

Макаров Д.С

КАНДИДАТСКАЯ

Ульяновск

Издательство Ульяновского государственного университета

2016

Оглавление

I	Глава 1	4
1	Предельные уравнения и устойчивость	4
II	Глава 2	11
1	Задача управления двухзвенным манипулятором	11
2	Функционалы Ляпунова и квазиинвариантность	16
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК		18

Глава I

Глава 1

1 Предельные уравнения и устойчивость

Пусть R^p - линейное действительное пространство p — векторов x с нормой $|x|$, R — действительная ось, $h > 0$ — заданное действительное число, C — банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \rightarrow R^p$ с нормой $\|\varphi\| = \max(|\varphi(s)|, -h \leq s \leq 0)$. Для непрерывной функции $x : [\alpha - h, \beta) \rightarrow R^p$ ($\alpha, \beta \in R, \alpha < \beta$) и каждого $t \in [\alpha, \beta)$ функцию $x_t \in C$ определим равенством $x_t(s) = x(t + s)$ ($-h \leq s \leq 0$), под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассмотрим неавтономное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (1.1)$$

где $f : R \times C_H \rightarrow R^p$ — некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему предположению.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.1 Для каждого числа r , $0 < r < H$, существует такое число $m_r > 0$ что выполняется неравенство

$$|f(t, \varphi)| \leq m_r, \forall \varphi \in \bar{C}_r. \quad (1.2)$$

Пусть выполняется П.1.1 выполнено и $\{r_n\}$ — последовательность чисел такая, что $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$, $r_n \rightarrow H$ при $n \rightarrow \infty$. Определим для всех r_i множество $K_i \subset C$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\varphi(s)| \leq r_i, \quad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leq m_{r_i} |s_2 - s_1|.$$

Множество K_i очевидно, будет компактом. Положим $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.

Рассмотрим F - множество всех непрерывных функций f , определенных на $R \times \Gamma$, со значениями в R^p . Через f^τ обозначим сдвиг функции f , $f^\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Для $f \in F$ семейство сдвигов $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R\}$ будет являться подмножеством F .

Дадим определение сходимости в F как равномерной на каждом компакте $K' \subset R \times \Gamma$: последовательность $\{f_n \in F\}$ сходится к $f \in F$, если $\forall K' \subset R \times \Gamma$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $|f_n(t, \varphi) - f(t, \varphi)| < \varepsilon$, при $n > N = N(\varepsilon)$ и $(t, \varphi) \in K'$.

В силу определения области Γ эта сходимость метризуема: для всех n определим для двух функций $f_1, f_2 \in F$ полунорму $\|\cdot\|_n$ и соответствующую псевдометрику ρ_n следующим образом

$$\|f\|_n = \sup \{|f(t, \varphi)|, \forall (t, \varphi) \in K'_n\},$$

$$\rho_n(f_1, f_2) = \frac{\|f_2 - f_1\|_n}{1 + \|f_2 - f_1\|_n},$$

где $K'_n = [0, n] \times K_n$, $n = 1, 2, \dots$ (K_n определено выше).

Определим расстояние между функциями $f_1, f_2 \in F$ как

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f_1, f_2). \quad (1.3)$$

Можно убедиться, что при этом будут выполнены все аксиомы метрического пространства. И пространство F будет полным по отношению к введенной метрике.

Допустим, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующему предположению.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.2 Для любого $K \subset C_H$ (K - компакт) функция $f = f(t, \varphi)$ равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in R \times K$, т.е. $\forall K \subset C_H$ и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для любых $(t, \varphi) \in R \times K$, $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in R \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, выполняются неравенства

$$|f(t_2, \varphi_2) - f(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon. \quad (1.4)$$

ЛЕММА 1.1 При условии выполнения предположений II.1.1 и II.1.2 семейство сдвигов $\{f^\tau : \tau \in R\}$ предкомпактно в F .

Доказательство леммы следует непосредственно из (1.4), построения F и соотношения

$$|f^\tau(t_2, \varphi_2) - f^\tau(t_1, \varphi_1)| = |f(\tau + t_2, \varphi_2) - f(\tau + t_1, \varphi_1)|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 Функция $f^* : R \times \Gamma \rightarrow R^p$ называется предельной к f , если существует последовательность t_n такая, что $f^{(n)}(t, \varphi) = f(t_n + t, \varphi)$ сходится к $f^*(t, \varphi)$ при $t \rightarrow \infty$ в F . Замыкание семейства $\{f^\tau : \tau \in R\}$ в F называется оболочкой $S^+(f)$.
Уравнение

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t) \quad (1.5)$$

называется предельным к (1.1).

При условиях (1.2) и (1.4) уравнение (1.1) является предкомпактным.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.3 Для любого компактного множества $K \subset C_H$ функция $f = f(t, \varphi)$ удовлетворяет условию Липшица т.е., $\forall K \subset C_H$ существует $m = m(K)$, такое, что для любых $t \in R$; $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ будет выполнено неравенство

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq m \|\varphi_2 - \varphi_1\|. \quad (1.6)$$

При выполнении условия (1.6), каждая предельная функция $g(t, \varphi)$ также будет удовлетворять аналогичному условию Липшица относительно компакта $K \subset \Gamma$.

Вследствие этого получим, что при предположении II.1.3 решения уравнения (1.1) при начальном условии $(t, \varphi) \in \times C_H$ и уравнения (1.5) для $(t, \varphi) \in \times \Gamma$ будут единственными.

Связь между решениями уравнений (1.1) и (1.5) определяется следующей теоремой:

ТЕОРЕМА 1.1 Пусть функция $f^* : \times \Gamma \rightarrow R^p$ есть предельная к f в F относительно последовательности $t_n \rightarrow +\infty$, а последовательности $\{\alpha_n \in \Gamma\}$ и $\{\varphi_n \in F\}$ таковы, что $\alpha_n \rightarrow \alpha \in \Gamma$, $\varphi_n \rightarrow \varphi \in \Gamma$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $x = x(t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ есть решения уравнения (1.1), а $y(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$, определенное для $t \in [\alpha - h, \beta[$.

Тогда последовательность функций $y^n(t) = x(t_n + t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ сходится к $y(t, \alpha, \varphi)$ равномерно по $t \in [\alpha - h + \varepsilon, \gamma]$ для малого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 0$ при $\{\alpha_n = \alpha\}$) и каждого γ , $\alpha < \gamma < \beta$.

ТЕОРЕМА 1.2 Пусть решение (1.1) $x = x(t, \alpha, \varphi)$ ограничено, $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq r < H$ для всех $t \geq \alpha - h$. Тогда множество $\omega^+(\alpha, \varphi)$ полуквазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений $\{\dot{x} = f^*(t, x_t)\}$, а именно, для каждой точки $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ существует предельное уравнение $\dot{x} = f^*(t, x_t)$, такое, что точки его решения $y(t, 0, \psi)$ в пространстве C содержатся в $\omega^+(\alpha, \varphi)$, $\{y_t(0, \psi), t \in R\} \subset \omega^+(\alpha, \varphi)$.

Пусть $V : R^+ \times C_H \rightarrow R$ — непрерывный функционал Ляпунова и $x = x(t, \alpha, \varphi)$ — решение уравнения. Функция $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$ представляет собой непрерывную функцию времени $t \geq \alpha$.

Верхней правосторонней производной от V вдоль решения $x(t, \alpha, \varphi)$ называется значение $\dot{V}^+(t, x_t(\alpha, \varphi)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{\Delta t} [V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(\alpha, \varphi)) - V(t, x_t(\alpha, \varphi))]$

Основным используемым свойством при этом определении и условии $\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$ является невозрастание функции $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$ для всех $t \geq \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 Пусть $t_n \rightarrow +\infty$ есть некоторая последовательность. Для каждого $t \in R$ и $c \in R$ определим множество $V_\infty^{-1}(t, c) \subset C_H$ следующим образом: точка $\varphi \in V_\infty^{-1}(t, c)$, если существуют последовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность $\{\varphi_k \in \Gamma, \varphi_k \rightarrow \varphi\}$, такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(t_{n_k} + t, \varphi_k) = c. \quad (1.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 Будем говорить, что отображение $u : (\alpha, \beta) \rightarrow C_H$ или $u : R \rightarrow C_H$ принадлежит множеству $\{V_\infty^{-1}(t, c), c = c_0 = \text{const}\}$, если для любого $\gamma > 0$ (соответственно для любого $T > 0$) существуют последовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность непрерывных отображений $u_k(t)$, такие, что $\{u_k(t)\}$ сходится к $u(t)$ равномерно по $t \in [\alpha + \gamma, \beta - \gamma]$ (соответственно по $t \in [-T, T]$), таким образом, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(t_{n_k} + t, u_k(t)) = c_0. \quad (1.8)$$

Допустим, что производная $\dot{V}(t, \varphi)$ оценивается неравенством

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0, \quad (1.9)$$

где функционал $W = W(t, \varphi)$ ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве $\times K$, т.е. для каждого компактного множества $K \subset C_H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m = m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такие, что имеют место неравенства

$$W(t, \varphi) \leq m, \quad |W(t_2, \varphi_2) - W(t_1, \varphi_1)| \leq \varepsilon \quad (1.10)$$

для всех $(t, \varphi) \in \times K$; $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in \times K : |t_2 - t_1| \leq \delta, \|\varphi_2 - \varphi_1\| \leq \delta$. Как и в случае f , при этих условиях семейство сдвигов $\{W^\tau(t, \varphi) = W(t + \tau, \varphi), \tau \in \mathbb{R}\}$ предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций $F_W = \{W : R \times \Gamma \rightarrow R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 Функция $W^* \subset F_W$ есть предельная к W , если существует $t_n \rightarrow +\infty$, такая, что последовательность $\{W_n(t, \varphi) = W(t_n + t, \varphi)\}$ сходится к W^* в F_W .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 Будем говорить, что отображение $u : (\alpha, \beta) \rightarrow C_H$ ($u : R \rightarrow C_H$) принадлежит множеству $\{\varphi \in C_H : W(t, \varphi) = 0\}$, если тождество $W(t, u(t)) \equiv 0$ выполняется для всех $t \in (\alpha, \beta)$ (соответственно для всех $t \in R$), $u(t) \in \{W(t, \varphi) = 0\}$ для $t \in (\alpha, \beta)$ и (для всех $t \in R$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 Пусть предельный функционал $W^*(t, \varphi)$ задается согласно определению II.1.4 относительно некоторой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$. Множество $V_\infty^{-1}(t, c)$, определяемое этой же последовательностью $t_n \rightarrow +\infty$ согласно определению II.1.5, назовем соответствующим $W^*(t, \varphi)$.

Рассмотрим задачу об определении свойств устойчивости уравнения (1.1) на основе функционала Ляпунова со знакопостоянной производной в предположениях (1.4) и (1.6) предкомпактности (1.1), существования семейства предельных уравнений $\{\dot{x} = g(t, x_t)\}$ и единственности решений.

Пусть $V = R^+ \times C_H \rightarrow R$ есть непрерывный функционал, производная которого удовлетворяет неравенству (1.9). Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7 Функции $f^* \in F$ и $W^* \in F_W$ образуют предельную пару (f^*, W^*) , если они являются предельными к f и W для одной и той же последовательности $t_n \rightarrow +\infty$. Множество $V_\infty^{-1}(t, c)$, определяемое в соответствии этой же последовательности $t_n \rightarrow +\infty$, есть соответствующее (f^*, W^*) .

ТЕОРЕМА 1.3 *Предположим, что:*

1) существует непрерывный функционал $V : \times C_H \rightarrow R$, ограниченный снизу на каждом компакте $K \subset C_H$, $V(t, \varphi) \geq m(K)$ для всех $(t, \varphi) \in \times K$, и такой, что $\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$ для всех $(t, \varphi) \in \times C_H$;

2) решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (1.1) ограничено, $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq H_1 < H$ для всех $t \geq \alpha - h$.

Тогда имеется $c = c_0 \geq m$, при котором для каждой предельной точки $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ существуют предельная пара (f^*, W^*) и соответствующее множество $V_\infty^{-1}(t, c)$, решение $y = y(t)$, $y_0 = \psi$, уравнения $\dot{x} = f^*(t, x_t)$, такие, что $y_t \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ и $y_t \subset \{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \text{const}\} \cap \{W^*(t, \varphi) = 0\}$ для всех $t \in R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8 Множество $M(t) \subset C_H$ не содержит решений уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$, если для каждой точки $\psi \in M(\alpha)$ соответствующее решение $y(t, \alpha, \psi)$ таково, что при некотором $\beta \in R$ имеем $y_\beta(\alpha, \psi) \notin M(\beta)$.

ТЕОРЕМА 1.4 Если в условиях теоремы II.2.1 предположить также, что существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, определяемые которой предельная пара (g_0, U_0) и множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ будут такими, что для каждого $c_0 > c_1$ множество $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \text{const} > c_1\} \cap \{U_0(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений $\dot{x}(t) = g_0(t, x_t)$, то в дополнение к выводу теоремы II.2.1 имеем также соотношение (??).

Перейдем к исследованию асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.1), полагая, что $f(t, 0) \equiv 0$.

Аналогичным образом, с использованием следствия 2.1, по аналогии с теоремами ?? и ?? доказываются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 1.5 *Предположим, что:*

1) выполнено условие 1) теоремы ??;

2) последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ такова, что определяемые которой предельная пара (g_0, U_0) и множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ будут такими, что множество $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 > 0\} \cap \{U_0(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{x} = g_0(t, x_t)$.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ асимптотически устойчиво равномерно по φ .

Значительный интерес представляет следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости.

ТЕОРЕМА 1.6 *Предположим, что:*

1) *существует функционал $V : \times C_{H_1} \rightarrow (0 < H_1 < H)$, такой, что $V(t, 0) = 0$, $a_1(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq a_2(\|\varphi\|)$, $\dot{V}^+(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$ для всех $(t, \varphi) \in \times C_{H_1}$;*

2) *для каждой предельной пары (g, U) множество $\{U(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решения уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, кроме нулевого.*

Тогда решение (1.1) $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

Глава II

Глава 2

1 Задача управления двухзвенным манипулятором

Рассмотрим математическую модель двухзвенного манипулятора, состоящую из неподвижного основания и двух абсолютно жестких звеньев G1, G2. Элементы конструкции соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O1, O2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C1 звена G1 лежит на луче O1O2. Положение центра масс C2 звена G2 не совпадает с положением шарнира O2.

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (1.1)$$

где $f : R^+ \times C_H \rightarrow R^p$ - некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему предположению.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.1 Для каждого числа r , $0 < r < H$, существует такое число $\mu_r > 0$ что выполняется неравенство

$$|f(t, \psi)| \leq m_r, \forall \phi \in \bar{C}_r \mu_r(|t_2 - t_1|). \quad (1.2)$$

Пусть выполняется II.1.1 выполнено и $\{r_n\}$ — последовательность чисел такая, что $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$, $r_n \rightarrow H$ при $n \rightarrow \infty$. Определим для всех r_i множество $K_i \subset C$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\varphi(s)| \leq r_i, \quad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leq \mu_{r_i}(|s_2 - s_1|).$$

Множество K_i очевидно, будет компактом. Положим $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$.

Рассмотрим F - множество всех непрерывных функций f , определенных на $R^+ \times \Gamma$, со значениями в R^p . Через f^τ обозначим сдвиг

функции f , $f^\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Для $f \in F$ семейство сдвигов $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R^+\}$ будет являться подмножеством F .

Дадим определение сходимости в F как равномерной на каждом компакте $K' \subset R^+ \times \Gamma$: последовательность $\{f_n \in F\}$ сходится к $f \in F$, если $\forall K' \subset R^+ \times \Gamma$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $|f_n(t, \varphi) - f(t, \varphi)| < \varepsilon$, при $n > N = N(\varepsilon)$ и $(t, \varphi) \in K'$.

Для того, чтобы показать, что в силу определения области Γ эта сходимость метризуема, для всех n определим для двух функций $f_1, f_2 \in F$ полунорму $\|\cdot\|_n$ и соответствующую псевдометрику ρ_n следующим образом

$$\|f\|_n = \sup \{|f(t, \varphi)|, \forall (t, \varphi) \in K'_n\},$$

$$\rho_n(f_1, f_2) = \frac{\|f_2 - f_1\|_n}{1 + \|f_2 - f_1\|_n},$$

где $K'_n = [0, n] \times K_n$, $n = 1, 2, \dots$ (K_n определено выше).

Определим расстояние между функциями $f_1, f_2 \in F$ как

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f_1, f_2). \quad (1.3)$$

Можно убедиться, что при этом будут выполнены все аксиомы метрического пространства. И пространство F будет полным по отношению к введенной метрике.

Допустим, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующему предположению.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.2 Для любого $K \subset C_H$ (K - компакт) функция $f = f(t, \varphi)$ ограничена и равномерно непрерывна по $(t, \varphi) \in R^+ \times K$, т.е. $\forall K \subset C_H \exists M = M(K)$, и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для любых $(t, \varphi) \in R^+ \times K$, $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in R^+ \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, выполняются неравенства

$$|f(t, \varphi)| \leq M, \quad |f(t_2, \varphi_2) - f(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon. \quad (1.4)$$

ЛЕММА 1.1 При условии выполнения предположений II.1.1 и II.1.2 семейство сдвигов $\{f^\tau : \tau \in R^+\}$ предкомпактно в F .

Доказательство леммы следует непосредственно из (1.4), построения F и соотношения

$$|f^\tau(t_2, \varphi_2) - f^\tau(t_1, \varphi_1)| = |f(\tau + t_2, \varphi_2) - f(\tau + t_1, \varphi_1)|.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1 Функция $g : R^+ \times \Gamma \rightarrow R^p$ называется предельной к f , если существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, такая, что $f^{(n)}(t, \varphi) = f(t_n + t, \varphi)$ сходится к $g(t, \varphi)$ в F . Замыкание семейства $\{f^\tau : \tau \in R^+\}$ в F называется оболочкой $S^+(f)$. Уравнение

$$\dot{x}(t) = g(t, x_t) \quad (1.5)$$

называется предельным к (1.1).

При условиях (1.2) и (1.4) уравнение (1.1) является предкомпактным.

ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.3 Для любого компактного множества $K \subset C_H$ функция $f = f(t, \varphi)$ удовлетворяет условию Липшица т.е., $\forall K \subset C_H$ существует $m = m(K)$, такое, что для любых $t \in R^+$; $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ будет выполнено неравенство

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq m \|\varphi_2 - \varphi_1\|. \quad (1.6)$$

При выполнении условия (1.6), каждая предельная функция $g(t, \varphi)$ также будет удовлетворять аналогичному условию Липшица относительно компакта $K \subset \Gamma$.

Вследствие этого получим, что при предположении II.1.3 решения уравнения (1.1) при начальном условии $(t, \varphi) \in R^+ \times C_H$ и уравнения (1.5) для $(t, \varphi) \in R^+ \times \Gamma$ будут единственными.

Связь между решениями уравнений (1.1) и (1.5) определяется следующей теоремой, которую можно вывести из теоремы ?? и определения II.1.1.

ТЕОРЕМА 1.1 Пусть функция $g : R^+ \times \Gamma \rightarrow R^p$ есть предельная к f в F относительно последовательности $t_n \rightarrow +\infty$, а последовательности $\{\alpha_n \in R^+\}$ и $\{\varphi_n \in F\}$ таковы, что $\alpha_n \rightarrow \alpha \in R^+$, $\varphi_n \rightarrow \varphi \in \Gamma$ при $n \rightarrow \infty$. Пусть $x = x(t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ есть решения уравнения (1.1), а $y(t, \alpha, \varphi)$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, определенное для $t \in [\alpha - h, \beta]$.

Тогда последовательность функций $y^n(t) = x(t_n + t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ сходится к $y(t, \alpha, \varphi)$ равномерно по $t \in [\alpha - h + \varepsilon, \gamma]$ для малого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 0$ при $\{\alpha_n = \alpha\}$) и каждого γ , $\alpha < \gamma < \beta$.

ТЕОРЕМА 1.2 Пусть решение (1.1) $x = x(t, \alpha, \varphi)$ ограничено, $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq r < H$ для всех $t \geq \alpha - h$. Тогда множество $\omega^+(\alpha, \varphi)$

полуквазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений $\{\dot{x} = g(t, x_t)\}$, а именно, для каждой точки $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ существует предельное уравнение $\dot{x} = g(t, x_t)$, такое, что точки его решения $y(t, 0, \psi)$ в пространстве C содержатся в $\omega^+(\alpha, \varphi)$, $\{y_t(0, \psi), t \in R\} \subset \omega^+(\alpha, \varphi)$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1 Так как сдвиг $f^\tau(t, \varphi)$ при большом $\tau \geq T > 0$ определен для значений $(t, \varphi) \in [-T, +\infty[\times C_H$, то по построению уравнения (1.5) его областью определения можно принять область $R \times \Gamma$. Решение $y_t(t, 0, \psi)$ в теореме II.1.2 также по построению продолжимо для всех $t \in R$, при этом $\{y_t(0, \psi), t \in R\} \subset \omega^+(\alpha, \varphi)$. Тем самым, можно утверждать о квазиинвариантности положительного предельного множества $\omega^+(\alpha, \varphi)$ по отношению к семейству предельных уравнений $\{\dot{x} = g(t, x_t)\}$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.2 Предельное уравнение определяется в подобласти $R \times \Gamma \subset R \times G$. Однако так как для семейства решений уравнения (1.1) $\{x = x(t, 0, \varphi), \varphi \in C_H\}$ множество значений $\{x_t : t \geq h\} \subset \Gamma$, динамические свойства решений (1.1), в том числе их предельные свойства, не зависят от сужения отображения D^+ на Γ .

Допустим, что правая часть уравнения (1.1) имеет значение $f(t, 0) \equiv 0$, и, следовательно, это уравнение имеет нулевое решение $x = 0$.

Ниже, если не оговаривается особо, предполагается непрерывность $V(t, \varphi)$ и определение производной в общей форме из главы I. Основным используемым свойством при этом определении и условии $\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$ является, как указывалось в ??, невозрастание функции $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$ для всех $t \geq \alpha$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2 Пусть $t_n \rightarrow +\infty$ есть некоторая последовательность. Для каждого $t \in R$ и $c \in R$ определим множество $V_\infty^{-1}(t, c) \subset C_H$ следующим образом: точка $\varphi \in V_\infty^{-1}(t, c)$, если существуют последовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность $\{\varphi_k \in \Gamma, \varphi_k \rightarrow \varphi\}$, такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(t_{n_k} + t, \varphi_k) = c. \quad (1.7)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3 Будем говорить, что отображение $u : (\alpha, \beta) \rightarrow C_H$ или $u : R \rightarrow C_H$ принадлежит множеству

$\{V_\infty^{-1}(t, c), c = c_0 = \text{const}\}$, если для любого $\gamma > 0$ (соответственно для любого $T > 0$) существуют последовательность $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ и последовательность непрерывных отображений $u_k(t)$, такие, что $\{u_k(t)\}$ сходится к $u(t)$ равномерно по $t \in [\alpha + \gamma, \beta - \gamma]$ (соответственно по $t \in [-T, T]$), таким образом, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(t_{n_k} + t, u_k(t)) = c_0. \quad (1.8)$$

Допустим, что производная $\dot{V}(t, \varphi)$ оценивается неравенством

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0, \quad (1.9)$$

где функционал $W = W(t, \varphi)$ ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$, т.е. для каждого компактного множества $K \subset C_H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m = m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такие, что имеют место неравенства

$$W(t, \varphi) \leq m, \quad |W(t_2, \varphi_2) - W(t_1, \varphi_1)| \leq \varepsilon \quad (1.10)$$

для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times K$; $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in R^+ \times K : |t_2 - t_1| \leq \delta, \|\varphi_2 - \varphi_1\| \leq \delta$. Как и в случае f , при этих условиях семейство сдвигов $\{W^\tau(t, \varphi) = W(t + \tau, \varphi), \tau \in R^+\}$ предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций $F_U = \{U : R \times \Gamma \rightarrow R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4 Функция $U \subset F_U$ есть предельная к W , если существует $t_n \rightarrow +\infty$, такая, что последовательность $\{W_n(t, \varphi) = W(t_n + t, \varphi)\}$ сходится к U в F_U .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5 Будем говорить, что отображение $u : (\alpha, \beta) \rightarrow C_H$ ($u : R \rightarrow C_H$) принадлежит множеству $\{\varphi \in C_H : U(t, \varphi) = 0\}$, если тождество $U(t, u(t)) \equiv 0$ выполняется для всех $t \in (\alpha, \beta)$ (соответственно для всех $t \in R$), $u(t) \in \{U(t, \varphi) = 0\}$ для $t \in (\alpha, \beta)$ и (для всех $t \in R$).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6 Пусть предельный функционал $U(t, \varphi)$ задается согласно определению II.1.4 относительно некоторой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$. Множество $V_\infty^{-1}(t, c)$, определяемое этой же последовательностью $t_n \rightarrow +\infty$ согласно определению II.1.5, назовем соответствующим $U(t, \varphi)$.

2 Функционалы Ляпунова и квазиинвариантность

Рассмотрим задачу об определении свойств устойчивости уравнения (1.1) на основе функционала Ляпунова со знакопостоянной производной в предположениях (1.4) и (1.6) предкомпактности (1.1), существования семейства предельных уравнений $\{\dot{x} = g(t, x_t)\}$ и единственности решений.

Пусть $V = R^+ \times C_H \rightarrow R$ есть непрерывный функционал, производная которого удовлетворяет неравенству (1.9). Введем следующее

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1 *Функции $g \in F$ и $U \in F_U$ образуют предельную пару (g, U) , если они являются предельными к f и W для одной и той же последовательности $t_n \rightarrow +\infty$. Множество $V_\infty^{-1}(t, c)$, определяемое в соответствии этой же последовательности $t_n \rightarrow +\infty$, есть соответствующее (g, U) .*

ТЕОРЕМА 2.1 *Предположим, что:*

1) *существует непрерывный функционал $V : R^+ \times C_H \rightarrow R$, ограниченный снизу на каждом компакте $K \subset C_H$, $V(t, \varphi) \geq m(K)$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times K$, и такой, что $\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times C_H$;*

2) *решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ уравнения (1.1) ограничено, $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq H_1 < H$ для всех $t \geq \alpha - h$.*

Тогда имеется $c = c_0 \geq m$, при котором для каждой предельной точки $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ существуют предельная пара (g, U) и соответствующее множество $V_\infty^{-1}(t, c)$, решение $y = y(t)$, $y_0 = \psi$, уравнения $\dot{x} = g(t, x_t)$, такие, что $y_t \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ и $y_t \subset \{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \text{const}\} \cap \{U(t, \varphi) = 0\}$ для всех $t \in R$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.2 *Множество $M(t) \subset C_H$ не содержит решений уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, если для каждой точки $\psi \in M(\alpha)$ соответствующее решение $y(t, \alpha, \psi)$ таково, что при некотором $\beta \in R$ имеем $y_\beta(\alpha, \psi) \notin M(\beta)$.*

Аналогично следствию ?? можно вывести следующий результат.

СЛЕДСТВИЕ 2.1 *Если в условиях теоремы II.2.1 предположить также, что существует последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, определяемые которой предельная пара (g_0, U_0) и множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ будут такими, что для каждого $c_0 > c_1$ множество*

$\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \text{const} > c_1\} \cap \{U_0(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений $\dot{x}(t) = g_0(t, x_t)$, то в дополнение к выводу теоремы II.2.1 имеем также соотношение (??).

Перейдем к исследованию асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.1), полагая, что $f(t, 0) \equiv 0$.

Аналогичным образом, с использованием следствия 2.1, по аналогии с теоремами ?? и ?? доказываются следующие две теоремы.

ТЕОРЕМА 2.2 *Предположим, что:*

- 1) выполнено условие 1) теоремы ??;
- 2) последовательность $t_n \rightarrow +\infty$ такова, что определяемые которой предельная пара (g_0, U_0) и множество $V_\infty^{-1}(t, c)$ будут такими, что множество $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 > 0\} \cap \{U_0(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решений уравнения $\dot{x} = g_0(t, x_t)$.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ асимптотически устойчиво равномерно по φ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1 Аналогично замечанию ?? для вывода асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения $x = 0$ по теоремам II.2.2 и ?? достаточно, чтобы функция f удовлетворяла предположениям II.1.1 – II.1.3 относительно некоторой последовательности интервалов $I_n = [t_n, t_n + T]$, $t_n \rightarrow +\infty$, $T > h$. Вне этих интервалов функция f может быть произвольной.

Значительный интерес представляет следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости.

ТЕОРЕМА 2.3 *Предположим, что:*

- 1) существует функционал $V : R^+ \times C_{H_1} \rightarrow R^+$ ($0 < H_1 < H$), такой, что $V(t, 0) = 0$, $a_1(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq a_2(\|\varphi\|)$, $\dot{V}^+(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$ для всех $(t, \varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$;
- 2) для каждой предельной пары (g, U) множество $\{U(t, \varphi) = 0\}$ не содержит решения уравнения $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, кроме нулевого.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ равномерно асимптотически устойчиво.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 277 с.
- [2] Алексеенко Н.В. Устойчивость решений нелинейных почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Известия Вузов. Сер. Математика. 2000. №2. С.3–6.
- [3] Ананьевский И.М., Колмановский В.Б. О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1989. №9. С.34–42.
- [4] Анашкин О.В. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости для одного класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №7. С.867–875.
- [5] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // ПММ. 1979. Т.43. Вып.5. С.796–805.
- [6] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // ДАН УзССР. 1980. №7. С.20–22.
- [7] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225–232.
- [8] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // ПММ. 1984. Т.48. Вып.5. С.707–713.
- [9] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений // ПММ. 1987. Т.51. Вып.2. С.253–260.

- [10] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // ПММ. 1991. Т.55. Вып.4. С.539–547.
- [11] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Изд-во "Наука" 1991. С.36–40.
- [12] Андреев А.С. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во фМГУ, 1994. 80 с.
- [13] Андреев А.С. Об устойчивости неавтономного функционально дифференциального уравнения // Доклады РАН. 1997. Т.356. №7. С.151–153.
- [14] Андреев А.С. Об управляемости нестационарной нелинейной системы // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2003. Т.10. Вып.1. С.88.
- [15] Андреев А.С. Некоторые задачи об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным и неограниченным запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 2003. Вып.1(13). С.3–11.
- [16] Андреев А.С. К методу К.П. Персидского в задачах о неустойчивости // Математический журнал. Алматы. 2004. Т.4. №2(12). С.76–82.
- [17] Андреев А.С. О стабилизации движения управляемой системы с запаздывающей обратной связью // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2004. Т.11. Вып. 3. С. 612–613.
- [18] Андреев А.С., Бойкова Т.А. Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости // Механика твердого тела. 2002. Вып.32. С.109–116.
- [19] Андреев А.С., Лысяков В.Н. К методу Ляпунова в задаче об устойчивости функционально дифференциального уравнения // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 1996. Вып.1(2). С.5–10.

- [20] Андреев А.С., Павликов С.В. Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально дифференциального уравнения // ПММ. 1999. Т.63. Вып.1. С. 3–12.
- [21] Андреев А.С., Павликов С.В. Исследование устойчивости функционально-дифференциальных уравнений на основе знакопостоянных функционалов Ляпунова // Труды Средневолжского математического общества. 1999. Т.2(1) С.74–75.
- [22] Андреев А.С., Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 2000. Т.68. №3. С.323–331.
- [23] Андреев А.С., Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости относительно части переменных // Труды Четвертой Международной научно-практической конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов". (10-12 декабря 2001г., г.Ульяновск). Секция Математики. Ульяновск: УлГУ, 2001. С.15–16.
- [24] Андреев А.С., Павликов С.В. К задаче об устойчивости по части переменных функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 2003. Вып.1(13). С.12–21.
- [25] Андреев А.С., Павликов С.В. Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Механика твердого тела. 2004. Вып.34. С.112–120.
- [26] Андреев А.С., Седова Н.О. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2001. 60 с.
- [27] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №4. С.435–440.
- [28] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №7. С.876–885.

- [29] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости функционально-дифференциального уравнения с периодической правой частью // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 1999. Вып.1(6). С.3–17.
- [30] Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 333 с.
- [31] Астанов И.С., Белоцерковский С.М., Каганов Б.О., Кочетков Ю.А. О системах интегро-дифференциальных уравнений, описывающих неустановившееся движение тел в сплошной среде // Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18. №9. С.1628–1637.
- [32] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
- [33] Билашевич И.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Стабилизация динамических систем при наличии запаздываний в канале обратной связи // Автоматика и телемеханика. 1996. №6. С.31–39.
- [34] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
- [35] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.
- [36] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 302 с.
- [37] Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.
- [38] Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
- [39] Гайшун И.В. Асимптотическая устойчивость одной системы с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1972. Т.8. №5. С. 906–908.

- [40] Гайшун И.В., Княжище Л.Б. Теоремы устойчивости уравнений с запаздыванием, использующие немонотонные функционалы Ляпунова // Докл. Ан Беларуси. 1994. Т.38. №3. С.5–8.
- [41] Гайшун И.В., Княжище Л.Б. Немонотонные функционалы Ляпунова. Условия устойчивости уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1994. Т.30. №8. С.1291–1298.
- [42] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
- [43] Горяченко В.Д. Методы теории устойчивости в динамике ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1971. 264 с.
- [44] Горяченко В.Д. Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1977. 296 с.
- [45] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
- [46] Дроздов А.Д., Колмановский В.Б., Триджанте Д. Об устойчивости системы хищник-жертва // Автоматика и телемеханика. 1992. №11. С.57–64.
- [47] Жиков В.В., Левитан Б.М. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 205 с.
- [48] Журавлев В.Ф. Теоретическая механика. М.: Наука, Физматлит, 1997. 320 с.
- [49] Калистратова Т.А. Об устойчивости по части переменных систем с запаздыванием // Авт. и телемех. 1986. №5. С.32–37.
- [50] Ким А.В. К методу функций Ляпунова для систем с последствием // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск, 1987. С.79–83.
- [51] Ким А.В. О методе функционалов Ляпунова для систем с последствием // Авт. и телемех. 1990. №2. С.24–31.
- [52] Ким А.В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последствием. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1992. 142 с.

- [53] Ким А.В. i -Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. 234 с.
- [54] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость уравнений с запаздыванием // Докл. АН Беларуси. 1997. Т.41. №1. С.26–29.
- [55] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. I // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №2. С.189–196.
- [56] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. II // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №8. С.1056–1065.
- [57] Княжище Л.Б. Функционалы Ляпунова и условия равномерной асимптотической устойчивости уравнений с запаздыванием // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т.44. №5. С.40–43.
- [58] Княжище Л.Б., Щавель Н.А. Немонотонные функционалы Ляпунова и оценки решений дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1997. Т.33. №2. С.205–211.
- [59] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 474 с.
- [60] Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с произвольным последствием // Докл. РАН. 1993. Т.331. №4. С.421–424.
- [61] Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с последствием и переменными коэффициентами // ПММ. 1995. Т.59. Вып.1. С.71–81.
- [62] Колмановский В.Б. Об устойчивости систем с последствием нейтрального типа // ПММ. 1996. Т.60. Вып.2. С.210–222.
- [63] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. М.: Наука, 1981. 448 с.
- [64] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Системы с последствием нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 1984. №1. С.5–35.

- [65] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543с.
- [66] Кордуняну К., Лакшмикантам В. Уравнения с неограниченным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1985. №7. С.5–44.
- [67] Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М.Ляпунова для уравнений с запаздыванием по времени // ПММ. 1956. Т.20. №3. С.315–327.
- [68] Красовский Н.Н. Об асимптотической устойчивости систем с последствием // ПММ. 1956. Т.20. №4. С.513–518.
- [69] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
- [70] Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. №6. С.3–15.
- [71] Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости. Доп.4. М.: Наука, 1966. С.475–514.
- [72] Лакшмикантам В., Лиля С., Мартынюк А.А. Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Наукова думка, 1991. 248 с.
- [73] Лакшмикантам В., Мартынюк А.А. Развитие прямого метода Ляпунова для систем с последствием (обзор) // Прикладная механика. 1993. Т.29(39). №2. С.3–15.
- [74] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. 271 с.
- [75] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
- [76] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2-е. М.: Наука, 1966. 530 с.
- [77] Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1991. 414 с.
- [78] Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А. Устойчивость движения метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990. 256 с.

- [79] Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2000. 380 с.
- [80] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
- [81] Мышкис А.Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи матем. наук. 1977. Т.32. Вып.2(194). С.173–202.
- [82] Мышкис А.Д. Предисловие редактора перевода. В кн.: Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. С.5–6.
- [83] Мышкис А.Д., Эльсгольц Л.Э. Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи матем. наук. 1967. Т.22. Вып.2. С.21–57.
- [84] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л., Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры. 1949. 550 с.
- [85] Новоселов В.С. Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. 239 с.
- [86] Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1965. 354 с.
- [87] Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т.1. №5. С.605–618.
- [88] Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 1996. Вып. 1. Ч.II. С. 46–56.
- [89] Павликов С.В. Об устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения второго порядка// Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1996. Вып. 2. С. 32–33

- [90] Павликов С.В. О стабилизации управляемых механических систем с обратной связью с запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1997. Вып. 2(4). С. 66–70.
- [91] Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 2002. Вып.2(12). С.30–39.
- [92] Павликов С.В. Предельные уравнения и функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости по части переменных // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 2003. Вып.1(13). С.63–74.
- [93] Павликов С.В. Об управляемости и стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2003. Т.10. Вып.1. С.201.
- [94] Павликов С.В. О стабилизации движения управляемой системы с запаздыванием // Механика твердого тела. 2005. Вып.34.
- [95] Перегудова О.А. К методу сравнения в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1999. Вып.2(7). С.32–36.
- [96] Перегудова О.А. Методы сравнения и преобразования в задачах об устойчивости систем с запаздыванием. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 83 с.
- [97] Прасолов А.В. О применении функций Ляпунова для исследования неустойчивости решений систем с последействием // Вестник ЛГУ. 1981. Сер.1. 19. С.116–118.
- [98] Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т.20. Вып. 4. С. 500–512.

- [99] Разумихин Б.С. Устойчивость по первому приближению систем с запаздыванием // ПММ. 1958. Т.22. Вып. 2. С.155–166.
- [100] Разумихин Б.С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1960. Т.21. №6. С.740–748.
- [101] Разумихин Б.С. Метод исследования устойчивости систем с последствием // Доклады АН СССР. 1966. Т.167. №6. С.1234–1236.
- [102] Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988. 106 с.
- [103] Резван В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М.: Наука, 1983. 300 с.
- [104] Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ. Сер. Мат., механ., физ., астрон., хим. 1957. №4. С.9-16.
- [105] Румянцев В.В. Метод функции Ляпунова в теории устойчивости движения // Механика в СССР за 50 лет. Т.1. М.: Наука, 1968. С.7–66.
- [106] Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
- [107] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
- [108] Седова Н.О. Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 2005. Т.8. №3. С.468–472.
- [109] Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости движений в некоторых классах с последствием // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 166–174.
- [110] Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости и оценке области притяжения в некоторых системах с последствием // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 744–751.

- [111] Тереки Й. Экспоненциальная и степенная асимптотическая устойчивость функционально-дифференциальных уравнений. В кн. Развитие и применение метода функций Ляпунова. Новосибирск: Наука, 1992. С.101–107.
- [112] Троценко Г.А. Об устойчивости решений почти периодической системы // Механика твердого тела. 2002. Вып. 32. С.129–133.
- [113] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
- [114] Хусаинов Д.Я. Об экспоненциальной устойчивости линейных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №2. С.357–359.
- [115] Хусаинов Д.Я. Экспоненциальная оценка решений линейных систем с запаздыванием при произвольном отклонении аргумента // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №9. С.1631–1633.
- [116] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 276 с.
- [117] Шестаков А.А. Прямой метод Ляпунова как метод локализации функциями Ляпунова предельных множеств неавтономных динамических процессов (на базе предельных уравнений и динамических систем) // Функции Ляпунова и их применение. Ан СССР. Сибирское отд., Иркутский вычислит. центр. Новосибирск: Наука, 1987. С.14–48.
- [118] Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1990. 316 с.
- [119] Шиманов С.Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени // ПММ. 1960. Т.24. Вып. 1. С.55–63.
- [120] Шиманов С.Н. Устойчивость систем с запаздыванием // Труды II Всес. съезда по теорет. и прикл. механике. Москва, 1964, вып. 1. М.: Наука, 1965. С.170–180.
- [121] Щеглов В.А. Устойчивость линейного дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1996. Т.32. №12. С.1665–1669.

- [122] Щеглов В.А. Устойчивость решений одного уравнения второго порядка с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №12. С.1710–1713.
- [123] Эльсгольц Л.Э. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений // Успехи мат. наук. 1954. Т.9. №4. С.95-112.
- [124] Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 127 с.
- [125] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
- [126] Янушевский Р.Т. Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 416 с.
- [127] Andreev A. Sulla stabilitá asintotica ed instabilitá // Rend. Sem. Univ. Padova. 1986. V.75. P.235–245.
- [128] Andreev A. On the stability of nonautonomous functional differential equations // Nonlinear Analysis. TMA. 1997. V.30. Part 5. P. 2847–2854.
- [129] Andreev A., Khusanov D. On asymptotic stability and nonstability functional-differential equations with periodic right side // Nonlinear oscillations, 2001. V.4. №3. P.290–298.
- [130] Andreev A.S., Sedova N.O. On the stability of nonautonomous equations with delay via limiting equations // Functional Differential Equations. 1998. V.5. №1-2. P. 21–37.
- [131] Andreev A., Zappala'G. On stability for perturbed differential equations // Le Natematiche. 1996. V.51. F. I. P. 27–41.
- [132] Artstein Z. Topological dynamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V.23. P.216–223.
- [133] Artstein Z. The limiting equations of nonautonomous differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V. 25. P.184–202.
- [134] Artstein A. Uniform asymptotic stability via the limiting equations // J. Differ. Equat. 1978. V.27. P.172–189.

- [135] Becker L.C., Burton T.A., Zhang S. Functional differential equations and Jensen's Inequality // J. of Math. Anal. and Appl. 1989. V.138. N 1. P.135–156.
- [136] Bernfeld S.R., Corduneanu C., Ignatyev A.O. On the stability of invariant sets of functional differential equations // Nonlinear Analysis. 2003. V.55. P.641–656.
- [137] Burton T.A. Uniform asymptotic stability in functional differential equations Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V.68. P.195–199.
- [138] Burton T.A. Stability theory for delay equations // Funkcial. Ekvac. 1979. V. 22. №1. P.67–76.
- [139] Burton T.A., Casal A., Somolinos A. Upper and lower bounds for Liapunov functionals // Funkcial. Ekvac. 1989. V. 32. №1. P.23–55.
- [140] Burton T.A., Hatvani L. Stability theorems for nonautonomous functional differential equations by Liapunov functionals // Tohoku Math. J. 1989. V.41. P.65–104.
- [141] Burton T.A., Hatvani L. On nonuniform asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations // Differential and Integral Equations. 1990. V.3. P.285–293.
- [142] Burton T.A., Makay G. Marachkov stability results for functional differential equations // EJTDE, 1998. №1. P.1–17.
- [143] Conley C.C., Miller R.K. Asymptotic stability without iniform stability. Almost periodic coefficients // J. Differ. Equat. 1965. V.1. №1. P.333–336.
- [144] Corduneanu C. On partial stability for delay systems // Ann. Polon. Math. 1975. V.29. P.357–362.
- [145] Corduneanu C., Ignatyev O.A. Stability of invariant sets of functional differential equations with delay // Nonlinear Func. Anal. and Appl. 2005. №1. P.11–24.
- [146] Gyori I., Hartung F. Preservation of stability in delay equations under delay perturbations // Journal of Math. Anal. and Appl. 1998. V. 220. P.290–312.

- [147] Haddock J. The "evolution" of invariance principles a la Liapunov's direct method // *Advances in nonlinear dynamics. Stability and Control: Theory, Methods and Applications*. V.5. 1997. P. 261–272.
- [148] Haddock J., Ko Y. Lyapunov-Razumikhin functions and an instability theorem for autonomous functional-differential equations with finite delay // *Rocky Mtn. J. Math.* 1995. V.25. P. 261–267.
- [149] Haddock J., Krisztin T., Terjeki J. Invariance principles for autonomous functional differential equations // *J. Integral Equations*. 1985. V.10. P.123–136.
- [150] Haddock J., Terjéki J. Liapunov-Razumikhin functions and an invariance principle for functional differential equations // *J. Differential Equations*. 1983. V.48. №1. P.95–122.
- [151] Haddock J., Terjéki J. On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay // *J. Differential Equations*. 1990. V.86. P.1–32.
- [152] Haddock J., Zhao J. Instability for autonomous and periodic functional differential equations with finite delay // *Funkcialay Ekvacioj*. 1996. V.39. P.553–570.
- [153] Hale J. A stability theorem for functional-differential equations // *Proc. N.A.S.* 1963. V.50. P.942–946.
- [154] Hale J. Dynamical systems and stability // *J. Math. Anal. Appl.* 1969. V.26. P.39–59.
- [155] Hale J. Functional differential equations with infinite delays // *J. of Math.An. and Applic.*, 1974. V. 48. P.276–293.
- [156] Hale J.K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // *Funk. Ekv.*, 1978. V.21. P.11–41.
- [157] Hatvani L. On the asymptotic stability of the solutions of functional differential equations // *Qualitative theory of differential equations. Colloq. Math. Soc. J.Bolyai. Vol.53. North Holland, Amsterdam*. 1990. P.227–238.
- [158] Hatvani L. On the asymptotic stability in differential systems by Liapunov direct method // *Proceedings of the First World Congress*

- of Nonlinear Analysts. Tampa, Florida, August 19-26, 1992. W.de 6., Berlin -N.Y. 1996. P.1341–1348.
- [159] Hatvani L. On the asymptotic stability by Lyapunov functionals with semidefinite derivatives // Nonlinear Analysis, TMA. 1997, V.30. №8. P. 4713–4721.
- [160] Hatvani L. Annulus arguments in the stability theory for functional differential equations // Differ. and Integral Equations. 1997. V. 10. №5. P. 975–1002.
- [161] Hatvani L. On Lyapunov's direct method for nonautonomous fde's // Functional Differential Equations. 1998. V. 5. №3–4. P.315–323.
- [162] Hatvani L. On the asymptotic stability for functional differential equations by Lyapunov functionals // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 2001. 47.№7. P.4333–4343.
- [163] Hornor W.E. Invariance principles and asymptotic constancy of solutions of precompact functional differential equations // Tohoku Math. J. 1990. V.42. P.217–229.
- [164] Ignatyev A.O. On the asymptotic stability in functional differential equations // Proceedings of the American Math. Society. 1999. V.127. №6. P. 1753–1760.
- [165] Ignatyev A.O. On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2002. V. 268. P.615–628.
- [166] Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2001. V.46. P. 1048–1060.
- [167] Kato J. Uniform asymptotic stability and total stability // Tohoku Math. Journ. 1970, V.22. P.254–269.
- [168] Kato J. On Liapunov–Razumikhin type theorems for functional differential equations // Funkc. Ekvac., 1973. V.16. №3. P.225–239.
- [169] Kato J. Liapunov's second methods in functional differential equations // Tohoku Math. J. 1980. V. 32. №4. P. 487–492.

- [170] Makay G. An example on the asymptotic stability for functional differential equations // Nonl. Anal., TMA// 1994. V.23. P.365–368.
- [171] Mao X. Comments on "An improved Razumikhin-type theorem and its Applications"// IEEE Transactions on automatic control. 1997. V. 42. P. 429–430.
- [172] Mikolajska Z. Une remarque sur des notes der Razumichin et Krasovskij sur la stabilite asimptotique // Ann. Polon. Math., **22** (1969). P.69–72.
- [173] Murakami S. Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations // J. Differ. Equat. 1985. V.59. P.314–335.
- [174] Saperstone S.N. Semidynamical system in the infinite dimentional space. N.Y.: Springer – Verlag. 1981. 474 p.
- [175] Sedova N. On employment of semi-definite function in stability of delayed equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. V.281, №1. P.307–319.
- [176] Sedova N. Razumikhin-type theorems in the problem on instability of nonautonomous equations with finite delay // Funckcialaj Ekvacioj. 2004. V.47. P.187–204.
- [177] Seifert G. Liapunov-Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of Volterra type // J. Differential equations. 1974. 16. P.289–297.
- [178] Sell G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // Trans. Amer. Math. Soc., 1967. V.22. P.241–283.
- [179] Taniguchi T. Asymptotic behavior theorems for non-autonomous functional differential equations via Lyapunov-Razumikhin method // Journal of Math. Analysis and Appl. 1995. V. 189. P.715–730.
- [180] Taniguchi T. Asymptotic behavior theorems of solutions of functional differential equations with finite delay // Journal of Math. Analysis and Appl. 1996. V. 199. P.776–786.
- [181] Terjéki J. On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations // Annalea Polonici Mathematici. 1979. V. 36. P. 299–314.

-
- [182] Wang Z. Comparison method and stability problem for functional differential equations // Tohoku Math. J. 1983. V.35. P. 349–356.
- [183] Wang T. Weakening the condition $W_1(|\varphi(\theta)|) \leq V(t, \varphi) \leq W_2(\|\varphi\|)$ for uniform asymptotic stability // Nonl. Anal., TMA. 1994. V.23. №2. P.251–264.
- [184] Yorke J.A. Some extensions of Liapunov's second method. – SIAM, Diff. integ. equat., Pa, 1969, p.206–207.
- [185] Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method. Tokio: The Math. Soc. of Japan, 1966, 216 p.
- [186] Yoshizawa T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost-Periodic Solutions. Applied Math. Sciences, vol. 14, 1975. Springer-Verlag. N.Y. 233 p.
- [187] Zhang Bo. Asymptotic stability in functional differential equations by Lyapunov functionals // Trans. Amer. Math. Soc., 1995. V.347. №4. P.1375–1382.

Научное издание

Андреев Александр Сергеевич

**УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ
УРАВНЕНИЙ**

Зав. отделом: Г.А. Углева

Обложка: Н.В.Пенькова

Редактор Л.Г.Соловьева