Chapter 11

复域变量 $s=\sigma+j\omega$

复域的拉普拉斯变换公式：$\boxed{\hat{H}(s)=\int_0^\infty h(t)e^{-st}dt}$

(transfer function)

如果 $h(t)$ 是LTI系统的冲激响应，那么其拉普拉斯变换 $\hat{H}(s)$ 就是系统的传递函数，描述了系统在复频域的行为

与傅里叶相似，$\hat{H}(s)=\frac{\hat{Y}(s)}{\hat{F}(s)}$

当实部 $\sigma=0$ 时，拉普拉斯变换退化为傅里叶变换：$\hat{F}(j\omega)=\int_0^\infty f(t)e^{-j\omega t}dt=F(\omega)$

但这样的退化成立有两个条件
① $f(t)$ is causal，$t<0$ 时 $f(t)=0$
② 拉普拉斯变换在 $s=j\omega$ 上有定义 $\boxed{\text{(积分收敛)}}$

让我们看看，Laplace是如何解决一些在Fourier中不绝对可积的函数的

通过乘上 $e^{-\sigma t}$，使得乘积 $f(t)e^{-\sigma t}$ 比 $f(t)$ 更可能可积

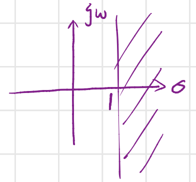
将Laplace式拆开不难发现，$\hat{F}(s)=\int_0^\infty f(t)e^{-st}dt=\int_0^\infty f(t)e^{-\sigma t}e^{-j\omega t}dt$

例1：求 $f(t)=e^t u(t)$ 的 Laplace

拉普拉斯变换中，引入实部 σ，可"抑制"增长

$\hat{F}(s)=\int_0^\infty e^t e^{-st}dt=\int_0^\infty e^{(1-s)t}dt=\left.\frac{e^{(1-s)t}}{1-s}\right|_0^\infty$ 要让积分收敛，必有 $Re\{s\}=\sigma>1$

在收敛条件下，有 $\hat{F}(s)=\frac{1}{s-1}$



region of convergence

对于Laplace，我们还要讨论，收敛域(ROC)是怎样的。本例中，$Re\{s\}>1$

极点(Pole)，使 $\hat{F}(s)\to\infty$，本例中即 $s-1=0 \iff s=1$
零点(Zero)，使 $\hat{F}(s)\to 0$，本例中不存在

例2：求 $h(t)=e^{-t}u(t)$ 的 Laplace.

没啥说的，跟上题基本一样，只是 $Re\{s\}>-1$

例3：求 $g(t)=e^{-t}u(t)+e^{t}u(t)$ 的Laplace

$$\hat{G}(s)=\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-1}=\frac{2s}{s^2-1}\qquad \begin{cases}\text{极点：} s=\pm1 \\ \text{零点：} s=0\end{cases}$$

这里的 $S=-1,0$ 不具备实际意义

ROC不仅存在左侧极点，在一些情形，如：$F(s)=s+\frac{1}{s-1}$，高频不再衰减，而是趋于无穷，此时无穷处也有隐藏极点

例4：求 $x(t)=rect(t-\frac{1}{2})$ 的Laplace

$$\hat{X}(s)=\int_0^{\infty}x(t)e^{-st}dt=\int_0^1 1\cdot e^{-st}dt=\frac{e^{-st}}{-s}\Big|_0^1=\frac{1-e^{-s}}{s}$$

不难发现，ROC是整个复平面（$s=0$ 可用洛必达验证）

⇓

任何在有限区间非零的信号，都能在整个复平面做Laplace，无任何有限极点，只有趋于无穷时的隐藏极点（hidden pole）

对于Causal Continuous LTI System，BIBO ⟺ $h(t)$ 绝对可积 ⟺ $H(\omega)$ 存在，而非BIBO ⟺ 非绝对可积 ⟺ $H(\omega)$ 可能不存在 但 $H(s)$ 可能存在

用Laplace等价描述Fourier时，只有 $j\omega$ 轴落在ROC内，才可以令 $s=j\omega$ 得到 $H(j\omega)$

若系统要BIBO稳定，则ROC须穿过虚轴，所有极限点都得在左半平面（$\sigma<0$）

同时，$s\to\infty$ 时的隐藏极点也不可忽视。这对应时域里包含 δ 脉冲或更高阶脉冲导数，令 $\int|h(t)|dt$ 发散

如果有隐藏极点，那么ROC不可能延伸到包含虚轴，系统就不BIBO稳定

常用的Laplace从0开始，而对 $t<0$ 不关心，两个信号只要在 $t>0$ 时一致，它们的 $\hat{F}(s)$ 一定相同

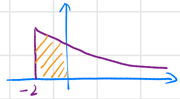
Laplace的时移性质：$g(t)=f(t-t_0)\Rightarrow \hat{G}(s)=\hat{F}(s)e^{-st_0}$ ~~(对单边Laplace，需 $t_0>0$)~~

更准确地说，需要保证转换前后的函数都Causal

例5：$f(t)=e^{-t}u(t)\Longleftrightarrow \hat{F}(s)=\frac{1}{s+1}$，$g(t)=e^{-(t-2)}u(t-2)$，求 $\hat{G}(s)$

没啥说的，$\hat{G}(s)=\frac{e^{-2s}}{s+1}$

例6：$f(t)=e^{-t}u(t) \leftrightarrow \hat{F}(s)=\frac{1}{s+1}$ ，$h(t)=e^{-(t+2)}u(t+2)$ ，求 $\hat{H}(s)$



显然，不能用 Time-shift 了，只能观察函数，$\hat{H}(s)=\int_{0^-}^{\infty} e^{-(t+2)}u(t+2)e^{-st}dt = e^{-2}\int_{0^-}^{\infty} e^{-t}u(t)e^{-st}dt$
$= \frac{e^{-2}}{s+1}$

例7：$g(t)=e^{-(t-2)}u(t-2) \leftrightarrow \hat{G}(s)=\frac{e^{-2s}}{s+1}$ ，$x(t)=g(t+2)$ ，求 $\hat{X}(s)$

函数时移前后均 Causal，可用 Laplace. $\hat{X}(s)=\frac{1}{s+1}$

Laplace 的微分性质：$f(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \hat{F}(s)$ ，$g(t)=\frac{d}{dt}f(t) \Rightarrow \boxed{\hat{G}(s)=\mathcal{L}\{f'(t)\}=s\hat{F}(s)-f(0^-)}$

如果 $f(t)$ Causal，则 $f(0^-)=0$，公式可简化为 $\hat{G}(s)=s\hat{F}(s)$

高阶推广：$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\}=s^n\hat{F}(s)$

例8：$f(t)=e^{3t}u(t) \leftrightarrow \hat{F}(s)=\frac{1}{s-3}$ ，$g(t)=\frac{d}{dt}f(t)$ ，求 $\hat{G}(s)$

不多说，$\hat{G}(s)=\frac{s}{s-3}$ ，ROC：$\sigma>3$

例9：$f(t)=e^{3t} \leftrightarrow \hat{F}(s)=\frac{1}{s-3}$ ，$g(t)=\frac{d}{dt}f(t)$ ，求 $\hat{G}(s)$

也不多说，$\hat{G}(s)=\frac{s}{s-3}-1=\frac{3}{s-3}$ ，ROC：$\sigma>3$

Proper Rational Function 的逆 Laplace 方法

只讨论分子多项式次数小于分母的情况：$\hat{F}(s)=\frac{N(s)}{D(s)}$ ，把分母因式分解，$D(s)=(s-p_1)\cdots(s-p_n)$

把 $\frac{N(s)}{D(s)}$ 写成一堆最简单的基本项之和：$\hat{F}(s)=\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{s-p_2}+\cdots+\frac{A_n}{s-p_n}$ ，每项 $\boxed{\frac{A_i}{s-p_i} \xrightarrow{\mathcal{L}^{-1}} A_i e^{p_i t}u(t)}$

残差法求系数 A_i：等式两边同乘 $(s-p_i)$，再令 $s\to p_i$ ，$left=(s-p_i)\hat{F}(s)\big|_{s=p_i}$ ，$right=A_i$ 其余项均归零

$\Rightarrow \boxed{A_i=[(s-p_i)\hat{F}(s)]_{s=p_i}}$

若有重根，则要展开为 $\sum \frac{B_j}{(s-p)^j}$

得到分解结果后，查表即得变换对

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1$$
$$e^{pt}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s-p}$$
$$te^{pt}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{(s-p)^2}$$
$$t^n e^{pt}u(t) \longleftrightarrow \frac{n!}{(s-p)^{n+1}}$$

例10：求 $\hat{F}(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}$ 的逆 Laplace

$\hat{F}(s)=\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{s+2}$，$A_1=\hat{F}(s)(s+1)\big|_{s=-1}=2$，$A_2=\hat{F}(s)(s+2)\big|_{s=-2}=-1$

$\hat{F}(s)=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}=2e^{-t}u(t)-e^{-2t}u(t)$

例11：求 $\hat{H}(s)=\frac{1}{s(s^2+2s+2)}$ 的逆 Laplace

$\frac{1}{s((s^2+1)+1)}=\frac{A}{s}+\frac{B(s+1)+C}{(s+1)^2+1}$，两边同乘 $s((s^2+1)+1)\Rightarrow 1=A((s+1)^2+1)+[B(s+1)+C]s$

$$\begin{cases} s^2\text{项}: & A+B=0 \\ s\text{项}: & 2A+C=0 \\ \text{常数项}: & A=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=1 \\ B=-1 \\ C=-2 \end{cases} \Rightarrow \hat{H}(s)=\frac{1}{s}-\frac{s+1}{(s+1)^2+1}-\frac{2}{(s+1)^2+1}$$

Heaviside 方法

对不可再分的二次因子 $(s-a)^2+b^2$，写成 $\frac{B(s-a)+C}{(s-a)^2+b^2}$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{s}\}=u(t)$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{s+1}{(s+1)^2+1}\}=e^{-t}\cos t\cdot u(t)$

$\mathcal{L}^{-1}\{\frac{1}{(s+1)^2+1}\}=e^{-t}\sin t\cdot u(t)$

查表 $\Rightarrow h(t)=u(t)-e^{-t}\cos t\cdot u(t)-2e^{-t}\sin t\cdot u(t)$

ctmd 省不了一点，后面要讲

另有将 s^2+2s+2 直接求根的方法，适用残差，~~但此处不赘述 (Chapter 11 — Slide 27)~~

$s^2+2s+2=0\Rightarrow s=-1\pm j\Rightarrow \frac{A_1}{s}+\frac{A_2}{s+1-j}+\frac{A_3}{s+1+j}$

在 $s=0$ 处，$A_1=\lim_{s\to 0}s\hat{H}(s)=\frac{1}{2}$

在 $s=-1+j$ 处，$A_2=\lim_{s\to -1+j}(s-(-1+j))\hat{H}(s)=\frac{1}{s(s+1+j)}\big|_{s=-1+j}=\frac{1}{(-1+j)\cdot 2j}=\frac{-1+j}{4}$

在 $s=-1-j$ 处，实系数留数必共轭，$A_3=A_2^*=\frac{-1-j}{4}$

$\Rightarrow h(t)=A_1u(t)+A_2e^{(-1+j)t}u(t)+A_3e^{(-1-j)t}u(t)=\frac{1}{2}u(t)+\frac{-1+j}{4}e^{-t}e^{jt}u(t)+\frac{-1-j}{4}e^{-t}e^{-jt}u(t)$

$=\frac{1}{2}u(t)+\frac{e^{-t}}{4}[\underbrace{(-1+j)e^{jt}+(-1-j)e^{-jt}}_{-2(\cos t+\sin t)}]u(t)=[\frac{1}{2}-\frac{1}{2}e^{-t}(\cos t+\sin t)]u(t)$

当 Laplace 的有理函数 $F(s)$ 系数为全实数，但在复平面上出现一对互为共轭的极点，

$$\begin{cases} p_1=\alpha+j\beta \\ p_2=\alpha-j\beta \end{cases}$$

（由于 $F(s)$ 系数为实数，两极点必互为共轭），对应的，部分分式这两项的系数也共轭：

$$\begin{cases} A_1=re^{j\theta} \\ A_2=re^{-j\theta} \end{cases} \Rightarrow \text{逆变换后 } A_1e^{p_1t}+A_2e^{p_2t}=re^{(\alpha+j\beta)t+j\theta}+re^{(\alpha-j\beta)t-j\theta}$$

$$=2re^{\alpha t}\cos(\beta t+\theta)u(t)$$

重极点（一个极点p_1重数为n）时，如何做部分分式展开并求每一项系数A_k：

若 $\hat{F}(s)=\frac{N(s)}{(s-p_1)^n}$，则可写为 $\hat{F}(s)=\frac{A_1}{s-p_1}+\frac{A_2}{(s-p_1)^2}+\cdots+\frac{A_n}{(s-p_1)^n}$

系数求法：$Q(s)=(s-p_1)^n\hat{F}(s)=A_1(s-p_1)^{n-1}+A_2(s-p_1)^{n-2}+\cdots+A_n$，对两边做$m$次求导，

再令$s=p_1$，有 $A_{n-m}=\frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{ds^m}\left((s-p_1)^n\hat{F}(s)\right)\right]_{s=p_1}$ 很好理解，求m次导后，A_{n-m}项仅剩常数，其余项均消去，$\frac{1}{m!}$为系数补偿

例12：求 $\hat{F}(s)=\frac{6s-1}{(s+1)^2(s-2)}$ 的逆 Laplace

$\frac{6s-1}{(s+1)^2(s-2)}=\frac{A_0}{s-2}+\frac{A_1}{s+1}+\frac{A_2}{(s+1)^2}$，$A_0=\lim_{s\to2}(s-2)\hat{F}(s)=\frac{11}{9}$

二重极点最高次：$A_2=\lim_{s\to-1}(s+1)^2\hat{F}(s)=\frac{7}{3}$ 注意，对于多重极点的最高次项，仍可用残差，可理解为求0阶导的退化形式

$Q(s)=(s+1)^2\hat{F}(s)=\frac{6s-1}{s-2}$，$Q'(s)=\frac{-11}{(s-2)^2}$ $\Rightarrow A_1=Q'(-1)=-\frac{11}{9}$

逆 Laplace 后得到，$f(t)=\frac{11}{9}e^{2t}u(t)-\frac{11}{9}e^{-t}u(t)+\frac{7}{3}te^{-t}u(t)$

对于非 proper（分子多项式次数大于分母），用时域微分做逆变换

令 $\hat{F}(s)=s^k\boxed{\frac{s^n}{s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n}}$ → 记作 $\hat{G}(s)$ recall that $\hat{F}(s)=s^k\hat{G}(s)\Leftrightarrow f(t)=\frac{d^k}{dt^k}[g(t)]$

做法就是，先处理proper的$\hat{G}(s)$，再得到$g(t)$，再对$g(t)$做k次微分，即为$f(t)$

对于分子分母多项式次数相同，$\hat{F}(s)=\frac{s^n}{s^n+p(s)}=1-\frac{p(s)}{s^n+p(s)}$，再处理$\frac{p(s)}{s^n+p(s)}$即可

$p(s)$ 指代次数小于n的多项式

例13、14：求 $\hat{F}(s)=\frac{s}{s+1}$ 的逆 Laplace

#Approach 1

$G(s)=\frac{1}{s+1}\rightarrow g(t)=e^{-t}u(t)\Rightarrow f(t)=g'(t)=-e^{-t}u(t)+e^{-t}\delta(t)=-e^{-t}u(t)+\delta(t)$

#Approach 2

$\hat{F}(s)=\frac{s+1-1}{s+1}=1-\frac{1}{s+1}\longrightarrow f(t)=\delta(t)-e^{-t}u(t)$

更一般的非proper情况：$\hat{F}(s)=\frac{s^n+Q(s)}{s^n+p(s)}=1+\frac{Q(s)-p(s)}{s^n+p(s)}$ 完成降次，作为proper求解