

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ  
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ  
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ  
"УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Кудашова Екатерина Алексеевна

Математическое моделирование  
управляемых систем  
с дискретным управлением

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы  
и комплексы программ

**ДИССЕРТАЦИЯ**

на соискание ученой степени  
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель  
д.ф.-м.н., профессор  
Андреев А.С.

Ульяновск 2015

## ВВЕДЕНИЕ

### **Актуальность работы**

Разработка управляемых энергетических, промышленных и других процессов и комплексов, бурное развитие робототехники, разработка и эксплуатация новых моделей роботов и промышленных манипуляторов стимулируют активные исследования по математической и прикладной теории управления, моделированию и конструированию управляемых систем.

Моделирование управляемых систем на протяжении длительного времени в значительной степени изучалось на основе непрерывных моделей. Большее преимущество дискретных способов передачи и преобразования сигналов в системах автоматического управления по сравнению с непрерывными, создание современных цифровых управляющих комплексов, процессоров и микропроцессоров требуют развития соответствующего математического и вычислительного аппарата их функционирования.

В число таких задач входят задачи моделирования непрерывных управляемых систем с дискретным управлением, развитие методов исследования устойчивости и стабилизации непрерывных и дискретных управляемых систем, развитие математических методов анализа и конструирования управляемых механических систем.

### **Объект исследования**

Объектом исследования диссертационной работы являются нелинейные управляемые системы с дискретным управлением. Линейность и стационарность управляемой системы позволяют применять для ее анализа методы линейных уравнений, что являлось и является предметом многочисленных исследований [43, 44, 58, 62, 88, 93, 140, 147,

174, 177, 183, 185]. Однако более обширный класс систем автоматического управления составляют нелинейные системы, при этом состоящие из непрерывной и дискретной частей. Нестационарность процесса управления вводит дополнительные сложности их анализа. Наиболее эффективным методом исследования устойчивого функционирования таких систем представляется метод Ляпунова [2, 7, 27, 28, 32–35, 43, 44, 46, 52–62, 74–78, 88–90, 93, 148, 168, 169, 175–180, 189].

Для анализа непрерывно-дискретной структуры системы автоматического управления обоснованным образом используются разностные уравнения. В работе рассматривается задача развития прямого метода Ляпунова для исследования устойчивости и стабилизации систем, моделируемых указанными уравнениями.

Сведения дифференциальных уравнений движения управляемых механических систем с дискретным управлением к разностным уравнениям широко применяются для их анализа. При этом важным является обоснование адекватности такого сведения. Нелинейность уравнений и нестационарность программных движений значительно усложняют исследования. Для голономных механических систем задача моделирования управляемого движения с дискретным управлением является малоисследованной.

### **Предмет исследования**

Методы исследования устойчивости и стабилизации нелинейных нестационарных дискретных систем, математические модели управляемых механических систем с дискретным управлением.

### **Цель работы**

Обоснование новой методики исследования устойчивости и стабилизации

нелинейных нестационарных дискретных управляемых систем. Разработка новых моделей дискретного управления программными движениями управляемых механических систем, в том числе, робототехнических.

Для достижения этой цели в диссертационной работе поставлены и решены следующие задачи:

1. Развитие методики применения функций Ляпунова в исследовании устойчивости и стабилизации систем, моделируемых разностными уравнениями
2. Теоретическое обоснование модели дискретного управления для механической системы с одной степенью свободы и систем, сводящихся к ней
3. Теоретическое обоснование модели дискретного управления для механической системы со многими степенями свободы
4. Разработка модели дискретного управления программных движений двузвенного манипулятора на подвижном основании
5. Разработка модели дискретного управления движением колесного робота с омни-колесами

### **Методы исследования**

В диссертационной работе применялись методы математического моделирования конечномерных управляемых систем, теории управления, нелинейного анализа, теоретической механики, численных методов решения дифференциальных уравнений, структурного и объективно-ориентированного программирования.

### **Научная новизна**

В диссертации разработана новая методика исследования устойчивости и стабилизации управляемых систем, моделируемых нелинейными дискретными уравнениями, новая методика построения структуры дискретного управления движениями механических систем.

### **Основные положения, выносимые на защиту**

1. Новые формы достаточных условий устойчивости нелинейных дискретных систем на основе теоремы сравнения
2. Теоремы о стабилизации нелинейных процессов с дискретным управлением
3. Алгоритмы построения ступенчатого импульсного управления в задачах о стабилизации программных движений механических систем, моделируемых уравнениями Лагранжа
4. Математическая модель дискретного управления двузвенным манипулятором на подвижном основании
5. Компьютерная модель уравнения движения колесного робота с омни-колесами с программным комплексом на языке высокого уровня Java, который представляет собой самостоятельное кроссплатформенное приложение и имеет в своем арсенале собственный математический пакет и графический движок

### **Теоретическая и практическая значимость работы**

1. Проведенное в диссертации развитие прямого метода Ляпунова имеет определенное теоретическое значение для исследования устойчивости и стабилизации систем, моделируемых дискретными уравнениями
2. Алгоритм построения структуры дискретного управления программными движениями механических систем, в

том числе двузвенным манипулятором и колесным роботом, могут быть использованы для конструирования соответствующих управляемых систем

### **Достоверность**

Достоверность разработанных научных положений и выводов обеспечена использованием строгого математического аппарата, применением обоснованных математических моделей управляемых систем, соответствием теоретических и экспериментально-численных результатов.

В первой главе диссертации дается общая постановка исследуемой задачи о моделировании процесса управления управляемой системы, описываемой нелинейными обыкновенными дифференциальными уравнениями, и имеющей дискретное управление (параграф 1.1). Естественным условием реализуемости программного движения является приведение к нему возмущенных движений на конечном отрезке времени или его асимптотическая устойчивость. Соответственно в теории управления ставятся задачи синтеза управления на конечном отрезке времени и задача построения стабилизирующего управляющего воздействия. Исследования этих задач во многих работах проводят посредством приведения модельных уравнений к разностным уравнениям, что требует определенного математического обоснования [43, 44, 48, 145, 147, 153].

Соответственно возникает задача определения условий устойчивости нелинейной дискретной системы. Наиболее эффективным методом ее исследования является прямой метод Ляпунова [90, 94]. Первые результаты в этой области были получены в работах [43, 44, 147, 148]. В дальнейшем, этой проблеме были посвящены многочисленные исследования. Из

соответствующих публикаций выделим монографии [28, 43, 44, 55, 140, 146–148, 168, 177, 179, 180], обзор [101], работы с результатами современных исследований, близких по тематике [1, 7, 32–35, 74, 75, 95, 148, 163, 164].

В параграфе 1.2 изучается развитие прямого метода Ляпунова в направлении применения векторных функций Ляпунова и уравнений сравнения. Представлены новые теоремы о локализации положительного предельного множества, об исследовании устойчивости с использованием знакопостоянных функций Ляпунова. Новизна доказанных теорем состоит в ослаблении условий, достаточных для определения предельных свойств решений нелинейных нестационарных дискретных систем. Эти теоремы используются в следующих параграфах диссертации.

Эффективность новой методики исследования устойчивости нелинейных систем, моделируемых разностными уравнениями, демонстрируется на примере 1.3, где решается задача об устойчивости нелинейной системы типа Вольтерра. Такая модель является широко распространенной моделью как естественнонаучных проблем, так и экономических и технических процессов [29, 30, 49, 133, 134, 161, 171, 196, 198]. В отличие от известных результатов задача исследуется в нестационарной постановке.

Во второй главе представлены результаты по применению полученных теорем развития прямого метода Ляпунова в исследовании задачи о стабилизации для нелинейной дискретной управляемой системы, программных движений модельной механической системы с одной степенью свободы и приводимых к ней систем.

Отсутствие универсальных способов нахождения функций Ляпунова для решения задач об устойчивости и стабилизации стимулирует интенсивные исследования по нахождению эффективных алгоритмов их построения для определенных классов систем. Весьма эффективным для решения задач

о стабилизируемости движений и состояний нелинейных систем является алгоритм их пассивации. Из многочисленных работ в этой области выделим работы [35, 141, 181, 182, 187], непосредственно относящиеся к результатам параграфа 2.1. В этом параграфе представлены результаты о приложении теорем об асимптотической устойчивости из параграфа 1.2 к задаче о стабилизации системы, моделируемой дискретными уравнениями. Сформулированы результаты о стабилизации, являющиеся непосредственными следствиями указанных теорем. Получены новые результаты по построению стабилизирующего управления для пассивных систем и систем, приводящихся к ним.

До настоящего времени задача о стабилизации программных движений механических систем дискретными управляющими воздействиями является малоисследованной. В качестве модельной системы в этой задаче для удобства анализа в параграфе 2.2 рассмотрена механическая система с одной степенью свободы. Методика решения основывается на методе векторных функций Ляпунова. Последовательно выводятся результаты о стабилизации программного движения непрерывным управляющим воздействием, затем дискретным. Обосновывается использование дискретной схемы моделирования.

Обширный класс задач об устойчивости и стабилизации движений механических систем составляют многомерные механические системы с одной позиционной и остальными циклическими координатами. Такие системы могут иметь так называемые стационарные и обобщенные стационарные движения, в которых позиционная координата постоянна.

Классической задаче об устойчивости и стабилизации таких движений под действием непрерывных сил и управлений и её развитию посвящены работы [11, 13, 16, 17, 71] и другие.



В параграфе 2.3 представлены результаты о стабилизации обобщенного стационарного движения механической системы с одной позиционной координатой посредством ступенчатого дискретного стабилизирующего воздействия.

В третьей главе представлены результаты по моделированию управляемых механических систем с дискретным ступенчатым управлением.

Задача о стабилизации программных движений управляемых механических систем, являясь актуальной, в то же время представляется сложной для решения. Различным аспектам этой проблемы посвящены многочисленные исследования, из которых выделяются исследования за последние 50 лет, представленные в монографиях [50, 86, 108, 110, 120, 125, 126, 150, 151], в работах [5, 6, 10, 19, 107, 109, 110, 127–130].

Весьма эффективным является подход, приводящий к декомпозиции в задаче об управлении механической системой, наиболее полно обоснованный в работах научных школ Ф.Л. Черноусько и Е.С. Пятницкого. Оказывается, что для управляемых механических систем специальный выбор управления может за конечное время привести системы в движение при режиме полной компенсации динамического взаимовлияния между подсистемами, т.е. при режиме декомпозиции.

Методика исследований работ Ф.Л. Черноусько и его учеников позволяет решать задачу о переводе управляемой механической системы из произвольного начального положения в терминальное состояние за конечное время.

Управления, решающие задачу о стабилизации программных движений механических систем, представленные в работах Е.С. Пятницкого и его учеников, являются робастными. Этот

подход использует качественную теорию дифференциальных уравнений с разрывной правой частью [2, 3, 42, 138, 142, 143], включая построение определенно-положительной функции Ляпунова. Применение знакопостоянной функции Ляпунова [45] позволяет улучшить условия стабилизируемости [10, 15, 18, 19]. При этом учитывается необходимость решения обратной задачи управления манипуляторами [113, 124], предполагающее схожую структуру управляющего воздействия. Результаты параграфа 1 дополняют результаты [10, 15] на случай ступенчатого импульсного управления.

Уравнения Лагранжа движения механических систем часто используются для исследования задач управления робототехническими системами [24, 50, 80, 86, 104–111, 122–131, 139, 154]. В параграфе 3.2 алгоритм из параграфа 3.1 построения управляющего воздействия, стабилизирующего программные движения механической системы, демонстрируется на примере решения задачи о стабилизации программного движения двузвенного манипулятора на подвижном основании.

Одним из широко распространенных классов робототехнических систем является класс мобильных колесных роботов, которые уже широко используются в различных сферах человеческой деятельности. Особый интерес представляют колесные роботы с роликонесущими колесами типа "omnidirectional или с "омни-колесами". В конструкции колес таких роботов закреплены ролики, оси вращения которых лежат в плоскости колес, что позволяет осуществлять движения в любом направлении без предварительного разворота, что, в свою очередь, значительно повышает маневренность робота.

Исследованию динамики omni-роботов и методов управления их движением посвящены известные работы как отечественных [65–67, 93,

99, 114–116], так и зарубежных [165–167, 190–193] и других авторов. Особенностью модели омни-колеса является наличие скоростей в уравнениях связи, таким образом, движение робота моделируется как движения неголономной механической системы [68, 71–73].

В диссертации рассматривается динамическая модель робота, управляемого посредством двигателей постоянного тока, для соответствующего моделирования используются работы [65–67, 93, 99], также исследована задача об устойчивости и стабилизации стационарных движений. Задача о стабилизации управляемых движений робота рассматривалась в работах [70, 114, 115, 117, 195]. В работе [184] на основе метода вычисляемого момента построено управление, стабилизирующее программное движение робота, обеспечивающее высокую скорость сходимости лишь при достаточно малых отклонениях от этого движения.

Полученные параграфе 3.3 результаты отличаются дискретными законами управления, решающими нелокальную задачу стабилизации программных движений робота, в том числе, при неточно известных массо-инерционных параметрах системы.

В приложении представлена компьютерная модель, реализующая управление колесным роботом с тремя омни-колесами.

Выполненная научно-исследовательская работа была поддержана Государственной стипендией Президента РФ за 2009/2010 уч. год, Государственной стипендией правительства РФ за 2011/2012, 2012/2013, 2013/2014 уч. года.

Результаты диссертационной работы были получены в ходе выполнения задач по следующим проектам:

1. Грант РФФИ «Комплексное моделирование влияния микрочастиц в промышленных системах» (№ 09-08-97004р-поволжье). Исполнитель

2009 г.

2. Проект РФФИ «Развитие научного потенциала высшей школы, 2009-2010 гг.» АВЦП 2.1.1/6194 Исполнитель 2010 г.
3. НИР «Развитие методов и алгоритмов исследования задач об управлении нелинейными механическими системами и компьютерное моделирование управляемого движения системы тел» ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009-2013 гг. (Соглашение № 14.В37.21.0373 от 06 августа 2012 г.). Исполнитель 2012-2013 гг.
4. Проект РФФИ «Динамическое моделирование мобильных роботов с омни-колесами и алгоритмы управления их движением» (№ 12-01-31084). Исполнитель 2012-2013 гг.
5. Проект РФФИ «Методы и алгоритмы синтеза управления колесными механическими системами с учетом запаздывания и параметрической неопределенности» (№ 12-01-33082). Исполнитель 2013-2014 гг.
6. Проект РФФИ «Математические методы и вычислительные алгоритмы конструирования структур управления робототехническими и мехатронными системами» (№ 15-01-08482). Исполнитель 2015 г.
7. НИР «Разработка математических методов исследования динамики и устойчивости деформируемых элементов конструкций, установок, приборов, устройств при аэрогидродинамическом, тепловом ударном воздействиях» ( ГЗ № 2014/232 Минобрнауки России). Исполнитель 2015 г.
8. Грант РФФИ «Разработка математических методов исследования динамики и устойчивости механических систем с распределенными

параметрами при аэрогидродинамическом и ударном воздействиях» (№ 15-01-08599). Исполнитель 2015 г.