

Макаров Д.С

КАНДИДАТСКАЯ

Ульяновск

Издательство Ульяновского государственного университета

2016

# Оглавление

<b>I Глава 1</b>	<b>4</b>
1 Предельные уравнения и устойчивость . . . . .	4
<b>II Глава 2</b>	<b>11</b>
1 Задача управления двухзвенным манипулятором . . . . .	11
<b>III Глава 3</b>	<b>13</b>
1 Задача управления трехзвенным манипулятором . . . . .	13
<b>БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК . . . . .</b>	<b>14</b>

# Глава I

## Глава 1

### 1 Предельные уравнения и устойчивость

Пусть  $R^p$  - линейное действительное пространство  $p$  — векторов  $x$  с нормой  $|x|$ ,  $R$  — действительная ось,  $h > 0$  — заданное действительное число,  $C$  — банахово пространство непрерывных функций  $\varphi : [-h, 0] \rightarrow R^p$  с нормой  $\|\varphi\| = \max(|\varphi(s)|, -h \leq s \leq 0)$ . Для непрерывной функции  $x : [\alpha - h, \beta) \rightarrow R^p$  ( $\alpha, \beta \in R, \alpha < \beta$ ) и каждого  $t \in [\alpha, \beta)$  функцию  $x_t \in C$  определим равенством  $x_t(s) = x(t + s)$  ( $-h \leq s \leq 0$ ), под  $\dot{x}(t)$  будем понимать правостороннюю производную.

Рассмотрим неавтономное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (1.1)$$

где  $f : R \times C_H \rightarrow R^p$  — некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему предположению.

**ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.1** Для каждого числа  $r$ ,  $0 < r < H$ , существует такое число  $m_r > 0$  что выполняется неравенство

$$|f(t, \varphi)| \leq m_r, \forall \varphi \in \bar{C}_r. \quad (1.2)$$

Пусть выполняется 1.1.1 выполнено и  $\{r_n\}$  — последовательность чисел такая, что  $r_1 < r_2 < \dots < r_n < \dots$ ,  $r_n \rightarrow H$  при  $n \rightarrow \infty$ . Определим для всех  $r_i$  множество  $K_i \subset C$  функций  $\varphi \in C$ , таких, что для  $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\varphi(s)| \leq r_i, \quad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leq m_{r_i} |s_2 - s_1|.$$

Множество  $K_i$  очевидно, будет компактом. Положим  $\Gamma = \bigcup_{i=1}^{\infty} K_i$ .

Рассмотрим  $F$  - множество всех непрерывных функций  $f$ , определенных на  $R \times \Gamma$ , со значениями в  $R^p$ . Через  $f^\tau$  обозначим сдвиг функции  $f$ ,  $f^\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi)$ . Для  $f \in F$  семейство сдвигов  $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R\}$  будет являться подмножеством  $F$ .

Дадим определение сходимости в  $F$  как равномерной на каждом компакте  $K' \subset R \times \Gamma$  : последовательность  $\{f_n \in F\}$  сходится к  $f \in F$ , если  $\forall K' \subset R \times \Gamma$  и  $\forall \varepsilon > 0$  выполняется  $|f_n(t, \varphi) - f(t, \varphi)| < \varepsilon$ , при  $n > N = N(\varepsilon)$  и  $(t, \varphi) \in K'$ .

В силу определения области  $\Gamma$  эта сходимость метризуема: для всех  $n$  определим для двух функций  $f_1, f_2 \in F$  полунорму  $\|\cdot\|_n$  и соответствующую псевдометрику  $\rho_n$  следующим образом

$$\|f\|_n = \sup \{|f(t, \varphi)|, \forall (t, \varphi) \in K'_n\},$$

$$\rho_n(f_1, f_2) = \frac{\|f_2 - f_1\|_n}{1 + \|f_2 - f_1\|_n},$$

где  $K'_n = [0, n] \times K_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$  ( $K_n$  определено выше).

Определим расстояние между функциями  $f_1, f_2 \in F$  как

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f_1, f_2). \quad (1.3)$$

Можно убедиться, что при этом будут выполнены все аксиомы метрического пространства. И пространство  $F$  будет полным по отношению к введенной метрике.

Допустим, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующему предположению.

**ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.2** Для любого  $K \subset C_H$  ( $K$  - компакт) функция  $f = f(t, \varphi)$  равномерно непрерывна по  $(t, \varphi) \in R \times K$ , т.е.  $\forall K \subset C_H$  и для произвольного малого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ , такое, что для любых  $(t, \varphi) \in R \times K$ ,  $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in R \times K : |t_2 - t_1| < \delta$ ,  $\varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$ , выполняются неравенства

$$|f(t_2, \varphi_2) - f(t_1, \varphi_1)| < \varepsilon. \quad (1.4)$$

**ЛЕММА 1.1** При условии выполнения предположений I.1.1 и I.1.2 семейство сдвигов  $\{f^\tau : \tau \in R\}$  предкомпактно в  $F$ .

Доказательство леммы следует непосредственно из (1.4), построения  $F$  и соотношения

$$|f^\tau(t_2, \varphi_2) - f^\tau(t_1, \varphi_1)| = |f(\tau + t_2, \varphi_2) - f(\tau + t_1, \varphi_1)|.$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.1** Функция  $f^* : R \times \Gamma \rightarrow R^p$  называется предельной к  $f$ , если существует последовательность  $t_n$  такая, что  $f^{(n)}(t, \varphi) = f(t_n + t, \varphi)$  сходится к  $f^*(t, \varphi)$  при  $t \rightarrow \infty$  в  $F$ . Замыкание семейства  $\{f^\tau : \tau \in R\}$  в  $F$  называется оболочкой  $S^+(f)$ .  
Уравнение

$$\dot{x}(t) = f^*(t, x_t) \quad (1.5)$$

называется предельным к (1.1).

При условиях (1.2) и (1.4) уравнение (1.1) является предкомпактным.

**ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ 1.3** Для любого компактного множества  $K \subset C_H$  функция  $f = f(t, \varphi)$  удовлетворяет условию Липшица т.е.,  $\forall K \subset C_H$  существует  $m = m(K)$ , такое, что для любых  $t \in R$ ;  $\varphi_1, \varphi_2 \in K$  будет выполнено неравенство

$$|f(t, \varphi_2) - f(t, \varphi_1)| \leq m \|\varphi_2 - \varphi_1\|. \quad (1.6)$$

При выполнении условия (1.6), каждая предельная функция  $g(t, \varphi)$  также будет удовлетворять аналогичному условию Липшица относительно компакта  $K \subset \Gamma$ .

Вследствие этого получим, что при предположении 1.1.3 решения уравнения (1.1) при начальном условии  $(t, \varphi) \in \times C_H$  и уравнения (1.5) для  $(t, \varphi) \in \times \Gamma$  будут единственными.

Связь между решениями уравнений (1.1) и (1.5) определяется следующей теоремой:

**ТЕОРЕМА 1.1** Пусть функция  $f^* : \times \Gamma \rightarrow R^p$  есть предельная к  $f$  в  $F$  относительно последовательности  $t_n \rightarrow +\infty$ , а последовательности  $\{\alpha_n \in \Gamma\}$  и  $\{\varphi_n \in F\}$  таковы, что  $\alpha_n \rightarrow \alpha \in \Gamma$ ,  $\varphi_n \rightarrow \varphi \in \Gamma$  при  $n \rightarrow \infty$ . Пусть  $x = x(t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$  есть решения уравнения (1.1), а  $y(t, \alpha, \varphi)$  есть решение уравнения  $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ , определенное для  $t \in [\alpha - h, \beta[$ .

Тогда последовательность функций  $y^n(t) = x(t_n + t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$  сходится к  $y(t, \alpha, \varphi)$  равномерно по  $t \in [\alpha - h + \varepsilon, \gamma]$  для малого  $\varepsilon > 0$  ( $\varepsilon = 0$  при  $\{\alpha_n = \alpha\}$ ) и каждого  $\gamma$ ,  $\alpha < \gamma < \beta$ .

**ТЕОРЕМА 1.2** Пусть решение (1.1)  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  ограничено,  $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq r < H$  для всех  $t \geq \alpha - h$ . Тогда множество  $\omega^+(\alpha, \varphi)$  полуквазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений  $\{\dot{x} = f^*(t, x_t)\}$ , а именно, для каждой точки  $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$  существует предельное уравнение  $\dot{x} = f^*(t, x_t)$ , такое, что точки его решения  $y(t, 0, \psi)$  в пространстве  $C$  содержатся в  $\omega^+(\alpha, \varphi)$ ,  $\{y_t(0, \psi), t \in R\} \subset \omega^+(\alpha, \varphi)$ .

Пусть  $V : R^+ \times C_H \rightarrow R$  — непрерывный функционал Ляпунова и  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  — решение уравнения. Функция  $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$  представляет собой непрерывную функцию времени  $t \geq \alpha$ .

Верхней правосторонней производной от  $V$  вдоль решения  $x(t, \alpha, \varphi)$  называется значение  $\dot{V}^+(t, x_t(\alpha, \varphi)) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0^+} \sup \frac{1}{\Delta t} [V(t + \Delta t, x_{t+\Delta t}(\alpha, \varphi)) - V(t, x_t(\alpha, \varphi))]$

Основным используемым свойством при этом определении и условии  $\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$  является невозрастание функции  $V(t) = V(t, x_t(\alpha, \varphi))$  для всех  $t \geq \alpha$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.2** Пусть  $t_n \rightarrow +\infty$  есть некоторая последовательность. Для каждого  $t \in R$  и  $c \in R$  определим множество  $V_\infty^{-1}(t, c) \subset C_H$  следующим образом: точка  $\varphi \in V_\infty^{-1}(t, c)$ , если существуют последовательность  $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$  и последовательность  $\{\varphi_k \in \Gamma, \varphi_k \rightarrow \varphi\}$ , такие, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(t_{n_k} + t, \varphi_k) = c. \quad (1.7)$$

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.3** Будем говорить, что отображение  $u : (\alpha, \beta) \rightarrow C_H$  или  $u : R \rightarrow C_H$  принадлежит множеству  $\{V_\infty^{-1}(t, c), c = c_0 = \text{const}\}$ , если для любого  $\gamma > 0$  (соответственно для любого  $T > 0$ ) существуют последовательность  $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$  и последовательность непрерывных отображений  $u_k(t)$ , такие, что  $\{u_k(t)\}$  сходится к  $u(t)$  равномерно по  $t \in [\alpha + \gamma, \beta - \gamma]$  (соответственно по  $t \in [-T, T]$ ), таким образом, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} V(t_{n_k} + t, u_k(t)) = c_0. \quad (1.8)$$

Допустим, что производная  $\dot{V}(t, \varphi)$  оценивается неравенством

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0, \quad (1.9)$$

где функционал  $W = W(t, \varphi)$  ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве  $\times K$ , т.е. для каждого компактного множества  $K \subset C_H$  и любого  $\varepsilon > 0$  найдутся  $m = m(K)$  и  $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$ , такие, что имеют место неравенства

$$W(t, \varphi) \leq m, \quad |W(t_2, \varphi_2) - W(t_1, \varphi_1)| \leq \varepsilon \quad (1.10)$$

для всех  $(t, \varphi) \in \times K$ ;  $(t_1, \varphi_1), (t_2, \varphi_2) \in \times K : |t_2 - t_1| \leq \delta, \|\varphi_2 - \varphi_1\| \leq \delta$ . Как и в случае  $f$ , при этих условиях семейство сдвигов  $\{W^\tau(t, \varphi) = W(t + \tau, \varphi), \tau \in \mathbb{R}\}$  предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций  $F_W = \{W : R \times \Gamma \rightarrow R\}$  с метризуемой компактно открытой топологией.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.4** Функция  $W^* \subset F_W$  есть предельная к  $W$ , если существует  $t_n \rightarrow +\infty$ , такая, что последовательность  $\{W_n(t, \varphi) = W(t_n + t, \varphi)\}$  сходится к  $W^*$  в  $F_W$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.5** Будем говорить, что отображение  $u : (\alpha, \beta) \rightarrow C_H$  ( $u : R \rightarrow C_H$ ) принадлежит множеству  $\{\varphi \in C_H : W(t, \varphi) = 0\}$ , если тождество  $W(t, u(t)) \equiv 0$  выполняется для всех  $t \in (\alpha, \beta)$  (соответственно для всех  $t \in R$ ),  $u(t) \in \{W(t, \varphi) = 0\}$  для  $t \in (\alpha, \beta)$  и (для всех  $t \in R$ ).

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.6** Пусть предельный функционал  $W^*(t, \varphi)$  задается согласно определению I.1.4 относительно некоторой последовательности  $t_n \rightarrow +\infty$ . Множество  $V_\infty^{-1}(t, c)$ , определяемое этой же последовательностью  $t_n \rightarrow +\infty$  согласно определению I.1.5, назовем соответствующим  $W^*(t, \varphi)$ .

Рассмотрим задачу об определении свойств устойчивости уравнения (1.1) на основе функционала Ляпунова со знакопостоянной производной в предположениях (1.4) и (1.6) предкомпактности (1.1), существования семейства предельных уравнений  $\{\dot{x} = g(t, x_t)\}$  и единственности решений.

Пусть  $V = R^+ \times C_H \rightarrow R$  есть непрерывный функционал, производная которого удовлетворяет неравенству (1.9). Введем следующее

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.7** Функции  $f^* \in F$  и  $W^* \in F_W$  образуют предельную пару  $(f^*, W^*)$ , если они являются предельными к  $f$  и  $W$  для одной и той же последовательности  $t_n \rightarrow +\infty$ . Множество  $V_\infty^{-1}(t, c)$ , определяемое в соответствии этой же последовательности  $t_n \rightarrow +\infty$ , есть соответствующее  $(f^*, W^*)$ .

**ТЕОРЕМА 1.3** *Предположим, что:*

1) существует непрерывный функционал  $V : \times C_H \rightarrow R$ , ограниченный снизу на каждом компакте  $K \subset C_H$ ,  $V(t, \varphi) \geq m(K)$  для всех  $(t, \varphi) \in \times K$ , и такой, что  $\dot{V}(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$  для всех  $(t, \varphi) \in \times C_H$ ;

2) решение  $x = x(t, \alpha, \varphi)$  уравнения (1.1) ограничено,  $|x(t, \alpha, \varphi)| \leq H_1 < H$  для всех  $t \geq \alpha - h$ .

Тогда имеется  $c = c_0 \geq m$ , при котором для каждой предельной точки  $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$  существуют предельная пара  $(f^*, W^*)$  и соответствующее множество  $V_\infty^{-1}(t, c)$ , решение  $y = y(t)$ ,  $y_0 = \psi$ , уравнения  $\dot{x} = f^*(t, x_t)$ , такие, что  $y_t \in \omega^+(\alpha, \varphi)$  и  $y_t \subset \{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \text{const}\} \cap \{W^*(t, \varphi) = 0\}$  для всех  $t \in R$ .

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1.8** Множество  $M(t) \subset C_H$  не содержит решений уравнения  $\dot{x}(t) = f^*(t, x_t)$ , если для каждой точки  $\psi \in M(\alpha)$  соответствующее решение  $y(t, \alpha, \psi)$  таково, что при некотором  $\beta \in R$  имеем  $y_\beta(\alpha, \psi) \notin M(\beta)$ .

**ТЕОРЕМА 1.4** Если в условиях теоремы I.1.3 предположить также, что существует последовательность  $t_n \rightarrow +\infty$ , определяемые которой предельная пара  $(g_0, U_0)$  и множество  $V_\infty^{-1}(t, c)$  будут такими, что для каждого  $c_0 > c_1$  множество  $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \text{const} > c_1\} \cap \{U_0(t, \varphi) = 0\}$  не содержит решений  $\dot{x}(t) = g_0(t, x_t)$ , то в дополнение к выводу теоремы I.1.3 имеем также соотношение (??).

Перейдем к исследованию асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.1), полагая, что  $f(t, 0) \equiv 0$ .

Аналогичным образом, с использованием следствия I.1.4, по аналогии с теоремами ?? и ?? доказываются следующие две теоремы.

**ТЕОРЕМА 1.5** *Предположим, что:*

1) выполнено условие 1) теоремы ??;

2) последовательность  $t_n \rightarrow +\infty$  такова, что определяемые которой предельная пара  $(g_0, U_0)$  и множество  $V_\infty^{-1}(t, c)$  будут такими, что множество  $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 > 0\} \cap \{U_0(t, \varphi) = 0\}$  не содержит решений уравнения  $\dot{x} = g_0(t, x_t)$ .

Тогда решение (1.1)  $x = 0$  асимптотически устойчиво равномерно по  $\varphi$ .



Значительный интерес представляет следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости.

**ТЕОРЕМА 1.6** *Предположим, что:*

1) *существует функционал  $V : \times C_{H_1} \rightarrow (0 < H_1 < H)$ , такой, что  $V(t, 0) = 0$ ,  $a_1(|\varphi(0)|) \leq V(t, \varphi) \leq a_2(\|\varphi\|)$ ,  $\dot{V}^+(t, \varphi) \leq -W(t, \varphi) \leq 0$  для всех  $(t, \varphi) \in \times C_{H_1}$ ;*

2) *для каждой предельной пары  $(g, U)$  множество  $\{U(t, \varphi) = 0\}$  не содержит решения уравнения  $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$ , кроме нулевого.*

*Тогда решение (1.1)  $x = 0$  равномерно асимптотически устойчиво.*

# Глава II

## Глава 2

### 1 Постановка задачи управления трехзвенным манипулятором

Рассмотрим математическую модель трехзвенного манипулятора, состоящую из трех абсолютно жестких звеньев  $G_1$ ,  $G_2$ ,  $G_3$ , представляющих собой однородные стержни. Манипулятор установлен на неподвижном основании, на которое опирается звено  $G_1$ . Звено  $G_1$  таким образом, может совершать только вращения вокруг вертикальной оси. Звенья соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами  $O_1$  и  $O_2$  таким образом, что звенья  $G_2$  и  $G_3$  могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс  $C_1$  звена  $G_1$  лежит на луче  $O_1O_2$ . Положение центра масс  $C_2$  звена  $G_2$  не совпадает с положением шарнира  $O_2$ . На конце звена  $G_3$  находится груз, перемещаемый манипулятором.

Введем обозначения:  $q_i (i = 1, 2, 3)$  — углы поворотов звеньев манипулятора;  $Q_i (i = 1, 2, 3)$  — управляющие моменты относительно осей соответствующих звеньев;  $l_i$  — длина  $i$ -го звена;  $m_i$  — масса  $i$ -го звена;  $m_0$  — масса перемещаемого груза;  $m_3^0 = m_0 + m_3$ ;  $J_{01}$  — момент инерции первого звена относительно оси вращения;  $r_2$  и  $r_3$  — соответственно расстояния от центров тяжести второго звена и третьего звена с перемещаемым грузом относительно осей соответствующих звеньев;  $g$  — ускорение свободного падения. Уравнения движения манипулятора имеют вид:

$$\begin{cases} (J_{01} + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30} (l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2) \ddot{q}_1 + 2(m_2 r_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_{30} (l_2 \sin q_2 + \\ (m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2) \ddot{q}_2 + \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3) \ddot{q}_3 + \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3) \dot{q}_3^2 - (m_{30} (l_2 \sin q_2 + \\ \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3) \ddot{q}_2 + m_{30} r_3^2 \ddot{q}_3 - \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3) \dot{q}_2^2 - m_{30} (l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3) \end{cases}$$

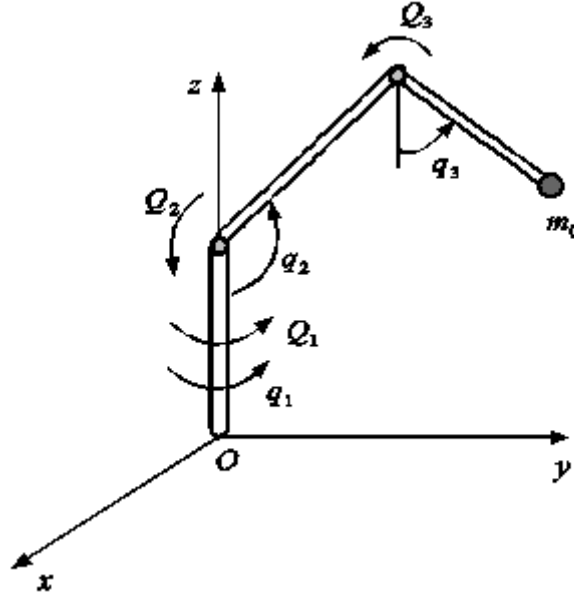


Рис. II.1: Модель трехзвенного манипулятора

Пусть  $q = (q_1, q_2, q_3)$  — вектор обобщенных координат представленной выше системы. Таким образом, уравнения движения можно представить в следующей векторно-матричной форме:  $A(q)\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + K\dot{q} = Q$  где

$$A(q) = \begin{pmatrix} J_{01} + m_2 r_2^2 \sin^2 q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)^2 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & m_2 r_2^2 + m_3 l_2^2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \cos(q_2 - q_3) & 0 \end{pmatrix}$$

$$C(q, \dot{q}) = \begin{pmatrix} 2(m_2 r_2^2 \sin q_2 \cos q_2 + m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)l_2 \cos q_2)\dot{q}_2 & 0 & 0 \\ -(m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)l_2 + m_2 r_2^2 \sin q_2) \cos q_2 \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ -m_{30}(l_2 \sin q_2 + r_3 \sin q_3)r_3 \cos q_3 \dot{q}_1 & -\frac{1}{2} m_{30} l_2 r_3 \sin(q_2 - q_3) & 0 \end{pmatrix}$$

$A(q)$  — положительно определенная матрица инерции системы.

## 2 Построение управления

Пусть  $q$  — вектор обобщенных координат рассматриваемой механической системы и есть заданное множество программных движений манипулятора в виде ограниченных дважды непрерывно дифференцируемых функций с ограниченными производными при  $t \in [0, T]$ . Символом обозначена евклидова норма вектора. Уравнения движения (1) можно представить в следующей векторно-матричной форме: (2) где  $A(q)$  — положительно опреде-

ленная матрица инерции системы,  $M$ ,  $-$ -ый элемент матрицы определяется в виде  $M_{ij} = \frac{\partial^2 T}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}$ ;  $-$  матрица коэффициентов моментов сил вязкого трения, действующих в системе. Система (2) имеет следующее свойство: матрица является кососимметричной. Пусть  $q^*(t)$  – какое-либо программное движение системы (2), реализуемое программным управлением  $u^*(t)$ , т.е. имеет место тождество  $\ddot{q}^* = M^{-1}(\tau^* - B\dot{q}^* - G)$ . Введем возмущения и составим уравнения возмущенного движения в векторно-матричном виде:  $M\ddot{q} + B\dot{q} + G = \tau$ , (3) где  $q = q^* + \delta q$ ,  $\dot{q} = \dot{q}^* + \delta \dot{q}$ ,  $\ddot{q} = \ddot{q}^* + \delta \ddot{q}$ . Рассмотрим задачу построения управляющего воздействия  $u$ , при котором невозмущенное движение системы (3) было бы равномерно асимптотически устойчиво, или, иначе, управление обеспечивало бы стабилизацию программного движения системы (2).

2 Синтез управления в задаче стабилизации программного движения манипулятора Рассмотрим решение задачи стабилизации в области

с помощью непрерывного управления вида  $u = -K\delta q - \dot{K}\delta \dot{q} + \ddot{q}^*$ , (4) где  $K$  есть матрица коэффициентов усиления сигналов, подлежащая определению;  $-$  непрерывно дифференцируемая вектор-функция, такая, что  $\dot{K} = -K\dot{q}$ . Возьмем для системы (3) вектор-функцию Ляпунова с коэффициентами вида  $V = \frac{1}{2}\delta \dot{q}^T \delta \dot{q} + \frac{1}{2}\delta q^T K \delta q$ . Вычисляя производные по времени от квадратов компонент вектор-функции Ляпунова в силу системы (3), получим

Отсюда получим следующие оценки:  $\dot{V} \leq -\lambda \|\delta \dot{q}\|^2$ , где положительные постоянные  $\lambda$  и функция определяются из следующих условий:  $\lambda > 0$ ,  $\lambda < \lambda_{\max}(K)$ . Здесь  $\lambda_{\max}$  есть максимальное собственное значение соответствующей матрицы. Тогда для системы (3) можно построить следующую систему сравнения:  $\ddot{y} + \lambda \dot{y} = 0$ . (5) Согласно теореме сравнения об экспоненциальной устойчивости [5] из свойства экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы сравнения (5) следует аналогичное свойство нулевого решения системы (3). Можно показать, что нулевое решение системы сравнения (5) будет экспоненциально устойчиво при следующем условии  $\lambda > 0$ . Численное моделирование движения манипулятора при действии управления (4) проводилось при следующих значениях параметров манипулятора и программной траектории

На рисунках 2–4 представлены результаты моделирования. Пунктирной линией обозначены составляющие программного движения, а сплошной – реального движения системы.

## Глава III

### Глава 3

#### 1 Задача управления трехзвенным манипулятором

Рассмотрим математическую модель двухзвенного манипулятора. Манипулятор состоит из неподвижного основания и двух абсолютно жестких звеньев  $G_1$ ,  $G_2$ . Элементы конструкции соединены между собой двумя идеальными цилиндрическими шарнирами  $O_1$ , и  $O_2$  таким образом, что оба звена могут совершать движения только в вертикальной плоскости. Центр масс  $C_1$  звена  $G_1$  лежит на луче  $O_1O_2$ . Положение центра масс  $C_2$  звена  $G_2$  не совпадает с положением шарнира  $O_2$ .

Введем обозначения:  $q_i (i = 1, 2, 3)$  — углы поворотов звеньев манипулятора;  $Q_i (i = 1, 2, 3)$  — управляющие моменты относительно осей соответствующих звеньев;  $l_i$  — длина  $i$ -го звена;  $m_i$  — масса  $i$ -го звена;  $m_0$  — масса перемещаемого груза;  $m_3 = m_0 + m_3$ ;  $J_{01}$  — момент инерции первого звена относительно оси вращения;  $r_2$  и  $r_3$  — соответственно расстояния от центров тяжести второго звена и третьего звена с перемещаемым грузом относительно осей соответствующих звеньев;  $g$  — ускорение свободного падения. Уравнения движения манипулятора имеют вид:

$$\begin{cases} 2|x|(2-x) = a, \\ x < 2, \\ x \neq 0. \end{cases}$$

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 277 с.
- [2] Алексеенко Н.В. Устойчивость решений нелинейных почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Известия Вузов. Сер. Математика. 2000. №2. С.3–6.
- [3] Ананьевский И.М., Колмановский В.Б. О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1989. №9. С.34–42.
- [4] Анашкин О.В. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости для одного класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №7. С.867–875.
- [5] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // ПММ. 1979. Т.43. Вып.5. С.796–805.
- [6] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // ДАН УзССР. 1980. №7. С.20–22.
- [7] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225–232.
- [8] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // ПММ. 1984. Т.48. Вып.5. С.707–713.
- [9] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений // ПММ. 1987. Т.51. Вып.2. С.253–260.

- [10] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // ПММ. 1991. Т.55. Вып.4. С.539–547.
- [11] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Изд-во "Наука 1991. С.36–40.
- [12] Андреев А.С. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во фМГУ, 1994. 80 с.
- [13] Андреев А.С. Об устойчивости неавтономного функционально дифференциального уравнения // Доклады РАН. 1997. Т.356. №7. С.151–153.
- [14] Андреев А.С. Об управляемости нестационарной нелинейной системы // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2003. Т.10. Вып.1. С.88.
- [15] Андреев А.С. Некоторые задачи об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным и неограниченным запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 2003. Вып.1(13). С.3–11.
- [16] Андреев А.С. К методу К.П. Персидского в задачах о неустойчивости // Математический журнал. Алматы. 2004. Т.4. №2(12). С.76–82.
- [17] Андреев А.С. О стабилизации движения управляемой системы с запаздывающей обратной связью // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2004. Т.11. Вып. 3. С. 612–613.
- [18] Андреев А.С., Бойкова Т.А. Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости // Механика твердого тела. 2002. Вып.32. С.109–116.
- [19] Андреев А.С., Лысяков В.Н. К методу Ляпунова в задаче об устойчивости функционально дифференциального уравнения // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 1996. Вып.1(2). С.5–10.

- [20] Андреев А.С., Павликов С.В. Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально дифференциального уравнения // ПММ. 1999. Т.63. Вып.1. С. 3–12.
- [21] Андреев А.С., Павликов С.В. Исследование устойчивости функционально-дифференциальных уравнений на основе знакопостоянных функционалов Ляпунова // Труды Средневолжского математического общества. 1999. Т.2(1) С.74–75.
- [22] Андреев А.С., Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 2000. Т.68. №3. С.323–331.
- [23] Андреев А.С., Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости относительно части переменных // Труды Четвертой Международной научно-практической конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов". (10-12 декабря 2001г., г.Ульяновск). Секция Математики. Ульяновск: УлГУ, 2001. С.15–16.
- [24] Андреев А.С., Павликов С.В. К задаче об устойчивости по части переменных функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 2003. Вып.1(13). С.12–21.
- [25] Андреев А.С., Павликов С.В. Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Механика твердого тела. 2004. Вып.34. С.112–120.
- [26] Андреев А.С., Седова Н.О. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2001. 60 с.
- [27] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №4. С.435–440.
- [28] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №7. С.876–885.



- [29] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости функционально-дифференциального уравнения с периодической правой частью // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 1999. Вып.1(6). С.3–17.
- [30] Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 333 с.
- [31] Астанов И.С., Белоцерковский С.М., Каганов Б.О., Кочетков Ю.А. О системах интегро-дифференциальных уравнений, описывающих неустановившееся движение тел в сплошной среде // Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18. №9. С.1628–1637.
- [32] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.
- [33] Билашевич И.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Стабилизация динамических систем при наличии запаздываний в канале обратной связи // Автоматика и телемеханика. 1996. №6. С.31–39.
- [34] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
- [35] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.
- [36] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 302 с.
- [37] Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.
- [38] Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.
- [39] Гайшун И.В. Асимптотическая устойчивость одной системы с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1972. Т.8. №5. С. 906–908.

- [40] Гайшун И.В., Княжище Л.Б. Теоремы устойчивости уравнений с запаздыванием, использующие немонотонные функционалы Ляпунова // Докл. Ан Беларуси. 1994. Т.38. №3. С.5–8.
- [41] Гайшун И.В., Княжище Л.Б. Немонотонные функционалы Ляпунова. Условия устойчивости уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1994. Т.30. №8. С.1291–1298.
- [42] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.
- [43] Горяченко В.Д. Методы теории устойчивости в динамике ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1971. 264 с.
- [44] Горяченко В.Д. Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1977. 296 с.
- [45] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.
- [46] Дроздов А.Д., Колмановский В.Б., Триджанте Д. Об устойчивости системы хищник-жертва // Автоматика и телемеханика. 1992. №11. С.57–64.
- [47] Жиков В.В., Левитан Б.М. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 205 с.
- [48] Журавлев В.Ф. Теоретическая механика. М.: Наука, Физматлит, 1997. 320 с.
- [49] Калистратова Т.А. Об устойчивости по части переменных систем с запаздыванием // Авт. и телемех. 1986. №5. С.32–37.
- [50] Ким А.В. К методу функций Ляпунова для систем с последствием // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск, 1987. С.79–83.
- [51] Ким А.В. О методе функционалов Ляпунова для систем с последствием // Авт. и телемех. 1990. №2. С.24–31.
- [52] Ким А.В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последствием. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1992. 142 с.

- [53] Ким А.В.  $i$ -Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. 234 с.
- [54] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость уравнений с запаздыванием // Докл. АН Беларуси. 1997. Т.41. №1. С.26–29.
- [55] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. I // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №2. С.189–196.
- [56] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. II // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №8. С.1056–1065.
- [57] Княжище Л.Б. Функционалы Ляпунова и условия равномерной асимптотической устойчивости уравнений с запаздыванием // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т.44. №5. С.40–43.
- [58] Княжище Л.Б., Щавель Н.А. Немонотонные функционалы Ляпунова и оценки решений дифференциальных уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1997. Т.33. №2. С.205–211.
- [59] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 474 с.
- [60] Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с произвольным последствием // Докл. РАН. 1993. Т.331. №4. С.421–424.
- [61] Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с последствием и переменными коэффициентами // ПММ. 1995. Т.59. Вып.1. С.71–81.
- [62] Колмановский В.Б. Об устойчивости систем с последствием нейтрального типа // ПММ. 1996. Т.60. Вып.2. С.210–222.
- [63] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последствием. М.: Наука, 1981. 448 с.
- [64] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Системы с последствием нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 1984. №1. С.5–35.

- [65] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543с.
- [66] Кордуняну К., Лакшмикантам В. Уравнения с неограниченным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1985. №7. С.5–44.
- [67] Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М.Ляпунова для уравнений с запаздыванием по времени // ПММ. 1956. Т.20. №3. С.315–327.
- [68] Красовский Н.Н. Об асимптотической устойчивости систем с последствием // ПММ. 1956. Т.20. №4. С.513–518.
- [69] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.
- [70] Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. №6. С.3–15.
- [71] Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости. Доп.4. М.: Наука, 1966. С.475–514.
- [72] Лакшмикантам В., Лиля С., Мартынюк А.А. Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Наукова думка, 1991. 248 с.
- [73] Лакшмикантам В., Мартынюк А.А. Развитие прямого метода Ляпунова для систем с последствием (обзор) // Прикладная механика. 1993. Т.29(39). №2. С.3–15.
- [74] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. 271 с.
- [75] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.
- [76] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2-е. М.: Наука, 1966. 530 с.
- [77] Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1991. 414 с.
- [78] Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А. Устойчивость движения метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990. 256 с.

- [79] Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит, 2000. 380 с.
- [80] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.
- [81] Мышкис А.Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи матем. наук. 1977. Т.32. Вып.2(194). С.173–202.
- [82] Мышкис А.Д. Предисловие редактора перевода. В кн.: Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. С.5–6.
- [83] Мышкис А.Д., Эльсгольц Л.Э. Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи матем. наук. 1967. Т.22. Вып.2. С.21–57.
- [84] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л., Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры. 1949. 550 с.
- [85] Новоселов В.С. Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. 239 с.
- [86] Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1965. 354 с.
- [87] Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т.1. №5. С.605–618.
- [88] Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 1996. Вып. 1. Ч.II. С. 46–56.
- [89] Павликов С.В. Об устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения второго порядка// Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1996. Вып. 2. С. 32–33

- [90] Павликов С.В. О стабилизации управляемых механических систем с обратной связью с запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1997. Вып. 2(4). С. 66–70.
- [91] Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 2002. Вып.2(12). С.30–39.
- [92] Павликов С.В. Предельные уравнения и функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости по части переменных // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 2003. Вып.1(13). С.63–74.
- [93] Павликов С.В. Об управляемости и стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Обзорение прикладной и промышленной математики. 2003. Т.10. Вып.1. С.201.
- [94] Павликов С.В. О стабилизации движения управляемой системы с запаздыванием // Механика твердого тела. 2005. Вып.34.
- [95] Перегудова О.А. К методу сравнения в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1999. Вып.2(7). С.32–36.
- [96] Перегудова О.А. Методы сравнения и преобразования в задачах об устойчивости систем с запаздыванием. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 83 с.
- [97] Прасолов А.В. О применении функций Ляпунова для исследования неустойчивости решений систем с последействием // Вестник ЛГУ. 1981. Сер.1. 19. С.116–118.
- [98] Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т.20. Вып. 4. С. 500–512.

- [99] Разумихин Б.С. Устойчивость по первому приближению систем с запаздыванием // ПММ. 1958. Т.22. Вып. 2. С.155–166.
- [100] Разумихин Б.С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1960. Т.21. №6. С.740–748.
- [101] Разумихин Б.С. Метод исследования устойчивости систем с последствием // Доклады АН СССР. 1966. Т.167. №6. С.1234–1236.
- [102] Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988. 106 с.
- [103] Резван В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М.: Наука, 1983. 300 с.
- [104] Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ. Сер. Мат., механ., физ., астрон., хим. 1957. №4. С.9-16.
- [105] Румянцев В.В. Метод функции Ляпунова в теории устойчивости движения // Механика в СССР за 50 лет. Т.1. М.: Наука, 1968. С.7–66.
- [106] Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.
- [107] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.
- [108] Седова Н.О. Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 2005. Т.8. №3. С.468–472.
- [109] Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости движений в некоторых классах с последствием // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 166–174.
- [110] Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости и оценке области притяжения в некоторых системах с последствием // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 744–751.

- [111] Тереки Й. Экспоненциальная и степенная асимптотическая устойчивость функционально-дифференциальных уравнений. В кн. Развитие и применение метода функций Ляпунова. Новосибирск: Наука, 1992. С.101–107.
- [112] Троценко Г.А. Об устойчивости решений почти периодической системы // Механика твердого тела. 2002. Вып. 32. С.129–133.
- [113] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.
- [114] Хусаинов Д.Я. Об экспоненциальной устойчивости линейных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №2. С.357–359.
- [115] Хусаинов Д.Я. Экспоненциальная оценка решений линейных систем с запаздыванием при произвольном отклонении аргумента // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №9. С.1631–1633.
- [116] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 276 с.
- [117] Шестаков А.А. Прямой метод Ляпунова как метод локализации функциями Ляпунова предельных множеств неавтономных динамических процессов (на базе предельных уравнений и динамических систем) // Функции Ляпунова и их применение. Ан СССР. Сибирское отд., Иркутский вычислит. центр. Новосибирск: Наука, 1987. С.14–48.
- [118] Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1990. 316 с.
- [119] Шиманов С.Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени // ПММ. 1960. Т.24. Вып. 1. С.55–63.
- [120] Шиманов С.Н. Устойчивость систем с запаздыванием // Труды II Всес. съезда по теорет. и прикл. механике. Москва, 1964, вып. 1. М.: Наука, 1965. С.170–180.
- [121] Щеглов В.А. Устойчивость линейного дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1996. Т.32. №12. С.1665–1669.



- [122] Щеглов В.А. Устойчивость решений одного уравнения второго порядка с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №12. С.1710–1713.
- [123] Эльсгольц Л.Э. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений // Успехи мат. наук. 1954. Т.9. №4. С.95-112.
- [124] Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 127 с.
- [125] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.
- [126] Янушевский Р.Т. Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 416 с.
- [127] Andreev A. Sulla stabilit  asintotica ed instabilit  // Rend. Sem. Univ. Padova. 1986. V.75. P.235–245.
- [128] Andreev A. On the stability of nonautonomous functional differential equations // Nonlinear Analysis. TMA. 1997. V.30. Part 5. P. 2847–2854.
- [129] Andreev A., Khusanov D. On asymptotic stability and nonstability functional-differential equations with periodic right side // Nonlinear oscillations, 2001. V.4. №3. P.290–298.
- [130] Andreev A.S., Sedova N.O. On the stability of nonautonomous equations with delay via limiting equations // Functional Differential Equations. 1998. V.5. №1-2. P. 21–37.
- [131] Andreev A., Zappala'G. On stability for perturbed differential equations // Le Natematiche. 1996. V.51. F. I. P. 27–41.
- [132] Artstein Z. Topological dynamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V.23. P.216–223.
- [133] Artstein Z. The limiting equations of nonautonomous differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V. 25. P.184–202.
- [134] Artstein A. Uniform asymptotic stability via the limiting equations // J. Differ. Equat. 1978. V.27. P.172–189.

- [135] Becker L.C., Burton T.A., Zhang S. Functional differential equations and Jensen's Inequality // J. of Math. Anal. and Appl. 1989. V.138. N 1. P.135–156.
- [136] Bernfeld S.R., Corduneanu C., Ignatyev A.O. On the stability of invariant sets of functional differential equations // Nonlinear Analysis. 2003. V.55. P.641–656.
- [137] Burton T.A. Uniform asymptotic stability in functional differential equations Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V.68. P.195–199.
- [138] Burton T.A. Stability theory for delay equations // Funkcial. Ekvac. 1979. V. 22. №1. P.67–76.
- [139] Burton T.A., Casal A., Somolinos A. Upper and lower bounds for Liapunov functionals // Funkcial. Ekvac. 1989. V. 32. №1. P.23–55.
- [140] Burton T.A., Hatvani L. Stability theorems for nonautonomous functional differential equations by Liapunov functionals // Tohoku Math. J. 1989. V.41. P.65–104.
- [141] Burton T.A., Hatvani L. On nonuniform asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations // Differential and Integral Equations. 1990. V.3. P.285–293.
- [142] Burton T.A., Makay G. Marachkov stability results for functional differential equations // EJTDE, 1998. №1. P.1–17.
- [143] Conley C.C., Miller R.K. Asymptotic stability without uniform stability. Almost periodic coefficients // J. Differ. Equat. 1965. V.1. №1. P.333–336.
- [144] Corduneanu C. On partial stability for delay systems // Ann. Polon. Math. 1975. V.29. P.357–362.
- [145] Corduneanu C., Ignatyev O.A. Stability of invariant sets of functional differential equations with delay // Nonlinear Func. Anal. and Appl. 2005. №1. P.11–24.
- [146] Gyori I., Hartung F. Preservation of stability in delay equations under delay perturbations // Journal of Math. Anal. and Appl. 1998. V. 220. P.290–312.

- [147] Haddock J. The "evolution" of invariance principles a la Liapunov's direct method // *Advances in nonlinear dynamics. Stability and Control: Theory, Methods and Applications*. V.5. 1997. P. 261–272.
- [148] Haddock J., Ko Y. Lyapunov-Razumikhin functions and an instability theorem for autonomous functional-differential equations with finite delay // *Rocky Mtn. J. Math.* 1995. V.25. P. 261–267.
- [149] Haddock J., Krisztin T., Terjeki J. Invariance principles for autonomous functional differential equations // *J. Integral Equations*. 1985. V.10. P.123–136.
- [150] Haddock J., Terjéki J. Liapunov-Razumikhin functions and an invariance principle for functional differential equations // *J. Differential Equations*. 1983. V.48. №1. P.95–122.
- [151] Haddock J., Terjéki J. On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay // *J. Differential Equations*. 1990. V.86. P.1–32.
- [152] Haddock J., Zhao J. Instability for autonomous and periodic functional differential equations with finite delay // *Funkcialay Ekvacioj*. 1996. V.39. P.553–570.
- [153] Hale J. A stability theorem for functional-differential equations // *Proc. N.A.S.* 1963. V.50. P.942–946.
- [154] Hale J. Dynamical systems and stability // *J. Math. Anal. Appl.* 1969. V.26. P.39–59.
- [155] Hale J. Functional differential equations with infinite delays // *J. of Math.An. and Applic.*, 1974. V. 48. P.276–293.
- [156] Hale J.K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // *Funk. Ekv.*, 1978. V.21. P.11–41.
- [157] Hatvani L. On the asymptotic stability of the solutions of functional differential equations // *Qualitative theory of differential equations. Colloq. Math. Soc. J.Bolyai. Vol.53. North Holland, Amsterdam*. 1990. P.227–238.
- [158] Hatvani L. On the asymptotic stability in differential systems by Liapunov direct method // *Proceedings of the First World Congress*

- of Nonlinear Analysts. Tampa, Florida, August 19-26, 1992. W.de 6., Berlin -N.Y. 1996. P.1341–1348.
- [159] Hatvani L. On the asymptotic stability by Lyapunov functionals with semidefinite derivatives // Nonlinear Analysis, TMA. 1997, V.30. №8. P. 4713–4721.
- [160] Hatvani L. Annulus arguments in the stability theory for functional differential equations // Differ. and Integral Equations. 1997. V. 10. №5. P. 975–1002.
- [161] Hatvani L. On Lyapunov's direct method for nonautonomous fde's // Functional Differential Equations. 1998. V. 5. №3–4. P.315–323.
- [162] Hatvani L. On the asymptotic stability for functional differential equations by Lyapunov functionals // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 2001. 47.№7. P.4333–4343.
- [163] Hornor W.E. Invariance principles and asymptotic constancy of solutions of precompact functional differential equations // Tohoku Math. J. 1990. V.42. P.217–229.
- [164] Ignatyev A.O. On the asymptotic stability in functional differential equations // Proceedings of the American Math. Society. 1999. V.127. №6. P. 1753–1760.
- [165] Ignatyev A.O. On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2002. V. 268. P.615–628.
- [166] Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2001. V.46. P. 1048–1060.
- [167] Kato J. Uniform asymptotic stability and total stability // Tohoku Math. Journ. 1970, V.22. P.254–269.
- [168] Kato J. On Liapunov–Razumikhin type theorems for functional differential equations // Funkc. Ekvac., 1973. V.16. №3. P.225–239.
- [169] Kato J. Liapunov's second methods in functional differential equations // Tohoku Math. J. 1980. V. 32. №4. P. 487–492.

- [170] Makay G. An example on the asymptotic stability for functional differential equations // *Nonl. Anal., TMA*// 1994. V.23. P.365–368.
- [171] Mao X. Comments on "An improved Razumikhin-type theorem and its Applications"// *IEEE Transactions on automatic control*. 1997. V. 42. P. 429–430.
- [172] Mikolajska Z. Une remarque sur des notes der Razumichin et Krasovskij sur la stabilite asimptotique // *Ann. Polon. Math.*, **22** (1969). P.69–72.
- [173] Murakami S. Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations // *J. Differ. Equat.* 1985. V.59. P.314–335.
- [174] Saperstone S.N. *Semidynamical system in the infinite dimentional space*. N.Y.: Springer – Verlag. 1981. 474 p.
- [175] Sedova N. On employment of semi-definite function in stability of delayed equations // *Journal of Mathematical Analysis and Applications*. 2003. V.281, №1. P.307–319.
- [176] Sedova N. Razumikhin-type theorems in the problem on instability of nonautonomous equations with finite delay // *Funckcialaj Ekvacioj*. 2004. V.47. P.187–204.
- [177] Seifert G. Liapunov-Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of Volterra type // *J. Differential equations*. 1974. 16. P.289–297.
- [178] Sell G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // *Trans. Amer. Math. Soc.*, 1967. V.22. P.241–283.
- [179] Taniguchi T. Asymptotic behavior theorems for non-autonomous functional differential equations via Lyapunov-Razumikhin method // *Journal of Math. Analysis and Appl.* 1995. V. 189. P.715–730.
- [180] Taniguchi T. Asymptotic behavior theorems of solutions of functional differential equations with finite delay // *Journal of Math. Analysis and Appl.* 1996. V. 199. P.776–786.
- [181] Terjéki J. On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations // *Annalea Polonici Mathematici*. 1979. V. 36. P. 299–314.

- [182] Wang Z. Comparison method and stability problem for functional differential equations // Tohoku Math. J. 1983. V.35. P. 349–356.
- [183] Wang T. Weakening the condition  $W_1(|\varphi(\theta)|) \leq V(t, \varphi) \leq W_2(\|\varphi\|)$  for uniform asymptotic stability // Nonl. Anal., TMA. 1994. V.23. №2. P.251–264.
- [184] Yorke J.A. Some extensions of Liapunov's second method. – SIAM, Diff. integ. equat., Pa, 1969, p.206–207.
- [185] Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method. Tokio: The Math. Soc. of Japan, 1966, 216 p.
- [186] Yoshizawa T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost-Periodic Solutions. Applied Math. Sciences, vol. 14, 1975. Springer-Verlag. N.Y. 233 p.
- [187] Zhang Bo. Asymptotic stability in functional differential equations by Lyapunov functionals // Trans. Amer. Math. Soc., 1995. V.347. №4. P.1375–1382.

Научное издание

**Андреев Александр Сергеевич**

**УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ  
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ  
УРАВНЕНИЙ**

Зав. отделом: Г.А. Углева

Обложка: Н.В.Пенькова

Редактор Л.Г.Соловьева