Chapter 9

Convolution 卷积

对于频率响应 $H(w)$，如何只在时域中计算 $f(t)$ 的响应 $y(t)$？

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(w)F(w)e^{jwt}dw=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(w)\left[\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)e^{-jw\tau}d\tau\right]e^{jwt}dw$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(w)\cdot e^{jw(t-\tau)}dw\,d\tau=\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau}$$

卷积的交换律

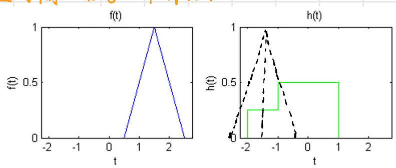
这两个都是卷积公式（等价表达式）

将此式表达为 $y(t)=f(t)*h(t)=\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}\underbrace{h(\tau)}_{weight}\cdot f(t-\tau)\,d\tau}$

$h(\tau)$即卷积核，它对于每个τ处的$f(t-\tau)$给出加权因子

$h(\tau)$表达偏移τ位置的输入在$y(t)$中的贡献

例1：如图信号，令 $y(t)=f(t)*h(t)$，求 $y(0)$



$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\cdot h(\tau)\,d\tau \Rightarrow y(0)=\int_{-\infty}^{\infty}f(-\tau)h(\tau)\,d\tau$$

瞪眼法算面积：$y(0)=\frac{1}{8}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$

性质一：交换律 $y(t)=f(t)*h(t)=h(t)*f(t) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)\cdot h(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)\cdot h(\tau)\,d\tau$

如何找卷积分段点？把 f 和 h 的所有分段点 $\{a_i\},\{b_i\}$ 顺次相加，任意 $t_i=a_i+b_i$ 都是分段点

例2：$f(t)=u(t)$，$h(t)=e^{-t}u(t)$，求 $y(t)$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(\tau)f(t-\tau)\,d\tau=\int_{-\infty}^{0}h(\tau)f(t-\tau)\,d\tau+\int_{0}^{\infty}h(\tau)f(t-\tau)\,d\tau$$

$$=\boxed{\int_{0}^{\infty}}e^{-\tau}u(\boxed{t-\tau})\,d\tau=\int_{0}^{t}e^{-\tau}u(t-\tau)\,d\tau+\int_{t}^{\infty}e^{-\tau}u(t-\tau)\,d\tau=\int_{t}^{\infty}e^{-\tau}d\tau=1-e^{-t}$$

注意到 $\tau\geq 0$. ∴仅当 $t\geq 0$ 时 $y(t)=1-e^{-t}$，$t<0$ 时 $y(t)=0$

整合后可写为 $y(t)=\boxed{(1-e^{-t})u(t)}$

性质二：时移 $f(t-t_0)*h(t)=y(t-t_0)$

卷积是时无关算子：$f(t-t_0)*h(t-t_1)=y(t-t_0-t_1)$

例3：$g(t)=u(t-1)$，$h(t)=e^{-t}u(t)$，求 $x(t)=g(t)*h(t)$

$$x(t)=f(t-1)*h(t)=y(t-1)=[1-e^{-(t-1)}]u(t-1)$$

性质三：分配律 $f(t)*[g(t)+h(t)]=f(t)*g(t)+f(t)*h(t)$

例4：$r(t)=\mathrm{rect}(\frac{t}{2})$，$h(t)=e^{-t}u(t)$，求 $z(t)=r(t)*h(t)$

$r(t)=u(t+1)-u(t-1)$

$$z(t)=u(t+1)*h(t)-u(t-1)*h(t)$$
$$=y(t+1)-y(t-1)$$
$$=[1-e^{-(t+1)}]u(t+1)-[1-e^{-(t-1)}]u(t-1)$$

性质……六(?)：起始点 若 $f(t)$ 在 $t<t_{s.f}$ 恒为0，$h(t)$ 在 $t<t_{s.h}$ 恒为0，那么，卷积 $f(t)*h(t)$ 在 $t<t_{s.f}+t_{s.h}$ 恒为0

$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\tau)h(t-\tau)d\tau$，$\tau\geq t_{s.f}$，$t-\tau\geq t_{s.h}$

性质七：结束点 $t>t_{e.f}$，$t>t_{e.h}$ $\Rightarrow$ $t>t_{e.f}+t_{e.h}$ 恒为0.

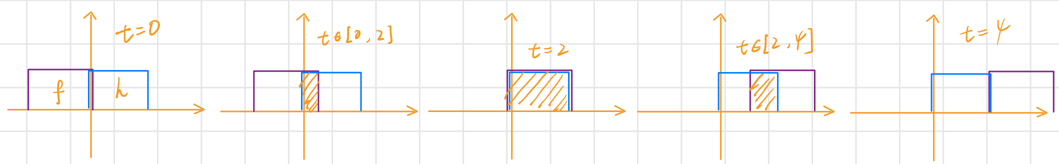
性质八：宽度 $f(t)$：$T_f=T_{e.f}-T_{s.f}$，$h(t)$：$T_h=T_{e.h}-T_{s.h}$

$\Rightarrow y(t)$：$T_y=T_f+T_h$

例5：$f(t)=\mathrm{rect}(\frac{t-1}{2})$，$h(t)=\mathrm{rect}(\frac{t-1}{2})$，求 $y(t)$

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

$\longrightarrow$ 结论：$\mathrm{rect}(\frac{t}{T})*\mathrm{rect}(\frac{t}{T})=T\Delta(\frac{t}{2T})$



例6: $g(t) = rect(\frac{t-1}{2}) - rect(\frac{t-4}{2})$, $h(t) = rect(\frac{t-1}{2})$, 求 $z(t) = g(t) * h(t)$

$$z(t) = rect(\tfrac{t-1}{2}) * rect(\tfrac{t-1}{2}) - rect(\tfrac{t-4}{2}) * rect(\tfrac{t-1}{2})$$

$$= 2\Delta(\tfrac{t-2}{4}) - 2\Delta(\tfrac{t-5}{4})$$

时移性质

冲激：函数 $p(t)$，使得对 $\forall f(t)$，有 $f(t) * p(t) = f(t)$

宽度 Δt 为0，积分 $\int_{-\infty}^{\infty} p_{\varepsilon\to 0}(t)dt = 1$

有的兄弟，有的，$p_{\varepsilon\to 0}(t) = \frac{1}{\varepsilon} rect(\frac{t}{\varepsilon})$

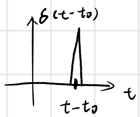
将 $p_{\varepsilon\to 0}(t)$ 记作 $\delta(t)$ $\delta(t)$ 不是函数，而是一种分布 (distribution) 因为它不具备数值意义，仅在积分中起作用

$\delta(t)$ 含有能量为 ∞

冲激的卷积性质：$f(t) * \delta(t) = f(t)$, $f(t) * \delta(t-t_0) = f(t-t_0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(t-\tau)d\tau = \int f(\tau)\delta(t-\tau-t_0)d\tau = \int f(\tau)\delta(\tau-(t-t_0))d\tau = f(t-t_0)$$

另有，



所以 $\delta(t-t_0) = \delta(t_0-t)$

冲激的 time shift：$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\delta(t-t_0)dt = f(t_0)$ 注意，这与卷积有些许不同

注意，表达乘积时需保留 $\delta(t)$，如 $\delta(t)f(t) = \delta(t)f(0)$

冲激的 scaling：$\delta(at) = \frac{1}{|a|}\delta(t)$ （积分为 $|a|$，积分为1）

冲激的定积分：$\int_{-\infty}^{t} \delta(\tau)d\tau = \begin{cases} 0 & \tau < 0 \\ 1 & \tau \geq 0 \end{cases} = u(t)$ interesting

冲激的傅里叶变换：$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = 1$ 时域的冲激响应 $\Longleftrightarrow$ 频域的常函数 $F(\omega) = 1$

$$\mathcal{F}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t)\cdot e^{-j\omega t}dt = e^{-j\omega 0} = 1$$

冲激的逆傅里叶变换：$\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}$ $\mathcal{F}^{-1}\{\delta(\omega)\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\omega)e^{j\omega t}d\omega = \frac{1}{2\pi}e^{j0t} = \frac{1}{2\pi}$

同样的分布，但描述的是频域

冲激导数：$f(t) * \delta(t) = f(t)$, $f(t) * \delta'(t) = f'(t)$ $\delta'(t)$ 相当于卷积中对函数求导

回忆 chapter 7: Symmetry Property: $\begin{cases} f(t) \longleftrightarrow F(\omega) \\ F(t) \longleftrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{cases}$ 这是基于 $\begin{cases} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \end{cases}$ 得出的

非常重要

对于 δ，有 $\delta(t) \longleftrightarrow 1$

$$\boxed{1 \longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)} \Longleftrightarrow 2\pi\delta(-\omega)$$

例 14：输入 $f(t)=u(t)$，频率响应 $H(\omega)=\dfrac{j2\omega-1}{1+j\omega}$，求 $y_{zs}(t)$

这里的算法有点粗糙，$H(\omega)=2-\dfrac{3}{1+j\omega}$ 更好，可直接得到

$$H(\omega)=j\omega\,\frac{2}{1+j\omega}-\frac{1}{1+j\omega}\Rightarrow h(t)=\frac{d}{dt}\left(2e^{-t}u(t)\right)-e^{-t}u(t)=2\delta(t)-3e^{-t}u(t)$$

冲激性质

$$y_{zs}(t)=f(t)*h(t)=u(t)*\left(2\delta(t)-3e^{-t}u(t)\right)=2u(t)-3(1-e^{-t})u(t)$$

例 2

例 15：$f(t)=rect(t-\frac{1}{2})$，$y_{zs}(t)=rect(t-\frac{1}{2})-rect(t-\frac{3}{2})+2rect(t-\frac{5}{2})$

显然，$h(t)=\delta(t)-\delta(t-1)+2\delta(t-2)$

一些信号，不绝对可积，非能量有限，但它们的频谱仍有意义。它们能量无限，但时域上的瞬时功率有限。传统傅里叶积分 $\int f(t)e^{-j\omega t}dt$ 对功率信号而言不收敛。

但可用冲激函数表达频谱

例 16：求 $\cos(\omega_c t)$ 的 Fourier transform

recall that $1\Longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$\Rightarrow e^{j\omega_0 t}\Longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega-\omega_0)$

$$\cos(\omega_c t)=\frac{1}{2}e^{j\omega_c t}+\frac{1}{2}e^{-j\omega_c t}$$

这很好理解

时域内频率确定的函数 $\Longleftrightarrow$ 频域内对应频率的冲激函数

$$=\pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c)$$

回忆 Ch8. $f(t)\cos(\omega_c t)=\frac{1}{2}f(t)e^{j\omega_c t}+\frac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_c t}$

$X(\omega)=\frac{1}{2}[F(\omega-\omega_c)+F(\omega+\omega_c)]$

例 17：求 $f(t)\cos(\omega_c t)$ 的 Fourier transform

$$f(t)\cos(\omega_c t)=\frac{1}{2\pi}F(\omega)\left(\pi\delta(\omega-\omega_c)+\pi\delta(\omega+\omega_c)\right)=\frac{1}{2}F(\omega-\omega_c)+\frac{1}{2}F(\omega+\omega_c)$$

例 18：求周期信号 $f(t)$ 的 Fourier transform

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}F_n e^{jn\omega_0 t}\Longleftrightarrow \mathcal{F}(f(t))=\sum_{-\infty}^{\infty}F_n\,\mathcal{F}(e^{jn\omega_0 t})=\sum_{-\infty}^{\infty}F_n\cdot 2\pi\,\delta(\omega-n\omega_0)$$

时域周期信号在频域展现为冲激列（impulse train）信号，

时域冲激列信号在频域展现为冲激列信号

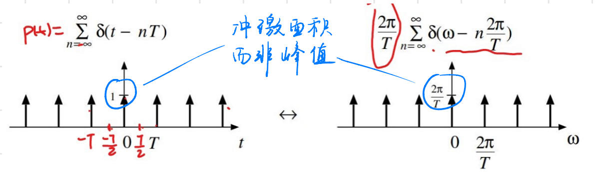
例19：求 impulse train $p(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}\delta(t-nT)$

将p(t)看作周期为T的冲激信号　　　对于周期信号，有傅里叶级数公式 $P_k=\frac{1}{T}\int_T p(t)e^{-jnw_0t}dt$

$$P(w)=\sum_{-\infty}^{\infty}P_n\cdot 2\pi\delta(w-nw_0),\quad P_n=\frac{1}{T}\int_T p(t)e^{-jnw_0t}dt=\frac{1}{T}\int_T \delta(t)e^{-jnw_0\cdot 0}=\frac{1}{T}$$

周期为T

$$P(w)=\sum_{-\infty}^{\infty}\frac{2\pi}{T}\cdot\delta\left(w-n\frac{2\pi}{T}\right)\Leftrightarrow w_0=\frac{2\pi}{T}$$

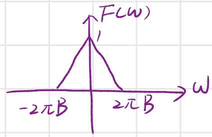


对一个信号 f(t) 的连续采样 $\Leftrightarrow S(t)=f(t)\cdot p(t)=\sum_{-\infty}^{\infty}f(nT)\,\delta(t-nT)$

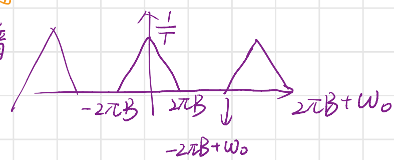
每隔T采样一次f(t)

转到频域后得到：$S(w)=\frac{1}{T}\sum_{-\infty}^{\infty}F(w-nw_0)$

假设有如图信号



经过采样得到频谱



通过低通滤波器即可得到原频谱

然而，如果w_0过小，使得 $w_0<4\pi B$，两个独立频谱混叠(aliasing)，频谱就会失真

要让频谱不混叠，就要满足 $w_0\geq 4\pi B \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T}\geq 4\pi B \Leftrightarrow f_s=\frac{1}{T}\geq 2B$

即采样频率不低于2B

那么，如何表达低通滤波器？

$$h(t)=\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)\xleftrightarrow{F} T\cdot \mathrm{rect}\left(\frac{w}{2\pi/T}\right)$$

$$y(t)=S(t)*\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi t}{T}\right)=\sum_{-\infty}^{\infty}f(nT)\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\pi t-n\pi T}{T}\right)$$

作用条件

Chapter 10

实际情况下，我们往往不知道冲激响应 $h(t)$ 的表达式，更不知道 $F(\omega)$，$H(\omega)$ 等

可通过单位冲激得到 $h(t)$，再与 $f(t)$ 卷积得到 $y(t)$

unit-step response　　单位阶跃

单位阶跃响应 $y(t)=u(t)*h(t)$，要求 $h(t)$，对两边分别求导

$$\frac{d}{dt}y(t)=\left(\frac{d}{dt}u(t)\right)*h(t)=\delta(t)*h(t)=h(t)\implies h(t)=\frac{d}{dt}y(t)$$

例1、$y(t)=\frac{1}{3}(1-e^{-3t})u(t)$

$$h(t)=\frac{d}{dt}y(t)=\frac{1}{3}\left[3e^{-3t}u(t)+(1-e^{-3t})\delta(t)\right]=\frac{1}{3}\left(3e^{-3t}u(t)+(1-e^{0})\delta(t)\right)=e^{-3t}u(t)$$

例2、$y(t)=e^{-t}u(t)$

$$h(t)=-e^{-t}u(t)+e^{-t}\delta(t)=-e^{-t}u(t)+\delta(t)$$

BIBO 稳定性：一系统对所有有界输入，则输出有界，则称其有BIBO稳定性

反例：$h(t)=u(t)$，$f(t)=u(t)\implies y(t)=tu(t)$

一个 LTI 系统是绝对可积的，当且仅当 $h(t)$ 绝对可积 $\int_{-\infty}^{\infty}|h(t)|dt<\infty$

检查系统是否满足BIBO，只需检查冲激响应 $h(t)$，与 $f(t)$ 无关

例3、判断下列3个函数是否BIBO

① $h(t)=\sin(\omega_0 t)$　　② $h(t)=\sin(\omega_0 t)\,\mathrm{rect}(t)$

显然，绝对不可积　　显然，绝对可积

③ $h(t) = \mathrm{sinc}(\omega_0 t) = \frac{\sin(\omega_0 t)}{\omega_0 t}$

$\int_{-\infty}^{\infty} |\mathrm{sinc}(\omega_0 t)|\, dt \to \infty$ 绝对不收敛

④ $h(t) = \mathrm{sinc}(\omega_0 t) e^{-|t|}$

显然 $e^{-|t|}$ 衰减快，$\int_{-\infty}^{\infty} h(t)$ 收敛

⑤ $h(t) = \delta(t-1)$

$y(t) = f(t) * \delta(t-1) = f(t-1)$ 时移，不改变幅值，BIBO

Causality 输出 $y(t)$ 仅依赖当前值和过去值

因果系统：$y(t) = \int_{-\infty}^{t} h(t-\tau) f(\tau)\, d\tau$ $h(t)$ 在 $t<0$ 时必为 0，反之则为非因果系统，不可实现

因果性判定

例 4. 如下冲激响应是否是因果的？

(1) $h(t) = \mathrm{sinc}(\omega_0 t)$ (2) $h(t) = u(t)$ (3) $h(t) = e^{-t}$ (4) $h(t) = e^{-t} u(t-1)$

在 $t<0$ 时非 0. 因果 非因果 因果

(5) $h(t) = \delta(t)$

$t<0$ 时为 0，因果

$$\text{LTI系统的特性}\begin{cases}\text{线性}\\\text{时不变}\\\text{因果性}\end{cases}$$

例5. 判断 $y(t)=\sin(t+3)f(t)$ 是否满足线性、时不变、BIBO稳定性和因果性

① Linear: $y(t)=\sin(t+3)(\alpha f_1(t)+\beta f_2(t))$ √

② Time-Invariant: $y(t-t_d)=\sin((t-t_d)+3)f(t-t_d)$ √

③ BIBO: $|y(t)|\leq|f(t)|$ √

④ Causal √

例6. $y(t)=f((t-1)^2)$

$\rightarrow y(0)=f(1)$

不满足时不变和因果

若满足，则有 $f((t-1)^2-t_d)=f((t-t_d-1)^2)$

例7. $y(t)=f^2(t)$

不满足线性

例8. $y(t)=f(t)*u(t-1)$

$h(t)=u(t-1)$，不满足BIBO 积分无穷