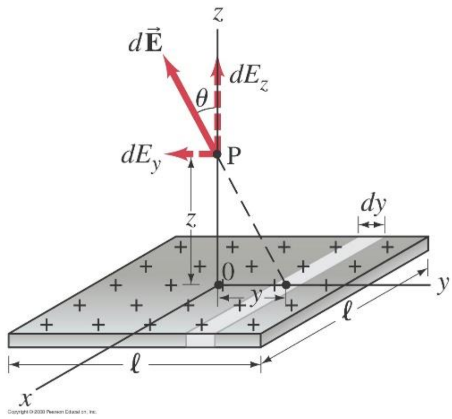
清華大學 109 學年(下)物理系 普通物理 II 補考-1 4/8 20:00~21:30

1. Charge is distributed uniformly over a large square plane of side ℓ as shown. The charge per unit area is σ. In the limit $\ell \to \infty$, show that the calculated electric field at a point P a distance z above the center of the plane is **consistent with** Gauss's law: $\vec{E} = \sigma\vec{\mathbf{z}}/(2\varepsilon_0|\vec{\mathbf{z}}|)$.



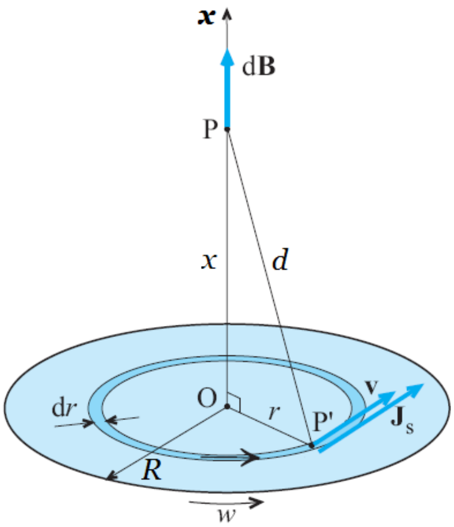
Hint: Divide the plane into long narrow ***strips*** of width dy: $\lambda = dq/\ell = \sigma dy$ and apply the resulted E-field of a uniformly charged straight **wire** of the length ℓ:

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{\ell}{\sqrt{y^2+z^2}\left(\ell^2+4\sqrt{y^2+z^2}^{\,2}\right)^{1/2}};\ \text{then}$$

sum the fields due to each strip to get the total field.

PS. $\dfrac{du}{1+u^2} = d\tan^{-1}u$. [20%]

2. (1) A disk of radius R has a total charge q uniformly distributed on it. The surface charge density of the disk is σ. The disk is rotating around a vertical axis through its center with angular frequency w.



Hint: $d\vec{\mathbf{B}} = \dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{Id\vec{\ell}\times\hat{\mathbf{d}}}{d^2}$ (1D) $\to$ $\dfrac{\mu_o}{4\pi}\dfrac{\vec{\mathbf{J}}_s da\times\hat{\mathbf{d}}}{d^2}$ (2D)

$\vec{\mathbf{J}}_S = \sigma\vec{\mathbf{v}} = \sigma\vec{\mathbf{w}}\times\vec{\mathbf{r}} = \sigma wr\hat{\boldsymbol{\phi}}$ $(0 \le r \le R)$

((i)) Derive the magnetic flux density vector at point O: $\vec{\mathbf{B}}(x) = \dfrac{\mu_o\sigma wR}{2}\hat{\boldsymbol{x}}$. [5%]

((ii)) The B-field at point P is $\vec{\mathbf{B}}(x) = \dfrac{\mu_o\sigma w}{2}\left(\sqrt{R^2+x^2} - 2|x| + \dfrac{x^2}{\sqrt{R^2+x^2}}\right)\hat{\boldsymbol{x}}$. Derive the effective magnetic moment vector of this rotating disk. [5%]

(2) What are the main features of the $\boldsymbol{B}$-field along the axis of a pair of Helmholtz coils (*i.e.*, two similar co-axial coils with radius R placed in the same distance R)? [5%]

(3) The Hall effect is the production of a voltage difference, V_H, across an electrical conductor, transverse to an electric current in the conductor and a magnetic field perpendicular to the current. What is the meaning of each term in $V_H = \dfrac{I\cdot B}{n\cdot t\cdot e}$? [5%]

3. (a) 請寫出國際單位制（SI）中電容 C 的單位，即 $[C]=$？

(b) 將電阻 R 的常用單位：歐姆（Ω），改寫成 MKSA 的標準單位。

(c) R 乘以 C 的單位是什麼，即 $[RC]=$？須加上單位的換算過程或說明理由。

4. (d) 以平行電板的電容器為例，推導：$C=\varepsilon_{\text{air}}\dfrac{A}{d}$。其中，$A$ 為電板的面積、d 為兩電板間的距離、$d \ll \sqrt{A}$，且兩電板間空氣的電容率 $\varepsilon_{\text{air}} \approx \varepsilon_0$（真空誘電率）。

(e) 為什麼電容器的兩導體電極間常置入高介電常數的絕緣性介電物質？

(f) 為什麼常見的電容器是構裝成圓柱體的外觀？

(g) 若構裝成細長圓柱體的電阻器（A 為截面積、l 為長度），其材質的電阻率為 ρ，寫出電阻 R 的表示式。

5. 一個圓柱體的均勻性導電物質（A 為截面積、σ 為電導率）在兩端加上電壓、內部形成電場 $\vec{E}$，因而有電流密度向量 $\vec{j}$ 的電荷與能量傳輸。

(h) 寫出該導電物質的歐姆定率。

(i) 判斷並說明：導電物質內在通電過程中的載子電荷密度（ρ）的時間變化率？

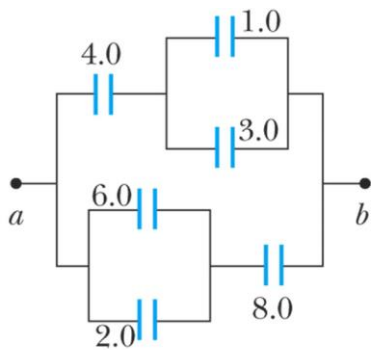
(j) 什麼是傳輸載子的漂移速度（drift velocity，$\vec{v}_{\text{d}}$）？

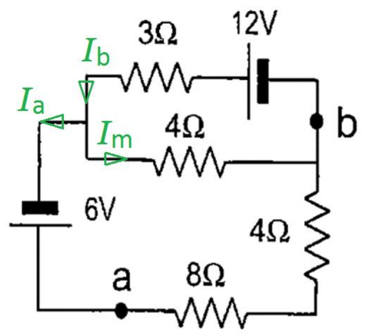
(k) 設載子的電荷濃度為 n，寫出漂移速率和電流密度的關係。

(l) 扼要說明：若是已知銅導線的直徑（d）和銅的質量密度（ρ_m），則還需要什麼相關的數據資訊，才能估算出此條件下銅導線內的載子漂移速率？

(m) 一般家庭用電的電流導線中，載子漂移速率的數量級約是多少 m/s？

6. (n) 計算左下圖 a 和 b 兩點間的等效電容。（各電容的單位為μF）

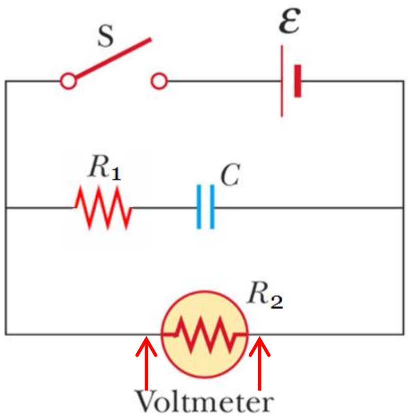




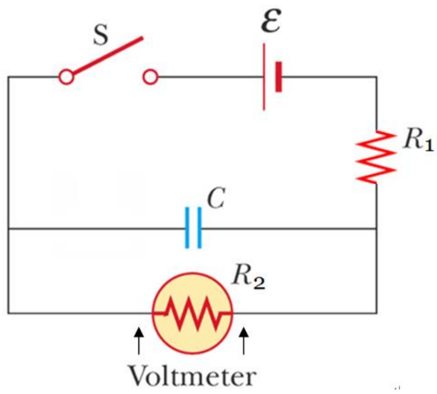
(o) 計算右上圖中 a 和 b 兩端點的電位差。

7. 兩電阻 R_1、R_2 和電容 C 的電路如下圖，其中 $\mathcal{E}$ 為電壓值固定的電源電動勢。

原試題：



⇨ 改良版：



(p) 當 $t=0$ 的時刻接通開關，此瞬間的電源輸出電流 $I(0^+)=$？

(q) 畫出電容在充電過程中蓄電量 $Q(t)$ 的時間函數曲線。

(r) 當通電的時間足夠長，流經電阻 R_1 的電流為何，即 $\lim_{t\to\infty} I_{R_1}(t)=$？

(s) 並聯上伏特計、跨接電阻 R_2 的兩端可測電壓值，問：如何配置伏特計的內阻?

(t) 畫出電阻 R_2 兩端電壓差的時間函數曲線，以及 $V_{R_2}(t)=$？

(u) 電容飽和充電後儲存的電能量是多少？

8. 一個中心固定的電偶 $\vec{p}=Q\vec{d}$ 置於外加均勻的電場 $\vec{E}_{\text{ext}}$ 中，且 $\vec{p}\perp\vec{E}_{\text{ext}}$，問：

(v) 此電偶受到的力矩為 $\vec{\tau}=\vec{p}\times\vec{E}_{\text{ext}}$，自行設立座標系加以証明。

(w) 力矩令電偶偏轉而作功 $W=\int\vec{\tau}\cdot d\vec{\theta}=-\int\tau d\theta$，說明式子中右端負號的由來。

(x) 依據功與動能轉換原理和機械能守恆定率，即 $\Delta U=U_f-U_i=-W$；換言之

$U-U_{\mathfrak{R}}=\int_{\theta_{\mathfrak{R}}}^{\theta}\tau d\theta$，其中的 $U_{\mathfrak{R}}$ 是位於角位移 $\theta_{\mathfrak{R}}$ 角度的參考電位能。

說明為什麼一般可寫成 $U=-\vec{p}\cdot\vec{E}_{\text{ext}}$？

(y) 電偶本身也會在空間中形成電場的作用，約和遠離電偶距離的幾次方成比例？

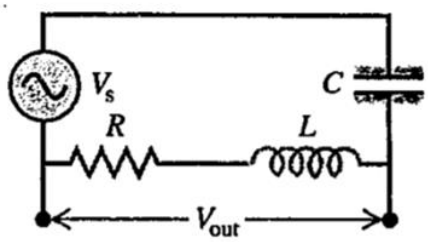
(z) 驗證 $(1+x)^{-1/2}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\frac{5}{16}x^3+\cdots$，其中的 $|x|<<1$。

提示：利用**牛頓二項式定理**較為直接而簡便。

9. (1) 何以兩共軸的電流線圈之間，磁的作用力約略和距離的四次方成反比？ [5%]

(2) 凡得瓦力是感應電偶和感應電偶間的靜電作用力，和距離的關係又是如何？[5%]

(3) A High-Pass Filter. One application of L-R-C series circuits is to high-pass or lowpass filters, which filter out either the low- or high-frequency components of a signal. A highness filter is shown in Figure, where the output voltage is taken across the L-R combination. (a) Derive an expression for (V_{out} / V_s), the ratio of the output and source voltage amplitudes, as a function of the angular frequency ω of the source and R, L, and C parameters. (b) Show that when ω is small, this ratio is proportional to ω and thus is small, and (c) show that the ratio approaches unity in the limit of large frequency. [10%, find the reactance of L and C to construct the voltage and current]



Hint: $$\frac{V_{out}}{V_s}=\left|\frac{R+iX_L}{\underline{Z}}\right|=\left|\frac{R+iX_L}{R+iX_L+1/(iX_C)}\right|=\frac{RC\omega\sqrt{1+(L/R)^2\omega^2}}{\sqrt{1+(RC)^2\omega^2-2LC\omega^2+(LC)^2\omega^4}}\rightarrow\begin{cases}\omega RC, & \text{as } \omega\rightarrow 0\\ 1, & \text{as } \omega\rightarrow\infty\end{cases}$$

Circuit Element	Average Power	Reactance	**Phase** of Current	Voltage Amplitude
Resistor ***R***	$\langle P_R\rangle=\dfrac{\mathcal{E}_m{}^2}{2R}$	R	Current is **in phase** with the voltage	$V_R=I_RR$
Capacitor ***C***	$\langle P_C\rangle=0$	$X_C=\dfrac{1}{\omega C}$	Current **leads** voltage by a quarter of a period	$V_C=I_CX_C=\dfrac{I_C}{\omega C}$
Inductor ***L***	$\langle P_L\rangle=0$	$X_L=\omega L$	Current **lags behind** voltage by a quarter of a period	$V_L=I_LX_L=I_L\omega L$