例15：求 $\hat{F}(s)=\frac{s^2+1}{s^2+3s+2}$ 的逆 Laplace

$\frac{s^2+1}{s^2+3s+2}=1-\frac{3s+1}{s^2+3s+2}=1-G(s)$ ， $G(s)=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+2}$ $\begin{cases} A=\lim_{s\to -1}(s+1)G(s)=-2 \\ B=\lim_{s\to -2}(s+2)G(s)=5 \end{cases}$

$\Rightarrow f(t)=\delta(t)+2e^{-t}u(t)-5e^{-2t}u(t)$

复频域 $\hat{F}(s)=e^{-as}\cdot\frac{N(s)}{D(s)}$ ，其中 $G(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$ 是 proper 有理函数，则 e^{-as} 可看作时域中 $t_0=a$ 的时移

$G(s)\longleftrightarrow g(t)$ ， $e^{-as}G(s)\longleftrightarrow g(t-a)u(t-a)$ ，或简写为 $\boxed{f(t)=g(t-a)}$

例16：求 $\hat{F}(s)=e^{-2s}\frac{1}{s+1}$ 的逆 Laplace

没啥说的， $f(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$

传递函数 (transfer function)， $\boxed{H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}}$ 对比Fourier的频率响应，Fourier仅给出不同正弦频率下的增益、相位，不直接反映瞬态、收敛性。Laplace 的传递函数则还反映瞬态响应、收敛域、系统稳定性

对于 Lumped 元件（如R、L、C）（没有分布式延迟），它们串并联后的 Z、V、I 都是多项式有理分数函数

对 Causal LTIC 系统， $H(s)=\frac{Y(s)}{F(s)}=\frac{b_0s^m+b_1s^{m-1}+\cdots+b_m}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}\Rightarrow Y(s)(s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n)=F(s)(b_0s^m+\cdots+b_m)$

$\Rightarrow (s^nY(s)+a_1(s^{n-1}Y(s))+\cdots+a_nY(s)=b_0(s^mF(s))+b_1(s^{m-1}F(s))+\cdots+b_mF(s)$

回到时域： $y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_ny(t)=b_0f^{(m)}(t)+b_1f^{(m-1)}(t)+\cdots+b_mf(t)$

这是 zero-state 条件，所以没有初值项

零状态响应：仅由外部输入 $f(t)$ 作用在电路 $h(t)$ 上的响应 $\begin{cases} \text{时域}: y(t)=f(t)*h(t) \\ \text{频域}: Y(s)=F(s)H(s) \end{cases}$

零输入响应：仅由初始状态产生的行为。时域上可用 $y^{(n)}(t)+a_1y^{(n-1)}(t)+\cdots+a_ny(t)=0$ 表示

对时域做 Laplace（非零初始条件），有 $\mathcal{L}\{y^{(n)}(t)\}=s^nY(s)-s^{n-1}y(0^-)-s^{n-2}y'(0^-)-\cdots-y^{(n-1)}(0^-)$

代入时域 ODE： $(s^nY(s)-\cdots-y^{(n-1)}(0^-))+a_1(s^{n-1}Y(s)-\cdots)+\cdots+a_nY(s)=0$

$\Rightarrow \boxed{Y_{zi}(s)\cdot D(s)=I(s)}$ $D(s)$ 是系统的特征多项式， $I(s)$ 则是系统初值叠加得到的多项式

特征模态 (Characteristic Mode)

① 实根 $p_i\in\mathbb{R}\Rightarrow e^{p_it}u(t)$ ② 共轭 $\alpha\pm j\beta$ ， $\begin{cases} e^{\alpha t}\cos(\beta t) \\ e^{\alpha t}\sin(\beta t) \end{cases}$ ③ 重根， $t^0e^{p_mt}$, $t^1e^{p_mt}$, ..., $t^{r-1}e^{p_mt}$

模态叠加：系统的零输入响应就是所有这些特征模态的线性组合：

$$y_{zi}(t) = \sum_i [C_i e^{p_i t}] + \sum_j [D_j t e^{p_j t}] + \cdots$$

若所有 $Re\{p_i\}<0$ ⇒ 模态随时间衰减 ⇒ BIBO 稳定

若任一极点在右半轴/虚轴 ⇒ 发散/振荡 ⇒ 不稳定 / 临界稳定

特征极点（Characteristic Pole）：传递函数中分母多项式的根

例 17：LTIC system，由 ODE：$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 4y = 2f(t)$ 描述，$f(t) = u(t)$，$y(0^-)=1$，$y'(0^-)=0$

典型、完全稳定的二阶 LTIC

1、求特征极点与特征模态

关心系统本身特征 → 先看齐次部分（零输入）：$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = 0$

对齐次方程做 Laplace：$(s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)) + 5(sY(s) - y(0^-)) + 4(Y(s)) = 0$

合并 $Y(s)$ 项，系数就是特征多项式：$\underbrace{(s^2+5s+4)}_{D(s)} Y(s) = \underbrace{sy(0^-) + y'(0^-) + 5y(0^-)}_{I(s)}$

解特征方程 $D(s)=0$ ⇒ $p_1=-1$，$p_2=-4$，这两个 p 就是特征极点

对应特征模态：e^{-t}，e^{-4t} ⇒ 齐次解可写为 $y_{zi}(t) = C_1e^{-t} + C_2e^{-4t}$

2、求 $\hat{H}(s)$ 和 $h(t)$

$$\hat{Y}(s) = \underbrace{\frac{2\hat{F}(s)}{(s+4)(s+1)}}_{ZS} + \underbrace{\frac{y(0^-)(s+5)+y'(0^-)}{(s+4)(s+1)}}_{ZI}, \quad \hat{H}(s) = \frac{\hat{Y}_{zs}(s)}{\hat{F}(s)} = \frac{2}{(s+4)(s+1)} = \frac{A}{s+4} + \frac{B}{s+1}$$

$$\begin{cases} A = \lim_{s\to -4} \frac{(s+4)\cdot 2}{(s+4)(s+1)} = -\frac{2}{3} \\ B = \lim_{s\to -1} \frac{(s+1)\cdot 2}{(s+4)(s+1)} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \hat{H}(s) = -\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{s+1} \quad \Rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{\hat{H}(s)\} = \left[-\frac{2}{3}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{-t}\right]u(t)$$

3、判断 BIBO 稳定性

$\hat{H}(s)$ 极点 $s=-4$，$s=-1$ 均在左半平面，且是因果系统 ⇒ BIBO 稳定

4、求 $y_{zi}(t)$，$y_{zs}(t)$，$y(t)$

$$Y_{zi}(s) = \frac{y(0^-)(s+5)+y'(0^-)}{(s+4)(s+1)} = \frac{s+5}{(s+4)(s+1)} = -\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{s+4} + \frac{4}{3}\cdot\frac{1}{s+1} \Rightarrow y_{zi}(t) = \left[-\frac{1}{3}e^{-4t} + \frac{4}{3}e^{-t}\right]u(t)$$

$Y_{zs}(s) = H(s)F(s) = \frac{2}{(s+4)(s+1)} \cdot \frac{1}{s} \xrightarrow{\text{跳过分式}} y_{zs} = [\frac{1}{6}e^{-4t} - \frac{2}{3}e^{-t} + \frac{1}{2}]u(t)$

总响应 $y(t) = y_{zi}(t) + y_{zs}(t) = [\frac{1}{2} - \frac{1}{6}e^{-4t} + \frac{2}{3}e^{-t}]u(t)$

例18：LTIC system，由 ODE：$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt} - 2y = \frac{df}{dt} - 2f(t)$ 描述，$f(t) = u(t)$，$y(0^-) = 1$，$y'(0^-) = 1$

1、求特征极点与特征模态

$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = 0 \implies (s^2Y(s) - sy(0^-) - y'(0^-)) - (sY(s) - y(0^-)) - 2Y(s) = 0$

$\Rightarrow (s^2 - s - 2)Y(s) = (s-1)y(0^-) + y'(0^-)$，解特征多项式：$P_1 = -1$，$P_2 = 2$（两个特征极点）

对应特征模态：e^{-t}，$e^{2t} \Rightarrow$ 齐次解 $y_{zi} = C_1e^{-t} + C_2e^{2t}$

2、求 $\hat{H}(s)$ 和 $h(t)$

$s^2\hat{Y}(s) - s\hat{Y}(s) - 2\hat{Y}(s) = s\hat{F}(s) - 2\hat{F}(s) \Rightarrow \hat{H}(s) = \frac{\hat{Y}(s)}{\hat{F}(s)} = \frac{s-2}{s^2-s-2} = \frac{1}{s+1} \Rightarrow h(t) = e^{-t}u(t)$

3、判断 BIBO 稳定性 $\hat{H}(s)$ 只看传递函数极点，而不关心初值导致的发散

只关心系统是否会由有限的输入导致无限输出

$\hat{H}(s)$ 极点 $s=-1$ 在左侧平面 $\rightarrow$ BIBO稳定 这道题最终的发散是由 $y(0)$、$y'(0)$ 的初值导致的

在什么情况下不发散呢？只需将 e^{2t} 的系数置零

$C_1 = \frac{1}{3}(y(0) + y'(0)) = 0$，此时零输入响应纯衰减

4、求 $y_{zi}(t)$，$y_{zs}(t)$，$y(t)$

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = 1 \\ 2C_1 - C_2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C_1 = \frac{2}{3} \\ C_2 = \frac{1}{3} \end{cases} \qquad y_{zI} = (\frac{2}{3}e^{2t} + \frac{1}{3}e^{-t})u(t)$$

$\hat{Y}_{zs}(s) = \hat{H}(s)\hat{F}(s) = \frac{1}{s+1} \cdot \frac{1}{s} \Rightarrow y_{zs}(t) = (1 - e^{-t})u(t)$

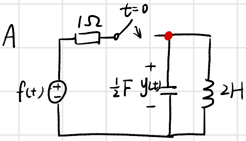
$y(t) = [1 + \frac{2}{3}(e^{2t} - e^{-t})]u(t)$

渐进稳定（Asymptotically Stable）

渐进稳定	所有极点在左半平面	$y_{zI} \to 0$	e^{-t}，e^{-4t}
临界稳定	极点在虚轴但无重根	y_{zI} 非零有界	$\cos(t)$，$\sin(t)$
不稳定	有极点在右半平面/虚轴重根	$y_{zI} \to \infty$	e^{2t}，$t\sin t$

电阻、电感、电容的 Laplace 域表达：$\boxed{Z_R(s)=R\ ,\ Z_L(s)=Ls\ ,\ Z_C=\frac{1}{Cs}}$

例19：对如下 LTIC 电路，$f(t)=e^{3t}V$，$V_C(0^-)=1V$，$i_L(0^-)=0A$



1、求电路各元件在 s 域 t>0 时的等效值

$Z_R=1\Omega$，$Z_C=\frac{1}{sC}=\frac{2}{s}$，$Z_L=sL=2s$

2、求传递函数 $\hat{H}(s)$ 和 BIBO 稳定性

并联阻抗 $Z_p=\frac{1}{\frac{1}{Z_C}+\frac{1}{Z_L}}=\frac{1}{\frac{s}{2}+\frac{1}{2s}}=\frac{2s}{s^2+1}$，总阻抗 $Z_{tot}=1+Z_p$，$\hat{H}(s)=\frac{Z_p}{Z_{tot}}=\frac{2s}{(s+1)^2}$

极点位于左半平面，BIBO 稳定

3、求特征极点和特征模态　这里直接采用了 $\hat{H}(s)$ 的分母，而从上一例中我们发现，$\hat{H}(s)$ 中的分母可能有部分已经与分子相消。那为什么还能这么做呢？因为这里的储能元件数为2，系统阶数 = 能量元件数，所以 $\hat{H}(s)$ 必没有经过相消

特征极点 $p_{1,2}=-1,-1$ ⇒ 特征模态 e^{-t}，te^{-t}

4、求 y_{zi}，y_{zs}，y

对图中红点节点建立 KCL：$I_R=\frac{0-y(t)}{1}=-y(t)$，$I_C=C\cdot\frac{d}{dt}y(t)$，$\frac{d}{dt}i_L=\frac{y(t)}{2}$

$\because I_R=I_C+I_L \Rightarrow -y(t)=\frac{1}{2}y'(t)+\int\frac{y(t)}{2} \xrightarrow{求导} y(t)+2y'(t)+y''(t)=0$

$\Rightarrow (r+1)^2=0$，$r_{1,2}=-1,-1$

代入初值 $y(0^+)=1V$，$-y(0)=\frac{1}{2}y'(0)+i_L(0) \Rightarrow y'(0^+)=-2$

$\Rightarrow y_{zi}=(A+Bt)e^{-t}$，代入 $\begin{cases}A=1\\B-A=-2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}A=1\\B=-1\end{cases} \Rightarrow y_{zi}=(1-t)e^{-t}u(t)$

$\hat{Y}_{zs}(s)=\hat{H}(s)\hat{F}(s)=\frac{2s}{(s+1)^2}\cdot\frac{1}{s-3}=\frac{3}{8}\frac{1}{s-3}-\frac{3}{8}\cdot\frac{1}{s+1}+\frac{1}{2}\frac{1}{(s+1)^2} \Rightarrow y_{zs}=\left(\frac{3}{8}e^{3t}-\frac{3}{8}e^{-t}+\frac{1}{2}te^{-t}\right)u(t)$

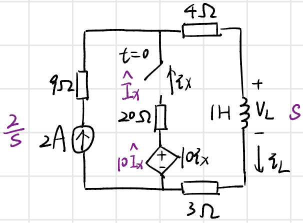
$y(t)=\left[\left(\frac{5}{8}-\frac{t}{2}\right)e^{-t}+\frac{3}{8}e^{3t}\right]u(t)$

PPT中用了加电流源在 s 域等效电容初始电压的方法

电容初值的 Norton 等效：$I_{C0}(s) = CV_0$

电感初值的 Thevenin 等效：$V_{L0}(s) = LI_0$

例20：对如下 LTIC 电路，在开关闭合前经过足够长时间，系统输出为 i_L



1、求 s-domain 等效 (t>0)

如图

2、求 $\hat{H}(s)$，确定 BIBO

$\hat{I}_L = \hat{I}_x + \frac{s}{2}$，$10\hat{I}_x - 20\hat{I}_x + (7+s)(\frac{2}{s} + \hat{I}_x) = 0 \Rightarrow \hat{I}_x = \frac{14+2s}{s(3-s)} \Rightarrow \hat{I}_L = \frac{14+2s}{s(3-s)} + \frac{s}{2}$

$\hat{H}(s) = \frac{\hat{Y}(s)}{\hat{F}(s)} = \frac{7+s}{3-s} + \frac{s^2}{4}$，$s=3$，非 BIBO 稳定