MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT PUNKTOWANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP SZKOLNY 2022/2023

Ważne terminy!

Zgodnie z harmonogramem termin ogłoszenia wyników w szkole mija **28.10.2022 r.**

Najpóźniej do 8.11.2022 r. należy bezwzględnie wprowadzić wyniki **wszystkich uczniów** na Platformę Konkursów Przedmiotowych. Zgłoszenie uczestników po wyznaczonym terminie nie będzie przyjęte i **skutkuje ich dyskwalifikacją**.

21.11.2022 r. należy zapoznać się z listą uczniów zakwalifikowanych do etapu rejonowego oraz przekazać informację o ewentualnym zakwalifikowaniu się do kolejnego etapu konkursu uczniom i ich rodzicom/opiekunom prawnym.

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może otrzymać maksymalnie 1 punkt, a za rozwiązanie zadania otwartego 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maks. liczba punktów	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**T., C.**	**C.**	**B., D.**	**P, P**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (0-2 pkt)

W pewnym sklepie od poniedziałku do piątku maliny są sprzedawane w 400-gramowych opakowaniach. W sobotę za tę samą cenę maliny są sprzedawane w opakowaniach o 25% większych. Oblicz, o ile procent tańsze są maliny w sobotę.

I sposób

Uczeń:	
1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania. x - cena malin od poniedziałku do piątku $\frac{x}{400}$ – cena 1 g malin od poniedziałku do piątku $\frac{x}{500}$ - cena 1 g malin w sobotę	1p.
2. Oblicza, o ile procent tańsze są maliny w sobotę i podaje odpowiedź. Nowa cena stanowi $\frac{x}{500} : \frac{x}{400} = 0{,}8$ starej ceny, czyli 80%. Odpowiedź. Maliny w sobotę są o 20% tańsze.	1p.

II sposób

Uczeń: 1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania. x - cena malin od poniedziałku do piątku $\frac{x}{4}$ – cena 100 g malin od poniedziałku do piątku $\frac{x}{5}$ - cena 100 g malin w sobotę	1p.
2. Oblicza, o ile procent tańsze są maliny w sobotę i podaje odpowiedź. Różnica cen za 400 g malin to $\left(\frac{x}{4}-\frac{x}{5}\right)\cdot 4=\frac{x}{5}$, czyli 20% ceny od poniedziałku do piątku. Odpowiedź. Maliny w sobotę są o 20% tańsze.	1p.

III sposób

Uczeń: 1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania. x - cena za 400 g malin od poniedziałku do piątku x - cena za 500 g malin w sobotę	1p.
2. Oblicza, o ile procent tańsze są maliny w sobotę i podaje odpowiedź. Cena za 400 g malin w sobotę to 80% x. Odpowiedź. Maliny w sobotę są o 20% tańsze.	1p.

Uwaga. Jeśli uczeń przyjmie konkretną cenę malin np. 10 zł i przedstawi poprawne i pełne rozwiązanie, to otrzymuje 2 punkty.

Zadanie 6. **(0-2 pkt)**

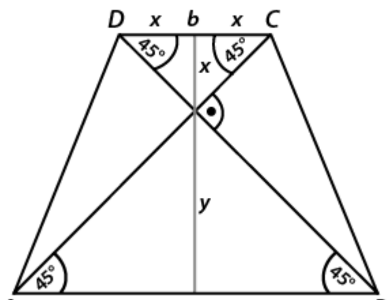
Wśród ośmiu różnych i dowolnych liczb naturalnych żadna nie jest podzielna przez 5, natomiast różnica między największą a najmniejszą liczbą wynosi 8. Uzasadnij, że suma tych ośmiu liczb jest podzielna przez 5 i przez 8.

Uczeń:	
1. Zapisuje w postaci wyrażeń algebraicznych osiem dowolnych liczb niepodzielnych przez 5, wśród których różnica między największą a najmniejszą liczbą wynosi 8. $5x+1,\quad 5x+2,\quad 5x+3,\quad 5x+4,\quad 5x+6,\quad 5x+7,\quad 5x+8,\quad 5x+9,$ gdzie x – liczba naturalna.	1p.
2. Uzasadnia, że ich suma jest podzielna przez 5 i 8. $5x+1+5x+2+5x+3+5x+4+5x+6+5x+7+5x+8+$ $+5x+9=40x+40=40(x+1)=8\cdot 5\cdot (x+1)$	1p.

Zadanie 7. (0-3 pkt)

Uzasadnij, że pole trapezu równoramiennego o wysokości h, w którym przekątne są prostopadłe jest równe polu kwadratu, którego bok ma długość równą wysokości tego trapezu.

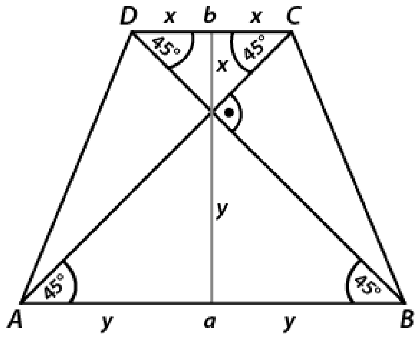
I sposób

Uczeń:	
1. Wykonuje analizę zadania np. w postaci rysunku.  	1p.
2. Zapisuje zależności między długościami odcinków w trapezie. $\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}b=x+y=h$, więc $a+b=2h$	1p.
3. Wyznacza pole trapezu. $P=\frac{(a+b)\cdot h}{2}$, zatem $P=\frac{2h\cdot h}{2}=h^2$	1p.

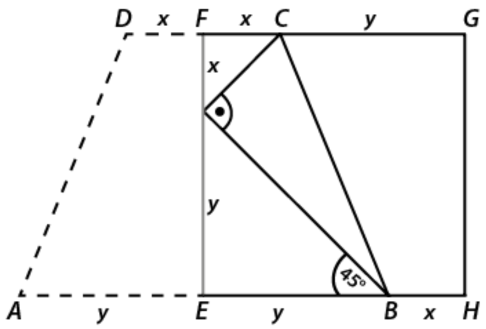
II sposób

Uczeń:

1. Wykonuje analizę zadania np. w postaci rysunku. 1p.



2. Zauważa, że po rozcięciu trapezu wzdłuż wysokości i ułożeniu otrzymanych części tak, jak na poniższym rysunku, otrzymamy prostokąt *EFGH* o polu równym polu wyjściowego trapezu. 1p.

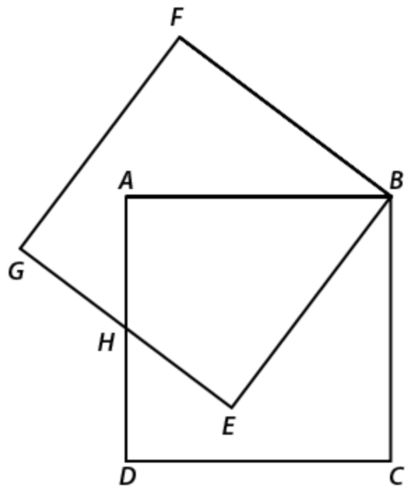


3. Uzasadnia, że otrzymany prostokąt *EFGH* jest kwadratem, którego długość boku jest równa wysokości trapezu. 1p.

$$|EF| = |FG| = |GH| = |HE| = x + y = h$$

Zadanie 8. (0-3 pkt)

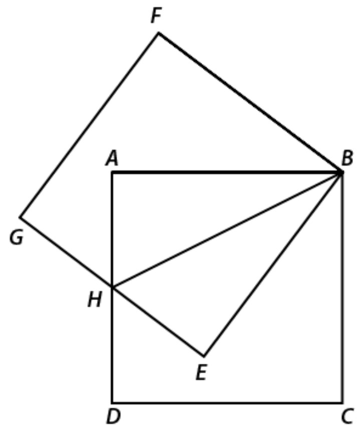
Na rysunku boki kwadratów *ABCD* i *BEGF* są jednakowej długości, a punkt *H* jest środkiem odpowiednich boków tych kwadratów. Oblicz, ile razy pole sześciokąta *BCDHGF* jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów.



I sposób

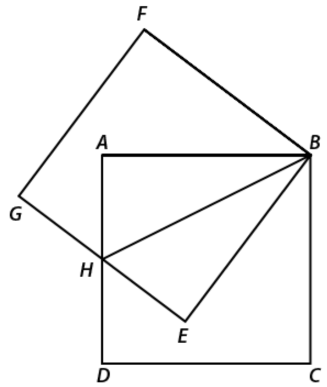
Uczeń:	
1. Przyjmuje oznaczenie długości boku kwadratu i zapisuje jego pole oraz oblicza pole czworokąta *ABEH*.	1p.
$2a$ – długość boku kwadratu	
$P_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$	
$P_{ABEH} = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot 2a = 2a^2$	
2. Uzasadnia, że pola czworokąta *ABEH* i pięciokąta *HGFBA* są równe.	1p.
$P_{HGFBA} = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2 = P_{ABEH}$	
3. Oblicza, ile razy pole sześciokąta *BCDHGF* jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów i podaje odpowiedź.	1p.
$P_{BCDHGF} = 3 \cdot 2a^2$	
$\frac{3 \cdot 2a^2}{4a^2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$	
Odpowiedź. Pole sześciokąta *BCDHGF* jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.	

II sposób

Uczeń: 1. Uzasadnia, że pole każdego z przystających trójkątów *ABH* i *BEH* stanowi $\frac{1}{4}$ pola kwadratu *ABCD*.  $2a$ – długość boku kwadratu *ABCD* $P_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$ $P_{ABH} = P_{BEH} = \frac{2a \cdot a}{2} = a^2$	1p.
2. Uzasadnia, że pole czworokąta *BCDH* stanowi $\frac{3}{4}$ pola każdego z rozważanych kwadratów. $P_{BCDH} = P_{ABCD} - P_{ABH} = 4a^2 - a^2 = 3a^2$ $\frac{P_{BCDH}}{P_{ABCD}} = \frac{3a^2}{4a^2} = \frac{3}{4}$	1p.
3. Uzasadnia, że pole sześciokąta *BCDHGF* jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza. $P_{BCDHGF} = 2P_{BCDH}$ $\frac{P_{BCDHGF}}{P_{ABCD}} = 2 \cdot \frac{3}{4} = 1{,}5.$ Odpowiedź. Pole sześciokąta *BCDHGF* jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.	1p.

III sposób

Uczeń:



1. Uzasadnia, że pole każdego z przystających trójkątów *ABH* i *BEH* stanowi $\frac{1}{4}$ pola kwadratu *ABCD*. 1p.

$2a$ – długość boku kwadratu *ABCD*

$P_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$

$P_{ABH} = P_{BEH} = \dfrac{2a \cdot a}{2} = a^2$

2. Oblicza pole czworokąta *ABEH* i szukanego sześciokąta.

$P_{ABEH} = 2P_{ABH} = 2a^2$ 1p.

$P_{BCDHGF} = 2P_{ABCD} - P_{ABEH} = 8a^2 - 2a^2 = 6a^2$

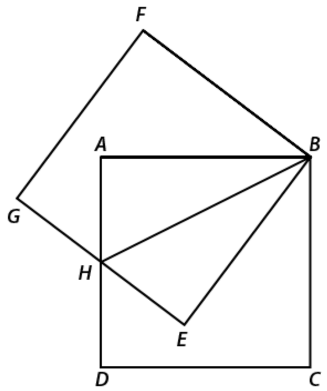
3. Uzasadnia, że pole sześciokąta *BCDHGF* jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.

$\frac{6a^2}{4a^2} = \frac{3}{2} = 1{,}5$ 1p.

Odpowiedź. Pole sześciokąta *BCDHGF* jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.

IV sposób

Uczeń:



1. Przyjmuje, że bok kwadratu ma długość 1, więc jego pole jest równe 1 oraz stwierdza, że pole każdego z przystających trójkątów *ABH* i *BEH* stanowi $\frac{1}{4}$ pola kwadratu *ABCD*, czyli jest równe $\frac{1}{4}$. 1p.

2. Stwierdza, że pięciokąty *BCDHE* oraz *ABFGH* mają pole równe $\frac{1}{2}$. 1p.

3. Uzasadnia, że pole sześciokąta *BCDHGF* jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza. 1p.

$\frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4}}{1} = 1{,}5$

Odpowiedź. Pole sześciokąta *BCDHGF* jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Różnica dwóch liczb naturalnych jest równa 32, a ich iloraz wynosi 2 i reszty 6. Co to za liczby? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania i zapisuje zależności między nimi. x – większa liczba, y – mniejsza liczba $x - y = 32$ oraz $x : y = 2$ r 6	1p.
2. Zapisuje liczbę x w postaci $x = y \cdot q + r$ i układa równanie z jedną niewiadomą. $x = 2y + 6$ $2y + 6 - y = 32$	1p.
3. Rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź. $y + 6 = 32$ $y = 26$, więc $x = 58$ Odpowiedź. Tymi liczbami są: 58 i 26.	1p.

Zadanie 10. (0-3 pkt)

Zosia skleiła wszystkie możliwe modele prostopadłościanów, których długości krawędzi są liczbami naturalnymi, natomiast jedna ze ścian każdego z tych prostopadłościanów ma pole równe 12, a druga 30. Ile modeli prostopadłościanów wykonała Zosia i jakie są ich objętości? Odpowiedź uzasadnij.

I sposób

Uczeń: 1. Przyjmuje oznaczenia długości krawędzi prostopadłościanu i zapisuje pola jego różnych ścian. x, y, z – długości krawędzi xy, yz, xz – pola ścian	1p.
2. Zapisuje rozumowanie, mające na celu ustalenie możliwych wymiarów prostopadłościanu.	1p.

Jeśli $xy = 12$ i $yz = 30$ to $x = \frac{12}{y}$, $z = \frac{30}{y}$, więc y jest wspólnym dzielnikiem 12 i 30, zatem $y = 1$ lub 2, lub 3, lub 6 i odpowiednio $x = 12$ lub 6, lub 4, lub 2 $z = 30$ lub 15, lub 10, lub 5 3. Uzasadnia, liczbę modeli prostopadłościanów, które wykonała Zosia i oblicza ich objętości. Zosia wykonała 4 modele prostopadłościanów o wymiarach $1\times12\times30$, $2\times6\times15$, $3\times4\times10$, $6\times2\times5$, a ich objętości wynoszą 360, 180, 120, 60. *Uwaga. Za rozwiązanie zadania, w którym uczeń poda trzy możliwe wymiary prostopadłościanów wraz z poprawnie obliczonymi objętościami należy przyznać 2 punkty, natomiast jeśli rozpatrzy co najwyżej dwa przypadki, to otrzymuje 1 punkt.*	1p.

II sposób

Uczeń:	
1. Przyjmuje oznaczenia długości krawędzi prostopadłościanu i zapisuje pola jego różnych ścian. x, y, z – długości krawędzi xy, yz, xz – pola ścian	1p.
2. Zapisuje rozumowanie, mające na celu ustalenie możliwych wymiarów prostopadłościanu. Jeśli $xy = 12$ i $yz = 30$ to $\frac{xy}{yz} = \frac{12}{30}$ zatem $\frac{x}{z} = \frac{2}{5}$	1p.
Gdy $x = 2$, wówczas $z = 5$, $y = 6$. Gdy $x = 4$, wówczas $z = 10$, $y = 3$. Gdy $x = 6$, wówczas $z = 15$, $y = 2$. Gdy $x = 8$, wówczas $z = 20$, y – nie jest liczbą całkowitą. Gdy $x = 10$, wówczas $z = 25$, y – nie jest liczbą całkowitą. Gdy $x = 12$, wówczas $z = 30$, $y = 1$.	1p.

3. Uzasadnia, liczbę modeli prostopadłościanów, które wykonała Zosia i oblicza ich objętości. Zosia wykonała 4 modele prostopadłościanów o wymiarach 12×1×30, 6×2×15, 4×3×10, 2×6×5, a ich objętości wynoszą 360, 180, 120, 60. *Uwaga. Za rozwiązanie zadania, w którym uczeń poda trzy możliwe wymiary prostopadłościanów wraz z poprawnie obliczonymi objętościami należy przyznać 2 punkty, natomiast jeśli rozpatrzy co najwyżej dwa przypadki, to otrzymuje 1 punkt.*	

III sposób

Uczeń:	
1. Rozkłada liczby 12 i 30 na czynniki pierwsze. $12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$ $30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$	1p.
2. Zauważa, że wspólna krawędź dwóch ścian o polach 12 i 30 może mieć długość: 1, 2, 3 lub 6.	1p.
3. Ustala wymiary modeli prostopadłościanów, które wykonała Zosia i oblicza ich objętości. Zosia wykonała 4 modele prostopadłościanów o wymiarach 1×12×30, 2×6×15, 3×4×10, 6×2×5, a ich objętości wynoszą 360, 180, 120, 60. *Uwaga. Za rozwiązanie zadania, w którym uczeń poda trzy możliwe wymiary prostopadłościanów wraz z poprawnie obliczonymi objętościami należy przyznać 2 punkty, natomiast jeśli rozpatrzy co najwyżej dwa przypadki, to otrzymuje 1 punkt.*	1p.