Question2

(a) 验证正则奇点

$$a_2(x)\,y'' + a_1(x)\,y' + a_0(x)\,y = 0$$

写成标准型：

除以 $a_2(x)$，得到

$$y'' + P(x)\,y' + Q(x)\,y = 0, \qquad P(x) = \frac{a_1(x)}{a_2(x)},\ Q(x) = \frac{a_0(x)}{a_2(x)}.$$

指出$x_0 = 0$处，$P(x)$奇点阶数为1（pole of order 1），$Q(x)$奇点阶数为2，所以是正则奇点。

(b) 求解$(0, \infty)$

读取p_j, q_j：

$f(x) = (x - x_0)\,\frac{a_1(x)}{a_2(x)}, \quad g(x) = (x - x_0)^2\,\frac{a_0(x)}{a_2(x)}.$

$$f(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + p_2(x - x_0)^2 + \cdots,$$
$$g(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + q_2(x - x_0)^2 + \cdots.$$

（可选，被"读取p_j, q_j"包含）求Laurent展开后的系数p_0, q_0

$$p_0 = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)\,P(x), \quad q_0 = \lim_{x\to x_0}(x - x_0)^2\,Q(x),$$

解指数方程（Indicial Equation）

$$r(r-1) + p_0\,r + q_0 = 0,$$

解得两根 $r_1 \geq r_2$。令 $\Delta r = r_1 - r_2$。

构造第一条级数解y_1

$$y_1(x) = (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} c_n\,(x - x_0)^n, \quad c_0 = 1.$$

递推公式（注意分子从$n \geq 1$开始，不包含p_0, q_0项）：

$$c_n = -\frac{\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \left[p_j\,(n + r_1 - j) + q_j\right] c_{\,n-j}}{(n + r_1)(n + r_1 - 1) + p_0\,(n + r_1) + q_0}.$$

写出$y_1(x)$。

注：Sample1在此处写出了前三项，其余项用Σ形式表示，个人认为只需写出第一项（$n = 0$）即可（因为第一项不能用展开式正确表示，其余项均可用级数表示）。

另注：在求解的时候，注意级数是否会在较小的有限项内变为0，即$c_m = 0$，那么，往后的所有递推项都为0（在一阶递推的情况下，高阶递推较难看出，一般就假设不会归零）。

构造第二条解 y_2

根据 Δr 分三种情况：

1. $\Delta r \notin \mathbb{Z}$

$$y_2(x) = (x - x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \tilde{c}_n \, (x - x_0)^n, \quad \tilde{c}_0 = 1,$$

递推式同上，将 $r_1 \to r_2$ 即可。

2. $\Delta r = m \in \mathbb{Z}^+$
   - **先尝试** 同方法构造 $\tilde{c}_n$。
   - 检查在递推式中 $N = n = m = r_1 - r_2$ 处，递推关系的分子是否也为 0。若分子也为 0，则无需引入对数。这个方程对c_m不加任何限制，为计算简便，指定$c_m = 0$。
   - 若在 $n = m$ 处出现“分母=0 且分子≠0”，则需引入对数解：

$$y_2 = y_1 \ln(x - x_0) + (x - x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n \, (x - x_0)^n.$$

注：此处对数项没有系数A，是因为在取y_1解的时候已经把第0项设为1。

   - d_n **递推**（取对数项前系数为 1）：

$$d_n = -\frac{2\left(n + r_1 - 1\right) c_{n-1} + \sum_{j=1}^{n} p_j \, (n + r_1 - j) \, c_{\,n-j}}{(n + r_1)(n + r_1 - 1) + p_0 \, (n + r_1) + q_0}, \quad n \geq 0,$$

其中 $c_{-1} = 0$（即一般来说，$d_0 = 0$）。

3. **重根** $\Delta r = 0$
必含对数，直接套用上式构造 y_2。

Alternative Method 构造第二条解 y_2（统一参数化递推）

1. **定义参数化递推**

$$F(s) = s(s - 1) + p_0 \, s + q_0,$$

并令

$$a_0(r) = 1, \quad a_n(r) = -\frac{1}{F(r + n)} \sum_{k=0}^{n-1} \big[(r + k) \, p_{\,n-k} + q_{\,n-k}\big] \, a_k(r) \quad (n \geq 1).$$

2. **生成两条基解**
   - 取 $r = r_1$：

$$y_1(x) = (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_1)\,(x-x_0)^n.$$

- 取 $r=r_2$：

$$\tilde{y}_2(x) = (x-x_0)^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r_2)\,(x-x_0)^n.$$

3. **整数差情形** ($\Delta r = r_1 - r_2 = m \in \mathbb{Z}^+$)
   - 若 $F(r_2+m)=0$ 且对应求和分子也为 0，则 $\tilde{y}_2$ 自然**截断**成多项式解，无需对数。
   - 若 $F(r_2+m)=0$ 且分子≠0，则必须引入对数项：

$$y_2(x) = y_1(x)\,\ln(x-x_0) + (x-x_0)^{r_1} \sum_{n=0}^{\infty} d_n\,(x-x_0)^n,$$

     并可用类似方式递推确定 $\{d_n\}$。
4. **重根情形** ($\Delta r = 0$)
   必含对数，直接套用上式构造 y_2。

写出通解

$$\boxed{y(x) = C_1\,y_1(x) \;+\; C_2\,y_2(x).}$$

如果级数可以简化为有理/有理函数时，需要给出简式。

收敛半径与有效区间

用比值法检验比较方便：

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 0,$$

从而证明收敛半径为$R=\infty$。

注：老白的这道题一般都在第一问就说明了只有0是正则奇点，而以0为中心的Frobenius级数，如果系数在整个复平面都解析（即 **没有别的奇点**，只有可能在∞处发生增长），那最近奇点就是∞。所以一般甚至不需要用收敛半径讨论，只需要最简单的一句话陈述即可。

(c) 解的延拓

负半轴 $(-\infty, x_0)$ 上的延拓

偶数指数 $r=2k$

$$(-x)^r = (-x)^{2k} = (-1)^{2k} x^{2k} = x^{2k},$$

解在负半轴上**不变**。

奇数指数 $r=2k+1$

$$(-x)^r=(-x)^{2k+1}=(-1)^{2k+1}x^{2k+1}=-\,x^{2k+1}\,,$$

解在负半轴上会整体**取相反数**。

非整数指数 $r\notin\mathbb{Z}$

为了在负半轴上仍保持解为实数，通常选用主值分支

$$(-x)^r=|x|^r,$$

注：在Sample解析中，对于偶数指数，因为解不变，所以没有显式写出；对于奇指数，因为整体取反，所以显式写出；对于非整数指数，为了不引入额外的复相位，一般选用主值分支，也就是直接取绝对值。

另注：简便起见，所有级数内的正负号等冗余的参数内容，都被集成到a_n中，不显式写出。

全实轴 $\mathbb{R}$ 上的通解

删去$y_1(x),y_2(x)$中二阶导数在$x=0$不连续的解，就是全实数域通解。

注：如果$y_1(x),y_2(x)$均不符合要求，则通解为$y(x)=0$。

Question3

比较简单，不详细说。这里只给出两个积分公式：

- 对于：

$$y' + p(t)y = 0$$

积分为：

$$y(t) = Ce^{-\int p(t)dt}$$

- 对于：

$$y' + p(t)y = q(t)$$

积分为：

$$y(t) = e^{-\int p(t)\,\mathrm{d}t}\left(\int q(x)e^{\int p(t)\,\mathrm{d}t}\mathrm{d}t + C\right)$$

Question4

(a) 齐次方程 $y' = Ay$

求特征多项式

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I - A) = 0$$

- **多重实根** → 继续检查是否存在足够独立特征向量。
- **复根** → 必成共轭对，先取复特征向量，再化成实解对。

注：在求行列式时，尽量先消元，把一部分entries变成0，可以大大简化计算。但是，不要为了消元乘以分数，这反而会使计算变得复杂。

分类讨论

λ 情形	基本向量	对应基解
单实根 λ	v	$e^{\lambda t}v$
重实根，满秩	$v_1, \ldots, v_m$	同上，个数等于重数
重实根，缺陷 (Jordan k阶)	先求主向量 v，再递推广义向量 w:$(A - \lambda I)w = v$	$e^{\lambda t}(v + tw)$（更高阶依此类推）
共轭复根 $\alpha \pm \beta i$	复向量 v	取实部/虚部：$e^{\alpha t}\left[\cos(\beta t)\mathrm{Re}\{v\} - \sin(\beta t)\mathrm{Im}\{v\}\right]$ 等两条独立实解

写出$A - \lambda I$之后，做Gaussian Elimination，得到齐次方程组，再求解子空间特征向量。

例如得到RREF：

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

对应的齐次方程组为：

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 - x_3 = 0, \\ \quad 2x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$$

求解得到最简特征向量：

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

关于共轭复根形式的简单套公式：

$$\lambda=\alpha+i\beta,\quad \bar{\lambda}=\alpha-i\beta,$$

特征向量第 n 个分量为

$$v_n=a_n+i\,b_n.$$

两条实解的第 n 分量：

- **实部解**（Real part）

$$y_n^{(1)}(t)=e^{\alpha t}\big(a_n\cos(\beta t)-b_n\sin(\beta t)\big).$$

- **虚部解**（Imaginary part）

$$y_n^{(2)}(t)=e^{\alpha t}\big(a_n\sin(\beta t)+b_n\cos(\beta t)\big).$$

组装基解矩阵

$$\Phi(t)=\big[y_1(t)\;\; y_2(t)\;\;\dots\big]\in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\quad \Phi(0)=I$$

对于长度为2的Jordan链：

$$y_2(t)=e^{\lambda t}v_2\;+\;t\,e^{\lambda t}v_1,$$

对于长度为3的Jordan链：

$$y_3(t)=e^{\lambda t}\Big(v_3+t\,v_2+\tfrac{t^2}{2}\,v_1\Big)=e^{\lambda t}v_3\;+\;t\,e^{\lambda t}v_2\;+\;\tfrac{t^2}{2}\,e^{\lambda t}v_1.$$

(b) 非齐次方程 $y'=Ay+b(t),\ y(0)=y_0$

$$y'(t)=Ay(t)+b(t),\qquad A\in\mathbb{R}^{n\times n},$$

b(t) 是 **多项式向量**（非多项式暂不讨论）。

把$b(t)$写成多项式 $b(t)=b_0+tb_1+\cdots+t^m b_m$。记最高次数 m。

找 particular 解

设$y_p(t)=w_0+tw_1+\cdots+t^m w_m\quad$ （与 $b(t)$ 同次数）。

把 y_p 代入原方程，将两边按 t 的幂次配对，得到 m+1 组线性方程

$$\begin{cases}Aw_m=-b_m,\\ Aw_{m-1}=w_m-b_{m-1},\\ \vdots\\ Aw_0=w_1-b_0.\end{cases}$$

从最高次往低次顺序求 $w_m,w_{m-1},\dots,w_0$。

若某一步出现 $Aw=\mathrm{RHS}$ 而A不可逆，就把等式视为可解条件；若无解，则提高猜测解的次数（因为样卷中并没有出现A不可逆的情况，暂不提及）。

拼通解＋用初值定系数

$$y(t) = y_p(t) + \sum_{j=1}^{r} c_j \, y_j(t)$$

Question5

$$y''(t)+a\,y'(t)+b\,y(t)=f(t),\quad y(0)=y_0,\ y'(0)=y_1,$$

表示 $f(t)$ 为分段函数

矩形：

$$f(t)=A\big(u(t-t_1)-u(t-t_2)\big)$$

斜坡：

$$f(t)=\underbrace{(t-t_0)\,u(t-t_0)}_{\text{斜坡}}-\underbrace{(t-t_1)\,u(t-t_1)}_{\text{斜坡终止}}$$

对两边做 Laplace 变换

$$\mathcal{L}\{y''\}=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0),\quad \mathcal{L}\{y'\}=sY(s)-y(0)$$

则方程变为

$$\big(s^2+a\,s+b\big)Y(s)-\big[s\,y_0+y_1+a\,y_0\big]=F(s).$$

解出

$$Y(s)=\frac{F(s)+\big[s\,y_0+y_1+a\,y_0\big]}{s^2+a\,s+b}.$$

写出 $F(s)$

注：对于含有时移的变量，$u(t-t_k)\,g(t)$：$\mathcal{L}\{u(t-t_k)\,g(t-t_k)\}=e^{-t_k s}\,G(s)$。

部分分式展开

将 $Y(s)$ 拆成若干项形如：$\frac{P}{s-\lambda}$，$\frac{Q}{(s-\lambda)^2}$，$\frac{R}{s^2+\omega^2}\cdots$

逆 Laplace 变换

无延迟项 $\to$ 在全域 $[0,\infty)$ 生效；

延迟项 $e^{-t_k s}H(s)\to$ 逆变换后乘以 $u(t-t_k)$、并替换 $t\mapsto t-t_k$：

$$\mathcal{L}^{-1}\{e^{-t_k s}H(s)\}=u(t-t_k)\;h(t-t_k).$$

拼接分段表达式

对每一个分界点 $t_1，按以下方法组合：

$$y(t)=\begin{cases} y_0(t), & 0\le t<t_1,\\ y_0(t)+y_1(t), & t_1\le t<t_2,\\ y_0(t)+y_1(t)+y_2(t), & t_2\le t<t_3,\\ \dots \end{cases}$$

其中 $y_1, y_2, \dots$ 分别来自各 $e^{-t_k s}$ 延迟项。

常用 Laplace 对照表

原函数 $g(t)$	$\mathcal{L}\{g(t)\}$
1	$1/s$
t^n	$n!/s^{n+1}$
$e^{-\alpha t}$	$1/(s+\alpha)$
$\cos(\omega t)$	$s/(s^2+\omega^2)$
$\sin(\omega t)$	$\omega/(s^2+\omega^2)$
$u(t-t_k)$	$e^{-t_k s}/s$
$(t-t_k)u(t-t_k)$	$e^{-t_k s}/s^2$

Question6

(a) 齐次方程通解

- $y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = 0$

写特征多项式

$$P(r) = r^4 + a_3 r^3 + a_2 r^2 + a_1 r + a_0,$$

计算所有根 r_k 及其重数 m_k。

分根情况生成基础解

根型	基础解
单实根 r	e^{rt}
重实根 r，重数 m	$e^{rt},\ te^{rt},\ t^2 e^{rt}, \ldots, t^{m-1} e^{rt}$
共轭复根 $r = \alpha \pm \beta i$	$e^{\alpha t} \cos \beta t,\ e^{\alpha t} \sin \beta t$
重复共轭复根（极少考）	对每个重数再乘 $t,\ t^2, \ldots$

齐次通解

完整的公式很难表达，如下是两个示例，照规律代入即可：

- 根为 $r = 2$（二重），$r = 1 \pm 3i$（简单复根）：

$$y(t) = (C_1 + C_2 t) e^{2t} + e^t (C_3 \cos 3t + C_4 \sin 3t)$$

- 根为 $r = 0$（单实根）、$r = -2$（二重）：

$$y(t) = C_1 e^{0 \cdot t} + (C_2 + C_3 t) e^{-2t}$$

(b) 非齐次方程特解（待定系数+根重修正）

$y^{(4)} + a_3 y^{(3)} + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = g(t)$

把 $g(t)$ 拆成「可叠加」若干项

常见原子项与**首选试探型**对照：

中的单项	首选试探	说明
常数 K	常数 A	若 $P(0) \neq 0$
$e^{\mu t}$	$Ae^{\mu t}$	首查 μ 是否为根
$t^n e^{\mu t}$	$(B_0 + B_1 t + \cdots + B_n t^n) e^{\mu t}$	多项式阶 = n

$g(t)$中的单项	首选试探	说明
$e^{\mu t}\sin\omega t$ 或 $e^{\mu t}\cos\omega t$	$e^{\mu t}(A\cos\omega t + B\sin\omega t)$	复数等价
单纯 $\sin\omega t$、$\cos\omega t$	上式取 $\mu = 0$	

检查根重冲突

若试探中指数 μ 恰好是特征多项式的根，且重数为 m，把整个试探再乘 t^m。

例：右端含 $5e^{2t}$，而 2 是二重根；所以试探用 $t^2(B_0)e^{2t}$

把试探代入原方程，按同类函数系数解未知常数

- **常数项**$g(t) = K$

代入原方程求解A。

- **纯指数** $g(t) = A\,e^{\mu t}$

代入原方程求解A。

- **多项式**$\times$**指数**$g(t) = (b_0 + b_1 t + \cdots + b_n t^n)e^{\mu t}$

代入原方程求解A。

- **指数**$\times$**正弦 / 余弦**$g(t) = A\,e^{\mu t}\cos(\omega t)$ **或** $B\,e^{\mu t}\sin(\omega t)$

注意：$\mu = 0$**时要补上**t^m**。**

对于非齐次项 $f(t) = Ae^{\mu t}\cos(\omega t) + Be^{\mu t}\sin(\omega t)$

第一步：利用欧拉公式转换

$Ae^{\mu t}\cos\omega t = \frac{A}{2}(e^{(\mu+i\omega)t} + e^{(\mu-i\omega)t})$

$Be^{\mu t}\sin\omega t = \frac{B}{2i}(e^{(\mu+i\omega)t} - e^{(\mu-i\omega)t})$

第二步：合并同类项（对于仅有sin和cos中一项时可以省略）

$f(t) = \left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2i}\right)e^{(\mu+i\omega)t} + \left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2i}\right)e^{(\mu-i\omega)t}$

$= \frac{A-iB}{2}e^{(\mu+i\omega)t} + \frac{A+iB}{2}e^{(\mu-i\omega)t}$

第三步：对特征算子 $P(D)$ **求解**

设 $P(D)[e^{(\mu\pm i\omega)t}] = P(\mu \pm i\omega)e^{(\mu\pm i\omega)t}$

则特解形式为：

$y_p(t) = C_+e^{(\mu+i\omega)t} + C_-e^{(\mu-i\omega)t}$

其中：

- $P(\mu + i\omega)C_+ = \frac{A-iB}{2}$
- $P(\mu - i\omega)C_- = \frac{A+iB}{2}$

第四步：计算系数

$C_+ = \frac{A-iB}{2P(\mu+i\omega)}, \quad C_- = \frac{A+iB}{2P(\mu-i\omega)}$

重要性质：由于 P 有实系数，所以 $P(\mu - i\omega) = \overline{P(\mu + i\omega)}$，且 $C_- = \overline{C_+}$

第五步：转换回实数形式

设 $C_+ = u + iv$（其中 u, v 为实数），则：

$y_p(t) = (u+iv)e^{(\mu+i\omega)t} + (u-iv)e^{(\mu-i\omega)t}$

$= e^{\mu t}[(u+iv)e^{i\omega t} + (u-iv)e^{-i\omega t}]$

$= e^{\mu t}[2u\cos\omega t - 2v\sin\omega t]$最终实特解形式：

$$A = 2u, \qquad B = -2v,$$

即可写成

$$y_p(t) = e^{\mu t}\big(A\cos\omega t + B\sin\omega t\big)$$

回代所有求出的特解，写成$y_p(t)$

非齐次通解

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t)$$

其中 y_p 为各子项特解之和。

形如：

$$y(t) = c_1e^{-2t} + c_2te^{-2t} + c_3e^{2t}\cos t + c_4e^{2t}\sin t + \frac{1}{34}t^2e^{-2t} + \frac{1}{5}e^{-2t}\cos t + \frac{2}{5}e^{-2t}\sin t$$

“指数平移”性质：

$(D+a)\big[e^{-at}\,g(t)\big] = \frac{d}{dt}\big(e^{-at}g(t)\big) + a\,e^{-at}g(t) = e^{-at}\,\frac{d}{dt}g(t).$