KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów gimnazjów oraz oddziałów gimnazjalnych województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2018/2019

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

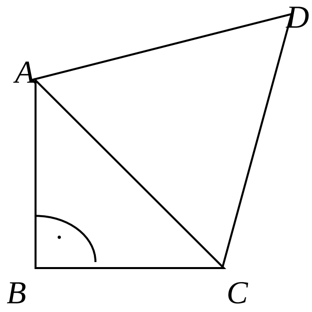
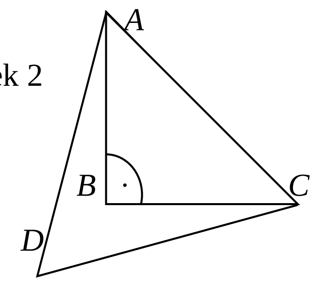
ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**
Maks. liczba punktów	**1 pkt**	**1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**D**	**C**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 3. (2 pkt)

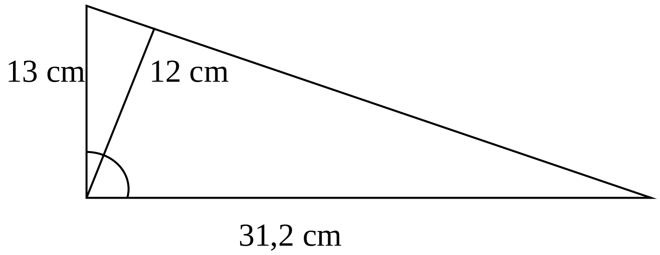
Trójkąt *ABC* jest prostokątny i równoramienny. Na przeciwprostokątnej *AC* zbudowano trójkąt równoboczny *ACD*. Oblicz miary kątów trójkąta *ABD*. Rozważ wszystkie możliwości ułożenia trójkątów.

Uczeń:	
1. analizuje pierwszy przypadek i oblicza miary kątów trójkąta *ABD*	1p.
Przypadek 1 	
$\lvert\sphericalangle DAB\rvert = 60° + 45° = 105°$	
$\lvert\sphericalangle ADB\rvert = 0{,}5 \cdot 60° = 30°$	
$\lvert\sphericalangle ABD\rvert = 180° - 135° = 45°$	
Miary kątów trójkąta *ABD*: 105°, 30°, 45°.	
2. analizuje drugi przypadek i oblicza miary kątów trójkąta *ABD*	
Przypadek 2 	1p.
$\lvert\sphericalangle DAB\rvert = 60° – 45° = 15°$	
$\lvert\sphericalangle ADB\rvert = 0{,}5 \cdot 60° = 30°$	
$\lvert\sphericalangle ABD\rvert = 180° - 45° = 135°$	
Miary kątów trójkąta *ABD*: 15°, 30°, 135°.	

Zadanie 4. (2 pkt)

Dany jest trójkąt, którego wysokości mają długości: 12 cm, 13 cm i 31,2 cm. Wiedząc, że jest to trójkąt prostokątny, oblicz pole tego trójkąta.

Uczeń:	
1. analizuje długości wysokości i wybiera dwie najdłuższe 13 cm i 31,2 cm do obliczenia pola trójkąta, uzasadniając np., że ponieważ przyprostokątna jest krótsza od przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego zatem h = 12 cm musi być wysokością opuszczoną na przeciwprostokątną danego w zadaniu trójkąta.	1p.

 2. oblicza pole trójkąta $P_{\Delta ABC} = 0{,}5 \cdot \lvert AC\rvert \cdot \lvert BC\rvert = 0{,}5 \cdot 13 \cdot 31{,}2 = 202{,}8\ \text{cm}^2$ Odp.: Pole trójkąta jest równe 202,8 cm^2.	1p.

Zadanie 5. (2 pkt)

Basia wysypała na podłogę 10 sześciennych kostek do gry (kostka do gry ma oczka od 1 do 6). Zanim je pozbierała obliczyła, że na wszystkich widocznych ściankach (tzn. nie przylegających bezpośrednio do podłogi) były w sumie 184 oczka. Jaka jest największa możliwa liczba szóstek, które znajdują się na ścianach przylegających bezpośrednio do podłogi? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. oblicza, że suma oczek na jednej kostce wynosi 1+ 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21, a na 10 kostkach suma oczek wynosi 210 i wnioskuje, że 210 – 184 = 26 to suma oczek na niewidocznych ściankach.	1p.
2. prowadzi rozumowanie, że ścianek niewidocznych jest 10 i na każdej jest co najmniej 1 oczko; zatem 26 – 10 = 16 to ilość oczek, którymi można dopełnić jedynki do szóstek. Skoro 16 : 5 = 3 r.1 stąd wnioskuje, że mogły być niewidoczne **co najwyżej trzy szóstki**. Odp.: Na niewidocznych ściankach mogło być, co najwyżej, trzy szóstki.	1p.

Zadanie 6. (3 pkt)

Trzy liczby naturalne dwucyfrowe ustawione w kolejności malejącej stanowią szyfr do sejfu. Iloczyn pewnych dwóch spośród tych trzech liczb równa się 888. Iloczyn innych dwóch liczb spośród tych trzech równa się 999. Jaki jest szyfr do tego sejfu? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. układa dwa równania $ab = 888$ i $bc = 999$ z trzema niewiadomymi i wykorzystuje fakt, że są to liczby całkowite i dwucyfrowe a z tego zapisu wnioskuje, że b jest wspólnym dzielnikiem liczb 888 i 999.	1p.
2. rozkłada liczby 888 i 999 na czynniki: $888 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$, $999 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ i wnioskuje, że b może się równać 1, 3, 37 lub 111, a jedynym dwucyfrowym czynnikiem jest 37, stąd $b = 37$.	1p.
3. oblicza $a = 888 : 37 = 24$ i $c = 999 : 37 = 27$ i porządkuje liczby malejąco oraz udziela odpowiedzi np.: Szyfr do sejfu to: 37 27 24.	1p.

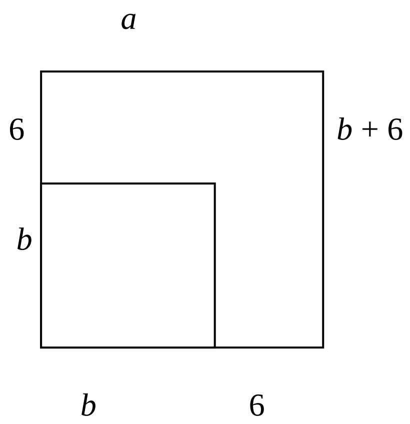
Zadanie 7. (2 pkt)

O godzinie 15:00 kąt między wskazówkami zegara wynosi 90º. Po ilu minutach wskazówki zegara, po raz pierwszy od tego momentu, utworzą kąt 130º? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. zauważa, że przez 1 minutę wskazówka minutowa zakreśla kąt o mierze $6° = 360° : 60$, a godzinowa $0{,}5° = (\frac{1}{12} \cdot 360°) : 60$, a następnie wnioskuje, że przez x minut wskazówka minutowa zakreśla kąt o mierze $6x$ stopni, a godzinowa $0{,}5x$ stopni. Zatem po x minutach kąt (zorientowany!) między wskazówką minutową a godzinową rośnie o $6x – 0{,}5x$ stopni.	1p.
2.stwierdza, że jeśli mamy w pewnym momencie kąt 90º i wskazówka minutowa jest przed godzinową, to 130º nastąpi, gdy kąt (zorientowany!) między wskazówkami wzrośnie o $220° = 90° + 130°$. Stąd $6x – 0{,}5x = 220$, co daje $x = 40$ minut. Odp.: Wskazówki utworzą kąt 130º za 40 min.	1p.

Zadanie 8. (2 pkt)

Liczby a i b są nieparzyste i ich różnica wynosi 6. Wykaż, że liczba $a^2 – b^2$ jest podzielna przez 24.

Uczeń:	
I sposób	1p.
1. zapisuje zależność $a - b = 6$ i wyznacza np. $a = 6 + b$ i podstawia a do wzoru $a^2 - b^2 = (6 + b)^2 - b^2$	1p.
2. przekształca wzór; $(6 + b)^2 - b^2 = (6 + b)\cdot(6 + b) - b^2 = 36 + 12b = 12(3 + b)$ i wnioskuje o podzielności iloczynu przez $24 = 12 \cdot 2$, bo drugi czynnik $3 + b$ jest parzysty.	
II sposób	
1. rysuje dwa kwadraty: o boku b i polu $P_2 = b^2$ oraz o boku $a = b + 6$ i polu $P_1 = a^2$  zauważa, że różnica pól kwadratów P_1 i P_2 to suma pól prostokątów o bokach 6 i b oraz $6 + b$ i 6	1p.
2. oblicza różnicę pól $a^2 - b^2 = 6b + 6(b + 6) = 6b + 6b + 36 = 12b + 36 = 12(b + 3)$ i wnioskuje o podzielności przez $12 \cdot 2 = 24$, bo drugi czynnik $(b + 3)$ jest parzysty.	1p.

Zadanie 9. (3 pkt)

Dany jest ułamek $\frac{a}{b}$, w którym licznik a i mianownik b są liczbami dodatnimi oraz $a > b$.

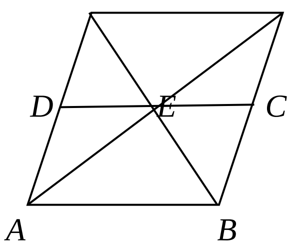
Do licznika i mianownika tego ułamka dodano pewną liczbę dodatnią. Wykaż, że w ten sposób otrzymano ułamek mniejszy od wyjściowego.

Uczeń:	
1. zapisuje nierówność $\frac{a}{b} > \frac{a+x}{b+x}$, gdzie a – licznik ułamka, b – mianownik ułamka, x - dodana liczba dodatnia,	1p.
2. przekształca nierówność do postaci: $\frac{a}{b} - \frac{a+x}{b+x} > 0$ i sprowadza ułamki do wspólnego	1p.

mianownika stąd $\frac{a(b+x)}{b(b+x)}-\frac{b(a+x)}{b(b+x)}>0$, 3 wnioskuje, że $ab + ax > ab + bx$, stąd $ax > bx$ stąd prawdziwa jest nierówność $a > b$, ujęta w warunkach zadania, zatem ułamek zmniejszył się.	1p.

Zadanie 10. (2 pkt)

W równoległoboku *ABCD* długość boku *AB* jest dwa razy dłuższa od długości boku *BC*. Punkt *E* jest środkiem odcinka *CD*. Uzasadnij, że kąt *AEB* jest kątem prostym.

Uczeń: I sposób 1. dopełnia równoległobok do rombu o boku $2\cdot\lvert BC\rvert$  2. korzystając z własności przekątnych rombu wnioskuje, że miara kąta *AEB* jest równa 90°.	1p. 1p.
II sposób 1. zauważa, że trójkąty *AED* i *BCE* są równoramienne ($\lvert AD\rvert = \lvert DE\rvert = \lvert EC\rvert = \lvert CB\rvert$). Jeśli oznaczymy $\lvert\sphericalangle ADE\rvert = \alpha$, wówczas $\lvert\sphericalangle BCE\rvert = 180^\circ - \alpha$, zatem $\lvert\sphericalangle AED\rvert = (180^\circ - \alpha):2 = 90^\circ - \alpha/2$ (z sumy kątów w trójkącie równoramiennym *ADE*) zaś $\lvert\sphericalangle BEC\rvert = \alpha/2$ (z sumy kątów w trójkącie równoramiennym *BCE*). 2. oblicza $\lvert\sphericalangle AEB\rvert = 180^\circ - (90^\circ - \alpha/2 + \alpha/2) = 90^\circ$ (kąty $\sphericalangle AED$, $\sphericalangle AEB$, $\sphericalangle BEC$ tworzą kąt półpełny).	1p. 1p.