



## KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów gimnazjów oraz oddziałów gimnazjalnych  
województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2018/2019

### Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 5 do zad.12) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

### ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt	1 pkt	1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	A	C	B	B

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

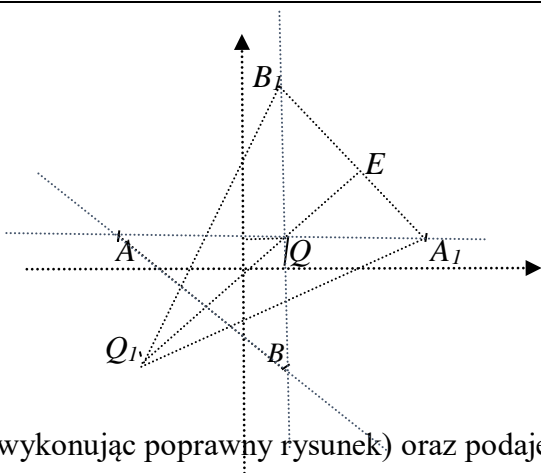
## Zadanie 5. (2 pkt)

Trzy pompy mają opróżnić basen. Pierwsza pompa samodzielnie opróżniłaby basen w ciągu 15 godzin, druga w ciągu 10 godzin, a trzecia w ciągu 9 godzin. Oblicz, czy trzy pompy pracujące jednocześnie zdążą opróżnić ten basen w ciągu 3 godzin.

<p>Uczeń:</p> <p><i>I sposób</i></p> <p>1. wprowadza oznaczenia i układa równanie (zależność) zgodne z warunkami zadania, np.:  <math>x</math> – liczba godzin potrzebna do opróżnienia basenu przez wszystkie trzy pompy, pojemność basenu przyjmujemy 1.          ilość wody wypompowana przez poszczególne pompy w ciągu jednej godziny:          I pompa: <math>\frac{1}{15}x</math>, II pompa: <math>\frac{1}{10}x</math>, III pompa: <math>\frac{1}{9}x</math></p> <p>2. rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź</p> $\frac{1}{15}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{9}x = 1$ $25x = 90 \text{ stąd } x = 3,6$ <p>Odp. Trzy pompy <b>nie zdążą</b> opróżnić basenu w ciągu 3 godzin.</p> <p><i>II sposób</i></p> <p>1. oblicza ilość wody usuniętej przez wszystkie 3 pompy w ciągu 1 godziny</p> $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{25}{90}$ <p>2. oblicza ilość wody usuniętej przez wszystkie 3 pompy w ciągu 3 godzin <math>\left(\frac{75}{90}\right)</math></p> <p>i wnioskuję, że jest to za mało.</p> <p>Odp. Trzy pompy <b>nie zdążą</b> opróżnić basenu w ciągu 3 godzin.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	-----------------------

## Zadanie 6. (2 pkt)

Dany jest trójkąt  $QAB$ , gdzie  $A = (-5,1)$ ,  $B = (1,-5)$  i  $Q = (1,1)$ . Punkt  $A_1$  jest obrazem punktu  $A$  w symetrii osiowej względem prostej  $QB$ , punkt  $B_1$  jest obrazem punktu  $B$  w symetrii osiowej względem prostej  $QA$  oraz punkt  $Q_1$  jest obrazem punktu  $Q$  w symetrii osiowej względem prostej  $AB$ . Oblicz pole trójkąta  $Q_1A_1B_1$ .

<p>Uczeń:</p>  <p>1. analizuje warunki zadania (np. wykonując poprawny rysunek) oraz podaje współrzędne punktów: <math>A_1=(7,1)</math>, <math>B_1=(1,7)</math>, <math>Q_1=(-5, -5)</math>; 1p.</p> <p>2. zauważa, że w trójkącie <math>A_1B_1Q_1</math> wysokość <math>Q_1E</math> stanowi 1,5 długości przekątnej kwadratu <math>AQBQ_1</math> (<math> QE  = \frac{1}{2}  Q_1Q </math>), zaś podstawa <math>A_1B_1</math> trójkąta <math>A_1B_1Q</math> równa jest przekątnej tego kwadratu (<math> A_1B_1  =  AB </math>). Oblicza pole trójkąta <math>A_1B_1Q_1</math>. 1p.</p> <p>Odp. Pole trójkąta <math>A_1B_1Q_1</math> jest równe 54.</p>	
---	--

**Zadanie 7.** (2 pkt)

Stosunek mas trzech różnych stopów srebra wynosi 7 : 10 : 18, natomiast stosunek mas czystego srebra zawartego w tych stopach równa się odpowiednio 7 : 9 : 12. Po stopieniu wszystkich kawałków otrzymano 350 gramów stopu, w którym czyste srebro stanowi 72% jego masy. Oblicz, w którym stopie jest największa procentowa zawartość srebra.

<p>Uczeń:</p> <p><i>I sposób</i></p> <p>1. oblicza masy trzech różnych stopów:  <math>7x + 10x + 18x = 350</math>, <math>35x = 350</math>, <math>x = 10</math>  I stop <math>7 \cdot 10 = 70</math> g, II stop <math>10 \cdot 10 = 100</math> g, III stop <math>18 \cdot 10 = 180</math> g ( masy stopów);</p> <p>2. oblicza masy srebra w poszczególnych stopach:  <math>7y + 9y + 12y = 0,72 \cdot 350</math> czyli <math>7y + 9y + 12y = 252</math> stąd <math>28y = 252</math> zatem <math>y = 9</math>  I stop <math>7 \cdot 9 = 63</math> g, II stop <math>9 \cdot 9 = 81</math> g, III stop <math>12 \cdot 9 = 108</math> g (masa srebra w stopach)  i oblicza procent srebra w poszczególnych stopach.  W I stopie jest 90% srebra, w II stopie jest 81% srebra, w III stopie jest 60% srebra.  Odp. Największa procentowa zawartość srebra jest w I stopie.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	-----------------------

*II sposób*

1. oblicza, że w I stopie jest  $\frac{7}{35} = \frac{28}{140}$  ogólnej masy i  $\frac{7}{28} = \frac{35}{140}$  ogólnego srebra,

a stosunek tych ułamków (*masy srebra do ogólnej masy*) to  $\frac{35}{28}$ . Analogicznie oblicza,

że w II stopie jest  $\frac{10}{35} = \frac{40}{140}$  ogólnej masy oraz  $\frac{9}{28} = \frac{45}{140}$  masy srebra, a stosunek tych

ułamków to  $\frac{45}{40}$ , zaś w III stopie jest  $\frac{18}{35} = \frac{72}{140}$  ogólnej masy i  $\frac{12}{28} = \frac{60}{140}$  masy srebra,

a stosunek tych ułamków to  $\frac{60}{72}$ ;

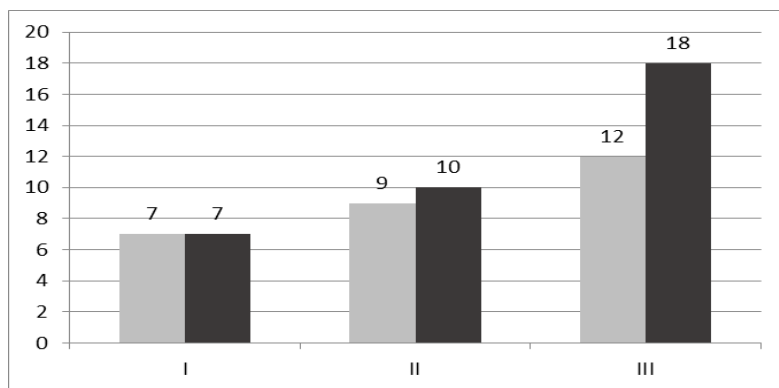
2. stwierdza, że w trzecim stopie stosunek ułamków jest mniejszy niż 1, a w pozostałych stopach większy (bo I stop:  $\frac{35}{28} > 1$ , II stop:  $\frac{45}{40} > 1$ , III stop:  $\frac{60}{72} < 1$ ) oraz wnioskuje stąd,

że w I stopie jest najwięcej srebra (bo  $\frac{350}{280} > \frac{315}{280}$ ).

Odp. Największa procentowa zawartość srebra jest w I stopie.

*III sposób*

1. analizuje graficznie treść zadania np. rysuje diagram słupkowy danych {7,7}, {9, 10}, {12,18}



tj. I stop: słupek srebra wysokości 7 i obok słupek wysokości 7,

II stop: słupek srebra wysokości 9 i obok słupek wysokości 10,

III stop: słupek srebra wysokości 12 i obok słupek wysokości 18.

2. wnioskuje na podstawie diagramu, gdzie jest najwięcej srebra oraz zapisuje odpowiedź.

Odp. Największa procentowa zawartość srebra jest w I stopie.

**Zadanie 8.** (2 pkt)

Pewna liczba całkowita dodatnia przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 2. Znajdź resztę z dzielenia tej liczby przez 30.

Uczeń:	
1. oznacza liczbę całkowitą dodatnią np. przez $x$ i przedstawia ją w postaci: $x = 5a + 3$ stąd $6x = 30a + 18$ oraz $x = 6b + 2$ stąd $5x = 30b + 10$ ( $a, b$ – są to liczby całkowite dodatnie);	1p.
2. oblicza różnicę $6x - 5x = 30a + 18 - (30b + 10)$ , stąd $x = 30(a - b) + 8$ , wnioskuje, że reszta z dzielenia tej liczby przez 30 jest równa 8.	1p.
Odp. Reszta z dzielenia tej liczby przez 30 jest równa 8.	

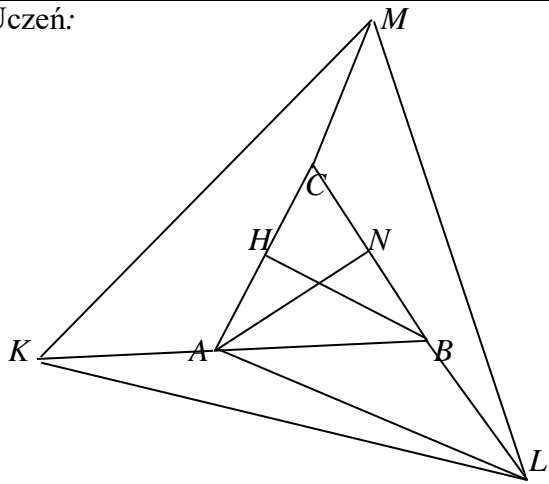
**Zadanie 9.** (2 pkt)

Z walca o średnicy podstawy równej 8 cm i wysokości 21 cm wycięto stożek o promieniu podstawy równym 3 cm i wysokości 14 cm. Oblicz, czy z pozostałej części walca można utworzyć kulę o średnicy równej 12 cm. Przyjmij, że liczba  $\pi$  jest w przybliżeniu równa  $3\frac{1}{7}$ .

Uczeń:	
1. oblicza objętość walca $V_w = 1056 \text{ cm}^3$ oraz objętość stożka $V_s = 132 \text{ cm}^3$ ;	1p.
2. oblicza różnicę objętości walca i stożka $V_w - V_s = V_k = 924 \text{ cm}^3$ . Oblicza objętość kuli o promieniu 6 cm i porównuje wynik z objętością $V_k = 924 \text{ cm}^3$ ( $924 > 905$ ) oraz podaje odpowiedź.	1p.
Odp. Z pozostałej części walca można utworzyć kulę o średnicy równej 12 cm.	

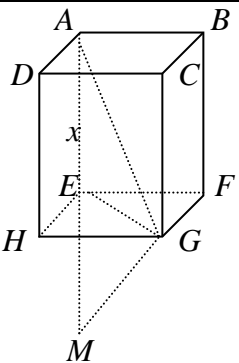
**Zadanie 10.** (2 pkt)

Pole trójkąta równobocznego  $ABC$  jest równe  $4 \text{ cm}^2$ . Punkty  $K, L, M$  leżą odpowiednio na prostych  $AB, BC, AC$  w taki sposób, że punkt  $A$  jest środkiem odcinka  $KB$ , punkt  $B$  jest środkiem odcinka  $CL$ , punkt  $C$  jest środkiem odcinka  $AM$ . Oblicz pole trójkąta  $KLM$ .

Uczeń:		1p.
<p>1. uzasadnia, że <math>\triangle ABL</math> jest równoramienny (<math> AB  =  BC  =  BL </math>, bo <math>\triangle ABC</math> jest równoboczny) zatem <math>\triangle CLA</math> i <math>\triangle MLA</math> są prostokątne (<math> \angle LAC  =  \angle LAM  = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ</math>). Wnioskuje, że <math>P_{\triangle ABC} = P_{\triangle ABL} = 4 \text{ cm}^2</math>, więc <math>P_{\triangle ALC} = P_{\triangle MCL} = 8 \text{ cm}^2</math>;</p> <p>2. analogicznie stwierdza, że <math>P_{\triangle MCL} = P_{\triangle KBL} = P_{\triangle AMK} = 8 \text{ cm}^2</math>. Oblicza pole trójkąta <math>KLM</math> jako sumę pól trójkątów: <math>P_{\triangle MCL} + P_{\triangle KBL} + P_{\triangle AMK} + P_{\triangle ABC} = 8 + 8 + 8 + 4</math></p> <p>Odp. Pole trójkąta <math>KLM</math> jest równe <math>28 \text{ cm}^2</math>.</p>	1p.	

**Zadanie 11.** (2 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną jego podstawy, wychodzącymi z jednego wierzchołka, jest równy  $30^\circ$ . Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli krawędź jego podstawy jest równa 10.

Uczeń:		1p.
<p>1. zauważa, że krawędź boczna graniastosłupa jest połową boku trójkąta równobocznego <math>AGM</math>, a przekątna podstawy graniastosłupa <math>EG</math> jest wysokością tego trójkąta i oblicza krawędź boczną graniastosłupa <math>x =  AE  = 10 \sqrt{\frac{2}{3}}</math>;</p> <p>2. oblicza objętość graniastosłupa. Odp. <math>V = 1000 \sqrt{\frac{2}{3}}</math>.</p>	1p.	

**Zadanie 12.** (2 pkt)

Wykaż, że nie istnieje para liczb całkowitych dodatnich spełniających równość:  
 $3x^2 + 5y^2 = 360$ .

<p>Uczeń:</p> <p><i>I sposób</i></p> <p>1. zauważa, że jeżeli <math>x</math> i <math>y</math> są dwiema liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że <math>3x^2 + 5y^2 = 360</math>, to <math>x \leq 10</math> (gdy <math>x \leq 10</math> to <math>3x^2 &lt; 360</math>, zaś dla <math>x = 11</math>, <math>3 \cdot 121 &gt; 360</math>) i <math>y \leq 8</math> (gdy <math>y \leq 8</math> to <math>5y^2 &lt; 360</math>, zaś dla <math>y = 9</math>, <math>5 \cdot 81 &gt; 360</math>) a ponadto <math>x</math> dzieli się przez 5 (gdyż <math>3x^2 = 5(72 - y^2)</math>), zaś <math>y</math> dzieli się przez 3 (gdyż <math>5y^2 = 3(120 - x^2)</math>);</p> <p>2. wyznacza pary (5,3), (5,6), (10,3), (10,6) mogące spełniać równość, następnie sprawdza i stwierdza, że <b>nie istnieje</b> całkowite dodatnie rozwiązanie tej równości.</p> <p><i>II sposób</i></p> <p>1. typuje <math>x \leq 10</math> (gdy <math>x \leq 10</math> to <math>3x^2 &lt; 360</math>, zaś dla <math>x = 11</math>, <math>3 \cdot 121 &gt; 360</math>) i <math>y \leq 8</math> (gdy <math>y \leq 8</math> to <math>5y^2 &lt; 360</math>, zaś dla <math>y = 9</math>, <math>5 \cdot 81 &gt; 360</math>) jako możliwy zakres rozwiązań;</p> <p>2. sprawdza przypadki np. dla <math>y = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1</math> oraz ustala i podaje odpowiedź, że <b>nie istnieje</b> całkowite dodatnie rozwiązanie tej równości.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	-----------------------