Макаров Д.С

КАНДИДАТСКАЯ

Ульяновск
Издательство Ульяновского государственного университета
2016

Оглавление

Глава I

Глава 1

1 Предельные уравнения и устойчивость

Возьмем неавтономное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.1}$$

где $f : R^+ \times C_H \to R^p$ - некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему предположению.

Предположение 1.1 *Для каждого числа* r, $0 < r < H$, *существует такое число* $\mu_r > 0$ *что выполняется неравенство*

$$|f(t, \psi)| \leqslant m_r, \forall \phi \in \bar{C}_r \mu_r(|t_2 - t_1|). \tag{1.2}$$

Пусть выполняется I.1.1 выполнено и $\{r_n\}$ — последовательность чисел такая, что $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$, $r_n \to H$ при $n \to \infty$. Определим для всех r_i множество $K_i \subset C$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\varphi(s)| \leqslant r_i, \qquad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leqslant \mu_{r_i}(|s_2 - s_1|).$$

Множество K_i очевидно, будет компактом. Положим $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Рассмотрим F - множество всех непрерывных функций f, определенных на $R^+ \times \Gamma$, со значениями в R^p. Через f^τ обозначим сдвиг функции f, $f^\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Для $f \in F$ семейство сдвигов $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R^+\}$ будет являтся подмножеством F.

Дадим определение сходимости в F как равномерной на каждом компакте $K' \subset R^+ \times \Gamma$: последовательность $\{f_n \in F\}$ сходится к $f \in F$, если $\forall K' \subset R^+ \times \Gamma$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $|f_n(t, \varphi) - f(t, \varphi)| < \varepsilon$, при $n > N = N(\varepsilon)$ и $(t, \varphi) \in K'$.

Для того, чтобы показать, что в силу определения области Γ эта сходимость метризуема, для всех n определим для двух функций f_1, $f_2 \in F$ полунорму $\|\cdot\|_n$ и соответствующую псевдометрику ρ_n следующим образом

$$\|f\|_n = \sup\{|f(t,\varphi)|, \forall(t,\varphi) \in K'_n\},$$

$$\rho_n(f_1, f_2) = \frac{\|f_2 - f_1\|_n}{1 + \|f_2 - f_1\|_n},$$

где $K'_n = [0,n] \times K_n, \quad n = 1, 2, \ldots$ (K_n определено выше).

Определим расстояние между функциями $f_1, f_2 \in F$ как

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f_1, f_2). \tag{1.3}$$

Можно убедиться, что при этому будут выполнены все аксиомы метрического пространства. И пространство F будет полным по отношению к введенной метрике.

Допустим, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующему предположению.

Предположение 1.2 *Для любого $K \subset C_H$ (K - компакт) функция $f = f(t,\varphi)$ ограничена и равномерно непрерывна по $(t,\varphi) \in R^+ \times K$, т.е. $\forall K \subset C_H \quad \exists M = M(K)$, и для произвольного малого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такое, что для любых $(t,\varphi) \in R^+ \times K$, $(t_1,\varphi_1), (t_2,\varphi_2) \in R^+ \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, выполняются неравенства*

$$|f(t,\varphi)| \leqslant M, \qquad |f(t_2,\varphi_2) - f(t_1,\varphi_1)| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Лемма 1.1 *При условии выполнения предположений I.1.1 и I.1.2 семейство сдвигов $\{f^\tau : \tau \in R^+\}$ предкомпактно в F.*

Доказательство леммы следует непосредственно из (1.4), построения F и соотношения

$$|f^\tau(t_2,\varphi_2) - f^\tau(t_1,\varphi_1)| = |f(\tau + t_2,\varphi_2) - f(\tau + t_1,\varphi_1)|.$$

Определение 1.1 *Функция $g : R^+ \times \Gamma \to R^p$ называется предельной к f, если существует последовательность $t_n \to +\infty$, такая, что*

$f^{(n)}(t,\varphi) = f(t_n + t, \varphi)$ сходится к $g(t,\varphi)$ в F. Замыкание семейства $\{f^\tau : \tau \in R^+\}$ в F называется оболочкой $S^+(f)$. Уравнение

$$\dot{x}(t) = g(t, x_t) \tag{1.5}$$

называется предельным к (1.1).

При условиях (1.2) и (1.4) уравнение (1.1) является предкомпактным.

Предположение 1.3 *Для любого компактного множества $K \subset C_H$ функция $f = f(t,\varphi)$ удовлетворяет условию Липшица т.е, $\forall K \subset C_H$ существует $m = m(K)$, такое, что для любых $t \in R^+$; $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ будет выполнено неравенство*

$$|f(t,\varphi_2) - f(t,\varphi_1)| \leqslant m\|\varphi_2 - \varphi_1\|. \tag{1.6}$$

При выполнении условия (1.6), каждая предельная функция $g(t,\varphi)$ также будет удовлетворять аналогичному условию Липшица относительно компакта $K \subset \Gamma$.

Вследствие этого получим, что при предположении I.1.3 решения уравнения (1.1) при начальном условии $(t,\varphi) \in R^+ \times C_H$ и уравнения (1.5) для $(t,\varphi) \in R^+ \times \Gamma$ будут единственными.

Связь между решениями уравнений (1.1) и (1.5) определяется следующей теоремой, которую можно вывести из теоремы **??** и определения I.1.1.

Теорема 1.1 *Пусть функция $g : R^+ \times \Gamma \to R^p$ есть предельная к f в F относительно последовательности $t_n \to +\infty$, а последовательности $\{\alpha_n \in R^+\}$ и $\{\varphi_n \in F\}$ таковы, что $\alpha_n \to \alpha \in R^+$, $\varphi_n \to \varphi \in \Gamma$ при $n \to \infty$. Пусть $x = x(t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ есть решения уравнения (1.1), а $y(t,\alpha,\varphi)$ есть решение уравнения $\dot{x}(t) = g(t,x_t)$, определенное для $t \in [\alpha - h, \beta[$.*

Тогда последовательность функций $y^n(t) = x(t_n + t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ сходится к $y(t,\alpha,\varphi)$ равномерно по $t \in [\alpha - h + \varepsilon, \gamma]$ для малого $\varepsilon > 0$ ($\varepsilon = 0$ при $\{\alpha_n = \alpha\}$) и каждого γ, $\alpha < \gamma < \beta$.

Теорема 1.2 *Пусть решение (1.1) $x = x(t,\alpha,\varphi)$ ограничено, $|x(t,\alpha,\varphi)| \leqslant r < H$ для всех $t \geqslant \alpha - h$. Тогда множество $\omega^+(\alpha,\varphi)$ полуквазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений $\{\dot{x} = g(t,x_t)\}$, а именно, для каждой точки $\psi \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ существует предельное уравнение $\dot{x} = g(t,x_t)$, такое, что точки его решения $y(t,0,\psi)$ в пространстве C содержатся в $\omega^+(\alpha,\varphi)$, $\{y_t(0,\psi), t \in R\} \subset \omega^+(\alpha,\varphi)$.*

Замечание 1.1 *Так как сдвиг* $f^\tau(t,\varphi)$ *при большом* $\tau \geqslant T > 0$ *определен для значений* $(t,\varphi) \in [-T,+\infty[\times C_H,$ *то по построению уравнения (1.5) его областью определения можно принять область* $R\times\Gamma$. *Решение* $y_t(t,0,\psi)$ *в теореме I.1.2 также по построению продолжимо для всех* $t \in R$, *при этом* $\{y_t(0,\psi), t\in R\} \subset \omega^+(\alpha,\varphi)$. *Тем самым, можно утверждать о квазиинвариантности положительного предельного множества* $\omega^+(\alpha,\varphi)$ *по отношению к семейству предельных уравнений* $\{\dot{x} = g(t,x_t)\}$.

Замечание 1.2 *Предельное уравнение определяется в подобласти* $R\times\Gamma \subset R\times G$. *Однако так как для семейства решений уравнения (1.1)* $\{x = x(t,0,\varphi),\ \varphi\in C_H\}$ *множество значений* $\{x_t : t \geqslant h\} \subset \Gamma$, *динамические свойства решений (1.1), в том числе их предельные свойства, не зависят от сужения отображения* D^+ *на* Γ.

Допустим, что правая часть уравнения (1.1) имеет значение $f(t,0) \equiv 0$, и, следовательно, это уравнение имеет нулевое решение $x = 0$.

Ниже, если не оговаривается особо, предполагается непрерывность $V(t,\varphi)$ и определение производной в общей форме из главы I. Основным используемым свойством при этом определении и условии $\dot{V}(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0$ является, как указывалось в **??**, невозрастание функции $V(t) = V(t, x_t(\alpha,\varphi))$ для всех $t \geqslant \alpha$.

Определение 1.2 *Пусть* $t_n \to +\infty$ *есть некоторая последовательность. Для каждого* $t\in R$ *и* $c \in R$ *определим множество* $V_\infty^{-1}(t,c) \subset C_H$ *следующим образом: точка* $\varphi \in V_\infty^{-1}(t,c)$, *если существуют последовательность* $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ *и последовательность* $\{\varphi_k \in \Gamma, \varphi_k \to \varphi\}$, *такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} V(t_{n_k} + t, \varphi_k) = c. \tag{1.7}$$

Определение 1.3 *Будем говорить, что отображение* $u : (\alpha,\beta) \to C_H$ *или* $u : R \to C_H$ *принадлежит множеству* $\{V_\infty^{-1}(t,c), c = c_0 = const\}$, *если для любого* $\gamma > 0$ *(соответственно для любого* $T > 0$ *) существуют последовательность* $\{t_{n_k}\} \subset \{t_n\}$ *и последовательность непрерывных отображений* $u_k(t)$, *такие, что* $\{u_k(t)\}$ *сходится к* $u(t)$ *равномерно по* $t \in [\alpha+\gamma, \beta-\gamma]$ *(соответственно по* $t\in[-T,T]$ *), таким образом, что*

$$\lim_{k\to\infty} V(t_{n_k} + t, u_k(t)) = c_0. \tag{1.8}$$

Допустим, что производная $\dot{V}(t,\varphi)$ оценивается неравенством

$$\dot{V}(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0, \tag{1.9}$$

где функционал $W = W(t,\varphi)$ ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$, т.е. для каждого компактного множества $K \subset C_H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m = m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такие, что имеют место неравенства

$$W(t,\varphi) \leqslant m, \qquad |W(t_2,\varphi_2) - W(t_1,\varphi_1)| \leqslant \varepsilon \tag{1.10}$$

для всех $(t,\varphi) \in R^+ \times K$; (t_1,φ_1), $(t_2,\varphi_2) \in R^+ \times K : |t_2 - t_1| \leqslant \delta$, $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \leqslant \delta$. Как и в случае f, при этих условиях семейство сдвигов $\{W^\tau(t,\varphi) = W(t+\tau,\varphi), \tau \in R^+\}$ предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций $F_U = \{U : R \times \Gamma \to R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

Определение 1.4 *Функция* $U \subset F_U$ *есть предельная к* W, *если существует* $t_n \to +\infty$, *такая, что последовательность* $\{W_n(t,\varphi) = W(t_n + t,\varphi)\}$ *сходится к* U *в* F_U.

Определение 1.5 *Будем говорить, что отображение* $u : (\alpha,\beta) \to C_H$ $(u : R \to C_H)$ *принадлежит множеству* $\{\varphi \in C_H : U(t,\varphi) = 0\}$, *если тождество* $U(t,u(t)) \equiv 0$ *выполняется для всех* $t \in (\alpha,\beta)$ *(соответственно для всех* $t \in R$ *),* $u(t) \in \{U(t,\varphi) = 0\}$ *для* $t \in (\alpha,\beta)$ *и (для всех* $t \in R$ *).*

Определение 1.6 *Пусть предельный функционал* $U(t,\varphi)$ *задается согласно определению I.1.4 относительно некоторой последовательности* $t_n \to +\infty$. *Множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$, *определяемое этой же последовательностью* $t_n \to +\infty$ *согласно определению I.1.5, назовем соответствующим* $U(t,\varphi)$.

2 Функционалы Ляпунова и квазиинвариантность

Рассмотрим задачу об определении свойств устойчивости уравнения (1.1) на основе функционала Ляпунова со знакопостоянной производной в предположениях (1.4) и (1.6) предкомпактности (1.1), существования семейства предельных уравнений $\{\dot{x} = g(t,x_t)\}$ и единственности решений.

Пусть $V = R^+ \times C_H \to R$ есть непрерывный функционал, производная которого удовлетворяет неравенству (1.9). Введем следующее

Определение 2.1 *Функции* $g \in F$ *и* $U \in F_U$ *образуют предельную пару* (g, U), *если они являются предельными к* f *и* W *для одной и той же последовательности* $t_n \to +\infty$. *Множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$, *определяемое в соответствии этой же последовательности* $t_n \to +\infty$, *есть соответствующее* (g, U).

Теорема 2.1 *Предположим, что:*

1) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times C_H \to R$, *ограниченный снизу на каждом компакте* $K \subset C_H$, $V(t,\varphi) \geqslant m(K)$ *для всех* $(t,\varphi) \in R^+ \times K$, *и такой, что* $\dot V(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0$ *для всех* $(t,\varphi) \in R^+ \times C_H$;

2) решение $x = x(t,\alpha,\varphi)$ *уравнения (1.1) ограничено,* $|x(t,\alpha,\varphi)| \leqslant H_1 < H$ *для всех* $t \geqslant \alpha - h$.

Тогда имеется $c = c_0 \geqslant m$, *при котором для каждой предельной точки* $\psi \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ *существуют предельная пара* (g, U) *и соответствующее множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$, *решение* $y = y(t)$, $y_0 = \psi$, *уравнения* $\dot x = g(t, x_t)$, *такие, что* $y_t \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ *и* $y_t \subset \{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = \mathrm{const}\} \bigcap \{\mathrm{U(t,}\varphi) = 0\}$ *для всех* $t \in R$.

Определение 2.2 *Множество* $M(t) \subset C_H$ *не содержит решений уравнения* $\dot x(t) = g(t, x_t)$, *если для каждой точки* $\psi \in M(\alpha)$ *соответствующее решение* $y(t,\alpha,\psi)$ *таково, что при некотором* $\beta \in R$ *имеем* $y_\beta(\alpha,\psi) \notin M(\beta)$.

Аналогично следствию **??** можно вывести следующий результат.

Следствие 2.1 *Если в условиях теоремы I.2.1 предположить также, что существует последовательность* $t_n \to +\infty$, *определяемые которой предельная пара* (g_0, U_0) *и множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$ *будут такими, что для каждого* $c_0 > c_1$ *множество* $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 = \mathrm{const} > \mathrm{c}_1\} \bigcap \{\mathrm{U}_0(\mathrm{t},\varphi) = 0\}$ *не содержит решений* $\dot x(t) = g_0(t, x_t)$, *то в дополнение к выводу теоремы I.2.1 имеем также соотношение (**??**).*

Перейдем к исследованию асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.1), полагая, что $f(t,0) \equiv 0$.

Аналогичным образом, с использованием следствия 2.1, по аналогии с теоремами **??** и **??** доказываются следующие две теоремы.

Теорема 2.2 *Предположим, что:*

1) выполнено условие 1) теоремы **??**;

2) последовательность $t_n \to +\infty$ *такова, что определяемые которой предельная пара* (g_0, U_0) *и множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$ *будут такими, что множество* $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 > 0\} \bigcap \{U_0(t,\varphi) = 0\}$ *не содержит решений уравнения* $\dot{x} = g_0(t, x_t)$.

Тогда решение (1.1) $x = 0$ *асимптотически устойчиво равномерно по* φ.

Замечание 2.1 *Аналогично замечанию* **??** *для вывода асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения* $x = 0$ *по теоремам I.2.2 и* **??** *достаточно, чтобы функция* f *удовлетворяла предположениям I.1.1 – I.1.3 относительно некоторой последовательности интервалов* $I_n = [t_n, t_n + T]$, $t_n \to +\infty$, $T > h$. *Вне этих интервалов функция* f *может быть произвольной.*

Значительный интерес представляет следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 2.3 *Предположим, что:*

1) существует функционал $V : R^+ \times C_{H_1} \to R^+$ $(0 < H_1 < H)$, *такой, что* $V(t,0) = 0$, $a_1(|\varphi(0)|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant a_2(\|\varphi\|)$, $\dot{V}^+(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0$ *для всех* $(t,\varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$;

2) для каждой предельной пары (g, U) *множество* $\{U(t,\varphi) = 0\}$ *не содержит решения уравнения* $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, *кроме нулевого.*

Тогда решение (1.1) $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво.*

Глава II

Глава 1

1 Предельные уравнения и устойчивость

Возьмем неавтономное функционально-дифференциальное уравнение запаздывающего типа

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \tag{1.1}$$

где $f : R^+ \times C_H \to R^p$ - некоторое непрерывное отображение, удовлетворяющее следующему предположению.

Предположение 1.1 *Для каждого числа* r, $0 < r < H$, *существует такое число* $\mu_r > 0$ *что выполняется неравенство*

$$|f(t, \psi)| \leqslant m_r, \forall \phi \in \bar{C}_r \mu_r(|t_2 - t_1|). \tag{1.2}$$

Пусть выполняется I.1.1 выполнено и $\{r_n\}$ — последовательность чисел такая, что $r_1 < r_2 < \cdots < r_n < \cdots$, $r_n \to H$ при $n \to \infty$. Определим для всех r_i множество $K_i \subset C$ функций $\varphi \in C$, таких, что для $s, s_1, s_2 \in [-h, 0]$

$$|\varphi(s)| \leqslant r_i, \qquad |\varphi(s_2) - \varphi(s_1)| \leqslant \mu_{r_i}(|s_2 - s_1|).$$

Множество K_i очевидно, будет компактом. Положим $\Gamma = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$.

Рассмотрим F - множество всех непрерывных функций f, определенных на $R^+ \times \Gamma$, со значениями в R^p. Через f^τ обозначим сдвиг функции f, $f^\tau(t, \varphi) = f(\tau + t, \varphi)$. Для $f \in F$ семейство сдвигов $F_0 = \{f^\tau : \tau \in R^+\}$ будет являтся подмножеством F.

Дадим определение сходимости в F как равномерной на каждом компакте $K' \subset R^+ \times \Gamma$: последовательность $\{f_n \in F\}$ сходится к $f \in F$, если $\forall K' \subset R^+ \times \Gamma$ и $\forall \varepsilon > 0$ выполняется $|f_n(t, \varphi) - f(t, \varphi)| < \varepsilon$, при $n > N = N(\varepsilon)$ и $(t, \varphi) \in K'$.

Для того, чтобы показать, что в силу определения области Γ эта сходимость метризуема, для всех n определим для двух функций f_1, $f_2 \in F$ полунорму $\|\cdot\|_n$ и соответствующую псевдометрику ρ_n следующим образом

$$\|f\|_n = \sup\{|f(t,\varphi)|, \forall (t,\varphi) \in K'_n\},$$

$$\rho_n(f_1,f_2) = \frac{\|f_2 - f_1\|_n}{1 + \|f_2 - f_1\|_n},$$

где $K'_n = [0,n] \times K_n, \quad n = 1,2,\dots$ (K_n определено выше).

Определим расстояние между функциями $f_1, f_2 \in F$ как

$$\rho(f_1,f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \rho_n(f_1,f_2). \tag{1.3}$$

Можно убедиться, что при этому будут выполнены все аксиомы метрического пространства. И пространство F будет полным по отношению к введенной метрике.

Допустим, что правая часть (1.1) удовлетворяет также следующему предположению.

Предположение 1.2 *Для любого* $K \subset C_H$ *(* K *- компакт) функция* $f = f(t,\varphi)$ *ограничена и равномерно непрерывна по* $(t,\varphi) \in R^+ \times K$, *т.е.* $\forall K \subset C_H \quad \exists M = M(K)$, *и для произвольного малого* $\varepsilon > 0$ *найдется* $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, *такое, что для любых* $(t,\varphi) \in R^+ \times K, \quad (t_1,\varphi_1),(t_2,\varphi_2) \in R^+ \times K : |t_2 - t_1| < \delta$, $\varphi_1, \varphi_2 \in K : \|\varphi_2 - \varphi_1\| < \delta$, *выполняются неравенства*

$$|f(t,\varphi)| \leqslant M, \qquad |f(t_2,\varphi_2) - f(t_1,\varphi_1)| < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Лемма 1.1 *При условии выполнения предположений I.1.1 и I.1.2 семейство сдвигов* $\{f^\tau : \tau \in R^+\}$ *предкомпактно в* F.

Доказательство леммы следует непосредственно из (1.4), построения F и соотношения

$$|f^\tau(t_2,\varphi_2) - f^\tau(t_1,\varphi_1)| = |f(\tau + t_2,\varphi_2) - f(\tau + t_1,\varphi_1)|.$$

Определение 1.1 *Функция* $g : R^+ \times \Gamma \to R^p$ *называется предельной к* f, *если существует последовательность* $t_n \to +\infty$, *такая, что*

$f^{(n)}(t,\varphi) = f(t_n + t, \varphi)$ *сходится к* $g(t,\varphi)$ *в* F. *Замыкание семейства* $\{f^\tau : \tau \in R^+\}$ *в* F *называется оболочкой* $S^+(f)$. *Уравнение*

$$\dot{x}(t) = g(t, x_t) \tag{1.5}$$

называется предельным к (1.1).

При условиях (1.2) и (1.4) уравнение (1.1) является предкомпактным.

Предположение 1.3 *Для любого компактного множества* $K \subset C_H$ *функция* $f = f(t,\varphi)$ *удовлетворяет условию Липшица т.е,* $\forall K \subset C_H$ *существует* $m = m(K)$, *такое, что для любых* $t \in R^+$; $\varphi_1, \varphi_2 \in K$ *будет выполнено неравенство*

$$|f(t,\varphi_2) - f(t,\varphi_1)| \leqslant m\|\varphi_2 - \varphi_1\|. \tag{1.6}$$

При выполнении условия (1.6), каждая предельная функция $g(t,\varphi)$ также будет удовлетворять аналогичному условию Липшица относительно компакта $K \subset \Gamma$.

Вследствие этого получим, что при предположении I.1.3 решения уравнения (1.1) при начальном условии $(t,\varphi) \in R^+ \times C_H$ и уравнения (1.5) для $(t,\varphi) \in R^+ \times \Gamma$ будут единственными.

Связь между решениями уравнений (1.1) и (1.5) определяется следующей теоремой, которую можно вывести из теоремы **??** и определения I.1.1.

Теорема 1.1 *Пусть функция* $g : R^+ \times \Gamma \to R^p$ *есть предельная к* f *в* F *относительно последовательности* $t_n \to +\infty$, *а последовательности* $\{\alpha_n \in R^+\}$ *и* $\{\varphi_n \in F\}$ *таковы, что* $\alpha_n \to \alpha \in R^+$, $\varphi_n \to \varphi \in \Gamma$ *при* $n \to \infty$. *Пусть* $x = x(t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ *есть решения уравнения (1.1), а* $y(t,\alpha,\varphi)$ *есть решение уравнения* $\dot{x}(t) = g(t,x_t)$, *определенное для* $t \in [\alpha - h, \beta[$.

Тогда последовательность функций $y^n(t) = x(t_n + t, t_n + \alpha_n, \varphi_n)$ *сходится к* $y(t,\alpha,\varphi)$ *равномерно по* $t \in [\alpha - h + \varepsilon, \gamma]$ *для малого* $\varepsilon > 0$ *(* $\varepsilon = 0$ *при* $\{\alpha_n = \alpha\}$ *) и каждого* γ, $\alpha < \gamma < \beta$.

Теорема 1.2 *Пусть решение (1.1)* $x = x(t,\alpha,\varphi)$ *ограничено,* $|x(t,\alpha,\varphi)| \leqslant r < H$ *для всех* $t \geqslant \alpha - h$. *Тогда множество* $\omega^+(\alpha,\varphi)$ *полуквазиинвариантно по отношению к семейству предельных уравнений* $\{\dot{x} = g(t,x_t)\}$, *а именно, для каждой точки* $\psi \in \omega^+(\alpha,\varphi)$ *существует предельное уравнение* $\dot{x} = g(t,x_t)$, *такое, что точки его решения* $y(t,0,\psi)$ *в пространстве* C *содержатся в* $\omega^+(\alpha,\varphi)$, $\{y_t(0,\psi), t \in R\} \subset \omega^+(\alpha,\varphi)$.

Замечание 1.1 *Так как сдвиг* $f^\tau(t,\varphi)$ *при большом* $\tau \geqslant T > 0$ *определен для значений* $(t,\varphi) \in [-T,+\infty[\times C_H$, *то по построению уравнения (1.5) его областью определения можно принять область* $R\times\Gamma$. *Решение* $y_t(t,0,\psi)$ *в теореме I.1.2 также по построению продолжимо для всех* $t\in R$, *при этом* $\{y_t(0,\psi), t\in R\}\subset\omega^+(\alpha,\varphi)$. *Тем самым, можно утверждать о квазиинвариантности положительного предельного множества* $\omega^+(\alpha,\varphi)$ *по отношению к семейству предельных уравнений* $\{\dot{x} = g(t,x_t)\}$.

Замечание 1.2 *Предельное уравнение определяется в подобласти* $R\times\Gamma\subset R\times G$. *Однако так как для семейства решений уравнения (1.1)* $\{x = x(t,0,\varphi),\ \varphi\in C_H\}$ *множество значений* $\{x_t : t\geqslant h\}\subset\Gamma$, *динамические свойства решений (1.1), в том числе их предельные свойства, не зависят от сужения отображения* D^+ *на* Γ.

Допустим, что правая часть уравнения (1.1) имеет значение $f(t,0)\equiv 0$, и, следовательно, это уравнение имеет нулевое решение $x=0$.

Ниже, если не оговаривается особо, предполагается непрерывность $V(t,\varphi)$ и определение производной в общей форме из главы I. Основным используемым свойством при этом определении и условии $\dot{V}(t,\varphi)\leqslant -W(t,\varphi)\leqslant 0$ является, как указывалось в **??**, невозрастание функции $V(t) = V(t,x_t(\alpha,\varphi))$ для всех $t\geqslant\alpha$.

Определение 1.2 *Пусть* $t_n\to+\infty$ *есть некоторая последовательность. Для каждого* $t\in R$ *и* $c\in R$ *определим множество* $V_\infty^{-1}(t,c)\subset C_H$ *следующим образом: точка* $\varphi\in V_\infty^{-1}(t,c)$, *если существуют последовательность* $\{t_{n_k}\}\subset\{t_n\}$ *и последовательность* $\{\varphi_k\in\Gamma, \varphi_k\to\varphi\}$, *такие, что*

$$\lim_{k\to\infty} V(t_{n_k}+t,\varphi_k) = c. \tag{1.7}$$

Определение 1.3 *Будем говорить, что отображение* $u : (\alpha,\beta)\to C_H$ *или* $u : R\to C_H$ *принадлежит множеству* $\{V_\infty^{-1}(t,c), c = c_0 = const\}$, *если для любого* $\gamma>0$ *(соответственно для любого* $T>0$ *) существуют последовательность* $\{t_{n_k}\}\subset\{t_n\}$ *и последовательность непрерывных отображений* $u_k(t)$, *такие, что* $\{u_k(t)\}$ *сходится к* $u(t)$ *равномерно по* $t\in[\alpha+\gamma,\beta-\gamma]$ *(соответственно по* $t\in[-T,T]$ *), таким образом, что*

$$\lim_{k\to\infty} V(t_{n_k}+t,u_k(t)) = c_0. \tag{1.8}$$

Допустим, что производная $\dot{V}(t,\varphi)$ оценивается неравенством

$$\dot{V}(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0, \tag{1.9}$$

где функционал $W = W(t,\varphi)$ ограничен, равномерно непрерывен на каждом множестве $R^+ \times K$, т.е. для каждого компактного множества $K \subset C_H$ и любого $\varepsilon > 0$ найдутся $m = m(K)$ и $\delta = \delta(\varepsilon, K) > 0$, такие, что имеют место неравенства

$$W(t,\varphi) \leqslant m, \qquad |W(t_2,\varphi_2) - W(t_1,\varphi_1)| \leqslant \varepsilon \tag{1.10}$$

для всех $(t,\varphi) \in R^+ \times K$; (t_1,φ_1), $(t_2,\varphi_2) \in R^+ \times K : |t_2 - t_1| \leqslant \delta$, $\|\varphi_2 - \varphi_1\| \leqslant \delta$. Как и в случае f, при этих условиях семейство сдвигов $\{W^\tau(t,\varphi) = W(t+\tau,\varphi), \tau \in R^+\}$ предкомпактно в некотором пространстве непрерывных функций $F_U = \{U : R \times \Gamma \to R\}$ с метризуемой компактно открытой топологией.

Определение 1.4 *Функция* $U \subset F_U$ *есть предельная к* W, *если существует* $t_n \to +\infty$, *такая, что последовательность* $\{W_n(t,\varphi) = W(t_n + t,\varphi)\}$ *сходится к* U *в* F_U.

Определение 1.5 *Будем говорить, что отображение* $u : (\alpha,\beta) \to C_H$ $(u : R \to C_H)$ *принадлежит множеству* $\{\varphi \in C_H : U(t,\varphi) = 0\}$, *если тождество* $U(t,u(t)) \equiv 0$ *выполняется для всех* $t \in (\alpha,\beta)$ *(соответственно для всех* $t \in R$ *),* $u(t) \in \{U(t,\varphi) = 0\}$ *для* $t \in (\alpha,\beta)$ *и (для всех* $t \in R$ *).*

Определение 1.6 *Пусть предельный функционал* $U(t,\varphi)$ *задается согласно определению I.1.4 относительно некоторой последовательности* $t_n \to +\infty$. *Множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$, *определяемое этой же последовательностью* $t_n \to +\infty$ *согласно определению I.1.5, назовем соответствующим* $U(t,\varphi)$.

2 Функционалы Ляпунова и квазиинвариантность

Рассмотрим задачу об определении свойств устойчивости уравнения (1.1) на основе функционала Ляпунова со знакопостоянной производной в предположениях (1.4) и (1.6) предкомпактности (1.1), существования семейства предельных уравнений $\{\dot{x} = g(t,x_t)\}$ и единственности решений.

Пусть $V = R^+ \times C_H \to R$ есть непрерывный функционал, производная которого удовлетворяет неравенству (1.9). Введем следующее

Определение 2.1 *Функции* $g \in F$ *и* $U \in F_U$ *образуют предельную пару* (g, U), *если они являются предельными к* f *и* W *для одной и той же последовательности* $t_n \to +\infty$. *Множество* $V_\infty^{-1}(t, c)$, *определяемое в соответствии этой же последовательности* $t_n \to +\infty$, *есть соответствующее* (g, U).

Теорема 2.1 *Предположим, что:*

1) существует непрерывный функционал $V : R^+ \times C_H \to R$, *ограниченный снизу на каждом компакте* $K \subset C_H$, $V(t, \varphi) \geqslant m(K)$ *для всех* $(t, \varphi) \in R^+ \times K$, *и такой, что* $\dot{V}(t, \varphi) \leqslant -W(t, \varphi) \leqslant 0$ *для всех* $(t, \varphi) \in R^+ \times C_H$;

2) решение $x = x(t, \alpha, \varphi)$ *уравнения (1.1) ограничено,* $|x(t, \alpha, \varphi)| \leqslant H_1 < H$ *для всех* $t \geqslant \alpha - h$.

Тогда имеется $c = c_0 \geqslant m$, *при котором для каждой предельной точки* $\psi \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ *существуют предельная пара* (g, U) *и соответствующее множество* $V_\infty^{-1}(t, c)$, *решение* $y = y(t)$, $y_0 = \psi$, *уравнения* $\dot{x} = g(t, x_t)$, *такие, что* $y_t \in \omega^+(\alpha, \varphi)$ *и* $y_t \subset \{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \mathrm{const}\} \bigcap \{\mathrm{U}(\mathrm{t}, \varphi) = 0\}$ *для всех* $t \in R$.

Определение 2.2 *Множество* $M(t) \subset C_H$ *не содержит решений уравнения* $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$, *если для каждой точки* $\psi \in M(\alpha)$ *соответствующее решение* $y(t, \alpha, \psi)$ *таково, что при некотором* $\beta \in R$ *имеем* $y_\beta(\alpha, \psi) \notin M(\beta)$.

Аналогично следствию **??** можно вывести следующий результат.

Следствие 2.1 *Если в условиях теоремы I.2.1 предположить также, что существует последовательность* $t_n \to +\infty$, *определяемые которой предельная пара* (g_0, U_0) *и множество* $V_\infty^{-1}(t, c)$ *будут такими, что для каждого* $c_0 > c_1$ *множество* $\{V_\infty^{-1}(t, c) : c = c_0 = \mathrm{const} > \mathrm{c}_1\} \bigcap \{\mathrm{U}_0(\mathrm{t}, \varphi) = 0\}$ *не содержит решений* $\dot{x}(t) = g_0(t, x_t)$, *то в дополнение к выводу теоремы I.2.1 имеем также соотношение (**??**).*

Перейдем к исследованию асимптотической устойчивости нулевого решения уравнения (1.1), полагая, что $f(t, 0) \equiv 0$.

Аналогичным образом, с использованием следствия 2.1, по аналогии с теоремами **??** и **??** доказываются следующие две теоремы.

Теорема 2.2 *Предположим, что:*

1) выполнено условие 1) теоремы **??***;*

2) последовательность $t_n \to +\infty$ *такова, что определяемые которой предельная пара* (g_0, U_0) *и множество* $V_\infty^{-1}(t,c)$ *будут такими, что множество* $\{V_\infty^{-1}(t,c) : c = c_0 > 0\} \bigcap \{U_0(t,\varphi) = 0\}$ *не содержит решений уравнения* $\dot{x} = g_0(t, x_t)$*.*

Тогда решение (1.1) $x = 0$ *асимптотически устойчиво равномерно по* φ*.*

Замечание 2.1 *Аналогично замечанию* **??** *для вывода асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения* $x = 0$ *по теоремам I.2.2 и* **??** *достаточно, чтобы функция* f *удовлетворяла предположениям I.1.1 – I.1.3 относительно некоторой последовательности интервалов* $I_n = [t_n, t_n + T]$*,* $t_n \to +\infty$*,* $T > h$*. Вне этих интервалов функция* f *может быть произвольной.*

Значительный интерес представляет следующий результат о равномерной асимптотической устойчивости.

Теорема 2.3 *Предположим, что:*

1) существует функционал $V : R^+ \times C_{H_1} \to R^+$ $(0 < H_1 < H)$*, такой, что* $V(t,0) = 0$*,* $a_1(|\varphi(0)|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant a_2(\|\varphi\|)$*,* $\dot{V}^+(t,\varphi) \leqslant -W(t,\varphi) \leqslant 0$ *для всех* $(t,\varphi) \in R^+ \times C_{H_1}$*;*

2) для каждой предельной пары (g, U) *множество* $\{U(t,\varphi) = 0\}$ *не содержит решения уравнения* $\dot{x}(t) = g(t, x_t)$*, кроме нулевого.*

Тогда решение (1.1) $x = 0$ *равномерно асимптотически устойчиво.*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

[1] Азбелев Н.В., Максимов В.П., Рахматуллина Л.Ф. Введение в теорию функционально дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1991. 277 с.

[2] Алексеенко Н.В. Устойчивость решений нелинейных почти периодических систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Известия Вузов. Сер. Математика. 2000. №2. С.3–6.

[3] Ананьевский И.М., Колмановский В.Б. О стабилизации некоторых регулируемых систем с последействием // Автоматика и телемеханика. 1989. №9. С.34–42.

[4] Анашкин О.В. Достаточные условия устойчивости и неустойчивости для одного класса нелинейных функционально-дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №7. С.867–875.

[5] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // ПММ. 1979. Т.43. Вып.5. С.796–805.

[6] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости неавтономных систем // ДАН УзССР. 1980. №7. С.20–22.

[7] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономной системы // ПММ. 1984. Т.48. Вып.2. С.225–232.

[8] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных // ПММ. 1984. Т.48. Вып.5. С.707–713.

[9] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости и неустойчивости на основе предельных уравнений // ПММ. 1987. Т.51. Вып.2. С.253–260.

[10] Андреев А.С. Об исследовании частичной асимптотической устойчивости // ПММ. 1991. Т.55. Вып.4. С.539–547.

[11] Андреев А.С. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости нулевого решения неавтономного функционально-дифференциального уравнения // Проблемы аналитической механики, устойчивости и управления движением. Новосибирск: Изд-во "Наука 1991. С.36–40.

[12] Андреев А.С. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во фМГУ, 1994. 80 с.

[13] Андреев А.С. Об устойчивости неавтономного функционально дифференциального уравнения // Доклады РАН. 1997. Т.356. №7. С.151–153.

[14] Андреев А.С. Об управляемости нестационарной нелинейной системы // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т.10. Вып.1. С.88.

[15] Андреев А.С. Некоторые задачи об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным и неограниченным запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 2003. Вып.1(13). С.3–11.

[16] Андреев А.С. К методу К.П. Персидского в задачах о неустойчивости // Математический журнал. Алматы. 2004. Т.4. №2(12). С.76–82.

[17] Андреев А.С. О стабилизации движения управляемой системы с запаздывающей обратной связью // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2004. Т.11. Вып. 3. С. 612–613.

[18] Андреев А.С., Бойкова Т.А. Знакопостоянные функции Ляпунова в задачах об устойчивости // Механика твердого тела. 2002. Вып.32. С.109–116.

[19] Андреев А.С., Лысяков В.Н. К методу Ляпунова в задаче об устойчивости функционально дифференциального уравнения // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 1996. Вып.1(2). С.5–10.

[20] Андреев А.С., Павликов С.В. Об устойчивости по части переменных неавтономного функционально дифференциального уравнения // ПММ. 1999. Т.63. Вып.1. С. 3–12.

[21] Андреев А.С., Павликов С.В. Исследование устойчивости функционально-дифференциальных уравнений на основе знакопостоянных функционалов Ляпунова // Труды Средневолжского математического общества. 1999. Т.2(1) С.74–75.

[22] Андреев А.С., Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Матем. заметки. 2000. Т.68. №3. С.323–331.

[23] Андреев А.С., Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости относительно части переменных // Труды Четвертой Международной научно-практической конференции "Математическое моделирование физических, экономических, технических, социальных систем и процессов". (10-12 декабря 2001г., г.Ульяновск). Секция Математики. Ульяновск: УлГУ, 2001. С.15–16.

[24] Андреев А.С., Павликов С.В. К задаче об устойчивости по части переменных функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 2003. Вып.1(13). С.12–21.

[25] Андреев А.С., Павликов С.В. Незнакоопределенные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Механика твердого тела. 2004. Вып.34. С.112–120.

[26] Андреев А.С., Седова Н.О. Методы исследования устойчивости неавтономных уравнений. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2001. 60 с.

[27] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Предельные уравнения в задаче об устойчивости функционально-дифференциального уравнения // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №4. С.435–440.

[28] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. К методу функционалов Ляпунова в задаче об асимптотической устойчивости и неустойчивости // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №7. С.876–885.

[29] Андреев А.С., Хусанов Д.Х. Об асимптотической устойчивости и неустойчивости функционально-дифференциального уравнения с периодической правой частью // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск. 1999. Вып.1(6). С.3–17.

[30] Андреева Е.А., Колмановский В.Б., Шайхет Л.Е. Управление системами с последействием. М.: Наука, 1992. 333 с.

[31] Астанов И.С., Белоцерковский С.М., Каганов Б.О., Кочетков Ю.А. О системах интегро-дифференциальных уравнений, описывающих неустановившееся движение тел в сплошной среде // Дифференциальные уравнения. 1982. Т.18. №9. С.1628–1637.

[32] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир, 1967. 548 с.

[33] Билашевич И.В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Стабилизация динамических систем при наличии запаздываний в канале обратной связи // Автоматика и телемеханика. 1996. №6. С.31–39.

[34] Бранец В.Н., Шмыглевский И.П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.

[35] Вольтерра В. Математическая теория борьбы за существование. М.: Наука, 1976. 288 с.

[36] Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 302 с.

[37] Воротников В.И. Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных. М.: Наука, 1991. 288 с.

[38] Воротников В.И., Румянцев В.В. Устойчивость и управление по части координат фазового вектора динамических систем: теория, методы и приложения. М.: Научный мир, 2001. 320 с.

[39] Гайшун И.В. Асимптотическая устойчивость одной системы с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1972. Т.8. №5. С. 906–908.

[40] Гайшун И.В., Княжище Л.Б. Теоремы устойчивости уравнений с запаздыванием, использующие немонотонные функционалы Ляпунова // Докл. Ан Беларусии. 1994. Т.38. №3. С.5–8.

[41] Гайшун И.В., Княжище Л.Б. Немонотонные функционалы Ляпунова. Условия устойчивости уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1994. Т.30. №8. С.1291–1298.

[42] Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука, 1967. 575 с.

[43] Горяченко В.Д. Методы теории устойчивости в динамике ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1971. 264 с.

[44] Горяченко В.Д. Методы исследования устойчивости ядерных реакторов. М.: Атомиздат, 1977. 296 с.

[45] Далецкий Ю.Л., Крейн М.Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. М.: Наука, 1970. 534 с.

[46] Дроздов А.Д., Колмановский В.Б., Триджанте Д. Об устойчивости системы хищник-жертва // Автоматика и телемеханика. 1992. №11. С.57–64.

[47] Жиков В.В., Левитан Б.М. Почти периодические функции и дифференциальные уравнения. М.: Изд-во МГУ, 1978. 205 с.

[48] Журавлев В.Ф. Теоретическая механика. М.: Наука, Физматлит, 1997. 320 с.

[49] Калистратова Т.А. Об устойчивости по части переменных систем с запаздыванием // Авт. и телемех. 1986. №5. С.32–37.

[50] Ким А.В. К методу функций Ляпунова для систем с последействием // Метод функций Ляпунова в анализе динамики систем. Новосибирск, 1987. С.79–83.

[51] Ким А.В. О методе функционалов Ляпунова для систем с последействием // Авт. и телемех. 1990. №2. С.24–31.

[52] Ким А.В. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости систем с последействием. Екатеринбург: Изд-во Уральского ун-та, 1992. 142 с.

[53] Ким А.В. i-Гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. 234 с.

[54] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость уравнений с запаздыванием // Докл. АН Беларуси. 1997. Т.41. №1. С.26–29.

[55] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. I// Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №2. С.189–196.

[56] Княжище Л.Б. Локализация предельных множеств и асимптотическая устойчивость неавтономных уравнений с запаздыванием. II// Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №8. С.1056–1065.

[57] Княжище Л.Б. Функционалы Ляпунова и условия равномерной асимптотической устойчивости уравнений с запаздыванием // Докл. НАН Беларуси. 2000. Т.44. №5. С.40–43.

[58] Княжище Л.Б., Щавель Н.А. Немонотонные функционалы Ляпунова и оценки решений диффереciальных уравнений с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1997. Т.33. №2. С.205–211.

[59] Коддингтон Э.А., Левинсон Н. Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: ИЛ, 1958. 474 с.

[60] Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с произвольным последействием // Докл. РАН. 1993. Т.331. №4. С.421–424.

[61] Колмановский В.Б. Об устойчивости некоторых систем с последействием и переменными коэффициентами // ПММ. 1995. Т.59. Вып.1. С.71–81.

[62] Колмановский В.Б. Об устойчивости систем с последействием нейтрального типа // ПММ. 1996. Т.60. Вып.2. С.210–222.

[63] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. М.: Наука, 1981. 448 с.

[64] Колмановский В.Б., Носов В.Р. Системы с последействием нейтрального типа // Автоматика и телемеханика. 1984. №1. С.5–35.

[65] Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1976. 543с.

[66] Кордуняну К., Лакшмикантам В. Уравнения с неограниченным запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1985. №7. С.5–44.

[67] Красовский Н.Н. О применении второго метода А.М.Ляпунова для уравнений с запаздыванием по времени // ПММ. 1956. Т.20. №3. С.315–327.

[68] Красовский Н.Н. Об асимптотической устойчивости систем с последействием // ПММ. 1956. Т.20. №4. С.513–518.

[69] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

[70] Красовский Н.Н., Осипов Ю.С. О стабилизации движений управляемого объекта с запаздыванием в системе регулирования // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1963. №6. С.3–15.

[71] Красовский Н.Н. Проблемы стабилизации управляемых движений // Малкин И.Г. Теория устойчивости. Доп.4. М.: Наука, 1966. С.475–514.

[72] Лакшмикантам В., Лила С., Мартынюк А.А. Устойчивость движения: метод сравнения. Киев: Наукова думка, 1991. 248 с.

[73] Лакшмикантам В., Мартынюк А.А. Развитие прямого метода Ляпунова для систем с последействием (обзор) // Прикладная механика. 1993. Т.29(39). №2. С.3–15.

[74] Люстерник Л.А., Соболев В.И. Краткий курс функционального анализа. М.: Высшая школа, 1982. 271 с.

[75] Ляпунов А.М. Общая задача об устойчивости движения. Л.: Гостехиздат, 1950. 472 с.

[76] Малкин И.Г. Теория устойчивости движения. Изд. 2-е. М.: Наука, 1966. 530 с.

[77] Маркеев А.П. Теоретическая механика. М.: Наука, 1991. 414 с.

[78] Мартынюк А.А., Като Д., Шестаков А.А. Устойчивость движения метод предельных уравнений. Киев: Наукова думка, 1990. 256 с.

[79] Матросов В.М. Метод векторных функций Ляпунова: анализ динамических свойств нелинейных систем. М.: Физматлит. 2000. 380 с.

[80] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972. 352 с.

[81] Мышкис А.Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи матем. наук. 1977. Т.32. Вып.2(194). С.173–202.

[82] Мышкис А.Д. Предисловие редактора перевода. В кн.: Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1984. С.5–6.

[83] Мышкис А.Д., Эльсгольц Л.Э. Состояние и проблемы теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом // Успехи матем. наук. 1967. Т.22. Вып.2. С.21–57.

[84] Немыцкий В.В., Степанов В.В. Качественная теория дифференциальных уравнений. М.-Л., Гос. изд-во техн.-теор. лит-ры. 1949. 550 с.

[85] Новоселов В.С. Аналитическая механика систем с переменными массами. Л.: Изд-во ЛГУ, 1969. 239 с.

[86] Норкин С.Б. Дифференциальные уравнения второго порядка с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1965. 354 с.

[87] Осипов Ю.С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1965. Т.1. №5. С.605–618.

[88] Павликов С.В. Метод функционалов Ляпунова в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 1996. Вып. 1. Ч.II. С. 46–56.

[89] Павликов С.В. Об устойчивости нулевого решения функционально-дифференциального уравнения второго порядка// Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1996. Вып. 2. С. 32–33

[90] Павликов С.В. О стабилизации управляемых механических систем с обратной связью с запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1997. Вып. 2(4). С. 66–70.

[91] Павликов С.В. Знакопостоянные функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости функционально-дифференциальных уравнений с конечным запаздыванием // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 2002. Вып.2(12). С.30–39.

[92] Павликов С.В. Предельные уравнения и функционалы Ляпунова в задаче об устойчивости по части переменных // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 2003. Вып.1(13). С.63–74.

[93] Павликов С.В. Об управляемости и стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Обозрение прикладной и промышленной математики. 2003. Т.10. Вып.1. С.201.

[94] Павликов С.В. О стабилизации движения управляемой системы с запаздыванием // Механика твердого тела. 2005. Вып.34.

[95] Перегудова О.А. К методу сравнения в исследовании устойчивости функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа // Ученые записки Ульяновского государственного университета. Сер. Фундаментальные проблемы математики и механики. Ульяновск: УлГУ, 1999. Вып.2(7). С.32–36.

[96] Перегудова О.А. Методы сравнения и преобразования в задачах об устойчивости систем с запаздыванием. Учебное пособие. Ульяновск: Изд-во УлГУ, 2005. 83 с.

[97] Прасолов А.В. О применении функций Ляпунова для исследования неустойчивости решений систем с последействием // Вестник ЛГУ. 1981. Сер.1. 19. С.116–118.

[98] Разумихин Б.С. Об устойчивости систем с запаздыванием // ПММ. 1956. Т.20. Вып. 4. С. 500–512.

[99] Разумихин Б.С. Устойчивость по первому приближению систем с запаздыванием // ПММ. 1958. Т.22. Вып. 2. С.155–166.

[100] Разумихин Б.С. Применение метода Ляпунова к задачам устойчивости систем с запаздыванием // Автоматика и телемеханика. 1960. Т.21. №6. С.740–748.

[101] Разумихин Б.С. Метод исследования устойчивости систем с последействием // Доклады АН СССР. 1966. Т.167. №6. С.1234–1236.

[102] Разумихин Б.С. Устойчивость эредитарных систем. М.: Наука, 1988. 106 с.

[103] Резван В. Абсолютная устойчивость автоматических систем с запаздыванием. М.: Наука, 1983. 300 с.

[104] Румянцев В.В. Об устойчивости движения по отношению к части переменных // Вестник МГУ. Сер. Мат., механ., физ., астрон., хим. 1957. №4. С.9-16.

[105] Румянцев В.В. Метод функции Ляпунова в теории устойчивости движения // Механика в СССР за 50 лет. Т.1. М.: Наука, 1968. С.7–66.

[106] Румянцев В.В., Озиранер А.С. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных. М.: Наука, 1987. 253 с.

[107] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. М.: Мир, 1980. 300 с.

[108] Седова Н.О. Вырожденные функции в исследовании асимптотической устойчивости решений функционально-дифференциальных уравнений // Мат. заметки. 2005. Т.8. №3. С.468–472.

[109] Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости движений в некоторых классах с последствием // ПММ. 1993. Т. 57. Вып. 5. С. 166–174.

[110] Сергеев В.С. Об асимптотической устойчивости и оценке области притяжения в некоторых системах с последействием // ПММ. 1996. Т. 60. Вып. 5. С. 744–751.

[111] Тереки Й. Экспоненциальная и степенная асимптотическая устойчивость функционально-дифференциальных уравнений. В кн. Развитие и применение метода функций Ляпунова. Новосибирск: Наука, 1992. С.101–107.

[112] Троценко Г.А. Об устойчивости решений почти периодической системы // Механика твердого тела. 2002. Вып. 32. С.129-133.

[113] Хейл Дж. Теория функционально-дифферепнциальных уравнений. М.: Мир, 1984. 421 с.

[114] Хусаинов Д.Я. Об экспоненциальной устойчивости линейных систем с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №2. С.357–359.

[115] Хусаинов Д.Я. Экспоненциальная оценка решений линейных систем с запаздыванием при произвольном отклонении аргумента // Дифференциальные уравнения. 1989. Т.25. №9. С.1631–1633.

[116] Четаев Н.Г. Устойчивость движения. М.: Наука, 1990. 276 с.

[117] Шестаков А.А. Прямой метод Ляпунова как метод локализации функциями Ляпунова предельных множеств неавтономных динамических процессов (на базе предельных уравнений и динамических систем) // Функции Ляпунова и их применение. Ан СССР. Сибирское отд., Иркутский вычислит. центр. Новосибирск: Наука, 1987. С.14–48.

[118] Шестаков А.А. Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами. М.: Наука, 1990. 316 с.

[119] Шиманов С.Н. О неустойчивости движения систем с запаздыванием по времени // ПММ. 1960. Т.24. Вып. 1. С.55–63.

[120] Шиманов С.Н. Устойчивость систем с запаздыванием // Труды II Всес. съезда по теорет. и прикл. механике. Москва, 1964, вып. 1. М.: Наука, 1965. С.170–180.

[121] Щеглов В.А. Устойчивость линейного дифференциального уравнения с распределенным запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1996. Т.32. №12. С.1665–1669.

[122] Щеглов В.А. Устойчивость решений одного уравнения второго порядка с запаздыванием // Дифференциальные уравнения. 1998. Т.34. №12. С.1710–1713.

[123] Эльсгольц Л.Э. Устойчивость решений дифференциально-разностных уравнений // Успехи мат. наук. 1954. Т.9. №4. С.95-112.

[124] Эльсгольц Л.Э. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1964. 127 с.

[125] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971. 296 с.

[126] Янушевский Р.Т. Управление объектами с запаздыванием. М.: Наука, 1978. 416 с.

[127] Andreev A. Sulla stabilitá asintotica ed instabilitá // Rend. Sem. Univ. Padova. 1986. V.75. P.235–245.

[128] Andreev A. On the stability of nonautonomous functional differential equations // Nonlinear Analysis. TMA. 1997. V.30. Part 5. P. 2847–2854.

[129] Andreev A., Khusanov D. On asymptotic stability and nonstability functional-differential equations with periodic right side // Nonlinear oscillations, 2001. V.4. №3. P.290–298.

[130] Andreev A.S., Sedova N.O. On the stability of nonautonomous equations with delay via limiting equtions // Functional Differential Equations. 1998. V.5. №1-2. P. 21–37.

[131] Andreev A., Zappala'G. On stability for perturbed differential equations // Le Natematiche. 1996. V.51. F. I. P. 27–41.

[132] Artstein Z. Topological dinamics of ordinary differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V.23. P.216–223.

[133] Artstein Z. The limiting equations of nonautonomous differential equations // J. Differ. Equations. 1977. V. 25. P.184–202.

[134] Artstein A. Uniform asymptotic stability via the limiting equations // J. Differ. Equat. 1978. V.27. P.172–189.

[135] Becker L.C., Burton T.A., Zhang S. Functional differential equations and Jensen's Inequality // J. of Math. Anal. and Appl. 1989. V.138. N 1. P.135–156.

[136] Bernfeld S.R., Corduneanu C., Ignatyev A.O. On the stability of invariant sets of functional differential equations // Nonlinear Analysis. 2003. V.55. P.641–656.

[137] Burton T.A. Uniform asymptotic stability in functional differential equations Proc. Amer. Math. Soc. 1978. V.68. P.195–199.

[138] Burton T.A. Stability theory for delay equations // Funkcial. Ekvac. 1979. V. 22. №1. P.67–76.

[139] Burton T.A., Casal A., Somolinos A. Upper and lower bounds for Liapunov functionals // Funkcial. Ekvac. 1989. V. 32. №1. P.23–55.

[140] Burton T.A., Hatvani L. Stability theorems for nonautonomous functional differential equations by Liapunov functionals // Tohoku Math. J. 1989. V.41. P.65–104.

[141] Burton T.A., Hatvani L. On nonuniform asymptotic stability for nonautonomous functional differential equations // Differential and Integral Equations. 1990. V.3. P.285–293.

[142] Burton T.A., Makay G. Marachkov stability results for functional differential equations // EJQTDE, 1998. №1. P.1–17.

[143] Conley C.C., Miller R.K. Asymptotic stability without iniform stability. Almost periodic coefficients // J. Differ. Equat. 1965. V.1. №1. P.333–336.

[144] Corduneanu C. On partial stability for delay systems // Ann. Polon. Math. 1975. V.29. P.357–362.

[145] Corduneanu C., Ignatyev O.A. Stability of invariant sets of functional differential equations with delay // Nonlinear Func. Anal. and Appl. 2005. №1. P.11–24.

[146] Gyori I., Hartung F. Preservation of stability in delay equations under delay perturbations // Journal of Math. Anal. and Appl. 1998. V. 220. P.290–312.

[147] Haddock J. The "evolution"of invariance principles a la Liapunov's direct method // Advances in nonlinear dynamics. Stability and Control: Theory, Methods and Applications. V.5. 1997. P. 261–272.

[148] Haddock J., Ko Y. Lyapunov-Razumikhin functions and an instability theorem for autonomous functional-differential equations with finite delay // Rocky Mtn. J. Math. 1995. V.25. P. 261–267.

[149] Haddock J., Krisztin T., Terjeki J. Invariance principles for autonomous functional differential equations // J. Integral Equations. 1985. V.10. P.123–136.

[150] Haddock J., Terjéki J. Liapunov-Razumikhin functions and an invariance principle for functional differential equations // J. Differential Equations. 1983. V.48. №1. P.95–122.

[151] Haddock J., Terjéki J. On the location of positive limit sets for autonomous functional differential equations with infinite delay // J. Differential Equations. 1990. V.86. P.1–32.

[152] Haddock J., Zhao J. Instability for autonomous and periodic functional differential equations with finite delay // Funkcialay Ekvacioj. 1996. V.39. P.553–570.

[153] Hale J. A stability theorem for functional-differential equations // Proc. N.A.S. 1963. V.50. P.942–946.

[154] Hale J. Dynamical systems and stability // J. Math. Anal. Appl. 1969. V.26. P.39–59.

[155] Hale J. Functional differential equations with infinite delays // J. of Math.An. and Applic., 1974. V. 48. P.276–293.

[156] Hale J.K., Kato J. Phase space for retarded equations with infinite delay // Funk. Ekv., 1978. V.21. P.11–41.

[157] Hatvani L. On the asymptotic stability of the solutions of functional differential equations // Qualitative theory of differential equations. Colloq. Math. Soc. J.Bolyai. Vol.53. North Holland, Amsterdam. 1990. P.227–238.

[158] Hatvani L. On the asymptotic stability in differential systems by Liapunov direct method // Proceedings of the First World Congress

of Nonlinear Analysts. Tampa, Florida, August 19-26, 1992. W.de 6., Berlin -N.Y. 1996. P.1341–1348.

[159] Hatvani L. On the asymptotic stability by Lyapunov functionals with semidefinite derivatives // Nonlinear Analysis, TMA. 1997, V.30. №8. P. 4713–4721.

[160] Hatvani L. Annulus arguments in the stability thery for functional differential equations // Differ. and Integral Equations. 1997. V. 10. №5. P. 975–1002.

[161] Hatvani L. On Lyapunov's direct method for nonautonomous fde's // Functional Differential Equations. 1998. V. 5. №3–4. P.315-323.

[162] Hatvani L. On the asymptotic stability for functional differential equations by Lyapunov functionals // Nonlinear Anal., Theory Methods Appl. 2001. 47.№7. P.4333–4343.

[163] Hornor W.E. Invariance principles and asymptotic constancy of solutions of precompact functional differential equations // Tohoky Math. J. 1990. V.42. P.217–229.

[164] Ignatyev A.O. On the asymptotic stability in functional differential equations // Proceedings of the American Math. Society. 1999. V.127. №6. P. 1753–1760.

[165] Ignatyev A.O. On the partial equiasymptotic stsbility in functional differential equations // J. of Math. Anal. and Appl. 2002. V. 268. P.615–628.

[166] Jankovic M. Control Lyapunov-Razumikhin functions and robust stabilization of time delay systems // IEEE Trans. on Automatic Control. 2001. V.46. P. 1048–1060.

[167] Kato J. Uniform asymptotic stability and total stability // Tohoku Math. Journ. 1970, V.22. P.254–269.

[168] Kato J. On Liapunov–Razumikhin type theorems for functional differential equations // Funkc. Evkac., 1973. V.16. №3. P.225–239.

[169] Kato J. Liapunov's second methods in functional differential equations // Tohoku Math. J. 1980. V. 32. №4. P. 487–492.

[170] Makay G. An example on the asymptotic stability for functional differential equations // Nonl. Anal., TMA// 1994. V.23. P.365–368.

[171] Mao X. Comments on "An improved Razumikhin-type theorem and its Applications"// IEEE Transactions on automatic control. 1997. V. 42. P. 429–430.

[172] Mikolajska Z. Une remarque sur des notes der Razumichin et Krasovskij sur la stabilite asimptotique // Ann. Polon. Math., **22** (1969). P.69–72.

[173] Murakami S. Perturbation theorems for functional differential equations with infinite delay via limiting equations // J. Differ. Equat. 1985. V.59. P.314–335.

[174] Saperstone S.N. Semidynamical system in the infinite dimentional space. N.Y.: Springer – Verlag. 1981. 474 p.

[175] Sedova N. On employment of semi-definite function in stability of delayed equations // Journal of Mathematical Analysis and Applications. 2003. V.281, №1. P.307–319.

[176] Sedova N. Razumikhin-type theorems in the problem on instability of nonautonomous equations with finite delay // Funckcialaj Ekvacioj. 2004. V.47. P.187–204.

[177] Seifert G. Liapunov-Razumikhin conditions for asymptotic stability in functional differential equations of Volterra type // J. Differential equations. 1974. 16. P.289–297.

[178] Sell G.R. Nonautonomous differential equations and topological dynamics. 1, 2 // Trans. Amer. Math. Soc., 1967. V.22. P.241–283.

[179] Taniguchi T. Asymptotic behavior theorems for non-autonomous functional differential equations via Lyapunov-Razumikhin method // Journal of Math. Analysis and Appl. 1995. V. 189. P.715–730.

[180] Taniguchi T. Asymptotic behavior theorems of solutions of functional differential equations with finite delay // Journal of Math. Analysis and Appl. 1996. V. 199. P.776–786.

[181] Terjéki J. On the asymptotic stability of solutions of functional differential equations // Annalea Polonici Mathematici. 1979. V. 36. P. 299–314.

[182] Wang Z. Comparison method and stability problem for functional differential equations // Tohoku Math. J. 1983. V.35. P. 349–356.

[183] Wang T. Weakening the condition $W_1(|\varphi(\theta)|) \leqslant V(t,\varphi) \leqslant W_2(\|\varphi\|)$ for uniform asymptotic stability // Nonl. Anal., TMA. 1994. V.23. №2. P.251–264.

[184] Yorke J.A. Some extensions of Liapunov's second method. – SIAM, Diff. integ. equat., Pa, 1969, p.206–207.

[185] Yoshizawa T. Stability theory by Liapunov's second method. Tokio: The Math. Soc. of Japan, 1966, 216 p.

[186] Yoshizawa T. Stability Theory and the Existence of Periodic Solutions and Almost-Periodic Solutions. Applied Math. Sciences, vol. 14, 1975. Springer-Verlag. N.Y. 233 p.

[187] Zhang Bo. Asymptotic stability in functional differential equations by Lyapunov functionals // Trans. Amer. Math. Soc., 1995. V.347. №4. P.1375–1382.

Научное издание

Андреев Александр Сергеевич

УСТОЙЧИВОСТЬ НЕАВТОНОМНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Зав. отделом: Г.А. Углева
Обложка: Н.В.Пенькова
Редактор Л.Г.Соловьева