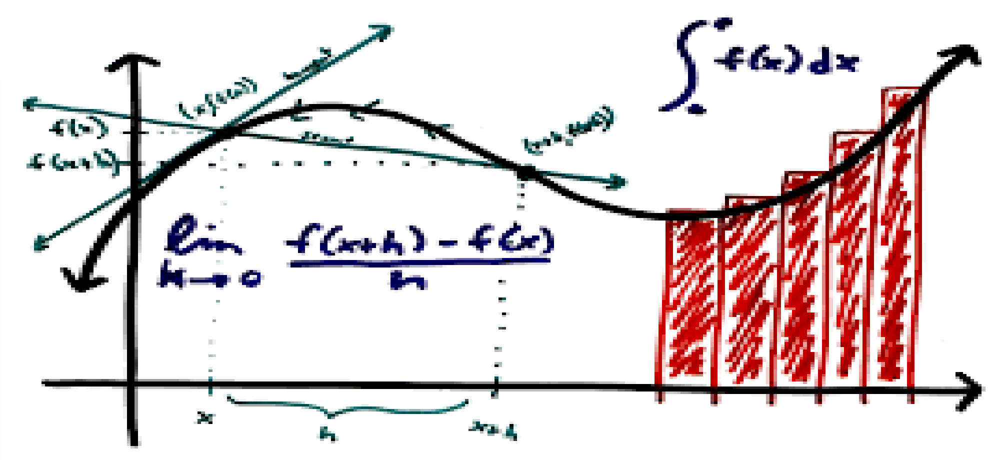
TRABAJO DE INVESTIGACIÓN DEL 1ER PARCIAL

TEMA DE INVESTIGACIÓN

Aplicar los conocimientos adquiridos en las Unidades 1 y 2 del curso de cálculo



INTEGRANTES

- **JACOBO CHIMBOLEMA**
- **SEBASTIAN CEVALLOS**
- **FRANCISCO ROBLES**
- **CRISTIAN SANTOS**
- **MARCOS OCHOA**

DOCENTE: ARISTIDES BACARDI

FECHA: SÁBADO, 30 DE ENERO DE 2021

MATERIA: CALCULO

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

En el marco del estudio del algebra básica de los números, inicialmente para poder graficar una función se le asignaban valores a la variable independiente y a si obtener coordenadas en cuanto a las dos variables para proceder a ubicar los puntos en el plano cartesiano y obtener un bosquejo. Ahora bien, las funciones se dividen en constantes, polinómicas, exponenciales, trigonométricas, racionales, de valor absoluto, logarítmicas, etc. Estas tienen diferentes comportamientos y para graficar nos podemos valer del uso de la primera y segunda derivada, terminología que nos otorgan el calculo integral y diferencial, para lo cual en este trabajo llegaremos a delimitar definiciones que nos permitan cumplir con el objetivo de entender el bosquejo de funciones.

MARCO TEORICO

CRITERIO DE LA PRIMERA DERIVADA.

Le llamamos criterio de la primera derivada al método que utilizamos en el cálculo matemático para encontrar los mínimos y los máximos relativos que existen en una función usando la primera derivada, donde se puede observar el cambio de signo en un intervalo abierto señalado que contiene al punto crítico.

“Sea C un punto crítico de una función f que es continua en un intervalo I abierto que contiene a C. Si f es derivable en el intervalo, excepto posiblemente en C,entonces $f(\mathrm{c})$puede clasificarse como sigue”.

1. Si $f'(\mathrm{x})$ cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo relativo en $(\mathrm{c}, f(\mathrm{c}))$.

2. Si $f'(\mathrm{x})$ cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo relativo en $(c, f(c))$.

3. Si $f'(\mathrm{x})$ es positiva en ambos lados de c o negativa en ambos lados de c, entonces $\mathrm{f}'(\mathrm{c})$ no es ni un mínimo ni un máximo relativo.

CRITERIO DE LA SEGUNDA DERIVADA.

El criterio de la segunda derivada es un método de cálculo en el que se utiliza para efectuar una prueba simple correspondiente a los máximos y mínimos relativos.

Se basa en el hecho de que si la gráfica de una función f es convexa en un intervalo abierto que contiene a c, y $f'(c) = 0, f(c)$ debe ser un mínimo relativo de f. De manera similar, si la gráfica de una función es cóncava hacia abajo en un intervalo abierto que contiene a c y $f'(c) = 0, f(c)$ debe ser un máximo relativo de f.

CONCAVIDAD Y PUNTO DE INFLEXIÓN

Definición de concavidad:

Se dice que la gráfica de una función f es cóncava hacia arriba en un intervalo A, $(A \subseteq D_f)$, si es creciente sobre A. Si $f'(\mathrm{x})$ es decreciente sobre A entonces se dice que la gráfica de f es cóncava hacia abajo.

Definición de punto de inflexión:

Se dice que $x0, f(x0))$ es un punto de inflexión de la gráfica de una función f, si existe un intervalo $]a, b[$ tal que $x0 \in]\mathrm{a}, \mathrm{b}[$, y la gráfica de f es cóncava hacia arriba sobre $]a, x0[$, cóncava hacia abajo sobre $]x0, b[$, o viceversa.

PLANTEAMINETO DEL PROBLEMA

En las unidades de estudio luego de las operaciones básicas y análisis de funciones estudiamos el limite y la derivada de una función, el problema puntual es ¿Para qué derivar, existirá alguna relación con el bosquejo de funciones?, al darle solución podríamos, primeramente, enriquecernos de conocimiento y en segundo lugar podremos comprobar la importancia del cálculo diferencial para entender fenómenos naturales que en su mayoría son representados por funciones.

CALCULOS REALIZADOS

EJERCICIO 1.

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$

Comenzamos por encontrar la primera y la segunda derivada de la función dada:

$$f(x) = x^3 - 3x + 2$$
$$f'(x) = 3x^2 - 3$$
$$f''(x) = 6x$$

Ahora encontramos los puntos críticos.

A través de la solución de la ecuación $f'(x) = 0$, es decir $3x^2 - 3 = 0$. Las soluciones $x_1 = 1, x_2 = -1$

de esta ecuación son .

Finalmente se evalúa $f''(x)$ en los puntos críticos x^* y determinar si $f''(x^*) > 0$ o $f''(x^*) < 0$.

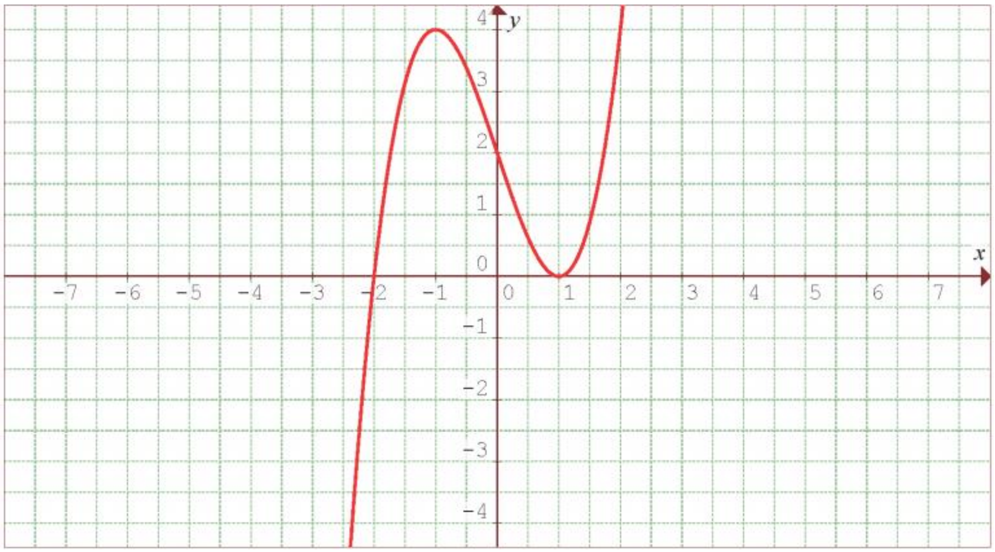
Tenemos entonces que

$$f''(x_1) = 6x_1 = 6(1) = 6 > 0$$
$$f''(x_2) = 6x_2 = 6(-1) = -6 < 0$$

Entonces por el criterio de la segunda derivada, la función $f(x)$ tiene un mínimo local en $x = 1$ y un máximo local en $x = -1$. Los valores correspondientes de la función son:

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 2 = 0$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 2 = 4$$

La siguiente Figura muestra la gráfica de la función $f(x)$ propuesta.



EJERCICIO 2.

Comenzamos por encontrar la primera y la segunda derivada de la función dada:

$$f(x) = e^x\left(2x^2 + x - 8\right)$$

$$f'(x) = e^x(4x+1) + e^x\left(2x^2 + x - 8\right) = e^x\left(2x^2 + 5x - 7\right)$$

$$f''(x) = e^x(4x+5) + e^x\left(2x^2 + 5x - 7\right) = e^x\left(2x^2 + 9x - 2\right)$$

Ahora encontremos los **puntos críticos** x^* a través de la solución (o soluciones) de la ecuación $f'(x) = 0$, es decir $2x^2 + 5x - 7 = 0$. Las soluciones de esta ecuación son $x_1 = -\frac{7}{2},\ x_2 = 1.$.

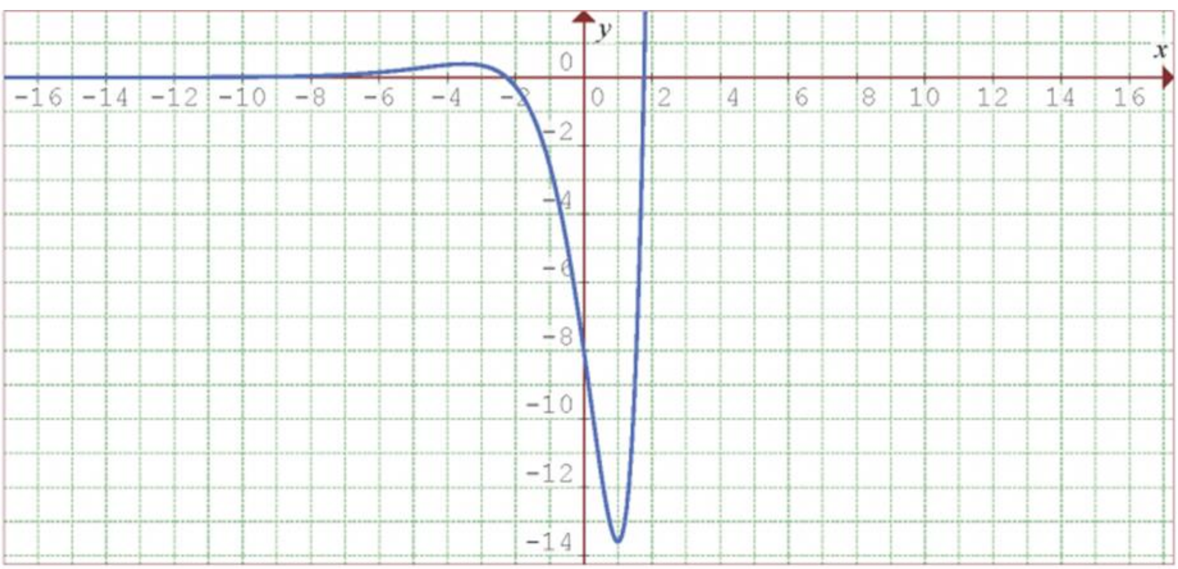
Finalmente se evalúa $''(x)$ en los puntos críticos x^* y determinar si $f''(x^*) > 0$ o $f''(x^*) < 0$. Tenemos entonces que

$$f''(x_1) = e^{-7/2}\left[2\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + 9\left(-\frac{7}{2}\right) - 2\right] = -9e^{-7/2} < 0$$
$$f''(x_2) = e^{1}\left[2\left(1\right)^2 + 9\left(1\right) - 2\right] = 9e > 0$$

Entonces por el **criterio de la segunda** derivada, la función $f(x)$ tiene un **máximo local** en $x = -\dfrac{7}{2}$ y un **mínimo local** en $x = 1$. Los valores correspondientes de la función son:

$$f\left(-\frac{7}{2}\right) = e^{-7/2}\left[2\left(-\frac{7}{2}\right)^2 + \left(-\frac{7}{2}\right) - 8\right] = 13e^{-7/2}$$
$$f\left(1\right) = e^{1}\left[2\left(1\right)^2 + 1 - 8\right] = -5e$$

La siguiente Figura muestra la gráfica de la función $f(x)$ propuesta.



EJERCCIO 3.

Teorema 5.

Se dice que la gráfica de una función *f* es cóncava hacia arriba en un intervalo A, $(A \subseteq D_f)$, si $f'(x)$ es creciente sobre A. Si $f'(x)$ es decreciente sobre A entonces se dice que la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo.

Demostración:

Se dice que la gráfica de una función *f* es cóncava hacia arriba en un intervalo A, $(A \subseteq D_f)$, si $f'(x)$ es creciente sobre A. Si $f'(x)$ es decreciente sobre A entonces se dice que la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo.

Teorema 6.

Si *f* es una función tal que $f''(x) < 0$ cuando $x \in]a, b[$, entonces la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo sobre $]a, b[$.

Demostración:

Si *f* es una función tal que $f''(x) < 0$ cuando $x \in]a, b[$, entonces la gráfica de *f* es cóncava hacia abajo sobre $]a, b[$.

Ejemplifiquemos los dos teoremas anteriores utilizando la función *f* con ecuación $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3}$

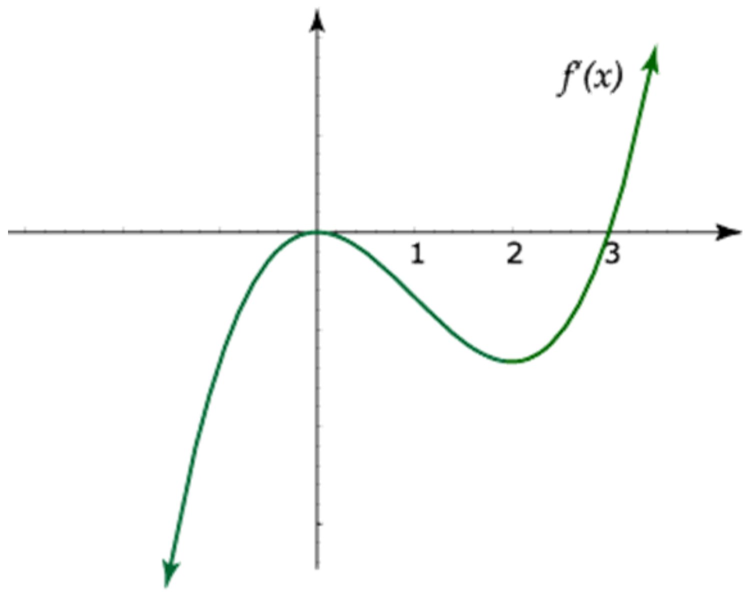
Si $f(x) = \frac{x^4}{12} - \frac{x^3}{3}$ entonces $f'(x) = \frac{x^3}{3} - x^2$, y, $f''(x) = x^2 - 2x = x(x-2)$

Luego, $f''(x) > 0$ si $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ y, $f''(x) < 0$ si $x \in]0, 2[$.

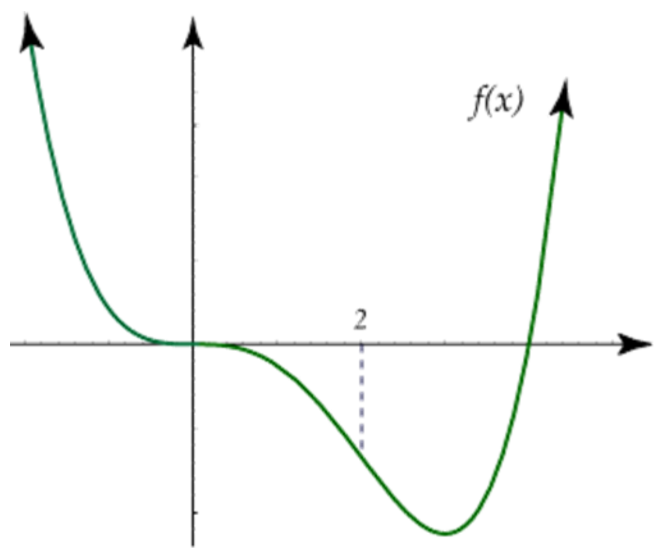
Como $f''(x) = D_x f'(x)$, entonces f' es creciente en los intervalos $]-\infty, 0[$, $]2, +\infty[$, pues en ellos $f''(x)$ es positiva. Además f' es decreciente en el intervalo $]0, 2[$ pues en el $f''(x)$ es negativa.

Luego, *f* es cóncava hacia arriba en el intervalo $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $]0,2[$.

La representación gráfica de la función f' es la siguiente:



Observe que f' es creciente en $]-\infty,0[$ y $]2,+\infty[$ y decreciente en $]0,2[$.
Representación gráfica de la función *f:*

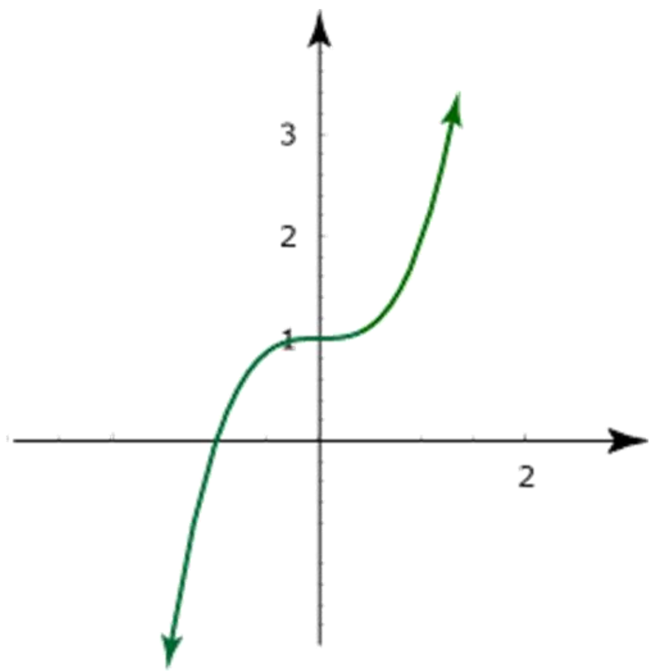


Note que *f* es cóncava hacia arriba en los intervalos $]-\infty,0[$, $]2,+\infty[$ y cóncava hacia abajo en el intervalo $]0,2[$.

EJERCICIO 4.

El punto $(0,1)$ es un punto de inflexión de la curva con ecuación $f(x)=x^3+1$, pues $f''(x)=6x$ es positiva si $x>0$, y negativa si $x<0$, de donde *f* es cóncava hacia arriba para $x>0$, y cóncava hacia abajo para $x<0$.
$x_0 \in]a,b[$

Gráficamente se tiene:



EJERCICIO 5.

Determinemos los puntos de inflexión de la función *f* con ecuación $f(x)=\frac{x^4}{12}+\frac{x^3}{6}-x^2+1$

Se tiene que $f'(x)=\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-2x$ por lo que $f''(x)=x^2+x-2=(x-1)(x+2)$

Resolvamos las desigualdades $f''(x)>0, f''(x)<0$

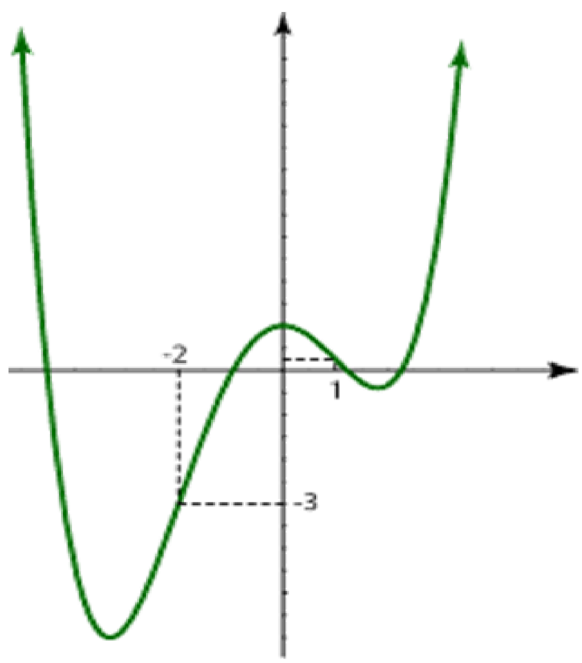
	$-\infty$ to -2	-2 to 1	1 to $+\infty$
$x-1$	$-$	$-$	$+$
$x+2$	$-$	$+$	$+$
$f'(x) = (x-1)(x+2)$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	$\cup$	$\cap$	$\cup$

Como $f''(x) > 0$ si $x \in]-\infty, -2[\cup]1, +\infty[$ entonces la gráfica de *f* es cóncava hacia arriba en esos intervalos.

La gráfica de *f* es cóncava hacia abajo en el intervalo $]-2,1[$ pues en él $f''(x) < 0$.

Luego los puntos $(-2,-3)$ y $\left(1, \frac{1}{4}\right)$ son puntos en los que cambia la concavidad y por tanto son puntos de inflexión.

La gráfica de la función *f* es la siguiente:



Puede decirse que un punto de inflexión separa una parte de la curva que es cóncava hacia arriba de otra sección de la misma que es cóncava hacia abajo.

EJERCICIO 5.

Sea *f* una función con ecuación $f(x) = \frac{x^4}{12} + \frac{x^3}{6} - x^2 + x$ con $x \in \mathbb{R}$. Note que *f* es una función continua en todo su dominio por ser una función polinomial. La segunda derivada de *f* es $f''(x) = x^2 + x - 2$, que es igual a cero si y solo si $x = 1$ ó $x = -2$.

Así $f''(-2) = f''(1) = 0$

Observemos la solución de las desigualdades $f''(x) > 0$, y $f''(x) < 0$ por medio de la siguiente tabla:

$-\infty \quad -2 \quad 1 \quad +\infty$

$x - 1$	$-$	$-$	$+$
$x + 2$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Como $f''(x) > 0$ para $x \in]-\infty, -2[$ y $f''(x) < 0$ para $x \in]-2, 1[$ entonces $(-2, f(-2))$ es un punto de inflexión según el punto 1 del Teorema 8.

De acuerdo con el punto 2 de ese mismo teorema, como $f'(x) < 0$ para $x \in]-2, 1[$ y $f''(x) > 0$ para $x \in]1, +\infty[$, entonces $(1, f(1))$ es un punto de inflexión.

EJERCICIO 6.

$$y = 3\tan(2x)$$

Para obtener la derivada se utiliza la regla de la cadena, en donde, dada la composición de dos funciones

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx}g(f(x)) = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = g'(f(x))f'(x).$$

Muchas veces se utiliza $g(u(x))$ en vez de $g(f(x))$, es solo notación.

Dicho esto, resolvamos nuestra derivada

$$\begin{aligned} y' &= [3\tan(2x)]' \\ &= 3\left(1+\tan^2(2x)\right)(2) \\ &= 6\left(1+\tan^2(2x)\right) \end{aligned}$$

EJERCICIO 7.

$$y = \sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}$$

Para obtener la derivada se utiliza la regla de la cadena, en donde, dada la composición de dos funciones

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

su derivada es

$$\frac{d}{dx} g(f(x)) = \frac{dg}{df}\frac{df}{dx} = g'(f(x))f'(x).$$

Muchas veces se utiliza $g(u(x))$ en vez de $g(f(x))$, es solo notación.

Dicho esto, resolvamos nuestra derivada

$$y' = \left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\right)\left(\frac{-\cos x(1+\sin x)-(1-\sin x)\cos x}{(1+\sin x)^2}\right)$$

simplificando obtenemos

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\right)\left(\frac{-2\cos x}{(1+\sin x)^2}\right) &= -\frac{\cos x}{(1+\sin x)^2\sqrt{\frac{1-\sin x}{1+\sin x}}}\\
&= -\frac{\cos x}{\sqrt{\frac{(1-\sin x)(1+\sin x)^4}{1+\sin x}}}\\
&= -\frac{\cos x}{\sqrt{(1-\sin x)(1+\sin x)^3}}\\
&= -\frac{\cos x}{\sqrt{(1-\sin^2 x)(1+\sin x)^2}}\\
&= -\frac{\cos x}{\sqrt{1-\sin^2 x}(1+\sin x)}\\
&= -\frac{\cos x}{\cos x(1+\sin x)}\\
&= -\frac{1}{1+\sin x}
\end{aligned}
$$

de lo cual se concluye que

$$
y' = -\frac{1}{1+\sin x}
$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En conclusión, la derivada de una función se a podido dividir en primera y segunda siendo la primera derivada la que encontramos al aplicar una sola vez las propiedades de derivadas y siendo la segunda la que encontramos al aplicar dichas propiedades en la función que encontramos en la primera derivada. Al estudiar nos dimos cuenta que es muy importante estas dos definiciones al momento de querer graficar una función y entender su comportamiento en el plano. Pues la primera derivada me otorga información acerca de la monotonía de la función es decir si es creciente o decreciente y la segunda derivada me da la forma en sentido de concavidad o convexidad. Se recomienda que analice la aplicación de estas mismas terminologías antes mencionadas en el campo de los números complejos para a si ver si existe alguna diferencia en su aplicación.

BIBLIOGRAFÍA

- Bugrov, Ya S.; Nikolski, S.M. (1984): "Matemáticas superiores. Cálculo diferencial e integral". Mir Moscú.
- Bombal, F.; Rodríguez, L.; Vera, G. (1987): "Problemas de Análisis Matemático 2. Cálculo diferencial". Editorial AC.
- Cassú, Carles; Bertran, Xavier ; Bonet, Joan I Ferrer, J. Carles (1995): "Cálculo funcional: introducción a las funciones". Universidad de Girona.