ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Макаров Денис Сергеевич

Моделирование робототехнических систем в виде систем связанных твердых и упруго-твердых тел

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Андреев А.С.

Ульяновск 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие производства в XX веке повлекло за собой совершенствование средств

автоматизации. Использование всевозможных управляемых механизмов повлекло за собой необходимость в развитии математического описания их функционирования для обеспечения оптимальности выполняемых операций. Важная роль в вопросе управляемости механических устройств отведена манипуляторам, как средству выполнения роботом необходимой задачи. Происходит постепенное движение от более простых моделей к более сложным, позволяющим учитывать нелинейную движений манипуляторов, решать задачи с запаздыванием, возникающим в цепи обратной связи. Важная роль уделяется также снижению вычислительной сложности расчётов заданного движения. Данное условие необходимо для возможности просчёта движений онлайн, что обеспечивает большую гибкость возможностей использования манипуляторов. Так как модели механических систем часто представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений, одним из естественных вариантов решения задачи анализа поведения таких систем становится метод декомпозиции, позволяющей проводить разбиение системы на подсистемы меньшей размерности для их дальнейшего исследования. Методы декомпозиции развиваются научными школами таких учёных как Ф.Л. Черноусько и Е.С. Пятницкий. Проблема управления движением механических систем, в том числе, манипуляционных роботов, без учета измерения скоростей стала активно изучаться с начала 90-х годов прошлого века. В ранних исследованиях [?, ?, ?, ?, ?] были получены результаты, решающие задачи стабилизации программной позиции и локального отслеживания траектории. Эти результаты, как правило, были основаны на применении двухшаговой процедуры: 1) построение наблюдателя (фильтра) скоростей; 2) синтез управления с применением метода линеаризации обратной связью и функции Ляпунова квадратичного вида. Такие законы управления являются весьма сложными по структуре, так как содержат вычисляемые в режиме он-лайн моменты всех сил, действующих на систему, слагаемое, представляющее собой произведение матрицы инерции системы на программное ускорение. Точная реализация данных законов возможна лишь на имеющейся полной информации о параметрах системы и действующих силах. В работах [?, ?] решены задачи полуглобального и глобального отслеживания траектории механической системы с одной и с n степенями свободы без учета измерения скорости на основе применения приближенного дифференцирования и построения управления при помощи метода линеаризации обратной связью. Как отмечалось ранее, недостатком данного метода является сложность структуры построенного управления, большие объемы вычисления в режиме он-лайн и необходимость построения точной динамической модели системы. В работах [?, ?] для решения задач стабилизации программной позиции и программного движения натуральной механической системы без измерения скоростей были построены наблюдатели, имеющие порядок, равный числу степеней свободы системы, не требующие точной информации о динамической модели системы, что является преимуществом перед нелинейными наблюдателями, предложенными в работах [?,?]. Результаты, полученные в работах [?, ?], применимы лишь для механических систем без учета диссипативных сил, кроме того, решение задачи о стабилизации программного движения получено в малом, что ссужает область применимости данных результатов. В работе [?] дано решение задачи полуглобального отслеживания траектории механических систем, находящихся под действием лишь потенциальных и ограниченных управляющих сил, что ссужает класс рассматриваемых механических систем. В работе [?] на основе применения классического метода Ляпунова построено адаптивное управление многозвенным манипулятором на основе наблюдателя и применения метода бэкстеппинга без измерения скоростей и с учетом неизвестных параметров системы. В работе [?] было получено адаптивное управление манипуляционным роботом без измерения скоростей с использованием фильтров первого порядка. Недостатком работ [?, ?] является сложная структура построенного управления. В работе [?] предложен робастный закон управления, решающий задачу глобального отслеживания траектории

робота манипулятора с неточно известными параметрами без измерения скоростей, недостатком работы является сложный алгоритм построения управления, требующий большого объема вычислений в режиме он-лайн. В работе [?] даны решения задач управления нелинейных механических систем под действием диссипативных сил без измерения скоростей с гравитационным компенсатором: о глобальной стабилизации программной позиции на основе динамической обратной связи с насыщением; глобального отслеживания траектории. При этом нерешенной остается задача построения закона управления без гравитационного компенсатора, в том числе, для систем с неточно известными параметрами. В работе [?] решена задача о глобальной стабилизации программной позиции механической системы, находящейся под действием лишь потенциальных и управляющих сил. С помощью нелинейной обратной связи построен закон управления без измерения скоростей. При этом вопрос о робастности построенного закона не рассматривался. Нерешенной остается задача о стабилизации нелинейной обратной связью программного движения более широкого класса механических систем, находящихся под действием не только потенциальных, но и диссипативных сил. В работе [?] построен закон адаптивного управления, обеспечивающего равномерную глобальную асимптотическую устойчивость заданного движения манипуляционного робота. На основе классического метода Ляпунова и построения нелинейных фильтров задача адаптивного управления решена для механических систем с линейной зависимостью от вектора неизвестных параметров. Отметим, что для реализации построенного в [?] закона требуется проведение громоздких вычислений для построения оценки неизвестных параметров, кроме того, открытым остается вопрос оценки скорости сходимости к программному движению. В работе [?] решена задача об отслеживании нестационарной траектории механических систем без измерения скоростей и без построения наблюдателей. При этом для нахождения

неизвестных скоростей применяется приближенное дифференцирование. Получены условия равномерной глобальной асимптотической устойчивости программного движения системы без диссипации путем построения нелинейного закона управления на основе метода линеаризации обратной связью. Проведенный анализ работ [?] - [?] позволяет утверждать, что к настоящему моменту решение задачи о нелокальной стабилизации нестационарных программных движений нелинейных механических систем с неточно известными параметрами без измерения скоростей далеко от завершения.

В

80-х гг. из-за развития вычислительной техники, учёные при разработке методов моделирования начинают ориентироваться на эффективность метода с точки зрения применимости для решения на компьютере. Метод оценивается с помощью О – символики. Алгоритмы, разработанные с применением метода Лагранжа, имели сложность $O(N^4)$ и должны были быть адаптированы для систем, работающих в реальном времени. Первые исследователи, разработавшие методы порядка $O(N)$ для решения обратной задачи динамики использовали уравнения Ньютона-Эйлера. Так Степаненко и Вукобратович в 1976-м разработали рекурсивный метод Ньютона-Эйлера для описания динамики человеческих конечностей. Орин в 1979 году улучшил этот метод, привязав силы и моменты сил к локальным координатам звеньев для контроля ноги шагающей машины в реальном времени. Лу, Уокер и Пол в 1980-м разработали очень эффективный рекурсивный алгоритм на основе уравнений Ньютона-Эйлера (RNEA), привязав все основные параметры к координатам звеньев. Холлербах, разработавший в том же году алгоритм на основании уравнений Лагранжа, однако, оказалось, что он намного менее эффективен, чем RNEA в терминах количества умножений и сложений. Рекурсивные преобразования и формулы Родрига использовали Вукобратович и Потконяк [И29] (1979 г.), причем их метод позволял решать и прямую задачу динамики, хотя его вычислительная эффективность и не столь высока. Значительный прогресс в сокращении числа операций достигнут в работах Ренода [И24] (1983 г.) и Ли [И15] (1988 г.), также применивших рекурсивные соотношения.[И1]

Самый ранний первый известный алгоритм сложности $O(N)$ для решения прямой задачи динамики был предложен Верещагиным. Этот алгоритм использует рекурсивную формулу для расчета формы Гиббса-Аппеля уравнения движения, и применим к неразветвлённым цепям с вращательными или призматическими соединениями. В 1988 Балафотисом, Пателем и Митрой были представлены дварекурсивных алгоритма на основе уравнений Ньютона-Эйлера, использующие ортогональные тензоры для решения обратной задачи динамики. Они применимы для разомкнутой кинематической цепи (например, для моделирования движения человеческой руки). Один из этих алгоритмов позволяет рассчитать положение манипулятора с шестью степенями свободы, используя приблизительно 489 операций умножения и 420 сложения. Для манипуляторов с более простой геометрической конфигурацией количество операций может быть уменьшено до 277 и 255 соответственно. [И19] Этот алгоритм приблизительно в 1.7 раз быстрее, чем алгоритм RNEA для манипулятора робота с шестью степенями свободы.

В 1954 г. были проведены работы по симуляции эволюции Нильсом Баричелли на компьютере, установленном в Институте Продвинутых Исследований Принстонского университета. Его работа, опубликованная в том же году, привлекла широкое внимание общественности. [И20] С 1957 года, австралийский генетик Алекс Фразер опубликовал серию работ по симуляции искусственного отбора среди организмов с множественным контролем измеримых характеристик. Симуляции Фразера включали все важнейшие элементы современных генетических алгоритмов. [И21] С ростом исследовательского интереса существенно выросла и вычислительная мощь настольных компьютеров, это позволило использовать новую вычислительную технику на практике. В том числе применять генетические алгоритмы для нахождения оптимального управления робототехническими системами (например, симуляции походки человека). Одна из последних на данное время работ в этом направлении - работа, представленная в 2013 г. В ней Гейтенбик, Ван де Панн и Ван дер Стаппен продемонстрировали метод моделирования двуногой ходьбы с использованием генетических алгоритмов. [И22] Их метод основывается на моделировании конечностей существа в виде связанных тел, управляемых мышцами, которые могут перемещать конечности определенным образом и основывается на работе Ванга 2012 г. [И30] Проведенные эксперименты показывают, что в обычных условиях модели приходят к стабильному положению ходьбы через 500-3000 поколений. Недостатками, однако, является небольшая производительность (на персональном компьютере время оптимизации 2-12 часов). Также для метода, как в целом для всех генетических алгоритмов характерна сходимость решения к локальному минимуму, что может не обеспечивать достаточной эффективности.

В первой главе диссертации представлены исследования относительно уравнений с запаздыванием. Результаты, полученные в первой главе далее применяются для построения управления манипуляторами во второй и третьей главах.

Во второй главе строится и обосновывается управление двухзвенным манипулятором, моделируемым в виде системы связанных твёрдых тел. Рассматривается модель манипулятора, описываемая уравнениями Лагранжа 2-го рода. В первом параграфе исслледуется поведение манипулятора без учёта динамики приводов, расположенных в шарнирах и приводящих манипулятор в движение. Во втором параграфе система рассматривается с учётом динамики приводов.

Третья глава начинается с построения модели, описывающей поведения трехзвенного манипулятора, имеющего 3 степени свободы, не учитывающей действия электрических приводов. Во втором параграфе рассматривается модель манипулятора с приводами.

Приложение содержит компьютерную модель динамики трехзвенного манипулятора и реализацию данной модели на языке высокого уровня Java. Представленная программа позволяет задавать закон управления в аналитическом виде, в том числе в виде определенных интегралов с переменным верхним пределом.

1 ПРИМЕНЕНИЕ ПРЯМОГО МЕТОДА ЛЯПУНОВА В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ

1.1 Теоремы об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием

Пусть R^p — линейное действительное пространство p — векторов x с нормой $|x|, R$ — действительная ось, $h > 0$ — заданное действительное число, C — банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^p$ с нормой $\|\varphi\| = sup(|\varphi(s)|, -h \le s \le 0).C_H = \varphi \in C : \|\varphi\| < H > 0$

Рассмотрим неавтономное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.1}$$

где $f : R \times C_H \to R^p$ - некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему предположению.

Определение 1.1. *Для каждого числа r, $0 < r < H$, существует число m_r такое, что выполняется неравенство*

$$|f(t, \varphi)| \le m_r, \forall \varphi \in \bar{C}_r = \varphi \in C : \|\varphi\| \le r < H. \tag{1.2}$$

Пусть выполняется 1.10 выполнено и $\{r_n\}$ — последовательность чисел такая, что $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$, $r_n \to H$ при $n \to \infty$. Определим для всех r_i множество $K_i \subset C$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\varphi(s)| \le r_i, \qquad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \le m_{r_i}|s_2 - s_1|.$$

Множество K_i компактно, положим $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Пусть F - множество всех непрерывных функций f, определенных на $R \times \Gamma$, со значениями в R^p. Через f^τ обозначим сдвиг функции f, $f^\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Для $f \in F$ семейство сдвигов $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R\}$ будет являтся подмножеством F.

Дадим определение сходимости в F как равномерной на каждом компакте $K' \subset R \times \Gamma$: последовательность $\{f_n \in F\}$ сходится к $f \in F$, если $\forall K' \subset R \times \Gamma$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $|f_n(t, \varphi) - f(t, \varphi)| < \varepsilon$, при $n > N = N(\varepsilon)$ и $(t, \varphi) \in K'$.

Эта сходимость метризуема, для всех n для двух функций f_1, $f_2 \in F$ вводится полунорма $\|\cdot\|_n$ и соответствующая псевдометрика ρ_n

$$\|f\|_n = \sup\{|f(t, \varphi)|, \forall (t, \varphi) \in {K'}_n\},$$

$$\rho_n(f_1, f_2) = \frac{\|f_2 - f_1\|_n}{1 + \|f_2 - f_1\|_n},$$

где ${K'}_n = [0, n] \times K_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (K_n определено выше).

Тогда расстояние между функциями $f_1, f_2 \in F$ может быть задано в виде $\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f_1, f_2)$.

Можно убедиться, что при этому будут выполнены все аксиомы метрического пространства. И пространство F будет полным по отношению к введенной метрике.

Допустим, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующему предположению.

Определение 1.2. *Для любого $K \subset C_H$ (K - компакт) функция $f = f(t, \varphi)$ равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in R \times K$, т.е. $\forall K \subset C_H$ и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для любых $(t, \varphi) \in R \times K$, $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in R \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, выполняются неравенства*

$$|f(t_2, \varphi_2) - f(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

Лемма 1.1. *При условии выполнения предположений 1.10 и 1.2 семейство сдвигов $\{f^\tau : \tau \in R\}$ предкомпактно в F.*

Определение 1.3. *Функция $f^* : R \times \Gamma \to R^p$ называется предельной к f, если существует последовательность t_n такая, что $f^{(n)}(t, \varphi) = f(t_n + t, \varphi)$ сходится к $f^*(t, \varphi)$ при $t \to \infty$ в F. Замыкание семейства $\{f^\tau : \tau \in R\}$ в F называется оболочкой $S^+(f)$. Уравнение*

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t) \tag{1.4}$$

называется предельным к (1.1).

При условиях (1.2) и (1.3) уравнение (1.1) является предкомпактным.

Определение 1.4. *Для любого компактного множества $K \subset C_H$ функция $f = f(t, \varphi)$ удовлетворяет условию Липшица т.е, $\forall K \subset C_H$ существует $L = L(K)$, такое, что для любых $t \in R$; $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ будет* *выполнено неравенство*

$$|f(t,\varphi_2)-f(t,\varphi_1)| \leq L\|\varphi_2-\varphi_1\|. \qquad (1.5)$$

При выполнении условия (1.5), каждая предельная функция $f^*(t,\varphi)$ также будет удовлетворять аналогичному условию Липшица относительно компакта $K \subset \Gamma$.

Вследствие этого согласно предположению 1.4 решения уравнения (1.1) при начальном условии $(t,\varphi) \in R \times C_H$ и уравнения (1.4) для $(t,\varphi) \in R \times \Gamma$ будут единственными.

Связь между решениями уравнений (1.1) и (1.4) определяется следующими теоремами:

Теорема 1.1. *Пусть функция $f^* : R \times \Gamma \to R^p$ есть предельная к f в F относительно последовательности $t_n \to +\infty$, а последовательности $\{\alpha_n \in\}$ и $\{\varphi_n \in F\}$ таковы, что $\alpha_n \to \alpha \in$, $\varphi_n \to \varphi \in \Gamma$ при $n \to \infty$. Пусть $x = x(t, t_n+\alpha_n, \varphi_n)$ есть решения уравнения (1.1), а $y(t,\alpha,\varphi)$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)$, определенное для $t \in [\alpha-h,\beta)$.*

Тогда последовательность функций $y^n(t) = x(t_n+t, t_n+\alpha_n, \varphi_n)$ сходится к $y(t,\alpha,\varphi)$ равномерно по $t \in [\alpha-h+\varepsilon, \gamma]$ для малого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 0$ при $\{\alpha_n = \alpha\}$) и каждого γ, $\alpha < \gamma < \beta$.

Теорема 1.2. *Пусть решение (1.1) $x = x(t,\alpha,\varphi)$ ограничено, $|x(t,\alpha,\varphi)| \leq r < H$ для всех $t \geq \alpha - h$. Тогда множество $\omega^+(\alpha,\varphi)$ квазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений $\{\dot{x} = f^*(t,x_t)\}$, а именно, для каждой точки $\psi \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ существует предельное уравнение $\dot{x} =$*

$f^*(t,x_t)$, такое, что точки его решения $y(t,0,\psi)$ в пространстве C содержатся в $\omega^+(\alpha,\varphi)$, $\{y_t(0,\psi), t\in R\}\subset\omega^+(\alpha,\varphi)$.

Прямой метод Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений основан на применении функционалов и функций Ляпунова [].

Пусть $V : R^+ \times C_H \to R$ есть непрерывный функционал Ляпунова и $x = x(t,\alpha,\varphi)$ — решение уравнения (**??**). Функция $V(t) = V(t, x_t(\alpha,\varphi))$ представляет собой непрерывную функцию времени $t\geq\alpha$.

Верхней правосторонней производной от V вдоль решения $x(t,\alpha,\varphi)$ называется значение [**?**, **?**]

$$\dot{V}^+(t,x_t(\alpha,\varphi)) = \lim_{\Delta t\to 0^+}\sup\frac{1}{\Delta t}\left[V(t+\Delta t, x_{t+\Delta t}(\alpha,\varphi)) - V(t,x_t(\alpha,\varphi))\right]. \quad (1.6)$$

В отличие от обыкновенного дифференциального уравнения вычисление производной $\dot{V}^+(t,x_t)$ функционала V в общем случае не имеет достаточно простой формулы.

Иной подход к вычислению производной основан на свойстве инвариантности производной от интегральных форм по некоторому классу функций. Тогда функционал $V = V(t,\varphi)$ допускает уточнение своей зависимости от φ в виде $V = V(t,x,\varphi_x)$, при этом зависимость от φ_x выражается через некоторую интегральную форму.

$$\dot{V}(t,x,\varphi_x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,x,\varphi_x) + \left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\partial V}{\partial x_i}(t,x,\varphi_x)\cdot f_i(t,x,\varphi_x)\right) + \partial V_\varphi(t,x,\varphi_x),$$

или

$$\dot{V}(t,\varphi) = \frac{\partial V}{\partial t}(t,\varphi) + \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t,\varphi) \cdot f_i(t,\varphi) \right) + \partial V_\varphi(t,\varphi). \qquad (1.7)$$

Для изложения в классическом стиле вводят следующие определения, в основе которых лежит использование непрерывных, строго возрастающих функций $a : R^+ \to R^+$, $a(0) = 0$ (функций класса $\mathcal{K}$).

Определение 1.5. *Функционал $V(t,\varphi)$ называется определенно-положительным по $|\varphi(0)|$ (по $\|\varphi\|$), если $V(t,0) \equiv 0$ и для некоторого H_1, $0 < H_1 < H$, существует функция $a \in \mathcal{K}$, такая, что для любых $(t,\varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$ выполнено неравенство*

$$V(t,\varphi) \geq a(|\varphi(0)|) \quad (\geq a(\|\varphi\|)).$$

Определение 1.6. *Функционал $V = V(t,\varphi)$ допускает бесконечно малый высший предел по $\|\varphi\|$, если для некоторого H_1, $0 < H_1 < H$, существует функция $a \in \mathcal{K}$, такая, что для всех $(t,\varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$ выполнено неравенство*

$$|V(t,\varphi)| \leq a(\|\varphi\|).$$

Следуя [], введем следующие определения.

Допустим, что производная $\dot{V}(t,\varphi)$ оценивается неравенством

$$\dot{V}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0, \qquad (1.8)$$

где функционал $W = W(t,\varphi)$ ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве $R \times K$, т.е. для каждого компактного множества $K \subset C_H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m = m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такие, что имеют место неравенства

$$W(t,\varphi) \le m, \qquad |W(t_2,\varphi_2) - W(t_1,\varphi_1)| \le \varepsilon \tag{1.9}$$

для всех $(t,\varphi) \in R \times K$; (t_1,φ_1), $(t_2,\varphi_2) \in R \times K$: $|t_2 - t_1| \le \delta$, $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \le \delta$. Как и в случае f, при этих условиях семейство сдвигов $\{W^\tau(t,\varphi) = W(t+\tau,\varphi), \tau \in\}$ предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций $F_W = \{W : R \times \Gamma \to R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

Определение 1.7. *Функция $W^* \subset F_W$ есть предельная к W, если существует $t_n \to +\infty$, такая, что последовательность $\{W_n(t,\varphi) = W(t_n + t,\varphi)\}$ сходится к W^* в F_W.*

Определение 1.8. *Будем говорить, что отображение $u : (\alpha,\beta) \to C_H$ $(u : R \to C_H)$ принадлежит множеству $\{\varphi \in C_H : W(t,\varphi) = 0\}$, если тождество $W(t,u(t)) \equiv 0$ выполняется для всех $t \in (\alpha,\beta)$ (соответственно для всех $t \in R$), $u(t) \in \{W(t,\varphi) = 0\}$ для $t \in (\alpha,\beta)$ и (для всех $t \in R$).*

На основании теорем 1.1. и 1.2 достигается следующий результат.

Определение 1.9. *Функции $f^* \in F$ и $W^* \in F_W$ образуют предельную пару (f^*, W^*), если они являются предельными к f и W для одной и той же последовательности $t_n \to +\infty$.*

Теорема 1.3. *Предположим, что:*

1) существует непрерывный функционал $V : R \times C_H \to R$, ограниченный снизу на каждом компакте $K \subset C_H$, $V(t,\varphi) \ge m(K)$ для всех $(t,\varphi) \in$

$R \times K$, и такой, что $\dot{V}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0$ для всех $(t,\varphi) \in R \times C_H$;

2) решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ уравнения (1.1) ограничено, $|x(t,\alpha,\varphi)| \leq H_1 < H$ для всех $t \geq \alpha - h$.

Тогда для каждой предельной точки $\psi \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ существуют предельная пара (f^*, W^*) решение $y = y(t)$, $y_0 = \psi$, уравнения $\dot{x} = f^*(t, x_t)$, такие, что $y_t \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ и $y_t \subset\ W^*(t,\varphi) = 0$ для всех $t \in R$.

Рассмотрим задачу об асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.1), полагая, что $f(t,0) \equiv 0$.

Фундаментальное значение иммет следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 1.4. *Предположим, что:*

1) существует функционал $V : R \times C_{H_1} \to (0 < H_1 < H)$, такой, что $V(t,0) = 0$, $a_1(|\varphi(0)|) \leq V(t,\varphi) \leq a_2(\|\varphi\|)$, $\dot{V}^+(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0$ для всех $(t,\varphi) \in R \times C_{H_1}$;

2) для каждой предельной пары (g, U) множество $\{U(t,\varphi) = 0\}$ не содержит решения уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, кроме нулевого.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Рассмотрим задачу об устойчивости невозмущенного движения уравнения (1.1) относительно части переменных $x_1, x_2, ..., x_m (m > 0, m \leq p)$. Для удобства переобозначим эти переменные $y_i = x_i (i = 1...m)$, а остальные — через $z_j = x_{m+j} (j = 1...r = p - m)$. Соответственно, $x^{'} = (x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_p) = (y^{'}, z^{'}), y \in R^m$ есть вектор р — мерного действительного пространства с некоторой нормой $||, z \in R^{p-m}$

есть вектор $(p-m)$ — мерного действительного пространства с некоторой нормой, при этом норму $|x|$ определим равенством $|x| = |y| + |z|$. Через C^y обозначим банахово пространство непрерывных функций $\psi : [-h, 0] \to R^m$ с нормой $\|\psi\| = sup(|\psi(s)|, -h \leq s \leq 0)$, пространство $C = C^y \times C^z$, для $\varphi \in C$ имеем $\varphi^{'} = (\psi^{'}, \theta^{'})$ и $\|\phi\| = \|\psi\| + \|\theta\|$. Правая часть уравнения (1.1), вектор-функция $f = f(t, \varphi)$ может быть записана в виде

а само уравнение можно представить в виде

$$\dot{y}(t) = f^1(t, y_t, z_t), \dot{z}(t) = f^2(t, y_t, z_t). \tag{1.10}$$

Будем полагать, что правая часть этого уравнения $f = (f^1, f^2)$ определена, непрерывна в области $R^+ \times C^y_H \times C^z, C^y_H = \psi \in C^y : \|\psi\| < H, 0 < H < +\infty$, удовлетворяет в этой области условиям теорем о существовании, единственности, непрерывной зависимости и продолжимости решений $x = x(t, \alpha, \phi), (\alpha, \phi) = (\alpha, \psi, \theta) \in R \times C^y_H \times C^z$.

Определение 1.10. *Пусть функция* $f^1(t, \phi)$ *ограничена в области* $R^+ \times \bar{C}^y_r \times C^z$; *для каждого* $r, 0 < r < H$, *существует число* $m = m(r) > 0$, *такое, что для всех* $(t, \psi, \theta) \in R^+ \times \bar{C}^y_r \times C^z \bar{C}^y_r = \psi \in C^y : \|t\| \leq r$ *выполняется неравенство* $|f(t, \psi, \phi) \leq m$.

Ограниченность решения уравнения позволяет применить для выявления устойчивости относительно части переменных свойство квазиинвариантности его положительного предельного множества, определяемое построением предельных уравнений.

Область Γ, в данной задаче строим следующим образом.

Пусть $r_1^{(j)}$ есть последовательность чисел, таких, что $r_1^{(1)} < r_1^{(2)} < ... < r_1^{(j)} < ..., r_1^{(j)} \to H$ при $j \to \infty, r_2^{(j)}$ — последовательность $r_2^{(1)} < r_2^{(2)} < ... < r_2^{(j)} < ..., r_2^{(j)} \to \infty$ при $j \to \infty$. Для каждого $j \in N$ определяем множество $K_j \in C_H^y \times C^z$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\psi(s)| \leq r^{(j)}j_1, |\theta(s)| \leq r^{(j)}j_2, |\phi(s_2) - \phi(s_1)| \leq m_r|s_2 - s_1| \tag{1.11}$$

и полагаем $\Gamma = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$.

В области $R \times \Gamma$ определяем семейство предельных к $f(t, \Phi)$ функций $g : R \times \Gamma \to R^p$ и соответственно, семейство предельных уравнений

$$\dot{x}(t) = g(t, x_t). \tag{1.12}$$

Существование функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную, позволяет применить к решению задачи об устойчивости по части переменных принцип квазиинвариантности. При этом, существенной особенностью является определение ограниченности решений.

Теорема 1.5. *Пусть 1) каждое решение уравнения () из некоторой δ_0 — окрестности $\|\Phi\| < \delta_0 > 0$ точки $\Phi = 0$ ограниченно по z; 2) существует функционал $V = V(t, \Phi), V(t, 0) = 0$, такой, что для всех $(t, \Phi) \in R^+ \times C_{H_1}^y \times C^z (0 < H_1 < H)$*

$$V(t, \Phi) \geq a(|\psi(0)|), \dot{V}(t, \Phi) \leq -W(t, \Phi) \leq 0; \tag{1.13}$$

3) для каждой пары (g, U) и любого числа $_0 \geq 0$ решениями уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, содержащимися во множестве $V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 \cap$

$U(t, \varphi) = 0$, могут быть лишь решения $x = x(t) : y(t) \equiv 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения асимптотически устойчиово по y.

В следующей теореме будем полагать, что функционал $V = V(t, \Phi)$ является ограниченным, равномерно непрерывным на каждом множестве $R^+ \times R$.

Теорема 1.6. *Предположим, что: 1) решение уравнения из некоторой окрестности $\|\Phi\| < \delta_0 > 0$ точки $\Phi = 0$ равномерно по r — ограничены по z;*

2) существует функционал $V(t, \Phi)$, такой, что для $(t, \Phi) = (t, \psi, \theta) \in R^+ \times C^y_{H_1} \times C^z$ имеют место соотношения

$V(t, \Phi) \geq a_1(|\psi(0)|), V(t, \Phi) \leq a_2(\|\Phi\|), \dot{V}(t, \Phi) \leq -W(t, \Phi) \leq 0;$

3) каждая предельная совокупность (g, U, V^*) такова, что множество $V^*(t, \Phi) = c = c_0 > 0 \cap U(t, \Phi) = 0$ не содержит решений уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$

1.2 Развитие метода векторных функций Ляпунова в исследовании устойчивости дискретных систем

Здесь будет второй параграф первой главы.

1.3 Устойчивость дискретной модели типа Вольтерра

Здесь будет третий параграф первой главы.

2 УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ДВУЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА (БЕЗ ПРИВОДА И С ПРИВОДОМ)

2.1 Теоремы о стабилизации

Рассмотрим математическую модель двухзвенного манипулятора. Манипулятор состоит из неподвижного основания и двух абсолютно жестких звеньев G_1, G_2. Элементы конструкции соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, и O_2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2.

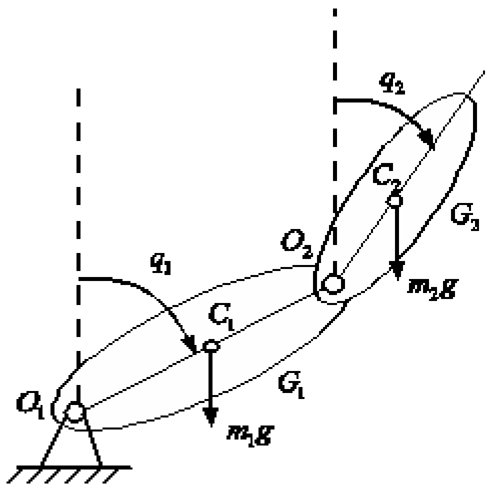

Рис. 2.1: Модель двузвенного манипулятора

Введем обозначения: $q_i (i = 1, 2)$ — углы поворотов звеньев манипулятора; l_{q_i} — длина отрезка O_iC_i; l_1 — длина отрезка O_2C_2; m_i — масса i-го звена; I_i — момент инерции i-го звена относительно оси шарнира O_i; g — ускорение свободного падения.

Выражение для кинетечиской энергии манипулятора имеет в таком случае следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2 + m_2l_1l_{q_2}\cos(q_2 - q_1)\dot{q}_1\dot{q}_2. \tag{2.1}$$

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = M_1 + U_1, \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = M_2 + U_2, \end{cases} \tag{2.2}$$

где M_i — момент, создаваемый силой тяжести в i-м шарнире, $M_1 = (m_1l_{g_1} + m_2l_1)g\sin q_1, M_2 = m_2l_{q_2}g\sin q_2, U_i$ — управляющие воздействия.

Из выражения для кинетической энергии T находим уравнения движения

$$\begin{cases} (I_1 + m_2l_1^2)\ddot{q}_1 + m_2l_1l_{g_2}\cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_2 - m_2l_1l_{g_2}\sin(q_2 - q_1)\dot{q}_2^2 = \\ = (m_1l_{g_1} + m_2l_1)g\sin q_1 + U_1, \\ I_2\ddot{q}_2 + m_2l_1l_{g_2}\cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_1 + m_2l_1l_{g_2}\sin(q_2 - q_1)\dot{q}_1^2 = m_2l_{g_2}g\sin q_2 + U_2 \end{cases} \tag{2.3}$$

Пусть $q = q(q_1, q_2)'$ — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и $X = (q^0(t), \dot{q}^0(t)) : [t_0, +\infty) \to R^4, \|q^0(t)\| \le g_0, \|\dot{q}^0(t)\| \le g_1, \|\ddot{q}^0(t)\| \le g_2$ есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q = q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$. Символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма вектора.

Пусть $(q^0(t), \dot{q}^0(t)) \in X$ — какое-либо программное движение, реализуемое программным управлением $U = U^0(t)$. Введем возмущения $x = q - q^0(t), \dot{x} = \dot{q} - \dot{q}^0(t)$

и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x} = \dot{x}' C^{(1)}(t,x)\dot{x} + Q^{(1)}(t,x) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) + U^{(1)}, \qquad (2.4)$$

$$A^{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} I_1 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) \\ m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) & I_2 \end{pmatrix}$$

$$C^{(1)}(t,x) = (C^{(1)}_{(1)}(t,x), C^{(1)}_{(2)}), Q^{(1)}(t,x) = F(t,x)p(x), Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = D(t,x)\dot{x},$$

$$C^{(1)}_{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) \end{pmatrix},$$

$$C^{(2)}_{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} -m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} f_{11}(t,x) & f_{12}(t,x) \\ f_{21}(t,x) & f_{22}(t,x) \end{pmatrix},$$

$$p(x) = \begin{pmatrix} \sin(x_1/2) \\ \sin(x_2/2) \end{pmatrix},$$

$$D(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & c^{(1)}_{22(1)}(t,x)\dot{q}^0_2(t) \\ c^{(1)}_{11(1)}(t,x)\dot{q}^0_1(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$f_{11}(t,x) = 2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_2/2)(\ddot{q}^0_2(t)\sin(q^0_1(t) - q^0_2(t) + (x_1 - x_2)/2) -$

$- (\dot{q}^0_2(t))^2\cos(q^0_1(t) - q^0_2(t) + (x_1 - x_2)/2)) + 2g(m_1l_{g_2} + m_2l_2)\cos(q^0_1(t) + x_1/2)$

$f_{12}(t,x) = -2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_1/2)(\ddot{q}^0_2(t)\sin(q^0_1(t) - q^0_2(t) + (x_1 - x_2)/2) +$

$+ (\dot{q}^0_2(t))^2\cos(q^0_1(t) - q^0_2(t) + (x_1 - x_2)/2))$

$f_{21}(t,x) = 2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_2/2)(\ddot{q}^0_1(t)\sin(q^0_1(t) - q^0_2(t) + (x_1 - x_2)/2) +$

$+ (\dot{q}^0_2(t))^2\cos(q^0_1(t) - q^0_2(t) + (x_1 - x_2)/2))$

$f_{22}(t,x) = -2m_2l_1l_{g_2}\cos(x_1/2)(\ddot{q}^0_1(t)\sin(q^0_1(t) - q^0_2(t) + (x_1 - x_2)/2) -$

$- (\dot{q}^0_2(t))^2\cos(q^0_1(t) - q^0_2(t) + (x_1 - x_2)/2)) + 2gm_2l_{g_2}\cos(q^0_2(t) + x_2/2)$

$$U^{(1)} = U - U^0(t)$$

Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $U^{(1)} = U^{(1)}(t,x,\dot{x})$, $U^{(1)}(t,0,0) \equiv 0$, при котором бы невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ системы (2.2) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иными словами, управление

$$U = U^0(t) + U^{(1)}(t, q - q^0(t), \dot{q} - \dot{q}^0(t))$$

обеспечивало бы стабилизацию программного движения $(q^0(t), \dot{q}^0(t)) \in X$ системы (2.1).

Рассмотрим решение задачи стабилизации в области $G = (x,\dot{x}) \in R^4 : \|x\| < \epsilon, \|\dot{x}\| < \epsilon, \epsilon = const > 0$ с помощью непрерывного управления вида

$$U^{(1)}(x,\dot{x}) = B(\dot{x}+p(x))$$

где $B \in R^{2\times 2}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению. Возьмем для системы (2.2) вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)'$ с коэффициентами вида $V^1 = \|p(x)\|, V^2 = \sqrt{(\dot{x}+p(x))'A^{(1)}(t,x)(\dot{x}+p(x))}$.

Вычисляя производную по времени вектор-функции Ляпунова V в силу системы (2.1), получим следующие оценки:

$$\dot{V}^1 \leq -mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda_1}, \dot{V}^2 lem_2 V^1 - \mu_2 V^2 + m_3 (V^1)^2 + m_4 (V^2)^2 + m_5 V^1 V^2,$$

где положительные постоянные $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, m_i (i = 1, 2, ..., 5)$ определяются из следующих условий:

$$\lambda_1^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 - \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 + \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2}$$

$\mu_1 = \frac{1}{2}\cos(\frac{\epsilon}{2}), m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \max \frac{\lambda_2^2 + 2\sqrt{\lambda_{max}[(D-F)'(D-F)]}}{2\lambda_1}, m_3 = \frac{m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, m_4 = \frac{2m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, m_5 = \frac{3m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, \mu_2 = \frac{-\lambda_2^2 - 4g_1 m_2 l_q l_{g_2} - \lambda_{max}(B+B')}{2\lambda_2}$

Здесь $\lambda_m ax$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (2.1) можно построить следующую систему сравнения:

$$\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda_1} u^2, \dot{u}^2 = m_2 u^1 - \mu_2 u^2 + m_3 (u^1)^2 + m_4 (u^2)^2 + m_5 u^1 u^2 \quad (2.5)$$

Согласно теореме сравнения об асимптотической устойчивости [5] из свойства асимптотической устойчивости нулевого решения системы сравнения (2.4) следует свойство равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.2). Получим условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы (2.4) с областью притяжения $(u^1, u^2) \in R^2 : 0 \leq u^1 \leq \delta_1 = const > 0, 0 \leq u^2 \leq \delta_2 = const > 0$. Пусть найдется такое число $\gamma > 0$, что выполняются соотношения:

$$\gamma = \frac{\delta_2 m_1}{\delta_1 \lambda_1 \mu_1}, \mu_2 > \frac{m_1}{\gamma \lambda_1 \mu_1}(m_2 + \delta_1 m_3) + m_4 \delta_2 + m_5 \delta_1 \quad (2.6)$$

Тогда можно показать, что функция $\widetilde{u}(t) = \max\left(u^1(t), \delta_1 u^2(t)/\delta_2\right)$ будет монотонно стремиться к нулю при $t \to \infty$, и, значит, нулевое решение системы сравнения (2.4) будет асимптотически устойчиво. При невозможности практической реализации программного управления стабилизацию программного движения можно осуществить при помощи разрывного управления вида

$$U^{(1)}(x, \dot{x}) = B \; sign(\dot{x} + p(x)) \quad (2.7)$$

Численное моделирование движения манипулятора при действии управлений (2.3) и (2.6) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории:

$m_1 = 0,5$кг, $m_2 = 0,3$кг, $l_1 = 0,5$м, $l_2 = 0,5$м , $l_{g_1} = 0,25$ м, $l_{g_2} = 0,3$, $I_1 = 0,01$ кг·

На рисунках 2 и 3 представлены результаты моделирования при управлениях (2.3) и (2.6) соответственно.

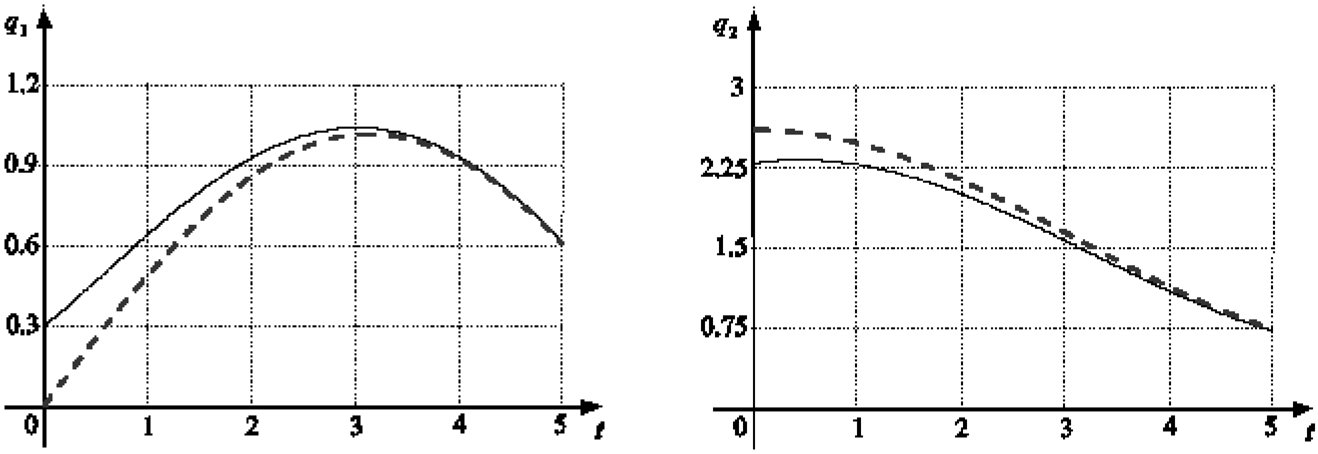

Рис. 2.2: Результаты моделирования при управлении (2.3)

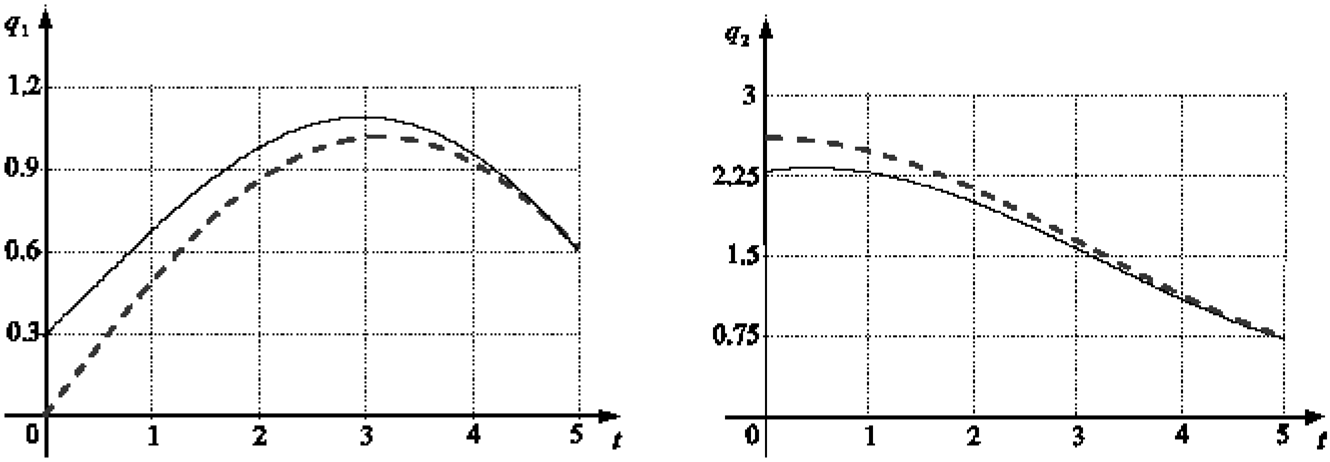

Рис. 2.3: Результаты моделирования при управлении (2.6)

2.2 Стабилизация положения равновесия модельного уравнения

Здесь будет второй параграф второй главы.

2.3 Стабилизация движения голономной механической системы с циклическими координатами

Здесь будет третий параграф второй главы.

3 УПРАВЛЕНИЕ ДВИЖЕНИЕМ ТРЕХЗВЕННОГО МАНИПУЛЯТОРА (БЕЗ ПРИВОДА И С ПРИВОДОМ)

3.1 Стабилизация программных движений голономной механической системы

Рассмотрим математическую модель трехзвенного манипулятора, состоящую из трех абсолютно жестких звеньев G_1, G_2, G_3, представляющих собой однородные стержни. Манипулятор установлен на неподвижном основании, на которое опирается звено G_1. Звено G_1 таким образом, может совершать только вращения вокруг вертикальной оси. Звенья соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, и O_2 таким образом, что звенья G_2 и G_3 могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2. На конце звена G_3 находится груз, перемещаемый манипулятором.

Введем обозначения: $q_i (i = 1,2,3)$ — углы поворотов звеньев манипулятора; $Q_i (i = 1,2,3)$ — управляющие моменты относительно осей соответствующих звеньев; l_i — длина i-го звена; m_i — масса i-го звена; m_0 — масса перемещаемого груза; $m_{30} = m_0 + m_3$; J_{01} — момент инерции первого звена относительно оси вращения; r_2 и r_3 — соответственно расстояния от центров тяжести второго и третьего звеньев с перемещаемым грузом относительно осей соответствующих звеньев; g —

ускорение свободного падения. Уравнения движения манипулятора имеют вид:

$$\begin{cases} (J_{01} + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2)\ddot{q}_1 + \\ +2(m_2 r_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 \cos q_2)\dot{q}_1 \dot{q}_2 + \\ +2m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 = Q_1, \\ (m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)\ddot{q}_3 + \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_3^2 - \\ -(m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2) \cos q_2 \dot{q}_1^2 + (m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \sin q_2 = Q_2, \\ \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)\ddot{q}_2 + m_{30} r_3^2 \ddot{q}_3 - \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_2^2 - \\ -m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1^2 + m_{30} g r_3 \sin q_3 = Q_3. \end{cases} \tag{3.1}$$

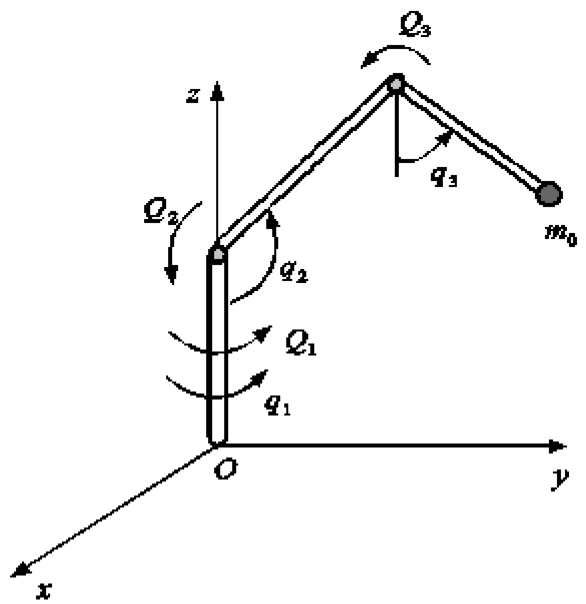

Рис. 3.1: Модель трехзвенного манипулятора

Пусть $q = (q_1, q_2, q_3)$ — вектор обобщенных координат представленной выше системы. Таким образом, уравнения движения можно представить в следующей векторно-матричной форме: $A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K\dot{q} = Q$ где

$$A(q) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Элеменыт матрицы инерции $A(q)$:

$$a_{11} = J_{01} + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2$$

$$a_{22} = m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2$$

$$a_{23} = \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)$$

$$a_{32} = a_{23}$$

$$a_{33} = m_{30} r_3^2$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы $C(q, \dot{q})$:

$$c_{11} = 2(m_2 r_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 \cos q_2) \dot{q}_2$$

$$c_{13} = 2 m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_3$$

$$c_{21} = -(m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2) \cos q_2 \dot{q}_1$$

$$c_{31} = -m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1$$

$$c_{32} = -\frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_2$$

$A(q)$ — положительно определенная матрица инерции системы.

3.2 Построение управления

Пусть $q = (q_1, q_2, q_3)'$ — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и $X = q^0(t) : [t_0, +\infty) \to R^3, \|q^0(t)\| \leq q_0, \|\dot{q}^0\| \leq g_1, \|q^0(t)\| \leq q_0, \|\ddot{q}^0\| \leq g_2$ есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q = q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$. Символом $\|\cdot\|$ обозначена евклидова норма вектора. Уравнения движения (3.1) можно представить в следующей векторно-матричной форме:

$$A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K\dot{q} = Q, \tag{3.2}$$

где $A(q)$ — положительно определенная матрица инерции системы, $C(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i C_{(i)}(q)$, , j, k-ый элемент $c_{(i)jk}(q)$ матрицы $C_{(i)}(q)$ определяется в виде $c_{(i)jk}(q) = \frac{1}{2}(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_j})$; K — матрица коэффициентов моментов сил вязкого трения, действующих в системе. Система (3.2) имеет следующее свойство: матрица $\dot{A}(q(t)) - 2C(q(t), \dot{q}(t))$ является кососимметричной. Пусть $q^0(t) \in X$ — какое-либо программное движение системы (3.2), реализуемое программным управлением $Q = Q^{(0)}(t)$, т.е. имеет место тождество $A(q^0(t))\ddot{q}^0(t) + C(q^0(t), \dot{q}^0(t))\dot{q}^0(t) + K\dot{q}^0(t) \equiv Q^{(0)}(t)$. Введем возмущения $x = q - q^0(t)$ и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x} + C^{(1)}(t,x,\dot{x})\dot{x} + K\dot{x} = Q^{(1)}(t,x,\dot{x}) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x}), \tag{3.3}$$

где $A^{(1)}(t,x) = A(x + q^0(t))$, $C^{(1)}(t,x,\dot{x}) = C(x+q^0(t),\ \dot{x}+\dot{q}^0(t))$, $Q^{(1)}(t,x,\dot{x}) = Q - Q^{(0)}(t)$, $Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = (A^{(1)}(t,0) - A^{(1)}(t,x))\ddot{q}^0(t) + (C^{(1)}(t,0,0) - C^{(1)}(t,x,\dot{x}))\dot{q}^0(t)$. Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $Q^{(1)}(t,x,\dot{x})$, при котором невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ системы (3.3) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иначе, управление $Q = Q^{(1)}(t, q - q^{(0)}(t), \dot{q} - \dot{q}^{(0)}) + Q^{(0)}(t)$ обеспечивало бы стабилизацию программного движения системы (3.2).

3.3 Синтез управления в задаче стабилизации программного движения манипулятора

Рассмотрим решение задачи стабилизации в области $G = (x,\dot{x}) \in R^6 : \|x\| < \epsilon, \|\dot{x}\| < \epsilon, \epsilon = const > 0$ с помощью непрерывного управления вида

$$Q^{(1)}(x,\dot{}) = B(\dot{x} + p(x)),$$

где $B \in R^{3\times 3}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению; $p(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция, такая, что $\|p(x)\| \geq p_0(x) > 0, p_0(0) = 0$. Возьмем для системы (3.3) вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)'$ с коэффициентами вида $V^1 = \|p(x)\|, V^2 = \sqrt{(\dot{x}+p(x))' A^{(1)}(t,x)(\dot{x}+p(x))}$.

Вычисляя производные по времени от квадратов компонент вектор-функции Ляпунова в силу системы (3.3), получим

$$\frac{d}{dt}(V^1(x))^2 = 2V^1\dot{V}^1 = 2p^{'}\dot{p} = 2p^{'}\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x} = -2p^{'}\frac{\partial p}{\partial x}p + 2p^{'}\frac{\partial p}{\partial x}(\dot{x}+p),$$

$$\frac{d}{dt}(V^2(x))^2 = 2V^2\dot{V}^2 = 2(\ddot{x}+\dot{p})^{'}A^{(1)}(\dot{x}+p)+(\dot{x}+p)^{'}\dot{A}^{(1)}(\dot{x}+p) = 2(-C^{(1)}(t,x,\dot{x})\dot{x}-R\dot{x}$$

Отсюда получим следующие оценки: $\dot{V}^1 \leq -\mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)}V^2, \dot{V}^2 \leq \frac{m_2}{\lambda(t,x)}V^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)}$, где положительные постоянные μ_2, μ_2, m_1, m_2 и функция $\lambda(t,x)$ определяются из следующих условий:

$$p^{'}\frac{\partial p}{\partial x}p \geq \mu_1\|p\|^2, \|\frac{\partial p}{\partial x}\| \leq m_1, \lambda(t,x)\|\dot{x}+p\| = V^2, \tag{3.4}$$

$$\|Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) \leq (m_2 - \|C^{(1)}(t,x,\dot{x}) + K - A^{(1)}(t,x)\frac{\partial p}{\partial x}\|)\|p\| \tag{3.5}$$

$$\lambda_{max}(B + B^{'} - K - K^{'} + A^{(1)}(t,x)\frac{\partial p}{\partial x} + (\frac{\partial p}{\partial x})^{'}A^{(1)}(t,x)) \leq -2\mu_2 \tag{3.6}$$

Здесь $\lambda_m ax()$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (3.3) можно построить следующую систему сравнения:

$$\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)}u^2, \dot{u}^2 = \frac{m_2}{\lambda(t,x)}u^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)}u^2. \tag{3.7}$$

Согласно теореме сравнения об экспоненциальной устойчивости [5] из свойства экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы сравнения (3.5) следует аналогичное свойство нулевого решения системы (3.3). Можно показать, что нулевое решение системы сравнения (3.5) будет экспоненциально устойчиво при следующем условии $4\mu_1\mu_2 > (m_1/k +$

$m_2k)^2, k = const > 0$. Численное моделирование движения манипулятора при действии управления (3.4) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории

$m_2 = 15$ кг, $m_3 = 2,5$ кг, $m_0 = 2$ кг, $l_2 = 1$ м, $r_2 = 0,5$ м, $r_3 = 0,5$ м, $J_{01} = 0,1$ кг·м

На рисунках 2–4 представлены результаты моделирования. Пунктирной линией обозначены составляющие программного движения, а сплошной – реального движения системы.

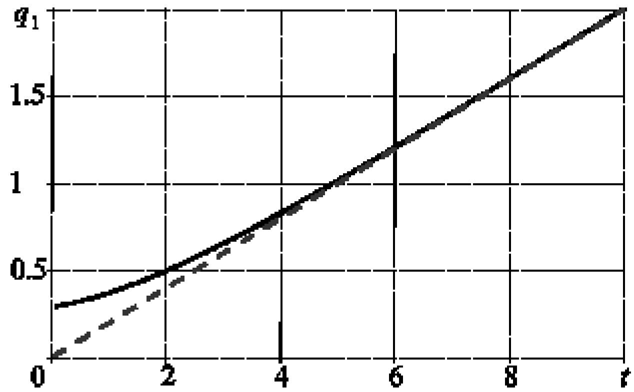

Рис. 3.2: Зависимость угла поворота первого звена от времени при управлении (3.4)

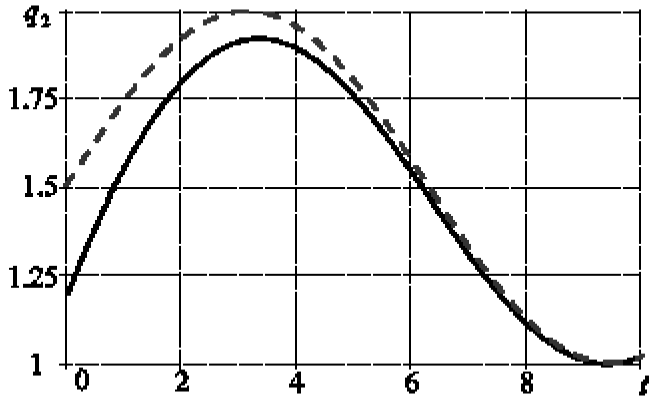

Рис. 3.3: Зависимость угла поворота второго звена от времени при управлении (3.4)

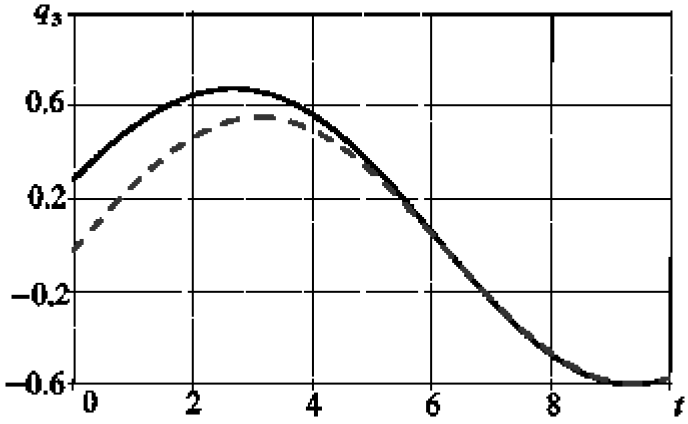

Рис. 3.4: Зависимость угла поворота третьего звена от времени при управлении (3.4)

3.4 Моделирование управляемого движения двузвенного манипулятора на подвижном основании

Здесь будет второй параграф третьей главы.

3.5 Моделирование управления в задаче о стабилизации движения колесного робота с омни-колесами

Здесь будет третий параграф третьей главы.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертационной работе разработаны новые методы исследования устойчивости и стабилизации нелинейных управляемых систем, моделируемых дискретными уравнениями; обоснована методика построения моделей дискретного управления движениями управляемых механических систем. Основные результаты работы состоят в следующем.

1. Проведено развитие метода векторных функций Ляпунова а исследовании устойчивости и стабилизации нелинейных систем, моделируемых дискретными уравнениями.

2. Полученные результаты являются развитием для дискретных систем соответствующих теорем из работ [8, 9, 12] для систем, описываемых дифференциальными уравнениями, обобщением результатов работ из [33, 35, 44, 91, 102, 173–175, 196]. Эффективность новой методики в исследовании устойчивости и стабилизации представлена на примере решения задачи об устойчивости системы, моделируемой уравнениями типа Вольтерра. Получено решение задачи о стабилизации программных движений управляемых механических систем со ступенчатым импульсным управлением. Построены соответствующие модели управления системой с одной и многими степенями свободы, с одной позиционной и остальными циклическими координатами. Эти результаты представляют собой развитие для дискретного управления соответствующих результатов о стабилизации программных

движений механических систем посредством непрерывных и релейных управлений из работ [10, 13, 15, 16, 19, 51, 109, 120–123, 127–129, 143, 155].

3. Представлена модель управляемого двузвенного манипулятора на подвижном основании со ступенчатым импульсным управлением.

4. Разработана компьютерная модель управляемого движения колесного мобильного робота с тремя омни-колесами. Разработанный программный комплекс на языке высокого уровня Java с самостоятельным кроссплатформенным приложением позволяет составить анализ процесса управления при различных способах его задания – в виде функций, в виде поточечного закона и их модификаций.

Основные результаты работы опубликованы в работах [23, 34, 37, 39–41, 81–83, 85] в том числе, в статьях [14, 20–22, 25, 36, 38, 64, 84] опубликованных в журналах из списка ВАК. На программу моделирования управляемого движения мобильного робота получен патент РФ на программу для ЭВМ [86].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Абдуллин, Р. З.* Метод сравнения в устойчивости нелинейных разностных уравнений с импульсными воздействиями / Р. З. Абдуллин // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 11.— С. 44-56.

[2] *Айзерман, М.В* Основы теории разрывных систем I / М. А. Айзерман, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 1974.— № 7-8.— С. 33–47. С. 39–61.

[3] *Александров, В. В.* Оптимизация динамики управляемых систем / В. В. Александров, В. Г. Болтянский, С. С. Лемак и др.— М.: МГУ, 2000.— 303 с.

[4] *Ананьевский, И. М.* Управление реономными механическими системами с неизвестными параметрами / И. М. Ананьевский // Докл. РАН.— 2001.— Т. 337, № 4.— С. 459–463.

[5] *Ананьевский, И. М.* Два подхода к управлению механической системой с неизвестными параметрами / И. М. Ананьевский // Изв. РАН. Теор. и сист. упр.— 2001.— № 2.— С. 39–47.

[6] *Анапольский, Л. Ю.* Метод сравнения в динамике дискретных систем / Л. Ю. Анапольский; ред. В. М. Матросов, Л. Ю. Анапольский // Вектор-функции Ляпунова и их построение.— Новосибирск: Наука, 1980.— С. 92–128.

[7] *Андреев, А. С.* Об управлении движением колесного мобильного робота / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // ПММ.— 2015.— Т. 79.— № 4.— С. 451–462.

[8] *Андреев, А. С.* О стабилизации управляемых систем с гарантированной оценкой качества управления / А. С. Андреев, С. П. Безгласный // ПММ.— 1997.— Т. 61.— № 1.— С. 44–51.

[9] *Андреев, А. С.* Метод векторной функции Ляпунова в задаче об управлении систем с мгновенной обратной связью / А. С. Андреев, А. О. Артемова // Ученые записки Ульяновского государственного университета.— 2012.— № 1(4).— С. 15–19.

[10] *Андреев, А. С.* Об управлении движением голономной механической системы / А. С. Андреев, А. О. Артемова // Научно-технический вестник Поволжья.— 2012.— № 6.— С. 80–87.

[11] *Андреев, А. С.* Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости / А. С. Андреев, Т. А. Бойкова // Механика твердого тела.— 2002.— № 32.— С. 109–116.

[12] *Андреев, А. С.* К методу сравнения в задачах об асимптотической устойчивости / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // Доклады Академии наук.— 2005.— Т. 400, № 5.— С. 621–624.

[13] *Андреев, А. С.* О стабилизации движения нестационарной управляемой системы / А. С. Андреев, В. В. Румянцев // Автоматика и телемеханика.— 2007.— № 8.— С. 18–31.

[14] *Андреев, А. С.* О моделировании цифрового регулятора на основе прямого метода Ляпунова / А. С. Андреев, Е. А. Кудашова, О. А. Перегудова // Научно-технический вестник Поволжья.— 2013.— № 6.— С. 113–115.

[15] *Андреев, А. С.* Об устойчивости нулевого решения системы с разрывной правой частью / А. С. Андреев, О. Г. Дмитриева, Ю. В. Петровичева // Научно-технический вестник Поволжья.— 2011.— № 1.— С. 15–21.

[16] *Андреев, А. С.* Об устойчивости неустановившегося решения механической системы / А. С. Андреев, Т. А. Бойкова // ПММ.— 2004.— Т. 68.— № 4.— С. 678–686.

[17] *Андреев, А. С.* Об устойчивости обощенного стационарного движения механической системы в зависимости от действующих сил / А. С. Андреев, Р. Б. Зайнетдинов // Труды IX Международной Четаевской Конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением посвященной 105-летию Н. Г. Четаева.— Иркутск: Сибирское отделение РАН.— 2007.— Т. 1.— С. 5–14.

[18] *Андреев, А. С.* Вектор-функции Ляпунова в задачах о стабилизации движениц управляемых систем / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // Журнал Средневолжского математического общества.— 2014.— Т. 16, № 1.— С. 32–44.

[19] *Андреев, А. С.* О стабилизации программных движений голономной

механической системы / А. С. Андреев, О. А. Перегудова // XII Всероссийское совещание по проблемам управления ВСПУ-2014. Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН.— 2014.— С. 1840–1843.

[20] *Андреев А. С.* О моделировании цифрового регулятора на основе прямого метода Ляпунова / А. С. Андреев, О. А. Перегудова, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья №6 2013. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2013 - с. 113-115.

[21] *Андреев А. С.* Синтез непрерывного и кусочно-постоянного управления движением колесного мобильного робота / А. С. Андреев, С. Ю. Раков, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья №5 2014. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2014 — с.97-101

[22] *Андреев А. С.* О моделировании структуры управления для колесного робота с омни-колесами / Андреев А. С., Е. А. Кудашова // Автоматизация процессов управления №2 (40) 2015. Ульяновск: Автоматизация процессов управления, 2015 — с.114-121

[23] *Андреев А. С.* О стабилизации движений механических систем управлениями различного типа / А.С. Андреев, Е.А. Кудашова, О.А. Перегудова // Тезисы докладов Международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского «Динамика систем и про-цессы управления», 15-20 сентября 2014г., Екатеринбург. – с. 35-37

[24] *Артемова, А. О.* Моделирование управляемого движения двузвенного манипулятора на подвижном основании / А. О. Артемова // Научно-технический вестник Поволжья.— 2012.— № 6.

[25] *Артемова, А. О.* Об управлении пространственным движением многозвенного манипулятора на подвижном основании / А. О. Артемова, Е. Э. Звягинцева, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья.— 2013.— № 5.— С. 106–109.

[26] *Афанасьев, В. Н.* Математическая теория конструирования систем управления / В. Н. Афанасьев, В. Б. Колмановский, В. Р. Носов.— М.: Высшая школа, 1989.— 447 с.

[27] *Барабанов, И. Н.* Динамические модели информационного управления в социальных сетях / И. Н. Барабанов, Н. А. Коргин, Д. А. Новиков, А. Г. Чхартишвили // "Динамические модели информационного управления в социальных сетях", Автомат. и телемех., 2010, № 11, 172–182

[28] *Баркин, А. И.* Об абсолютной устойчивости дискретных систем / А. И. Баркин // Автоматика и телемеханика.— 1998.— № 10.— С. 3–8.

[29] *Беллман, Р.* Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук.— М.: Мир, 1967.— 548 с.

[30] *Блюмин С. Л.* Дискретные математические модели Вольтерра в экологии и других областях / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Экология ЦЧО РФ.— 2003.— № 2.— С. 16–18.

[31] *Блюмин С. Л.* Нечеткие системы Вольтерра / С. Л. Блюмин, А. М. Шмырин // Проблемы управления.— 2004.— № 4.— С. 75–58.

[32] *Барабанов, И. Н.* Построение функций Ляпунова для дискретных систем со случайными параметрами / И. Н. Барабанов // Автомат. и телемех., 1995, № 11, 31–41.

[33] *Богданов, А. Ю.* Об устойчивости точки покоя дискретной системы / А. Ю. Богданов, С. В. Черников // Ученые записки УлГУ. Сер. "Фундаментальные проблемы математики и механаники".— Ульяновск: УлГУ, 2004.— Вып. 1(14).- С. 99–115.

[34] *Богданов А. Ю.* Устойчивость неавтономных дискретных систем типа Лотки-Вольтерра / А. Ю. Богданов , Е. А. Кудашова // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. Вып. 1(18) - Ульяновск: УлГУ, 2007. – С. 182-188.

[35] *Богданов А. Ю.* Дискретные динамические системы: проблемы устойчивости и управления / А. Ю. Богданов // Ульяновск: УлГТУ, 2008.- 262 с.

[36] *Богданов А. Ю.* К вопросу об оптимальной стабилизации дискретных управляемых систем / Ю. А. Матвеев, А. Ю. Богданов, Т. Е. Исаева, Е. А. Кудашова // Обозрение прикладной и промышленной математики. Москва: ТВП. – 2009. – Том 16. – Вып. 3. – С. 505-507.

[37] *Богданов А. Ю.* О равномерной асимптотической устойчивости решений дискретных уравнений с

изменяющейся структурой / А. Ю. Богданов, Е. А. Кудашова // Труды Седьмой международной конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов 2-5 февраля 2009 г., г. Ульяновск, Россия. - Ульяновск, 2009. – С. 46-47.

[38] *Богданов А. Ю.* Развитие прямого метода Ляпунова и равномерная асимптотическая устойчивость решений дискретных уравнений с изменяющейся структурой / А. Ю. Богданов, Е. А. Кудашова // Обозрение прикладной и промышленной математики. Москва: ТВП. – 2009. – Том 16. – Вып. 2. – С. 294-295.

[39] *Богданов А. Ю.* Численные методы синтеза управления в нестационарных дискретных системах / А. Ю. Богданов, Е. А. Кудашова // Ученые записки УлГУ. Сер. Математика и информационные технологии. –Вып. 1(3). – Ульяновск: УлГУ, 2010. – С. 9.

[40] *Богданов А. Ю.* Стабилизация нестационарных дискретных систем на основе свойств диссипативности и пассивности / А. Ю. Богданов, Е. А. Кудашова // Труды всероссийского семинара «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 15-18 июня 2010 г., г. Ульяновск. –Ульяновск:УлГУ, 2010. С. 34-37.

[41] *Богданов А. Ю.* Необходимые и достаточные условия диссипативности и беспотерьности для одного класса нестационарных нелинейных управляемых систем / А. Ю. Богданов, Е. А. Кудашова // Труды

всероссийского семинара «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», 9-12 июня 2011 г., г. Ульяновск. –Ульяновск:УлГУ, 2011. С. 54-57.

[42] *Борцов, Ю. А.* Автоматические системы с разрывным управлением / Ю. А. Борцов, И. Б. Юнгер.— Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отделение, 1986.— 168 с.

[43] *Бромберг, П. В.* Устойчивость и автоколебания импульсных систем регулирования / П. В. Бромберг.— М.: Оборонгиз, 1953.— 224 с.

[44] *Бромберг, П. В.* Матричные методы в теории релейного и импульсного управления / П. В. Бромберг.— М.: Наука, 1967.— 324 с.

[45] *Булгаков, Н. Г.* Знакопостоянные функции в теории устойчивости / Н. Г. Булгаков.— Минск: Университетское, 1984.— 78 с.

[46] *Бунич, А. Л.* Синтез и применение дискретных систем управления с идентификатором / А. Л. Бунич, Н. Н. Бухтадзе // .: Наука, 2002

[47] *Васильев, С. Н.* Метод сравнения в анализе систем 1, 2 / С. Н. Васильев // Дифференц. уравнения.— 1981.— Т. 17, № 9.— С. 1562–1573.

[48] *Видаль, П* Нелинейные импульсные системы / П. Видаль.— М.: Энергия, 1974.— 336 с.

[49] *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существование / В. Вольтерра.— М.: Наука, 1976.— 286 с.

[50] *Вуковбратович, М. К.* Управление манипуляционными роботами: Теория и применение / М. К. Вуковбратович, Д. М. Стокич // М.: Наука, 1985.— 384 с.

[51] *Вуковбратович, М. К.* Синтез управления возмущенным движением автоматических манипуляторов / М. К. Вуковбратович, Д. М. Стокич // Машиноведение.— 1982.— № 1.

[52] *Гайшун И. В.* Дискретные уравнения с изменяющейся структурой и устойчивость их решений / И. В. Гайшун // Дифференциальные уравнения.— 1997.— Т. 33, № 12.— С. 1607–1614.

[53] *Гайшун И. В.* Устойчивость дискретных процессов Вольтерра с убывающим последействием / И. В. Гайшун // Автомотика и телемеханика.— 1997.— № 6.— С. 118–124.

[54] *Гайшун И. В.* Управляемость система, описываемых линейными дискретными уравнениями Вольтерра / И. В. Гайшун, М. П. Дымков // Автомотика и телемеханика.— 2000.— № 7.— С. 88–100.

[55] *Гайшун И. В.* Системы с дискретным временем / И. В. Гайшун.— М.: Минск, 2011.

[56] *Гайшун И. В.* Системы с дискретным временем / И. В. Гайшун.— Минск: Институт математики НАН Беларуси, 2001.

[57] *Гелиг А. Х.* Динамика импульсных системы и нейронных сетей / А. Х. Гелиг.— Л.: Изд-во Ленингр. ан-та, 1982.

[58] *Гелиг А. Х.* Устойчивость нелинейных импульсных систем по первому приближению / А. Х. Гелиг // ПММ.— 2003.— Т. 62, № 8.— С. 231–238.

[59] *Гелиг А. Х.* Стабилизация нестационарных импульсных системы / А. Х. Гелиг, И. Е. Зубер // Автоматика и телемеханика.— 2004.— № 5.— С. 29–37.

[60] *Гелиг А. Х.* Устойчивость нелинейных систем с неединственным состоянием равновесия / А. Х. Гелиг, Г. А. Леонов, В. А. Якубович // М.: Наука, 1978.

[61] *Гелиг А. Х.* Стабилизируемость двух классов нелинейных импульсных систем с последействием / А. Х. Гелиг, В. А. Муранов // Вестник С.-Петербург. ун-та, Сер. 1.— 2005.— Вып. 3.— С. 3–15.

[62] *Гелиг А. Х.* Колебания и устойчивость нелинейных импульсных систем / А. Х. Гелиг, А. Н. Чурилов // СПб.: Изд-во СПб ун-та, 1993.

[63] *Голубев А. Е.* Стабилизация нелинейных динамических систем с использованием оценки состояния системы асимптотически наблюдателем / А. Е. Голубев, А. П. Крищенко, С. Б. Ткачев // Автоматика и телемеханика.— 2005.— № 7.— С. 3–42.

[64] *Звягинцева Е. Э.* Об управлении механической системой с циклическими координатами / Е. Э. Звягинцева, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья №1 2013. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2013 - с. 217-221.

[65] *Зобова А. А.* Математические аспекты динамики движения экипажа с тремя окольцованными колесами / А. А. Зобова, Я. В. Татаринов // Сб. Мобильные роботы и мехатронные системы. М: Изд-во МГУ, 2006.- с. 61-67.

[66] *Зобова А. А.* Свободное и управляемое движение некоторой модели экипажа с роликонесущими колесами / А. А. Зобова, Я. В. Татаринов // Вестник МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 2008. №6. - с. 62-66.

[67] *Зобова А. А.* Динамика экипажа с роликонесущими колесами / А. А. Зобова, Я. В. Татаринов // ПММ. 2009. Т. 73.- Вып. 1.- с. 13-22.

[68] *Каленова В.И.* Неголономные механические системы и стабилизация движений / Каленова В.И., Карапетян А.В., Морозов В.М., Салмина М.А. // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005. — Т. 11, вып. 7. — С. 117-158.

[69] *Калман, Р.* Очерки по математической теории систем / Р. Калман, П. Фалб, М. Арбиб.— М.: Мир, 1971.— 400 с.

[70] *Камаева, Р. А.* К задаче слежения для колесного мобильного робота с неизвестной матрицей инерции / Р. А. Камаева, О. А. Перегудова // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2009.- Т.16.- Вып. 4.- с. 664-665.

[71] *Карапетян, А. В.* Устойчивость стационарных движений / А. В. Карапетян.— М.: УРСС, 1998.

[72] *Карапетян А.В.* Об устойчивости стационарных движений неголономных систем Чаплыгина // ПММ. 1978. - Т. 43, вып. 5. - С. 801-807.

[73] *Карапетян А.В.* К вопросу об устойчивости стационарных движений неголономных систем // ПММ. 1980. — Т. 44, вып. 3. — С. 418

[74] *Кириченова О. В.* Метод функций Ляпунова для систем линейных разностных уравнения с почти периодическими коэффициентами / О. В. Кириченова, А. С. Котюргина, Р. К. Романовский // Сиб. мат. журн.ин.— 1996.— Т. 37, № 1.— С. 170–174.

[75] *Кириченова О. В.* Об устойчивости решений нелинейных почти периодических систем разностных уравнений / О. В. Кириченова // Сиб. мат. журн.ин.— 1996.— Т. 39, № 1.— С. 45–48.

[76] *Колмановский В. Б.* Об устойчивости некоторых дискретных процессов Вольтерра / В. Б. Колмановский, А. М. Родионов // Автоматика и телемеханника.— 1995, № 2.— С. 3–13.

[77] *Колмановский В. Б.* О применении второго метода Ляпунова к разностным уравнениям Вольтерра / В. Б. Колмановский // Автоматика и телемеханника.— 1995, № 11.— С. 50–64.

[78] *Колмановский В. Б.* Устойчивостьь дискретных уравнений Вольтерра / В. Б. Колмановский // Доклады Академии наук.— 1996.— Т. 349, № 5.— С. 610–614.

[79] *Красовский, Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений / Н. Н. Красовский // Малкин, И. Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4 / И. Г. Малкин.— М.: Наука, 1966.— С. 475–514.

[80] *Крутько, П. Д.* Метод обратных задач динамики в теории конструирования алгоритмов управления манипуляционных роботов. задача стабилизации / П. Д. Крутько, Н. А. Лакота // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика.— 1987.— № 3.— С. 23–30.

[81] *Кудашова, Е. А.* Задача об управлении механическими системами. Синтез непрерывного и кусочно-непрерывного стабилизируеющего управления / Е. А. Кудашова // Ученые записки УлГУ. Сер. "Математика и информационные технологии".— Вып. 1. - Ульяновск: УлГУ, 2012.— С. 23–30.

[82] *Кудашова Е. А.* Об асимптотическом поведении решений неавтономной нелинейной системы второго порядка / Е. А. Кудашова // Труды Симбирской молодежной научной школы по аналитической динамике, устойчивости и управлению движениями и процессами, 8-12 июня 2009 г., г. Ульяновск. –Ульяновск:УлГУ, 2009. С. 67-68.

[83] *Кудашова Е. А.* Прямой метод Ляпунова в задаче об устойчивости неавтономных дискретных систем типа Лотки - Вольтерра / Е. А. Кудашова // Труды X международной Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление», 12-16 июня 2012г., г. Казань. – Том 2. – Сек. 2. Устойчивость. – Казань: КНИТУ КАИ. – с. 316-322.

[84] *Кудашова Е. А.* Метод векторных функций Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости разностных систем / О. А. Перегудова, Е. А. Кудашова // Научно-технический вестник Поволжья №1 2015. Казань: Научно-технический вестник Поволжья, 2015.— с.118-121

[85] *Кудашова Е. А.* О стабилизации механической системы с одной степенью свободы и с цифровым управлением // Труды международной конференции по математической теории управ-ления и механике, 3-7 июля 2015г., г. Суздаль. – с. 80-81

[86] *Кудашова Е. А.* Стабилизация движения трехколесного робота // Патент РФ на программу для ЭВМ №2015615314. Москва, Роспатент, 2015.

[87] *Кулешов, В. С.* Динамика систем управления манипуляторами / В. С. Кулешов, Н. А. Лакота.— М.: Энергия, 1971.— 304 с.

[88] *Кузьмин, А. В.* Программная реализация алгоритма построения управления мобильным колесным роботом при учете проскальзывания колес / О. А. Перегудова, А. В. Кузьмин, Д. Ю. Моторина // Автоматика и телемеханика.— 2011.— № 4.

[89] *Кузнецов, Н. В.* Критерии неустойчивости по первому приближению нелинейных дискретных систем / Н. В. Кузнецов, Г. А. Леонов // Вестник С.-Петерб. ун-та, Сер. 1.— 2005.— Вып. 3. С. 30-42.

[90] *Кунцевич, В. М.* Синтез робастно устойчивых дискретных систем управления нелинейными объектами / В. М. Кунцевич, А. А. Кунцевич // Автоматика и телемеханика.— 2008.— № 12.— С. 105-118.

[91] *Кунцевич, В. М.* Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова / В. М. Кунцевич, М. М. Лычак.— М.: Наука, 1977.— 400 с.

[92] *Лефшец С.* Устойчивость нелинейных систем автоматического управления / С. Лефшец. — М.: Мир, 1967.

[93] *Лакшмикантам В.* Устойчивость движения: метод сравнения / В. Лакшмикантам, С. Лила, А. А. Мартынюк. — Киев: Наукова думка, 1991.— 248 с.

[94] *Леонов, Г. А.* Проблема Броккета для линейных дискретных систем управления / Г. А. Леонов // Автоматика и телемеханика.— 2002.— № 5. С. 92-96.

[95] *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения / А. М. Ляпунов. — М.: Гостехиздат, 1950.

[96] *Маликов, А. И.* Вектор-функции Ляпунова в анализе свойств систем со структурными изменениями / А. И. Маликов, В. М. Матросов // Дифференц. уравнения.— 1998.— № 2.— С. 47–54. 530 с.

[97] *Малкин, И. Г.* Теория устойчивости движения / И. Г. Малкин.— М.: Наука, 1966.— 530 с.

[98] *Маркеев, А. П.* Теоретическая механика / А. П. Маркеев.— М.: ЧеРо, 1999.— 569 с.

[99] *Мартыненко, Ю. Г.* О движении мобильного робота с роликонесущими колесами / Ю. Г. Мартыненко, А. М. Формальский // Известия РАН. Теория и системы управления.— 2007.— № 6.— С. 142–149.

[100] *Мартыненко, Ю. Г.* Устойчивость стационарных движений мобильного робота с роликонесущими колесами и смещенным центром масс / Ю. Г. Мартыненко // ПММ.— 2010.— Т. 74.— Вып. 4.— С. 610–619.

[101] *Мартыненко Ю.Г.* Управление движением мобильных колесных роботов. // Фундаментальная и прикладная математика. — 2005. — Т. 11, вып. 8. — С. 29-80.

[102] *Мартынюк, А. А.* Анализ устойчивости дискретных систем / А. А. Мартынюк // Прикладная механика.— 2000.— Т. 36, № 7.— С. 3–35.

[103] *Матросов, В. М.* Принцип сравнения с вектор-функцией Ляпунова 1, 2 / В. М. Матросов // Дифференц. уравнения.— 1968.— Т. 4, № 8.— С. 1374–1386.

[104] *Матросов, В. М.* Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем / В. М. Матросов.— М.: Физматлит, 2001.— 380 с.

[105] *Матюхин, В. И.* Управление движением манипуляционных роботов на принципе декомпозиции при учете динамики приводов / В. И.

Матюхин, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 1989.— № 9.— С. 67–72.

[106] *Матюхин, В. И.* Устойчивость движений манипуляционных роботов в режиме декомпозиции / В. И. Матюхин // Автоматика и телемеханика.— 1989.— № 3.— С. 33–44.

[107] *Матюхин, В. И.* Устойчивость движения механических систем при учете постоянно действующих возмущений / В. И. Матюхин // Автоматика и телемеханика.— 1993.— № 11.— С. 124–134.

[108] *Матюхин, В. И.* Сильная устойчивость движений механических систем / В. И. Матюхин // Автоматика и телемеханика.— 1996.— № 1.— С. 37–56.

[109] *Матюхин, В. И.* Универсальные законы управления механическими системами / В. И. Матюхин.— М.: МАКС Пресс, 2001.— 252 с.

[110] *Матюхин, В. И.* Управляемость механических систем в классе управлений, ограниченных вместе с производной / В. И. Матюхин, Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 2004.— № 8.— С. 14–38.

[111] *Матюхин, В. И.* Управление механическими системами / В. И. Матюхин.— М.: Физматлит, 2009.— 320 с.

[112] *Матюхин, В. И.* Управление движением манипулятора / В. И. Матюхин.— М.: ИПУ РАН, 2010.— 96 с.

[113] *Михеев, Ю. В.* Ассимтотический анализ цифровых систем управления / Ю. В. Михеев, В. А. Соболев, Э. М. Фридман // Автоматика и телемеханика.— 1988.— № 5.— С. 83–88.

[114] *Медведев, В. С.* Системы управления манипуляционных роботов / В. С. Медведев, А. Г. Лесков, А. С. Ющенко.— М.: Наука, 1978.— 416 с.

[115] *Моторина, Д. Ю.* Об отслеживании траектории колесного робота с неизвестной массой с помощью непрерывного управления с запаздыванием / О. А. Перегудова, Д. Ю. Моторина // Материалы конференции "Управление в технических системах"(УТС-2010). Санкт-Петербург: ОАО "Концерн "ЦНИИ Электроприбор.— 2010.— С. 362-365.

[116] *Моторина, Д. Ю.* Алгоритм построения запаздывающего управления для мобильного робота при учете эффекта проскальзывания колес / Д. Ю. Моторина // Обозрение прикладной и промышленной математики.— 2010.— Т.— 17.— Вып. 5.— С. 753-754.

[117] *Моторина, Д. Ю.* Синтез управления для механических систем с неизвестной матрицей инерции при учете запаздывания в структуре обратной связи / Д. Ю. Моторина // Автоматизация процессов управления.— 2010.— №. 4.

[118] *Моторина Д.Ю.* Построение алгоритма синтеза управления с насыщением в задаче слежения для колесного мобильного робота //

Журнал Средневолжского математического общества. — 2010. — Т. 12, №3. -С. 102-110.

[119] *Пахомов, К. В.* Синтез запаздывающего управления движением колесного робота на основе метода бэкстеппинга / К. В. Пахомов, О. А. Перегудова, Е. В. Филаткина // Научно-технический вестник Поволжья.— 2013.— № 2.— С. 37–40.

[120] *Перегудова, О. А.* Метод сравнения в задачах устойчивости и управления движениями механических систем / О. А. Перегудова.— Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2009.— 253 с.

[121] *Перегудова, О. А.* О стабилизации движений неавтономных механических систем / О. А. Перегудова // ПММ.— 2009.— Т. 72.— Вып. 4.— С. 620.

[122] *Перегудова, О. А.* Уравнения сравнения в задачах об устойчивости движения / О. А. Перегудова // Автоматика и телемеханика.— 2007.— № 9.— С. 56–63.

[123] *Перегудова, О. А.* О стабилизации нелинейных систем с кусочно-постоянным управлением при помощи метода бэкстеппинга / О. А. Перегудова, К. В. Пахомов // Автоматизация процессов управления.— 2013.— № 4(34).

[124] *Петров, Б. Н.* Построение алгоритмов управления как обратная задача динамики / Б. Н. Петров, П. Д. Крутько, Е. П. Попов // Докл. АН СССР.— 1979.— № 5.— С. 1078–1081.

[125] *Попов, Е. П.* Системы управления манипуляционных роботов / Е. П. Попов, А. Ф. Верещагин, С. Л. Зенкевич.— М.: Наука, 1978.— 400 с.

[126] *Попов, Е. П.* Манипуляционные роботы. Динамика и алгоритмы. / Е. П. Попов, А. Ф. Верещагин, С. Л. Зенкевич.— М.: Наука, 1978.— 398 с.

[127] *Пятницкий, Е. С.* Синтез управления манипуляционными роботами на принципе декомпозиции / Е. С. Пятницкий // Известия АН СССР. Техническая кибернетика.— 1987.— № 3.— С. 92–99.

[128] *Пятницкий, Е. С.* Принцип декомпозиции и в управлении механическими системами / Е. С. Пятницкий // ДАН СССР.— 1988.— Т.— 300.— № 2.— С. 300-303.

[129] *Пятницкий, Е. С.* Синтез систем стабилизации программных движений нелинейных объектов управления / Е. С. Пятницкий // Автоматика и телемеханика.— 1993.— № 7.— С. 19-37.

[130] *Ремшин, С. А.* Синтез управления двузвенным манипулятором / С. А. Ремшин // Известия РАН. Теор. и сист. упр.— 1997.— № 2.— С. 146–150.

[131] *Ремшин, С. А.* Синтез управления в нелинейной динамической систему на основе декомпозиции / С. А. Ремшин, Ф. Л. Черноусько // Прикл. матем. и мех. — 1998.— Т. 62, вып. 1.— С. 121–128.

[132] *Родионов, А. М.* Притяжение для дискретных уравнений, приложение к динамике популяций / А. М. Родионов // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 2.— С. 76-85.

[133] *Родионов, А. М.* О некоторых дискретных моделях межвидового взаимодействия / А. М. Родионов // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 12.— С. 122-129.

[134] *Ройтенберг Я. Н.* Автоматическое управление / Я. Н. Ройтенберг. — М.: Наука, 1971.— 395 с.

[135] *Румянцев, В. В.* Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В. В. Румянцев, А. С. Озиранер. — М.: Наука, 1987,- 253 с.

[136] *Самарский, А. А.* Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. — М.: Наука, 1973,- 397 с.

[137] *Самойленко, А. М.* Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко. — Киев.: Вища школа, 1987.

[138] *Тимофеев А. В.* Устойчивость и стабилизация программного движения робота-манипулятора / А. В. Тимофеев, Ю. В. Экало // Автоматика и телемеханика.— 1996.— № 10.

[139] *Халанай А.* Качественная теория импульсных систем / А. Халанай, Д. Векслер. — М.: Мир, 1971.- 309 с.

[140] *Халил Х. К.* Нелинейные системы / Х. К. Халил.— М.: Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика Институт клмпьютерных исследований, 2009.— 832 с.

[141] *Уткин, В. И.* Скользящие режими и их применения в системах с переменной структурой / В. И. Уткин. — М.: Наука, 1974.

[142] *Филиппов, А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью / А. Ф. Филиппов. — М.: Наука, 1985.

[143] *Финогенко, И. А.* О задачах слежения, управляемости и стабилизации для механических систем с использованием комбинаций разрывных обратных связей и импульсных управлений / И. А. Финогенко // Труды IX Международной Четаевской Конференции "Аналитическая механика, устойчивость и управление движением посвященной 105-летию Н. Г. Четаева.— Иркутск: Сибирское отделение РАН.— 2007.— Т. 2.— С. 299–307.

[144] *Фишман, Л. З.* О сохранении областей притяжения при дискретизации непрерывных систем / А. М. Родионов // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 5.— С. 93-97.

[145] *Фурасов, В. Д.* Устойчивость и стабилизация дискретных процессов / В. Д. Фурасов. — М.: Наука, 1982.- 192 с.

[146] *Цыпкин, Я. З.* Теория линейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин. — М.: Наука, 1963.- 968 с.

[147] *Цыпкин, Я. З.* Теория нелинейных импульсных систем / Я. З. Цыпкин, Ю. С. Попков. — М.: Наука, 1973.- 414 с.

[148] *Цыпкин, Я. З.* Дискретные адаптивные системы управления / Я. З. Цыпкин, Г. К. Кельманс // Итоги науки и техники ВИНИТИ. Серия "Техническая кибернетика". — М.: 1984.— № 17.

[149] *Черноусько, Ф. Л.* Методы управления нелинейными механическими системами / Ф. Л. Черноусько, И. М. Ананьевский, С. А. Решмин.— М.: Физматлит, 2006.— 326 с.

[150] *Черноусько, Ф. Л.* Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация / Ф. Л. Черноусько, Н. Н. Болотник, В. Г. Градецкий.— М.: Физматлит, 1989.— 368 с.

[151] *Чурилов А. Н.* Стабилизация линейной системы с помощью комбинированной импульсной модяции / А. Н. Чурилов // Автоматика и телемеханика.— 2000.— № 10. С. 71-76.

[152] *Шепелявый А. И.* О качественном исследовании устойчивости в целом и неустойчивости амплитудно-импульсных систем / А. И. Шепелявый // Доклады АН СССР.— 1970.— Т. 190.— № 5. С. 1044-1047.

[153] *Юревич, Е. И.* Основы робототехники / Е. И. Юревич.— 2-е изд.— СПб.: БХВ-Петербург, 2005.— 416 с.

[154] *Юревич, Е. И.* Теория автоматического управления / Е. И. Юревич.— 3-е изд.— СПб.: БХВ-Петербург, 2007.— 560 с.

[155] *Юрков, А. В.* Задачи стабилизации программных движений управляемых динамических систем / А. В. Юрков // Электронный журнал "Исследовано в России".— 2001.— С. 147-164.

[156] *Araki, M.* Stability of sampled-data composite systems with many nonlinearities / M. Araki, K. Ando, B. Kondo // IEEE Trans. Automat. Contr.— AC-16, 1971.— Pp. 22–27.

[157] *Artstein, Z.* Limiting equations and stability of nonautonomous ordinary differential equations. In the Stability of Dynamical Systems, (Appendix A), CBMS Regional Conference Series in Applied Mathematics.— Vol. 25, SIAM, Philadelphia, 1976.— Pp. 57–76.

[158] *Artstein, Z.* On the limiting equations and invariance of time-dependent difference equations // Stability of dynamical systems (Theory and applications) Proceedings of NSF conference, Mississippi State University .— 1976.— Pp. 3–9.

[159] *Artstein, Z.* Topological dynamics of an ordinary differential equation / Z. Artstein // J. Different. Equat.— 1977.— Vol. 23, no. 2.— Pp. 216–223.

[160] *Basson, M.* Harvesting in discrete-time predator-prey systems / M. Basson, M. J. Fogarty // Math. Biosci.— 1977.— Vol. 141, no. 1.— Pp. 41–47.

[161] *Choi S. K.* H-stability for nonlinear perturbated difference systems / S. K. Choi, N. J. Koo, S. M. Song // Bull. Korean Math. Soc. 41 (2004), No. 3.- Pp. 435-450.

[162] *Choi S. K.* Asymptotic behavior of nonlinear volterra difference systems / S. K. Choi, Y. H. Goo, N. J. Koo // Bull. Korean Math. Soc. 44 (2007), No. 1.- Pp. 177-184.

[163] *Corradini M.* Experimental testing of a discrete-time sliding mode controller for trajectory tracking of a wheeled mobile robot in the presence of skidding effects / M. Corradini, T. Leo, G. Orlando // J. of Rob. Syst. 2002. V. 19.- Pp. 177-188.

[164] *Damoto R.* Holonomic omni-directional vehicle with new omni-who mechanism / R. Damoto, W. Cheng, S. Hirose // Proc. of the 2001 IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation. Seul, Korea, 2001.— Pp. 773–778.

[165] *Dash, A. T.* Polygamy in human and animal species / A. T. Dash, R. Gressman // Math. Biosci.— 1988.— Vol. 88, no. 1.— Pp. 49–66.

[166] *Elaydi S.* An introduction to Difference Equations. Third Edition. Springer-Verlad. - New York, 2004.

[167] *Elaydi S.* Stability of difference equations. Differencial equations and applications / S. Elaydi, A. Peterson // Proc. Int. Conf., Columbus/OH (USA).— 1989.— Pp. 235-238.

[168] *Hahn W.* Theorie and Anwendung der direkten Methode von Lyapunov. Springer-Verlad. — Berlin, 1959.

[169] *Hsien Y.* The phenomenon of unstable oscilation in population models / Y. Hsien // Math. Comput. Model.— 1988.— Vol. 10, no. 6.— Pp. 429–435.

[170] *Kurzweil J.* Structural stability of linear discrete systems via tthe exponential dichotomy / J. Kurzweil, G. Papaschinopoulos // Grech. Math. J.— 1988.— Vol. 38 (113), no. 2.— Pp. 280–284.

[171] *Lacshmikantham V.* Stability analysis of nonlinear systems / V. Lacshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk // Singapore: World Scientific.— 1990.— 207 p.

[172] *Lacshmikantham V.* Stability analysis of nonlinear systems / V. Lacshmikantham, S. Leela, A. A. Martynyuk // New York: World Scientific.— 1989.— 207 p.

[173] *Lacshmikantham V.* Theory of difference equations: numerical methods and applications / V. Lacshmikantham, D. Trigiante // New York: Marcel Dekker, Inc.— 2002.— 320 p.

[174] *LaSalle J.P.* The stability of dynamical systems. SIAM, Philadelphia, Pennsilvania, 1976. – 76 p.

[175] *LaSalle J.P.* Stability of difference equations. In a Study in Ordinary Differential Equations (edited by J. K. Hale), Studies in Mathematical Series, Mathematical Association of America, 1977.

[176] *LaSalle J.P.* The stability and control of discrete processes. (Applied mathematical sciences; vol. 62), Springer-Verlag, 1986.- 147 p.

[177] *Lin W.* Feedback stabilization of general nonlinear control systems: a passive systems approach // Systems and control letters.- 1995.- Vol. 25.- Pp. 41-52.

[178] *Lin W.* Passivity and absolute stabilization of a class of discrete-time nonlinear systems / W. Lin, C. I. Byrnes // Automatica.- 1995.- Vol. 32(2).- Pp. 263-267.

[179] *Liu D.* Asymptotic stability of a class of linear discrete systems with multiple independent variables / D. Liu, A. Molchanov // Circuits systems signal processing. Vol. 22,. No. 3, 2003.- Pp. 307-324.

[180] *Liu Y.* Integrated control and navigation for omni-directional mobile robot based on trajectory linearization / Y. Liu, R. L. Williams II, J. J. Zhu // Proceedings of the 2007 American Control Conference. New York. USA. 2007.- Pp. 2153-2158.

[181] *Mickens R.* Applications of nonstandard finite differece schemes. World Scientific. Singapore, 2000.

[182] *Monaco S.* On the conditions of passivity and losslessness in discrete time. / S. Monaco, D. Normand-Cyrot // Proc. European control conference.- 1997.- 5 p.

[183] *Navarro-Lopez E. M.* Implications of dissipativity and passivity in the discrete-time setting. / E. M. Navarro-Lopez, D. Cortes, E. Fossas-Colet.- 1999.

[184] *Navarro-Lopez E. M.* Dissipativity, passivity and feedback passivity in the nonlinear discrete-time setting. / E. M. Navarro-Lopez, E. Fossas-Colet.- 1999.

[185] *Nesic D.* On uniform asymptotic stability of time-varying parameterized discrete-time cascades / D. Nesic, A. Loria // arXiv: math/0307167v1 [math.OC] 11 Jul 2003.

[186] *Nino-Suarez P. A.* Discrete-time feedback linearization of a wheeled mobile robot subject to transport delay / P. A. Nino-Suarez, M. Velasco-Villa, E. Aranda-Bricaire // Congreso Latinoamericano de Control Automatico, La Habana Cuba, 2006.

[187] *Nino-Suarez P. A.* Discrete-time sliding mode path-tracking control for a wheeled mobile robot / P. A. Nino-Suarez, M. Velasco-Villa, E. Aranda-Bricaire // 45th IEEE Conference on Decision and Control. San Diego, CA, USA, 2006. Pp. 3052-3057.

[188] *Oliveira H. P* Precise Modeling of a Four Wheeles Omni-directional Robot / H. P. Oliveira, A. J. Sousa, A. P. Moreira, P. J. Costa // Proceedings of the 8th Conference on Autonomous Robot Systems and Competitions, 2008.

[189] *Orosco-Guerro G.* Discrete-time controller for a wheeled mobile robot / G. Orosco-Guerro, M. Velasco-Villa, E. Aranda-Bricaire // Proc., XI Latin-American Congress of Automatic Control, La Habana, Cuba, 2004.

[190] *Purwin O.* Trajectory generation and control for four wheeled omnidirectional vehicles / O. Purwin, R. D'Andrea // Robotics and Autonomous Systems, 2006. V. 54(1).- Pp. 13-22.

[191] *Rondoni L.* Autocatalytic reactions as dynamical systems on the interval / L. Rondoni // J. Math. Phys.- 1993.- Vol. 34.- no. 11.- Pp. 5238-5251.

[192] *Sedaghat H.* A class of nonlinear second order difference equations from macroeconomics / H. Sedaghat // Nonlinear Anal. Theory, Methods, Appl.- 1997.- Vol. 29.- no. 5.- Pp. 593-603.

[193] *Tchuente M.* Suites generees par une equation neuronale a memoire (Sequences generated by a neuronal recurrence equation with memory) / M. Tchuente, G. Tindo // C. R. Acad. Sci. Paris.- 1993.- Ser I.- vol. 317.- no. 6.- Pp. 625-630.

[194] *Sell G. R.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics 1, 2 / G. R. Sell // Trans. Amer. Math. Soc.— 1967.— Vol. 127.— Pp. 241–283.

[195] *Simonovits A.* Chaotic dynamics of economic systems / A. Simonovits // Szigma.— 1985.— Vol. 18.— Pp. 267–277.

[196] *Yang T.* Impulsive Control Theory.— Berlin, Heidelberg: Springer, 2001.

(

А ОПИСАНИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ TROWTH.EXE

А.1 Отличительные особенности

Программа представляет собой отдельное кроссплатформенное приложение с графическим интерфейсом, написанное на языке высокго уровня JavaSE 7u75. Для построения графического интерфейса был использован фреймворк JavaFX.

Отличительными особенностями приложения являются:

- Математический пакет собственной разработки, а так же модуль наглядного отображения и ввода математических формул. Модуль полностью построен на векторной графике, что позволяет редактору адаптироваться под любые разрешения экрана, описанная идея ранее нигде не использовалась и полностью принадлежит автору.

- В данном продукте реализована идея живого приложения, по возможности автор освобождает пользователя от нажатия на лишние кнопки. Как только пользователь вносит малейшее изменение в параметры, графики, изменяет формулы, незамедлительно происходят все необходимые перерасчеты и перепостроения. Например, в основном разделе моделирования не используется не единой кнопки, а благодаря многопоточной оптимизации внутренних расчетов производительность интерфейса практически не снижается.

- Векторный движок собственной разработки, благодаря нему программный продукт выглядит одинаково хорошо как на большом мониторе, так и на экране мобильного телефона. Кроме того реализована возможность программного сглаживания готового изображения, что позволяет рисовать дробную часть пикселя и в конечном итоге позволяет получить наилучшее отображение графиков и текста.

Все изображения, используемые в приложении защищены авторским правом, алгоритмы и методы, используемые в приложении являются интеллектуальной собственностью автора. Стабилизация движения трехколесного робота . Патент РФ на программу для ЭВМ №201561534. Москва, Роспатент, заявка № 2015612544. Дата поступления 25.03.2015. Дата государственной регистрации в Реестре программ для ЭВМ 15.05.2015.

Приложение предназначено для моделирования управляемого движения трехколесного робота, анализа качества управления, скорости выхода робота на желаемую траекторию движения, результаты математического моделирования которого используются в параграфе 3.3 главы 3 настоящей диссертации.

Моделирование начинается с запуска приложения trowth.exe для Windows и trowh.jar - для Linux, в основном меню рис.(A.1) программы пользователю предоставляется возможность ознакомиться с теоретической частью, лежащей в основе математического моделирования управляемого движения колесного робота, ознакомиться с информацией об авторах проекта или перейти к демонстрации работы заложенного закона управления.

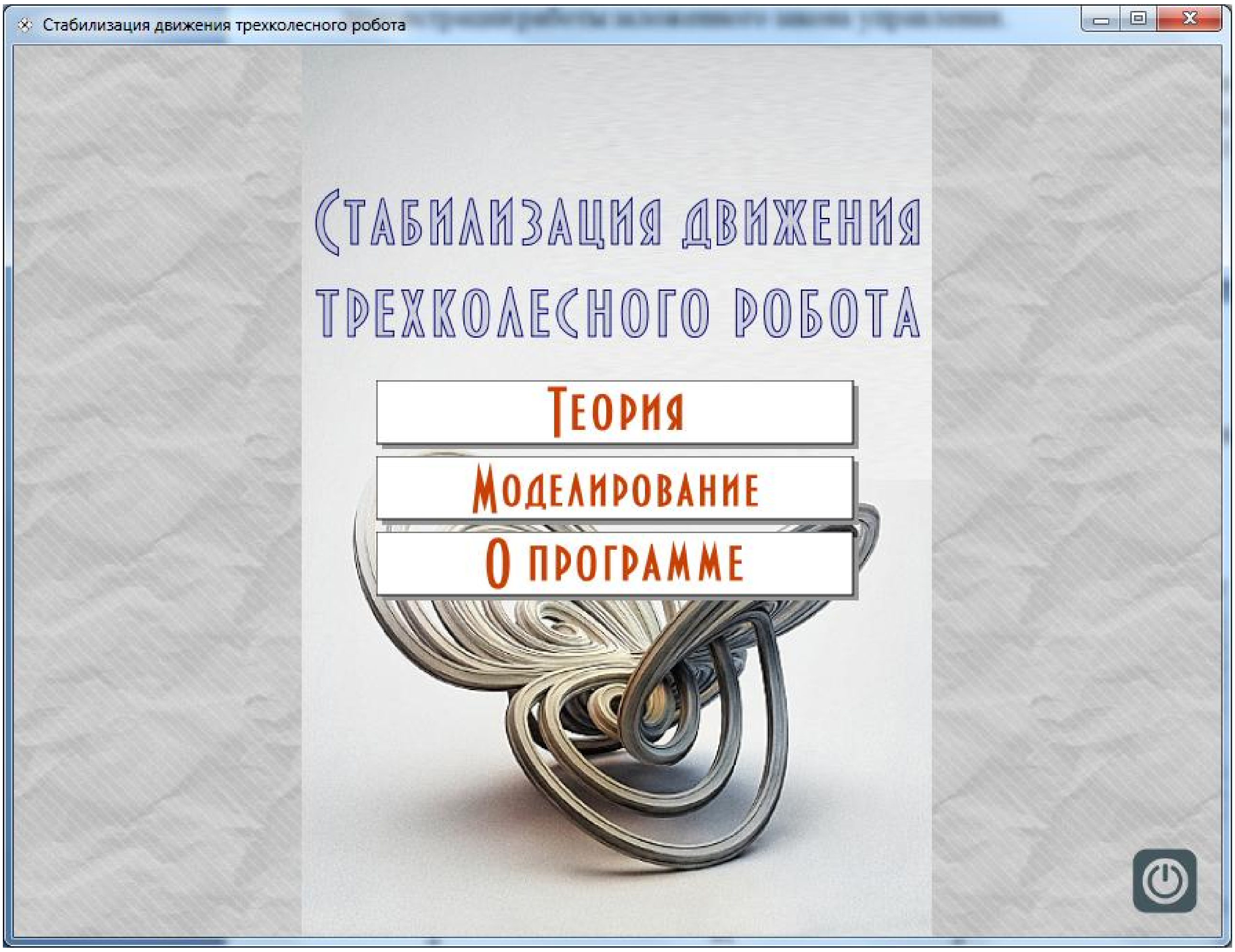

Рис. А.1: Основной экран программы

Теоретический раздел

В теоретическую часть входит схематическое изображения управляемого объекта, система дифференциальных уравнений, описывающая движение робота и описание характеристик, использующихся в построении управления рис.(А.2). Подробные теоретические выкладки содержатся в главе 3 настоящей диссертации.

Раздел моделирование

При переходе непосредственно к математическому моделированию

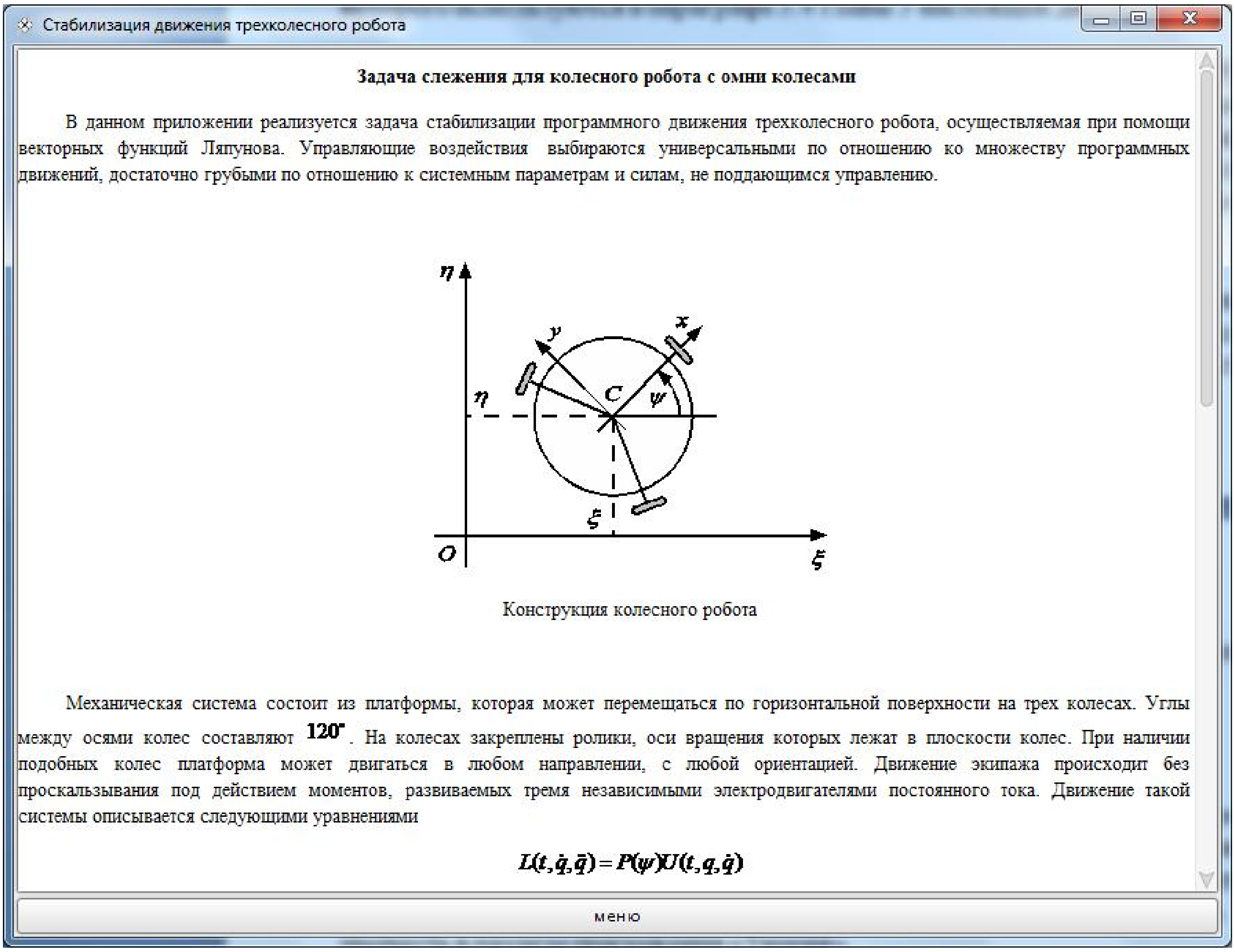

Рис. А.2: Внешний вид теоретического раздела

пользователю предлагается задать параметры системы, параметры управления, а так же начальные точки положения робота, либо согласиться с предложенными рис.(А.3). О значении каждого из параметров пользователь может прочесть в разделе приложения «Теория».

Следующим этапом работы с программой является задание движения робота одним из следующих способов рис.(А.4):

1. Аналитический ввод функций, описывающих движение робота;

2. Задание траектории движения графически;

3. Загрузить файлы с массивами данных.

В случае возникновения ошибки на одном из этапов ввода данных,

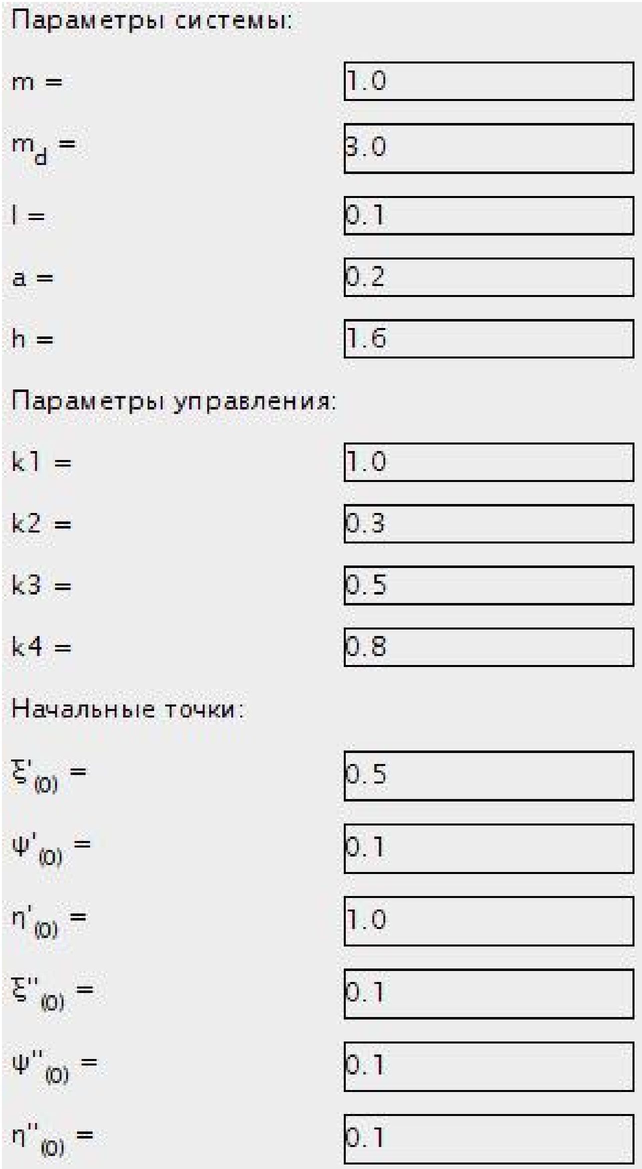

Рис. А.3: Параметры для расчетов

пользователь незамедлительно увидит предупреждение о некорректном вводе и возможных методах исправления ошибки.

Задание закона движения робота аналитически

Ввод формул данным методом задействует достаточно мощный математический пакет самостоятельно разработанный автором.

Использование векторной графики позволило сделать ввод формулы интерактивным, формула во время ввода автоматически занимает все доступное для нее место, в правой части стоит приглашение к вводу

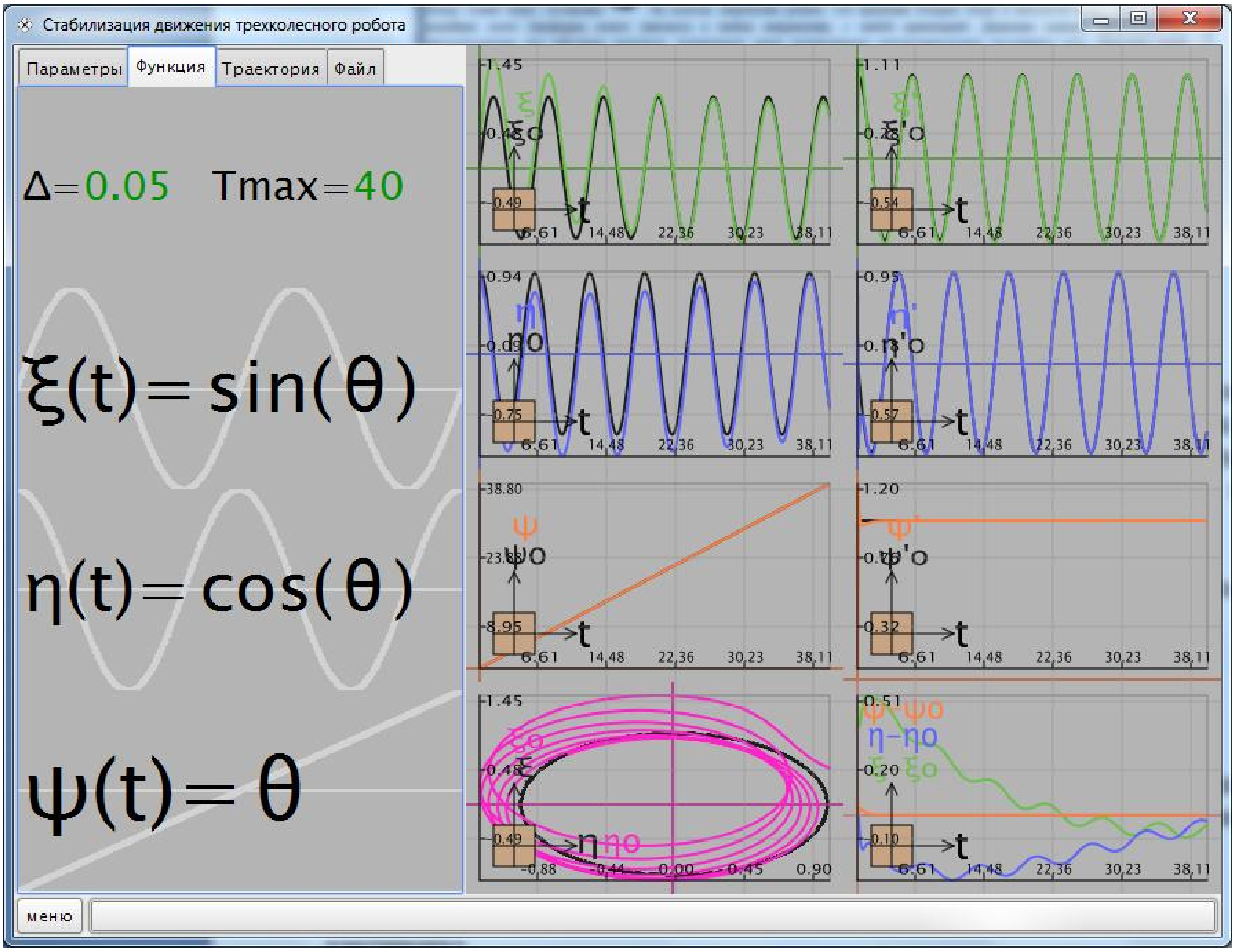

Рис. А.4: Внешний вид раздела моделирование

в виде знака "[?]". При клике мыши на этот значок выпадает список с вариантами возможных операций. Процесс создания формулы ведется путем собирания формулы из отдельных функциональных блоков. После ввода формулы происходит её компиляция в оперативную память и при каждом следующем обращении процессор практически не участвует в вычислении, за счет этого достигается высокая скорость производительности пакета. Стоит отметить, что тестирование скорости обработки формул математическим пакетом, выявило его преимущество перед такими известными инструментами, как MathCad 14 и Maple 12. Несомненно, преимущество в скорости обусловлено относительно скромным набором функций, входящих в арсенал разработанного продукта, однако, библиотека формул является более чем достаточной для проведения моделирования и может быть расширена при необходимости.

Для более подробного ознакомления с реализацией математического пакета см. Приложение 2-2.4.

На первом этапе пользователю предлагается ввести функции $\xi = \xi_0(t), \eta = \eta_0(t), \psi = \psi_0(t)$, описывающие движение робота, а так же шаг дискретизации δ и время моделирования T_{max} рис.(А.5). По мере введения каждой функции под ней рисуется миниатюра графика, что позволяет ориентироваться и подбирать коэффициенты в сложных формулах. По окончанию ввода последней формулы незамедлительно происходит моделирование управляемого движения робота.

При наборе формулы поддерживаются следующие действия:

- все математические операции (умножение, деление, сложение, вычитание, возведение в степень);
- ввод без ограничения по длине формулы;
- ввод без ограничений по количеству вложенных скобок;
- добавление делегированных тригонометрических и алгебраических функций $(sin(t), cos(t), tg(t), ctg(t), exp(t), ln(t)\ )$;
- ввод делегированных констант π ;
- ввод независимой переменной t;

Приоритеты операций в редакторе являются общепринятыми в

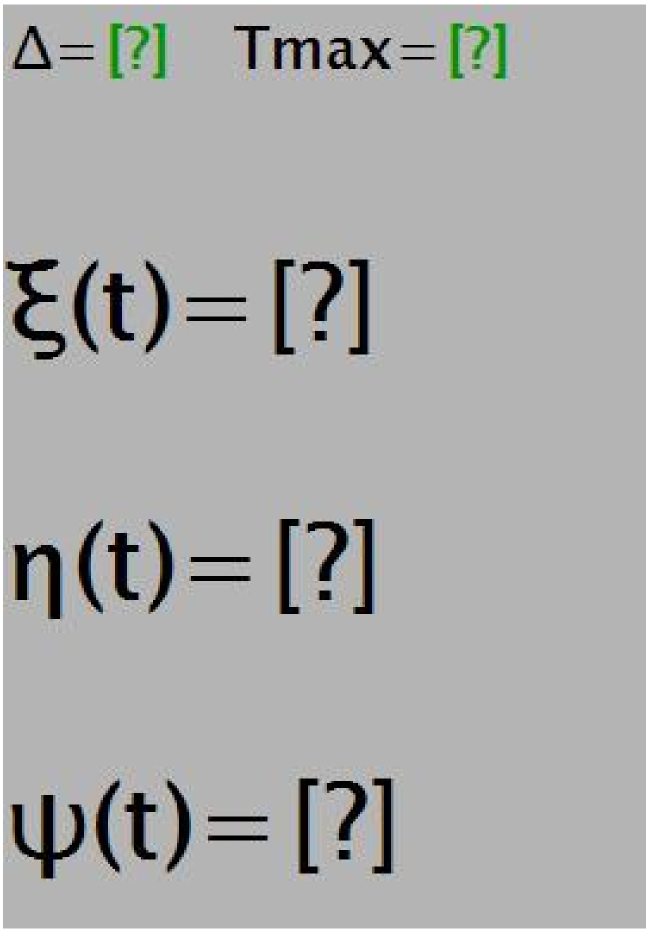

Рис. А.5: Система ожидает ввода управления с помощью формул

математике, так, например в выражении $x + y * z$ сначала будет выполнено умножение, а потом сложение.

Кроме того, редактор дает возможность менять приоритеты по умолчанию, указывая их в явном виде с помощью символов парных скобок. При этом глубина вложенности прямо пропорциональна величине приоритета, то есть более внутренние скобки указывают на больший приоритет, чем внешние, обрамляющие их. В предыдущем примере с суммой и произведением порядок вычисления можно поменять, используя скобки, записав всё выражение так:

$$(x + y) * t$$

Очередность ввода компонент уравнения осуществляется путем движения извне вовнутрь. Пример $sin(t) + 2 * t$, порядок действий ввода:

1. Добавить действие сложение;
2. Левый аргумент блока сложения заменить на функцию $sin([?])$;
3. Добавить переменную времени аргументом функции;
4. Правый аргумент блока сложения заменить на блок умножения;
5. Левый аргумент блока умножения заменить на число(выделен зеленым);
6. Ввести число;
7. Правый аргумент блока умножения заменить на переменную времени;

Если все действия проделаны правильно, на заднем плане отрисуется график функции рис.(А.6).

Метод ввода траектории движения робота графически

Если пользователь выбирает графический способ ввода траектории, перед ним открывается поле для поточечного ввода произвольной траектории рис.(А.7). Изначально поле представляется чистым листом на который можно нанести неограниченное количество точек. Каждая из точек имеет три характеристики (координаты на плоскости и угол поворота).

Ввод данных организован при помощи двух совокупных плоскостей $\xi O\psi$, $\eta O\psi$, переключение между которыми производится нажатием на перекрестие в левом нижнем углу. Скорость движения робота в этом случае принимается постоянной на каждом отрезке ломаной.

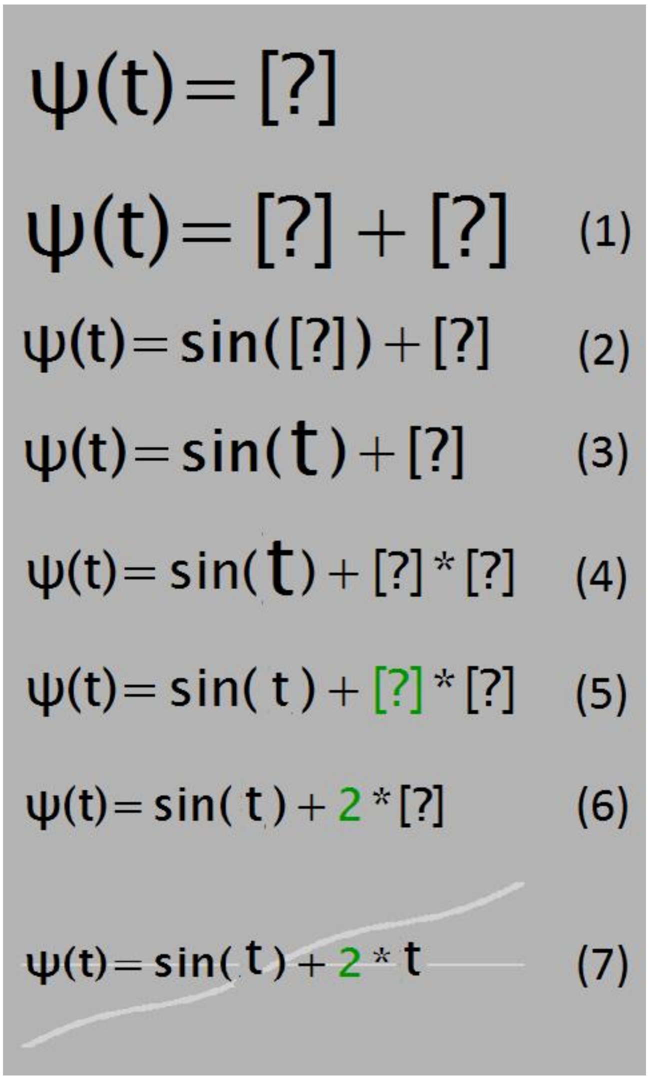

Рис. А.6: Типичный ввод формулы по этапам функции $sin(t) + 2 * t$

При редактировании траектории мгновенно происходит расчет управления и управляемого движения и отображается результат математического моделирования.

Редактор является авторской разработкой и предоставляет возможность поточечного ввода траектории. Модуль позволяет вводить любые значения от -1.7e+308 до 1.7e+308 с точность до 1e-12.

Для более подробного ознакомления с модулем ввода траектории см. Приложение 3.

Основные инструменты редактора:

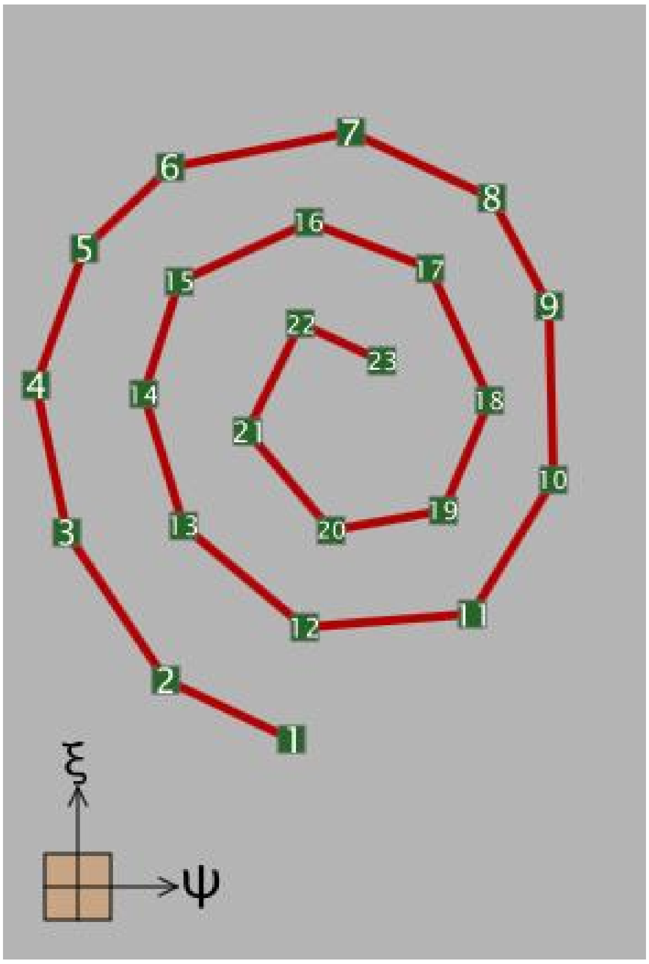

Рис. А.7: Внешний вид модуля ввода траектории

- удалить траекторию;
- добавление точки по клику в любой части рабочей области;
- вставить точку в произвольную часть ломаной;
- переместить точку без разрыва траектории;
- удалить узловую точку без разрыва траектории;
- замкнуть траекторию путем соединения

Благодаря векторной графике, лежащей в основе проектирования приложения, в данном модуле поддерживается масштабирование ломаной в широких пределах, что позволяет пользователю редактировать степень излома траектории. В случае, если траектория скрывается из рабочей области, на границах плоскости появляются ключевые точки, предоставляющие информацию о положении ломаной за пределами рабочей области.

Метод ввода файлом массивом данных

При выборе этого метода ввода, пользователю необходимо загрузить в программу файл с уже сформированным управлением. Данный программный продукт позволяет провести импорт из Microsoft Excell рис.(А.8). На данный момент программный продукт поддерживает два расширения файла:

- cvs;
- msr - внутреннее расширение.

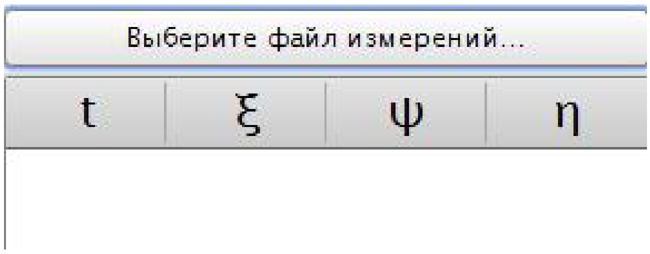

Рис. А.8: Внешний вид формы для ввода массива данных

Данные полученные из массива итерационно подставляются в формулы. Данные следуют потоком в следующем порядке:

- момент времени t_i;
- значение $\xi(t_i)$;
- значение $\psi(t_i)$;
- значение $\eta(t_i)$;

- символ перехода на новую строку + символ сдвига каретки;

В качества разделителя данных используется символ ";". Дробные числа записываются через символ ". Пример: 0,1;4;5;6;.

Расчетная часть

Для детального ознакомления с реализацией расчета см. Приложение 1. После задания траектории движения робота одним из описанных способов, в правой части приложения выводятся следующие графики рис.(А.9)

1. графики $\xi(t), \xi_0(t)$ траектории центра масс платформы
2. графики $\eta(t), \eta_0(t)$ координаты центра масс платформы
3. графики $\psi(t), \psi_0(t)$ угла поворота платформы
4. графики $\dot{\xi(t)}, \dot{\xi_0(t)}$ скорости центра масс платформы
5. графики $\dot{\eta(t)}, \dot{\eta_0(t)}$ скорости координаты центра масс платформы
6. графики $\dot{\psi(t)}, \dot{\psi_0(t)}$ скорости поворота платформы
7. графики траектории платформы на фазовой плоскости $\xi(\eta(t)), \xi_0(\eta_0(t))$
8. графики $\|\dot{\xi(t)} - \dot{\xi_0(t)}\|$, $\|\dot{\eta(t)} - \dot{\eta_0(t)}\|$, $\|\dot{\psi(t)} - \dot{\psi_0(t)}\|$

При построении графиков использовался пятиточечный метод численного дифференцирования.

По графикам можно судить, что рассматриваемая система двигается вдоль отслеживаемой траектории на расстоянии, не превышающем погрешности слежения.

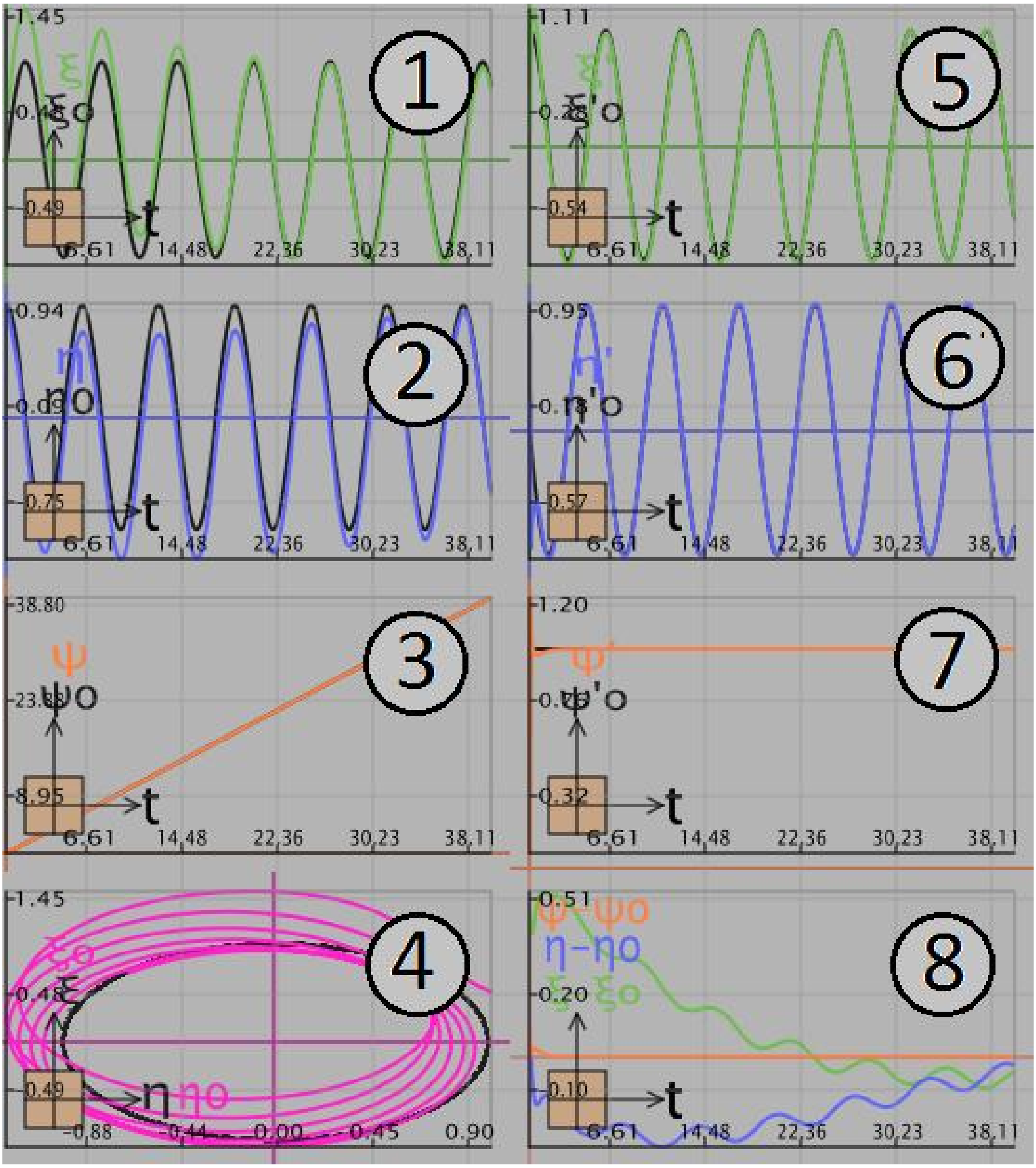

Рис. А.9: Внешний вид расчетной части