Макаров Д.С

КАНДИДАТСКАЯ

Ульяновск
Издательство Ульяновского государственного университета
2016

Оглавление

Глава I

Глава 1

1 Предельные уравнения и устойчивость

Пусть R^p — линейное действительное пространство p — векторов x с нормой $|x|, R$ — действительная ось, $h > 0$ — заданное действительное число, C — банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^p$ с нормой $\|\varphi\| = max(|\varphi(s)|, -h \leqslant s \leqslant 0)$. Для непрерывной функции $x : [\alpha - h, \beta) \to R^p(\alpha, \beta \in R, \alpha < \beta)$ и каждого $t \in [\alpha, \beta)$ функцию $x_t \in C$ определим равенством $x_t(s) = x(t+s)(-h \leqslant s \leqslant 0)$, под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассмотрим неавтономное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.1}$$

где $f : R \times C_H \to R^p$ - некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему предположению.

Предположение 1.1 *Для каждого числа* r, $0 < r < H$, *существует такое число* $m_r > 0$ *что выполняется неравенство*

$$|f(t, \varphi)| \leqslant m_r, \forall \varphi \in \bar{C}_r. \tag{1.2}$$

Пусть выполняется I.1.1 выполнено и $\{r_n\}$ — последовательность чисел такая, что $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$, $r_n \to H$ при $n \to \infty$. Определим для всех r_i множество $K_i \subset C$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\varphi(s)| \leqslant r_i, \qquad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leqslant m_{r_i}|s_2 - s_1|.$$

Множество K_i очевидно, будет компактом. Положим $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Рассмотрим F - множество всех непрерывных функций f, определенных на $R \times \Gamma$, со значениями в R^p. Через f^τ обозначим сдвиг функции f, $f^\tau(t,\varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Для $f \in F$ семейство сдвигов $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R\}$ будет являтся подмножеством F.

Дадим определение сходимости в F как равномерной на каждом компакте $K' \subset R \times \Gamma$: последовательность $\{f_n \in F\}$ сходится к $f \in F$, если $\forall K' \subset R \times \Gamma$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $|f_n(t,\varphi) - f(t,\varphi)| < \varepsilon$, при $n > N = N(\varepsilon)$ и $(t,\varphi) \in K'$.

В силу определения области Γ эта сходимость метризуема: для всех n определим для двух функций f_1, $f_2 \in F$ полунорму $\|\cdot\|_n$ и соответствующую псевдометрику ρ_n следующим образом

$$\|f\|_n = \sup\{|f(t,\varphi)|, \forall (t,\varphi) \in K'_n\},$$

$$\rho_n(f_1, f_2) = \frac{\|f_2 - f_1\|_n}{1 + \|f_2 - f_1\|_n},$$

где $K'_n = [0,n] \times K_n$, $n = 1, 2, \ldots$ (K_n определено выше).

Определим расстояние между функциями $f_1, f_2 \in F$ как

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f_1, f_2). \tag{1.3}$$

Можно убедиться, что при этому будут выполнены все аксиомы метрического пространства. И пространство F будет полным по отношению к введенной метрике.

Допустим, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующему предположению.

Предположение 1.2 *Для любого* $K \subset C_H$ *(* K *- компакт) функция* $f = f(t,\varphi)$ *равномерно непрерывна по* $(t,\varphi) \in R \times K$, *т.е.* $\forall K \subset C_H$ *и для произвольного малого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, *такое, что для любых* $(t,\varphi) \in R \times K$, $(t_1,\varphi_1),(t_2,\varphi_2) \in R \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, *выполняются неравенства*

$$|f(t_2,\varphi_2) - f(t_1,\varphi_1)| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Лемма 1.1 *При условии выполнения предположений I.1.1 и I.1.2 семейство сдвигов* $\{f^\tau : \tau \in R\}$ *предкомпактно в* F.

Доказательство леммы следует непосредственно из (1.4), построения F и соотношения

$$|f^\tau(t_2,\varphi_2) - f^\tau(t_1,\varphi_1)| = |f(\tau+t_2,\varphi_2) - f(\tau+t_1,\varphi_1)|.$$

Определение 1.1 *Функция $f^* : R \times \Gamma \to R^p$ называется предельной к f, если существует последовательность t_n такая, что $f^{(n)}(t,\varphi) = f(t_n+t,\varphi)$ сходится к $f^*(t,\varphi)$ при $t \to \infty$ в F. Замыкание семейства $\{f^\tau : \tau \in R\}$ в F называется оболочкой $S^+(f)$. Уравнение*

$$\dot{x}(t) = f^*(t,x_t) \tag{1.5}$$

называется предельным к (1.1).

При условиях (1.2) и (1.4) уравнение (1.1) является предкомпактным.

Предположение 1.3 *Для любого компактного множества $K \subset C_H$ функция $f = f(t,\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица т.е, $\forall K \subset C_H$ существует $m = m(K)$, такое, что для любых $t \in R$; $\varphi_1,\varphi_2 \in K$ будет выполнено неравенство*

$$|f(t,\varphi_2) - f(t,\varphi_1)| \leqslant m\|\varphi_2 - \varphi_1\|. \tag{1.6}$$

При выполнении условия (1.6), каждая предельная функция $f^*(t,\varphi)$ также будет удовлетворять аналогичному условию Липшица относительно компакта $K \subset \Gamma$.

Вследствие этого получим, что при предположении I.1.3 решения уравнения (1.1) при начальном условии $(t,\varphi) \in R \times C_H$ и уравнения (1.5) для $(t,\varphi) \in R \times \Gamma$ будут единственными.

Связь между решениями уравнений (1.1) и (1.5) определяется следующей теоремой:

Теорема 1.1 *Пусть функция $f^* : R \times \Gamma \to R^p$ есть предельная к f в F относительно последовательности $t_n \to +\infty$, а последовательности $\{\alpha_n \in\}$ и $\{\varphi_n \in F\}$ таковы, что $\alpha_n \to \alpha \in$, $\varphi_n \to \varphi \in \Gamma$ при $n \to \infty$. Пусть $x = x(t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ есть решения уравнения (1.1), а $y(t,\alpha,\varphi)$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)$, определенное для $t \in [\alpha - h, \beta)$.*

Тогда последовательность функций $y^n(t) = x(t_n+t, t_n+\alpha_n, \varphi_n)$ сходится к $y(t,\alpha,\varphi)$ равномерно по $t \in [\alpha - h + \varepsilon, \gamma]$ для малого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 0$ при $\{\alpha_n = \alpha\}$) и каждого γ, $\alpha < \gamma < \beta$.

Теорема 1.2 *Пусть решение (1.1)* $x = x(t,\alpha,\varphi)$ *ограничено,* $|x(t,\alpha,\varphi)| \leqslant r < H$ *для всех* $t \geqslant \alpha - h$. *Тогда множество* $\omega^+(\alpha,\varphi)$ *полуквазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений* $\{\dot{x} = f^*(t,x_t)\}$, *а именно, для каждой точки* $\psi \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ *существует предельное уравнение* $\dot{x} = f^*(t,x_t)$, *такое, что точки его решения* $y(t,0,\psi)$ *в пространстве* C *содержатся в* $\omega^+(\alpha,\varphi)$, $\{y_t(0,\psi), t \in R\} \subset \omega^+(\alpha,\varphi)$.

Пусть $V : R^+ \times C_H \to R$ — непрерывный функционал Ляпунова и $x = x(t,\alpha,\varphi)$ — решение уравнения. Функция $V(t) = V(t, x_t(\alpha,\varphi))$ представляет собой непрерывную функцию времени $t \geqslant \alpha$.

Верхней правосторонней производной от V вдоль решения $x(t,\alpha,\varphi)$ называется значение $\dot{V}^+(t,x_t(\alpha,\varphi)) = \lim_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{1}{\Delta t}[V(t+\Delta t, x_{t+\Delta t}(\alpha,\varphi)) - V(t,x_t(\alpha,\varphi))]$

Основным используемым свойством при этом определении и условии $\dot{V}(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0$ является невозрастание функции $V(t) = V(t,x_t(\alpha,\varphi))$ для всех $t \geqslant \alpha$.

Определение 1.2 *Пусть* $t_n \to +\infty$ *есть некоторая последовательность. Для каждого* $t \in R$ *и* $c \in R$ *определим множество* $V_\infty^{-1}(t,c) \subset C_H$ *следующим образом: точка* $\varphi \in V_\infty^{-1}(t,c)$, *если существуют последовательность* $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ *и последовательность* $\{\varphi_k \in \Gamma, \varphi_k \to \varphi\}$, *такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} V(t_{n_k} + t, \varphi_k) = c. \tag{1.7}$$

Определение 1.3 *Будем говорить, что отображение* $u : (\alpha,\beta) \to C_H$ *или* $u : R \to C_H$ *принадлежит множеству* $\{V_\infty^{-1}(t,c), c = c_0 = const\}$, *если для любого* $\gamma > 0$ *(соответственно для любого* $T > 0$ *) существуют последовательность* $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ *и последовательность непрерывных отображений* $u_k(t)$, *такие, что* $\{u_k(t)\}$ *сходится к* $u(t)$ *равномерно по* $t \in [\alpha+\gamma, \beta-\gamma]$ *(соответственно по* $t \in [-T,T]$ *), таким образом, что*

$$\lim_{k\to\infty} V(t_{n_k} + t, u_k(t)) = c_0. \tag{1.8}$$

Допустим, что производная $\dot{V}(t,\varphi)$ оценивается неравенством

$$\dot{V}(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0, \tag{1.9}$$

где функционал $W = W(t,\varphi)$ ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве $R \times K$, т.е. для каждого компактного множества $K \subset C_H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m = m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такие, что имеют место неравенства

$$W(t,\varphi) \leqslant m, \qquad |W(t_2,\varphi_2) - W(t_1,\varphi_1)| \leqslant \varepsilon \tag{1.10}$$

для всех $(t,\varphi) \in R \times K$; (t_1,φ_1), $(t_2,\varphi_2) \in R \times K : |t_2 - t_1| \leqslant \delta$, $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \leqslant \delta$. Как и в случае f, при этих условиях семейство сдвигов $\{W^\tau(t,\varphi) = W(t+\tau,\varphi), \tau \in\}$ предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций $F_W = \{W : R \times \Gamma \to R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

Определение 1.4 *Функция $W^* \subset F_W$ есть предельная к W, если существует $t_n \to +\infty$, такая, что последовательность $\{W_n(t,\varphi) = W(t_n + t, \varphi)\}$ сходится к W^* в F_W.*

Определение 1.5 *Будем говорить, что отображение $u : (\alpha,\beta) \to C_H$ $(u : R \to C_H)$ принадлежит множеству $\{\varphi \in C_H : W(t,\varphi) = 0\}$, если тождество $W(t,u(t)) \equiv 0$ выполняется для всех $t \in (\alpha,\beta)$ (соответственно для всех $t \in R$), $u(t) \in \{W(t,\varphi) = 0\}$ для $t \in (\alpha,\beta)$ и (для всех $t \in R$).*

Определение 1.6 *Пусть предельный функционал $W^*(t,\varphi)$ задается согласно определению I.1.4 относительно некоторой последовательности $t_n \to +\infty$. Множество $V_\infty^{-1}(t,c)$, определяемое этой же последовательностью $t_n \to +\infty$ согласно определению I.1.5, назовем соответствующим $W^*(t,\varphi)$.*

Рассмотрим задачу об определении свойств устойчивости уравнения (1.1) на основе функционала Ляпунова со знакопостоянной производной в предположениях (1.4) и (1.6) предкомпактности (1.1), существования семейства предельных уравнений $\{\dot{x} = g(t,x_t)\}$ и единственности решений.

Пусть $V = R^+ \times C_H \to R$ есть непрерывный функционал, производная которого удовлетворяет неравенству (1.9). Введем следующее

Определение 1.7 *Функции $f^* \in F$ и $W^* \in F_W$ образуют предельную пару (f^*, W^*), если они являются предельными к f и W для одной и той же последовательности $t_n \to +\infty$. Множество $V_\infty^{-1}(t,c)$, определяемое в соответствии этой же последовательности $t_n \to +\infty$, есть соответствующее (f^*, W^*).*

Теорема 1.3 *Предположим, что:*

1) существует непрерывный функционал $V : R\times C_H \to R$, *ограниченный снизу на каждом компакте* $K\subset C_H$, $V(t,\varphi)\geqslant m(K)$ *для всех* $(t,\varphi)\in R\times K$, *и такой, что* $\dot V(t,\varphi)\leqslant -W(t,\varphi)\leqslant 0$ *для всех* $(t,\varphi)\in R\times C_H$;

2) решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ *уравнения (1.1) ограничено,* $|x(t,\alpha,\varphi)|\leqslant H_1 < H$ *для всех* $t\geqslant \alpha - h$.

Тогда имеется $c = c_0 \geqslant m$, *при котором для каждой предельной точки* $\psi\in\omega^+(\alpha,\varphi)$ *существуют предельная пара* (f^*, W^*) *и соответствующее множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$, *решение* $y = y(t)$, $y_0 = \psi$, *уравнения* $\dot x = f^*(t,x_t)$, *такие, что* $y_t\in\omega^+(\alpha,\varphi)$ *и* $y_t\subset\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = \mathrm{const}\}\bigcap\{\mathrm{W}^*(\mathrm{t},\varphi) = 0\}$ *для всех* $t\in R$.

Определение 1.8 *Множество* $M(t)\subset C_H$ *не содержит решений уравнения* $\dot x(t) = f^*(t,x_t)$, *если для каждой точки* $\psi\in M(\alpha)$ *соответствующее решение* $y(t,\alpha,\psi)$ *таково, что при некотором* $\beta\in R$ *имеем* $y_\beta(\alpha,\psi)\notin M(\beta)$.

Теорема 1.4 *Если в условиях теоремы I.1.3 предположить также, что существует последовательность* $t_n\to+\infty$, *определяемые которой предельная пара* (g_0, U_0) *и множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$ *будут такими, что для каждого* $c_0 > c_1$ *множество* $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = \mathrm{const} > \mathrm{c}_1\}\bigcap\{\mathrm{U}_0(\mathrm{t},\varphi) = 0\}$ *не содержит решений* $\dot x(t) = g_0(t,x_t)$, *то в дополнение к выводу теоремы I.1.3 имеем также соотношение* $\lim\limits_{n\to\infty} V(t, x_t(\alpha,\varphi_n))$.

Перейдем к исследованию асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.1), полагая, что $f(t,0)\equiv 0$.

Теорема 1.5 *Предположим, что:*

1) существует функционал $V : R^+\times C_{H_1}\to R^+$, $(0 < H_1 < H)$, *такой, что* $V(t,0) = 0$, $V(t,\varphi)\geqslant a(|\varphi(0)|)$, $\dot V(t,\varphi)\leqslant -W(t,\varphi)\leqslant 0$ *для всех* $(t,\varphi)\in R^+\times C_{H_1}$;

2) последовательность $t_n\to+\infty$ *такова, что определяемые которой предельная пара* (g_0, U_0) *и множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$ *будут такими, что множество* $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 > 0\}\bigcap\{U_0(t,\varphi) = 0\}$ *не содержит решений уравнения* $\dot x = g_0(t,x_t)$.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ *асимптотически устойчиво равномерно по* φ.

Значительный интерес представляет следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 1.6 *Предположим, что:*

1) существует функционал $V : R \times C_{H_1} \to$ $(0 < H_1 < H)$, *такой, что* $V(t,0) = 0$, $a_1(|\varphi(0)|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant a_2(\|\varphi\|)$, $\dot{V}^+(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0$ *для всех* $(t,\varphi) \in R \times C_{H_1}$;

2) для каждой предельной пары (g,U) *множество* $\{U(t,\varphi) = 0\}$ *не содержит решения уравнения* $\dot{x}(t) = g(t,x_t)$, *кроме нулевого.*

Тогда решение (1.1) $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво.*

Глава II

Глава 2

1 Постановка задачи управления двухзвенным манипулятором

Рассмотрим математическую модель двухзвенного манипулятора. Манипулятор состоит из неподвижного основания и двух абсолютно жестких звеньев G_1, G_2. Элементы конструкции соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, и O_2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2.

Введем обозначения: $q_i (i = 1, 2)$ — углы поворотов звеньев манипулятора; l_{q_i} — длина отрезка O_iC_i; l_1 — длина отрезка O_2C_2; m_i — масса i -го звена; I_i — момент инерции i -го звена относительно оси шарнира O_i; g — ускорение свободного падения.

Выражение для кинетечиской энергии манипулятора имеет в таком случае следующий вид:

$$T = \frac{1}{2}I_1\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}m_2l_1^2\dot{q}_1^2 + \frac{1}{2}I_2\dot{q}_2^2 + m_2l_1l_{q_2}\cos(q_2 - q_1)\dot{q}_1\dot{q}_2$$

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = M_1 + U_1, \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = M_2 + U_2, \end{cases}$$

где M_i — момент, создаваемый силой тяжести в i -м шарнире, $M_1 = (m_1l_{g_1} + m_2l_1)g\sin q_1, M_2 = m_2l_{q_2}g\sin q_2, U_i$ — управляющие воздействия.

Из выражения для кинетической энергии T находим уравнения движения

$$\begin{cases} (I_1+m_2l_1^2)\ddot{q}_1+m_2l_1l_{g_2}\cos(q_2-q_1)\ddot{q}_2-m_2l_1l_{g_2}\sin(q_2-q_1)\dot{q}_2^2= \\ =(m_1l_{g_1}+m_2l_1)g\sin q_1+U_1, \\ I_2\ddot{q}_2+m_2l_1l_{g_2}\cos(q_2-q_1)\ddot{q}_1+m_2l_1l_{g_2}\sin(q_2-q_1)\dot{q}_1^2=m_2l_{g_2}g\sin q_2+U_2. \end{cases}$$

Пусть $q = q(q_1,q_2)^T$ — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и $X = (q^0(t),\dot{q}^0(t)) : [t_0,+\infty) \to R^4, \|q^0(t)\| \leqslant g_0, \|\dot{q}^0(t)\| \leqslant g_1, \|\ddot{q}^0(t)\| \leqslant g_2$ есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q=q^0(t)$ с ограниченными производными при $t\in[t_0,+\infty)$. Символом $\|\|$ обозначена евклидова норма вектора.

Пусть $(q^0(t),\dot{q}^0(t))\in X$ — какое-либо программное движение, реализуемое программным управлением $U=U^0(t)$. Введем возмущения $x=q-q^0(t), \dot{x}=\dot{q}-\dot{q}^0(t)$

и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:

$$A^{(1)}(t,x)\ddot{x}=\dot{x}^TC^{(1)}(t,x)\dot{x}+Q^{(1)}(t,x)+Q^{(2)}(t,x,\dot{x})+U^{(1)}$$

$$A^{(1)}(t,x)=\begin{pmatrix} I_1+m_2l_1^2 & m_2l_1l_{g_2}\cos(q_2^0(t)-q_1^0(t)+x_2- \\ m_2l_1l_{g_2}\cos(q_2^0(t)-q_1^0(t)+x_2-x_1) & I_2 \end{pmatrix}$$

$$C^{(1)}(t,x)=(C^{(1)}_{(1)}(t,x),C^{(1)}_{(2)}),Q^{(1)}(t,x)=F(t,x)p(x),Q^{(2)}(t,x,\dot{x})=D(t,x)\dot{x}$$

,

$$C^{(1)}_{(1)}(t,x)=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2l_1l_{g_2}\sin(q_2^0(t)-q_1^0(t)+x_2-x_1) \end{pmatrix},$$

$$C^{(2)}_{(1)}(t,x)=\begin{pmatrix} -m_2l_1l_{g_2}\sin(q_2^0(t)-q_1^0(t)+x_2-x_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$F(t,x)=\begin{pmatrix} f_{11}(t,x) & f_{12}(t,x) \\ f_{21}(t,x) & f_{22}(t,x) \end{pmatrix},$$

$$p(x)=\begin{pmatrix} \sin(x_1/2) \\ \sin(x_2/2) \end{pmatrix},$$

$$D(t,x)=\begin{pmatrix} 0 & c^{(1)}_{22(1)}(t,x)\dot{q}_2^0(t) \\ c^{(1)}_{11(1)}(t,x)\dot{q}_1^0(t) & 0 \end{pmatrix},$$

$f_{11}(t,x) = 2m_2 l_1 l_{g_2}\cos(x_2/2)(\ddot{q}_2^0(t)\sin(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2) - -(\dot{q}_2^0(t))^2\cos(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2)) + 2g(m_1 l_{g_2}+m_2 l_2)\cos(q_1^0(t)+x_1/2)$

$f_{12}(t,x) = -2m_2 l_1 l_{g_2}\cos(x_1/2)(\ddot{q}_2^0(t)\sin(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2) + +(\dot{q}_2^0(t))^2\cos(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2))$

$f_{21}(t,x) = 2m_2 l_1 l_{g_2}\cos(x_2/2)(\ddot{q}_1^0(t)\sin(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2) + +(\dot{q}_2^0(t))^2\cos(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2))$

$f_{22}(t,x) = -2m_2 l_1 l_{g_2}\cos(x_1/2)(\ddot{q}_1^0(t)\sin(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2) - -(\dot{q}_2^0(t))^2\cos(q_1^0(t)-q_2^0(t)+(x_1-x_2)/2)) + 2gm_2 l_{g_2}\cos(q_2^0(t)+x_2/2)$

$U^{(1)} = U - U^0(t)$

Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $U^{(1)} = U^{(1)}(t,x,\dot{x})$, $U^{(1)}(t,0,0) \equiv 0$, при котором бы невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ системы (2) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иными словами, управление $U = U^0(t) + U^{(1)}(t, q-q^0(t), \dot{q}-\dot{q}^0(t))$

обеспечивало бы стабилизацию программного движения $(q^0(t), \dot{q}^0(t)) \in X$ системы (1).

Рассмотрим решение задачи стабилизации в области $G = (x,\dot{x}) \in R^4 : \|x\| < \epsilon, \|\dot{x}\| < \epsilon, \epsilon = const > 0$ с помощью непрерывного управления вида

U $^{(1)}(x,\dot{x}) = B(\dot{x}+p(x))$

где $B \in R^{2\times 2}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению. Возьмем для системы II.1 вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)'$ с коэффициентами вида $V^1 = \|p(x)\|, V^2 = \sqrt{(\dot{x}+p(x))'^{A^{(1)}(t,x)(\dot{x}+p(x))}}$.

Вычисляя производную по времени вектор-функции Ляпунова V в силу системы (2), получим следующие оценки:

$$\dot{V}^1 \leqslant -mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda_1}, \dot{V}^2 lem_2 V^1 - \mu_2 V^2 + m_3 (V^1)^2 + m_4 (V^2)^2 + m_5 V^1 V^2$$

,

где положительные постоянные $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, m_i (i = 1, 2, ..., 5)$ определяются из следующих условий:

$$\lambda_1^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 - \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 + \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2}$$

$\mu_1 = \frac{1}{2}\cos(frac\epsilon 2), m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \max\frac{\lambda_2^2+2\sqrt{\lambda_{max}[(D-F)'(D-F)]}}{2\lambda_1}, m_3 = \frac{m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, m_4 = \frac{2m_2}{\lambda}$

Здесь $\lambda_m ax$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (2) можно построить следующую систему сравнения:

$$\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda_1}u^2, \dot{u}^2 = m_2 u^1 - \mu_2 u^2 + m_3(u^1)^2 + m_4(u^2)^2 + m_5 u^1 u^2$$

Согласно теореме сравнения об асимптотической устойчивости [5] из свойства асимптотической устойчивости нулевого решения системы сравнения II.1 следует свойство равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы II.1. Получим условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы II.1 с областью притяжения $(u^1, u^2) \in R^2 : 0 \leqslant u^1 \leqslant \delta_1 = const > 0, 0 \leqslant u^2 \leqslant \delta_2 = const > 0$. Пусть найдется такое число $\gamma > 0$, что выполняются соотношения:

$$\gamma = \frac{\delta_2 m_1}{\delta_1 \lambda_1 \mu_1}, \mu_2 > \frac{m_1}{\gamma \lambda_1 \mu_1}(m_2 + \delta_1 m_3) + m_4 \delta_2 + m_5 \delta_1$$

Тогда можно показать, что функция $\widetilde{u}(t) = maxu^1(t), \delta_1 u^2(t)/\delta_2$ будет монотонно стремиться к нулю при $t \to \infty$, и, значит, нулевое решение системы сравнения II.1 будет асимптотически устойчиво. При невозможности практической реализации программного управления стабилизацию программного движения можно осуществить при помощи разрывного управления вида

$$U^{(1)}(x, \dot{x}) = Bsign(\dot{x} + p(x))$$

Численное моделирование движения манипулятора при действии управлений II.1 и II.1 проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории

$$m_1 = 0,5, m_2 = 0,3, l_1 = 0,5, l_2 = 0,5, l_{g_1} = 0,25, l_{g_2} = 0,3, I_1 = 0,01*^2, I_2 = 0,006*^2,$$

На рисунках 2 и 3 представлены результаты моделирования при управлениях II.1 и II.1 соответственно.

Глава III

Глава 3

1 Задача управления трехзвенным манипулятором

Рассмотрим математическую модель трехзвенного манипулятора, состоящую из трех абсолютно жестких звеньев G_1, G_2, G_3 , представляющих собой однородные стержни. Манипулятор установлен на неподвижном основании, на которое опирается звено G_1 . Звено G_1 таким образом, может совершать только вращения вокруг вертикальной оси. Звенья соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1 , и O_2 таким образом, что звенья G_2 и G_3 могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2 . Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2 . На конце звена G_3 находится груз, перемещаемый манипулятором.

Введем обозначения: $q_i(i = 1, 2, 3)$ — углы поворотов звеньев манипулятора; $Q_i(i = 1, 2, 3)$ — управляющие моменты относительно осей соответствующих звеньев; l_i — длина i -го звена; m_i — масса i -го звена; m_0 — масса перемещаемого груза; $m_30 = m_0 + m_3$; J_{01} — момент инерции первого звена относительно оси вращения; r_2 и r_3 — соответственно расстояния от центров тяжести второго звена и третьего звена с перемещаемым грузом относительно осей соответствующих звеньев; g — ускорение свободного падения. Уравнения движения манипулятора имеют вид:

$$
\begin{cases}
(J_{01} + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2)\ddot{q}_1 + \\
+2(m_2 r_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \\
+2m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 = Q_1, \\
(m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)\ddot{q}_3 + \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_3^2 - \\
-(m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2)\cos q_2 \dot{q}_1^2 + (m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \sin q_2 = Q_2, \\
\frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)\ddot{q}_2 + m_{30} r_3^2 \ddot{q}_3 - \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_2^2 - \\
-m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1^2 + m_{30} g r_3 \sin q_3 = Q_3.
\end{cases}
$$

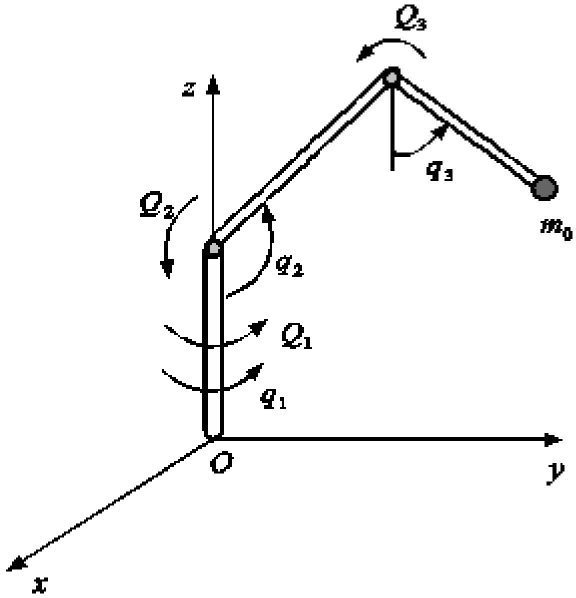

Рис. III.1: Модель трехзвенного манипулятора

Пусть $q = (q_1, q_2, q_3)$ — вектор обобщенных координат представленной выше системы. Таким образом, уравнения движения можно представить в следующей векторно-матричной форме: $A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K\dot{q} = Q$ где

$$
A(q) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}
$$

Элеменыт матрицы инерции $A(q)$:

$$
a_{11} = J_{01} + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2
$$

$$a_{22} = m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2$$
$$a_{23} = \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)$$
$$a_{32} = a_{23}$$
$$a_{33} = m_{30} r_3^2$$

$$C(q,\dot{q}) = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы $C(q,\dot{q})$:

$$c_{11} = 2(m_2 r_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 \cos q_2)\dot{q}_2$$
$$c_{13} = 2m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_3$$
$$c_{21} = -(m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2) \cos q_2 \dot{q}_1$$
$$c_{31} = -m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1$$
$$c_{32} = -\frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_2$$

$A(q)$ — положительно определенная матрица инерции системы.

2 Построение управления

Пусть $q = (q_1, q_2, q_3)^T$ — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и $X = q^0(t) : [t_0, +\infty) \to R^3, \|q^0(t)\| \leqslant q_0, \|\dot{q}^0\| \leqslant g_1, \|q^0(t)\| \leqslant q_0, \|\ddot{q}^0\| \leqslant g_2$ есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q = q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$. Символом $\|\|$ обозначена евклидова норма вектора. Уравнения движения (1) можно представить в следующей векторно-матричной форме: $A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + K\dot{q} = Q$, (2) где $A(q)$ — положительно определенная матрица инерции системы, $C(q,\dot{q}) = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i C_{(i)}(q)$, , j,k -ый элемент $c_{(i)jk}(q)$ матрицы $C_{(i)}(q)$ определяется в виде $c_{(i)jk}(q) = \frac{1}{2}(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_j})$; K — матрица коэффициентов моментов сил вязкого трения, действующих в системе. Система (2) имеет следующее свойство: матрица $\dot{A}(q(t)) - 2C(q(t),\dot{q}(t))$ является кососимметричной. Пусть $q^0(t) \in X$ — какое-либо программное движение системы (2), реализуемое программным управлением $Q = Q^{(0)}(t)$, т.е. имеет место тождество $A(q^0(t))\ddot{q}^0(t) + C(q^0(t), \dot{q}^0(t))\dot{q}^0(t) + K\dot{q}^0(t) \equiv Q^{(0)}(t)$. Введем возмущения $x = q - q^0(t)$ и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде: $A^{(1)}(t,x)\ddot{x} + C^{(1)}(t,x,\dot{x})\dot{x} + K\dot{x} = Q^{(1)}(t,x,\dot{x}) + Q^{(2)}(t,x,\dot{x})$,(3) где $A^{(1)}(t,x) = A(x + q^0(t))$, $C^{(1)}(t,x,\dot{x}) = C(x + q^0(t), \dot{x} + \dot{q}^0(t))$, $Q^{(1)}(t,x,\dot{x}) = Q - Q^{(0)}(t)$, $Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) = (A^{(1)}(t,0) - A^{(1)}(t,x))\ddot{q}^0(t) + (C^{(1)}(t,0,0) - C^{(}$. Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $Q^{(1)}(t,x,\dot{x})$, при котором невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ системы (3) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иначе, управление $Q = Q^{(1)}(t, q - q^{(0)}(t), \dot{q} - \dot{q}^{(0)}) + Q^{(0)}(t)$ обеспечивало бы стабилизацию программного движения системы (2).

2 Синтез управления в задаче стабилизации программного движения манипулятора Рассмотрим решение задачи стабилизации в области $G = (x,\dot{x}) \in R^6 : \|x\| < \epsilon, \|\dot{x}\| < \epsilon, \epsilon = const > 0$ с помощью непрерывного управления вида $Q^{(1)}(x, \dot{}) = B(\dot{x} + p(x))$, (4) где $B \in R^{3\times 3}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению; $p(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция, такая, что $\|p(x)\| \geqslant p_0(x) > 0, p_0(0) = 0$. Возьмем для системы (3) вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)^T$ с коэффициентами вида $V^1 = \|p(x)\|, V^2 = \sqrt{(\dot{x} + p(x))^T A^{(1)}(t,x)(\dot{x} + p(x))}$.

Вычисляя производные по времени от квадратов компонент вектор-функции Ляпунова в силу системы (3), получим $\frac{d}{dt}(V^1(x))^2 = 2V^1\dot{V}^1 = 2p^T\dot{p} = 2p^T\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x} = -2p^T\frac{\partial p}{\partial x}p + 2p^T\frac{\partial p}{\partial x}(\dot{x} + p)$,

$$\frac{d}{dt}(V^2(x))^2 = 2V^2\dot{V}^2 = 2(\ddot{x}+\dot{p})^T A^{(1)}(\dot{x}+p) + (\dot{x}+p)^T\dot{A}^{(1)}(\dot{x}+p) = 2(-C^{(1)}(t,x,\dot{x})\dot{x} - R\dot{x}$$

.

Отсюда получим следующие оценки: $\dot{V}^1 \leqslant -\mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)}V^2, \dot{V}^2 \leqslant \frac{m_2}{\lambda(t,x)}V^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)}$ где положительные постоянные μ_2, μ_2, m_1, m_2 и функция $\lambda(t,x)$ определяются из следующих условий: $p^T\frac{\partial p}{\partial x}p \geqslant \mu_1\|p\|^2, \|\frac{\partial p}{\partial x}\| \leqslant m_1, \lambda(t,x)\|\dot{x} + p\| = V^2$,

$$\|Q^{(2)}(t,x,\dot{x}) \leqslant (m_2 - \|C^{(1)}(t,x,\dot{x}) + K - A^{(1)}(t,x)\frac{\partial p}{\partial x}\|)\|p\|$$

$$\lambda_{max}(B + B^T - K - K^T + A^{(1)}(t,x)\frac{\partial p}{\partial x} + (\frac{\partial p}{\partial x})^T A^{(1)}(t,x)) \leqslant -2\mu_2$$

Здесь $\lambda_m ax()$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (3) можно построить следующую систему сравнения: $\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)} u^2, \dot{u}^2 = \frac{m_2}{\lambda(t,x)} u^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)} u^2$. (5) Согласно теореме сравнения об экспоненциальной устойчивости [5] из свойства экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы сравнения (5) следует аналогичное свойство нулевого решения системы (3). Можно показать, что нулевое решение системы сравнения (5) будет экспоненциально устойчиво при следующем условии $4\mu_1\mu_2 > (m_1/k + m_2 k)^2, k = const > 0$. Численное моделирование движения манипулятора при действии управления (4) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории

$m_2 = 15, m_3 = 2,5, m_0 = 2, l_2 = 1, r_2 = 0,5, r_3 = 0,5, J_{01} = 0,1*^2, q_1^0(t) = 0,2t, q_2^0($

На рисунках 2–4 представлены результаты моделирования. Пунктирной линией обозначены составляющие программного движения, а сплошной – реального движения системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

[1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 277 с.

[2] Алексеенко Н.В. Устойчивость решений нелинейных почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Известия Вузов. Сер. Математика. 2000. №2. С.3–6.

[3] Ананьевский И.М., Колмановский В.Б. О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1989. №9. С.34–42.

[4] Анашкин О.В. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости для одного класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №7. С.867–875.

[5] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // ПММ. 1979. Т.43. Вып.5. С.796–805.

[6] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // ДАН УзССР. 1980. №7. С.20–22.

[7] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225–232.

[8] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // ПММ. 1984. Т.48. Вып.5. С.707–713.

[9] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений // ПММ. 1987. Т.51. Вып.2. С.253–260.

[10] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // ПММ. 1991. Т.55. Вып.4. С.539–547.

[11] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Изд-во "Наука 1991. С.36–40.

[12] Андреев А.С. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во фМГУ, 1994. 80 с.

[13] Андреев А.С. Об устойчивости неавтономного функционально дифференциального уравнения // Доклады РАН. 1997. Т.356. №7. С.151–153.

[14] Андреев А.С. Об управляемости нестационарной нелинейной системы // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т.10. Вып.1. С.88.

[15] Андреев А.С. Некоторые задачи об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным и неограниченным запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 2003. Вып.1(13). С.3–11.

[16] Андреев А.С. К методу К.П. Персидского в задачах о неустойчивости // Математический журнал. Алматы. 2004. Т.4. №2(12). С.76–82.

[17] Андреев А.С. О стабилизации движения управляемой системы с запаздывающей обратной связью // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т.11. Вып. 3. С. 612–613.

[18] Андреев А.С., Бойкова Т.А. Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости // Механика твердого тела. 2002. Вып.32. С.109–116.

[19] Андреев А.С., Лысяков В.Н. К методу Ляпунова в задаче об устойчивости функционально дифференциального уравнения // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 1996. Вып.1(2). С.5–10.

[20] Андреев А.С., Павликов С.В. Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально дифференциального уравнения // ПММ. 1999. Т.63. Вып.1. С. 3–12.

[21] Андреев А.С., Павликов С.В. Исследование устойчивости функционально-дифференциальных уравнений на основе знакопостоянных функционалов Ляпунова // Труды Средневолжского математического общества. 1999. Т.2(1) С.74–75.

[22] Андреев А.С., Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 2000. Т.68. №3. С.323–331.

[23] Андреев А.С., Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости относительно части переменных // Труды Четвертой Международной научно-практической конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов". (10-12 декабря 2001г., г.Ульяновск). Секция Математики. Ульяновск: УлГУ, 2001. С.15–16.

[24] Андреев А.С., Павликов С.В. К задаче об устойчивости по части переменных функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 2003. Вып.1(13). С.12–21.

[25] Андреев А.С., Павликов С.В. Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Механика твердого тела. 2004. Вып.34. С.112–120.

[26] Андреев А.С., Седова Н.О. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2001. 60 с.

[27] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №4. С.435–440.

[28] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №7. С.876–885.

[29] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости функционально-дифференциального уравнения с периодической правой частью // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 1999. Вып.1(6). С.3–17.

[30] Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 333 с.

[31] Астанов И.С., Белоцерковский С.М., Каганов Б.О., Кочетков Ю.А. О системах интегро-дифференциальных уравнений, описывающих неустановившееся движение тел в сплошной среде // Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18. №9. С.1628–1637.

[32] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

[33] Билашевич И.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Стабилизация динамических систем при наличии запаздываний в канале обратной связи // Автоматика и телемеханика. 1996. №6. С.31–39.

[34] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

[35] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.

[36] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 302 с.

[37] Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.

[38] Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.

[39] Гайшун И.В. Асимптотическая устойчивость одной системы с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1972. Т.8. №5. С. 906–908.

[40] Гайшун И.В., Княжище Л.Б. Теоремы устойчивости уравнений с запаздыванием, использующие немонотонные функционалы Ляпунова // Докл. Ан Беларусии. 1994. Т.38. №3. С.5–8.

[41] Гайшун И.В., Княжище Л.Б. Немонотонные функционалы Ляпунова. Условия устойчивости уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1994. Т.30. №8. С.1291–1298.

[42] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.

[43] Горяченко В.Д. Методы теории устойчивости в динамике ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1971. 264 с.

[44] Горяченко В.Д. Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1977. 296 с.

[45] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.

[46] Дроздов А.Д., Колмановский В.Б., Триджанте Д. Об устойчивости системы хищник-жертва // Автоматика и телемеханика. 1992. №11. С.57–64.

[47] Жиков В.В., Левитан Б.М. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 205 с.

[48] Журавлев В.Ф. Теоретическая механика. М.: Наука, Физматлит, 1997. 320 с.

[49] Калистратова Т.А. Об устойчивости по части переменных систем с запаздыванием // Авт. и телемех. 1986. №5. С.32–37.

[50] Ким А.В. К методу функций Ляпунова для систем с последействием // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск, 1987. С.79–83.

[51] Ким А.В. О методе функционалов Ляпунова для систем с последействием // Авт. и телемех. 1990. №2. С.24–31.

[52] Ким А.В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1992. 142 с.

[53] Ким А.В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. 234 с.

[54] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость уравнений с запаздыванием // Докл. АН Беларуси. 1997. Т.41. №1. С.26–29.

[55] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. I// Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №2. С.189–196.

[56] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. II// Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №8. С.1056–1065.

[57] Княжище Л.Б. Функционалы Ляпунова и условия равномерной асимптотической устойчивости уравнений с запаздыванием // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т.44. №5. С.40–43.

[58] Княжище Л.Б., Щавель Н.А. Немонотонные функционалы Ляпунова и оценки решений диффереципальных уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1997. Т.33. №2. С.205–211.

[59] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 474 с.

[60] Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с произвольным последействием // Докл. РАН. 1993. Т.331. №4. С.421–424.

[61] Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с последействием и переменными коэффициентами // ПММ. 1995. Т.59. Вып.1. С.71–81.

[62] Колмановский В.Б. Об устойчивости систем с последействием нейтрального типа // ПММ. 1996. Т.60. Вып.2. С.210–222.

[63] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.

[64] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Системы с последействием нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 1984. №1. С.5–35.

[65] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543с.

[66] Кордуняну К., Лакшмикантам В. Уравнения с неограниченным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1985. №7. С.5–44.

[67] Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М.Ляпунова для уравнений с запаздыванием по времени // ПММ. 1956. Т.20. №3. С.315–327.

[68] Красовский Н.Н. Об асимптотической устойчивости систем с последействием // ПММ. 1956. Т.20. №4. С.513–518.

[69] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

[70] Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. №6. С.3–15.

[71] Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости. Доп.4. М.: Наука, 1966. С.475–514.

[72] Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А. Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Наукова думка, 1991. 248 с.

[73] Лакшмикантам В., Мартынюк А.А. Развитие прямого метода Ляпунова для систем с последействием (обзор) // Прикладная механика. 1993. Т.29(39). №2. С.3–15.

[74] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. 271 с.

[75] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

[76] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2-е. М.: Наука, 1966. 530 с.

[77] Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1991. 414 с.

[78] Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А. Устойчивость движения метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990. 256 с.

[79] Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит. 2000. 380 с.

[80] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.

[81] Мышкис А.Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи матем. наук. 1977. Т.32. Вып.2(194). С.173–202.

[82] Мышкис А.Д. Предисловие редактора перевода. В кн.: Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. С.5–6.

[83] Мышкис А.Д., Эльсгольц Л.Э. Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи матем. наук. 1967. Т.22. Вып.2. С.21–57.

[84] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л., Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры. 1949. 550 с.

[85] Новоселов В.С. Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. 239 с.

[86] Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1965. 354 с.

[87] Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т.1. №5. С.605–618.

[88] Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 1996. Вып. 1. Ч.II. С. 46–56.

[89] Павликов С.В. Об устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения второго порядка// Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1996. Вып. 2. С. 32–33

[90] Павликов С.В. О стабилизации управляемых механических систем с обратной связью с запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1997. Вып. 2(4). С. 66–70.

[91] Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 2002. Вып.2(12). С.30–39.

[92] Павликов С.В. Предельные уравнения и функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости по части переменных // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 2003. Вып.1(13). С.63–74.

[93] Павликов С.В. Об управляемости и стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т.10. Вып.1. С.201.

[94] Павликов С.В. О стабилизации движения управляемой системы с запаздыванием // Механика твердого тела. 2005. Вып.34.

[95] Перегудова О.А. К методу сравнения в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1999. Вып.2(7). С.32–36.

[96] Перегудова О.А. Методы сравнения и преобразования в задачах об устойчивости систем с запаздыванием. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 83 с.

[97] Прасолов А.В. О применении функций Ляпунова для исследования неустойчивости решений систем с последействием // Вестник ЛГУ. 1981. Сер.1. 19. С.116–118.

[98] Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т.20. Вып. 4. С. 500–512.

[99] Разумихин Б.С. Устойчивость по первому приближению систем с запаздыванием // ПММ. 1958. Т.22. Вып. 2. С.155–166.

[100] Разумихин Б.С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1960. Т.21. №6. С.740–748.

[101] Разумихин Б.С. Метод исследования устойчивости систем с последействием // Доклады АН СССР. 1966. Т.167. №6. С.1234–1236.

[102] Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988. 106 с.

[103] Резван В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М.: Наука, 1983. 300 с.

[104] Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ. Сер. Мат., механ., физ., астрон., хим. 1957. №4. С.9-16.

[105] Румянцев В.В. Метод функции Ляпунова в теории устойчивости движения // Механика в СССР за 50 лет. Т.1. М.: Наука, 1968. С.7–66.

[106] Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

[107] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

[108] Седова Н.О. Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 2005. Т.8. №3. С.468–472.

[109] Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости движений в некоторых классах с последствием // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 166–174.

[110] Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости и оценке области притяжения в некоторых системах с последействием // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 744–751.

[111] Тереки Й. Экспоненциальная и степенная асимптотическая устойчивость функционально-дифференциальных уравнений. В кн. Развитие и применение метода функций Ляпунова. Новосибирск: Наука, 1992. С.101–107.

[112] Троценко Г.А. Об устойчивости решений почти периодической системы // Механика твердого тела. 2002. Вып. 32. С.129-133.

[113] Хейл Дж. Теория функционально-дифферепнциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

[114] Хусаинов Д.Я. Об экспоненциальной устойчивости линейных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №2. С.357–359.

[115] Хусаинов Д.Я. Экспоненциальная оценка решений линейных систем с запаздыванием при произвольном отклонении аргумента // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №9. С.1631–1633.

[116] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 276 с.

[117] Шестаков А.А. Прямой метод Ляпунова как метод локализации функциями Ляпунова предельных множеств неавтономных динамических процессов (на базе предельных уравнений и динамических систем) // Функции Ляпунова и их применение. Ан СССР. Сибирское отд., Иркутский вычислит. центр. Новосибирск: Наука, 1987. С.14–48.

[118] Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1990. 316 с.

[119] Шиманов С.Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени // ПММ. 1960. Т.24. Вып. 1. С.55–63.

[120] Шиманов С.Н. Устойчивость систем с запаздыванием // Труды II Всес. съезда по теорет. и прикл. механике. Москва, 1964, вып. 1. М.: Наука, 1965. С.170–180.

[121] Щеглов В.А. Устойчивость линейного дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1996. Т.32. №12. С.1665–1669.

[122] Щеглов В.А. Устойчивость решений одного уравнения второго порядка с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №12. С.1710–1713.

[123] Эльсгольц Л.Э. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений // Успехи мат. наук. 1954. Т.9. №4. С.95-112.

[124] Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 127 с.

[125] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

[126] Янушевский Р.Т. Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 416 с.

[127] Andreev A. Sulla stabilitá asintotica ed instabilitá // Rend. Sem. Univ. Padova. 1986. V.75. P.235–245.

[128] Andreev A. On the stability of nonautonomous functional differential equations // Nonlinear Analysis. TMA. 1997. V.30. Part 5. P. 2847–2854.

[129] Andreev A., Khusanov D. On asymptotic stability and nonstability functional-differential equations with periodic right side // Nonlinear oscillations, 2001. V.4. №3. P.290–298.

[130] Andreev A.S., Sedova N.O. On the stability of nonautonomous equations with delay via limiting equtions // Functional Differential Equations. 1998. V.5. №1-2. P. 21–37.

[131] Andreev A., Zappala'G. On stability for perturbed differential equations // Le Natematiche. 1996. V.51. F. I. P. 27–41.

[132] Artstein Z. Topological dinamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V.23. P.216–223.

[133] Artstein Z. The limiting equations of nonautonomous differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V. 25. P.184–202.

[134] Artstein A. Uniform asymptotic stability via the limiting equations // J. Differ. Equat. 1978. V.27. P.172–189.

[135] Becker L.C., Burton T.A., Zhang S. Functional differential equations and Jensen's Inequality // J. of Math. Anal. and Appl. 1989. V.138. N 1. P.135–156.

[136] Bernfeld S.R., Corduneanu C., Ignatyev A.O. On the stability of invariant sets of functional differential equations // Nonlinear Analysis. 2003. V.55. P.641–656.

[137] Burton T.A. Uniform asymptotic stability in functional differential equations Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V.68. P.195–199.

[138] Burton T.A. Stability theory for delay equations // Funkcial. Ekvac. 1979. V. 22. №1. P.67–76.

[139] Burton T.A., Casal A., Somolinos A. Upper and lower bounds for Liapunov functionals // Funkcial. Ekvac. 1989. V. 32. №1. P.23–55.

[140] Burton T.A., Hatvani L. Stability theorems for nonautonomous functional differential equations by Liapunov functionals // Tohoku Math. J. 1989. V.41. P.65–104.

[141] Burton T.A., Hatvani L. On nonuniform asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations // Differential and Integral Equations. 1990. V.3. P.285–293.

[142] Burton T.A., Makay G. Marachkov stability results for functional differential equations // EJQTDE, 1998. №1. P.1–17.

[143] Conley C.C., Miller R.K. Asymptotic stability without iniform stability. Almost periodic coefficients // J. Differ. Equat. 1965. V.1. №1. P.333–336.

[144] Corduneanu C. On partial stability for delay systems // Ann. Polon. Math. 1975. V.29. P.357–362.

[145] Corduneanu C., Ignatyev O.A. Stability of invariant sets of functional differential equations with delay // Nonlinear Func. Anal. and Appl. 2005. №1. P.11–24.

[146] Gyori I., Hartung F. Preservation of stability in delay equations under delay perturbations // Journal of Math. Anal. and Appl. 1998. V. 220. P.290–312.

[147] Haddock J. The "evolution"of invariance principles a la Liapunov's direct method // Advances in nonlinear dynamics. Stability and Control: Theory, Methods and Applications. V.5. 1997. P. 261–272.

[148] Haddock J., Ko Y. Lyapunov-Razumikhin functions and an instability theorem for autonomous functional-differential equations with finite delay // Rocky Mtn. J. Math. 1995. V.25. P. 261–267.

[149] Haddock J., Krisztin T., Terjeki J. Invariance principles for autonomous functional differential equations // J. Integral Equations. 1985. V.10. P.123–136.

[150] Haddock J., Terjéki J. Liapunov-Razumikhin functions and an invariance principle for functional differential equations // J. Differential Equations. 1983. V.48. №1. P.95–122.

[151] Haddock J., Terjéki J. On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay // J. Differential Equations. 1990. V.86. P.1–32.

[152] Haddock J., Zhao J. Instability for autonomous and periodic functional differential equations with finite delay // Funkcialay Ekvacioj. 1996. V.39. P.553–570.

[153] Hale J. A stability theorem for functional-differential equations // Proc. N.A.S. 1963. V.50. P.942–946.

[154] Hale J. Dynamical systems and stability // J. Math. Anal. Appl. 1969. V.26. P.39–59.

[155] Hale J. Functional differential equations with infinite delays // J. of Math.An. and Applic., 1974. V. 48. P.276–293.

[156] Hale J.K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // Funk. Ekv., 1978. V.21. P.11–41.

[157] Hatvani L. On the asymptotic stability of the solutions of functional differential equations // Qualitative theory of differential equations. Colloq. Math. Soc. J.Bolyai. Vol.53. North Holland, Amsterdam. 1990. P.227–238.

[158] Hatvani L. On the asymptotic stability in differential systems by Liapunov direct method // Proceedings of the First World Congress

of Nonlinear Analysts. Tampa, Florida, August 19-26, 1992. W.de 6., Berlin -N.Y. 1996. P.1341–1348.

[159] Hatvani L. On the asymptotic stability by Lyapunov functionals with semidefinite derivatives // Nonlinear Analysis, TMA. 1997, V.30. №8. P. 4713–4721.

[160] Hatvani L. Annulus arguments in the stability thery for functional differential equations // Differ. and Integral Equations. 1997. V. 10. №5. P. 975–1002.

[161] Hatvani L. On Lyapunov's direct method for nonautonomous fde's // Functional Differential Equations. 1998. V. 5. №3–4. P.315-323.

[162] Hatvani L. On the asymptotic stability for functional differential equations by Lyapunov functionals // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 2001. 47.№7. P.4333–4343.

[163] Hornor W.E. Invariance principles and asymptotic constancy of solutions of precompact functional differential equations // Tohoky Math. J. 1990. V.42. P.217–229.

[164] Ignatyev A.O. On the asymptotic stability in functional differential equations // Proceedings of the American Math. Society. 1999. V.127. №6. P. 1753–1760.

[165] Ignatyev A.O. On the partial equiasymptotic stsbility in functional differential equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2002. V. 268. P.615–628.

[166] Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2001. V.46. P. 1048–1060.

[167] Kato J. Uniform asymptotic stability and total stability // Tohoku Math. Journ. 1970, V.22. P.254–269.

[168] Kato J. On Liapunov–Razumikhin type theorems for functional differential equations // Funkc. Evkac., 1973. V.16. №3. P.225–239.

[169] Kato J. Liapunov's second methods in functional differential equations // Tohoku Math. J. 1980. V. 32. №4. P. 487–492.

[170] Makay G. An example on the asymptotic stability for functional differential equations // Nonl. Anal., TMA// 1994. V.23. P.365–368.

[171] Mao X. Comments on "An improved Razumikhin-type theorem and its Applications"// IEEE Transactions on automatic control. 1997. V. 42. P. 429–430.

[172] Mikolajska Z. Une remarque sur des notes der Razumichin et Krasovskij sur la stabilite asimptotique // Ann. Polon. Math., **22** (1969). P.69–72.

[173] Murakami S. Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations // J. Differ. Equat. 1985. V.59. P.314–335.

[174] Saperstone S.N. Semidynamical system in the infinite dimentional space. N.Y.: Springer – Verlag. 1981. 474 p.

[175] Sedova N. On employment of semi-definite function in stability of delayed equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. V.281, №1. P.307–319.

[176] Sedova N. Razumikhin-type theorems in the problem on instability of nonautonomous equations with finite delay // Funckcialaj Ekvacioj. 2004. V.47. P.187–204.

[177] Seifert G. Liapunov-Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of Volterra type // J. Differential equations. 1974. 16. P.289–297.

[178] Sell G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // Trans. Amer. Math. Soc., 1967. V.22. P.241–283.

[179] Taniguchi T. Asymptotic behavior theorems for non-autonomous functional differential equations via Lyapunov-Razumikhin method // Journal of Math. Analysis and Appl. 1995. V. 189. P.715–730.

[180] Taniguchi T. Asymptotic behavior theorems of solutions of functional differential equations with finite delay // Journal of Math. Analysis and Appl. 1996. V. 199. P.776–786.

[181] Terjéki J. On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations // Annalea Polonici Mathematici. 1979. V. 36. P. 299–314.

[182] Wang Z. Comparison method and stability problem for functional differential equations // Tohoku Math. J. 1983. V.35. P. 349–356.

[183] Wang T. Weakening the condition $W_1(|\,\varphi(\theta)\,|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant W_2(\|\varphi\|)$ for uniform asymptotic stability // Nonl. Anal., TMA. 1994. V.23. №2. P.251–264.

[184] Yorke J.A. Some extensions of Liapunov's second method. – SIAM, Diff. integ. equat., Pa, 1969, p.206–207.

[185] Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method. Tokio: The Math. Soc. of Japan, 1966, 216 p.

[186] Yoshizawa T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost-Periodic Solutions. Applied Math. Sciences, vol. 14, 1975. Springer-Verlag. N.Y. 233 p.

[187] Zhang Bo. Asymptotic stability in functional differential equations by Lyapunov functionals // Trans. Amer. Math. Soc., 1995. V.347. №4. P.1375–1382.

Научное издание

Андреев Александр Сергеевич

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зав. отделом: Г.А. Углева
Обложка: Н.В.Пенькова
Редактор Л.Г.Соловьева