Chapter 7

对于周期性信号，有 $f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_n e^{jn\omega_0 t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2} f(t)e^{-jn\omega_0 t}dt\right)e^{jn\omega_0 t}$

$\because T=\frac{2\pi}{\omega_0}$，有 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\int_{-\frac{\pi}{\omega_0}}^{\frac{\pi}{\omega_0}} f(s)e^{-jn\omega_0 s}ds\right)e^{jn\omega_0 t}\,\omega_0=\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty}F(n\omega_0)e^{jn\omega_0 t}\cdot\omega_0$

令 $\omega_0\to 0$，即信号周期趋于无穷，有 $\boxed{f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{j\omega t}d\omega \quad \text{傅里叶逆变换公式}}$

乘上 $e^{-j\omega t}$ 并对 t 积分，$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega')e^{j\omega' t}d\omega'\right)e^{-j\omega t}dt$

交换积分次序(Fubini)，$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega')\left(\int_{-\infty}^{\infty}e^{j(\omega'-\omega)t}dt\right)d\omega'$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega')\,2\pi\,\delta(\omega'-\omega)\,d\omega'=F(\omega)$$

$\Rightarrow \boxed{F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt \quad \text{傅里叶变换公式}}$

傅里叶变换的存在性：

若 $f(t)$ 绝对可积 $\Leftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|dt<\infty$，则必有傅里叶变换　　绝对可积是充分不必要条件

若 $f(t)$ 不绝对可积，则不能保证是否有傅里叶变换 $\longrightarrow$ 如阶跃函数 $u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases}$

有傅里叶变换 $F\{u(t)\}=\pi\delta(\omega)+\frac{1}{j\omega}$

例1、$f(t)=\begin{cases}1 & |t|<\frac{1}{2}\\ 0 & \text{else}\end{cases}$　求 Fourier Transform

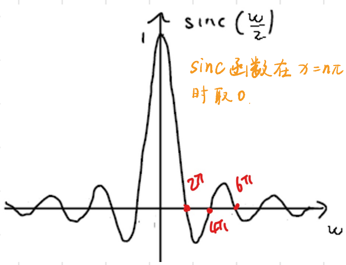
$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}1\cdot e^{-j\omega t}dt=-\left.\frac{e^{-j\omega t}}{j\omega}\right|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{2\sin(\frac{\omega}{2})}{\omega}=\boxed{\begin{matrix}\text{rect}(\omega)\\ \parallel\\ \text{sinc}(\frac{\omega}{2})\end{matrix}}$

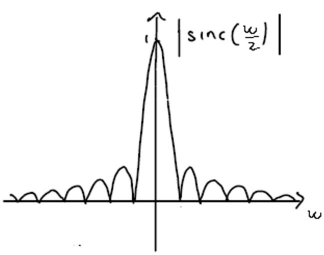
Sinc function

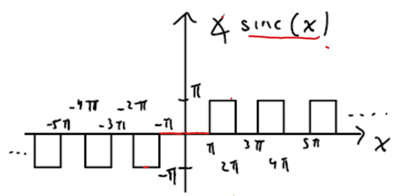
ECE210 中用的是

非归一化：$\text{sinc}(x)=\frac{\sin(x)}{x}$　非归一化表达式

归一化：$\text{sinc}(x)=\frac{\sin(\pi x)}{x}$





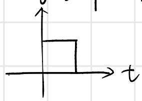


注：相位中 π 与 $-\pi$ 等价

关于图三，sinc函数的相位信息. sinc本身是实值函数 $\begin{cases} \text{正实数} \Rightarrow \text{相位角为} 0 \\ \text{负实数} \Rightarrow \text{相位角为} \pi \end{cases}$

例2：$g(t) = \begin{cases} 1 & 0<t<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$，求 $g(t)$ 的 Fourier transform

$g(t) = f(t-\frac{1}{2})$



写出来就是，$g(t) = e^{(-j)(\frac{1}{2})\omega} \cdot \text{sinc}(\frac{\omega}{2})$

时移⇔相位差

Time Shift Property: $f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow f(t \boxed{-t_0}) \leftrightarrow F(\omega) e^{j\omega \boxed{(-t_0)}}$

时域的时移⇔频域的相移

Time Scailing: $f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow f(at) \leftrightarrow \boxed{\frac{1}{|a|}} F(\frac{\omega}{a})$

$\frac{\omega}{a}$ 使得同频域积分变为原来a倍

所以需要加入系数 $\frac{1}{|a|}$

例3：$a>0$，$f(t) = \begin{cases} e^{-at} & t>0 \\ 0 & \text{else} \end{cases} = e^{-at}u(t)$，求 Fourier Transform

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-at} \cdot e^{-j\omega t} dt = \int_0^{\infty} e^{-(a+j\omega)t} dt = -\frac{1}{a+j\omega}\left[e^{-(a+j\omega)t}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{a+j\omega}$$

$$\Rightarrow f(t) = e^{-at}u(t) \longleftrightarrow F(\omega) = \frac{1}{a+j\omega}$$

例4：$a>0$，$g(t) = e^{-a|t|}$

$$g(t) = f(t) + f(-t) = F(\omega) + \frac{1}{|-1|} F(\frac{\omega}{-1}) = F(\omega) + F(-\omega) = \frac{1}{a+j\omega} + \frac{1}{a-j\omega} = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$$

例5：对于 $a>0$，有 $g(t) = e^{-a|t|} \leftrightarrow G(\omega) = \frac{2a}{a^2+\omega^2}$，求 $h(t) = \frac{2a}{a^2+t^2}$ 的 Fourier transform

Symmetry Property: $\begin{cases} f(t) \leftrightarrow F(\omega) \\ F(t) \leftrightarrow 2\pi f(-\omega) \end{cases}$

这是基于 $\begin{cases} F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-j\omega t} dt \\ f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega \end{cases}$ 得出的

因此，可以轻易得出：$H(\omega) = 2\pi g(-\omega) = 2\pi e^{-a|-\omega|} = 2\pi e^{-a|\omega|}$

在本题中，$e^{-a|t|} \xrightarrow[\text{频域到时域}]{\text{时域到频域}} \frac{2a}{a^2+\omega^2}$

频域函数改时域

$\frac{2a}{a^2+t^2} \xrightarrow{\text{时域到频域}} 2\pi e^{-a|\omega|}$

Parseval定理 —— 时域和频域的能量等价性

$$\int_{-\infty}^{\infty}|f(t)|^2dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{|F(\omega)|^2}d\omega$$ 能量谱(energy spectrum)，表示频率ω处的能量密度

例：求 $f(t)=10e^{-t}u(t)$ 的 energy content

法一：$W = \int_{-\infty}^{\infty}|10e^{-t}u(t)|^2dt = \int_{0}^{\infty}|10e^{-t}|dt = \int_0^{\infty}100e^{-2t}dt = 50$

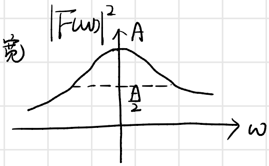
法二：由前几例可知，$F=\frac{10}{1+j\omega}$ $\Rightarrow W = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{100}{1+\omega^2}d\omega = 50$

注：对于实值信号，频谱为偶函数，一般只考虑正半轴

低通滤波器的带宽：一般情况下，以能量谱的值降为峰值 $\frac{1}{2}$ 的ω作为带宽

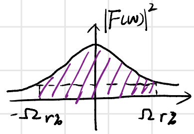
这反映了功率降为峰值一半的频率。

以dB形式描述即为 $10\log_{10}\frac{|F(\Omega_{-3dB})|^2}{|F(0)|^2} = 10\log_{10}\frac{1}{2} \approx -3dB$

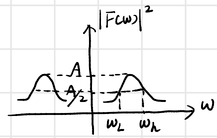


r%总能量带宽：表达当前频带的能量占总能量r%

$\Longleftrightarrow \frac{r}{100}\times W = \frac{1}{2\pi}\int_{-\Omega_{r\%}}^{\Omega_{r\%}}|F(\omega)|^2d\omega$



带通滤波器的带宽：与低通相似



LTI system response to energy signals

若直接计算从时域到时域的信号，需用到卷积操作 $f(t)\rightarrow\boxed{LTI}\rightarrow y(t)$

时域 → 频域 → LTI → 频域 → 时域，计算LTI更简单

$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{F(\omega)}e^{j\omega t}d\omega$ $\qquad$ $y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\boxed{H(\omega)F(\omega)}e^{j\omega t}d\omega$

$\boxed{F(\omega)}\rightarrow LTI\rightarrow Y(\omega)=\boxed{F(\omega)H(\omega)}$

例：$f(t)=e^{-4t}u(t)$，$H(\omega)=\frac{1}{4+j\omega}$，计算 $y(t)$

$$F(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-4t}u(t)e^{-j\omega t}dt=\int_0^{\infty}e^{(-4-j\omega)t}dt=-\frac{1}{4+j\omega}e^{(-4-j\omega)t}\Big|_0^{\infty}=\frac{1}{4+j\omega}$$

学了2.8.5我们知道，实际上不完全需要查表

$Y(\omega)=F(\omega)H(\omega)=\left(\frac{1}{4+j\omega}\right)^2$ PPT中说查表 $\mathcal{L}\left\{\frac{f(t)}{t}\right\}(s)=\int_s^{\infty}F(\sigma)d\sigma$ 复域积分等价为时域除以t

$\mathcal{F}\{-te^{-at}u(t)\}(\omega)=-\frac{\partial}{\partial a}\left[\frac{1}{a+j\omega}\right]=\frac{1}{(a+j\omega)^2}$（不需要掌握）

$$y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{4+j\omega}\right)^2e^{j\omega t}d\omega=te^{-4t}u(t)$$

例：$f(t)=\mathrm{sinc}(t)$，$H(\omega)=\mathrm{rect}(\omega)e^{-j3\omega}$，求 $y(t)$

$f(t)=\mathrm{sinc}(t)\xrightarrow{\text{查表}}F(\omega)=\pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)$，$Y(\omega)=H(\omega)F(\omega)=\pi\,\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2}\right)\mathrm{rect}(\omega)e^{-j3\omega}$

$=\pi\,\mathrm{rect}(\omega)e^{-j3\omega}$ 频域中的相移 $\Leftrightarrow$ 时域中的时移

查表有 $\mathrm{sinc}(at)\Leftrightarrow\frac{\pi}{a}\mathrm{rect}\left(\frac{\omega}{2a}\right)$，令 $a=\frac{1}{2}$

$\Rightarrow \pi\,\mathrm{rect}(\omega)=\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{1}{2}t\right)$ $\Rightarrow y(t)=\frac{1}{2}\mathrm{sinc}\left(\frac{\boxed{t-3}}{2}\right)$

常见的连续时间傅里叶变换

$\delta(t)\longleftrightarrow 1$

$1\longleftrightarrow 2\pi\delta(\omega)$

$\mathrm{rect}\left(\frac{t}{T}\right)\longleftrightarrow T\,\mathrm{sinc}\left(\frac{\omega T}{2}\right)$

$e^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{a+j\omega}$（另有 $te^{-at}u(t)\longleftrightarrow\frac{1}{(a+j\omega)^2}$）

$\cos(\omega_0t)\longleftrightarrow\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$

Chapter 8

Frequency Shift 频移

$f(t) \leftrightarrow F(\omega) \Rightarrow f(t-t_0) \leftrightarrow F(\omega)e^{j\omega(-t_0)}$

时域的时移 $\Longleftrightarrow$ 频域的相移

对比时移

$$f(t) \longleftrightarrow F(\omega)$$

$$g(t) = f(t)e^{j\omega_c t} \longleftrightarrow G(\omega) = F(\omega-\omega_c)$$

$$G(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t)e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega_c t}\cdot e^{-j\omega t}dt = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j(\omega-\omega_c)t}dt = F(\omega-\omega_c)$$

Modulation 调制

在时域信号中加入 local oscillator 信号，通过混频器(Mixer)，实现时域上的乘法

例如，加入 L.O 信号 $\cos(\omega_c t)$

$$f(t) \rightarrow \underset{\cos(\omega_c t)}{\overset{\text{mixer}}{\otimes}} \rightarrow f(t)\cos(\omega_c t)$$

我们知道，$\cos(\omega_c t) = \dfrac{e^{j\omega_c t}+e^{-j\omega_c t}}{2}$ ， $\therefore f(t)\cos(\omega_c t) = \frac{1}{2}f(t)e^{j\omega_c t} + \frac{1}{2}f(t)e^{-j\omega_c t}$

$$X(\omega) = \frac{1}{2}[F(\omega-\omega_c)+F(\omega+\omega_c)]$$

为什么要调制信号？

- 频率高 → 能量高 → 易接收 → 接收设备小
- 将信号调制到不同频带，互不干扰

Demodulation 解调 —— 同步检波 (Coherent detection)

$$f(t)\cos(\omega_c t) \rightarrow \underset{\cos(\omega_c t)}{\otimes} \xrightarrow{z(t)} f(t)\cos^2(\omega_c t) \xrightarrow{\text{低通}} \xrightarrow[\text{Gain}=2]{\text{放大}} f(t)$$

接收到时域信号 $f(t)\cos(\omega_c t)$，经过 mixer 混入 $\cos(\omega_c t)$ → 输出信号 $z(t) = f(t)\cos^2(\omega t)$

$$\Rightarrow z(t) = f(t)\cos^2(\omega_c t) = f(t)\cdot\frac{1+\cos(2\omega_c t)}{2} = \overset{\text{原信号}}{\boxed{\tfrac{1}{2}f(t)}} + \overset{\text{调制后的高频信号}}{\boxed{\tfrac{1}{2}f(t)\cos(2\omega_c t)}}$$

希望去除 $\frac{1}{2}f(t)\cos(2\omega_c t)$ 部分

$\Rightarrow$ low-pass filter → 放大器(Gain=2) → $f(t)$

如果实际输入的调制后信号存在延时，$r(t)=f(t-t_d)\cos(w_c(t-t_d))$，但在解调时仍用 $\cos(w_c t)$，

会导致 $z'(t)=f(t-t_d)\cos(w_c(t-t_d))\cdot\cos(w_c t)=f(t-t_d)\left[\frac{1}{2}\cos(2w_c t-w_c t_d)+\frac{1}{2}\cos(w_c t_d)\right]$

经过低通滤波器后，留下 $f(t-t_d)\cdot\frac{1}{2}\boxed{\cos(w_c t_d)}$ 由相位差引起的幅值变化

另一种解调方式 —— 包络检波 Envelope detection

$|f_1(t)+f_2(t)|\neq|f_1(t)|+|f_2(t)|$

取绝对值相当于整流器，这是非线性的

先对调制后的信号取绝对值：$|x(t)|=f(t)\boxed{|\cos(w_c t)|}$ 取绝对值后不再是单一频率的正弦波

可用 compact form 表示

$w_0=2w_c$

$=f(t)\left[\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cos(nw_0t+\theta_n)\right]=f(t)\cdot\frac{C_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}C_nf(t)\cos(n2w_ct+\theta_n)$ 再转到频域

$$X(w)=\frac{C_0}{2}F(w)+\sum_{n=1}^{\infty}C_n\cdot\frac{F(w-2nw_c)e^{j\theta_n}+F(w+2nw_c)e^{-j\theta_n}}{2}\xrightarrow{\text{低通}}\frac{C_0}{2}F(w)$$

实际信号处理中的两个问题
- ① $f(t)$ 存在负数部分 → 加足够大的直流偏置
- ② 信号不理想（如 time-delay 等）

总结：如何接收一个AM信号？

① 预选择滤波器，接收目标频段的信号

② LO 混频，将接收到的信号与本地信号 f_{LO} 混频，得到中频信号 f_{IF}

这里的方法不同于直接用原频率混频，而使用了另一频率 f_{LO}

$[f(t)\cos(w_c t)]\cos(w_{LO}t)=\frac{1}{2}f(t)\left[\cos((w_c-w_{LO})t)+\cos((w_c+w_{LO})t)\right]$ 滤波去除

得到的中频信号 f_{IF}（中频信号相比于直接得到 $f(t)$，在实际中处理更方便）

③ 中频 filter，进一步隔离目标信号

当然，在不考虑滤波难度的情况下，$f_{LO}=580-455=125\text{kHz}$ 也是可行的

假设有载波 $f_c=580\text{kHz}$，我们希望将其变频为目标中频 $f_{IF}=455\text{kHz}$，可选择 $f_{LO}=455+580=1035\text{kHz}$

这样，$f_{c1}'=580+1035=1615\text{kHz}$（被 filter 滤除），$f_{c2}'=580-1035=-455\text{kHz}$

然而，除了 $-580\text{kHz}+1035\text{kHz}$ 能得到 455kHz 的目标频率，它也可能是由 $(455+1035)-1035$ 得到的.

所以，若原信号中有1490kHz的信号没有滤除，它就会干扰得到的 f_{IF} 信号

解决方法也简单粗暴，Pre-select filter 滤干净就行