

Kreuzkorrelation von Ornstein-Uhlenbeck Prozessen mit verzögertem Rauschen

Aufgabensteller: Jan Freund¹

¹*Institute for Chemistry and Biology of the Marine Environment (ICBM),
University of Oldenburg, Carl von Ossietzky Str. 9-11, D-26111 Oldenburg, Germany*
(Dated: July 24, 2019)

Ziel des Praktikums ist die Darstellung der Kreuzkorrelationsfunktion (CCF) zweier Ornstein-Uhlenbeck Prozesse (OUP), die durch zeitverzögerte Zufallsfluktuationen angetrieben werden. Das spektralen Eigenschaften des Gaußschen Rauschens sollen einmal als weiß, ein andermal als rot betrachtet werden. Über die Schätzung der CCF aus simulierten Zeitreihenensembles hinaus, wäre - soweit möglich - eine analytische Berechnung wünschenswert.

PACS numbers:

I. MODELLBESCHREIBUNG

Die beiden OUPs werden beschrieben durch die folgenden Langevin- Gleichungen

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_1}{\tau_1} + \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\tau_1}}\xi_1(t) \quad (1)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{\tau_2} + \sqrt{\frac{2\sigma^2}{\tau_2}} \times \left[\sqrt{\epsilon^2}\xi_1(t-T) + \sqrt{1-\epsilon^2}\xi_2(t) \right] \quad (2)$$

mit den folgenden ACFs/CCFs der mittelwertfreien Rauschterme

$$\langle x_i(t)x_j(s) \rangle = \delta_{ij} \begin{cases} \delta(t-s) & \text{Fall a: weißes Rauschen} \\ e^{-\gamma_i|t-s|} & \text{Fall b: rotes Rauschen} \end{cases} \quad (3)$$

Relevante Zeitskalen sind damit:

1. Relaxationszeiten τ_1 und τ_2
2. Verzögerungszeit T
3. Korrelationszeiten γ_1^{-1} bzw. γ_2^{-1} der roten Fluktuationen (nur im Fall b:)

Durch Skalierung der Zeit (Wahl der Zeiteinheit) kann stets $T = 1$ erreicht werden. Durch Skalierung der Variablen (Wahl einer gemeinsamen Einheit für x_i und x_2) kann stets $\sigma = 1$ eingestellt werden. Somit ist die zu simulierende stochastische Dynamik gegeben durch

$$\dot{x}_1 = -\frac{x_1}{\tau_1} + \sqrt{\frac{2}{\tau_1}}\xi_1(t) \quad (4)$$

$$\dot{x}_2 = -\frac{x_2}{\tau_2} + \sqrt{\frac{2}{\tau_2}} \times \left[\sqrt{\epsilon^2}\xi_1(t-1) + \sqrt{1-\epsilon^2}\xi_2(t) \right] \quad (5)$$

Durch Variation von ϵ zwischen 0 und 1 kann der Übergang zwischen dem unabhängigen und dem vollständig durch das verzögerte Rauschen bestimmten Grenzfall durchgestimmt werden. Durch die Setzung der Standardabweichung $\sqrt{1-\epsilon^2}$ von ξ_2 werden beide OUPs mit Rauschen derselben Intensität 1 getrieben (numerisch bitte überprüfen!).

II. ARBEITSSCHRITTE

1. Simulieren Sie die stochastische Dynamik (4,5) für den speziellen Fall $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ und $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ (in Fall b) schätzen Sie aus einem Ensemble bivariater Zeitreihen die ACFs/CCFs (z.B. mit Matlabs `xcov`). Die Grafiken sollten für verschiedene ϵ und τ, γ den Verlauf von Ensemblemedian und 5%-95% Interquantilband zeigen. (30h)
2. Diskutieren Sie Ihre Beobachtungen. (10h)
3. Untersuchen Sie inwieweit Abweichungen von der Homogenität der beiden OUPs ($\tau_1 = \tau_2 = \tau$ und $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$) zu Veränderungen der Aussagen führen. (20h)
4. Versuchen Sie auch eine analytische Beschreibung der ACF/CCF. (10h)
5. Fassen Sie alle Ergebnisse in einem Abschlussbericht zusammen. Ein Bericht im Format einer Publikation (in Englisch: Title, Abstract, Introduction, Method, Results, Summary and Conclusions, References, Appendix (source code)) ist möglich. (20h)

Die gesamte Projektzeit sollte 90h nicht wesentlich übersteigen.