Teil I

Lösungen zu den Aufgaben von Kap. 4

Kapitel 4

Aufgabe 4.1

- Bringen Sie das Gleichungssystem $Ax = b$ auf die obere Dreiecksform und lösen sie nach x auf, wobei

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 5 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ und } \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$i = 1,\ j = 2 \Rightarrow z_2 \equiv z_2 - \tfrac{1}{(-1)} z_1 \Rightarrow (\boldsymbol{A}_1 \mid \boldsymbol{b}_1) = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 3 \end{array}\right)$$

$$i = 1,\ j = 3 \Rightarrow z_3 \equiv z_3 - \tfrac{5}{(-1)} z_1 \Rightarrow (\boldsymbol{A}_2 \mid \boldsymbol{b}_2) = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 6 & 9 & 3 \end{array}\right)$$

$$i = 2,\ j = 3 \Rightarrow z_3 \equiv z_3 - \tfrac{6}{(-2)} z_2 \Rightarrow (\boldsymbol{A}_3 \mid \boldsymbol{b}_3) = \left(\begin{array}{rrr|r} -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 6 & 18 \end{array}\right)$$

Rückeinsetzen liefert:

$x_3 = \frac{18}{6} = 3,\ x_2 = \frac{5-(-1)\cdot 3}{(-2)} = -4,\ x_1 = \frac{0-1\cdot(-4)-1\cdot 3}{(-1)} = -1$

Aufgabe 4.2

- Bestimmen Sie die Determinante der Matrix $\boldsymbol{A}$ aus Aufgabe 3.1 mittels des Gauss-Algorithmus.

  Lösung: die obere Dreiecksform $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ von $\boldsymbol{A}$ haben wir bereits gerechnet:

$$\widetilde{\boldsymbol{A}} = \boldsymbol{A}_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Dabei wurde keine Zeilenvertauschung durchgeführt, d.h. die Determinante von A ist das Produkt der Diagonalelemente von $\widetilde{A}$:

$$det(\boldsymbol{A}) = (-1) \cdot (-2) \cdot 6 = 12$$

Aufgabe 4.3

- Implementieren Sie den Gauss-Algorithmus in MATLAB und bestimmen Sie damit die Lösungen für die untenstehenden Gleichungssysteme sowie die Determinanten der Matrizen $\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{A}_4$. Wer die Aufgabe lieber von Hand löst, kann dies tun.

$$\boldsymbol{A}_1\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -12 & 4 & 17 \\ 32 & -10 & -41 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -5 \\ 19 \\ -39 \end{pmatrix} \text{ bzw. } = \begin{pmatrix} 6 \\ -12 \\ 48 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_2\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -4 & -10 & 0 \\ 12 & 34 & 9 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 25 \\ -24 \\ 107 \end{pmatrix} \text{ bzw. } = \begin{pmatrix} 5 \\ -22 \\ 42 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_3\,\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -14 & 38 & 22 \\ 6 & -9 & -27 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 40 \\ 75 \end{pmatrix} \text{ bzw. } = \begin{pmatrix} 16 \\ 82 \\ -120 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{A}_4\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 3 & 2 & 5 & 4 & 3 & -1 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 0 & 2 & 3 & 8 \\ 2 & 7 & 5 & -1 & 2 & 1 & 3 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & 6 & -3 & 7 & 2 & -2 \\ 5 & 2 & 0 & 8 & 7 & 6 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & 2 & 3 & 5 & 3 & 1 & 4 \\ 8 & 7 & 3 & 6 & 4 & 9 & 7 & 9 \\ -3 & 14 & -2 & 1 & 0 & -2 & 10 & 5 \end{pmatrix} \cdot \boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 103 \\ 53 \\ -20 \\ 95 \\ 78 \\ 131 \\ -26 \end{pmatrix}$$

- Lösung: Implementation des Gauss-Alg. erfolgt in den Übungen.

$$\boldsymbol{A}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ -12 & 4 & 17 \\ 32 & -10 & -41 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 := z_3 - 8z_1]{z_2 := z_2 + 3z_1} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3 := z_3 + 2z_2} \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \implies \det \boldsymbol{A}_1 = 4 \cdot 1 \cdot 3 = 12.$$

Als Lösung des Gleichungssystems $\boldsymbol{A_1}\,\boldsymbol{x_i} = \boldsymbol{b_i}$ (die rechte Seite ist mit den gleichen Zeilenumformungen zu behandeln wie die Matrix) erhält man: $\boldsymbol{x}_1 = (2,\,-2,\,3)^{\mathrm{T}}$ bzw. $\boldsymbol{x}_2 = (6,\,-2,\,4)^{\mathrm{T}}$.

$$A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ -4 & -10 & 0 \\ 12 & 34 & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 := z_3 - 6z_1]{z_2 := z_2 + 2z_1} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & -8 & -9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3 := z_3 + 2z_2} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},\ \det A_2 = 24,\ x_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ -14 & 38 & 22 \\ 6 & -9 & -27 \end{pmatrix} \xrightarrow[z_3 := z_3 + 3z_1]{z_2 := z_2 - 7z_1} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 6 & -15 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3 := z_3 - 2z_2} \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix},\ \det A_3 = 18,\ x_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -4 \end{pmatrix},\ x_2 = \begin{pmatrix} -5 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Für A_4erhalten wir die Lösung detA_4 = 1142026 und x = (1,-1, 0, 2, 3, 3, -8, 15)^T

Aufgabe 4.4:

- Finden Sie für die Matrix A des linearen Gleichungssystems $Ax = b$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 6 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } b = \begin{pmatrix} 9 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$$

die LR-Zerlegung. Benutzen Sie dafür die folgenden Operationen der Gauss-Elimination:

$$(A \mid b) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 9 \\ 4 & -2 & 6 & | & -4 \\ 3 & 1 & 0 & | & 9 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_2 := z_2 - 4z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 9 \\ 0 & -10 & 10 & | & -40 \\ 3 & 1 & 0 & | & 9 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{z_3 := z_3 - 3z_1} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 9 \\ 0 & -10 & 10 & | & -40 \\ 0 & -5 & 3 & | & -18 \end{pmatrix} \xrightarrow{z_3 := z_3 - 0.5z_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & | & 9 \\ 0 & -10 & 10 & | & -40 \\ 0 & 0 & -2 & | & 2 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Lösung x zuerst mittels Rückwärtseinsetzen direkt aus der obigen Dreiecksform und dem b Vektor. Lösen Sie anschliessend die beiden linearen Systeme $Ly = b$ und $Rx = y$ und vergleichen Sie.

- Lösung: mit den obigen Faktoren erhalten wir direkt

$$\begin{aligned} l_{21} &= 4 \\ l_{31} &= 3 \\ l_{32} &= 0.5 \end{aligned}$$

und damit $\boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ 3 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$. Das Gleichungssystem $\boldsymbol{Ly} = \boldsymbol{b}$ hat die Lösung $\boldsymbol{y} = (9, -40, 2)^T$ und $\boldsymbol{Rx} = \boldsymbol{y}$ hat die Lösung $\boldsymbol{x} = (2, 3, -1)^T$. Die Lösung für $\boldsymbol{x}$ stimmt also wie zu erwearten war mit der Lösung aus dem Gaussalgorithmus überein.

- Erweitern Sie ihren unter Aufgabe 3.3 erstelltes Programm zum Gauss-Algorithmus, so dass es gleichzeitig auch die $\boldsymbol{LR}$- Zerlegung von $\boldsymbol{A}$ berechnet.

- Berechnen Sie damit die $\boldsymbol{LR}$-Zerlegung für die Matrixen aus Aufgabe 3.3

$$\boldsymbol{L}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 8 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_1 = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 6 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_2 = \begin{pmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 0 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{L}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{R}_3 = \begin{pmatrix} -2 & 5 & 4 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.5:

- Prüfen Sie, ob das Jacobi-Verfahren in Beispiel 4.16 konvergiert. Schätzen Sie den Fehler des Vektors $\boldsymbol{x}^{(5)}$ ab. Wie viele Schritte sollten Sie rechnen, damit der berechnete Näherungsvektor in jeder Komponente um max. 10^{-4} von der exakten Lösung $\boldsymbol{x} = (1, 2, 3)^T$ abweicht? Vergleichen Sie Ihre Fehlerabschätzung mit den wirklichen Gegebenheiten.

Lösung: Wir prüfen, ob die Matrix $\boldsymbol{A}$ das Zeilensummenkriterium erfüllt:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -2 & 5 & 1 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \implies \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{ij}| \; = \; \begin{cases} 2 & i = 1 \\ 3 & i = 2 \\ 3 & i = 3 \end{cases} < \begin{cases} 4 & i = 1 \\ 5 & i = 2 \\ 5 & i = 3 \end{cases}$$

Damit ist die Konvergenz des Gesamtschrittverfahrens garantiert. Für die Fehlerabschätzungen in der ∞-Norm wird der Faktor

$$\| \boldsymbol{B} \|_\infty = \max\{\frac{2}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{5}\} = 0.6$$

benötigt. Wir verwenden nun die a-posteriori-Abschätzung (3.12) mit $n = 5$:

$$\begin{aligned} \| \boldsymbol{x}^{(5)} - \bar{\boldsymbol{x}} \|_\infty &\leq \frac{\| \boldsymbol{B} \|_\infty}{1 - \| \boldsymbol{B} \|_\infty} \cdot \| \boldsymbol{x}^{(5)} - \boldsymbol{x}^{(4)} \|_\infty = \frac{0.6}{0.4} \| \boldsymbol{x}^{(5)} - \boldsymbol{x}^{(4)} \|_\infty \\ &\leq 1.5 \cdot \max\{0.009175, 0.01082, 0.01764\} = 0.02646. \end{aligned}$$

Der wirkliche Fehler von $\boldsymbol{x}^{(5)}$ ist:

$$\| \boldsymbol{x}^{(5)} - \bar{\boldsymbol{x}} \|_\infty = \max\{0.0065, 0.0094, 0.0201\} = 0.0201,$$

so dass unsere Abschätzung durchaus realistisch erscheint.
Die Forderung, dass der Fehler in jeder Komponente max. 10^{-4} sei, bedeutet nichts anderes als $\| \boldsymbol{x}^{(n)} - \bar{\boldsymbol{x}} \|_\infty \leq 10^{-4}$. Mit der a-priori-Abschätzung (3.13),

ausgehend von $\boldsymbol{x}^{(0)}$, erhalten wir:

$$\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \frac{0.6^n}{0.4} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}^{(0)}\|_\infty = \frac{0.6^n}{0.4} \cdot 2.4 \overset{!}{\leq} 10^{-4}$$

$$\iff 0.6^n \leq \frac{1}{6} \cdot 10^{-4} \iff n \geq \frac{\log(\frac{1}{6} \cdot 10^{-4})}{\log 0.6} = 21.53\ldots$$

Ab $\boldsymbol{x}^{(22)}$ würden die Iterierten also der Genauigkeitsforderung genügen. Da wir aber möglichst wenig rechnen wollen, und $\boldsymbol{x}^{(5)}$ schon berechnet haben, führen wir die obige Rechnung einfach nochmals mit $\boldsymbol{x}^{(5)}$ anstelle von $\boldsymbol{x}^{(0)}$ durch. Wir erhalten dann die Anzahl der Schritte, die wir von $\boldsymbol{x}^{(5)}$ aus durchzuführen haben. Da die Genauigkeit dieser Abschätzung größer sein sollte, hoffen wir, dass die Genauigkeitsforderung vielleicht schon früher als $\boldsymbol{x}^{(22)}$ erfüllt ist:

$$\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \frac{0.6^{n-4}}{0.4} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(5)} - \boldsymbol{x}^{(4)}\|_\infty = \frac{0.6^{n-4}}{0.4} \cdot 0.01764 \overset{!}{\leq} 10^{-4}$$

$$\iff n - 4 \geq 11.92$$

Das bedeutet, dass auch schon $\boldsymbol{x}^{(16)}$ die Genauigkeitsforderung erfüllt. Die Rechnung ergibt $\boldsymbol{x}^{(16)} = (1.000000016, 1.999999991, 3.000000013)^{\mathrm{T}}$ und damit $\|\boldsymbol{x}^{(16)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty = 1.6 \cdot 10^{-8}$. ■

- Bearbeiten Sie die Aufgabenstellung nochmals, aber mit dem Gauss-Seidel-Verfahren und dem Näherungsvektor $\boldsymbol{x}^{(4)}$ aus Beispiel 4.17.

  Die Konvergenz an sich ist schon durch die Diagonaldominanz gesichert (siehe Beispiel 3.17). Für die Iterationsmatrix $\boldsymbol{B} = -(\boldsymbol{D} + \boldsymbol{L})^{-1}\boldsymbol{R}$ erhalten wir $\|\boldsymbol{B}\|_\infty = 0.5$ (zur Erinnerung: Im Falle des Gesamtschrittverfahren hatten wir hier 0.6). Wir gehen analog zu Beispiel 3.17 vor: Mit der a-posteriori-Abschätzung erhalten wir:

  $$\|\boldsymbol{x}^{(4)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \frac{\|\boldsymbol{B}\|_\infty}{1 - \|\boldsymbol{B}\|_\infty} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(4)} - \boldsymbol{x}^{(3)}\|_\infty = 0.0068091$$

  Der wirkliche Fehler von $\boldsymbol{x}^{(4)}$ ist: $\|\boldsymbol{x}^{(4)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty = 0.001355750$.
  Die a-priori-Abschätzung (3.13), ausgehend von $\boldsymbol{x}^{(0)}$, führt auf die Forderung $n \geq 15.9$. Ab $\boldsymbol{x}^{(16)}$ würden die Iterierten also der Genauigkeitsforderung genügen. Verbesserte Abschätzung a-priori ab $n = 4$:

  $$\|\boldsymbol{x}^{(n)} - \bar{\boldsymbol{x}}\|_\infty \leq \frac{0.5^{n-3}}{0.5} \cdot \|\boldsymbol{x}^{(4)} - \boldsymbol{x}^{(3)}\|_\infty \overset{!}{\leq} 10^{-4} \iff n \geq 8.09.$$

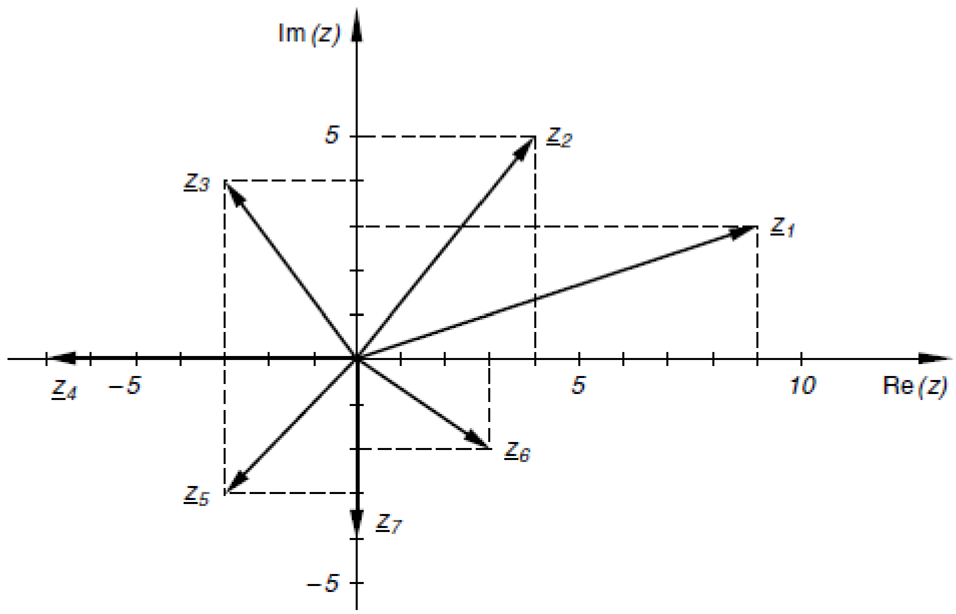
  Also würde auch schon $\boldsymbol{x}^{(9)}$ der Genauigkeitsforderung genügen.

Aufgabe 4.6:

- Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene mit ihren Zeigern ein:

$$z_1 = 9 + 3i \quad z_2 = 4 + 5i \quad z_3 = -3 + 4j$$
$$z_4 = -7 \quad z_5 = -3 - 3i \quad z_6 = 3 - 2j$$
$$z_7 = -4i$$

- Lösung [12]:

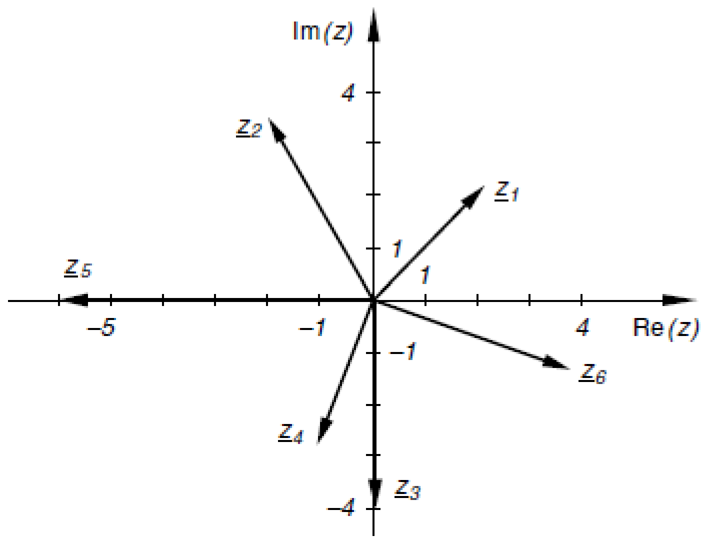


Aufgabe 4.7:

- Zeichnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der komplexen Zahlenebene mit ihren Zeigern ein:

$$z_1 = 3\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{4}} \quad z_2 = 4\mathrm{e}^{i\frac{2}{3}\pi} \quad z_3 = 4\mathrm{e}^{i\frac{3}{2}\pi}$$
$$z_4 = 3\mathrm{e}^{-i\cdot 110^\circ} \quad z_5 = 6\mathrm{e}^{i\pi} \quad z_6 = 4\mathrm{e}^{i\cdot 340^\circ}$$

- Lösung [12]:



Aufgabe 4.8 [12]:

- Berechnen Sie von $z_1 = 4 - 8i$ und $z_2 = 3 + 4i$ die Summe, die Differenz, das Produkt und den Quotienten

- Lösung:

$$\begin{aligned}
z_1 + z_2 &= 4 - 8i + 3 + 4i = 7 - 4i \\
z_1 - z_2 &= 4 - 8i - 3 - 4i = 1 - 12i \\
z_1 \cdot z_2 &= (4 - 8i)(3 + 4i) \\
&= 12 + 16i - 24i - 32i^2 \\
&= 44 - 8i \\
\frac{z_1}{z_2} &= \frac{(4 - 8i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} \\
&= \frac{12 - 16i - 24i + 32i^2}{9 - 16i^2} \\
&= \frac{12 - 40i - 32}{9 + 16} = -\frac{20}{25} - \frac{40}{25}i
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.9 [12]:

- Berechnen Sie die Wurzeln der Gleichung

$$z^4 = 3 + 2j$$

Bringen Sie dafür die rechte Seite zuerst auf Exponentialform.

- Lösung:

Wir suchen die *Wurzeln* der Gleichung $z^4 = 3 + 2\mathrm{j}$. Zunächst müssen wir die rechte Seite in die *Exponentialform* bringen:

$$3 + 2\mathrm{j} = a_0 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\alpha}; \qquad a_0 = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13};$$

$$\tan\alpha = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad \alpha = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) = 33{,}69^\circ \mathrel{\hat{=}} 0{,}588$$

Somit gilt:

$$z^4 = 3 + 2\mathrm{j} = \sqrt{13} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}588}$$

Für die *Beträge* und *Argumente* (Winkel) der komplexen Lösungen folgt dann aus den Gleichungen (VII-57):

$$r = \sqrt[4]{a_0} = \sqrt[4]{\sqrt{13}} = ((13)^{1/2})^{1/4} = 13^{1/8} = \sqrt[8]{13} = 1{,}378$$

$$\varphi_k = \frac{\alpha + k \cdot 2\pi}{n} = \frac{0{,}588 + k \cdot 2\pi}{4} \qquad (k = 0, 1, 2, 3)$$

$$\varphi_0 = 0{,}147, \qquad \varphi_1 = 1{,}718, \qquad \varphi_2 = 3{,}289, \qquad \varphi_3 = 4{,}859$$

Wir erhalten damit *vier* verschiedene Lösungen. Sie lauten der Reihe nach:

$$z_0 = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_0} = 1{,}378 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,0{,}147} = 1{,}378\,(\cos 0{,}147 + \mathrm{j} \cdot \sin 0{,}147) = $$
$$= 1{,}363 + 0{,}202\,\mathrm{j}$$

$$z_1 = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1} = 1{,}378 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,1{,}718} = 1{,}378\,(\cos 1{,}718 + \mathrm{j} \cdot \sin 1{,}718) = $$
$$= -0{,}202 + 1{,}363\,\mathrm{j}$$

$$z_2 = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2} = 1{,}378 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,3{,}289} = 1{,}378\,(\cos 3{,}289 + \mathrm{j} \cdot \sin 3{,}289) = $$
$$= -1{,}363 - 0{,}202\,\mathrm{j}$$

$$z_3 = r \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_3} = 1{,}378 \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\,4{,}859} = 1{,}378\,(\cos 4{,}859 + \mathrm{j} \cdot \sin 4{,}859) = $$
$$= 0{,}202 - 1{,}363\,\mathrm{j}$$

Zwischen den vier Lösungen bestehen die folgenden Zusammenhänge:

$$z_0 = -z_2 \quad \text{bzw.} \quad z_2 = -z_0$$
$$z_1 = -z_3 \quad \text{bzw.} \quad z_3 = -z_1$$

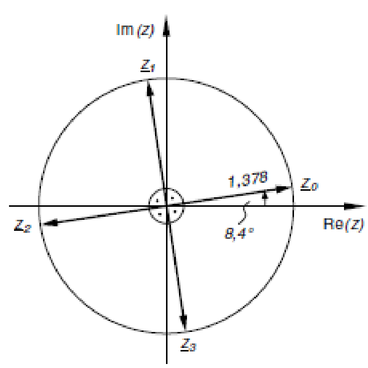


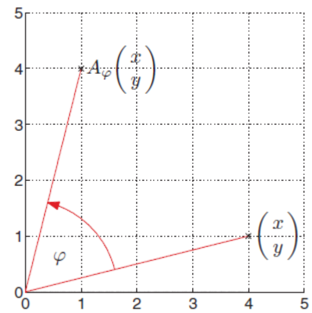
Bild VII-34
Bildliche Darstellung der Lösungen der Gleichung $z^4 = 3 + 2\mathrm{j}$

Aufgabe 4.10 [13]

- Die Drehmatrix zum Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$ in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ lautet

  $$\boldsymbol{A_\varphi} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$$

  und dreht einen Vektor $\boldsymbol{x}$ in der Ebene um den Vektor φ:

  Welche Vektoren ergeben nach einer Drehung nun ein Vielfaches von sich selbst? Diese Vektoren sind die Eigenvektoren, die Vielfachheitsfaktoren die Eigenwerte. Geben Sie ohne etwas zu rechnen die (reellen) Eigenvektoren und Eigenwerte basierend auf einer rein geometrischen Überlegung an.

- Lösung:
  - Da eine Drehung ja die Richtung eines Vektors ändert (eben um den Drehwinkel φ), gibt es hier nicht viele Möglichkeiten. Eine Drehung um 0 überführt jeden Vektor in sich selbst, also in das Einfache. Eine Drehung um $\pi(180°)$ kehrt die Richtung eines Vektors um, überführt also jeden Vektor in sein (-1)-Faches. Andere Möglichkeiten gibt es nicht, wir erhalten also:
  - $\varphi = 0$: $\boldsymbol{A}\varphi$ hat nur den Eigenwert 1, und dazu ist jeder Vektor Eigenvektor.
  - $\varphi = \pi$: $\boldsymbol{A}\varphi$ hat nur den Eigenwert -1, und dazu ist jeder Vektor Eigenvektor.
  - $\varphi \neq 0$ und $\varphi \neq \pi$: $\boldsymbol{A}\varphi$ hat keine reellen Eigenwerte und damit keine reellen Eigenvektoren

Aufgabe 4.11 [13]

- Bestimmen Sie die Eigenwerte der Matrix sowie die Determinante und die Spur:

  $$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Lösung:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= (0-\lambda)(0-\lambda)+1 = \lambda^2+1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = \pm\sqrt{-1} = \pm i \\ \det \boldsymbol{A} &= (+i)\cdot(-i) = -i^2 = 1 \quad (= 0\cdot 0 - 1\cdot(-1)) \\ \operatorname{tr}\boldsymbol{A} &= +i - i = 0 \quad (= 0+0) \end{aligned}$$

Aufgabe 4.12 [12]:

- Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Zur Erinnerung: die Determinante einer 3×3 Matrix $\boldsymbol{B}$ berechnet sich z.B. als

$$\begin{aligned} \det \boldsymbol{B} &= \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} = b_{11}\begin{vmatrix} b_{22} & b_{23} \\ b_{32} & b_{33} \end{vmatrix} - b_{12}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{23} \\ b_{31} & b_{33} \end{vmatrix} + b_{13}\begin{vmatrix} b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{vmatrix} \\ &= b_{11}(b_{22}b_{33}-b_{23}b_{32}) - b_{12}(b_{21}b_{33}-b_{23}b_{31}) + b_{13}(b_{21}b_{32}-b_{22}b_{31}) \end{aligned}$$

- Lösung:

Die *Eigenwerte* der 3-reihigen Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind die Lösungen der *charakteristischen Gleichung*

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{E}) = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda =$$

$$= -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$$

Sie lauten: $\lambda_{1/2} = -1$ und $\lambda_3 = 2$.

Wir bestimmen jetzt die zugehörigen *Eigenvektoren.*

Eigenvektoren zum Eigenwert $\boldsymbol{\lambda_{1/2} = -1}$

Die gesuchten *Eigenvektoren* genügen dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} + 1\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad \text{oder} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

In ausführlicher Schreibweise:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Das Gleichungssystem *reduziert* sich somit auf die *eine* Gleichung

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

in der *zwei* der drei Unbekannten *frei wählbar* sind. Wir entscheiden uns für die Unbekannten x_2 und x_3, setzen daher $x_2 = \alpha$, $x_3 = \beta$ und erhalten damit die folgende Lösung:

$$x_1 = -\alpha - \beta, \qquad x_2 = \alpha, \qquad x_3 = \beta$$

α und β sind dabei zwei *beliebige* reelle Konstanten. Für $\alpha = 1$, $\beta = 0$ bzw. $\alpha = 0$, $\beta = 1$ erhalten wir die beiden *linear unabhängigen* Eigenvektoren

$$\mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und daraus durch *Normierung* die gesuchten (linear unabhängigen) Eigenvektoren

$$\tilde{\mathbf{x}}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \tilde{\mathbf{x}}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$

Der zum Eigenwert $\lambda_3 = 2$ gehörende *Eigenvektor* wird aus dem homogenen linearen Gleichungssystem

$$(\mathbf{A} - 2\,\mathbf{E})\,\mathbf{x} = \mathbf{0} \quad \text{oder} \quad \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ermittelt.

Das homogene lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} -2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

besitzt die vom *Parameter* γ abhängige Lösung $x_1 = x_2 = x_3 = \gamma$. Der bis auf einen *konstanten* Faktor $\gamma \neq 0$ bestimmte Eigenvektor lautet damit:

$$\mathbf{x}_3 = \begin{pmatrix} \gamma \\ \gamma \\ \gamma \end{pmatrix} = \gamma \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (\gamma \neq 0)$$

Durch *Normierung* wird daraus schließlich

$$\tilde{\mathbf{x}}_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4.13

- Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren sowie deren algebraische und geometrische Vielfachheiten von

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

unter Benutzung der Diagonalisierbarkeit von $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \quad \text{mit} \quad \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

- Lösung:
  - die Eigenwerte entsprechen den Diagonalelementen von $\boldsymbol{D}$, also $\lambda_{1,2} = 2$ (alg. Vielfachheit 2) und $\lambda_3 = 4$ (alg. Vielfachheit 1)
  - die zugehörigen Eigenvektoren stehen wegen der Diagonalisierbarkeit in den Spalten von $\boldsymbol{T}$. Zu $\lambda_{1,2}$ gehören die beiden (normierten) Eigenvektoren (d.h. geom. Vielfachheit 2)

    $$\boldsymbol{x}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \boldsymbol{x}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

    und zu λ_3 gehört (d.h. geom. Vielfachheit 1)

    $$\boldsymbol{x}_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$