ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ
БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ
ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
"УЛЬЯНОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ"

На правах рукописи

Макаров Денис Сергеевич

Моделирование робототехнических систем в виде систем связанных твердых и упруго-твердых тел

Специальность 05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
д.ф.-м.н., профессор
Андреев А.С.

Ульяновск 2016

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Развитие производства в XX веке повлекло за собой совершенствование средств

автоматизации. Использование всевозможных управляемых механизмов повлекло за собой необходимость в развитии математического описания их функционирования для обеспечения оптимальности выполняемых операций. Важная роль в вопросе управляемости механических устройств отведена манипуляторам, как средству выполнения роботом необходимой задачи. Происходит постепенное движение от более простых моделей к более сложным, позволяющим учитывать нелинейную движений манипуляторов, решать задачи с запаздыванием, возникающим в цепи обратной связи. Важная роль уделяется также снижению вычислительной сложности расчётов заданного движения. Данное условие необходимо для возможности просчёта движений онлайн, что обеспечивает большую гибкость возможностей использования манипуляторов. Так как модели механических систем часто представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений, одним из естественных вариантов решения задачи анализа поведения таких систем становится метод декомпозиции, позволяющей проводить разбиение системы на подсистемы меньшей размерности для их дальнейшего исследования. Методы декомпозиции развиваются научными школами таких учёных как Ф.Л. Черноусько и Е.С. Пятницкий. Проблема управления движением механических систем, в том числе, манипуляционных роботов, без учета измерения скоростей стала активно изучаться с начала 90-х годов прошлого века. В ранних исследованиях [?, ?, ?, ?, ?] были получены результаты, решающие задачи стабилизации программной позиции и локального отслеживания траектории. Эти результаты, как правило, были основаны на применении двухшаговой процедуры: 1) построение наблюдателя (фильтра) скоростей; 2) синтез управления с применением метода линеаризации обратной связью и функции Ляпунова квадратичного вида. Такие законы управления являются весьма сложными по структуре, так как содержат вычисляемые в режиме он-лайн моменты всех сил, действующих на систему, слагаемое, представляющее собой произведение матрицы инерции системы на программное ускорение. Точная реализация данных законов возможна лишь на имеющейся полной информации о параметрах системы и действующих силах. В работах [?, ?] решены задачи полуглобального и глобального отслеживания траектории механической системы с одной и с n степенями свободы без учета измерения скорости на основе применения приближенного дифференцирования и построения управления при помощи метода линеаризации обратной связью. Как отмечалось ранее, недостатком данного метода является сложность структуры построенного управления, большие объемы вычисления в режиме он-лайн и необходимость построения точной динамической модели системы. В работах [?, ?] для решения задач стабилизации программной позиции и программного движения натуральной механической системы без измерения скоростей были построены наблюдатели, имеющие порядок, равный числу степеней свободы системы, не требующие точной информации о динамической модели системы, что является преимуществом перед нелинейными наблюдателями, предложенными в работах [?,?]. Результаты, полученные в работах [?, ?], применимы лишь для механических систем без учета диссипативных сил, кроме того, решение задачи о стабилизации программного движения получено в малом, что ссужает область применимости данных результатов. В работе [?] дано решение задачи полуглобального отслеживания траектории механических систем, находящихся под действием лишь потенциальных и ограниченных управляющих сил, что ссужает класс рассматриваемых механических систем. В работе [?] на основе применения классического метода Ляпунова построено адаптивное управление многозвенным манипулятором на основе наблюдателя и применения метода бэкстеппинга без измерения скоростей и с учетом неизвестных параметров системы. В работе [?] было получено адаптивное управление манипуляционным роботом без измерения скоростей с использованием фильтров первого порядка. Недостатком работ [?, ?] является сложная структура построенного управления. В работе [?] предложен робастный закон управления, решающий задачу глобального отслеживания траектории

робота манипулятора с неточно известными параметрами без измерения скоростей, недостатком работы является сложный алгоритм построения управления, требующий большого объема вычислений в режиме он-лайн. В работе [?] даны решения задач управления нелинейных механических систем под действием диссипативных сил без измерения скоростей с гравитационным компенсатором: о глобальной стабилизации программной позиции на основе динамической обратной связи с насыщением; глобального отслеживания траектории. При этом нерешенной остается задача построения закона управления без гравитационного компенсатора, в том числе, для систем с неточно известными параметрами. В работе [?] решена задача о глобальной стабилизации программной позиции механической системы, находящейся под действием лишь потенциальных и управляющих сил. С помощью нелинейной обратной связи построен закон управления без измерения скоростей. При этом вопрос о робастности построенного закона не рассматривался. Нерешенной остается задача о стабилизации нелинейной обратной связью программного движения более широкого класса механических систем, находящихся под действием не только потенциальных, но и диссипативных сил. В работе [?] построен закон адаптивного управления, обеспечивающего равномерную глобальную асимптотическую устойчивость заданного движения манипуляционного робота. На основе классического метода Ляпунова и построения нелинейных фильтров задача адаптивного управления решена для механических систем с линейной зависимостью от вектора неизвестных параметров. Отметим, что для реализации построенного в [?] закона требуется проведение громоздких вычислений для построения оценки неизвестных параметров, кроме того, открытым остается вопрос оценки скорости сходимости к программному движению. В работе [?] решена задача об отслеживании нестационарной траектории механических систем без измерения скоростей и без построения наблюдателей. При этом для нахождения

неизвестных скоростей применяется приближенное дифференцирование. Получены условия равномерной глобальной асимптотической устойчивости программного движения системы без диссипации путем построения нелинейного закона управления на основе метода линеаризации обратной связью. Проведенный анализ работ [?] - [?] позволяет утверждать, что к настоящему моменту решение задачи о нелокальной стабилизации нестационарных программных движений нелинейных механических систем с неточно известными параметрами без измерения скоростей далеко от завершения.

В

80-х гг. из-за развития вычислительной техники, учёные при разработке методов моделирования начинают ориентироваться на эффективность метода с точки зрения применимости для решения на компьютере. Метод оценивается с помощью O – символики. Алгоритмы, разработанные с применением метода Лагранжа, имели сложность $O(N^4)$ и должны были быть адаптированы для систем, работающих в реальном времени. Первые исследователи, разработавшие методы порядка $O(N)$ для решения обратной задачи динамики использовали уравнения Ньютона-Эйлера. Так Степаненко и Вукобратович в 1976-м разработали рекурсивный метод Ньютона-Эйлера для описания динамики человеческих конечностей. Орин в 1979 году улучшил этот метод, привязав силы и моменты сил к локальным координатам звеньев для контроля ноги шагающей машины в реальном времени. Лу, Уокер и Пол в 1980-м разработали очень эффективный рекурсивный алгоритм на основе уравнений Ньютона-Эйлера (RNEA), привязав все основные параметры к координатам звеньев. Холлербах, разработавший в том же году алгоритм на основании уравнений Лагранжа, однако, оказалось, что он намного менее эффективен, чем RNEA в терминах количества умножений и сложений. Рекурсивные преобразования и формулы Родрига использовали Вукобратович и Потконяк [И29] (1979 г.), причем их метод позволял решать и прямую задачу динамики, хотя его вычислительная эффективность и не столь высока. Значительный прогресс в сокращении числа операций достигнут в работах Ренода [И24] (1983 г.) и Ли [И15] (1988 г.), также применивших рекурсивные соотношения.[И1]

Самый ранний первый известный алгоритм сложности $O(N)$ для решения прямой задачи динамики был предложен Верещагиным. Этот алгоритм использует рекурсивную формулу для расчета формы Гиббса-Аппеля уравнения движения, и применим к неразветвлённым цепям с вращательными или призматическими соединениями. В 1988 Балафотисом, Пателем и Митрой были представлены дварекурсивных алгоритма на основе уравнений Ньютона-Эйлера, использующие ортогональные тензоры для решения обратной задачи динамики. Они применимы для разомкнутой кинематической цепи (например, для моделирования движения человеческой руки). Один из этих алгоритмов позволяет рассчитать положение манипулятора с шестью степенями свободы, используя приблизительно 489 операций умножения и 420 сложения. Для манипуляторов с более простой геометрической конфигурацией количество операций может быть уменьшено до 277 и 255 соответственно. [И19] Этот алгоритм приблизительно в 1.7 раз быстрее, чем алгоритм RNEA для манипулятора робота с шестью степенями свободы.

В 1954 г. были проведены работы по симуляции эволюции Нильсом Баричелли на компьютере, установленном в Институте Продвинутых Исследований Принстонского университета. Его работа, опубликованная в том же году, привлекла широкое внимание общественности. [И20] С 1957 года, австралийский генетик Алекс Фразер опубликовал серию работ по симуляции искусственного отбора среди организмов с множественным контролем измеримых характеристик. Симуляции Фразера включали все важнейшие элементы современных генетических алгоритмов. [И21] С ростом исследовательского интереса существенно выросла и вычислительная мощь настольных компьютеров, это позволило использовать новую вычислительную технику на практике. В том числе применять генетические алгоритмы для нахождения оптимального управления робототехническими системами (например, симуляции походки человека). Одна из последних на данное время работ в этом направлении - работа, представленная в 2013 г. В ней Гейтенбик, Ван де Панн и Ван дер Стаппен продемонстрировали метод моделирования двуногой ходьбы с использованием генетических алгоритмов. [И22] Их метод основывается на моделировании конечностей существа в виде связанных тел, управляемых мышцами, которые могут перемещать конечности определенным образом и основывается на работе Ванга 2012 г. [И30] Проведенные эксперименты показывают, что в обычных условиях модели приходят к стабильному положению ходьбы через 500-3000 поколений. Недостатками, однако, является небольшая производительность (на персональном компьютере время оптимизации 2-12 часов). Также для метода, как в целом для всех генетических алгоритмов характерна сходимость решения к локальному минимуму, что может не обеспечивать достаточной эффективности.

В первой главе диссертации представлены исследования относительно уравнений с запаздыванием. Результаты, полученные в первой главе далее применяются для построения управления манипуляторами во второй и третьей главах.

Во второй главе строится и обосновывается управление двухзвенным манипулятором, моделируемым в виде системы связанных твёрдых тел. Рассматривается модель манипулятора, описываемая уравнениями Лагранжа 2-го рода. В первом параграфе исследуется поведение манипулятора без учёта динамики приводов, расположенных в шарнирах и приводящих манипулятор в движение. Во втором параграфе система рассматривается с учётом динамики приводов.

Третья глава начинается с построения модели, описывающей поведения трехзвенного манипулятора, имеющего 3 степени свободы, не учитывающей действия электрических приводов. Во втором параграфе рассматривается модель манипулятора с приводами.

Приложение содержит компьютерную модель динамики трехзвенного манипулятора и реализацию данной модели на языке высокого уровня Java. Представленная программа позволяет задавать закон управления в аналитическом виде, в том числе в виде определенных интегралов с переменным верхним пределом.

1 ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

1.1 Теоремы об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием

Пусть R^p — линейное действительное пространство p — векторов x с нормой $|x|, R$ — действительная ось, $h > 0$ — заданное действительное число, C — банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^p$ с нормой $\|\varphi\| = sup(|\varphi(s)|, -h \leq s \leq 0). C_H = \varphi \in C : \|\varphi\| < H > 0$

Рассмотрим неавтономное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.1}$$

где $f : R \times C_H \to R^p$ - некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему предположению.

Для каждого числа r, $0 < r < H$, существует число m_r такое, что выполняется неравенство

$$|f(t, \varphi)| \leq m_r, \forall \varphi \in \bar{C}_r = \varphi \in C : \|\varphi\| \leq r < H. \tag{1.2}$$

Пусть выполняется 1.1 выполнено и $\{r_n\}$ — последовательность чисел такая, что $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$, $r_n \to H$ при $n \to \infty$. Определим для всех r_i множество $K_i \subset C$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\varphi(s)| \le r_i, \qquad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \le m_{r_i}|s_2 - s_1|.$$

Множество K_i компактно, положим $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Пусть F - множество всех непрерывных функций f, определенных на $R \times \Gamma$, со значениями в R^p. Через f^τ обозначим сдвиг функции f, $f^\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Для $f \in F$ семейство сдвигов $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R\}$ будет являтся подмножеством F.

Дадим определение сходимости в F как равномерной на каждом компакте $K' \subset R \times \Gamma$: последовательность $\{f_n \in F\}$ сходится к $f \in F$, если $\forall K' \subset R \times \Gamma$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $|f_n(t, \varphi) - f(t, \varphi)| < \varepsilon$, при $n > N = N(\varepsilon)$ и $(t, \varphi) \in K'$.

Эта сходимость метризуема, для всех n для двух функций f_1, $f_2 \in F$ вводится полунорма $\|\cdot\|_n$ и соответствующая псевдометрика ρ_n

$$\|f\|_n = \sup\{|f(t, \varphi)|, \forall (t, \varphi) \in K'_n\},$$

$$\rho_n(f_1, f_2) = \frac{\|f_2 - f_1\|_n}{1 + \|f_2 - f_1\|_n},$$

где $K'_n = [0, n] \times K_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (K_n определено выше).

Тогда расстояние между функциями $f_1, f_2 \in F$ может быть задано в виде $\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f_1, f_2)$.

Можно убедиться, что при этому будут выполнены все аксиомы метрического пространства. И пространство F будет полным по отношению к введенной метрике.

Допустим, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующему предположению.

Для любого $K \subset C_H$ (K - компакт) функция $f = f(t, \varphi)$ равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in R \times K$, т.е. $\forall K \subset C_H$ и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для любых $(t, \varphi) \in R \times K$, $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in R \times K : |t_2 - t_1| < \delta, \varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, выполняются неравенства

$$|f(t_2, \varphi_2) - f(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon. \tag{1.3}$$

При условии выполнения предположений 1.1 и 1.1 семейство сдвигов $\{f^\tau : \tau \in R\}$ предкомпактно в F.

Функция $f^* : R \times \Gamma \to R^p$ называется предельной к f, если существует последовательность t_n такая, что $f^{(n)}(t, \varphi) = f(t_n + t, \varphi)$ сходится к $f^*(t, \varphi)$ при $t \to \infty$ в F. Замыкание семейства $\{f^\tau : \tau \in R\}$ в F называется оболочкой $S^+(f)$. Уравнение

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t) \tag{1.4}$$

называется предельным к (1.1). При условиях (1.2) и (1.3) уравнение (1.1) является предкомпактным.

Для любого компактного множества $K \subset C_H$ функция $f = f(t, \varphi)$ удовлетворяет условию Липшица т.е, $\forall K \subset C_H$ существует $L = L(K)$, такое, что для любых $t \in R$; $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ будет выполнено неравенство

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq L\|\varphi_2 - \varphi_1\|. \tag{1.5}$$

При выполнении условия (1.5), каждая предельная функция $f^*(t,\varphi)$ также будет удовлетворять аналогичному условию Липшица относительно компакта $K \subset \Gamma$.

Вследствие этого согласно предположению 1.1 решения уравнения (1.1) при начальном условии $(t,\varphi) \in R \times C_H$ и уравнения (1.4) для $(t,\varphi) \in R \times \Gamma$ будут единственными.

Связь между решениями уравнений (1.1) и (1.4) определяется следующими теоремами:

Пусть функция $f^* : R \times \Gamma \to R^p$ есть предельная к f в F относительно последовательности $t_n \to +\infty$, а последовательности $\{\alpha_n \in\}$ и $\{\varphi_n \in F\}$ таковы, что $\alpha_n \to \alpha \in$, $\varphi_n \to \varphi \in \Gamma$ при $n \to \infty$. Пусть $x = x(t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ есть решения уравнения (1.1), а $y(t,\alpha,\varphi)$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$, определенное для $t \in [\alpha - h, \beta)$.

Тогда последовательность функций $y^n(t) = x(t_n + t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ сходится к $y(t,\alpha,\varphi)$ равномерно по $t \in [\alpha - h + \varepsilon, \gamma]$ для малого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 0$ при $\{\alpha_n = \alpha\}$) и каждого γ, $\alpha < \gamma < \beta$.

Пусть решение (1.1) $x = x(t,\alpha,\varphi)$ ограничено, $|x(t,\alpha,\varphi)| \leq r < H$ для всех $t \geq \alpha - h$. Тогда множество $\omega^+(\alpha,\varphi)$ квазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений $\{\dot{x} = f^*(t,x_t)\}$, а именно, для каждой точки $\psi \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ существует предельное уравнение $\dot{x} = f^*(t,x_t)$, такое, что точки его решения $y(t,0,\psi)$ в пространстве C содержатся в $\omega^+(\alpha,\varphi)$, $\{y_t(0,\psi), t \in R\} \subset \omega^+(\alpha,\varphi)$.

Прямой метод Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений основан на применении функционалов и функций Ляпунова [].

Пусть $V : R^+ \times C_H \to R$ есть непрерывный функционал Ляпунова и $x = x(t, \alpha, \varphi)$ — решение уравнения (**??**). Функция $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$ представляет собой непрерывную функцию времени $t \geq \alpha$.

Верхней правосторонней производной от V вдоль решения $x(t, \alpha, \varphi)$ называется значение [**?**, **?**]

$$\dot{V}^+(t, x_t(\alpha, \varphi)) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{1}{\Delta t} \left[V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(\alpha, \varphi)) - V(t, x_t(\alpha, \varphi)) \right]. \quad (1.6)$$

В отличие от обыкновенного дифференциального уравнения вычисление производной $\dot{V}^+(t, x_t)$ функционала V в общем случае не имеет достаточно простой формулы.

Иной подход к вычислению производной основан на свойстве инвариантности производной от интегральных форм по некоторому классу функций. Тогда функционал $V = V(t, \varphi)$ допускает уточнение своей зависимости от φ в виде $V = V(t, x, \varphi_x)$, при этом зависимость от φ_x выражается через некоторую интегральную форму.

$$\dot{V}(t, x, \varphi_x) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, x, \varphi_x) + \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, x, \varphi_x) \cdot f_i(t, x, \varphi_x) \right) + \partial V_\varphi(t, x, \varphi_x),$$

или

$$\dot{V}(t, \varphi) = \frac{\partial V}{\partial t}(t, \varphi) + \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial V}{\partial x_i}(t, \varphi) \cdot f_i(t, \varphi) \right) + \partial V_\varphi(t, \varphi). \quad (1.7)$$

Для изложения в классическом стиле вводят следующие определения, в основе которых лежит использование непрерывных, строго возрастающих функций $a : R^+ \to R^+$, $a(0) = 0$ (функций класса $\mathcal{K}$).

Функционал $V(t,\varphi)$ называется определенно-положительным по $|\varphi(0)|$ (по $\|\varphi\|$), если $V(t,0) \equiv 0$ и для некоторого H_1, $0 < H_1 < H$, существует функция $a \in \mathcal{K}$, такая, что для любых $(t,\varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$ выполнено неравенство

$$V(t,\varphi) \geq a(|\varphi(0)|) \quad (\geq a(\|\varphi\|)).$$

Функционал $V = V(t,\varphi)$ допускает бесконечно малый высший предел по $\|\varphi\|$, если для некоторого H_1, $0 < H_1 < H$, существует функция $a \in \mathcal{K}$, такая, что для всех $(t,\varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$ выполнено неравенство

$$|V(t,\varphi)| \leq a(\|\varphi\|).$$

Следуя [], введем следующие определения.

Допустим, что производная $\dot{V}(t,\varphi)$ оценивается неравенством

$$\dot{V}(t,\varphi) \leq -W(t,\varphi) \leq 0, \tag{1.8}$$

где функционал $W = W(t,\varphi)$ ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве $R \times K$, т.е. для каждого компактного множества $K \subset C_H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m = m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такие, что имеют место неравенства

$$W(t,\varphi) \le m, \qquad |W(t_2,\varphi_2) - W(t_1,\varphi_1)| \le \varepsilon \tag{1.9}$$

для всех $(t,\varphi) \in R \times K$; (t_1,φ_1), $(t_2,\varphi_2) \in R \times K$: $|t_2 - t_1| \le \delta$, $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \le \delta$. Как и в случае f, при этих условиях семейство сдвигов $\{W^\tau(t,\varphi) = W(t+\tau,\varphi), \tau \in\}$ предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций $F_W = \{W : R \times \Gamma \to R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

Функция $W^* \subset F_W$ есть предельная к W, если существует $t_n \to +\infty$, такая, что последовательность $\{W_n(t,\varphi) = W(t_n + t,\varphi)\}$ сходится к W^* в F_W.

Будем говорить, что отображение $u : (\alpha,\beta) \to C_H$ $(u : R \to C_H)$ принадлежит множеству $\{\varphi \in C_H : W(t,\varphi) = 0\}$, если тождество $W(t,u(t)) \equiv 0$ выполняется для всех $t \in (\alpha,\beta)$ (соответственно для всех $t \in R$), $u(t) \in \{W(t,\varphi) = 0\}$ для $t \in (\alpha,\beta)$ и (для всех $t \in R$).

На основании теорем 1.1. и 1.2 достигается следующий результат.

Функции $f^* \in F$ и $W^* \in F_W$ образуют предельную пару (f^*,W^*), если они являются предельными к f и W для одной и той же последовательности $t_n \to +\infty$.

Предположим, что:

1) существует непрерывный функционал $V : R \times C_H \to R$, ограниченный снизу на каждом компакте $K \subset C_H$, $V(t,\varphi) \ge m(K)$ для всех $(t,\varphi) \in R \times K$, и такой, что $\dot V(t,\varphi) \le -W(t,\varphi) \le 0$ для всех $(t,\varphi) \in R \times C_H$;

2) решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (1.1) ограничено, $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq H_1 < H$ для всех $t \geq \alpha - h$.

Тогда для каждой предельной точки $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ существуют предельная пара (f^*, W^*) решение $y = y(t)$, $y_0 = \psi$, уравнения $\dot{x} = f^*(t, x_t)$, такие, что $y_t \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ и $y_t \subset W^*(t, \varphi) = 0\}$ для всех $t \in R$.

Рассмотрим задачу об асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.1), полагая, что $f(t, 0) \equiv 0$.

Фундаментальное значение иммет следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости.

Предположим, что:

1) существует функционал $V : R \times C_{H_1} \to (0 < H_1 < H)$, такой, что $V(t, 0) = 0$, $a_1(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq a_2(\|\varphi\|)$, $\dot{V}^+(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$ для всех $(t, \varphi) \in R \times C_{H_1}$;

2) для каждой предельной пары (g, U) множество $\{U(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решения уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, кроме нулевого.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Рассмотрим задачу об устойчивости невозмущенного движения уравнения (1.1) относительно части переменных $x_1, x_2, ..., x_m (m > 0, m \leq p)$. Для удобства переобозначим эти переменные $y_i = x_i (i = 1...m)$, а остальные — через $z_j = x_{m+j} (j = 1...r = p - m)$. Соответственно, $x^{'=(x_1,...,x_m,x_{m+1},...,x_p)=(y^{'},z^{'}),y\in R^m}$ есть вектор p — мерного действительного пространства с некоторой нормой $||, z \in R^{p-m}$ есть вектор $(p - m)$ — мерного действительного пространства с некоторой нормой, при этом норму $|x|$ определим равенством $|x| = |y| + |z|$. Через C^y обозначим банахово пространство непрерывных функций $\psi : [-h, 0] \to R^m$ с нормой $\|\psi\| = sup(|\psi(s)|, -h \leq s \leq 0)$, пространство $C = C^y \times C^z$, для $\varphi \in C$ имеем $\varphi^{'=(\psi', \theta')}$ и $\|\phi\| = \|psi\| + \|\theta\|$. Правая часть уравнения (1.1), вектор-функция $f = f(t, \varphi)$ может быть записана в виде

а само уравнение можно представить в виде

$$\dot{y}(t) = f^1(t, y_t, z_t), \dot{z}(t) = f^2(t, y_t, z_t). \tag{1.10}$$

Будем полагать, что правая часть этого уравнения $f = (f^1, f^2)$ определена, непрерывна в области $R^+ \times C^y_H \times C^z, C^y_H = \psi \in C^y : \|\psi\| < H, 0 < H < +\infty$, удовлетворяет в этой области условиям теорем о существовании, единственности, непрерывной зависимости и продолжимости решений $x = x(t, \alpha, \phi), (\alpha, \phi) = (\alpha, \psi, \theta) \in R \times C^y_H \times C^z$.

Пусть функция $f^1(t, \phi)$ ограничена в области $R^+ \times \bar{C^y_r} \times C^z$; для каждого $r, 0 < r < H$, существует число $m = m(r) > 0$, такое, что для всех $(t, \psi, \theta) \in R^+ \times \bar{C^y_r} \times C^z R^{\bar{C^y_r} = \psi \in C^y : \|t\| \leq r}$ выполняется неравенство $|f(t, \psi, \phi) \leq m$.

Ограниченность решения уравнения позволяет применить для выявления устойчивости относительно части переменных свойство квазиинвариантности его положительного предельного множества, определяемое построением предельных уравнений.

Область Г, в данной задаче строим следующим образом.

Пусть $r_1^{(j)}$ есть последовательность чисел, таких, что $r_1^{(1)} < r_1^{(2)} < ... <$

$r_1^{(j)} < ..., r_1^{(j)} \to H$ при $j \to \infty, r_2^{(j)}$ — последовательность $r_2^{(1)} < r_2^{(2)} < ... < r_2^{(j)} < ..., r_2^{(j)} \to \infty$ при $j \to \infty$. Для каждого $j \in N$ определяем множество $K_j \in C_H^y \times C^z$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\psi(s)| \le r^{(j)}j_1, |\theta(s)| \le r^{(j)}j_2, |\phi(s_2) - \phi(s_1)| \le m_r|s_2 - s_1| \tag{1.11}$$

и полагаем $\Gamma = \bigcap_{j=1}^{\infty} K_j$.

В области $R \times \Gamma$ определяем семейство предельных к $f(t, \varPhi)$ функций $g : R \times \Gamma \to R^p$ и соответственно, семейство предельных уравнений

$$\dot{x}(t) = g(t, x_t). \tag{1.12}$$

Существование функционала Ляпунова, имеющего знакопостоянную производную, позволяет применить к решению задачи об устойчивости по части переменных принцип квазиинвариантности. При этом, существенной особенностью является определение ограниченности решений.

Пусть 1) каждое решение уравнения () из некоторой δ_0 — окрестности $\|\varPhi\| < \delta_0 > 0$ точки $\varPhi = 0$ ограниченно по z; 2) существует функционал $V = V(t, \varPhi), V(t, 0) = 0$, такой, что для всех $(t, \varPhi) \in R^+ \times C_{H_1}^y \times C^z (0 < H_1 < H)$

$$V(t, \varPhi) \ge a(|\psi(0)|), \dot{V}(t, \varPhi) \le -W(t, \varPhi) \le 0; \tag{1.13}$$

3) для каждой пары (g, U) и любого числа $_0 \ge 0$ решениями уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, содержащимися во множестве $V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 \cap U(t, \varphi) = 0$,

могут быть лишь решения $x = x(t) : y(t) \equiv 0$.

Тогда решение $x = 0$ уравнения асимптотически устойчиово по y.

В следующей теореме будем полагать, что функционал $V = V(t, \Phi)$ является ограниченным, равномерно непрерывным на каждом множестве $R^+ \times R$.

Предположим, что: 1) решение уравнения из некоторой окрестности $\|\Phi\| < \delta_0 > 0$ точки $\Phi = 0$ равномерно по r — ограничены по z;

2) существует функционал $V(t, \Phi)$, такой, что для $(t, \Phi) = (t, \psi, \theta) \in R^+ \times C^y_{H_1} \times C^z$ имеют место соотношения

$V(t, \Phi) \geq a_1(|\psi(0)|), V(t, \Phi) \leq a_2(\|\Phi\|), \dot{V}(t, \Phi) \leq -W(t, \Phi) \leq 0;$

3) каждая предельная совокупность (g, U, V^*) такова, что множество $V^*(t, \Phi) = c = c_0 > 0 \cap U(t, \Phi) = 0$ не содержит решений уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$

1.2 Развитие метода векторных функций Ляпунова в исследовании устойчивости дискретных систем

1.3 Устойчивость дискретной модели типа Вольтерра

2 ДВУХЗВЕННЫЙ МАНИПУЛЯТОР

2.1 Теоремы о стабилизации

Рассмотрим математическую модель двухзвенного манипулятора. Манипулятор состоит из неподвижного основания и двух абсолютно жестких звеньев G_1, G_2. Элементы конструкции соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, и O_2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2.

Введем обозначения: $q_i(i = 1,2)$ — углы поворотов звеньев манипулятора; l_{q_i} — длина отрезка O_iC_i; l_1 — длина отрезка O_2C_2; m_i — масса i-го звена; I_i — момент инерции i-го звена относительно оси шарнира O_i; g — ускорение свободного падения.

Выражение для кинетечиской энергии манипулятора имеет в таком случае следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{q_2}\cos(q_2 - q_1)\dot{q}_1\dot{q}_2$$

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = M_1 + U_1, \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = M_2 + U_2, \end{cases}$$

где M_i — момент, создаваемый силой тяжести в i-м шарнире, $M_1 = (m_1 l_{g_1} + m_2 l_1) g \sin q_1, M_2 = m_2 l_{q_2} g \sin q_2, U_i$ — управляющие воздействия.

Из выражения для кинетической энергии T находим уравнения движения

$$\begin{cases} (I_1 + m_2 l_1^2)\ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_2^2 = \\ = (m_1 l_{g_1} + m_2 l_1) g \sin q_1 + U_1, \\ I_2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_1^2 = m_2 l_{g_2} g \sin q_2 + U_2. \end{cases}$$

Пусть $q = q(q_1, q_2)^T$ — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и $X = (q^0(t), \dot{q}^0(t)) : [t_0, +\infty) \to R^4, \|q^0(t)\| \le g_0, \|\dot{q}^0(t)\| \le g_1, \|\ddot{q}^0(t)\| \le g_2$ есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q = q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$. Символом $\|\|$ обозначена евклидова норма вектора.

Пусть $(q^0(t), \dot{q}^0(t)) \in X$ — какое-либо программное движение, реализуемое программным управлением $U = U^0(t)$. Введем возмущения $x = q - q^0(t), \dot{x} = \dot{q} - \dot{q}^0(t)$

и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x} = \dot{x}^T C^{(1)}(t,x)\dot{x} + Q^{(1)}(t,x) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) + U^{(1)}$$

$$A^{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} I_1 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) \\ m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) & I_2 \end{pmatrix}$$

$$C^{(1)}(t,x) = (C^{(1)}_{(1)}(t,x), C^{(1)}_{(2)}), Q^{(1)}(t,x) = F(t,x)p(x), Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = D(t,x)\dot{x}$$

,

$$C^{(1)}_{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) \end{pmatrix},$$

$$C^{(2)}_{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} -m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} f_{11}(t,x) & f_{12}(t,x) \\ f_{21}(t,x) & f_{22}(t,x) \end{pmatrix},$$

$$p(x) = \begin{pmatrix} \sin(x_1/2) \\ \sin(x_2/2) \end{pmatrix},$$

$$D(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & c^{(1)}_{22(1)}(t,x)\dot{q}_2^0(t) \\ c^{(1)}_{11(1)}(t,x)\dot{q}_1^0(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$$f_{11}(t,x) = 2m_2 l_1 l_{g_2} \cos(x_2/2)(\ddot{q}_2^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) -$$

$$- (\dot{q}_2^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2)) + 2g(m_1 l_{g_2} + m_2 l_2) \cos(q_1^0(t) + x_1/2)$$

$$f_{12}(t,x) = -2m_2 l_1 l_{g_2} \cos(x_1/2)(\ddot{q}_2^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) +$$

$$+ (\dot{q}_2^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2))$$

$$f_{21}(t,x) = 2m_2 l_1 l_{g_2} \cos(x_2/2)(\ddot{q}_1^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) +$$

$$+ (\dot{q}_2^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2))$$

$$f_{22}(t,x) = -2m_2 l_1 l_{g_2} \cos(x_1/2)(\ddot{q}_1^0(t) \sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) -$$

$- (\dot{q}_2^0(t))^2 \cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2)) + 2gm_2 l_{g_2} \cos(q_2^0(t) + x_2/2)$

$U^{(1)} = U - U^0(t)$

Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $U^{(1)} = U^{(1)}(t, x, \dot{x})$, $U^{(1)}(t, 0, 0) \equiv 0$, при котором бы невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ системы (2) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иными словами, управление $U = U^0(t) + U^{(1)}(t, q - q^0(t), \dot{q} - \dot{q}^0(t))$

обеспечивало бы стабилизацию программного движения $(q^0(t), \dot{q}^0(t)) \in X$ системы (1).

Рассмотрим решение задачи стабилизации в области $G = (x, \dot{x}) \in R^4 : \|x\| < \epsilon, \|\dot{x}\| < \epsilon, \epsilon = const > 0$ с помощью непрерывного управления вида

$\mathrm{U}^{(1)}(x, \dot{x}) = B(\dot{x} + p(x))$

где $B \in R^{2\times 2}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению. Возьмем для системы **??** вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)'$ с коэффициентами вида $V^1 = \|p(x)\|, V^2 = \sqrt{(\dot{x} + p(x))'^{A^{(1)}(t,x)(\dot{x}+p(x))}}$.

Вычисляя производную по времени вектор-функции Ляпунова V в силу системы (2), получим следующие оценки:

$$\dot{V}^1 \leq -mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda_1}, \dot{V}^2 lem_2 V^1 - \mu_2 V^2 + m_3 (V^1)^2 + m_4 (V^2)^2 + m_5 V^1 V^2$$

,

где положительные постоянные $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, m_i (i = 1, 2, ..., 5)$ определяются из следующих условий:

$$\lambda_1^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 - \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 + \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2}$$

$\mu_1 = \frac{1}{2}\cos(frac\epsilon 2), m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \max \frac{\lambda_2^2 + 2\sqrt{\lambda_{max}[(D-F)'(D-F)]}}{2\lambda_1}, m_3 = \frac{m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, m_4 = \frac{2 m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, m_5 = \frac{3 m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, \mu_2 = \frac{-\lambda_2^2 - 4 g_1 m_2 l_q l_{g_2} - \lambda_{max}(B + B')}{2\lambda_2}$

Здесь $\lambda_m ax$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (2) можно построить следующую систему сравнения:

$$\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda_1} u^2, \dot{u}^2 = m_2 u^1 - \mu_2 u^2 + m_3 (u^1)^2 + m_4 (u^2)^2 + m_5 u^1 u^2$$

Согласно теореме сравнения об асимптотической устойчивости [5] из свойства асимптотической устойчивости нулевого решения системы сравнения **??** следует свойство равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы **??**. Получим условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы **??** с областью притяжения $(u^1, u^2) \in R^2 : 0 \leq u^1 \leq \delta_1 = const > 0, 0 \leq u^2 \leq \delta_2 = const > 0$. Пусть найдется такое число $\gamma > 0$, что выполняются соотношения:

$$\gamma = \frac{\delta_2 m_1}{\delta_1 \lambda_1 \mu_1}, \mu_2 > \frac{m_1}{\gamma \lambda_1 \mu_1}(m_2 + \delta_1 m_3) + m_4 \delta_2 + m_5 \delta_1$$

Тогда можно показать, что функция $\widetilde{u}(t) = max u^1(t), \delta_1 u^2(t)/\delta_2$ будет монотонно стремиться к нулю при $t \to \infty$, и, значит, нулевое решение системы сравнения **??** будет асимптотически устойчиво. При невозможности практической реализации программного управления стабилизацию программного движения можно осуществить при помощи разрывного управления вида

$$U^{(1)}(x, \dot{x}) = Bsign(\dot{x} + p(x))$$

Численное моделирование движения манипулятора при действии управлений 1.7 и **??** проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории

$$m_1 = 0,5, m_2 = 0,3, l_1 = 0,5, l_2 = 0,5, l_{g_1} = 0,25, l_{g_2} = 0,3, I_1 = 0,01*^2, I_2 = 0,006*$$

На рисунках 2 и 3 представлены результаты моделирования при управлениях 1.7 и **??** соответственно.

2.2 Стабилизация положения равновесия модельного уравнения

2.3 Стабилизация движения голономной механической системы с циклическими координатами

3 ТРЕХЗВЕННЫЙ МАНИПУЛЯТОР

3.1 Стабилизация программных движений голономной механической системы

Рассмотрим математическую модель трехзвенного манипулятора, состоящую из трех абсолютно жестких звеньев G_1, G_2, G_3, представляющих собой однородные стержни. Манипулятор установлен на неподвижном основании, на которое опирается звено G_1. Звено G_1 таким образом, может совершать только вращения вокруг вертикальной оси. Звенья соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, и O_2 таким образом, что звенья G_2 и G_3 могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2. На конце звена G_3 находится груз, перемещаемый манипулятором.

Введем обозначения: $q_i(i = 1, 2, 3)$ — углы поворотов звеньев манипулятора; $Q_i(i = 1, 2, 3)$ — управляющие моменты относительно осей соответствующих звеньев; l_i — длина i-го звена; m_i — масса i-го звена; m_0 — масса перемещаемого груза; $m_30 = m_0 + m_3$; J_{01} — момент инерции первого звена относительно оси вращения; r_2 и r_3 — соответственно расстояния от центров тяжести второго звена и третьего звена с перемещаемым грузом относительно осей соответствующих звеньев; g — ускорение свободного падения. Уравнения движения манипулятора имеют вид:

$$\begin{cases} (J_{01}+m_2r_2^2\sin^2 q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)^2)\ddot{q}_1+ \\ +2(m_2r_2^2\sin q_2\cos q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)l_2\cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2+ \\ +2m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)r_3\cos q_3\dot{q}_1\dot{q}_3=Q_1, \\ (m_2r_2^2+m_3l_2^2)\ddot{q}_2+\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\cos(q_2-q_3)\ddot{q}_3+\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin(q_2-q_3)\dot{q}_3^2- \\ -(m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)l_2+m_2r_2^2\sin q_2)\cos q_2\dot{q}_1^2+(m_2r_2+m_{30}l_2)g\sin q_2=Q_2, \\ \frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\cos(q_2-q_3)\ddot{q}_2+m_{30}r_3^2\ddot{q}_3-\frac{1}{2}m_{30}l_2r_3\sin(q_2-q_3)\dot{q}_2^2- \\ -m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)r_3\cos q_3\dot{q}_1^2+m_{30}gr_3\sin q_3=Q_3. \end{cases}$$

Рис. 3.1: Модель трехзвенного манипулятора

Пусть $q=(q_1,q_2,q_3)$ — вектор обобщенных координат представленной выше системы. Таким образом, уравнения движения можно представить в следующей векторно-матричной форме: $A(q)\ddot{q}+C(q,\dot{q})\dot{q}+K\dot{q}=Q$ где

$$A(q)=\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Элеменыт матрицы инерции $A(q)$:

$$a_{11}=J_{01}+m_2r_2^2\sin^2 q_2+m_{30}(l_2\sin q_2+r_3\sin q_3)^2$$

$$a_{22}=m_2r_2^2+m_3l_2^2$$

$$a_{23} = \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)$$

$$a_{32} = a_{23}$$

$$a_{33} = m_{30} r_3^2$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы $C(q, \dot{q})$:

$$c_{11} = 2(m_2 r_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 \cos q_2)\dot{q}_2$$

$$c_{13} = 2m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_3$$

$$c_{21} = -(m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2) \cos q_2 \dot{q}_1$$

$$c_{31} = -m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1$$

$$c_{32} = -\frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3) \dot{q}_2$$

$A(q)$ — положительно определенная матрица инерции системы.

3.2 Построение управления

Пусть $q = (q_1, q_2, q_3)^T$ — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и $X = q^0(t) : [t_0, +\infty) \to R^3, \|q^0(t)\| \leq q_0, \|\dot{q}^0\| \leq g_1, \|q^0(t)\| \leq q_0, \|\ddot{q}^0\| \leq g_2$ есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q =$

$q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$. Символом $\|\|$ обозначена евклидова норма вектора. Уравнения движения (1) можно представить в следующей векторно-матричной форме: $A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + K\dot{q} = Q$, (2) где $A(q)$ — положительно определенная матрица инерции системы, $C(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i C_{(i)}(q)$, , j,k-ый элемент $c_{(i)jk}(q)$ матрицы $C_{(i)}(q)$ определяется в виде $c_{(i)jk}(q) = \frac{1}{2}(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_j})$; K — матрица коэффициентов моментов сил вязкого трения, действующих в системе. Система (2) имеет следующее свойство: матрица $\dot{A}(q(t)) - 2C(q(t),\dot{q}(t))$ является кососимметричной. Пусть $q^0(t) \in X$ — какое-либо программное движение системы (2), реализуемое программным управлением $Q = Q^{(0)}(t)$, т.е. имеет место тождество $A(q^0(t))\ddot{q}^0(t) + C(q^0(t),\dot{q}^0(t))\dot{q}^0(t) + K\dot{q}^0(t) \equiv Q^{(0)}(t)$. Введем возмущения $x = q - q^0(t)$ и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде: $A^{(1)}(t,x)\ddot{x} + C^{(1)}(t,x,\dot{x})\dot{x} + K\dot{x} = Q^{(1)}(t,x,\dot{x}) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x})$,(3) где $A^{(1)}(t,x) = A(x+q^0(t))$, $C^{(1)}(t,x,\dot{x}) = C(x+q^0(t), \dot{x}+\dot{q}^0(t))$, $Q^{(1)}(t,x,\dot{x}) = Q - Q^{(0)}(t)$, $Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = (A^{(1)}(t,0) - A^{(1)}(t,x))\ddot{q}^0(t) + (C^{(1)}(t,0,0) - C^{(1)}(t,x,\dot{x}))\dot{q}^0(t)$. Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $Q^{(1)}(t,x,\dot{x})$, при котором невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ системы (3) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иначе, управление $Q = Q^{(1)}(t, q - q^{(0)}(t), \dot{q} - \dot{q}^{(0)}) + Q^{(0)}(t)$ обеспечивало бы стабилизацию программного движения системы (2).

2 Синтез управления в задаче стабилизации программного движения манипулятора Рассмотрим решение задачи стабилизации в области

$G = (x, \dot{x}) \in R^6 : \|x\| < \epsilon, \|\dot{x}\| < \epsilon, \epsilon = const > 0$ с помощью непрерывного управления вида $Q^{(1)}(x, \dot{}) = B(\dot{x} + p(x))$, (4) где $B \in R^{3\times 3}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению; $p(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция, такая, что $\|p(x)\| \geq p_0(x) > 0, p_0(0) = 0$. Возьмем для системы (3) вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)^T$ с коэффициентами вида $V^1 = \|p(x)\|, V^2 = \sqrt{(\dot{x} + p(x))^T A^{(1)}(t, x)(\dot{x} + p(x))}$.

Вычисляя производные по времени от квадратов компонент вектор-функции Ляпунова в силу системы (3), получим $\frac{d}{dt}(V^1(x))^2 = 2V^1\dot{V}^1 = 2p^T\dot{p} = 2p^T\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x} = -2p^T\frac{\partial p}{\partial x}p + 2p^T\frac{\partial p}{\partial x}(\dot{x} + p)$,

$$\frac{d}{dt}(V^2(x))^2 = 2V^2\dot{V}^2 = 2(\ddot{x}+\dot{p})^T A^{(1)}(\dot{x}+p)+(\dot{x}+p)^T \dot{A}^{(1)}(\dot{x}+p) = 2(-C^{(1)}(t, x, \dot{x})\dot{x}-$$

.

Отсюда получим следующие оценки: $\dot{V}^1 \leq -\mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)}V^2, \dot{V}^2 \leq \frac{m_2}{\lambda(t,x)}V^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)}$, где положительные постоянные μ_2, μ_2, m_1, m_2 и функция $\lambda(t, x)$ определяются из следующих условий: $p^T\frac{\partial p}{\partial x}p \geq \mu_1\|p\|^2, \|\frac{\partial p}{\partial x}\| \leq m_1, \lambda(t, x)\|\dot{x} + p\| = V^2$,

$$\|Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) \leq (m_2 - \|C^{(1)}(t, x, \dot{x}) + K - A^{(1)}(t, x)\frac{\partial p}{\partial x}\|)\|p\|$$

$$\lambda_{max}(B + B^T - K - K^T + A^{(1)}(t, x)\frac{\partial p}{\partial x} + (\frac{\partial p}{\partial x})^T A^{(1)}(t, x)) \leq -2\mu_2$$

Здесь $\lambda_m ax()$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (3) можно построить следующую систему сравнения: $\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)} u^2, \dot{u}^2 = \frac{m_2}{\lambda(t,x)} u^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)} u^2$. (5) Согласно теореме сравнения об экспоненциальной устойчивости [5] из свойства экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы сравнения (5) следует аналогичное свойство нулевого решения системы (3). Можно показать, что нулевое решение системы сравнения (5) будет экспоненциально устойчиво при следующем условии $4\mu_1\mu_2 > (m_1/k + m_2 k)^2, k = const > 0$. Численное моделирование движения манипулятора при действии управления (4) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории

$m_2 = 15, m_3 = 2,5, m_0 = 2, l_2 = 1, r_2 = 0,5, r_3 = 0,5, J_{01} = 0,1 *^2, q_1^0(t) = 0,2t, q_2^0(t) = 1,5 + 0,5 sint, q_3^0(t) = 0,5 sin(0,5t)$.

На рисунках 2–4 представлены результаты моделирования. Пунктирной линией обозначены составляющие программного движения, а сплошной – реального движения системы.

3.3 Моделирование управляемого движения двузвенного манипулятора на подвижном основании

3.4 Моделирование управления в задаче о стабилизации движения колесного робота с омни-колесами