Mazowiecki Kurator Oświaty
Al. Jerozolimskie 32, 00-024 Warszawa

MSCDN
MAZOWIECKIE SAMORZĄDOWE
CENTRUM DOSKONALENIA NAUCZYCIELI

KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów klas IV-VIII szkół podstawowych województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2019/2020

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maks. liczba punktów	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**C**	**D**	**P, P**	**C, D**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (2 pkt)

Uzasadnij, że jeśli $a = 3^{15}$, $b = 8^{10}$, $c = 2^{32}$, to $a < b < c$.

Uczeń: 1. Zapisuje, że $b = 8^{10} = (2^3)^{10} = 2^{30}$ 2. Zapisuje, że $b = 2^{30} = (2^2)^{15} = 4^{15} > 3^{15} = a$, stąd wnioskuje, że $a < b < c$	 1p. 1p.

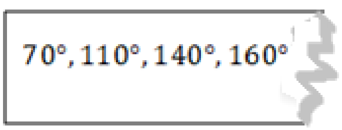
Zadanie 6. (2 pkt)

Bartek ma 4 lata i kilkoro rodzeństwa. Średnia wieku jego rodziny (rodzice i dzieci) wynosi 19 lat, a średnia wieku rodziny liczona bez wieku Bartka jest równa 22 lata. Ile rodzeństwa ma Bartek? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. Oznacza przez x liczbę osób w rodzinie i zapisuje równanie: $19x - 4 = 22(x - 1)$ 2. Rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź. $19x - 4 = 22x - 22$ $3x = 18,\ x = 6$ Odpowiedź: Ponieważ w rodzinie jest czworo dzieci, więc Bartek ma troje rodzeństwa. *Uwaga. Jeżeli uczeń poprawnie rozwiąże równanie, ale nie poda (nie wyznaczy), ile rodzeństwa ma Bartek, to otrzymuje 1 punkt.*	 1p. 1p.

Zadanie 7. (3 pkt)

Wojtek zmierzył w każdym z dwóch trójkątów trzy kąty zewnętrzne (po jednym przy każdym wierzchołku). Wyniki pomiarów zapisał na kartce (w dowolnej kolejności), a potem tak nieszczęśliwie oddarł część kartki, że zgubił dwa z nich. Kasia spojrzała na pozostałe cztery wyniki i stwierdziła, że jeden z trójkątów musiał być równoramienny. Odtwórz (Podaj) brakujące wyniki pomiarów Wojtka i uzasadnij, że jeden z tych trójkątów był równoramienny lub prostokątny.



Uczeń: 1. Podaje miary czterech kątów wewnętrznych tych trójkątów: $110°, 70°, 40°, 20°$ oraz	 1p.

zauważa, że jeden z tych trójkątów jest rozwartokątny. Rozważa trójkąt rozwartokątny: np. kąt rozwarty ma $110°$, a jeden z pozostałych jego kątów może mieć: $40°$ lub $20°$ (nie może mieć $70°$). *Przypadek I* Jeśli ma $40°$, to trzeci kąt ma $30°$. Wobec tego kąty wewnętrzne tego trójkąta mają miary $110°, 40°, 30°$ *Przypadek II* Jeśli ma $20°$, to trzeci kąt ma $50°$. Wobec tego kąty wewnętrzne tego trójkąta mają miary $110°, 20°, 50°$.	
2. Określa kąty w drugim trójkącie w zależności od otrzymanego trójkąta rozwartokątnego. Np. *Przypadek I:* Jeśli kąt o mierze 20º jest kątem drugiego trójkąta, to kąty drugiego trójkąta mają miary: 20º, 70º, 90º (trójkąt prostokątny). *Przypadek II:* Jeśli kąt o mierze $40°$ jest kątem drugiego trójkąta, to kąty drugiego trójkąta mają miary: 70º, 40º, 70º (trójkąt równoramienny).	1p.
3. Odtwarza pomiary i podaje brakujące pary kątów zewnętrznych. Np. *Przypadek I:* Kąty zewnętrzne trójkąta rozwartokątnego mają miary: $70°, 140°, 150°$, więc brakującym wynikiem pomiarów jest $\mathbf{150°}$. Wówczas w drugim trójkącie kąty zewnętrzne to: $160°, 110°, 90°$, zatem brakującym wynikiem pomiarów jest $\mathbf{90°}$. *Przypadek II:* Kąty zewnętrzne trójkąta rozwartokątnego mają miary: $70°, 160°, 130°$, więc brakującym wynikiem pomiarów jest $\mathbf{130°}$. Wówczas w drugim trójkącie kąty zewnętrzne to: $110°, 140°, 110°$, zatem brakującym wynikiem pomiarów jest $\mathbf{110°}$. Odpowiedź: Brakującymi wynikami pomiarów są pary: $90°$ i $150°$ lub $110°$ i $130°$. *Uwaga: W przypadku, gdy uczeń rozważy <u>w pełni</u> jeden istotny przypadek: trójkąt równoramienny albo trójkąt prostokątny i poda jedną brakującą parę kątów zewnętrznych, to otrzymuje maksymalną liczbę punktów.*	1p.

Zadanie 8. (3 pkt)

Weronika i młodsza od niej Karolina rozpoczęły bieg o godzinie 17.00. Weronika goni Karolinę, a odległość między nimi na starcie wynosiła 180 m. Weronika w ciągu 5 sekund robi 25 kroków, a Karolina w ciągu 8 sekund 36 kroków. Krok Weroniki ma 0,6 m, a Karoliny 0,5 m. O której godzinie Weronika dogoni Karolinę? Odpowiedź uzasadnij.

Przyjmij, że podczas biegu długości kroków oraz prędkości obu dziewcząt nie zmieniają się.

I sposób

Uczeń: 1. Oblicza, jakie dystanse pokonują dziewczęta w ciągu 40 s (gdyż jest to najmniejsza wspólna wielokrotność dla 5 s i 8 s): Weronika w ciągu 40 sekund robi 200 kroków, czyli pokonuje dystans 120 metrów, a Karolina w tym samym czasie robi 180 kroków, czyli pokonuje dystans 90 metrów.	1p.
2. Oblicza, o ile metrów Weronika zbliża się do Karoliny w ciągu 40 sekund: 120 m – 90 m = 30 m (o 30 metrów).	1p.
3. Oblicza po jakim czasie Weronika dogoni Karolinę i podaje odpowiedź. Np.: 180 m : 30 m = 6 (6 razy po 40 s), więc po $6 \cdot 40 = 240$ sekundach czyli dogoni ją po 4 minutach. Odpowiedź: Weronika dogoni Karolinę o godzinie 17.04.	1p.

II sposób

Uczeń: 1. Oblicza, że Weronika biegnie 3 metry na sekundę: $\frac{25}{5\ \mathrm{s}} \cdot 0{,}6\ \mathrm{m} = 3\ \mathrm{m/s}$, a Karolina 2,25 metra na sekundę: $\frac{36}{8\ \mathrm{s}} \cdot 0{,}5\ \mathrm{m} = 2{,}25\ \mathrm{m/s}$.	1p.
2. Oblicza, że Weronika w każdej sekundzie nadrabia trzy czwarte metra: 3 m/s – 2,25 m/s = 0,75 m/s.	1p.
3. Oblicza po jakim czasie Weronika dogoni Karolinę i podaje odpowiedź. Np. 180 m : 0,75 m/s = 240 s, czyli dogoni ją po 4 minutach. Odpowiedź: Weronika dogoni Karolinę o godzinie 17.04.	1p.

III sposób

Uczeń: 1. Przyjmuje oznaczenia i zapisuje zależności wynikające z treści zadania. Np.: x – droga Karoliny do spotkania z Weroniką V_W – prędkość Weroniki, V_K – prędkość Karoliny S_W – droga Weroniki do spotkania z Karoliną S_K – droga Karoliny do spotkania z Weroniką t – czas po jakim dziewczynki się spotkają	1p.

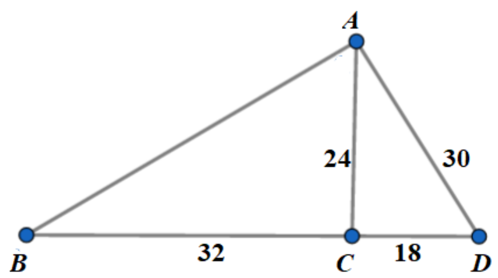
$V_W = 3$ m/s oraz $S_W = 180 + x$ $V_K = 2{,}25$ m/s oraz $S_K = x$ $t = \frac{S_W}{V_W} = \frac{S_K}{V_K}$ 2. Oblicza drogę jaką przebyła Karolina do spotkania z Weroniką. $\frac{180+x}{3} = \frac{x}{2{,}25}$ zatem $2{,}25(180 + x) = 3x$, stąd $x = 540$ [m] 3. Oblicza czas po jakim dziewczynki się spotkają i podaje odpowiedź. $t = \frac{720}{3}$, stąd $t = 240$ [s], $t = 4$ [min]. Odpowiedź: Weronika dogoni Karolinę o godzinie 17.04.	1p. 1p.

Zadanie 9. (3 pkt)

Na płaszczyźnie dane są punkty *A*, *B*, *C*, *D*, które spełniają jednocześnie następujące warunki:

- odległość punktu *A* od punktu *C* wynosi 24;
- odległość punktu *A* od punktu *D* wynosi 30;
- odległość punktu *D* od punktu *B* wynosi 50;
- odległość punktu *D* od punktu *C* wynosi 18;
- odległość między punktami *C* i *B* wynosi 32.

Jaka jest odległość między punktami *A* i *B*? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. Wykazuje, że punkty *B*, *C*, *D* są współliniowe, bo 32 + 18 = 50, wykonuje poprawny rysunek:  2. Uzasadnia, że trójkąty *ACD* i *ACB* są prostokątne. Np. Trójkąt *ACD* jest prostokątny, bo $24^2 + 18^2 = 30^2$ Trójkąt *ACB* jest prostokątny, bo kąt $ACB = 90°$ 3. Oblicza długość odcinka *AB* i podaje odpowiedź. $\|AB\|^2 = 32^2 + 24^2 = 1024 + 576 = 1600$ stąd $\|AB\| = 40$ Odpowiedź: Odległość między punktami *A* i *B* wynosi 40.	1p. 1p. 1p.

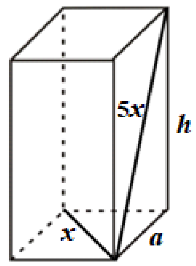
Zadanie 10. (3 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym przekątna podstawy jest pięć razy krótsza od przekątnej ściany bocznej. Objętość tego graniastosłupa wynosi 7. Jaką długość ma krawędź podstawy? Odpowiedź uzasadnij.

I sposób

<table>
<tr><td>
Uczeń:

1. Wykonuje rysunek, zapisuje długość krawędzi podstawy w zależności od długości przekątnej podstawy. Np.



$a^2 + a^2 = x^2, \qquad 2a^2 = x^2, \qquad a = \frac{x\sqrt{2}}{2}$

2. Zapisuje wysokość h i objętość V graniastosłupa w zależności od długości przekątnej podstawy. Np.

$a^2 + h^2 = 25x^2, \qquad h^2 = 25x^2 - \frac{2x^2}{4} = \frac{49x^2}{2}, \qquad h = \frac{7\sqrt{2}x}{2}$

$V = \frac{x^2}{2} \cdot \frac{7\sqrt{2}x}{2} = \frac{7\sqrt{2}x^3}{4}$

3. Oblicza długości: przekątnej oraz krawędzi podstawy graniastosłupa. Podaje odpowiedź.

Np. Przekształca równanie $\frac{7\sqrt{2}x^3}{4} = 7$ do postaci $x^3\sqrt{2} = 4$. Stąd $x = \sqrt{2}$ zatem

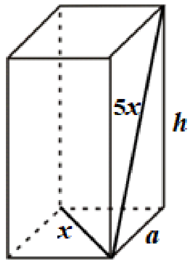
$a = \frac{x\sqrt{2}}{2} = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2} = 1$

Odpowiedź: Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa 1.
</td><td>
1p.

1p.

1p.
</td></tr>
</table>

II sposób

Uczeń: 1. Wykonuje rysunek, zapisuje długości: przekątnej podstawy i przekątnej ściany bocznej w zależności od długości krawędzi podstawy.  Np. $x^2 = a^2 + a^2,\ x^2 = 2a^2,\ x = a\sqrt{2}$, czyli $5x = 5a\sqrt{2}$	1p.
2. Wyznacza wysokość h i objętość V graniastosłupa. Np. $h^2 = 50a^2 - a^2,\quad h^2 = 49a^2,\ h = 7a$ stąd $V = 7a^3$	1p.
3. Oblicza długość krawędzi podstawy a graniastosłupa i podaje odpowiedź. $V = 7a^3 = 7$, stąd $a = 1$ Odpowiedź: Długość krawędzi podstawy tego graniastosłupa jest równa 1.	1p.