Макаров Д.С

КАНДИДАТСКАЯ

Ульяновск
Издательство Ульяновского государственного университета
2016

Оглавление

Глава I

Глава 1

1 Введение

Развитие производства в XX веке повлело за собой совершенствование средств автоматизации. Использование всевозможных управляемых механизмов повлекло за собой необходимость в развитии математического описания их функционирования для обеспечения оптимальности выполняемых операций. Важная роль в вопросе управляемости механических устройств отведена манипуляторам, как средству выполнения роботом необходимой задачи. Происходит постепенное движение от более простых моделей к более сложным, позволяющим учитывать нелинейную движений манипуляторов, решать задачи с запаздыванием, возникающим в цепи обратной связи. Важная роль уделяется также снижению вычислительной сложности расчётов заданного движения. Данное условие необходимо для возможности просчёта движений онлайн, что обеспечивает большую гибкость возможностей использования манипуляторов. Так как модели механических систем часто представляют собой системы нелинейных дифференциальных уравнений, одним из естественных вариантов решения задачи анализа поведения таких систем становится метод декомпозиции, позволяющей проводить разбиение системы на подсистемы меньшей размерности для их дальнейшего исследования. Методы декомпозиции развиваются научными школами таких учёных как Ф.Л. Черноусько и Е.С. Пятницкий. Проблема управления движением механических систем, в том числе, манипуляционных роботов, без учета измерения скоростей стала активно изучаться с начала 90-х годов прошлого века. В ранних исследованиях [188, 189, 190, 191, 192] были получены результаты, решающие задачи стабилизации программной позиции и локального отслеживания траектории. Эти результаты, как правило, были основаны на применении двухшаговой процедуры: 1) построение наблюдателя (фильтра) скоростей; 2) синтез управления с применением метода линеаризации обратной связью и функции Ляпунова квадратичного вида. Такие законы управления являются весьма сложными по структуре, так как содержат вычисляемые в режиме он-лайн моменты всех сил, действующих на систему, слагаемое, представляющее собой произведение матрицы инерции системы на программное ускорение. Точная реализация данных законов возможна лишь на имеющейся полной информации о параметрах системы и действующих силах. В работах [193, 195] решены задачи полуглобального и глобального отслеживания траектории механической системы с одной и с n степенями свободы без учета измерения скорости на основе применения приближенного дифференцирования и построения управления при помощи метода линеаризации обратной связью. Как отмечалось ранее, недостатком данного метода является сложность структуры построенного управления, большие объемы вычисления в режиме он-лайн и необходимость построения точной динамической модели системы. В работах [194, 196] для решения задач стабилизации программной позиции и программного движения натуральной механической системы без измерения скоростей были построены наблюдатели, имеющие порядок, равный числу степеней свободы системы, не требующие точной информации о динамической модели системы, что является преимуществом перед нелинейными наблюдателями, предложенными в работах [188, 189]. Результаты, полученные в работах [194, 196], применимы лишь для механических систем без учета диссипативных сил, кроме того, решение задачи о стабилизации программного движения получено в малом, что ссужает область применимости данных результатов. В работе [197] дано решение задачи полуглобального отслеживания траектории механических систем, находящихся под действием лишь потенциальных и ограниченных управляющих сил, что ссужает класс рассматриваемых механических систем. В работе [198] на основе применения классического метода Ляпунова построено адаптивное управление многозвенным манипулятором на основе наблюдателя и применения метода бэкстеппинга без измерения скоростей и с учетом неизвестных параметров системы. В работе [199] было получено адаптивное управление манипуляционным роботом без измерения скоростей с использованием фильтров первого порядка. Недостатком работ [198, 199] является сложная структура построенного управления. В работе [200] предложен робастный закон управления, решающий задачу глобального отслеживания траектории робота манипулятора с неточно известными параметрами без измерения скоростей, недостатком работы является сложный алгоритм построения управления, требующий большого объема вычислений в режиме он-лайн. В работе [201] даны решения задач управления нелинейных механических систем под действием диссипативных сил без измерения скоростей с гравитационным компенсатором: о глобальной стабилизации программной позиции на основе динамической обратной связи с насыщением; глобального отслеживания траектории. При этом нерешенной остается задача построения закона управления без гравитационного компенсатора, в том числе, для систем с неточно известными параметрами. В работе [202] решена задача о глобальной стабилизации программной позиции механической системы, находящейся под действием лишь потенциальных и управляющих сил. С помощью нелинейной обратной связи построен закон управления без измерения скоростей. При этом вопрос о робастности построенного закона не рассматривался. Нерешенной остается задача о стабилизации нелинейной обратной связью программного движения более широкого класса механических систем, находящихся под действием не только потенциальных, но и диссипативных сил. В работе [203] построен закон адаптивного управления, обеспечивающего равномерную глобальную асимптотическую устойчивость заданного движения манипуляционного робота. На основе классического метода Ляпунова и построения нелинейных фильтров задача адаптивного управления решена для механических систем с линейной зависимостью от вектора неизвестных параметров. Отметим, что для реализации построенного в [203] закона требуется проведение громоздких вычислений для построения оценки неизвестных параметров, кроме того, открытым остается вопрос оценки скорости сходимости к программному движению. В работе [204] решена задача об отслеживании нестационарной траектории механических систем без измерения скоростей и без построения наблюдателей. При этом для нахождения неизвестных скоростей применяется приближенное дифференцирование. Получены условия равномерной глобальной асимптотической устойчивости программного движения системы без диссипации путем построения нелинейного закона управления на основе метода линеаризации обратной связью. Проведенный анализ работ [188] - [204] позволяет утверждать, что к настоящему моменту решение задачи о нелокальной стабилизации нестационарных программных движений нелинейных механических систем с неточно известными параметрами без измерения скоростей далеко от завершения.

В первой главе диссертации представлены исследования относительно уравнений с запаздыванием. Результаты, полученные в первой главе далее применяются для построения управления манипуляторами во второй и третьей главах.

Во второй главе строится и обосновывается управление двухзвенным манипулятором, моделируемым в виде системы связанных твёрдых тел. Рассматривается модель манипулятора, описываемая уравнениями Лагранжа 2-го рода. В первом параграфе исследуется поведение манипулятора без учёта динамики приводов, расположенных в шарнирах и приводящих манипулятор в движение. Во втором параграфе система рассматривается с учётом динамики приводов.

Третья глава начинается с построения модели, описывающей поведения трехзвенного манипулятора, имеющего 3 степени свободы, не учитывающей действия электрических приводов. Во втором параграфе рассматривается модель манипулятора с приводами.

Приложение содержит компьютерную модель динамики трехзвенного манипулятора и реализацию данной модели на языке высокого уровня Java. Представленная программа позволяет задавать закон управления в аналитическом виде, в том числе в виде определенных интегралов с переменным верхним пределом.

2 Предельные уравнения и устойчивость

Пусть R^p — линейное действительное пространство p — векторов x с нормой $|x|, R$ — действительная ось, $h > 0$ — заданное действительное число, C — банахово пространство непрерывных функций $\varphi : [-h, 0] \to R^p$ с нормой $\|\varphi\| = max(|\varphi(s)|, -h \leqslant s \leqslant 0)$. Для непрерывной функции $x : [\alpha - h, \beta) \to R^p(\alpha, \beta \in R, \alpha < \beta)$ и каждого $t \in [\alpha, \beta)$ функцию $x_t \in C$ определим равенством $x_t(s) = x(t+s)(-h \leqslant s \leqslant 0)$, под $\dot{x}(t)$ будем понимать правостороннюю производную.

Рассмотрим неавтономное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{2.1}$$

где $f : R \times C_H \to R^p$ - некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему предположению.

Предположение 2.1 *Для каждого числа* r, $0 < r < H$, *существует такое число* $m_r > 0$ *что выполняется неравенство*

$$|f(t, \varphi)| \leqslant m_r, \forall \varphi \in \bar{C}_r. \tag{2.2}$$

Пусть выполняется I.2.1 выполнено и $\{r_n\}$ — последовательность чисел такая, что $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$, $r_n \to H$ при $n \to \infty$. Определим для всех r_i множество $K_i \subset C$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\varphi(s)| \leqslant r_i, \qquad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leqslant m_{r_i}|s_2 - s_1|.$$

Множество K_i очевидно, будет компактом. Положим $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Рассмотрим F - множество всех непрерывных функций f, определенных на $R \times \Gamma$, со значениями в R^p. Через f^τ обозначим сдвиг функции f, $f^\tau(t,\varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Для $f \in F$ семейство сдвигов $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R\}$ будет являтся подмножеством F.

Дадим определение сходимости в F как равномерной на каждом компакте $K' \subset R \times \Gamma$: последовательность $\{f_n \in F\}$ сходится к $f \in F$, если $\forall K' \subset R \times \Gamma$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $|f_n(t,\varphi) - f(t,\varphi)| < \varepsilon$, при $n > N = N(\varepsilon)$ и $(t,\varphi) \in K'$.

В силу определения области Γ эта сходимость метризуема: для всех n определим для двух функций f_1, $f_2 \in F$ полунорму $\|\cdot\|_n$ и соответствующую псевдометрику ρ_n следующим образом

$$\|f\|_n = \sup\{|f(t,\varphi)|, \forall (t,\varphi) \in {K'}_n\},$$

$$\rho_n(f_1,f_2) = \frac{\|f_2 - f_1\|_n}{1 + \|f_2 - f_1\|_n},$$

где ${K'}_n = [0,n] \times K_n$, $n = 1,2,\ldots$ (K_n определено выше).

Определим расстояние между функциями $f_1, f_2 \in F$ как

$$\rho(f_1,f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f_1,f_2). \tag{2.3}$$

Можно убедиться, что при этому будут выполнены все аксиомы метрического пространства. И пространство F будет полным по отношению к введенной метрике.

Допустим, что правая часть (2.1) удовлетворяет также следующему предположению.

Предположение 2.2 *Для любого $K \subset C_H$ (K - компакт) функция $f = f(t,\varphi)$ равномерно непрерывна по $(t,\varphi) \in R \times K$, т.е. $\forall K \subset C_H$ и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для любых $(t,\varphi) \in R \times K$, $(t_1,\varphi_1),(t_2,\varphi_2) \in R \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\varphi_1,\varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, выполняются неравенства*

$$|f(t_2,\varphi_2) - f(t_1,\varphi_1)| < \varepsilon. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1 *При условии выполнения предположений I.2.1 и I.2.2 семейство сдвигов $\{f^\tau : \tau \in R\}$ предкомпактно в F.*

Доказательство леммы следует непосредственно из (2.4), построения F и соотношения

$$|f^\tau(t_2,\varphi_2) - f^\tau(t_1,\varphi_1)| = |f(\tau + t_2,\varphi_2) - f(\tau + t_1,\varphi_1)|.$$

Определение 2.1 *Функция $f^* : R \times \Gamma \to R^p$ называется предельной к f, если существует последовательность t_n такая, что $f^{(n)}(t,\varphi) = f(t_n + t,\varphi)$ сходится к $f^*(t,\varphi)$ при $t \to \infty$ в F. Замыкание семейства $\{f^\tau : \tau \in R\}$ в F называется оболочкой $S^+(f)$. Уравнение*

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t) \tag{2.5}$$

называется предельным к (2.1).

При условиях (2.2) и (2.4) уравнение (2.1) является предкомпактным.

Предположение 2.3 *Для любого компактного множества* $K \subset C_H$ *функция* $f = f(t, \varphi)$ *удовлетворяет условию Липшица т.е,* $\forall K \subset C_H$ *существует* $m = m(K)$, *такое, что для любых* $t \in R$; $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ *будет выполнено неравенство*

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leqslant m\|\varphi_2 - \varphi_1\|. \tag{2.6}$$

При выполнении условия (2.6), каждая предельная функция $f^*(t, \varphi)$ также будет удовлетворять аналогичному условию Липшица относительно компакта $K \subset \Gamma$.

Вследствие этого получим, что при предположении I.2.3 решения уравнения (2.1) при начальном условии $(t, \varphi) \in R \times C_H$ и уравнения (2.5) для $(t, \varphi) \in R \times \Gamma$ будут единственными.

Связь между решениями уравнений (2.1) и (2.5) определяется следующей теоремой:

Теорема 2.1 *Пусть функция* $f^* : R \times \Gamma \to R^p$ *есть предельная к* f *в* F *относительно последовательности* $t_n \to +\infty$, *а последовательности* $\{\alpha_n \in\}$ *и* $\{\varphi_n \in F\}$ *таковы, что* $\alpha_n \to \alpha \in$, $\varphi_n \to \varphi \in \Gamma$ *при* $n \to \infty$. *Пусть* $x = x(t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ *есть решения уравнения (2.1), а* $y(t, \alpha, \varphi)$ *есть решение уравнения* $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$, *определенное для* $t \in [\alpha - h, \beta)$.

Тогда последовательность функций $y^n(t) = x(t_n + t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ *сходится к* $y(t, \alpha, \varphi)$ *равномерно по* $t \in [\alpha - h + \varepsilon, \gamma]$ *для малого* $\varepsilon > 0$ *(* $\varepsilon = 0$ *при* $\{\alpha_n = \alpha\}$ *) и каждого* γ, $\alpha < \gamma < \beta$.

Теорема 2.2 *Пусть решение (2.1)* $x = x(t, \alpha, \varphi)$ *ограничено,* $|x(t, \alpha, \varphi)| \leqslant r < H$ *для всех* $t \geqslant \alpha - h$. *Тогда множество* $\omega^+(\alpha, \varphi)$ *полуквазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений* $\{\dot{x} = f^*(t, x_t)\}$, *а именно, для каждой точки* $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ *существует предельное уравнение* $\dot{x} = f^*(t, x_t)$, *такое, что точки его решения* $y(t, 0, \psi)$ *в пространстве* C *содержатся в* $\omega^+(\alpha, \varphi)$, $\{y_t(0, \psi), t \in R\} \subset \omega^+(\alpha, \varphi)$.

Пусть $V : R^+ \times C_H \to R$ — непрерывный функционал Ляпунова и $x = x(t, \alpha, \varphi)$ — решение уравнения. Функция $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$ представляет собой непрерывную функцию времени $t \geqslant \alpha$.

Верхней правосторонней производной от V вдоль решения $x(t, \alpha, \varphi)$ называется значение $\dot{V}^+(t, x_t(\alpha, \varphi)) = \lim\limits_{\Delta t \to 0^+} \sup \frac{1}{\Delta t}[V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(\alpha, \varphi)) - V(t, x_t(\alpha, \varphi))]$

Основным используемым свойством при этом определении и условии $\dot{V}(t, \varphi) \leqslant -W(t, \varphi) \leqslant 0$ является невозрастание функции $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$ для всех $t \geqslant \alpha$.

Определение 2.2 *Пусть* $t_n \to +\infty$ *есть некоторая последовательность. Для каждого* $t \in R$ *и* $c \in R$ *определим множество* $V_\infty^{-1}(t, c) \subset C_H$ *следующим образом: точка* $\varphi \in V_\infty^{-1}(t, c)$, *если существуют последовательность* $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ *и последовательность* $\{\varphi_k \in \Gamma, \varphi_k \to \varphi\}$, *такие, что*

$$\lim_{k \to \infty} V(t_{n_k} + t, \varphi_k) = c. \tag{2.7}$$

Определение 2.3 *Будем говорить, что отображение* $u : (\alpha, \beta) \to C_H$ *или* $u : R \to C_H$ *принадлежит множеству* $\{V_\infty^{-1}(t, c), c = c_0 = const\}$, *если для любого* $\gamma > 0$ *(соответственно для любого* $T > 0$ *) существуют последовательность*

$\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ *и последовательность непрерывных отображений* $u_k(t)$, *такие, что* $\{u_k(t)\}$ *сходится к* $u(t)$ *равномерно по* $t \in [\alpha+\gamma, \beta-\gamma]$ *(соответственно по* $t \in [-T, T]$ *), таким образом, что*

$$\lim_{k\to\infty} V(t_{n_k}+t, u_k(t)) = c_0. \tag{2.8}$$

Допустим, что производная $\dot V(t,\varphi)$ оценивается неравенством

$$\dot V(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0, \tag{2.9}$$

где функционал $W = W(t,\varphi)$ ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве $R\times K$, т.е. для каждого компактного множества $K \subset C_H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m = m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такие, что имеют место неравенства

$$W(t,\varphi) \leqslant m, \qquad |W(t_2,\varphi_2) - W(t_1,\varphi_1)| \leqslant \varepsilon \tag{2.10}$$

для всех $(t,\varphi) \in R\times K$; (t_1,φ_1), $(t_2,\varphi_2) \in R\times K$: $|t_2-t_1| \leqslant \delta$, $\|\varphi_2-\varphi_1\| \leqslant \delta$. Как и в случае f, при этих условиях семейство сдвигов $\{W^\tau(t,\varphi) = W(t+\tau,\varphi), \tau \in\}$ предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций $F_W = \{W : R\times\Gamma \to R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

Определение 2.4 *Функция* $W^* \subset F_W$ *есть предельная к* W, *если существует* $t_n \to +\infty$, *такая, что последовательность* $\{W_n(t,\varphi) = W(t_n+t,\varphi)\}$ *сходится к* W^* *в* F_W.

Определение 2.5 *Будем говорить, что отображение* $u : (\alpha,\beta) \to C_H$ $(u : R \to C_H)$ *принадлежит множеству* $\{\varphi \in C_H : W(t,\varphi) = 0\}$, *если тождество* $W(t,u(t)) \equiv 0$ *выполняется для всех* $t \in (\alpha,\beta)$ *(соответственно для всех* $t \in R$ *),* $u(t) \in \{W(t,\varphi)=0\}$ *для* $t \in (\alpha,\beta)$ *и (для всех* $t\in R$ *).*

Определение 2.6 *Пусть предельный функционал* $W^*(t,\varphi)$ *задается согласно определению I.2.4 относительно некоторой последовательности* $t_n \to +\infty$. *Множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$, *определяемое этой же последовательностью* $t_n \to +\infty$ *согласно определению I.2.5, назовем соответствующим* $W^*(t,\varphi)$.

Рассмотрим задачу об определении свойств устойчивости уравнения (2.1) на основе функционала Ляпунова со знакопостоянной производной в предположениях (2.4) и (2.6) предкомпактности (2.1), существования семейства предельных уравнений $\{\dot x = g(t,x_t)\}$ и единственности решений.

Пусть $V = R^+\times C_H \to R$ есть непрерывный функционал, производная которого удовлетворяет неравенству (2.9). Введем следующее

Определение 2.7 *Функции* $f^* \in F$ *и* $W^* \in F_W$ *образуют предельную пару* (f^*, W^*), *если они являются предельными к* f *и* W *для одной и той же последовательности* $t_n \to +\infty$. *Множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$, *определяемое в соответствии этой же последовательности* $t_n \to +\infty$, *есть соответствующее* (f^*, W^*).

Теорема 2.3 *Предположим, что:*

1) существует непрерывный функционал $V : R\times C_H \to R$, *ограниченный снизу на каждом компакте* $K \subset C_H$, $V(t,\varphi) \geqslant m(K)$ *для всех* $(t,\varphi) \in R\times K$, *и такой, что* $\dot V(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0$ *для всех* $(t,\varphi) \in R\times C_H$;

2) решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ *уравнения (2.1) ограничено,* $|x(t,\alpha,\varphi)| \leqslant H_1 < H$ *для всех* $t \geqslant \alpha - h$.

Тогда имеется $c = c_0 \geqslant m$, *при котором для каждой предельной точки* $\psi \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ *существуют предельная пара* (f^*, W^*) *и соответствующее множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$, *решение* $y = y(t)$, $y_0 = \psi$, *уравнения* $\dot{x} = f^*(t,x_t)$, *такие, что* $y_t \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ *и* $y_t \subset \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = \mathrm{const}\} \bigcap \{\mathrm{W^*(t,\varphi) = 0}\}$ *для всех* $t \in R$.

Определение 2.8 *Множество* $M(t) \subset C_H$ *не содержит решений уравнения* $\dot{x}(t) = f^*(t,x_t)$, *если для каждой точки* $\psi \in M(\alpha)$ *соответствующее решение* $y(t,\alpha,\psi)$ *таково, что при некотором* $\beta \in R$ *имеем* $y_\beta(\alpha,\psi) \notin M(\beta)$.

Теорема 2.4 *Если в условиях теоремы I.2.3 предположить также, что существует последовательность* $t_n \to +\infty$, *определяемые которой предельная пара* (g_0, U_0) *и множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$ *будут такими, что для каждого* $c_0 > c_1$ *множество* $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = \mathrm{const} > \mathrm{c_1}\} \bigcap \{\mathrm{U_0(t,\varphi) = 0}\}$ *не содержит решений* $\dot{x}(t) = g_0(t,x_t)$, *то в дополнение к выводу теоремы I.2.3 имеем также соотношение* $\lim\limits_{n\to\infty} V(t, x_t(\alpha,\varphi_n))$.

Перейдем к исследованию асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (2.1), полагая, что $f(t,0) \equiv 0$.

Теорема 2.5 *Предположим, что:*

1) существует функционал $V : R^+ \times C_{H_1} \to R^+$, $(0 < H_1 < H)$, *такой, что* $V(t,0) = 0$, $V(t,\varphi) \geqslant a(|\varphi(0)|)$, $\dot{V}(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0$ *для всех* $(t,\varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$;

2) последовательность $t_n \to +\infty$ *такова, что определяемые которой предельная пара* (g_0, U_0) *и множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$ *будут такими, что множество* $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 > 0\} \bigcap \{U_0(t,\varphi) = 0\}$ *не содержит решений уравнения* $\dot{x} = g_0(t,x_t)$.

Тогда решение (2.1) $x = 0$ *асимптотически устойчиво равномерно по* φ.

Значительный интерес представляет следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 2.6 *Предположим, что:*

1) существует функционал $V : R \times C_{H_1} \to$ $(0 < H_1 < H)$, *такой, что* $V(t,0) = 0$, $a_1(|\varphi(0)|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant a_2(\|\varphi\|)$, $\dot{V}^+(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0$ *для всех* $(t,\varphi) \in R \times C_{H_1}$;

2) для каждой предельной пары (g, U) *множество* $\{U(t,\varphi) = 0\}$ *не содержит решения уравнения* $\dot{x}(t) = g(t,x_t)$, *кроме нулевого.*

Тогда решение (2.1) $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво.*

Глава II

Глава 2

1 Постановка задачи управления двухзвенным манипулятором

Рассмотрим математическую модель двухзвенного манипулятора. Манипулятор состоит из неподвижного основания и двух абсолютно жестких звеньев G_1, G_2 . Элементы конструкции соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1, и O_2 таким образом, что оба звена могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2. Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2 .

Введем обозначения: $q_i (i = 1, 2)$ — углы поворотов звеньев манипулятора; l_{q_i} — длина отрезка O_iC_i; l_1 — длина отрезка O_2C_2; m_i — масса i -го звена; I_i — момент инерции i -го звена относительно оси шарнира O_i; g — ускорение свободного падения.

Выражение для кинетичиской энергии манипулятора имеет в таком случае следующий вид:

$$T = \frac{1}{2} I_1 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} m_2 l_1^2 \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} I_2 \dot{q}_2^2 + m_2 l_1 l_{q_2} \cos(q_2 - q_1)\dot{q}_1 \dot{q}_2$$

Составим уравнения Лагранжа второго рода:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1}) - \frac{\partial T}{\partial q_1} = M_1 + U_1, \\ \frac{d}{dt}(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2}) - \frac{\partial T}{\partial q_2} = M_2 + U_2, \end{cases}$$

где M_i — момент, создаваемый силой тяжести в i -м шарнире, $M_1 = (m_1 l_{g_1} + m_2 l_1) g \sin q_1, M_2 = m_2 l_{q_2} g \sin q_2, U_i$ — управляющие воздействия.

Из выражения для кинетической энергии T находим уравнения движения

$$\begin{cases} (I_1 + m_2 l_1^2)\ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_2 - m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_2^2 = \\ = (m_1 l_{g_1} + m_2 l_1) g \sin q_1 + U_1, \\ I_2 \ddot{q}_2 + m_2 l_1 l_{g_2} \cos(q_2 - q_1)\ddot{q}_1 + m_2 l_1 l_{g_2} \sin(q_2 - q_1)\dot{q}_1^2 = m_2 l_{g_2} g \sin q_2 + U_2. \end{cases}$$

Пусть $q = q(q_1, q_2)^T$ — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и $X = (q^0(t), \dot{q}^0(t)) : [t_0, +\infty) \to R^4, \|q^0(t)\| \leqslant g_0, \|\dot{q}^0(t)\| \leqslant g_1, \|\ddot{q}^0(t)\| \leqslant g_2$ есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q = q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$. Символом $\|\|$ обозначена евклидова норма вектора.

Пусть $(q^0(t), \dot q^0(t)) \in X$ — какое-либо программное движение, реализуемое программным управлением $U = U^0(t)$. Введем возмущения $x = q - q^0(t), \dot x = \dot q - \dot q^0(t)$
и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:

$$A^{(1)}(t,x)\ddot x = \dot x^T C^{(1)}(t,x)\dot x + Q^{(1)}(t,x) + Q^{(2)}(t,x,\dot x) + U^{(1)}$$
$$A^{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} I_1 + m_2 l_1^2 & m_2 l_1 l_{g_2}\cos(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) \\ m_2 l_1 l_{g_2}\cos(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) & I_2 \end{pmatrix}$$

$$C^{(1)}(t,x) = (C^{(1)}_{(1)}(t,x), C^{(1)}_{(2)}), Q^{(1)}(t,x) = F(t,x)p(x), Q^{(2)}(t,x,\dot x) = D(t,x)\dot x$$

,

$$C^{(1)}_{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & m_2 l_1 l_{g_2}\sin(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) \end{pmatrix},$$
$$C^{(2)}_{(1)}(t,x) = \begin{pmatrix} -m_2 l_1 l_{g_2}\sin(q_2^0(t) - q_1^0(t) + x_2 - x_1) & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$F(t,x) = \begin{pmatrix} f_{11}(t,x) & f_{12}(t,x) \\ f_{21}(t,x) & f_{22}(t,x) \end{pmatrix},$$
$$p(x) = \begin{pmatrix} \sin(x_1/2) \\ \sin(x_2/2) \end{pmatrix},$$
$$D(t,x) = \begin{pmatrix} 0 & c^{(1)}_{22(1)}(t,x)\dot q_2^0(t) \\ c^{(1)}_{11(1)}(t,x)\dot q_1^0(t) & 0 \end{pmatrix},$$
$$f_{11}(t,x) = 2m_2 l_1 l_{g_2}\cos(x_2/2)(\ddot q_2^0(t)\sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) -$$
$$-(\dot q_2^0(t))^2\cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2)) + 2g(m_1 l_{g_2} + m_2 l_2)\cos(q_1^0(t) + x_1/2)$$
$$f_{12}(t,x) = -2m_2 l_1 l_{g_2}\cos(x_1/2)(\ddot q_2^0(t)\sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) +$$
$$+(\dot q_2^0(t))^2\cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2))$$
$$f_{21}(t,x) = 2m_2 l_1 l_{g_2}\cos(x_2/2)(\ddot q_1^0(t)\sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) +$$
$$+(\dot q_2^0(t))^2\cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2))$$
$$f_{22}(t,x) = -2m_2 l_1 l_{g_2}\cos(x_1/2)(\ddot q_1^0(t)\sin(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2) -$$
$$-(\dot q_2^0(t))^2\cos(q_1^0(t) - q_2^0(t) + (x_1 - x_2)/2)) + 2g m_2 l_{g_2}\cos(q_2^0(t) + x_2/2)$$
$$U^{(1)} = U - U^0(t)$$

Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $U^{(1)} = U^{(1)}(t,x,\dot x)$, $U^{(1)}(t,0,0) \equiv 0$, при котором бы невозмущенное движение $\dot x = x = 0$ системы (2) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иными словами, управление $U = U^0(t) + U^{(1)}(t, q - q^0(t), \dot q - \dot q^0(t))$
обеспечивало бы стабилизацию программного движения $(q^0(t), \dot q^0(t)) \in X$ системы (1).

Рассмотрим решение задачи стабилизации в области $G = (x,\dot x) \in R^4 : \|x\| < \epsilon, \|\dot x\| < \epsilon, \epsilon = const > 0$ с помощью непрерывного управления вида

U $^{(1)}(x,\dot x) = B(\dot x + p(x))$

где $B \in R^{2\times 2}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению. Возьмем для системы II.1 вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)'$ с коэффициентами вида $V^1 = \|p(x)\|, V^2 = \sqrt{(\dot x + p(x))'^{A^{(1)}(t,x)(\dot x + p(x))}}$.

Вычисляя производную по времени вектор-функции Ляпунова V в силу системы (2), получим следующие оценки:

$$\dot{V}^1 \leqslant -mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda_1}, \dot{V}^2 lem_2 V^1 - \mu_2 V^2 + m_3 (V^1)^2 + m_4 (V^2)^2 + m_5 V^1 V^2$$

,

где положительные постоянные $\mu_1, \mu_2, \lambda_1, m_i (i = 1, 2, ..., 5)$ определяются из следующих условий:

$$\lambda_1^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 - \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2}$$

$$\lambda_2^2 = \frac{I_1 + m_2 l_1^2 + I_2 + \sqrt{(I_1 + m_2 l_1^2 - I_2)^2} + 4(m_2 l_1 l_{g_2})^2}{2}$$

$\mu_1 = \frac{1}{2} \cos(frac\epsilon 2), m_1 = \frac{1}{2}, m_2 = \max \frac{\lambda_2^2 + 2\sqrt{\lambda_{max}[(D-F)'(D-F)]}}{2\lambda_1}, m_3 = \frac{m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, m_4 = \frac{2 m_2 l_1 l_{g_2}}{\lambda_1}, m_5 = \frac{3m_2 l}{\lambda}$

Здесь $\lambda_m ax$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (2) можно построить следующую систему сравнения:

$$\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda_1} u^2, \dot{u}^2 = m_2 u^1 - \mu_2 u^2 + m_3 (u^1)^2 + m_4 (u^2)^2 + m_5 u^1 u^2$$

Согласно теореме сравнения об асимптотической устойчивости [5] из свойства асимптотической устойчивости нулевого решения системы сравнения II.1 следует свойство равномерной асимптотической устойчивости нулевого решения системы II.1. Получим условие асимптотической устойчивости нулевого решения системы II.1 с областью притяжения $(u^1, u^2) \in R^2 : 0 \leqslant u^1 \leqslant \delta_1 = const > 0, 0 \leqslant u^2 \leqslant \delta_2 = const > 0$. Пусть найдется такое число $\gamma > 0$, что выполняются соотношения:

$$\gamma = \frac{\delta_2 m_1}{\delta_1 \lambda_1 \mu_1}, \mu_2 > \frac{m_1}{\gamma \lambda_1 \mu_1}(m_2 + \delta_1 m_3) + m_4 \delta_2 + m_5 \delta_1$$

Тогда можно показать, что функция $\widetilde{u}(t) = maxu^1(t), \delta_1 u^2(t)/\delta_2$ будет монотонно стремиться к нулю при $t \to \infty$, и, значит, нулевое решение системы сравнения II.1 будет асимптотически устойчиво. При невозможности практической реализации программного управления стабилизацию программного движения можно осуществить при помощи разрывного управления вида

$$U^{(1)}(x, \dot{x}) = Bsign(\dot{x} + p(x))$$

Численное моделирование движения манипулятора при действии управлений II.1 и II.1 проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории

$m_1 = 0,5, m_2 = 0,3, l_1 = 0,5, l_2 = 0,5, l_{g_1} = 0,25, l_{g_2} = 0,3, I_1 = 0,01*^2, I_2 = 0,006*^2, q_1^0(t) = \sin(0,5t)$

На рисунках 2 и 3 представлены результаты моделирования при управлениях II.1 и II.1 соответственно.

Глава III

Глава 3

1 Задача управления трехзвенным манипулятором

Рассмотрим математическую модель трехзвенного манипулятора, состоящую из трех абсолютно жестких звеньев G_1, G_2, G_3 , представляющих собой однородные стержни. Манипулятор установлен на неподвижном основании, на которое опирается звено G_1 . Звено G_1 таким образом, может совершать только вращения вокруг вертикальной оси. Звенья соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами O_1 , и O_2 таким образом, что звенья G_2 и G_3 могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс C_1 звена G_1 лежит на луче O_1O_2 . Положение центра масс C_2 звена G_2 не совпадает с положением шарнира O_2 . На конце звена G_3 находится груз, перемещаемый манипулятором.

Введем обозначения: $q_i(i = 1,2,3)$ — углы поворотов звеньев манипулятора; $Q_i(i = 1,2,3)$ — управляющие моменты относительно осей соответствующих звеньев; l_i — длина i -го звена; m_i — масса i -го звена; m_0 — масса перемещаемого груза; $m_30 = m_0 + m_3$; J_{01} — момент инерции первого звена относительно оси вращения; r_2 и r_3 — соответственно расстояния от центров тяжести второго звена и третьего звена с перемещаемым грузом относительно осей соответствующих звеньев; g — ускорение свободного падения. Уравнения движения манипулятора имеют вид:

$$\begin{cases} (J_{01} + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2)\ddot{q}_1 + \\ +2(m_2 r_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 \cos q_2)\dot{q}_1\dot{q}_2 + \\ +2m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1 \dot{q}_3 = Q_1, \\ (m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2)\ddot{q}_2 + \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)\ddot{q}_3 + \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_3^2 - \\ -(m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2)\cos q_2 \dot{q}_1^2 + (m_2 r_2 + m_{30} l_2) g \sin q_2 = Q_2, \\ \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)\ddot{q}_2 + m_{30} r_3^2 \ddot{q}_3 - \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_2^2 - \\ -m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1^2 + m_{30} g r_3 \sin q_3 = Q_3. \end{cases}$$

Пусть $q = (q_1, q_2, q_3)$ — вектор обобщенных координат представленной выше системы. Таким образом, уравнения движения можно представить в следующей векторно-матричной форме: $A(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + K\dot{q} = Q$ где

$$A(q) = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

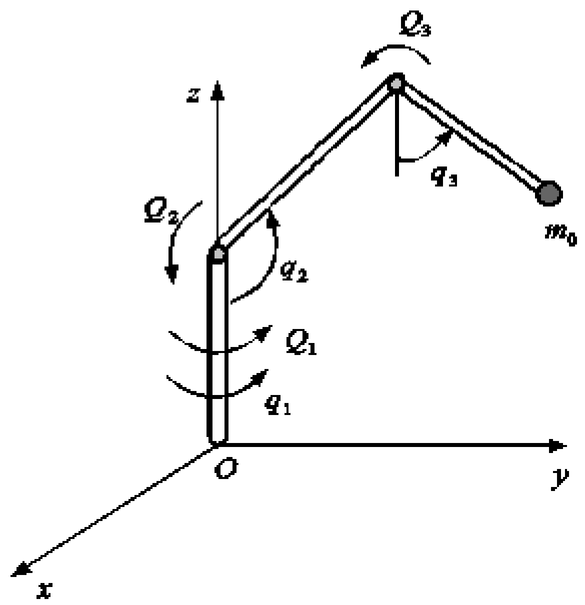

Рис. III.1: Модель трехзвенного манипулятора

Элеменыт матрицы инерции $A(q)$:

$$a_{11} = J_{01} + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2$$

$$a_{22} = m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2$$

$$a_{23} = \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3)$$

$$a_{32} = a_{23}$$

$$a_{33} = m_{30} r_3^2$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} c_{11} & 0 & c_{13} \\ c_{21} & 0 & 0 \\ c_{31} & c_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

Элементы матрицы $C(q, \dot{q})$:

$$c_{11} = 2(m_2 r_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 \cos q_2)\dot{q}_2$$

$$c_{13} = 2m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_3$$

$$c_{21} = -(m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2) \cos q_2 \dot{q}_1$$

$$c_{31} = -m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) r_3 \cos q_3 \dot{q}_1$$

$$c_{32} = -\frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3)\dot{q}_2$$

$A(q)$ — положительно определенная матрица инерции системы.

2 Построение управления

Пусть $q = (q_1, q_2, q_3)^T$ — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и $X = q^0(t) : [t_0, +\infty) \to R^3, \|q^0(t)\| \leqslant q_0, \|\dot{q}^0\| \leqslant g_1, \|q^0(t)\| \leqslant q_0, \|\ddot{q}^0\| \leqslant g_2$ есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций $q = q^0(t)$ с ограниченными производными при $t \in [t_0, +\infty)$. Символом $\|\|$ обозначена евклидова норма вектора. Уравнения движения (1) можно представить в следующей векторно-матричной форме: $A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K\dot{q} = Q$, (2) где $A(q)$ — положительно определенная матрица инерции системы, $C(q, \dot{q}) = \sum_{i=1}^{3} \dot{q}_i C_{(i)}(q)$, , j, k -ый элемент $c_{(i)jk}(q)$ матрицы $C_{(i)}(q)$ определяется в виде $c_{(i)jk}(q) = \frac{1}{2}(\frac{\partial a_{ij}}{\partial q_k} + \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_i} - \frac{\partial a_{ij}}{\partial q_j})$; K — матрица коэффициентов моментов сил вязкого трения, действующих в системе. Система (2) имеет следующее свойство: матрица $\dot{A}(q(t)) - 2C(q(t), \dot{q}(t))$ является кососимметричной. Пусть $q^0(t) \in X$ — какое-либо программное движение системы (2), реализуемое программным управлением $Q = Q^{(0)}(t)$, т.е. имеет место тождество $A(q^0(t))\ddot{q}^0(t) + C(q^0(t), \dot{q}^0(t))\dot{q}^0(t) + K\dot{q}^0(t) \equiv Q^{(0)}(t)$. Введем возмущения $x = q - q^0(t)$ и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде: $A^{(1)}(t, x)\ddot{x} + C^{(1)}(t, x, \dot{x})\dot{x} + K\dot{x} = Q^{(1)}(t, x, \dot{x}) + Q^{(2)}(t, x, \dot{x})$,(3) где $A^{(1)}(t, x) = A(x + q^0(t))$, $C^{(1)}(t, x, \dot{x}) = C(x + q^0(t), \dot{x} + \dot{q}^0(t))$, $Q^{(1)}(t, x, \dot{x}) = Q - Q^{(0)}(t)$, $Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) = (A^{(1)}(t, 0) - A^{(1)}(t, x))\ddot{q}^0(t) + (C^{(1)}(t, 0, 0) - C^{(1)}(t, x, \dot{x}))\dot{q}^0(t)$. Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия $Q^{(1)}(t, x, \dot{x})$, при котором невозмущенное движение $\dot{x} = x = 0$ системы (3) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иначе, управление $Q = Q^{(1)}(t, q - q^{(0)}(t), \dot{q} - \dot{q}^{(0)}) + Q^{(0)}(t)$ обеспечивало бы стабилизацию программного движения системы (2).

2 Синтез управления в задаче стабилизации программного движения манипулятора Рассмотрим решение задачи стабилизации в области $G = (x, \dot{x}) \in R^6 : \|x\| < \epsilon, \|\dot{x}\| < \epsilon, \epsilon = const > 0$ с помощью непрерывного управления вида $Q^{(1)}(x, \dot{}) = B(\dot{x} + p(x))$, (4) где $B \in R^{3\times 3}$ есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению; $p(x)$ — непрерывно дифференцируемая вектор-функция, такая, что $\|p(x)\| \geqslant p_0(x) > 0, p_0(0) = 0$. Возьмем для системы (3) вектор-функцию Ляпунова $V = (V^1, V^2)^T$ с коэффициентами вида $V^1 = \|p(x)\|, V^2 = \sqrt{(\dot{x} + p(x))^T A^{(1)}(t, x)(\dot{x} + p(x))}$.

Вычисляя производные по времени от квадратов компонент вектор-функции Ляпунова в силу системы (3), получим $\frac{d}{dt}(V^1(x))^2 = 2V^1\dot{V}^1 = 2p^T\dot{p} = 2p^T\frac{\partial p}{\partial x}\dot{x} = -2p^T\frac{\partial p}{\partial x}p + 2p^T\frac{\partial p}{\partial x}(\dot{x} + p)$,

$$\frac{d}{dt}(V^2(x))^2 = 2V^2\dot{V}^2 = 2(\ddot{x}+\dot{p})^T A^{(1)}(\dot{x}+p)+(\dot{x}+p)^T \dot{A}^{(1)}(\dot{x}+p) = 2(-C^{(1)}(t, x, \dot{x})\dot{x} - R\dot{x} + Q^{(1)}(x, \dot{x}) + Q^{(2)}$$

.

Отсюда получим следующие оценки: $\dot{V}^1 \leqslant -\mu_1 V^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)}V^2, \dot{V}^2 \leqslant \frac{m_2}{\lambda(t,x)}V^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)}$, где положительные постоянные μ_2, μ_2, m_1, m_2 и функция $\lambda(t, x)$ определяются из следующих условий: $p^T\frac{\partial p}{\partial x}p \geqslant \mu_1\|p\|^2, \|\frac{\partial p}{\partial x}\| \leqslant m_1, \lambda(t, x)\|\dot{x} + p\| = V^2$,

$$\|Q^{(2)}(t, x, \dot{x}) \leqslant (m_2 - \|C^{(1)}(t, x, \dot{x}) + K - A^{(1)}(t, x)\frac{\partial p}{\partial x}\|)\|p\|$$

$$\lambda_{max}(B + B^T - K - K^T + A^{(1)}(t, x)\frac{\partial p}{\partial x} + (\frac{\partial p}{\partial x})^T A^{(1)}(t, x)) \leqslant -2\mu_2$$

Здесь $\lambda_m ax()$ есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (3) можно построить следующую систему сравнения: $\dot{u}^1 = -\mu_1 u^1 + \frac{m_1}{\lambda(t,x)} u^2, \dot{u}^2 = \frac{m_2}{\lambda(t,x)} u^1 - \frac{\mu_2}{\lambda^2(t,x)} u^2$. (5) Согласно теореме сравнения об экспоненциальной устойчивости [5] из свойства экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы сравнения (5) следует аналогичное свойство нулевого решения системы (3). Можно показать, что нулевое решение системы сравнения (5) будет экспоненциально устойчиво при следующем условии $4\mu_1\mu_2 > (m_1/k + m_2 k)^2, k = const > 0$. Численное моделирование движения манипулятора при действии управления (4) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории

$m_2 = 15, m_3 = 2,5, m_0 = 2, l_2 = 1, r_2 = 0,5, r_3 = 0,5, J_{01} = 0,1*^2, q_1^0(t) = 0,2t, q_2^0(t) = 1,5+0,5sin$

На рисунках 2–4 представлены результаты моделирования. Пунктирной линией обозначены составляющие программного движения, а сплошной – реального движения системы.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

[1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 277 с.

[2] Алексеенко Н.В. Устойчивость решений нелинейных почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Известия Вузов. Сер. Математика. 2000. №2. С.3–6.

[3] Ананьевский И.М., Колмановский В.Б. О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1989. №9. С.34–42.

[4] Анашкин О.В. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости для одного класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №7. С.867–875.

[5] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // ПММ. 1979. Т.43. Вып.5. С.796–805.

[6] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // ДАН УзССР. 1980. №7. С.20–22.

[7] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225–232.

[8] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // ПММ. 1984. Т.48. Вып.5. С.707–713.

[9] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений // ПММ. 1987. Т.51. Вып.2. С.253–260.

[10] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // ПММ. 1991. Т.55. Вып.4. С.539–547.

[11] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Изд-во "Наука 1991. С.36–40.

[12] Андреев А.С. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во фМГУ, 1994. 80 с.

[13] Андреев А.С. Об устойчивости неавтономного функционально дифференциального уравнения // Доклады РАН. 1997. Т.356. №7. С.151–153.

[14] Андреев А.С. Об управляемости нестационарной нелинейной системы // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т.10. Вып.1. С.88.

[15] Андреев А.С. Некоторые задачи об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным и неограниченным запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 2003. Вып.1(13). С.3–11.

[16] Андреев А.С. К методу К.П. Персидского в задачах о неустойчивости // Математический журнал. Алматы. 2004. Т.4. №2(12). С.76–82.

[17] Андреев А.С. О стабилизации движения управляемой системы с запаздывающей обратной связью // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т.11. Вып. 3. С. 612–613.

[18] Андреев А.С., Бойкова Т.А. Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости // Механика твердого тела. 2002. Вып.32. С.109–116.

[19] Андреев А.С., Лысяков В.Н. К методу Ляпунова в задаче об устойчивости функционально дифференциального уравнения // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 1996. Вып.1(2). С.5–10.

[20] Андреев А.С., Павликов С.В. Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально дифференциального уравнения // ПММ. 1999. Т.63. Вып.1. С. 3–12.

[21] Андреев А.С., Павликов С.В. Исследование устойчивости функционально-дифференциальных уравнений на основе знакопостоянных функционалов Ляпунова // Труды Средневолжского математического общества. 1999. Т.2(1) С.74–75.

[22] Андреев А.С., Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 2000. Т.68. №3. С.323–331.

[23] Андреев А.С., Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости относительно части переменных // Труды Четвертой Международной научно-практической конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов". (10-12 декабря 2001г., г.Ульяновск). Секция Математики. Ульяновск: УлГУ, 2001. С.15–16.

[24] Андреев А.С., Павликов С.В. К задаче об устойчивости по части переменных функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 2003. Вып.1(13). С.12–21.

[25] Андреев А.С., Павликов С.В. Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Механика твердого тела. 2004. Вып.34. С.112–120.

[26] Андреев А.С., Седова Н.О. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2001. 60 с.

[27] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №4. С.435–440.

[28] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №7. С.876–885.

[29] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости функционально-дифференциального уравнения с периодической правой частью // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 1999. Вып.1(6). С.3–17.

[30] Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 333 с.

[31] Астанов И.С., Белоцерковский С.М., Каганов Б.О., Кочетков Ю.А. О системах интегро-дифференциальных уравнений, описывающих неустановившееся движение тел в сплошной среде // Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18. №9. С.1628–1637.

[32] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

[33] Билашевич И.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Стабилизация динамических систем при наличии запаздываний в канале обратной связи // Автоматика и телемеханика. 1996. №6. С.31–39.

[34] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

[35] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.

[36] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 302 с.

[37] Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.

[38] Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.

[39] Гайшун И.В. Асимптотическая устойчивость одной системы с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1972. Т.8. №5. С. 906–908.

[40] Гайшун И.В., Княжище Л.Б. Теоремы устойчивости уравнений с запаздыванием, использующие немонотонные функционалы Ляпунова // Докл. Ан Беларусии. 1994. Т.38. №3. С.5–8.

[41] Гайшун И.В., Княжище Л.Б. Немонотонные функционалы Ляпунова. Условия устойчивости уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1994. Т.30. №8. С.1291–1298.

[42] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.

[43] Горяченко В.Д. Методы теории устойчивости в динамике ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1971. 264 с.

[44] Горяченко В.Д. Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1977. 296 с.

[45] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.

[46] Дроздов А.Д., Колмановский В.Б., Триджанте Д. Об устойчивости системы хищник-жертва // Автоматика и телемеханика. 1992. №11. С.57–64.

[47] Жиков В.В., Левитан Б.М. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 205 с.

[48] Журавлев В.Ф. Теоретическая механика. М.: Наука, Физматлит, 1997. 320 с.

[49] Калистратова Т.А. Об устойчивости по части переменных систем с запаздыванием // Авт. и телемех. 1986. №5. С.32–37.

[50] Ким А.В. К методу функций Ляпунова для систем с последействием // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск, 1987. С.79–83.

[51] Ким А.В. О методе функционалов Ляпунова для систем с последействием // Авт. и телемех. 1990. №2. С.24–31.

[52] Ким А.В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1992. 142 с.

[53] Ким А.В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. 234 с.

[54] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость уравнений с запаздыванием // Докл. АН Беларуси. 1997. Т.41. №1. С.26–29.

[55] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. I// Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №2. С.189–196.

[56] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. II// Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №8. С.1056–1065.

[57] Княжище Л.Б. Функционалы Ляпунова и условия равномерной асимптотической устойчивости уравнений с запаздыванием // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т.44. №5. С.40–43.

[58] Княжище Л.Б., Щавель Н.А. Немонотонные функционалы Ляпунова и оценки решений диффереуиальных уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1997. Т.33. №2. С.205–211.

[59] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 474 с.

[60] Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с произвольным последействием // Докл. РАН. 1993. Т.331. №4. С.421–424.

[61] Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с последействием и переменными коэффициентами // ПММ. 1995. Т.59. Вып.1. С.71–81.

[62] Колмановский В.Б. Об устойчивости систем с последействием нейтрального типа // ПММ. 1996. Т.60. Вып.2. С.210–222.

[63] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.

[64] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Системы с последействием нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 1984. №1. С.5–35.

[65] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543с.

[66] Кордуняну К., Лакшмикантам В. Уравнения с неограниченным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1985. №7. С.5–44.

[67] Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М.Ляпунова для уравнений с запаздыванием по времени // ПММ. 1956. Т.20. №3. С.315–327.

[68] Красовский Н.Н. Об асимптотической устойчивости систем с последействием // ПММ. 1956. Т.20. №4. С.513–518.

[69] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

[70] Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. №6. С.3–15.

[71] Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости. Доп.4. М.: Наука, 1966. С.475–514.

[72] Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А. Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Наукова думка, 1991. 248 с.

[73] Лакшмикантам В., Мартынюк А.А. Развитие прямого метода Ляпунова для систем с последействием (обзор) // Прикладная механика. 1993. Т.29(39). №2. С.3–15.

[74] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. 271 с.

[75] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

[76] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2-е. М.: Наука, 1966. 530 с.

[77] Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1991. 414 с.

[78] Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А. Устойчивость движения метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990. 256 с.

[79] Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит. 2000. 380 с.

[80] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.

[81] Мышкис А.Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи матем. наук. 1977. Т.32. Вып.2(194). С.173–202.

[82] Мышкис А.Д. Предисловие редактора перевода. В кн.: Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. С.5–6.

[83] Мышкис А.Д., Эльсгольц Л.Э. Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи матем. наук. 1967. Т.22. Вып.2. С.21–57.

[84] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л., Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры. 1949. 550 с.

[85] Новоселов В.С. Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. 239 с.

[86] Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1965. 354 с.

[87] Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т.1. №5. С.605–618.

[88] Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 1996. Вып. 1. Ч.II. С. 46–56.

[89] Павликов С.В. Об устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения второго порядка// Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1996. Вып. 2. С. 32–33

[90] Павликов С.В. О стабилизации управляемых механических систем с обратной связью с запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1997. Вып. 2(4). С. 66–70.

[91] Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 2002. Вып.2(12). С.30–39.

[92] Павликов С.В. Предельные уравнения и функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости по части переменных // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 2003. Вып.1(13). С.63–74.

[93] Павликов С.В. Об управляемости и стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т.10. Вып.1. С.201.

[94] Павликов С.В. О стабилизации движения управляемой системы с запаздыванием // Механика твердого тела. 2005. Вып.34.

[95] Перегудова О.А. К методу сравнения в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1999. Вып.2(7). С.32–36.

[96] Перегудова О.А. Методы сравнения и преобразования в задачах об устойчивости систем с запаздыванием. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 83 с.

[97] Прасолов А.В. О применении функций Ляпунова для исследования неустойчивости решений систем с последействием // Вестник ЛГУ. 1981. Сер.1. 19. С.116–118.

[98] Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т.20. Вып. 4. С. 500–512.

[99] Разумихин Б.С. Устойчивость по первому приближению систем с запаздыванием // ПММ. 1958. Т.22. Вып. 2. С.155–166.

[100] Разумихин Б.С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1960. Т.21. №6. С.740–748.

[101] Разумихин Б.С. Метод исследования устойчивости систем с последействием // Доклады АН СССР. 1966. Т.167. №6. С.1234–1236.

[102] Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988. 106 с.

[103] Резван В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М.: Наука, 1983. 300 с.

[104] Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ. Сер. Мат., механ., физ., астрон., хим. 1957. №4. С.9-16.

[105] Румянцев В.В. Метод функции Ляпунова в теории устойчивости движения // Механика в СССР за 50 лет. Т.1. М.: Наука, 1968. С.7–66.

[106] Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

[107] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

[108] Седова Н.О. Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 2005. Т.8. №3. С.468–472.

[109] Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости движений в некоторых классах с последствием // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 166–174.

[110] Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости и оценке области притяжения в некоторых системах с последействием // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 744–751.

[111] Тереки Й. Экспоненциальная и степенная асимптотическая устойчивость функционально-дифференциальных уравнений. В кн. Развитие и применение метода функций Ляпунова. Новосибирск: Наука, 1992. С.101–107.

[112] Троценко Г.А. Об устойчивости решений почти периодической системы // Механика твердого тела. 2002. Вып. 32. С.129-133.

[113] Хейл Дж. Теория функционально-дифферепнциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

[114] Хусаинов Д.Я. Об экспоненциальной устойчивости линейных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №2. С.357–359.

[115] Хусаинов Д.Я. Экспоненциальная оценка решений линейных систем с запаздыванием при произвольном отклонении аргумента // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №9. С.1631–1633.

[116] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 276 с.

[117] Шестаков А.А. Прямой метод Ляпунова как метод локализации функциями Ляпунова предельных множеств неавтономных динамических процессов (на базе предельных уравнений и динамических систем) // Функции Ляпунова и их применение. Ан СССР. Сибирское отд., Иркутский вычислит. центр. Новосибирск: Наука, 1987. С.14–48.

[118] Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1990. 316 с.

[119] Шиманов С.Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени // ПММ. 1960. Т.24. Вып. 1. С.55–63.

[120] Шиманов С.Н. Устойчивость систем с запаздыванием // Труды II Всес. съезда по теорет. и прикл. механике. Москва, 1964, вып. 1. М.: Наука, 1965. С.170–180.

[121] Щеглов В.А. Устойчивость линейного дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1996. Т.32. №12. С.1665–1669.

[122] Щеглов В.А. Устойчивость решений одного уравнения второго порядка с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №12. С.1710–1713.

[123] Эльсгольц Л.Э. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений // Успехи мат. наук. 1954. Т.9. №4. С.95-112.

[124] Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 127 с.

[125] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

[126] Янушевский Р.Т. Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 416 с.

[127] Andreev A. Sulla stabilitá asintotica ed instabilitá // Rend. Sem. Univ. Padova. 1986. V.75. P.235–245.

[128] Andreev A. On the stability of nonautonomous functional differential equations // Nonlinear Analysis. TMA. 1997. V.30. Part 5. P. 2847–2854.

[129] Andreev A., Khusanov D. On asymptotic stability and nonstability functional-differential equations with periodic right side // Nonlinear oscillations, 2001. V.4. №3. P.290–298.

[130] Andreev A.S., Sedova N.O. On the stability of nonautonomous equations with delay via limiting equtions // Functional Differential Equations. 1998. V.5. №1-2. P. 21–37.

[131] Andreev A., Zappala'G. On stability for perturbed differential equations // Le Natematiche. 1996. V.51. F. I. P. 27–41.

[132] Artstein Z. Topological dinamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V.23. P.216–223.

[133] Artstein Z. The limiting equations of nonautonomous differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V. 25. P.184–202.

[134] Artstein A. Uniform asymptotic stability via the limiting equations // J. Differ. Equat. 1978. V.27. P.172–189.

[135] Becker L.C., Burton T.A., Zhang S. Functional differential equations and Jensen's Inequality // J. of Math. Anal. and Appl. 1989. V.138. N 1. P.135–156.

[136] Bernfeld S.R., Corduneanu C., Ignatyev A.O. On the stability of invariant sets of functional differential equations // Nonlinear Analysis. 2003. V.55. P.641–656.

[137] Burton T.A. Uniform asymptotic stability in functional differential equations Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V.68. P.195–199.

[138] Burton T.A. Stability theory for delay equations // Funkcial. Ekvac. 1979. V. 22. №1. P.67–76.

[139] Burton T.A., Casal A., Somolinos A. Upper and lower bounds for Liapunov functionals // Funkcial. Ekvac. 1989. V. 32. №1. P.23–55.

[140] Burton T.A., Hatvani L. Stability theorems for nonautonomous functional differential equations by Liapunov functionals // Tohoku Math. J. 1989. V.41. P.65–104.

[141] Burton T.A., Hatvani L. On nonuniform asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations // Differential and Integral Equations. 1990. V.3. P.285–293.

[142] Burton T.A., Makay G. Marachkov stability results for functional differential equations // EJQTDE, 1998. №1. P.1–17.

[143] Conley C.C., Miller R.K. Asymptotic stability without iniform stability. Almost periodic coefficients // J. Differ. Equat. 1965. V.1. №1. P.333–336.

[144] Corduneanu C. On partial stability for delay systems // Ann. Polon. Math. 1975. V.29. P.357–362.

[145] Corduneanu C., Ignatyev O.A. Stability of invariant sets of functional differential equations with delay // Nonlinear Func. Anal. and Appl. 2005. №1. P.11–24.

[146] Gyori I., Hartung F. Preservation of stability in delay equations under delay perturbations // Journal of Math. Anal. and Appl. 1998. V. 220. P.290–312.

[147] Haddock J. The "evolution"of invariance principles a la Liapunov's direct method // Advances in nonlinear dynamics. Stability and Control: Theory, Methods and Applications. V.5. 1997. P. 261–272.

[148] Haddock J., Ko Y. Lyapunov-Razumikhin functions and an instability theorem for autonomous functional-differential equations with finite delay // Rocky Mtn. J. Math. 1995. V.25. P. 261–267.

[149] Haddock J., Krisztin T., Terjeki J. Invariance principles for autonomous functional differential equations // J. Integral Equations. 1985. V.10. P.123–136.

[150] Haddock J., Terjéki J. Liapunov-Razumikhin functions and an invariance principle for functional differential equations // J. Differential Equations. 1983. V.48. №1. P.95–122.

[151] Haddock J., Terjéki J. On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay // J. Differential Equations. 1990. V.86. P.1–32.

[152] Haddock J., Zhao J. Instability for autonomous and periodic functional differential equations with finite delay // Funkcialay Ekvacioj. 1996. V.39. P.553–570.

[153] Hale J. A stability theorem for functional-differential equations // Proc. N.A.S. 1963. V.50. P.942–946.

[154] Hale J. Dynamical systems and stability // J. Math. Anal. Appl. 1969. V.26. P.39–59.

[155] Hale J. Functional differential equations with infinite delays // J. of Math.An. and Applic., 1974. V. 48. P.276–293.

[156] Hale J.K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // Funk. Ekv., 1978. V.21. P.11–41.

[157] Hatvani L. On the asymptotic stability of the solutions of functional differential equations // Qualitative theory of differential equations. Colloq. Math. Soc. J.Bolyai. Vol.53. North Holland, Amsterdam. 1990. P.227–238.

[158] Hatvani L. On the asymptotic stability in differential systems by Liapunov direct method // Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysts. Tampa, Florida, August 19-26, 1992. W.de 6., Berlin -N.Y. 1996. P.1341–1348.

[159] Hatvani L. On the asymptotic stability by Lyapunov functionals with semidefinite derivatives // Nonlinear Analysis, TMA. 1997, V.30. №8. P. 4713–4721.

[160] Hatvani L. Annulus arguments in the stability thery for functional differential equations // Differ. and Integral Equations. 1997. V. 10. №5. P. 975–1002.

[161] Hatvani L. On Lyapunov's direct method for nonautonomous fde's // Functional Differential Equations. 1998. V. 5. №3–4. P.315-323.

[162] Hatvani L. On the asymptotic stability for functional differential equations by Lyapunov functionals // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 2001. 47.№7. P.4333–4343.

[163] Hornor W.E. Invariance principles and asymptotic constancy of solutions of precompact functional differential equations // Tohoky Math. J. 1990. V.42. P.217–229.

[164] Ignatyev A.O. On the asymptotic stability in functional differential equations // Proceedings of the American Math. Society. 1999. V.127. №6. P. 1753–1760.

[165] Ignatyev A.O. On the partial equiasymptotic stsbility in functional differential equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2002. V. 268. P.615–628.

[166] Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2001. V.46. P. 1048–1060.

[167] Kato J. Uniform asymptotic stability and total stability // Tohoku Math. Journ. 1970, V.22. P.254–269.

[168] Kato J. On Liapunov–Razumikhin type theorems for functional differential equations // Funkc. Evkac., 1973. V.16. №3. P.225–239.

[169] Kato J. Liapunov's second methods in functional differential equations // Tohoku Math. J. 1980. V. 32. №4. P. 487–492.

[170] Makay G. An example on the asymptotic stability for functional differential equations // Nonl. Anal., TMA// 1994. V.23. P.365–368.

[171] Mao X. Comments on "An improved Razumikhin-type theorem and its Applications"// IEEE Transactions on automatic control. 1997. V. 42. P. 429–430.

[172] Mikolajska Z. Une remarque sur des notes der Razumichin et Krasovskij sur la stabilite asimptotique // Ann. Polon. Math., **22** (1969). P.69–72.

[173] Murakami S. Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations // J. Differ. Equat. 1985. V.59. P.314–335.

[174] Saperstone S.N. Semidynamical system in the infinite dimentional space. N.Y.: Springer – Verlag. 1981. 474 p.

[175] Sedova N. On employment of semi-definite function in stability of delayed equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. V.281, №1. P.307–319.

[176] Sedova N. Razumikhin-type theorems in the problem on instability of nonautonomous equations with finite delay // Funckcialaj Ekvacioj. 2004. V.47. P.187–204.

[177] Seifert G. Liapunov-Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of Volterra type // J. Differential equations. 1974. 16. P.289–297.

[178] Sell G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // Trans. Amer. Math. Soc., 1967. V.22. P.241–283.

[179] Taniguchi T. Asymptotic behavior theorems for non-autonomous functional differential equations via Lyapunov-Razumikhin method // Journal of Math. Analysis and Appl. 1995. V. 189. P.715–730.

[180] Taniguchi T. Asymptotic behavior theorems of solutions of functional differential equations with finite delay // Journal of Math. Analysis and Appl. 1996. V. 199. P.776–786.

[181] Terjéki J. On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations // Annalea Polonici Mathematici. 1979. V. 36. P. 299–314.

[182] Wang Z. Comparison method and stability problem for functional differential equations // Tohoku Math. J. 1983. V.35. P. 349–356.

[183] Wang T. Weakening the condition $W_1(|\,\varphi(\theta)\,|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant W_2(\|\varphi\|)$ for uniform asymptotic stability // Nonl. Anal., TMA. 1994. V.23. №2. P.251–264.

[184] Yorke J.A. Some extensions of Liapunov's second method. – SIAM, Diff. integ. equat., Pa, 1969, p.206–207.

[185] Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method. Tokio: The Math. Soc. of Japan, 1966, 216 p.

[186] Yoshizawa T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost-Periodic Solutions. Applied Math. Sciences, vol. 14, 1975. Springer-Verlag. N.Y. 233 p.

[187] Zhang Bo. Asymptotic stability in functional differential equations by Lyapunov functionals // Trans. Amer. Math. Soc., 1995. V.347. №4. P.1375–1382.

[188] Nicosia S., Tomei P. Robot control by using only joint position measurements // IEEE Trans. Aut. Contr. 1990. V. 35, № 9. P. 1058-1061.

[189] Berghuis H., L?ohnberg P., Nijmeijer H. Tracking control of robots using only position measurements // 30th Conf. on Decision and Control. 1991. Vol. 1. P. 1039-1040.

[190] Kelly R. A simple set-point robot controller by using only position measurements // In Preprint 12th IFAC World Congress, vol. 6, Sydney, 1993, pp. 173–176.

[191] Berghuis H. and Nijmeijer H. Global regulation of robots using only position measurements // Systems and Contr. Letters, vol. 21, 1993, pp. 289–293.

[192] Berghuis H. and Nijmeijer H. A passivity approach to controller-observer design for robots // IEEE Transactions on robotics and automation. 1993. Vol. 9. No 6. P. 740-754.

[193] Loria A., Ortega R. On tracking control of rigid and flexible joints robots // Appl. Math. Comput. Sci. 5(2), 1995, pp.101-113.

[194] Burkov I.V. Stabilization of mechanical systems via bounded control and without velocity measurement //2nd Russian-Swedish Control Conf. St. Petersburg: St. Petersburg Technical Univ. 1995. P. 37-41.

[195] Loria A. Global tracking control of one degree of freedom Euler-Lagrange systems without velocity measurements // European J. Contr., vol. 2, 1996, pp. 144–151.

[196] Бурков И.В. Стабилизация натуральной механической системы без измерения ее скоростей с приложением к управлению твердым телом // Прикладная математика и механика. 1998. Т. 62, Вып. 6. С. 923-933.

[197] Loria A., Nijmeijer H. Bounded output feedback tracking control of fully actuated Euler–Lagrange systems // Systems Control Letters. 1998. 33 (3). P. 151-161.

[198] Calugi F., Robertsson A. and Johansson R. Output feedback adaptive control of robot manipulators using observer backstepping // Proceedings of the 2002 IEEE/RSJ Int. Conference of Intelligent Robots and Systems. Lausanne, Switzerland. 2002. P.2091-2096.

[199] Alonge F., D'Ippolito F., Raimondi F.M. An adaptive control law for robotic manipulator without velocity feedback // Control Engineering Practice. 2003. 11. P. 999-1005.

[200] Dixon W.E., Zergeroglu E. and Dawson D.M. Global robust output feedback tracking control of robot manipulators // Robotica. 2004. Vol. 22. P. 352-357.

[201] Eduardo V. L. Nunes, Liu Hsu and Fernando Lizarralde. Arbitrarily small damping allows global output feedback tracking of a class of Euler-Lagrange systems // American Control Conference Westin Seattle Hotel, Seattle, Washington, USA, June 11-13, 2008. P. 377-382.

[202] Burkov I.V. Stabilization of position of uniform motion of mechanical systems via bounded control and without velocity measurements // 3 - rd IEEE Multti - conference on Systems and Control. St. Petersburg. 2009. P.400-405.

[203] Yarza A., Santibanez V., Moreno-Valenzuela J. Uniform Global Asymptotic Stability of an Adaptive Output Feedback Tracking Controller for Robot Manipulators // Preprints of the 18th IFAC World Congress Milano (Italy) August 28 - September 2, 2011. P. 14590-14595.

[204] Loria A. Observer-less output feedback global tracking control of lossless Lagrangian systems // arXiv preprint arXiv:1307.4659, 2013/7/17.

Научное издание

Андреев Александр Сергеевич

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зав. отделом: Г.А. Углева
Обложка: Н.В.Пенькова
Редактор Л.Г.Соловьева