Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform...
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Vorlesung Höhere Mathematik 1

Kapitel 4: Numerische Lösung linearer Gleichungssysteme - Teil 2

16. September 2022

Zürcher Hochschule
für Angewandte Wissenschaften
zh aw School of Engineering

Gliederung des Kapitels

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

1 Eigenwerte und Eigenvektoren

- Einführung komplexe Zahlen
  - Grundbegriffe
  - Darstellungsform.
  - Rechenarten
  - Fundamentalsatz
- Einführung Eigenwerte/-vektoren
  - Grundbegriffe
  - Eigenschaften Eigenwerte
  - Eigenschaften Eigenvektoren
- Numerische Berechnung
  - QR-Verfahren
  - Vektoriteration

Lernziele

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Sie können Eigenwerte und Eigenvektoren von Matrizen berechnen.

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Kap. 4.8

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Wichtige Anwendungen aus der linearen Algebra basieren auf der Bestimmung von Eigenwerten und Eigenvektoren von Matrizen.
- Da Eigenwerte einer reellen Matrix auch komplex werden können, benötigen wir zuerst eine Einführung in die komplexen Zahlen (siehe Kap. 4.8.1), bevor wir auf Eigenwerte und Eigenvektoren (Kap. 4.8.2) eingehen können.

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

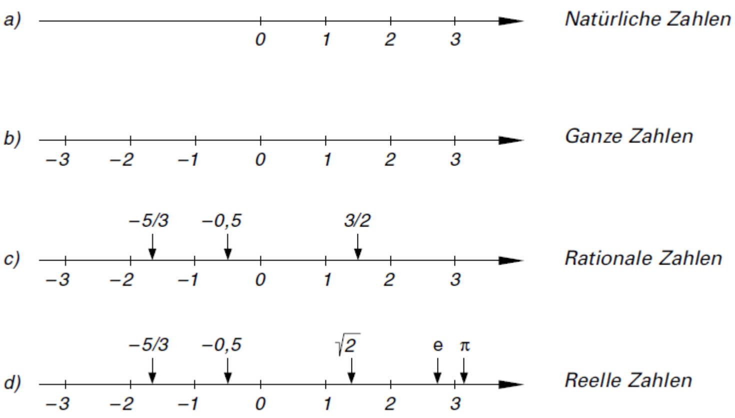
Kap. 4.8.1

Einführung in die komplexen Zahlen

Einführung in die komplexen Zahlen

- Im Laufe der Jahrtausende mussten die Zahlenbereiche laufend erweitert werden, um neue Problemstellungen mathematisch beschreiben zu können (vgl. die Abb. auf der nächsten Slide).
- Auch in der Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ sind einfache Gleichungen der Art
$$x^2 + 1 = 0$$
bereits nicht mehr lösbar. Es braucht also eine zusätzliche Erweiterung auf die Menge der sogn. **komplexen Zahlen**.
- Diese Zahlenmenge lässt sich beschreiben, indem der Zahlenstrahl der reellen Zahlen durch eine zusätzliche Achse zu einer Zahlenebene aufgespannt wird.

Einführung in die komplexen Zahlen



Grundbegriffe

Eigenwerte und Eigen- vektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamental- satz
Einführung Eigenwerte/- vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Die Menge der komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ erweitert die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$, so dass nun also auch Gleichungen der Art

  $$x^2 + 1 = 0$$

  lösbar werden. Dafür wird die imaginäre Einheit i mit der Eigenschaft

  $$i^2 = -1$$

  eingeführt[1].
- Damit ergibt sich die Lösung von $x^2 = -1 = i^2$ zu $x = \pm i$.

[1] In der Elektrotechnik wird die imaginäre Einheit auch mit j bezeichnet, um eine Verwechslung mit der Stromstärke auszuschliessen. Auch in Python ist die imaginäre Einheit j.

Grundbegriffe

- Während reelle Zahlen auf einem Zahlenstrahl dargestellt werden können, werden komplexe Zahlen in der (zweidimensionalen) komplexen Zahlenebene (auch Gausssche Zahlenebene genannt) dargestellt, wobei jedem Punkt

$$P = (x, y)$$

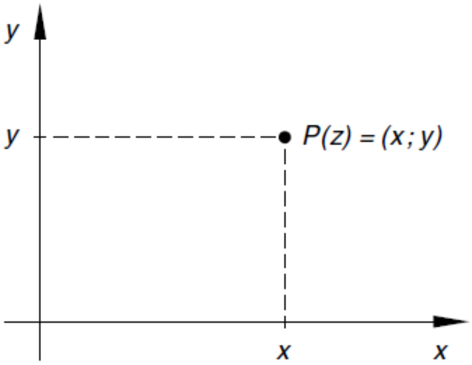
mit den kartesischen Koordinaten x und y in dieser Ebene eine komplexe Zahl z entsprechen soll mit der symbolischen Schreibweise

$$z = x + iy.$$

- Durch das geordnete reelle Zahlenpaar (x, y) wird die komplexe Zahl eindeutig beschrieben und lässt sich als Bildpunkt in der Ebene darstellen

$$z = x + iy \longleftrightarrow P_z = (x, y)$$

Grundbegriffe



- Darstellung einer komplexen Zahl $z = x + iy$ als Bildpunkt in der Ebene [12].

Grundbegriffe

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Definition 4.11: Grundbegriffe Komplexe Zahlen [12]

- Eine **komplexe Zahl** z ist ein geordnetes Paar (x, y) zweier reeller Zahlen x und y. Man schreibt symbolisch

$$z = x + iy$$

- Die **imaginäre Einheit** i ist definiert durch

$$i^2 = -1$$

- Die **Menge der komplexen Zahlen** wird mit $\mathbb{C}$ bezeichnet:

$$\mathbb{C} = \{z \mid z = x + iy \text{ mit } x, y \in \mathbb{R}\}$$

  Die Menge der reellen Zahlen ist also eine (echte) Teilmenge der komplexen Zahlen: $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

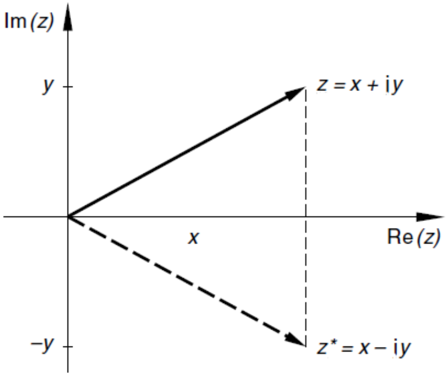
HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Definition 4.11: Grundbegriffe Komplexe Zahlen [12]

- Die reellen Bestandteile x und y von z werden als **Realteil** und **Imaginärteil** bezeichnet:
  - Realteil von z: $\mathrm{Re}(z) = x$
  - Imaginärteil von z: $\mathrm{Im}(z) = y$
- Die komplexe Zahl $z = x + iy$ wird durch den Punkt $P_z = (x, y)$ in der kartesischen $(x, y)-$Ebene eindeutig dargestellt. Diese Ebene wird in diesem Zusammenhang häufig die komplexe oder auch **Gaussche Zahlenebene** genannt. Häufig wird in technischen Anwendungen eine komplexe Zahl durch ihren "**Zeiger**" dargestellt, einem Pfeil vom Nullpunkt zum Bildpunkt P_z (vgl. Abb. auf der nächsten Slide).
- Die zu z **konjugiert komplexe Zahl** ist definiert als $z^* = x - iy$. Dies entspricht der an der $x-$Achse gespiegelten Zahl.
- Der **Betrag** einer komplexen Zahl ist definiert als $|\, z \,| = \sqrt{x^2 + y^2}$. Dies entspricht der Länge des Zeigers.

Grundbegriffe



- Darstellung einer komplexen Zahl $z = x + iy$ als sogn. Zeiger in der komplexen oder auch Gausschen Zahlenebene [12].

Grundbegriffe

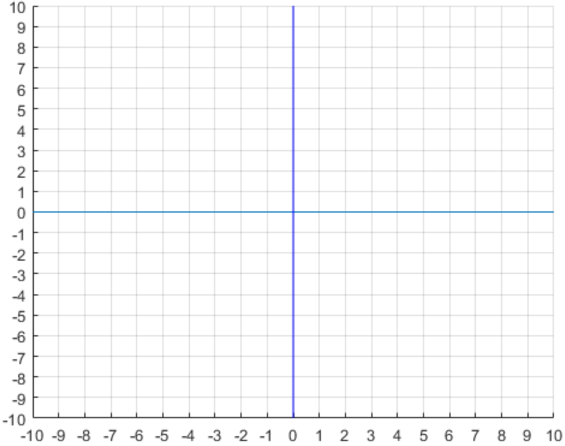
Aufgabe 4.6

- Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene mit ihren Zeigern ein:

$$
\begin{aligned}
z_1 &= 9+3i & z_2 &= 4+5i & z_3 &= -3+4j \\
z_4 &= -7 & z_5 &= -3-3i & z_6 &= 3-2j \\
z_7 &= -4i
\end{aligned}
$$

Grundbegriffe

Aufgabe 4.6: Lösung



Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Darstellungsformen

Komplexe Zahlen können auf verschiedene Arten dargestellt werden.
Man unterscheidet:

- Normalform (auch algebraische oder kartesische Form genannt):

$$z = x + iy$$

- Trigonometrische Form:

$$z = r(\cos\varphi + i \cdot \sin\varphi)$$

- Exponentialform:

$$z = re^{i\varphi}$$

Darstellungsformen

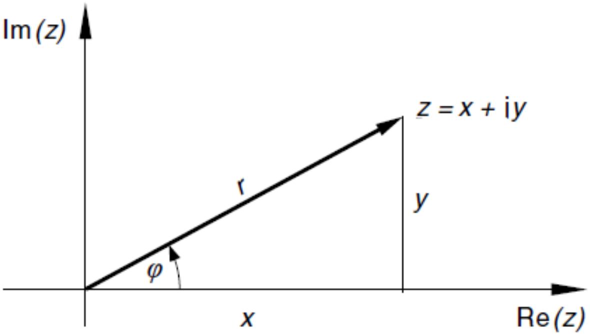
Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Die trigonometrische Form erhält man aus der Normalform durch die Einführung der sogn. Polarkoordinaten, nämlich dem Radius $r = \mid z \mid = \sqrt{x^2 + y^2}$ (entspricht dem Betrag von z bzw. der Länge des Zeigers) und dem Winkel φ (auch Argument od. Phase genannt) zwischen dem Zeiger und der $x-$Achse.
- Dabei gilt:

$$
\begin{aligned}
x &= r \cdot \cos\varphi \\
y &= r \cdot \sin\varphi \\
\Rightarrow z &= x + iy = r\cos\varphi + i \cdot r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)
\end{aligned}
$$

Darstellungsformen

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration



- Darstellung einer komplexen Zahl in der Zahlenebene in der Normalform und der Exponentialform (aus [12])

Darstellungsformen

- Unter Verwendung der von Euler stammenden Formel

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi$$

folgt die Exponentialform

$$z = re^{i\varphi}$$

- Bemerkungen:
Die hier auftretende komplexe Exponentialform ist eine komplexwertige Funktion der reellen Variablen φ und periodisch mit der Periode 2π (da Sinus und Kosinus periodische Funktionen mit Periode 2πsind):

$$\begin{aligned} e^{i(\varphi+k\cdot 2\pi)} &= \cos(\varphi+k\cdot 2\pi) + i\cdot\sin(\varphi+k\cdot 2\pi) \\ &= \cos\varphi + i\cdot\sin\varphi \\ &= e^{i\varphi} \end{aligned}$$

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Darstellungsformen

- Den Beweis der Eulerschen Formel erhält man durch die Potenzreihenentwicklung von

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + \frac{x^1}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^6}{6!} + \ldots,$$

wobei $x = i\varphi$ gesetzt und $i^2 = -1$ benutzt wird:

$$\begin{aligned} e^{i\varphi} &= 1 + i\frac{\varphi}{1!} - \frac{\varphi^2}{2!} - i\frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^4}{4!} + i\frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^6}{6!} - i\frac{\varphi^7}{7!} + \ldots \\ &= \underbrace{\left(1 - \frac{\varphi^2}{2!} + \frac{\varphi^4}{4!} - \frac{\varphi^6}{6!} + \ldots\right)}_{\cos\varphi} + i\underbrace{\left(\varphi - \frac{\varphi^3}{3!} + \frac{\varphi^5}{5!} - \frac{\varphi^7}{7!} + \ldots\right)}_{\sin\varphi} \\ &= \cos\varphi + i\sin\varphi \end{aligned}$$

Darstellungsformen

Aufgabe 4.7

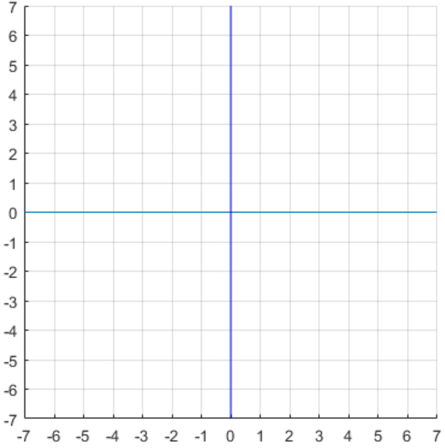
Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene mit ihren Zeigern ein:

$$z_1 = 3e^{i\frac{\pi}{4}} \quad z_2 = 4e^{i\frac{2}{3}\pi} \quad z_3 = 4e^{i\frac{3}{2}\pi}$$
$$z_4 = 3e^{-i\cdot 110^\circ} \quad z_5 = 6e^{i\pi} \quad z_6 = 4e^{i\cdot 340^\circ}$$

Darstellungsformen

Aufgabe 4.7: Lösung



Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Grundrechenarten

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Definition 4.12: Summe, Differenz, Produkt und Division komplexer Zahlen

Es sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$.

- Die Summation ist definiert als

$$z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$$

- Die Subtraktion ist definiert als

$$z_1 - z_2 = (x_1 - x_2) + i(y_1 - y_2)$$

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Definition 4.12: Summe, Differenz, Produkt und Division komplexer Zahlen

Es sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$.

- Die Multiplikation ist definiert als

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + x_2 y_1)$$

  Dabei wird das Produkt $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2)$ wie im Reellen durch durch Ausmultiplizieren der Klammerausdrücke unter Benutzung der Beziehung $i^2 = -1$ berechnet

Grundrechenarten

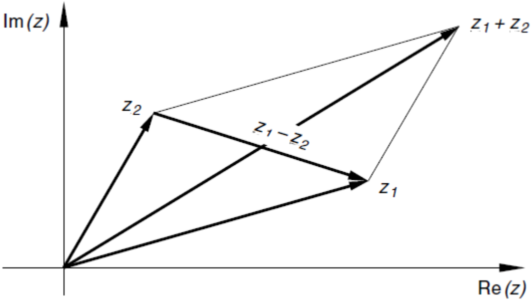
Definition 4.12: Summe, Differenz, Produkt und Division komplexer Zahlen

Es sei $z_1 = x_1 + iy_1$ und $z_2 = x_2 + iy_2$.

- Die Division ist definiert als

$$\begin{aligned}
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{z_1 \cdot z_2^*}{z_2 \cdot z_2^*} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} \\
&= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2) + i(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} \\
&= \frac{(x_1 x_2 + y_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2} + i\,\frac{(y_1 x_2 - x_1 y_2)}{x_2^2 + y_2^2}
\end{aligned}$$

Grundrechenarten



- Zur Addition und Subtraktion zweier komplexer Zahlen (aus [12]).

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Grundrechenarten

Bemerkungen

1. Multiplikation und Division lassen sich in der trigonometrischen bzw. exponentiellen Darstellung besonders einfach durchführen:
   1. $z_1 \cdot z_2 = r_1 \mathrm{e}^{i\varphi_1} \cdot r_2 \mathrm{e}^{i\varphi_2} = r_1 r_2 \mathrm{e}^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$
   2. $z_1 / z_2 = r_1 \mathrm{e}^{i\varphi_1} / (r_2 \mathrm{e}^{i\varphi_2}) = \frac{r_1}{r_2} \mathrm{e}^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$
2. Wir hatten bereits den Betrag eine komplexen Zahl $z = x + iy$ definiert als $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$. Es gilt also $|z|^2 = x^2 + y^2$ bzw.

$$
\begin{aligned}
|z|^2 &= z \cdot z^* = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 \\
|z| &= \sqrt{z \cdot z^*}
\end{aligned}
$$

Grundrechenarten

Bemerkungen

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

3 Die vier Grundrechenoperationen für komplexe Zahlen genügen den folgenden Grundgesetzen:

1. Summe, Differenz, Produkt und Quotient zweier komplexer Zahlen ergibt wieder eine komplexe Zahl (Division durch 0 ist nicht erlaubt).
2. Addition und Multiplikation sind kommutativ

$$\begin{aligned} z_1 + z_2 &= z_2 + z_1 \\ z_1 \cdot z_2 &= z_2 \cdot z_1 \end{aligned}$$

3. Addition und Multiplikation assoziativ

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (z_1 + z_2) + z_3 \\ z_1 \cdot (z_2 \cdot z_3) &= (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3 \end{aligned}$$

4. Addition und Multiplikation sind über das Distributivgesetz miteinander verbunden:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Grundrechenarten

Aufgabe 4.8

- Berechnen Sie von $z_1 = 4 - 8i$ und $z_2 = 3 + 4i$ die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten

Grundrechenarten

Aufgabe 4.8: Lösung

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Die $n-$te Potenz einer komplexe Zahl lässt sich einfach berechnen, wenn diese in der trigonometrischen oder der Exponentialform vorliegt:

Definition 4.13: Potenz einer komplexen Zahl in der Polarform

- Sei $n \in \mathbb{N}$:

$$z = r \cdot \mathrm{e}^{i\varphi} \Rightarrow z^n = \left(r\mathrm{e}^{i\varphi}\right)^n = r^n \mathrm{e}^{in\varphi} = r^n(\cos(n\varphi) + i \cdot \sin(n\varphi))$$

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Aus der Algebra ist bekannt, dass eine algebraische Gleichung n-ten Grades

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$$

mit reellen Koeffizienten und Variabeln $a_i, x \in \mathbb{R}$ *höchstens* n reelle Lösungen hat (auch Wurzeln genannt). Im komplexen Zahlenraum gibt es hingegen *genau* n Lösungen. Dies ist der Fundamentalsatz der Algebra:

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Satz 4.6: Fundamentalsatz der Algebra

- Eine algebraische Gleichung n-ten Grades mit komplexen Koeffizienten und Variablen $a_i, z \in \mathbb{C}$

$$a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0 = 0$$

besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen genau n Lösungen.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

1. Die linke Seite der algebraischen Gleichung ist ein Polynom vom Grad n und lässt sich wie im Reellen in Linearfaktoren zerlegen mit den Nullstellen z_i :

$$P_n(z) = a_n(z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)\dots(z - z_n)$$

HM 1, Kapitel 4
Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

2. Sind sämtliche Koeffizienten $a_i (i = 0, 1, 2, \ldots, n)$ ausschliesslich reell, treten komplexe Lösungen immer als Paare von zueinander konjugiert komplexer Zahlen auf.
Beispiel: das Polynom

$$P(z) = z^3 - z^2 + 4z - 4$$

hat nur eine reelle Nullstelle ($z_1 = 1$) und zwei zueinander komplex konjugiert Nullstellen ($z_2 = 2i$ und $z_3 = -2i$). Es lässt sich also in die Linearfaktoren

$$P(z) = (z - 1)(z - 2i)(z + 2i)$$

zerlegen.

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Definition 4.14: Wurzel einer komplexen Zahl

- Eine komplexe Zahl z wird als $n-$te Wurzel von $a \in \mathbb{C}$ bezeichnet, wenn sie der algebraischen Gleichung

$$z^n = a$$

genügt. Man schreibt

$$z = \sqrt[n]{a}$$

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Satz 4.7: Lösungen der algebraisch Gleichung $z^n = a$

- Die Gleichung
$$z^n = a = r_0 e^{i\varphi} \; (r_0 > 0;\, n = 2,3,4,\ldots)$$
besitzt in der Menge $\mathbb{C}$ genau n verschiedene Lösungen (Wurzeln)
$$z_k = r(\cos\varphi_k + i \cdot \sin\varphi_k) = re^{i\varphi_k}$$
mit
$$r = \sqrt[n]{r_0} \text{ und } \varphi_k = \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n} \text{ (für } k = 0,1,2,\ldots,n-1).$$
Die zugehörigen Bildpunkte liegen in der komplexen Zahlenebene auf einem Kreis um den Nullpunkt mit dem Radius $r = \sqrt[n]{r_0}$ und bilden die Ecken eines regelmässigen $n-$Ecks.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

1. Es gilt wegen der $2\pi-$Periodizität von

$$e^{i\varphi} = e^{i(\varphi + k \cdot 2\pi)}$$

wie gewünscht

$$z_k^n = \left(\sqrt[n]{r_0} \cdot e^{i \frac{\varphi + k \cdot 2\pi}{n}} \right)^n = r_0 e^{i(\varphi + k2\pi)} = r_0 e^{i\varphi} = a$$

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung für $z \in \mathbb{C}$:

$$z^6 = 1$$

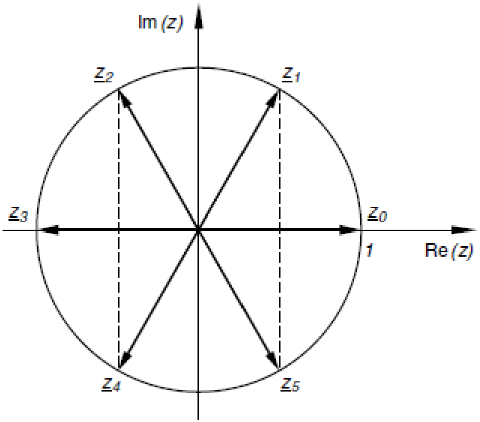
HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- In $\mathbb{R}$ hat die Gleichung nur die zwei Lösungen $z = \pm 1$, in $\mathbb{C}$ aber wegen
$$z^6 = 1 = 1 \cdot e^{i(0+k\cdot 2\pi)}$$
die 6 verschiedenen (paarweise komplex konjugierten) Lösungen
$$z_k = re^{i\frac{0+k\cdot 2\pi}{6}} \quad (k = 0, 1, ..., 5)$$
mit $r = \sqrt[6]{1} = 1$. Konkret lauten die Lösungen (vgl. Abb. auf der nächsten Slide):
$$\begin{aligned}
k = 0: &\quad z_0 = 1 \cdot e^{i\cdot 0} &&= 1\\
k = 1: &\quad z_1 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{3}} &&= \cos(\frac{\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{\pi}{3}) = 0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\\
k = 2: &\quad z_2 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{2\pi}{3}} &&= \cos(\frac{2\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{2\pi}{3}) = -0.5 + \frac{\sqrt{3}}{2}i\\
k = 3: &\quad z_3 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{3\pi}{3}} &&= \cos(\pi) + i \cdot \sin(\pi) = -1\\
k = 4: &\quad z_4 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{4\pi}{3}} &&= \cos(\frac{4\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{4\pi}{3}) = -0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i\\
k = 5: &\quad z_5 = 1 \cdot e^{i\cdot\frac{5\pi}{3}} &&= \cos(\frac{5\pi}{3}) + i \cdot \sin(\frac{5\pi}{3}) = 0.5 - \frac{\sqrt{3}}{2}i
\end{aligned}$$

Potenzieren und Radizieren / Fundamentalsatz

Beispiel 4.18: Lösung



- Die Lösungen der Gleichung $z^6 = 1$ (aus [12]).

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

HM 1,
Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Berechnen Sie die Wurzeln der Gleichung

$$z^4 = 3 + 2j$$

Bringen Sie dafür die rechte Seite zuerst auf Exponentialform.

HM 1, Kapitel 4
Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Aufgabe 4.9: Lösung

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführung komplexe Zahlen

Grundbegriffe

Darstellungsform.

Rechenarten

Fundamentalsatz

Einführung Eigenwerte/-vektoren

Grundbegriffe

Eigenschaften Eigenwerte

Eigenschaften Eigenvektoren

Numerische Berechnung

QR-Verfahren

Vektoriteration

Aufgabe 4.9: Lösung

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Kap. 4.8.2

Einführung in Eigenwerte und Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Einführung Eigenwerte und Eigenvektoren

- Eine $n \times n$ Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ bildet einen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n$ auf einen Bildvektor $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{Ax}$ ab (mit $\boldsymbol{y} \in \mathbb{C}^n$).
- Interessant für technische Anwendungen sind solche Vektoren $\boldsymbol{x}$, für die die lineare Abbildung $\boldsymbol{Ax}$ ein zu $\boldsymbol{x}$ paralleler, um einen Faktor λ gestreckter Vektor ist, es also gilt

$$\boldsymbol{A}x = \lambda x.$$

- Solche Vektoren $\boldsymbol{x}$ nennt man Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$, die Faktoren λ Eigenwerte. Schwingende Systeme (z.B. in der Elektrotechnik, Mechanik, Naturwissenschaften, etc.) werden wesentlich durch ihre Eigenwerte geprägt.

Einführung Eigenwerte und Eigenvektoren

- Für Anwendungen ist es deshalb wichtig, die Eigenwerte zu kennen und ihre Grösse abschätzen zu können.
  - Für den in der Einleitung beschriebenen PageRank-Algorithmus gibt der Eigenvektor der Google-Matrix zum Eigenwert 1 die relative Wichtigkeit der Webseiten an.
  - Eigenwerte spielen auch in der Quantenmechanik eine besondere Rolle. Zum Beispiel geben die Eigenwerte der bekannten Schrödinger-Gleichung[2] die erlaubten Energiewerte der Elektronen und die Eigenvektoren deren Wellenfunktionen an (die den Ort oder den Impuls beschreiben).

[2] Eine partielle Differentialgleichung zur Beschreibung der quantenmechanischen Zustände eines nicht-relativistischen Systems (z.B. eines Wasserstoffatoms) benannt nach dem Österreichischen Pysiker Erwin Schrödinger (1887-1961)

Grundbegriffe

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Wir betrachten in diesem Kapitel nur reelle $n \times n$ Matrizen. In der Regel gelten die Definitionen und Sätze aber ebenfalls für komplexe Matrizen.

Definition 4.15: Eigenwert und Eigenvektor [13]

- Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $\lambda \in \mathbb{C}$ heisst Eigenwert von $\boldsymbol{A}$, wenn es einen Vektor $\boldsymbol{x} \in \mathbb{C}^n \setminus \{0\}$ gibt mit

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}.$$

$\boldsymbol{x}$ heisst dann Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$.

Grundbegriffe

Bemerkungen

- Der Nullvektor $\boldsymbol{x} = 0$ wird als triviale Lösung von $\boldsymbol{Ax} = \lambda\boldsymbol{x}$ nicht berücksichtigt.
- Eigenvektoren werden i.d.R. auf die Länge 1 normiert, das heisst wir multiplizieren den Vektor mit dem Kehrwert seines Betrages. Wir hatten gesehen, dass der Betrag einer komplexen Zahl $z = x + iy$ definiert wird als

$$|\, z \,| = \sqrt{z \cdot z^*}.$$

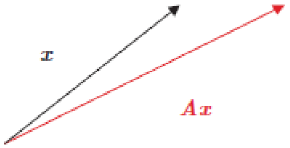
Analog gilt für einen komplexen Vektor

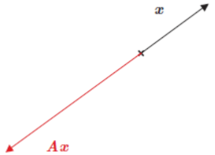
$$\boldsymbol{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \Rightarrow |\, \boldsymbol{z} \,| = \sqrt{z_1 \cdot z_1^* + \ldots + z_n \cdot z_n^*}$$

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- In der linken Abbildung ist $\boldsymbol{x}$ kein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$, rechts ist $\boldsymbol{x}$ hingegen ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert -2 (aus [13]).





Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Die Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 9 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenwert 1 mit Eigenvektor $(3,-1,-3)^T$ denn

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 7 & -5 & 9 \\ 6 & -6 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Desweiteren hat $\boldsymbol{A}$ den Eigenwert 2 zum Eigenvektor $(1,1,0)^T$ und den Eigenwert 3 zum Eigenvektor $(1,2,1)^T$, wie man sich durch Nachrechnen leicht überzeugen kann. Hier sind die Eigenvektoren nicht normiert worden.

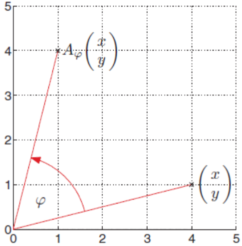
HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
- Einführung komplexe Zahlen
  - Grundbegriffe
  - Darstellungsform.
  - Rechenarten
  - Fundamentalsatz
- Einführung Eigenwerte/-vektoren
  - **Grundbegriffe**
  - Eigenschaften Eigenwerte
  - Eigenschaften Eigenvektoren
- Numerische Berechnung
  - QR-Verfahren
  - Vektoriteration

- Die Drehmatrix zum Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ lautet

$$\boldsymbol{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

und dreht einen Vektor $\boldsymbol{x}$ in der Ebene um den Vektor φ:



Welche Vektoren ergeben nach einer Drehung nun ein Vielfaches von sich selbst? Diese Vektoren sind die Eigenvektoren, die Vielfachheitsfaktoren die Eigenwerte. Geben Sie ohne etwas zu rechnen die (reellen) Eigenvektoren und Eigenwerte basierend auf einer rein geometrischen Überlegung an.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführung komplexe Zahlen

Grundbegriffe

Darstellungsform.

Rechenarten

Fundamentalsatz

Einführung Eigenwerte/-vektoren

Grundbegriffe

Eigenschaften Eigenwerte

Eigenschaften Eigenvektoren

Numerische Berechnung

QR-Verfahren

Vektoriteration

Eigenschaften von Eigenwerten

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Aus
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \lambda \boldsymbol{x}$$
folgt
$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} - \lambda \boldsymbol{x} = 0 \iff (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x} = 0$$
mit der $n \times n$ Einheitsmatrix $\boldsymbol{I}_n$.
- $\boldsymbol{x}$ ist also die Lösung eines homogenen linearen Gleichungssystems.
- Dieses hat, wie wir aus der linearen Algebra wissen, nur dann eine nicht triviale Lösung $\boldsymbol{x} \neq 0$, wenn die Determinante $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)$ gleich Null ist.

Eigenschaften von Eigenwerten

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Satz 4.8: Eigenwerte und charakteristisches Polynom / Spur

- Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Dann gilt

$$\lambda \text{ ist Eigenwert von } \boldsymbol{A} \Longleftrightarrow \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) = 0$$

- Die Abbildung p definiert durch

$$p : \lambda \mapsto \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)$$

  ist ein Polynom vom Grad n und wird **charakteristisches Polynom** von $\boldsymbol{A}$ genannt. Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind also die Nullstellen des charakteristischen Polynoms. Damit hat $\boldsymbol{A}$ also genau n Eigenwerte, von denen manche mehrfach vorliegen können.

Eigenschaften von Eigenwerten

Satz 4.8: Eigenwerte und charakteristisches Polynom / Spur (Fortsetzung)

- Die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ ist gerade das Produkt ihrer Eigenwerte $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$. Die Summe der Eigenwerte ist gleich der Summe der Diagonalemente von $\boldsymbol{A}$, d.h. gleich der Spur (engl: trace, abgekürzt tr) von $\boldsymbol{A}$:
  - $\det \boldsymbol{A} = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdots \lambda_n$
  - $\operatorname{tr} \boldsymbol{A} = a_{11} + a_{22} + \ldots + a_{nn} = \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n$
- Ist λ_i ein Eigenwert der regulären Matrix $\boldsymbol{A}$, so ist der Kehrwert $1/\lambda_i$ ein Eigenwert der inversen Matrix $\boldsymbol{A}^{-1}$.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Definition 4.16: Algebraische Vielfachheit / Spektrum [13]

- Es sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Die Vielfachheit, mit der λ als Nullstelle des charakteristischen Polynoms von $\boldsymbol{A}$ auftritt, heisst **algebraische Vielfachheit** von λ.
- Das **Spektrum** $\sigma(\boldsymbol{A})$ ist die Menge aller Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$.

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Eigenschaften von Eigenwerten

Bemerkungen

- Falls $\boldsymbol{A}$ eine Diagonalmatrix ist, dann gilt

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

mit

$$p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) \ldots (a_{nn} - \lambda).$$

Die Diagonalelemente der Diagonalmatrix sind also in diesem Fall die Nullstellen des charakteristischen Polynoms und damit genau die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Die gleich Feststellung gilt auch für obere oder untere Dreiecksmatrizen, da für diese die Determinante ebenfalls gerade das Produkt der Diagonalelemente ist, wie wir im Zusammenhang mit dem Gauss-Algorithmus festgestellt hatten (vgl. Aufg. 4.2), also z.B. für

$$\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}$$

gilt ebenfalls

$$p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda)\dots(a_{nn} - \lambda).$$

- Wir können also zusammenfassen:
  Die Eigenwerte einer Diagonalmatrix oder einer Dreiecksmatrix sind deren Diagonalelemente.
- Wie sieht es jetzt für allgemeine Matrizen aus?
- Man könnte $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)$ jeweils über den Gauss-Algorithmus berechnen, der eine Matrix ja in die obere Dreiecksform bringt. Für grosse Matrizen $\boldsymbol{A}$ ist dies bekanntlich aber zu aufwändig, weshalb wir andere Methoden benötigen.
- Bevor wir auf diese Methoden eingehen können, brauchen wir aber noch zusätzliche Informationen zu Eigenwerten und -vektoren.

Eigenschaften von Eigenwerten

Beispiele 4.20

1. Das charakteristische Polynom einer 2×2 - Matrix können wir einfach berechnen

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow \boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{pmatrix}$$

mit $p(\lambda) = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) = (a_{11} - \lambda)(a_{22} - \lambda) - a_{12}a_{21}$.
Gemäss dem Fundamentalsatz der Algebra kann das charakteristische Polynom aber natürlich komplexe Nullstellen aufweisen, auch wenn alle Elemente der Matrix und damit die Koeffizienten des charakteristischen Polynoms reell sind. Nicht reelle Nullstellen treten immer als konjugiert komplexe Paare auf.

HM 1, Kapitel 4
Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

2. Wir hatten bereits in Aufg. 4.9 aufgrund geometrischer Überlegungen gesehen, dass die Drehmatrix

$$\boldsymbol{A}_\varphi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

nur für den Fall von $\varphi = 0$ oder $\varphi = \pi$ reelle Eigenwerte haben kann. Überprüfen Sie das anhand des charakteristischen Polynoms von $\boldsymbol{A}_\varphi$ und geben Sie die algebraische Vielfachheit der Eigenwerte an.

2. Lösung:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} \cos\varphi - \lambda & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi - \lambda \end{pmatrix} = (\cos\varphi - \lambda)^2 + \sin\varphi^2 = 0$$

Wir erhalten doppelte Nullstellen:

$$\begin{aligned} \varphi &= 0 : p(\lambda) = (1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = 1 \text{ mit alg. Vielfachheit } 2 \\ \varphi &= \pi : p(\lambda) = (-1-\lambda)^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -1 \text{ mit alg. Vielfachheit } 2 \end{aligned}$$

Eigenschaften von Eigenwerten

Aufgabe 4.11

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix sowie die Determinante und die Spur:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführung komplexe Zahlen

Grundbegriffe

Darstellungsform.

Rechenarten

Fundamentalsatz

Einführung Eigenwerte/-vektoren

Grundbegriffe

Eigenschaften Eigenwerte

Eigenschaften Eigenvektoren

Numerische Berechnung

QR-Verfahren

Vektoriteration

Eigenschaften von Eigenwerten

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Generell ist es aber eine schlechte Idee, die Eigenwerte einer Matrix über die Nullstellen des charakteristischen Polynoms zu berechnen, weil die Berechnung der Determinanten einer Matrix zu aufwändig ist und ein schlecht konditioniertes Problem daraus entstehen kann.
- Betrachte Sie dazu das folgende Beispiel.

Eigenschaften von Eigenwerten

Beispiel 4.21

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Wir hatten in Kap.2 in Bsp. 2.5 bereits das Wilkinson-Polynom kennengelernt:

$$p(x) = \prod_{k=1}^{20}(x-k) = (x-1)(x-2)\cdot\ldots\cdot(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \ldots + 20!$$

  mit den Nullstellen

$$x_k = k \; (k = 1, \ldots, 20)$$

- Wir können nun das Wilkinson-Polynom als charakteristisches Polynom der 20×20 Diagonalmatrix mit den Diagonalelementen $a_{kk} = k$ interpretieren und die Nullstellen $x_k = \lambda_k$ also als die Eigenwerte der Diagonalmatrix.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführung komplexe Zahlen

Grundbegriffe

Darstellungsform.

Rechenarten

Fundamentalsatz

Einführung Eigenwerte/-vektoren

Grundbegriffe

Eigenschaften Eigenwerte

Eigenschaften Eigenvektoren

Numerische Berechnung

QR-Verfahren

Vektoriteration

- Wir hatten gesehen, dass eine minime Änderung des Koeffizienten von x^{19} von -210 um 2^{-23} auf -210.0000001192093 eine deutliche Verschiebung der Nullstellen bewirkt und sich reelle Nullstellen sogar in komplexe änderten:

$$\begin{aligned}\widetilde{x}_k \in \; & \{1.00000, 2.00000, 3.00000, 4.00000, 5.00000, 6.00001, 6.99970, 8.00727, 8.91725,\\ & 10.09527 \pm 0.64350i, 11.79363 \pm 1.65233i, 13.99236 \pm 2.51883i, 16.73074 \pm 2.81262i,\\ & 19.50244 \pm 1.94033i, 20.84691\},\end{aligned}$$

Berechnen Sie also in der Praxis die Eigenwerte für $n > 3$ nie über das charakteristische Polynom und dessen Nullstellen!

Eigenschaften von Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Hat man zwei Eigenvektoren $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ zum selben Eigenwert $\lambda \in \mathbb{C}$ einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, so ist $\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}$ und auch jedes Vielfache von $\boldsymbol{x}$ ebenfalls ein Eigenvektor zum Eigenwert λ:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{A}(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) &= \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \lambda \boldsymbol{x} + \lambda \boldsymbol{y} = \lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}) \\ \boldsymbol{A}(\mu \boldsymbol{x}) &= \mu \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \mu\lambda \boldsymbol{x} = \lambda\mu \boldsymbol{x} \end{aligned}$$

Eigenschaften von Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Die Eigenvektoren zum gleichen Eigenwert λ bilden also einen Untervektorraum von $\mathbb{C}^n$, wenn man noch den Nullvektor (welcher nicht als Eigenvektor zählt), hinzunimmt.
- Man spricht dann vom Eigenraum von λ.
- Es gibt also nicht nur einen Eigenvektor zum Eigenwert λ, sondern unendlich viele, wobei jeder eine Linearkombination der Basisvektoren des Eigenraums ist.

Eigenschaften von Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigen-vektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamental-satz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Dies stimmt mit unserem Wissen aus der linearen Algebra überein, dass das homogene lin. Gleichungssystem

$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x} = 0$$

  mit der Koeffizientenmatrix $\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n$ nur nichttriviale Lösungen hat, falls $\det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) = 0$ gilt.
- Es gibt in diesem Fall dann unendlich viele Lösungen $\boldsymbol{x}$ (d.h. Eigenvektoren).

Eigenschaften von Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Bei der Bestimmung der Eigenvektoren treten $n-r$ freie Parameter auf.
- Dabei ist $r = \mathrm{Rg}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) < n$ der Rang der Koeffizientenmatrix.
- Bei einem mehrfachen Eigenwert können auch mehrere Eigenvektoren auftreten (müssen aber nicht).
- Die Bestimmung der Eigenvektoren zu einem gegebenen Eigenwert λ entspricht also der Bestimmung der Basis des entsprechenden Eigenraums.

Eigenschaften von Eigenvektoren

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Satz 4.9: Eigenraum

- Es sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann bilden die Eigenvektoren zum Eigenwert λ zusammen mit dem Nullvektor 0 einen Unterraum von $\mathbb{C}^n$, den sogenannten Eigenraum.
- Der Eigenraum des Eigenwertes λ ist die Lösungsmenge des homogenen lin. Gleichungssystems
$$(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x} = 0,$$
welches nur dann eine nicht-triviale (d.h. von 0 verschiedene) Lösung aufweist, wenn $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) < n$.
- Die Dimension des Eigenraumes von λ wird die geometrische Vielfachheit von λ genannt. Sie berechnet sich als
$$n - \mathrm{Rg}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)$$
und gibt die Anzahl der lin. unabhängigen Eigenvektoren zum Eigenwert λ.

Eigenschaften von Eigenvektoren

Satz 4.9: Eigenraum (Fortsetzung)

- Geometrische und algebraische Vielfachheit eines Eigenwerts müssen nicht gleich sein. Die geom. Vielfachheit ist aber stets kleiner oder gleich der algebraischen Vielfachheit. Das heisst konkret:
    - Sind alle n Eigenwerte verschieden, so gehört zu jedem Eigenwert genau ein linear unabhängiger Eigenvektor, der bis auf einen (beliebigen) Faktor eindeutig bestimmt ist.
    - Tritt ein Eigenwert $k-fach$ auf (d.h. mit der algebraischen Vielfachheit k), so gehören dazu mindestens ein, höchstens aber k linear unabhängige Eigenvektoren. Beim Auftreten mehrfacher Eigenwerte kann also die Gesamtzahl linear unabhängiger Eigenvektoren kleiner sein als n.
    - Die zu verschiedenen Eigenwerten gehörenden Eigenvektoren sind immer linear unabhängig.
- Eigenvektoren zu konjugiert komplexen Eigenwerten sind ebenfalls zueinander konjugiert komplex.

Eigenschaften von Eigenvektoren

Bemerkungen

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Zur Erinnerung (für die exakten Definitionen der Begriffe wird auf die Vorlesung Lineare Algebra verwiesen):
  - die Dimension eines Vektorraumes ist die Anzahl seiner Basisvektoren
  - die Basis ist eine Teilmenge von linear unabhängigen (Basis-)Vektoren eines Vektorraumes, mit deren Hilfe sich jeder Vektor des Raumes eindeutig als endliche Linearkombination darstellen lässt

Eigenschaften von Eigenvektoren

Bemerkungen

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Zur Erinnerung (für die exakten Definitionen der Begriffe wird auf die Vorlesung Lineare Algebra verwiesen):
  - n Vektoren $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, ..., \boldsymbol{e}_n \in \mathbb{C}^n$ sind linear unabhängig, falls

    $$\mu_1 \boldsymbol{e}_1 + \mu_2 \boldsymbol{e}_2 + \ldots + \mu_n \boldsymbol{e}_n = 0$$

    nur für $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 0$ erfüllt werden kann. Verschwinden nicht alle Koeffizienten μ_i dieser Gleichung, so heissen die Vektoren linear abhängig
  - der Rang einer Matrix $\boldsymbol{A}$ entspricht der Anzahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von $\boldsymbol{A}$ und lässt sich z.B. bestimmen aus der Anzahl der Zeilenvektoren ungleich 0, die nach der Umformung mittels Gauss-Algorithmus in die Zeilenstufenform übrig bleiben

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Berechnen Sie die Eigenwerte, die Eigenvektoren und Eigenräume der Matrix
$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$
sowie den Rang der jeweiligen Koeffizientenmatrix $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)$.

Eigenschaften von Eigenvektoren

Beispiel 4.22: Lösung

- Eigenwerte:

$$p(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 5 \\ -1 & -2-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(-2-\lambda) - 5\cdot(-1) = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Eigenvektor zu $\lambda_1 = +i$:
  Wir müssen das folgende homogene Gleichungssystem lösen

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_2)\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2-i & 5 \\ -1 & -2-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

respektive

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_1 \boldsymbol{I}_2 \,|\, 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 5 & 0 \\ -1 & -2-i & 0 \end{array} \right).$$

Eigenschaften von Eigenvektoren

Beispiel 4.22: Lösung

- Mit dem Gaussschen Eliminationsalgorithmus erhalten wir

$$i=2, j=1 \Rightarrow z_2 \equiv z_2 - \frac{(-1)}{(2-i)} z_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2-i & 5 & 0 \\ 0 & \underbrace{-2-i-\frac{-5}{(2-i)}}_{=0} & 0 \end{array}\right).$$

Wir sehen aus der Zeilenstufenform, dass die zweite Zeile durchgängig zu 0 wird, weil

$$-2-i-\frac{-5}{(2-i)} = -2-i-\frac{-5}{(2-i)} \cdot \frac{(2+i)}{(2+i)} = -2-i-\frac{-10-5i}{4+1} = -2-i-(-2-i) = 0.$$

Eigenschaften von Eigenvektoren

Beispiel 4.22: Lösung

- Damit ist $\mathrm{Rg}(\boldsymbol{A}-\lambda_1 \boldsymbol{I}_2)=1$ wie erwartet kleiner als $n=2$ und wir erwarten einen linear unabhängigen Eigenvektor, da $n-\mathrm{Rg}(\boldsymbol{A}-\lambda_1 \boldsymbol{I}_2)=1$. Das wussten wir eigentlich schon, da wir gemäss obigen Satz bei zwei verschiedenen Eigenwerten auch zwei verschiedene linear unabhängige Eigenvektoren erwarten. Aus
$$0 \cdot x_2 = 0$$
folgt, dass das Gleichungssystem für beliebige Werte x_2 lösbar ist. Um x_1 bestimmen zu können, müssen wir uns auf einen Wert festlegen, z.B. $x_2=1$. Aus der ersten Zeile
$$(2-i)x_1 + 5x_2 = 0$$
folgt
$$x_1 = \frac{-5}{2-i}x_2 = \frac{-5}{2-i}\cdot 1 = \frac{-5}{2-i}\cdot\frac{2+i}{2+i} = \frac{-10i-5i}{5} = -2-i$$
und wir erhalten den Eigenvektor
$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

- Bei der Berechnung der Eigenvektoren mit Programmen wie Matlab oder Python werden die Eigenvektoren i.d.R. noch auf die Länge 1 normiert, hier wäre das

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{(-2-i)(-2+i)+1^2}} \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.8165-0.4082i \\ 0.4082 \end{pmatrix}.$$

Für den Eigenraum erhalten wir also

$$\mathrm{E}_{\lambda_1} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \mu \begin{pmatrix} -2-i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Eigenschaften von Eigenvektoren

Beispiel 4.22: Lösung

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Eigenvektor zu $\lambda_2 = -i$:
  Die analoge Rechnung ergibt:

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_2 \boldsymbol{I}_2 \mid 0) = \left(\begin{array}{cc|c} 2+i & 5 & 0 \\ -1 & -2+i & 0 \end{array}\right)$$

$$i = 2, j = 1 \Rightarrow z_2 \equiv z_2 - \frac{(-1)}{(2+i)} z_1 \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2+i & 5 & 0 \\ 0 & \underbrace{-2+i-\frac{-5}{(2+i)}}_{=0} & 0 \end{array}\right)$$

weil in der zweiten Zeile

$$-2+i-\frac{-5}{(2+i)} = -2+i-\frac{-5}{(2+i)}\cdot\frac{(2-i)}{(2-i)} = -2+i-\frac{-10+5i}{4+1} = -2+i-(-2+i) = 0.$$

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Wähle $x_2 = 1$, dann folgt aus der ersten Zeile

$$(2+i)x_1 + 5x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{-5}{2+i}x_2 = \frac{-5}{2+i}\cdot 1 = \frac{-5}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i} = \frac{-10i+5i}{5} = -2+i$$

und wir erhalten den Eigenvektor

$$\boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix}$$

resp. normiert

$$\tilde{\boldsymbol{x}}_2 = \begin{pmatrix} -0.8165 + 0.4082i \\ 0.4082 \end{pmatrix}.$$

und für den Eigenraum

$$\mathrm{E}_{\lambda_2} = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} = \mu \begin{pmatrix} -2+i \\ 1 \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R}\}$$

Wie gemäss obigem Satz erwartet, sind die Eigenvektoren zueinander komplex konjugiert, also $\boldsymbol{x}_1 = \boldsymbol{x}_2^*$, da auch die zugehörigen Eigenwerte $\lambda_1 = \lambda_2^*$ zueinander komplex konjugiert sind.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
- Einführung komplexe Zahlen
  - Grundbegriffe
  - Darstellungsform.
  - Rechenarten
  - Fundamentalsatz
- Einführung Eigenwerte/-vektoren
  - Grundbegriffe
  - Eigenschaften Eigenwerte
  - **Eigenschaften Eigenvektoren**
- Numerische Berechnung
  - QR-Verfahren
  - Vektoriteration

- Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung: die Determinante einer 3×3 Matrix $\boldsymbol{B}$ berechnet sich z.B. als

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13} \begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \\ &= b_{11}(b_{22}b_{33} - b_{23}b_{32}) - b_{12}(b_{21}b_{33} - b_{23}b_{31}) + b_{13}(b_{21}b_{32} - b_{22}b_{31}) \end{aligned}$$

Eigenschaften von Eigenvektoren

Aufgabe 4.12: Lösung

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Eigenschaften von Eigenvektoren

Aufgabe 4.12: Lösung

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Eigenschaften von Eigenvektoren

Aufgabe 4.12: Lösung

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Eigenschaften von Eigenvektoren

Aufgabe 4.12: Lösung

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Eigenwerte und Eigen-vektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamental-satz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Kap. 4.8.3

Numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren

Numerische Berechnung von EW / EV

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform...
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Die Verfahren für die numerische Berechnung von Eigenwerten und Eigenvektoren einer Matrix $\boldsymbol{A}$ beruhen meist auf der Idee einer Koordinatentransformation.
- Dabei wird nach einer neuen Basis gesucht, in der die Matrix eine Form erhält (z.B. die einer Dreiecksmatrix), in der sich die Eigenwerte leichter ablesen lassen.
- Ein solcher Basiswechsel führt zu einer sogenannten Ähnlichkeitstransformation der Matrix.
- Betrachten Sie dazu die folgende Definition und den Satz:

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Definition 4.17: Ähnliche Matrizen / Diagonalisierbarkeit [13]

- Es seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und $\boldsymbol{T}$ eine reguläre Matrix mit

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},$$

  so heissen $\boldsymbol{B}$ und $\boldsymbol{A}$ zueinander **ähnliche Matrizen**. Man sagt, $\boldsymbol{B}$ geht aus $\boldsymbol{A}$ durch eine Ähnlichkeitstransformation hervor.
- Im Spezialfall, dass $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{D}$ eine Diagonalmatrix ist, also

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T},$$

  nennt man $\boldsymbol{A}$ **diagonalisierbar**.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Satz 4.10: Eigenwerte und Eigenvektoren ähnlicher / diagonalisierbarer Matrizen [13]

- Es seien $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ zueinander ähnliche Matrizen. Dann gilt:
  1. $\boldsymbol{A}$ und $\boldsymbol{B}$ haben dieselben Eigenwerte, inkl. deren algebraischer Vielfachheit.
  2. Ist $\boldsymbol{x}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von $\boldsymbol{B}$, dann ist $\boldsymbol{Tx}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ von $\boldsymbol{A}$.
  3. Im Spezialfall, dass $\boldsymbol{A}$ diagonalisierbar ist (also $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ eine Diagonalmatrix ist), sind die n Diagonalelemente von $\boldsymbol{D}$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ und die n linear unabhängigen Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ stehen in den Spalten von $\boldsymbol{T}$.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren

Einführung komplexe Zahlen

Grundbegriffe

Darstellungsform

Rechenarten

Fundamentalsatz

Einführung Eigenwerte/-vektoren

Grundbegriffe

Eigenschaften Eigenwerte

Eigenschaften Eigenvektoren

Numerische Berechnung

QR-Verfahren

Vektoriteration

1. Die erste Aussage folgt aus dem Umstand, dass die Einheitsmatrix (wie alle Matrizen) ähnlich zu sich selbst ist (da $\boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{I}_n\boldsymbol{T}$), es also gilt
$$\lambda \boldsymbol{I}_n = \boldsymbol{T}^{-1}(\lambda \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}^{-1}\lambda \boldsymbol{T}$$
und damit
$$\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I}_n = \underbrace{\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}}_{\boldsymbol{B}} - \underbrace{\boldsymbol{T}^{-1}\lambda \boldsymbol{T}}_{\lambda \boldsymbol{I}_n} = \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{T}.$$
Deshalb ist das charakteristische Polynom von $\boldsymbol{B}$ identisch zum charakteristischen Polynom von $\boldsymbol{A}$, denn unter Benutzung der Regeln für Determinanten erhalten wir
$$\det(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I}_n) = \det(\boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{T}) = \det \boldsymbol{T}^{-1} \cdot \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n) \cdot \det \boldsymbol{T} = \det(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)$$
wegen $\det \boldsymbol{T}^{-1} = (\det \boldsymbol{T})^{-1}$.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

2. Die zweite Aussage folgt aus

$$(\boldsymbol{B} - \lambda \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x} = 0 \iff \boldsymbol{T}^{-1}(\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = 0 \iff (\boldsymbol{A} - \lambda \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{T}\boldsymbol{x} = 0$$

3. Die dritte Aussage folgt aus Aussagen eins und zwei. Oder im Detail: es gilt

$$\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{D} \iff \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{D} \iff \boldsymbol{A}\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{D}$$

Seien $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ die Diagonalelemente von $\boldsymbol{D}$ und $\boldsymbol{e}_i$ der i-te Einheitsvektor von $\mathbb{R}^n$, dann ist $\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_i$ gerade die i-te Spalte von $\boldsymbol{T}$ und es gilt

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{T}\boldsymbol{D}\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{T}\lambda_i\boldsymbol{e}_i = \lambda_i\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_i.$$

Also ist $\boldsymbol{T}\boldsymbol{e}_i$ der Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert λ_i.

Numerische Berechnung von EW / EV

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Wenn es uns nun also gelingt, eine zu $\boldsymbol{A}$ ähnliche Matrix $\boldsymbol{B}$ zu finden, die entweder eine Diagonalmatrix oder eine Dreiecksmatrix ist, können wir aus den Diagonalelementen von $\boldsymbol{B}$ die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ ablesen und die Eigenvektoren bestimmen.
- Dies Idee wird im $\boldsymbol{QR}$- Verfahren im nächsten Abschnitt angewendet.

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten von

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

unter Benutzung der Ähnlichkeit

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Numerische Berechnung von EW / EV

Aufgabe 4.13: Lösung

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

QR-Verfahren

Idee

- Konkret suchen wir nun nach einer rechts-oberen Dreiecksmatrix $\boldsymbol{B}$, die zu $\boldsymbol{A}$ ähnlich ist.
  - Die Diagonalelemente von $\boldsymbol{B}$ sind dann gerade die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$.
  - Wir können auch schon zufrieden sein, wenn $\boldsymbol{B}$ keine "perfekte" rechts-obere Dreiecksmatrix ist, d.h. wenn unterhalb der Diagonalelemente von $\boldsymbol{B}$ nicht alle Elemente verschwinden, aber betragsmässig ausreichend klein sind.
  - Die Diagonalelemente von $\boldsymbol{B}$ sollten dann immer noch eine akzeptable Näherung der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sein.

QR-Verfahren

Idee

- Besonders nützlich wäre es, für die Ähnlichkeitstransformation $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}$ für $\boldsymbol{T}$ orthogonale Matrizen $\boldsymbol{Q}$ zu verwenden, da für diese ja bekanntlich $\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$ gilt und wir deshalb keine Inversen bestimmen müssen.
  - Mit der $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung in Kap. 4.5.2 haben wir bereits auch eine Zerlegung kennengelernt, die $\boldsymbol{A}$ in eine orthogonale Matrix $\boldsymbol{Q}$ und in eine rechtsobere Matrix $\boldsymbol{R}$ zerlegt.
  - Das ist aber aber noch keine Ähnlichkeitstransformation.
  - Durch eine fortlaufende Wiederholung der $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung können wir aber hoffen, die gesuchte rechts-obere Matrix $\boldsymbol{B}$ (die ähnlich zu $\boldsymbol{A}$ sein soll), wie folgt zu erhalten:

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

1. Schritt: führe die $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung von $\boldsymbol{A}$ aus:

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{Q}_1 \boldsymbol{R}_1$$

Wir erhalten daraus durch Auflösen nach $\boldsymbol{R}_1$

$$\boldsymbol{R}_1 = \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A}$$

und durch beidseitige Multiplikation mit $\boldsymbol{Q}_1$

$$\underbrace{\boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{Q}_1}_{\boldsymbol{A}_1} = \boldsymbol{Q}_1^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{Q}_1$$

eine Ähnlichkeitstransformation und identifizieren die linke Seite als $\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{R}_1 \boldsymbol{Q}_1$. Natürlich hat $\boldsymbol{A}_1$ wegen der Ähnlichkeit mit $\boldsymbol{A}$ die gleichen Eigenwerte.

QR-Verfahren

Idee

2. Schritt: führe nun die $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung von $\boldsymbol{A}_1$ aus:

$$\boldsymbol{A}_1 = \boldsymbol{Q}_2 \boldsymbol{R}_2$$

Wir erhalten daraus durch Auflösen nach $\boldsymbol{R}_2$

$$\boldsymbol{R}_2 = \boldsymbol{Q}_2^T \boldsymbol{A}_1$$

und durch beidseitige Multiplikation mit $\boldsymbol{Q}_2$

$$\underbrace{\boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{Q}_2}_{\boldsymbol{A}_2} = \boldsymbol{Q}_2^T \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{Q}_2$$

eine Ähnlichkeitstransformation und identifizieren die linke Seite als $\boldsymbol{A}_2 = \boldsymbol{R}_2 \boldsymbol{Q}_2$. Wieder hat $\boldsymbol{A}_2$ wegen der Ähnlichkeit mit $\boldsymbol{A}_1$ und $\boldsymbol{A}$ die gleichen Eigenwerte.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

3. Schritt: etc.

QR-Verfahren

Idee

- Tatsächlich konvergieren die Matrizen $\boldsymbol{A}_i$ für $i \to \infty$ gegen eine Matrix $\boldsymbol{A}_\infty$, deren reelle Eigenwerte auf der Diagonalen stehen, für deren komplexe Eigenwerte aber 2×2 Blöcke auf der Diagonalen übrigbleiben (siehe auch Bsp. 4.23):

$$\boldsymbol{A}_\infty = \begin{pmatrix} A_{11} & * & * & * \\ 0 & A_{22} & * & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & A_{ss} \end{pmatrix}$$

mit 1×1 oder 2×2 Matrizen $A_{11}, \dots A_{ss}$. Dies ist das $\boldsymbol{QR}$-Verfahren zur numerischen Berechnung der Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$.

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

QR–Verfahren:

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$

- $\boldsymbol{A}_0 := \boldsymbol{A}$
- $\boldsymbol{P}_0 := \boldsymbol{I}_n$
- Für $i = 0, 1, 2, \ldots$:
  - $\boldsymbol{A}_i := \boldsymbol{Q}_i \cdot \boldsymbol{R}_i$ # berechne die $\boldsymbol{QR}$-Zerlegung von $\boldsymbol{A}_i$
  - $\boldsymbol{A}_{i+1} := \boldsymbol{R}_i \cdot \boldsymbol{Q}_i$
  - $\boldsymbol{P}_{i+1} := \boldsymbol{P}_i \cdot \boldsymbol{Q}_i$

Dann konvergiert die Folge der Matrizen $\boldsymbol{A}_i$ für $i \to \infty$ gegen eine Matrix $\boldsymbol{A}_\infty$, die auf der Diagonalen nur einzelne Elemente oder 2×2 Blöcke aufweist. Die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ sind dann die Diagonalelemente und die Eigenwerte der 2×2 Blöcke (für die konjugiert komplexen Eigenwertpaare, welche z.B. als Nullstellen des charakteristischen Polynoms bestimmt werden können).

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

1. Falls alle Eigenwerte der Matrix betragsmässig verschieden sind (also $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ für $i \neq j$), so hat die Matrix $\boldsymbol{A}$ genau n reelle Eigenwerte und es treten keine 2×2 Blöcke auf. $\boldsymbol{A}_\infty$ ist dann eine "perfekte" obere Dreiecksmatrix.

QR-Verfahren

Bemerkungen

2. Das Verfahren berechnet die Eigenwerte, nicht aber die Eigenvektoren (diese müssen basierend auf den konkreten Eigenwerten separat berechnet werden), ausser falls $\boldsymbol{A}$ symmetrisch ist.
3. Falls $\boldsymbol{A}$ symmetrisch ist, also $\boldsymbol{A}^T = \boldsymbol{A}$, und $|\lambda_i| \neq |\lambda_j|$ für die n Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$ gilt, so konvergiert die Folge der Matrizen $\boldsymbol{P}_k = \boldsymbol{Q}_0 \boldsymbol{Q}_1 \cdot \ldots \cdot \boldsymbol{Q}_k$ gegen eine orthogonale Matrix, deren Spalten gerade die Eigenvektoren von $\boldsymbol{A}$ bilden.

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Wir berechnen die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

QR-Verfahren

Beispiel 4.24: Lösung

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Das $\boldsymbol{QR}$-Verfahren liefert z.B. nach 100 Iterationen die Matrix

$$\boldsymbol{B} = \left(\begin{array}{cc|c} -0.1072 & -2.5543 & -0.6586 \\ 2.3955 & 1.1072 & -0.2575 \\ \hline 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Offensichtlich handelt es sich nicht um eine obere Dreiecksmatrix, das Element $a_{21} = 2.3955$ wird unabhängig von der Anzahl Iterationen nie 0. Das heisst, Die Matrix besteht also aus einem 2×2 Block und dem Diagonalelement a_{33}. Wir wissen also, die Matrix hat den reellen Eigenwert

$$\lambda_3 = a_{33} = 1$$

HM 1, Kapitel 4

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- und zwei komplex konjugierte Eigenwerte, die den Eigenwerten des 2×2 Blocks

$$\begin{pmatrix} -0.1072 & -2.5543 \\ 2.3955 & 1.1072 \end{pmatrix}$$

entsprechen, mit dem charakteristischen Polynom

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (-0.1072-\lambda)(1.1072-\lambda)-(-2.5543)(2.3955) \\ &\approx \lambda^2 - 1\lambda + 6 \end{aligned}$$

und den Nullstellen

$$\lambda_{1,2} = 0.5 \pm 2.3979i$$

QR-Verfahren

Beispiel 4.24: Lösung

- Für die Berechnung der Eigenvektoren müssen wir nun noch die zugehörigen Gleichungssysteme

$$(\boldsymbol{A} - \lambda_i \boldsymbol{I}_n)\boldsymbol{x}_i = 0$$

separat lösen und erhalten die normierten Eigenvektoren

$$\boldsymbol{x}_1 = \begin{pmatrix} 0.1091 + 0.5233i \\ 0.6547 \\ 0.1091 + 0.5233i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_2 = \begin{pmatrix} 0.1091 - 0.5233i \\ 0.6547 \\ 0.1091 - 0.5233i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{x}_3 = \begin{pmatrix} -0.4472 \\ 0 \\ 0.8944 \end{pmatrix}$$

Vektoriteration

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- In verschiedenen numerischen Verfahren spielt der betragsmässig grösste Eigenwert eine wichtige Rolle.
- Dieser definiert den sogn. Spektralradius einer Matrix.
- Statt mit dem $\boldsymbol{QR}$-Verfahren alle Eigenwerte zu bestimmen, kann mit weniger Aufwand nur der betragsmässig grösste Eigenwert und der zugehörige Eigenvektor bestimmt werden.

Vektoriteration

Definition 4.18: Spektralradius [14]

- Der Spektralradius $\rho(\boldsymbol{A})$ einer Matrix $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist definiert als

$$\rho(\boldsymbol{A}) = \max\{|\ \lambda\ |\ |\ \lambda \text{ ist ein Eigenwert von } \boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}\}$$

Wir hatten den Spektralradius bereits bei den Matrizennormen in Def. 4.5 kurz kennengelernt:

$$\text{2-Norm, Spektralnorm} : \|\ \boldsymbol{A}\ \|_2 = \sqrt{\rho(\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{A})}$$

Vektoriteration

- Das Verfahren, welches uns den Spektralradius und den zugehörigen Eigenvektor berechnet, ist die Vektoriteration bzw. von-Mises-Iteration (im Englischen auch "Power Method").

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Vektoriteration

Eigenwerte und Eigen-vektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamental-satz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Vektoriteration / von-Mises-Iteration [14]:

- Sei $\boldsymbol{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ eine diagonalisierbare Matrix mit den Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$ und dem betragsmässig grössten Eigenwert λ_1 mit

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \ldots \geq |\lambda_n|,$$

so konvergieren für (fast) jeden Startvektor $\boldsymbol{v}^{(0)} \in \mathbb{C}^n$ mit Länge 1 die Folgen

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}^{(k+1)} &= \frac{\boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)}}{\| \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)} \|_2} \\ \lambda^{(k+1)} &= \frac{(\boldsymbol{v}^{(k)})^T \boldsymbol{A}\boldsymbol{v}^{(k)}}{(\boldsymbol{v}^{(k)})^T \boldsymbol{v}^{(k)}} \end{aligned}$$

für $k \to \infty$gegen einen Eigenvektor $\boldsymbol{v}$ zum Eigenwert λ_1 von $\boldsymbol{A}$ (also $\boldsymbol{v}^{(k)} \to \boldsymbol{v}$ und $\lambda^{(k)} \to \lambda_1$).

Vektoriteration

Beispiel 4.25

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

- Bestimmen Sie mit Python den betragsmässig grössten Eigenwert und einen zugehörigen Eigenvektor der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

mit der Vektoriteration und dem Startvektor $\boldsymbol{x} = (1, 0, 0)^T$.

Vektoriteration

Beispiel 4.25: Lösung

k	$x^{(k)}$	$\lambda^{(k)}$	k	$x^{(k)}$	$\lambda^{(k)}$
0	$(1.0000, 0.0000, 0.0000)^\top$		5	$(0.2970, 0.6109, 0.7339)^\top$	2.7303
1	$(0.2673, 0.8018, 0.5345)^\top$	1.0000	6	$(0.3086, 0.5942, 0.7427)^\top$	2.9408
2	$(0.5298, 0.5298, 0.6623)^\top$	1.8571	7	$(0.2979, 0.5996, 0.7428)^\top$	3.0306
3	$(0.2923, 0.6577, 0.6942)^\top$	3.4912	8	$(0.3005, 0.5958, 0.7448)^\top$	2.9869
4	$(0.3463, 0.5860, 0.7326)^\top$	2.7303	9	$(0.2981, 0.5970, 0.7448)^\top$	3.0068

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform.
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration

Fragen

Eigenwerte und Eigenvektoren
Einführung komplexe Zahlen
Grundbegriffe
Darstellungsform...
Rechenarten
Fundamentalsatz
Einführung Eigenwerte/-vektoren
Grundbegriffe
Eigenschaften Eigenwerte
Eigenschaften Eigenvektoren
Numerische Berechnung
QR-Verfahren
Vektoriteration