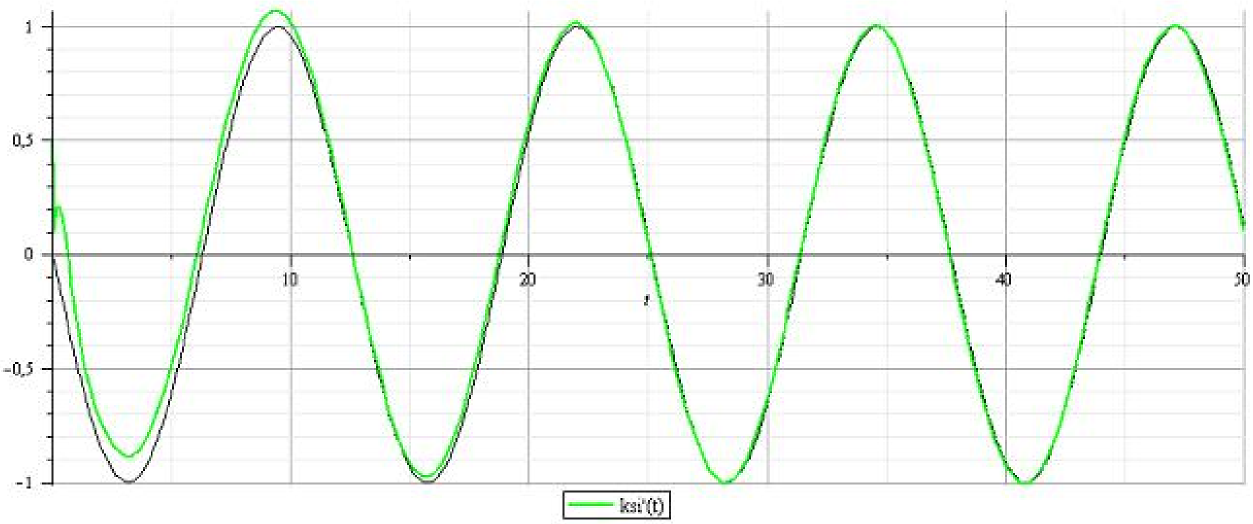

Рис. 3.10: График $t, \dot{\xi}(t)$

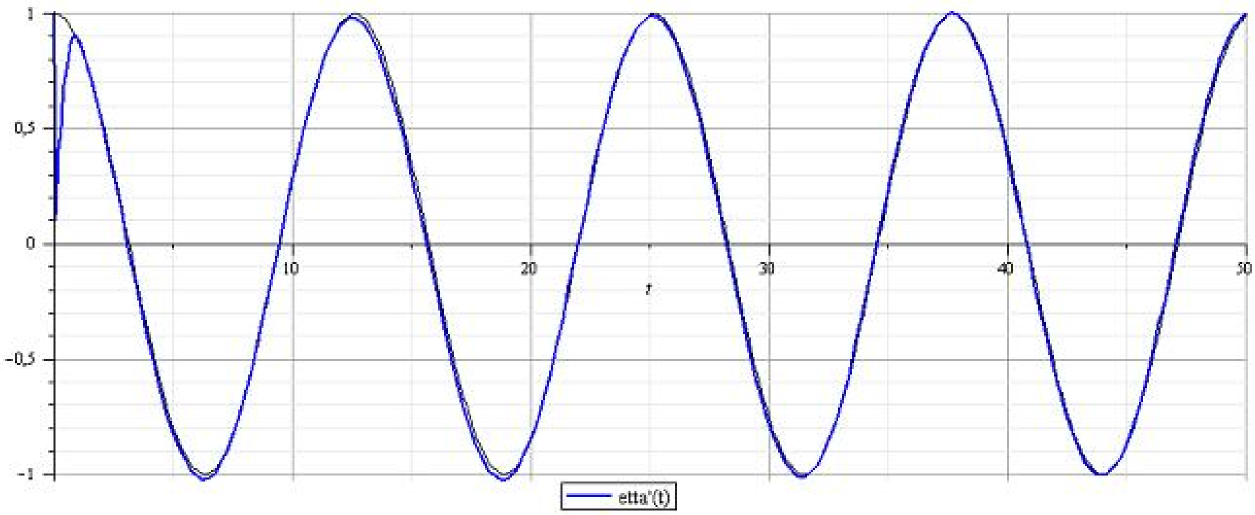

Рис. 3.11: График $t, \dot{\eta}(t)$

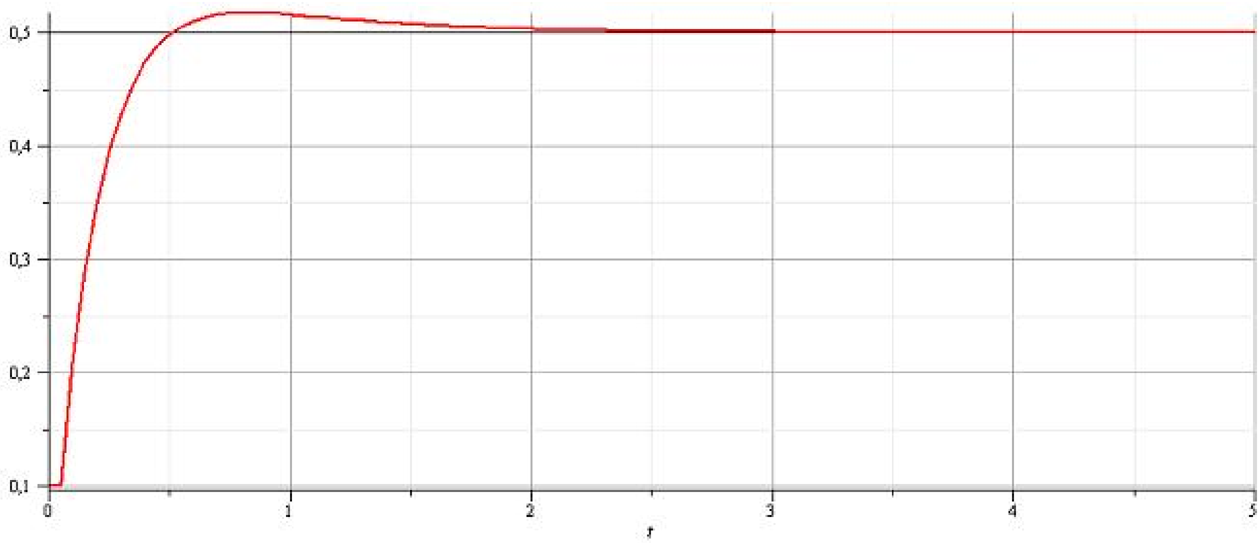

Рис. 3.12: График $t, \dot{\psi}(t)$

Литература

[1] *Айзерман, М.В* Основы теории разрывных систем I / М. А. Айзерман, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 1974.— № 7.— С. 33–47.

[2] *Айзерман, М.В* Основы теории разрывных систем II / М. А. Айзерман, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 1974.— № 8.— С. 39–61.

[3] *Александров, В. В.* Оптимизация динамики управляемых систем / В. В. Александров, В. Г. Болтянский, С. С. Лемак и др.— М.: МГУ, 2000.— 303 с.

[4] *Ананьевский, И. М.* Управление реономными механическими системами с неизвестными параметрами / И. М. Ананьевский // Докл. РАН.— 2001.— Т. 337, № 4.— С. 459–463.

[5] *Ананьевский, И. М.* Два подхода к управлению механической системой с неизвестными параметрами / И. М. Ананьевский // Изв. РАН. Теор. и сист. упр.— 2001.— № 2.— С. 39–47.

[6] *Анапольский, Л. Ю.* Метод сравнения в динамике дискретных систем / Л. Ю. Анапольский; ред. В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский // Вектор-функции Ляпунова и их построение.— Новосибирск: Наука, 1980.— С. 92–128.

[7] *Андреев, А. С.* Метод векторной функции Ляпунова в задаче об управлении систем с мгновенной обратной связью / А. С. Андреев, А. О. Артемова // Ученые записки Ульяновского государственного университета.— 2012.— № 1(4).— С. 15–19.

[8] *Андреев, А. С.* Об управлении движением голономной механической системы / А. С. Андреев, А. О. Артемова // Научно-технический вестник Поволжья.— 2012.— № 6.— С. 80–87.

[9] *Андреев, А. С.* Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости / А. С. Андреев, Т. А. Бойкова // Механика твердого тела.— 2002.— № 32.— С. 109–116.

[10] *Андреев, А. С.* К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // Доклады Академии наук.— 2005.— Т. 400, № 5.— С. 621–624.

[11] *Андреев, А. С.* О стабилизации движения нестационарной управляемой системы / А. С. Андреев, В. В. Румянцев // Автоматика и телемеханика.— 2007.— № 8.— С. 18–31.

[12] *Афанасьев, В. Н.* Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов.— М.: Высшая школа, 1989.— 447 с.

[13] *Беллман, Р.* Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук.— М.: Мир, 1967.— 548 с.

[14] *Богданов, А. Ю.* Общий закон эквиасимптотической стабилизации одного класса нестационарных дискретных систем / А. Ю. Богданов // Ученые записки УлГУ. Сер. "Фундаментальные проблемы математики и механаники".— Вып. 5. - Ульяновск: УлГУ, 1998.— С. 23–30.

[15] *Богданов, А. Ю.* Об устойчивости точки покоя дискретной системы / А. Ю. Богданов, С. В. Черников // Ученые записки УлГУ. Сер. "Фундаментальные проблемы математики и механаники".— Ульяновск: УлГУ, 2004.— Вып. 1(14).- С. 99–115.

[16] *Борцов, Ю. А.* Автоматические системы с разрывным управлением / Ю. А. Борцов, И. Б. Юнгер.— Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1986.— 168 с.

[17] *Бромберг, П. В.* Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования / П. В. Бромберг.— М.: Оборонгиз, 1953.— 224 с.

[18] *Булгаков, Н. Г.* Знакопостоянные функции в теории устойчивости / Н. Г. Булгаков.— Минск: Университетское, 1984.— 78 с.

[19] *Васильев, С. Н.* Метод сравнения в анализе систем 1, 2 / С. Н. Васильев // Дифференц. уравнения.— 1981.— Т. 17, № 9.— С. 1562–1573.

[20] *Видаль, П* Нелинейные импульсные системы / П. Видаль.— М.: Энергия, 1974.— 336 с.

[21] *Вуковбратович, М. К.* Синтез управления возмущенным движением автоматических манипуляторов / М. К. Вуковбратович, Д. М. Стокич // Машиноведение.— 1982.— № 1.

[22] *Гайшун И. В.* Дискретные уравнения с изменяющейся структурой и устойчивость их решений / И. В. Гайшун // Дифференциальные уравнения.— 1997.— Т. 33, № 12.— С. 1607–1614.

[23] *Гайшун И. В.* Устойчивость дискретных процессов Вольтерра с убывающим последействием / И. В. Гайшун // Автомотика и телемеханика.— 1997.— № 6.— С. 118–124.

[24] *Добрынина И. С.* Моделирование динамики манипуляционных роботов с применением метода декомпозиции управления / И. С. Добрынина // Изв. РАН. Техн. и кибернет.— 1995.— № 4.— С. 246–256.

[25] *Добрынина И. С.* Компьютерное моделирование управлением движения системы связных тел / И. С. Добрынина, И. И. Карпов, Ф. Л. Черноусько // Изв. РАН. Техн. и кибернет.— 1994.— № 1.— С. 167–180.

[26] *Дружинин, Э. И.* Об устойчивости прямых алгоритмов расчета программных управлений в нелинейных системах / Э. И. Дружинин // Известия РАН. Теория и системы управления.— 2007.— Т. 3, № 4.— С. 14–20.

[27] *Емельянов, С. В.* Избранные труды по теории управления / С. В. Емельянов.— М.: Наука, 2006.— 450 с.

[28] *Калман, Р.* Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб.— М.: Мир, 1971.— 400 с.

[29] *Кириченова О. В.* Метод функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнения с почти периодическими коэффициентами / О. В. Кириченова, А. С. Котюргина, Р. К. Романовский // Сиб. мат. журн.ин.— 1996.— Т. 37, № 1.— С. 170–174.

[30] *Кириченова О. В.* Об устойчивости решений нелинейных почти периодических систем разностных уравнений / О. В. Кириченова // Сиб. мат. журн.ин.— 1996.— Т. 39, № 1.— С. 45–48.

[31] *Красовский, Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений / Н. Н. Красовский // Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4 / И. Г. Малкин.— М.: Наука, 1966.— С. 475–514.

[32] *Крутько, П. Д.* Метод обратных задач динамики в теории конструирования алгоритмов управления манипуляционных роботов. задача стабилизации / П. Д. Крутько, Н. А. Лакота // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1987.— № 3.— С. 23–30.

[33] *Кулешов, В. С.* Динамика систем управления манипуляторами / В. С. Кулешов, Н. А. Лакота.— М.: Энергия, 1971.— 304 с.

[34] *Кунцевич, В. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак.— М.: Наука, 1977.— 400 с.

[35] *Малкин, И. Г.* Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин.— М.: Наука, 1966.— 530 с.

[36] *Маркеев, А. П.* Теоретическая механика / А. П. Маркеев.— М.: ЧеРо, 1999.— 569 с.

[37] *Матросов, В. М.* Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова 1, 2 / В. М. Матросов // Дифференц. уравнения.— 1968.— Т. 4, № 8.— С. 1374–1386.

[38] *Матюхин, В. И.* Устойчивость движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции / В. И. Матюхин // Автоматика и телемеханика.— 1989.— № 3.— С. 33–44.

[39] *Матюхин, В. И.* Универсальные законы управления механическими системами / В. И. Матюхин.— М.: МАКС Пресс, 2001.— 252 с.

[40] *Матюхин, В. И.* Управление механическими системами / В. И. Матюхин.— М.: Физматлит, 2009.— 320 с.

[41] *Матюхин, В. И.* Управление движением манипулятора / В. И. Матюхин.— М.: ИПУ РАН, 2010.— 96 с.

[42] *Медведев, В. С.* Системы управления манипуляционных роботов / В. С. Медведев, А. Г. Лесков, А. С. Ющенко.— М.: Наука, 1978.— 416 с.

[43] *Перегудова, О. А.* Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем / О. А. Перегудова.— Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2009.— 253 с.

[44] *Попов, Е. П.* Системы управления манипуляционных роботов / Е. П. Попов, А. Ф. Верещагин, С. Л. Зенкевич.— М.: Наука, 1978.— 400 с.

[45] *Пятницкий, Е. С.* Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции / Е. С. Пятницкий // Известия АН СССР. Техническая кибернетика.— 1987.— № 3.— С. 92–99.

[46] *Ремшин, С. А.* Синтез управления двузвенным манипулятором / С. А. Ремшин // Известия РАН. Теор. и сист. упр.— 1997.— № 2.— С. 146–150.

[47] *Ремшин, С. А.* Синтез управления в нелинейной динамической системму на основе декомпозиции / С. А. Ремшин, Ф. Л. Черноусько // Прикл. матем. и мех. — 1998.— Т. 62, вып. 1.— С. 121–128.

[48] *Самарский, А. А.* Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Наука, 1973,- 397 с.

[49] *Тимофеев А. В.* Устойчивость и стабилизация программного движения робота-манипулятора / А. В. Тимофеев, Ю. В. Экало // Автоматика и телемеханика.— 1996.— № 10.

[50] *Халанай А.* Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. — М.: Мир, 1971.- 309 с.

[51] *Уткин, В. И.* Скользящие режими и их применения в системах с переменной структурой / В. И. Уткин. — М.: Наука, 1974.

[52] *Черноусько, Ф. Л.* Методы управления нелинейными механическими системами / Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин.— М.: Физматлит, 2006.— 326 с.

[53] *Черноусько, Ф. Л.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация / Ф. Л. Черноусько, Н. Н. Болотник, В. Г. Градецкий.— М.: Физматлит, 1989.— 368 с.

[54] *Юревич, Е. И.* Теория автоматического управления / Е. И. Юревич.— 3-е изд.— СПб.: БХВ-Петербург, 2007.— 560 с.

[55] *Artstein, Z.* Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations. In the Stability of Dynamical Systems, (Appendix A), CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics.— Vol. 25, SIAM, Philadelphia, 1976.— Pp. 57–76.

[56] *Artstein, Z.* On the limiting equations and invariance of time-dependent difference equations // Stability of dynamical systems (Theory and applications) Proceedings of NSF conference, Mississippi State University .— 1976.— Pp. 3–9.

[57] *Artstein, Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation / Z. Artstein // J. Different. Equat.— 1977.— Vol. 23, no. 2.— Pp. 216–223.

[58] *Bogdanov A. Yu.* The Discrete Nonlinear Nostationary Lossless Systems: Stabilization and Feedback Equivalence // Dynamic Systems and Applications.— Vol. 3.- Dynamic Publishers, Inc, USA.- 2001 .— Pp. 91–98.

[59] *Bogdanov A. Yu.* The Discrete Nonlinear Nostationary Lossless Systems: Stabilization and Feedback Equivalence // Dynamic Systems and Applications.— Vol. 3.- Dynamic Publishers, Inc, USA.- 2001 .— Pp. 91–98.

[60] *Lacshmikantham V.* Stability analysis of nonlinear systems / V. Lacshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk // Singapore: World Scientific.— 1990.— 207 p.

[61] *Lacshmikantham V.* Theory of difference equations: numerical methods and applications / V. Lacshmikantham, D. Trigiante // New York: Marcel Dekker, Inc.— 2002.— 320 p.

[62] *LaSalle J.P.* The stability of dynamical systems. SIAM, Philadelphia, Pennsilvania, 1976. – 76 p.

[63] *LaSalle J.P.* Stability of difference equations. In a Study in Ordinary Differential Equations (edited by J. K. Hale), Studies in Mathematical Series, Mathematical Association of America, 1977.

[64] *LaSalle J.P.* The stability and control of discrete processes. (Applied mathematical sciences; vol. 62), Springer-Verlag, 1986.- 147 p.

[65] *Lin W.* Feedback stabilization of general nonlinear control systems: a passive systems approach // Systems and control letters.- 1995.- Vol. 25.- Pp. 41-52.

[66] *Lin W.* Passivity and absolute stabilization of a class of discrete-time nonlinear systems / W. Lin, C. I. Byrnes // Automatica.- 1995.- Vol. 32(2).- Pp. 263-267.

[67] *Mickens R.* Applications of nonstandard finite differece schemes. World Scientific. Singapore, 2000.

[68] *Peiffer K.* Liapounov's second method applied to partial stability / K. Peiffer, N. Rouche // J. Mechanique.- 1969.- Vol. 8.- № 2.- Pp. 323-334. (Русский перевод: Сборник переводов. Механика. 1970. Т.6:124. С. 20-29).

[69] *Sell G. R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics 1, 2 / G. R. Sell // Trans. Amer. Math. Soc.— 1967.— Vol. 127.— Pp. 241–283.