



MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP REJONOWY 2022/2023

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.
Maks. liczba punktów	0-1 pkt	0-1 pkt	0-1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	P, P	A., C.	A., D.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 4. (0-2 pkt)

Kolejne cyfry 2 a 3 4 b liczby pięciocyfrowej są różne. Liczba ta jest podzielna przez 36. Co to za liczba? Podaj wszystkie możliwości i uzasadnij odpowiedź.

I sposób

Uczeń:	
1. Zapisuje warunki jakie spełniają liczby a oraz b , korzystając z cech podzielności przez 4 i 9.	1p.
Tę liczbę można zapisać za pomocą iloczynu $9 \cdot 4 \cdot k$, więc $a + b = 0$ lub $a + b = 9$, lub $a + b = 18$ oraz $b = 0$ lub $b = 4$, lub $b = 8$.	
2. Eliminuje te warunki, które są sprzeczne z treścią zadania i podaje odpowiedź.	1p.
Gdy $a + b = 0$, to $a = b = 0$ sprzeczność z warunkami zadania, podobnie gdy $a + b = 18$, to $a = b = 9$ sprzeczność z warunkami zadania, również b nie może być równe 4, bo już jest, zatem $a + b = 9$ oraz $b = 0$ lub $b = 8$, stąd $a = 9$ lub $a = 1$.	
Odpowiedź. Ta liczba to 21 348 lub 29 340.	

Uwaga : Jeżeli uczeń oprócz liczb 29340, 21348 poda dodatkowo jedną spośród liczb 20340, 25344, to za całe zadanie otrzymuje 1 punkt.

II sposób

Uczeń:	
1. Zapisuje warunki podzielności tej liczby przez 4.	1p.
Skoro liczba jest podzielna przez 36, to jest podzielna przez 4, więc dwie ostatnie cyfry mogą tworzyć liczby: 40, 44 (sprzeczne), 48.	
2. Uwzględnia warunki podzielności tej liczby przez 9 i podaje odpowiedź.	1p.
Skoro liczba jest podzielna przez 36, to jest podzielna przez 9, więc gdy dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 40, to $b = 0$, $a = 9$, a gdy tworzą liczbę 48, to $b = 8$, $a = 1$.	
Odpowiedź. Ta liczba to 29 340 lub 21 348.	

Uwaga : Jeżeli uczeń oprócz liczb 29340, 21348 poda dodatkowo jedną spośród liczb 20340, 25344, to za całe zadanie otrzymuje 1 punkt.

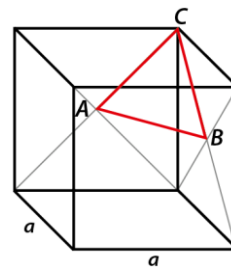
Zadanie 5. (0-3 pkt)

Punkty A i B są środkami dwóch sąsiednich ścian sześcianu o krawędzi a . Punkt C jest jednym ze wspólnych wierzchołków tych ścian sześcianu, na których leżą punkty A i B . Zapisz obwód trójkąta ABC za pomocą a .

I sposób

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku.



1p.

2. Uzupełnia rysunek i wyznacza długości odcinków AC i BC .

a – długość boku sześcianu

Odcinki AC i BC mają długość równą połowie przekątnej ściany sześcianu, czyli są równe $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

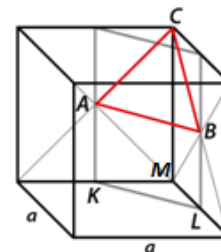
3. Wyznacza długość boku AB oraz zapisuje wyrażenie określające obwód otrzymanej figury.

$$|AB| = |KL|$$

Trójkąt KLM jest prostokątny i równoramienny, w którym

$$|LM| = |KM| = \frac{a}{2}, \text{ więc } |KL| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Zatem } L_{ABC} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

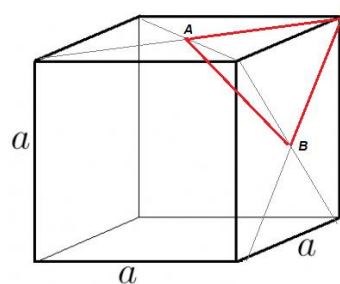


1p.

II sposób

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku.



1p.

2. Uzupełnia rysunek i wyznacza długości odcinków AC i BC .

1p.

a – długość boku sześcianu

Odcinki AC i BC mają długość równą połowie przekątnej ściany sześcianu, czyli są równe $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.

3. Wyznacza długość boku AB oraz zapisuje wyrażenie określające obwód otrzymanej figury.

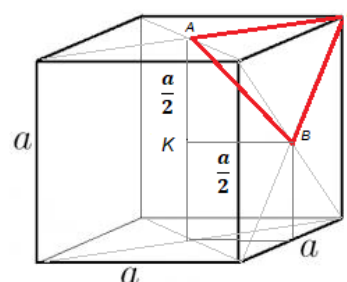
1p.

$$|AK| = |KB|$$

Trójkąt KAB jest prostokątny i równoramienny, którym

$$|KA| = |KB| = \frac{a}{2}, \text{ więc } |AB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Zatem } L_{ABC} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$



Zadanie 6. (0-3 pkt)

Ośmiu zawodników zgłosiło się na Rowerowy Rajd, a wśród nich poprzedni triumfator Łukasz. Dwa dni przed zawodami Łukasz doznał kontuzji. Na jego miejsce pojechał dwukrotnie młodszy Wojtek. W związku z tym średnia wieku uczestników rajdu zmniejszyła się o 1 rok. Oblicz, ile lat ma Wojtek.

I sposób

Uczeń:	
1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania. x – wiek Wojtki y – suma wieku pozostałych uczestników	1p.
2. Układa równanie, korzystając z własności średniej arytmetycznej. $\frac{2x + y}{8} = \frac{x + y}{8} + 1$	1p.
3. Rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź. $2x + y = x + y + 8$ $x = 8$ Odpowiedź. Wojtek ma 8 lat.	1p.

II sposób

Uczeń:	
1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania. s – łączny wiek uczestników przed zmianą $\frac{s}{8}$ – średnia wieku zawodników przed zmianą	1p.
2. Zapisuje średnią wieku zawodników po zmianie. $\frac{s}{8} - 1 = \frac{s}{8} - \frac{8}{8} = \frac{s-8}{8}$, a więc jeśli średnia wieku uczestników zmniejszyła się o 1, to łączny wiek uczestników zmniejszył się o tyle, ilu jest zawodników.	1p.

<p>3. Oblicza, ile lat ma Wojtek.</p> <p>Ponieważ jest 8 zawodników, więc Wojtek jest o 8 lat młodszy od Łukasza.</p> <p>Jeśli przyjmiemy, że: y – wiek Łukasza, a x – wiek Wojtki, to</p> <p>$y - x = 8$ oraz $y = 2x$, więc $2x - x = 8$, zatem $x = 8$</p> <p>Odpowiedź. Wojtek ma 8 lat.</p>	1p.
--	-----

Zadanie 7. (0-3 pkt)

Pan Tomasz wyruszył w podróż samochodem o godzinie 9:15. Czwartą część trasy przejechał ze średnią prędkością 60 km/h, a pozostałą część drogi ze średnią prędkością 25 m/s. Do celu dotarł o 12:45. Oblicz długość trasy, którą przebył pan Tomasz oraz średnią prędkość na całej trasie.

I sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Wyraża prędkości w jednakowych jednostkach i przeprowadza analizę treści zadania:</p> $25 \text{ m/s} = \frac{0,025 \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 90 \text{ km/h} \quad \text{lub} \quad 60 \text{ km/h} = 60 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 16 \frac{2}{3} \text{ m/s}$ <p>s – przebyta droga [w km],</p> <p>t_1 – czas pierwszej części trasy [w h], t_2 – czas drugiej części trasy [w h]</p> <p>2. Zapisuje zależności między drogą, czasem i prędkością na poszczególnych odcinkach trasy i wyznacza czas w postaci wyrażenia z niewiadomą s:</p> $\frac{0,25s}{t_1} = 60, \text{ więc } t_1 = \frac{0,25s}{60} = \frac{s}{240} \text{ [h]}, \quad \frac{0,75s}{t_2} = 90, \text{ więc } t_2 = \frac{0,75s}{90} = \frac{s}{120} \text{ [h]}$ <p>3. Oblicza średnią prędkość na całej trasie i długość trasy, jaką przebył pan Tomasz:</p> <p>Średnia prędkość na całej trasie:</p> $\frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{240} + \frac{s}{120}} = \frac{s}{\frac{s}{240} + \frac{2s}{240}} = \frac{s \cdot 240}{3s} = 80 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$ <p>Długość trasy:</p> $s = 80 \cdot 3,5 = 280 \text{ [km]}$ <p>Odpowiedź. Pan Tomasz przebył trasę równą 280 km ze średnią prędkością 80 km/h.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	----------------------------------

II sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Wyznacza całkowity czas oraz wyraża prędkości w jednakowych jednostkach i przeprowadza analizę treści zadania:</p> $t = 12.45 - 9.15 = 3,5 \text{ h}$ $25 \text{ m/s} = \frac{0,025 \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 90 \text{ km/h} \quad \text{lub} \quad 60 \text{ km/h} = 60 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 16 \frac{2}{3} \text{ m/s}$ <p>s – przebyta droga [w km],</p> <p>t_1 – czas pierwszej części trasy [w h], t_2 – czas drugiej części trasy [w h]</p>	1p.
<p>2. Zapisuje zależności między drogą, czasem i prędkością na poszczególnych odcinkach trasy i wyznacza czas w postaci wyrażenia z niewiadomą s:</p> $\frac{0,25s}{t_1} = 60, \text{ więc } t_1 = \frac{0,25s}{60} = \frac{s}{240} \text{ [h]}, \quad \frac{0,75s}{t_2} = 90, \text{ więc } t_2 = \frac{0,75s}{90} = \frac{s}{120} \text{ [h]}$	1p.
<p>3. Oblicza długość trasy i średnią prędkość na całej trasie:</p> $3,5 = \frac{s}{240} + \frac{s}{120}$ $3,5 = \frac{s}{240} + \frac{s}{120} \mid \cdot 10$ $35 = \frac{s}{24} + \frac{s}{12}$ $35 = \frac{s + 2s}{24} = \frac{s}{8}$ $s = 35 \cdot 8 = 280 \text{ [km]}$ <p>Średnia prędkość v na całej trasie:</p> $v = \frac{280}{3,5} = 80 \left[\frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$ <p>Odpowiedź. Pan Tomasz przebył trasę równą 280 km ze średnią prędkością 80 km/h.</p>	1p.

Zadanie 8. (0-3 pkt)

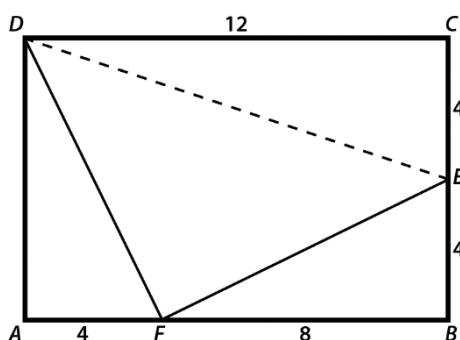
Boki prostokąta $ABCD$ mają długości: $|AB| = 12$, $|BC| = 8$. Punkt E dzieli bok BC na połowy, a punkt F dzieli bok AB w stosunku $1 : 2$. Wykaż, że trójkąt EFD jest prostokątny. Rozpatrz dwa przypadki.

I sposób

Uczeń:

1. Rozwiązuje I przypadek wyznacza długości boków trójkąta FED korzystając z twierdzenia Pitagorasa

1p.



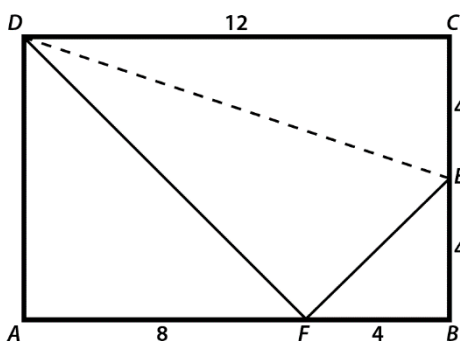
$$|FE| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

$$|FD| = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$$

$$|DE| = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$$

2. Rozwiązuje II przypadek wyznacza długości boków trójkąta FED korzystając z twierdzenia Pitagorasa

1p.



$$|FE| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$

$$|FD| = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128}$$

$$|DE| = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$$

3. Uzasadnia, że trójkąt EFD jest prostokątny, stosując twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

1p.

W obu przypadkach

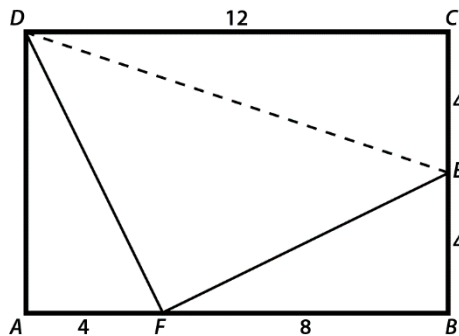
$$|FE|^2 + |FD|^2 = |DE|^2$$

Zatem kąt EFD jest prosty.

II sposób

Uczeń:

1. Rozwiązuje I przypadek (różnoboczny)



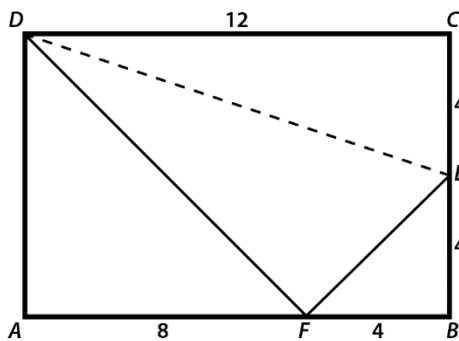
Zauważa, że trójkąty DAF i EBF są przystające.

$$|AD| = |FB| = 8$$

$$|AF| = |EB| = 4$$

$$|\angle DAF| = |\angle EBF| = 90^\circ$$

2. Rozwiązuje II przypadek (równoramienny)



Zauważa, że trójkąty DAF i EBF są prostokątne równoramienne,

$$|AD| = |AF| = 8$$

$$|BE| = |BF| = 4$$

kąty ostre w trójkątach DAF i EBF mają po 45° .
więc $|\angle AFD| = |\angle BFE| = 45^\circ$

3. Uzasadnia, że trójkąt EFD jest prostokątny.

I przypadek

$$|\angle DFE| = 180^\circ - (|\angle EFB| + 90^\circ - |\angle EFB|)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

II przypadek

$$|\angle DFE| = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$

1p.

1p.

1p.

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Graniastosłup prosty ma w podstawie romb o wysokości równej 4 cm. Kąt rozwarty rombu ma miarę pięć razy większą od miary kąta ostrego. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że pole podstawy graniastosłupa stanowi 20% pola jego powierzchni całkowitej.

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku .
Analizuje podstawę (wyznacza kąta ostry rombu oraz długość boku rombu)

oblicza miarę kąta ostrego podstawy.

α – kąt ostry podstawy

$$\alpha + 5\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Zauważa, że trójkąt DAK jest połową trójkąta równobocznego, zatem $|AD| = 8$ cm. Ponieważ podstawą graniastosłupa jest romb, więc $|AB| = |AD| = 8$ cm.

2. Oblicza pole powierzchni całkowitej oraz pole jednej ściany tego graniastosłupa.

$$P_p = 8 \cdot 4 = 32 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_c = 32 \cdot 5 = 160 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_b = 160 - 2 \cdot 32 = 96 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_s = 96 : 4 = 24 = 8 \cdot h$$

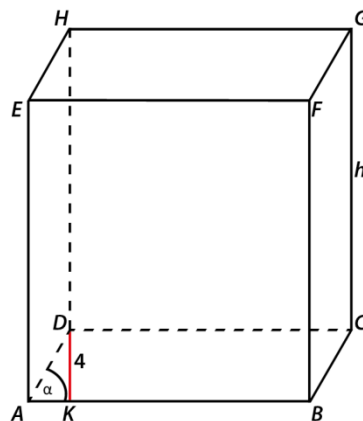
3. Oblicza wysokość graniastosłupa i objętość graniastosłupa i podaje odpowiedź.

$$P_s = 24 = 8 \cdot h$$

$$h = 3 \text{ cm}$$

$$V = P_p \cdot h = 32 \cdot 3 = 96 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Odpowiedź. Objętość tego graniastosłupa jest równa 96 cm^3 .



1p.

1p.

1p.