MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP REJONOWY 2021/2022

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.
Maks. liczba punktów	0-1 pkt	0-1 pkt	0-1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	B., C.	B., C.	P, P

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 4. (0-2 pkt)

Uzasadnij, że wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ jest liczbą naturalną.

I sposób

Uczeń: 1. Przekształca dane wyrażenie grupując po dwa kolejne wyrazy licznika, wyłącza dwukrotnie przed nawias największy wspólny czynnik i skraca ułamek. $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}=$ $=\frac{(3+3^2)-(3^3+3^4)+(3^5+3^6)-(3^7+3^8)+(3^9+3^{10})}{4}=$ $=\frac{3(1+3)-3^3(1+3)+3^5(1+3)-3^7(1+3)+3^9(1+3)}{4}=\frac{4(3-3^3+3^5-3^7+3^9)}{4}$ $=3-3^3+3^5-3^7+3^9$	1p.
2. Uzasadnia, że otrzymane wyrażenie jest liczbą naturalną. $3-3^3+3^5-3^7+3^9=(3+3^5+3^9)-(3^3+3^7)$ $(3+3^5+3^9)$ - liczba naturalna, (3^3+3^7) - liczba naturalna oraz $(3+3^5+3^9)>(3^3+3^7)$, więc $3-3^3+3^5-3^7+3^9$ jest liczbą naturalną, zatem wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ też jest liczbą naturalną.	1p.

II sposób

Uczeń: 1. Przekształca dane wyrażenie grupując po dwa kolejne wyrazy licznika, wyłącza dwukrotnie przed nawias największy wspólny czynnik i skraca ułamek.	1p.

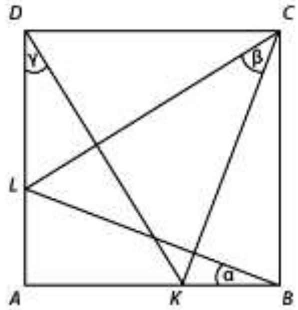
$\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}=$ $=\frac{(3+3^2)-(3^3+3^4)+(3^5+3^6)-(3^7+3^8)+(3^9+3^{10})}{4}=$ $=\frac{3(1+3)-3^3(1+3)+3^5(1+3)-3^7(1+3)+3^9(1+3)}{4}=\frac{4(3-3^3+3^5-3^7+3^9)}{4}$ $=3-3^3+3^5-3^7+3^9$ 2. Uzasadnia, że otrzymane wyrażenie jest liczbą naturalną. $3-3^3+3^5-3^7+3^9=\ 3+(3^5-3^3)+(3^9-3^7)=\ 3+3^3(3^2-1)+3^7(3^2-1)=$ $3+8(3^3+3^7)$ - jest liczbą naturalną, zatem wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ też jest liczbą naturalną.	1p.

III sposób

Uczeń: 1. Przekształca dane wyrażenie grupując po dwa wyrazy licznika, wyłącza dwukrotnie przed nawias największy wspólny czynnik i skraca ułamek. $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}=$ $=\frac{(3^{10}-3^8)+(3^9-3^7)+(3^6-3^4)+(3^5-3^3)+(3^2+3)}{4}=$ $=\frac{3^8(9-1)+3^7(9-1)+3^4(9-1)+3^3(9-1)+12}{4}$ $=\frac{3^8\cdot 8+3^7\cdot 8+3^4\cdot 8+3^3\cdot 8+12}{4}$	1p.
2. Uzasadnia, że otrzymane wyrażenie jest liczbą naturalną. $\frac{3^8\cdot 8+3^7\cdot 8+3^4\cdot 8+3^3\cdot 8+12}{4}=\frac{4(3^8\cdot 2+3^7\cdot 2+3^4\cdot 2+3^3\cdot 2+3)}{4}$ $=3^8\cdot 2+3^7\cdot 2+3^4\cdot 2+3^3\cdot 2+3$ - jest liczbą naturalną, zatem wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ też jest liczbą naturalną.	1p.

Zadanie 5. (0-3 pkt)

Na bokach *AB* i *AD* kwadratu *ABCD* zaznaczono punkty *K* i *L* tak, że $|AK| + |AL| = |CD|$. Następnie połączono punkt *K* z wierzchołkami *C* i *D* kwadratu, a punkt *L* z wierzchołkami *B* i *C* (patrz rysunek). Uzasadnij, że suma kątów: $\propto$, β i γ jest równa 90°.

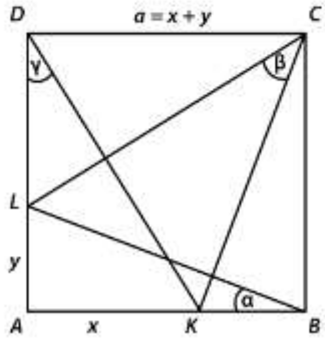


<table>
<tr><td>

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku.

Zauważa, że $|LA| = y = |KB|$ lub $|AK| = x = |DL|$



</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>

2. Uzasadnia, że trójkąty *LAB* i *KBC* oraz *KAD* i *LDC* są przystające.

W ΔLAB:

$|LA| = y = |KB|$,

$|AB| = a = |BC|$,

$|\sphericalangle LAB| = |\sphericalangle KBC| = 90°$,

więc zgodnie z cechą bkb trójkąty *LAB* i *KBC* są przystające, zatem $|\sphericalangle KCB| = \propto$.

</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>

3. Dowodzi, że trójkąty *KAD* i *LDC* są przystające oraz uzasadnia tezę.

W ΔKAD:

$|AK| = x = |DL|$,

$|AD| = a = |DC|$,

$|\sphericalangle KAD| = |\sphericalangle LDC| = 90°$,

więc zgodnie z cechą bkb trójkąty *KAD* i *LDC* są przystające, zatem $|\sphericalangle DCL| = \gamma$.

Ponieważ $|\sphericalangle DCB| = 90°$, więc $\propto + \beta + \gamma = 90°$.

</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 6. (0-3 pkt)

W listopadzie baton czekoladowy był dwa razy droższy od batona truskawkowego.
W grudniu baton czekoladowy staniał o 18%, a baton truskawkowy zdrożał o 9%. Paulina kupiła w grudniu dwa batony truskawkowe i jeden baton czekoladowy. Oblicz, czy zapłaciła więcej, czy mniej, niż gdyby je kupiła w listopadzie oraz o ile procent. Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. Wykonuje analizę zadania np.: Listopad: x – cena batona truskawkowego $2x$ – cena batona czekoladowego Grudzień: $1{,}09x$ – cena batona truskawkowego $0{,}82 \cdot 2x$ – cena batona czekoladowego	1p.
2. Zapisuje w postaci wyrażeń algebraicznych koszt zakupu dwóch batonów truskawkowych i jednego batona czekoladowego w poszczególnych miesiącach. Listopad: $2x + 2x = 4x$ Grudzień: $2 \cdot 1{,}09x + 1{,}64x = 2{,}18x + 1{,}64x = 3{,}82x$	1p.
3. Podaje odpowiedź z uzasadnieniem. $3{,}82x < 4x$, więc Paulina zapłaciła mniej. $100\% - \frac{382}{4}\% = 100\% - 95{,}5\% = 4{,}5\%$ Odpowiedź. Paulina zapłaciła mniej o 4,5%.	1p.

Zadanie 7. (0-3 pkt)

Jacek dodał cztery kolejne liczby naturalne. Pamięta, że otrzymał liczbę trzycyfrową o cyfrach 1, 4, 6. Jakie liczby mógł dodać Jacek? Podaj wszystkie rozwiązania.

I sposób

Uczeń: 1. Zapisuje w postaci wyrażenia sumę tych liczb. $x, x+1, x+2, x+3 -$ kolejne liczby naturalne Ich suma to $4x+6$.	1p.
2. Zauważa, że suma tych liczb jest liczbą parzystą i z cyfr 1, 4, 6 tworzy parzyste liczby trzycyfrowe oraz sprawdza, która z nich może, a która nie może być sumą trzech kolejnych liczb naturalnych. Suma tych liczb $4x+6=2(2x+3)$, czyli jest liczbą podzielna przez 2, a więc liczbą parzystą. Z cyfr 1, 4, 6 można utworzyć cztery trzycyfrowe liczby parzyste: 146, 164, 416, 614. $2(2x+3)=146$ $2x+3=73$ $2x=70$ $x=35$ – jest liczbą naturalną. $2(2x+3)=164$ $2x+3=82$ $2x=79$ $x=39{,}5$ - nie jest liczbą naturalną $2(2x+3)=416$ $2x+3=208$ $2x=205$ $x=102{,}5$ - nie jest liczbą naturalną $2(2x+3)=614$	1p.

$2x + 3 = 307$ $2x = 304$ $x = 152$ - jest liczbą naturalną 3. Wyznacza liczby, jakie mógł dodać Jacek. Jeśli $x = 35$, to tymi liczbami są: 35, 36, 37, 38, a ich suma wynosi 146. Jeśli $x = 152$, to tymi liczbami są: 152, 153, 154, 155, a ich suma wynosi 614.	1p.

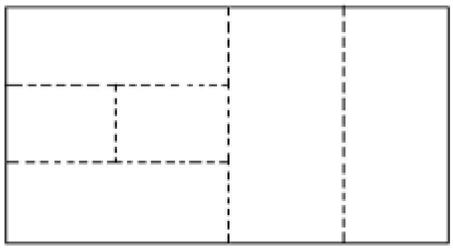
II sposób

Uczeń: 1. Zapisuje w postaci wyrażenia sumę tych liczb i stwierdza. $x, x+1, x+2, x+3 -$ kolejne liczby naturalne Ich suma to $4x + 6$.	1p.
2. Zauważa, że suma tych liczb jest liczbą parzystą i z cyfr 1, 4, 6 tworzy parzyste liczby trzycyfrowe oraz sprawdza, która z nich może, a która nie może być sumą trzech kolejnych liczb naturalnych . Suma tych liczb jest liczbą parzystą. Gdy odejmiemy od tej sumy 6, to otrzymamy liczbę podzielną przez 4. Z cyfr 1, 4, 6 można utworzyć cztery trzycyfrowe liczby parzyste: 146, 164, 416, 614. 146, 146 – 6 = 140 liczba podzielna przez 4, bo 40 dzieli się przez 4. 164, 164 – 6 = 158 liczba niepodzielna przez 4, bo 58 nie dzieli się przez 4. 416, 416 – 6 = 410 liczba niepodzielna przez 4, bo 10 nie dzieli się przez 4. 614, 614 – 6 = 608 liczba podzielna przez 4, bo 8 dzieli się przez 4.	1p.
3. Wyznacza liczby, jakie mógł dodać Jacek. Jeśli sumą tych liczb jest 146, to najmniejszą liczbą jest 35, a kolejnymi: 36, 37, 38. Jeśli sumą tych liczb jest 614, to najmniejszą liczbą jest 152, a kolejnymi: 153, 154, 155.	1p.

Uwaga. Jeśli uczeń nie zauważy, że suma tych liczb jest liczbą parzystą, a rozpatrzy sześć przypadków, to należy mu przyznać maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 8. (0-3 pkt)

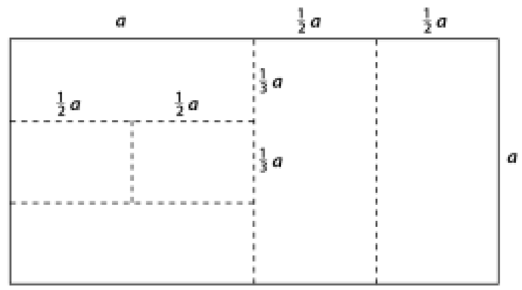
Prostokątną kartkę o polu 648 cm^2 Marysia przecięła na pół i otrzymała dwa kwadraty. Następnie jeden z tych kwadratów przecięła na dwa, a drugi na trzy przystające prostokąty i wreszcie jeden z mniejszych prostokątów przecięła na dwa przystające prostokąty (patrz rysunek). Z otrzymanych kawałków złożyła siatkę prostopadłościanu. Czy w naczyniu o pojemności równej objętości tego prostopadłościanu zmieści się 1 litr mleka? Odpowiedź uzasadnij.



Uczeń:

1. Przyjmuje oznaczenia np. takie, jak na rysunku i wyznacza wartość a. — 1p.

$$a \cdot 2a = 648$$
$$2a^2 = 648$$
$$a^2 = 324$$
$$a = 18$$



2. Oblicza objętość *V* prostopadłościanu. — 1p.

Prostopadłościan ma wymiary $a \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{3}a$, czyli 18 cm × 9 cm × 6 cm, zatem $V = 972$ cm^3.

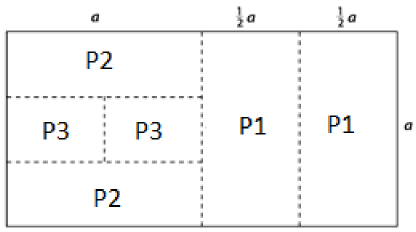
3. Podaje odpowiedź z uzasadnieniem. — 1p.

972 cm^3 = 0,972 dm^3.

Pojemność naczynia o objętości 972 cm^3 wynosi 0,972 l, a zatem nie zmieści się w nim 1 litr mleka.

II sposób

Uczeń:



1. Oblicza pole kwadratu — 1p.

   648 : 2 = 324 [cm^2]

   Następnie wyznacza bok kwadratu

   $a = \sqrt{324} = 18$ [cm]

2. Oblicza pola prostokątów P_1, P_2, P_3 — 1p.

   P_1 = 324 : 2 = 162 [cm^2]
   P_2 = 324 : 3 = 108 [cm^2]

<table>
<tr><td>

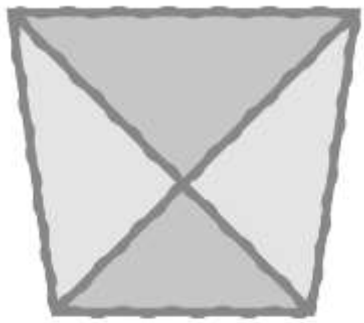
$P_3 = 108 : 2 = 54\ [\text{cm}^2]$

Oblicza objętość *V* prostopadłościanu
$V = P_3 \cdot a$ czyli $V = 54\ \text{cm}^2 \cdot 18$ cm, zatem $V = 972\ \text{cm}^3$.

3. Podaje odpowiedź z uzasadnieniem.
972 cm^3 = 0,972 dm^3. Pojemność naczynia o objętości 972 cm^3 wynosi 0,972 l, a zatem nie zmieści się w nim 1 litr mleka.

</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 9. (0-3 pkt)



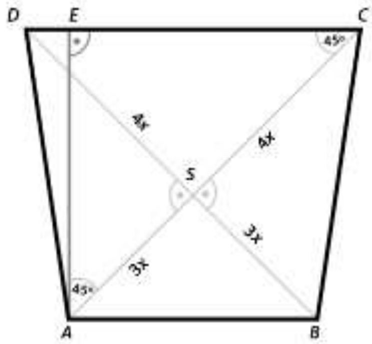
Witrażowe okno jest wykonane m.in. z elementu w kształcie trapezu równoramiennego składającego się z czterech trójkątów prostokątnych, połączonych ołowianą taśmą tak, jak na rysunku. Brzeg elementu również wykończony jest tą taśmą. Stosunek długości przyprostokątnych w trójkątach przystających wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz, czy na wykonanie elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej, jeśli odległość między podstawami trapezu wynosi 7 cm.

I sposób

<table>
<tr><td>

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku i zauważa, że trójkąt *AEC* jest prostokątny oraz równoramienny, a jego przeciwprostokątna ma długość 7*x*.



Trójkąt *AEC* jest prostokątny i równoramienny, bo kąty *AEC* i *ACE* mają po 45°.

$|AC| = 7x$.

2. Oblicza wartość *x* i wyznacza długości boków trapezu oraz długości jego przekątnych, korzystając z twierdzenia Pitagorasa lub wzoru na przekątną kwadratu.

$|AE| = |EC| = 7$ cm.

Ponieważ $|AC| = |DB| = 7x = 7\sqrt{2}$ cm, więc $x = \sqrt{2}$.

W trójkącie *ABS*: $|AS| = |BS| = 3\sqrt{2}$ cm, więc $|AB| = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ cm = 6 cm.

W trójkącie *CSD*: $|CS| = |DS| = 4\sqrt{2}$ cm, więc $|CD| = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ cm = 8 cm.

</td><td>1p.</td></tr>
</table>

W trójkącie *BSC*: $|BC|^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 32 + 18 = 50$, 1p.

więc $|BC| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ [cm],

$|AD| = |BC| = 5\sqrt{2}$ cm,

3.Oblicza

- poprawnie szacując , czy na wykonanie elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej i podaje odpowiedź.

d – długość taśmy ołowianej

$d = |AB| + |CD| + |AD| + |BC| + |AC| + |BD| = 6 + 8 + 2 \cdot 5\sqrt{2} + 2 \cdot 7\sqrt{2} =$ 1p.
$14 + +10\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 14 + 24\sqrt{2} < 14 + 24 \cdot 1{,}5 = 14 + 36 = 50$ [cm]

- lub dokonując obliczeń, stwierdza, że $d = 14 + 24\sqrt{2} < 50$
  $\sqrt{2} < 1{,}5$, bo $2 < 2{,}25$,
  więc

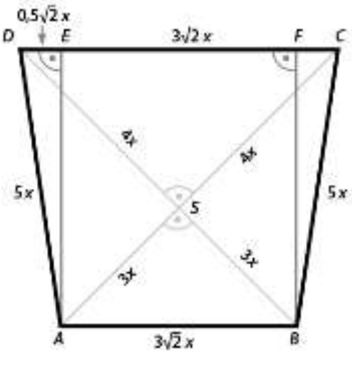
$24\sqrt{2} < 36$

Zatem $d < 0{,}5$ m.

Odpowiedź. Na wykonanie tego elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej.

II sposób

Uczeń:



1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku i wyznacza długość odcinka *DE* w zależności od x. 1p.

Trójkąty *ASB* i *DSC* są prostokątne i równoramienne, bo ich ramiona mają długości odpowiednio: 3*x* i 3*x* oraz 4*x* i 4*x*, zatem

$|AB| = 3\sqrt{2}x,\ |CD| = 4\sqrt{2}x,$

$$|DE| = \frac{4\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}x}{2} = 0{,}5\sqrt{2}x.$$

2. Wyznacza długości pozostałych boków trapezu oraz jego przekątnych, korzystając z twierdzenia Pitagorasa i oblicza wartość *x*.

$|AE| = 7$ cm. 1p.

<table>
<tr>
<td>

$|AD| = |BC| = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x.$

$|AC| = |BD| = 7x.$

W trójkącie AED: $|AE|^2 + |DE|^2 = |AD|^2$, więc

$7^2 + \left(0{,}5\sqrt{2}x\right)^2 = (5x)^2$

$49 = 24{,}5x^2$

$x^2 = 2$, stąd $x = \sqrt{2}.$

3.Oblicza

- poprawnie szacując , czy na wykonanie elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej i podaje odpowiedź.

d – długość taśmy ołowianej

$d = |AB| + |CD| + |AD| + |BC| + |AC| + |BD| = 6 + 8 + 2 \cdot 5\sqrt{2} + 2 \cdot 7\sqrt{2} =$
$14 + +10\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 14 + 24\sqrt{2} < 14 + 24 \cdot 1{,}5 = 14 + 36 = 50$ [cm]

- lub dokonując obliczeń, stwierdza, że $d = 14 + 24\sqrt{2} < 50$
  $\sqrt{2} < 1{,}5$, bo $2 < 2{,}25$,
  więc

$24\sqrt{2} < 36$

Zatem $d < 0{,}5$ m.

Odpowiedź. Na wykonanie tego elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej.

</td>
<td>1p.</td>
</tr>
</table>

III sposób

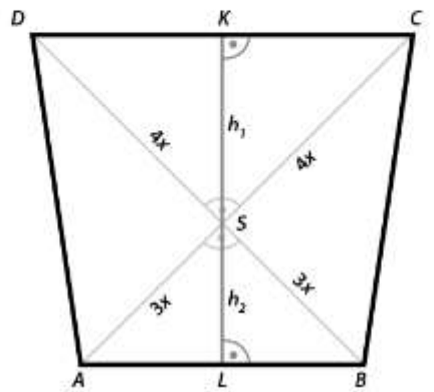
<table>
<tr>
<td>

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku i wyznacza h_1 oraz h_2 w zależności od x.

$h_1 = \frac{4\sqrt{2}x}{2} = 2\sqrt{2}x$

$h_2 = \frac{3\sqrt{2}x}{2} = 1{,}5\sqrt{2}x$



</td>
<td>1p.</td>
</tr>
<tr>
<td>

2. Oblicza wartość x oraz długości boków trapezu i jego przekątnych, korzystając z twierdzenia Pitagorasa lub wzoru na przekątną kwadratu.

</td>
<td>1p.</td>
</tr>
</table>

$h_1 + h_2 = 3{,}5\sqrt{2}x$, ale $h_1 + h_2 = \|KL\| = 7$ cm, więc $3{,}5\sqrt{2}x = 7$, stąd $x = \frac{7}{3{,}5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ [cm] Trójkąty *ASB* i *DSC* są prostokątne i równoramienne, bo ich ramiona mają długości odpowiednio: 3*x* i 3*x* oraz 4*x* i 4*x*. $\|AD\| = \|BC\| = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x = 5\sqrt{2}$ [cm], $\|AB\| = 3\sqrt{2}x = 6$ [cm], $\|CD\| = 4\sqrt{2}x = 8$ [cm], $\|AC\| = \|BD\| = 7x = 7\sqrt{2}$ [cm]. 3. Oblicza, czy na wykonanie elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej i podaje odpowiedź. *d* – długość taśmy ołowianej $d = \|AB\| + \|CD\| + \|AD\| + \|BC\| + \|AC\| + \|BD\| = 6 + 8 + 2 \cdot 5\sqrt{2} + 2 \cdot 7\sqrt{2} = 14 +$ $+10\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 14 + 24\sqrt{2} < 14 + 24 \cdot 1{,}5 = 14 + 36 = 50$ [cm] Zatem $d < 0{,}5$ m. Odpowiedź. Na wykonanie tego elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej.	1p.

Uwaga. Jeżeli uczeń wyznaczy, za pomocą x, długości wszystkich boków i przekątnych trapezu – otrzymuje 1p.

Jeżeli uczeń błędnie szacuje (za pierwiastek z dwóch podstawi wartość 1,4 lub 1,41) – nie otrzymuje ostatniego punktu.