UNIVERSIDAD ESTATAL DE MILAGRO.

CARRERA: Ingeniería en Software.

NIVEL: Primer Semestre

FECHA: 14 de marzo del 2021

ASIGNATURA: Calculo

INTEGRANTES: Marcos Johan Ochoa, Christian Alexander Santos, Francisco Jeremy Robles, Sebastián Anthony Cevallos, Jacobo Josué Chimbolema.

TITULO: Estudiando el caso de la “trompeta de Torricelli”

DOCENTE: ING. Aristides Reyes Bacardi

INDICE

INTRODUCCION 1
MARCOS TEORICO 2
TROMPETA DE TORRICELLI. 2
EVANGELISTA TORRICELLI. 2
EL CALCULO INTEGRAL DE TORRICELLI. 2
PARADOJA 3
PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA 4
CALCULOS REALIZADOR 5
OTROS EJERCICIOS DE INTEGRALES. 6
CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 9
BIBLIOGRAFÍA 10

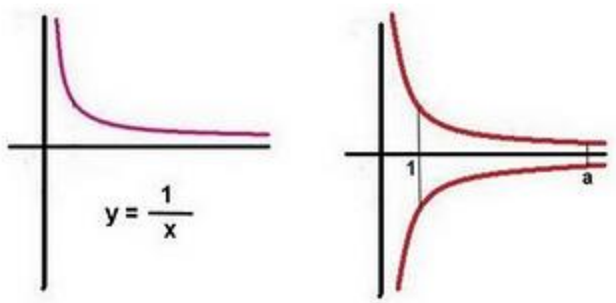
INTRODUCCION

¿Qué es el infinito?, el infinito por concepto básico es aquello que no tiene, ni puede tener término o fin. Este concepto también es aplicado en las matemáticas con algo tan sencillo como los numero, por lo general se puede decir que estos son infinitos ya que su sucesión no tiene límite siempre existirá un numero que le siga al último. Unos de los casos aplicados referente a este es el estudio de la trompeta de Torricelli o “cuerno de Gabriel”, que es una figura geométrica que posee un área infinita y un volumen finito, que fue ideada por Evangelista Torricelli hacia 1641.

MARCOS TEORICO

TROMPETA DE TORRICELLI.

La trompeta de Torricelli o también llamado cuerno de Gabriel es una figura geométrica con característica de poseer un área infinita pero un volumen finito. La superficie de revolución que se obtiene al girar, alrededor del eje X, el grafico de la función $f(x) = \frac{1}{x}$, con dominio $x \geq 1$



EVANGELISTA TORRICELLI.

Hace 400 años, el 15 de octubre de 1608, nacía Evangelista Torricelli, en la ciudad de Faenza, provincia de Ravena, al nordeste de Italia, famosa en otro tiempo por sus fábricas de porcelana y mayólica. Fue uno de esos científicos renacentistas capaz de abarcar amplias ramas del saber, si bien es conocido sobre todo como físico. Ocurre en ocasiones que un científico obtiene tales logros en alguna de sus facetas que permanecen ocultas las demás. (Guitíerrez, 2009)

¿Cuál fue el trabajo matemático de Torricelli?

EL CALCULO INTEGRAL DE TORRICELLI.

Torricelli aborda los problemas de cuadraturas y curvaturas, en su trabajo de (dimensione parabolae), lleva a cabo veintiuna demostraciones de la cuadratura de la parábola y once de ellas por método de los indivisibles ofrece otras diez por método de exhaución.

En 1641, obtiene Torricelli uno de sus resultados más originales y sorprendentes, demostrando que la rotación de curvas de longitud infinita puede producir sólidos de volumen finito. Para ello, tal y como indica en su trabajo De solido hiperbólico acuto, hace girar una rama de una hipérbola equilátera alrededor de una asíntota, que ha tomado como eje, y la corta, en un punto genérico de la curva de abscisa a, por un plano perpendicular al eje de giro. El volumen del sólido resultante, que llegó a nuestros días con el nombre de Trompeta o Cuerno de Gabriel, es finito e igual al volumen de un cilindro de altura a y radio 1/a. En nuestro lenguaje actual, si es y=1/x la ecuación de la hipérbola, lo expresaríamos así: (Guitíerrez, 2009)

$$\pi \int_a^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \pi \frac{1}{a}$$

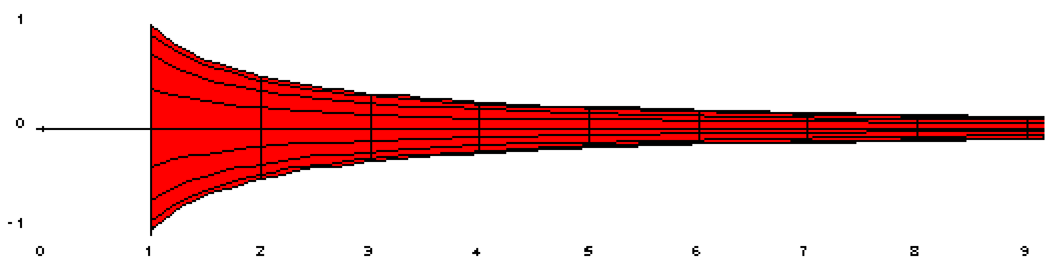
Se trata del primer caso en que aparece una integral impropia. Este trabajo, se publicó en 1644 como parte de su Opera geométrica. Esta misma obra incluye otro trabajo titulado De (infinitis hyperbolis), donde se encuentra el primer teorema general del cálculo, bien que en términos geométricos, y que hoy expresamos por la fórmula: (Guitíerrez, 2009)

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{a^{n+1}}{n+1}$$

PARADOJA

Durante el descubrimiento de esta figura fue considerada como una paradoja, la cual ha sido descubierta de modo informal señalando que sería necesaria una cantidad infinita de pintura para cubrir la superficie exterior, mientras que sería posible rellenar toda la figura con una cantidad finita de pintura y así cubrir esa superficie.

La solución dada a esta paradoja es que un área infinita necesita una cantidad infinita de pintura si la capa de pintura tiene un grosor constante, pero esto no cumple con el interior del cuerno porque la mayor parte de longitud de la figura no es accesible a la pintura, especialmente cuando su diámetro es menor que le dé una molécula de pintura.
En otras palabras, llegaría un momento en el que el espesor de la trompeta sería más pequeño que una molécula de pintura, podría decirse que un gota de pintura seria suficiente para cubrir la superficie de la trompeta.



PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

¿Te imaginas que existieras un objeto con un volumen finito, pero con una superficie infinita? Es difícil de imaginar un objeto como ese pero el caso de la trompeta Torricelli lo explica de una manera muy sencilla y con la explicación de su paradoja de que es imposible cubrir su superficie pero su interior es capas de llenarse con tan solo una gota de pintura.

CALCULOS REALIZADOR

El cuerno de Gabriel se forma utilizando la gráfica de $\mathcal{Y} = \frac{1}{x}$, con el dominio $x \geq 1$, al poseer la asíntota en $x = 0$, y girándola en tres en tres dimensiones alrededor del eje X. su descubrimiento es anterior al cálculo y fue posible gracias al principio de Cavalieri. Es posible calcular tanto el volumen V como el área superficial A del cuerno entre $x = 1$ y $x = a$, donde $a > 1$, mediante integración.

$$V = \pi \int_1^a \left(\frac{1}{x}\right)^2 \, dx = \pi(1 - \frac{1}{a})$$

$$A = 2\pi \int_1^a \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x^4}}}{x} \, dx > 2\pi \int_1^a \frac{\sqrt{1}}{x} \, dx = 2\pi \ln a$$

a puede ser tan grande como se desee, pero en la ecuación se puede observar que el volumen del cuerpo entre $x = 1 \; y \; x = a$ nunca será igual a π, sin embargo, se acercará más y más a π conforme a crece. Matemáticamente, el volumen tiende a π conforme a tiende a infinito. Empleando límites, el volumen puede expresarse de la siguiente forma:

$$\lim_{a\to\infty} V = \lim_{a\to\infty} \pi \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \pi * \lim_{a\to\infty} \left(1 - \frac{1}{a}\right) = \pi$$

Esto es así porque conforme a tiende a infinito, $\frac{1}{a}$ tiende a cero, lo cual implica que le volumen tiende a π (1-0), que es igual a π.
Con respecto al área, la formula anterior muestra que esta es mayor que 2π veces el logaritmo neperiano de a. No existe una cota superior para el logaritmo neperiano de a conforme tiene a infinito, lo cual quiere decir que, en este límite, el cuerno tiene un área superficial infinita. Matemáticamente, esto es expresado de la siguiente forma:

$$\lim_{a\to\infty} A \geq \lim_{a\to\infty} 2\pi \, \ln(a) = \infty$$

CUERNO DE GABRIEL INVERSO.
Lo contrario al cuerno de Gabriel, una superficie de revolución que tiene un área de superficie finita pero un volumen infinito, no puede ocurrir:

TEOREMA.
Sea $f\colon [1, \infty) \to [0, \infty)$ ser una función continuamente diferenciable. Escriba S para el sólido de revolución de la gráfica $y = f(x)$ sobre el eje x. Si el área de superficie de S es finita, entonces también lo es el volumen.

PRUEBA.
Como el área de superficie lateral A es finita, el límite superior:

$$\lim_{t\to\infty} \sup_{x\geq t} f(x)^2 - f(1)^2 = \lim_{t\to\infty} \sup \int_1^t (t(x)^2)'\, dx$$

$$\leq \int_1^\infty |(f(x)^2)'| dx = \int_1^\infty 2f(x)|f'(x)| dx$$

$$\leq \int_1^\infty 2f(x)\sqrt{1+f'(x^2)}\, dx = \frac{A}{\pi}$$

$$< \infty.$$

Por lo tanto, existe un t_0 tal que el elemento supremo $\sup\{f(x)|x \geq t_0\}$ es finito. Por lo tanto,

$M = \sup\{f(x)|x \geq 1\}$ debe ser finito ya que f es una función continua, lo que implica que f está limitada en el intervalo $[1, \infty)$.

Finalmente, el volumen:

$$V = \int_1^\infty f(x) * \pi f(x) dx$$

$$\leq \int_1^\infty \frac{M}{2} * 2\pi\, f(x) dx$$

$$\leq \frac{M}{2} * \int_1^\infty 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\; dx = \frac{M}{2}*\text{A}$$

Por lo tanto: si el área A es finita, entonces el volumen V también debe ser finito

OTROS EJERCICIOS DE INTEGRALES.

Ejercicio 1.

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt[5]{x^2}} dx$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt[5]{x^2}} dx = \int x^{-2}\, x^{-\frac{2}{5}}\, dx = \int x^{-\frac{12}{5}}\, dx = \frac{x^{-\frac{12}{5}+1}}{-\frac{12}{5}+1}$$

$$= \frac{x^{-\frac{7}{5}}}{-\frac{7}{5}} = -\frac{5}{7\sqrt[5]{x^7}} + C$$

Ejercicio 2.

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+7}} dx$$

$$\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x^2+2x+7}} dx = \frac{1}{2}\int (2x+2)(x^2+2x+7)^{-\frac{1}{3}}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} * \frac{(x^2+2x+7)^{\frac{2}{3}}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+7)^2} + C$$

Ejercicio 3.

Hallar el volumen del tronco de cono engendrado por la rotación alrededor OX del área limitada por $y = 6 - x, y = 0,\ x = 0, x = 4.$

$$V = \pi \int_0^4 (6-x)^2\, dx = \pi \left[36x - 6x^2 + \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{208\pi}{3}\ u^3$$

Ejercicio 4.

Calcular el volumen del tronco de cono engendrado por el trapecio que limita el eje de abscisas, la recta $y = x + 2$ y las coordenadas correspondientes a $x = 4$ y $x = 10$, al girar alrededor de OX.

$$V = \pi \int_4^{10} (x+2)^2\ dx\ V = \pi \int_4^{10} (x^2 + 4x + 4)^2\, dx = \pi \left[\frac{x^3}{3} + 2x^2 + 4x\right]_4^{10} =$$

$$= \pi\left(\frac{100}{3} + 200 + 40 - \frac{64}{3} - 32 - 16\right) = 504\pi\ u^3$$

Ejercicio 5.

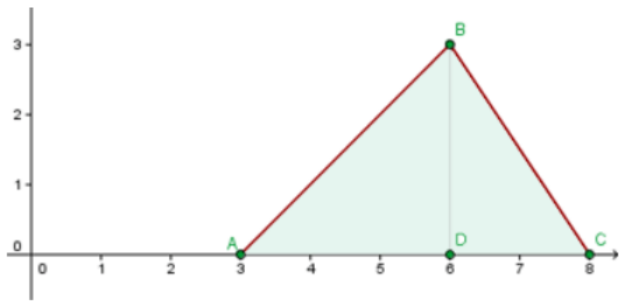
Calcular el volumen que engendra un triángulo de vértices A(3,0), B(6,3), C(8,0) al girar 360° alrededor del eje OX.

Ecuación de la recta que pasa por AB:

$\frac{x-3}{6-3} = \frac{y-0}{3-0}$ $\qquad y = x - 3$

Ecuación de la recta que pasa por BC:

$\frac{x-8}{6-8} = \frac{y-0}{3-0}$ $\qquad$ $y = -\frac{3}{2}(x-8)$



$$V = \pi \int_3^6 (x-3)^2 \; dx + \pi \int_6^8 \left[-\frac{3}{2}\,(x-8)\right]^2 dx =$$

$$= \pi \int_3^6 (x^2 - 6x + 9)dx + \pi \int_6^8 \left[-\frac{9}{4}\,(x^2 - 16x + 64)\right] dx =$$

$$= \pi \left[\frac{x^3}{3} - 3x^2 + 9x\right]_3^6 + \frac{9\pi}{4}\left[\frac{x^3}{3} - 8x^2 + 64x\right]_6^8 =$$

$$= \pi(72 - 108 + 54 - 9 + 27 - 27) + \frac{9\pi}{4}\left(\frac{512}{3} - 512 + 512 - 72 + 288 - 384\right)$$

$$= 15\pi\, u^3$$

CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

Durante esta investigación hemos visto los cálculos integrales de Torricelli y con el descubrimiento de esta figura que es infinita, pero a la vez finita, algo que no habíamos visto hasta esta ocasión y que es real mente sorprendente, junto con el uso de las integrales en esta esta figura y muchas mas que nos explican cómo funcionan y están estructuradas.

BIBLIOGRAFÍA

Guitíerrez. (2009). Evangelista Torricelli: un precursor del Calculo. *SUMA 60*, 117 - 121.

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/aplicaciones-de-la-integral-volumen.html

https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/integrales/ejercicios-de-integrales.html