

1.

Q:請用圖形及文字說明劉徽如何證明圓面積公式

A:其實圓面積公式的證明與圓周率的正確性密不可分，

在九章算術的原文中有提及:

「術曰：半周乘半徑得積步。

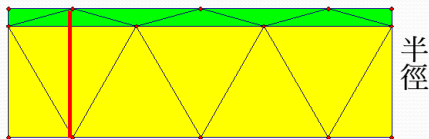
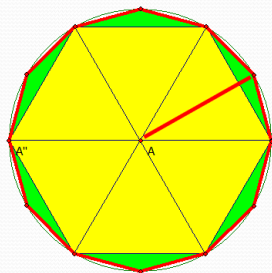
又術曰：周徑相乘，四而一。

又術曰：徑自相乘，三之，四而一。

又術曰：周自乘，十二而一。」

其中徑= $2r$ 、周= $2\pi r$ ，因此這四條公式要相等的前提是圓周率 $\pi=3$ ，也因此劉徽之前，古人認為圓周率等於3，但劉徽利用割圓術得知，3這個數字僅是圓內切正六邊形的周長，他便以此為基礎拓展割圓術至圓內切正192邊形，並將圓周率修正至3.1416，並推斷，拓展至圓內切正 n 邊形時，其周長等於圓周長，並可以推算出正確的圓周率值。

劉徽的「割圓術」



半周（正六邊形周長的一半）

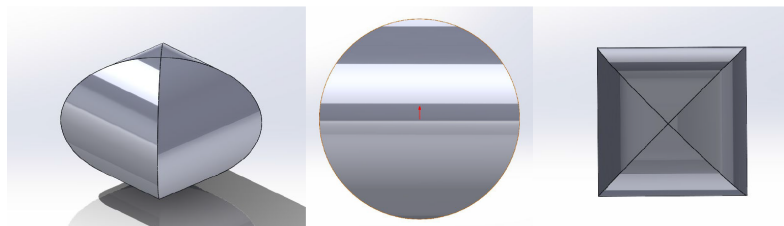
正六邊形的半周 \times 半徑 =

正十二邊形面積（非常接近圓面積）

2.

Q:「少廣章」的開立圓術說到:.....

A:九章算術原文中認為一個立方體與其內切圓柱體的截面積比為 $4:\pi$ ，而那個內切圓柱體與其內切球的體積比也為 $4:\pi$ ，故得知立方體與球的體積比為 $4^2:\pi^2$ ，又當時認為圓周率=3，故得知球體體積為 $V=d^3$ ，其中 d 為球的直徑(即立方體邊長)，然而這樣的公式被劉徽證明是錯誤的，其原因在於圓柱體的截面比上球體截面不是正方形比上圓形，故在第二步推導時再次使用 $4:\pi$ 是錯誤的，也因此球體的體積不應該是9/16倍的正立方體體積。真正與球體積為 $4:\pi$ 的圖形應為牟合方蓋，而所謂牟何方蓋為兩個圓柱體的交集，因其從側面看是圓形，從上方看是正方形，因此牟合方蓋體積:球體積= $4:\pi$ ，故只要求得牟合方蓋的體積即可得到正確的球體積公式，但劉徽沒有成功計算出牟合方蓋的體積。



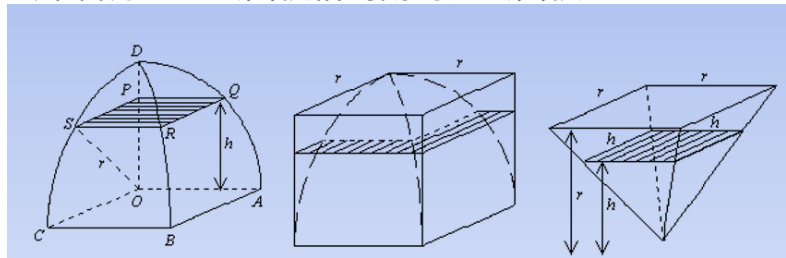
這樣

3.

Q:請用圖形及文字說明祖沖之父子如何證明球體積公式

A:

他們利用到了「祖暅原理」，即兩立體圖形若在等高的地方截面積都相同，那麼兩圖形之體積也相同。首先考慮1/8牟合方蓋，而包含它的正立方體截面積減去牟合方蓋的截面積恰為陽馬之截面積。



這時引進祖暅原理可知:「牟合方蓋體積 = 正方體體積 - 陽馬體積」，而

1. 陽馬體積 = $\frac{1}{3}$ 正方體體積
2. 球體積 = $\frac{\pi}{4}$ 牟合方蓋體積

3. 牟合方蓋體積 $= (1 - 1/3) = 2/3$ 正方體體積

故結合上述條件可知，球體積即為 $\pi/6$ 正方體體積，而正方體邊長 $= 2r$ ，故球體體積為 πr^3 ，證明完畢。

4.

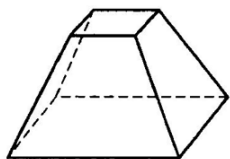
Q: 請用圖形及文字說明劉徽如何證明芻童公式

A: 芻童為九章算術卷5商功中提及的一種特殊圖形，由上下兩個面及四個斜面構成，類似於多了頂面的的芻蕘，劉徽試圖將其切割利用某驗法驗算公式的正確性，其中標準芻童可以切割為2個中央立方，2個兩端塹堵，4個兩旁塹堵及4個四角陽馬，其中塹堵定義為一個立方斜切兩半，陽馬則為塹堵再行切割後的產物，其體積為塹堵的 $2/3$ (即立方的 $2/6 = 1/3$)，有了這些小部件後，再建構兩長方體，其中第一個長方體由6個中央立方，8個兩端塹堵，24個兩旁塹堵，24個四角陽馬組成；第二個長方體由6個中央立方，4個兩端塹堵組合而成，將兩長方體體積相加後除以6即得到

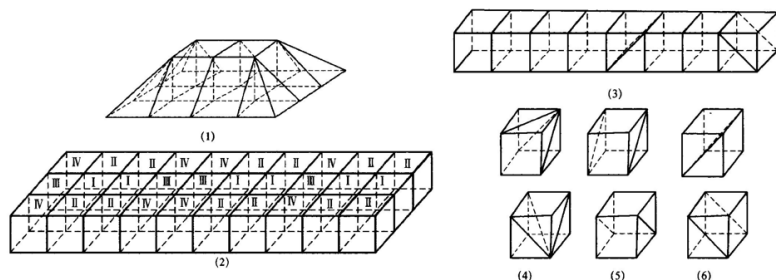
標準芻童之體積。

芻童

術曰：倍上袤，下袤從之；亦倍下袤，上袤從之；各以其廣乘之；并，以高若深乘之，皆六而一。



芻童募驗法



5. Q:何謂方程術?其與現代高斯消去法的差別在哪裡?
方程術一詞代表系統化解聯立方程組的一種計算方法，其核心內容在操作上與現代的加減消去法、或更具系統化的高斯消去法類似，目標都是將方程式本身互相加減消去後簡化方程式並求得解，而這個加減消去的過程在九章算術中稱作遍乘與直除。然而，其與高斯消去法雖在核心觀念上相同，但意義卻不同，這是由於方程術在操作的過程中不是假設未知數去做加減，而是利用算籌在不同位置上代表不同意義獲得所

求。

卻

6. Q:從九章算術各個問題的背景……請提出一個過去你不知道的東亞面向

A:以卷三衰分為例，自古以來中國的古代社會就充斥著階級制度以及不平等的現象，這是我所知道的上古中華帝國，然而，我意外的是原來在九章算術成書的年代，推測距今約兩千多年前，古代的貴族們就已經如此完整、有系統化地在實施不平等的制度，從許多例題如卷三中獵鹿並以爵位分之就可窺見一二。

然而在卷六均輸時，也體現了古代社會公平的一面，那便是在分配賦稅、繳納糧食、服勞役時將交通成本、人力成本考慮進去，因此古代的社會其實比我想的還要更加的制度化及完善，與現今社會很相像，也就是公平與不公平的一體兩面共存並進。

7. Q:學到最重要的事

A:我認為在這學期的課程中，我最大的收穫並不是學到了什麼數學知識，而是透過<<九章算術>>這本古書，更貼近地去了解到了古代社會的運作以及古人思考問題的邏輯，我認為這些收穫比數學方法來的更加有價值，因為對於書中的數學技巧，現代數學都可以解釋，但那些留存於書中的古人智慧是寫再多的數學題目都無法再現的，因此我很感激有這樣的學習機會，可以用數學作為契機鑑往知來，窺見歷史的奧妙。

8 Q:跟現代數學比較起來，九章算術與劉徽的註解在內容、體例以及論證方面你認為有甚麼特點？

A:我認為與現代數學比較起來，劉徽的註解在思考邏輯上更為直觀，或者說更人性化一些，畢竟古代沒有電腦輔助計算，因此在思考上必須以人為本出發去省

思题目的內涵，比方說劉徽僅證明出與球體積為 4π 的是牟合方蓋而非正立方體，但他也僅僅止步於此沒有進一步將牟合方蓋的體積計算出，這體現了劉徽也是人，他儘管在數學造詣上很有天份，也有他辦不到的事，但他就算沒有進一步計算出球體積，仍舊在註解上訂正了九章算術原文的錯誤，我認為這象徵著世代的傳承，他相信儘管他或許辦不到，但後人定能踩著他的肩膀往上爬，而祖沖之父子也沒有辜負他的期望，成功算出牟合方蓋的體積，並進一步求得球體的正确體積，這是我認為最難能可貴的地方。

9 Q:如果你是劉徽，你想要把你最得意的數學成就刻在墓碑上，你會想要刻上什麼？為什麼？

A:我會想先刻上我整理了約先於我3-400年的古籍並附上了註解，因為這項舉措做到承先啟後的作用，代表著後人有機會以我的註解為橋梁進一步窺見古人的數學思維。接著，我會想刻上在割圓術的貢獻，因為我用自己的雙手手動割到了圓內切正192邊形，並成功把圓周率修正到小數點後第四位，我想這會鼓舞後人並激發他們想要求出更精確的圓周率值的想法，並且可以以超越劉徽為一大成就，繼續用自己的雙手精進整個數學的發展。