KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów gimnazjów oraz oddziałów gimnazjalnych województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2018/2019

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 5 do zad.12) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maks. liczba punktów	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**A**	**C**	**B**	**B**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

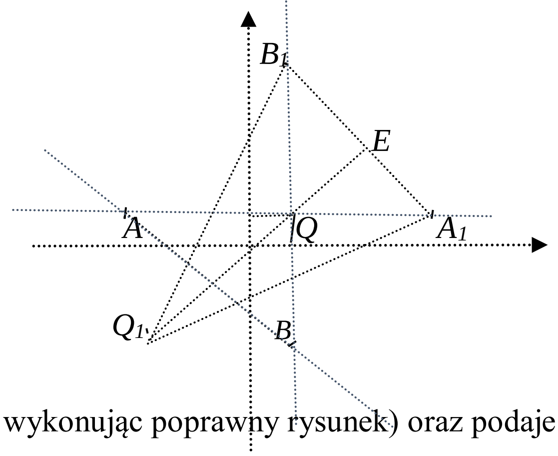
Zadanie 5. (2 pkt)

Trzy pompy mają opróżnić basen. Pierwsza pompa samodzielnie opróżniłaby basen w ciągu 15 godzin, druga w ciągu 10 godzin, a trzecia w ciągu 9 godzin. Oblicz, czy trzy pompy pracujące jednocześnie zdążą opróżnić ten basen w ciągu 3 godzin.

Uczeń: *I sposób* 1. wprowadza oznaczenia i układa równanie (zależność) zgodne z warunkami zadania, np.: x – liczba godzin potrzebna do opróżnienia basenu przez wszystkie trzy pompy, pojemność basenu przyjmujemy 1. ilość wody wypompowana przez poszczególne pompy w ciągu jednej godziny: I pompa: $\frac{1}{15}x$, II pompa: $\frac{1}{10}x$, III pompa: $\frac{1}{9}x$ 2. rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź $\frac{1}{15}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{9}x = 1$ $25x = 90$ stąd $x = 3{,}6$ Odp. Trzy pompy **nie zdążą** opróżnić basenu w ciągu 3 godzin. *II sposób* 1. oblicza ilość wody usuniętej przez wszystkie 3 pompy w ciągu 1 godziny $\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{9}=\frac{25}{90}$ 2. oblicza ilość wody usuniętej przez wszystkie 3 pompy w ciągu 3 godzin $\left(\frac{75}{90}\right)$ i wnioskuje, że jest to za mało. Odp. Trzy pompy **nie zdążą** opróżnić basenu w ciągu 3 godzin.	1p. 1p.

Zadanie 6. (2 pkt)

Dany jest trójkąt QAB, gdzie $A = (-5,1)$, $B = (1,-5)$ i $Q = (1,1)$. Punkt A_1 jest obrazem punktu A w symetrii osiowej względem prostej QB, punkt B_1 jest obrazem punktu B w symetrii osiowej względem prostej QA oraz punkt Q_1 jest obrazem punktu Q w symetrii osiowej względem prostej AB. Oblicz pole trójkąta $Q_1A_1B_1$.

Uczeń:  1. analizuje warunki zadania (np. wykonując poprawny rysunek) oraz podaje współrzędne punktów: A_1=(7,1), B_1 =(1,7), Q_1 =(-5, -5);	1p.
2. zauważa, że w trójkącie $A_1B_1Q_1$ wysokość Q_1E stanowi 1,5 długości przekątnej kwadratu $AQBQ_1$ ($\|QE\| = \frac{1}{2}\|Q_1Q\|$), zaś podstawa A_1B_1 trójkąta A_1B_1Q równa jest przekątnej tego kwadratu ($\|A_1B_1\| = \|AB\|$). Oblicza pole trójkąta $A_1B_1Q_1$. Odp. Pole trójkąta $A_1B_1Q_1$ jest równe 54.	1p.

Zadanie 7. (2 pkt)

Stosunek mas trzech różnych stopów srebra wynosi 7 : 10 : 18, natomiast stosunek mas czystego srebra zawartego w tych stopach równa się odpowiednio 7 : 9 : 12. Po stopieniu wszystkich kawałków otrzymano 350 gramów stopu, w którym czyste srebro stanowi 72% jego masy. Oblicz, w którym stopie jest największa procentowa zawartość srebra.

Uczeń: *I sposób* 1. oblicza masy trzech różnych stopów: $7x + 10x + 18x = 350$, $35x = 350$, $x = 10$ I stop $7\cdot 10 = 70$ *g*, II stop $10\cdot 10= 100$ *g*, III stop $18\cdot 10 = 180$ *g* (masy stopów);	1p.
2. oblicza masy srebra w poszczególnych stopach: $7y + 9y +12y = 0{,}72\cdot 350$ czyli $7y + 9y +12y =252$ stąd $28y= 252$ zatem $y = 9$ I stop $7\cdot 9 = 63$ *g*, II stop $9\cdot 9 = 81$ *g*, III stop $12\cdot 9 = 108$ *g* (masa srebra w stopach) i oblicza procent srebra w poszczególnych stopach. W I stopie jest 90% srebra, w II stopie jest 81% srebra, w III stopie jest 60% srebra. Odp. Największa procentowa zawartość srebra jest w I stopie.	1p.

II sposób

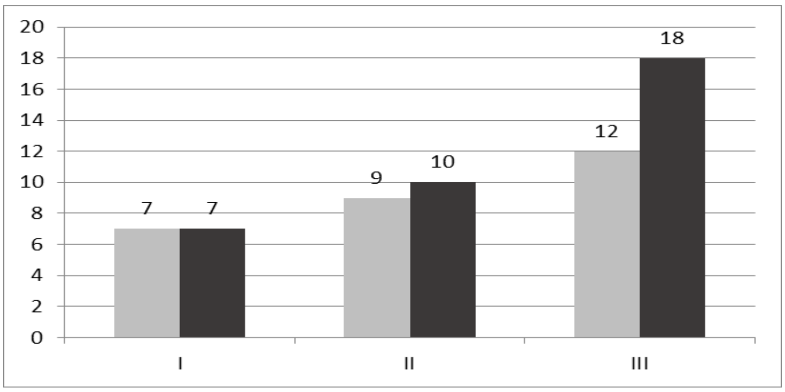
1. oblicza, że w I stopie jest $\frac{7}{35}=\frac{28}{140}$ ogólnej masy i $\frac{7}{28}=\frac{35}{140}$ ogólnego srebra, a stosunek tych ułamków (*masy srebra* do *ogólnej masy*) to $\frac{35}{28}$. Analogicznie oblicza, że w II stopie jest $\frac{10}{35}=\frac{40}{140}$ ogólnej masy oraz $\frac{9}{28}=\frac{45}{140}$ masy srebra, a stosunek tych ułamków to $\frac{45}{40}$, zaś w III stopie jest $\frac{18}{35}=\frac{72}{140}$ ogólnej masy i $\frac{12}{28}=\frac{60}{140}$ masy srebra, a stosunek tych ułamków to $\frac{60}{72}$;

2. stwierdza, że w trzecim stopie stosunek ułamków jest mniejszy niż 1, a w pozostałych stopach większy (bo I stop: $\frac{35}{28}>1$, II stop: $\frac{45}{40}>1$, III stop: $\frac{60}{72}<1$) oraz wnioskuje stąd, że <u>w I stopie jest najwięcej srebra</u> (bo $\frac{350}{280}>\frac{315}{280}$).

Odp. Największa procentowa zawartość srebra jest w I stopie.

III sposób

1. analizuje graficznie treść zadania np. rysuje diagram słupkowy danych {7,7}, {9, 10}, {12,18}



tj. I stop: słupek srebra wysokości 7 i obok słupek wysokości 7,

II stop: słupek srebra wysokości 9 i obok słupek wysokości 10,

III stop: słupek srebra wysokości 12 i obok słupek wysokości 18.

2. wnioskuje na podstawie diagramu, gdzie jest najwięcej srebra oraz zapisuje odpowiedź.

Odp. Największa procentowa zawartość srebra jest w I stopie.

Zadanie 8. (2 pkt)

Pewna liczba całkowita dodatnia przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 2. Znajdź resztę z dzielenia tej liczby przez 30.

Uczeń: 1. oznacza liczbę całkowitą dodatnią np. przez x i przedstawia ją w postaci: $x = 5a + 3$ stąd $6x = 30a + 18$ oraz $x = 6b + 2$ stąd $5x = 30b + 10$ (a, b – są to liczby całkowite dodatnie); 2. oblicza różnicę $6x - 5x = 30a + 18 - (30b + 10)$, stąd $x = 30(a - b) + 8$, wnioskuje, że reszta z dzielenia tej liczby przez 30 jest równa 8. Odp. Reszta z dzielenia tej liczby przez 30 jest równa 8.	 1p. 1p.

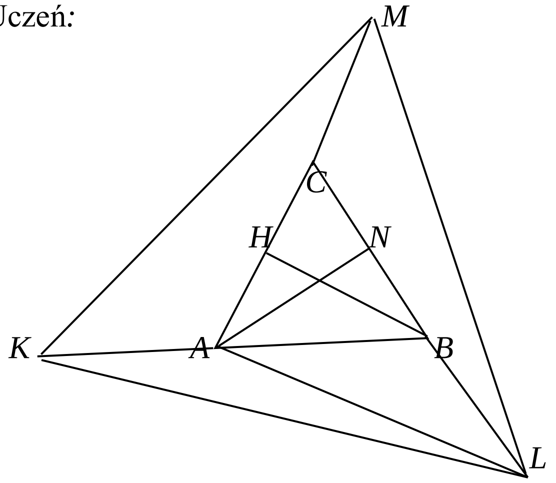
Zadanie 9. (2 pkt)

Z walca o średnicy podstawy równej 8 cm i wysokości 21 cm wycięto stożek o promieniu podstawy równym 3 cm i wysokości 14 cm. Oblicz, czy z pozostałej części walca można utworzyć kulę o średnicy równej 12 cm. Przyjmij, że liczba π jest w przybliżeniu równa $3\frac{1}{7}$.

Uczeń: 1. oblicza objętość walca $V_w = 1056$ cm^3 oraz objętość stożka $V_s = 132$ cm^3; 2. oblicza różnicę objętości walca i stożka $V_w - V_s = V_k = 924$ cm^3. Oblicza objętość kuli o promieniu 6 cm i porównuje wynik z objętością $V_k = 924$ cm^3 ($924 > 905$) oraz podaje odpowiedź. Odp. Z pozostałej części walca można utworzyć kulę o średnicy równej 12 cm.	 1p. 1p.

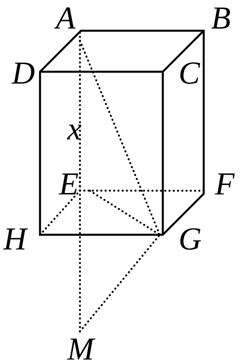
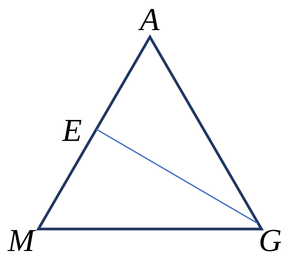
Zadanie 10. (2 pkt)

Pole trójkąta równobocznego ABC jest równe 4 cm^2. Punkty K, L, M leżą odpowiednio na prostych AB, BC, AC w taki sposób, że punkt A jest środkiem odcinka KB, punkt B jest środkiem odcinka CL, punkt C jest środkiem odcinka AM. Oblicz pole trójkąta KLM.

Uczeń*:* 	
1. uzasadnia, że ΔABL jest równoramienny ($\lvert AB\rvert = \lvert BC\rvert = \lvert BL\rvert$, bo ΔABC jest równoboczny) zatem ΔCLA i ΔMLA są prostokątne ($\lvert\sphericalangle LAC\rvert = \lvert\sphericalangle LAM\rvert = 60^o + 30^o = 90^o$). Wnioskuje, że $P_{\Delta ABC} = P_{\Delta ABL} = 4\ cm^2$, więc $P_{\Delta ALC} = P_{\Delta MCL} = 8\ cm^2$;	1p.
2. analogicznie stwierdza, że $P_{\Delta MCL} = P_{\Delta KBL} = P_{\Delta AMK} = 8\ cm^2$. Oblicza pole trójkąta *KLM* jako sumę pól trójkątów: $P_{\Delta MCL} + P_{\Delta KBL} + P_{\Delta AMK} + P_{\Delta ABC} = 8 + 8 + 8 + 4$ Odp. Pole trójkąta *KLM* jest równe 28 cm^2.	1p.

Zadanie 11. (2 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną jego podstawy, wychodzącymi z jednego wierzchołka, jest równy 30°. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli krawędź jego podstawy jest równa 10.

Uczeń*:*  	
1. zauważa, że krawędź boczna graniastosłupa jest połową boku trójkąta równobocznego *AGM*, a przekątna podstawy graniastosłupa *EG* jest wysokością tego trójkąta i oblicza krawędź boczną graniastosłupa $x = \lvert AE\rvert = 10\sqrt{\frac{2}{3}}$;	1p.
2. oblicza objętość graniastosłupa. Odp. $V = 1000\sqrt{\frac{2}{3}}$.	1p.

Zadanie 12. (2 pkt)

Wykaż, że nie istnieje para liczb całkowitych dodatnich spełniających równość: $3x^2 + 5y^2 = 360$.

Uczeń: *I sposób* 1. zauważa, że jeżeli x i y są dwiema liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $3x^2 + 5y^2 = 360$, to $x \leq 10$ (gdy $x \leq 10$ to $3x^2 < 360$, zaś dla $x = 11$, $3\cdot121 > 360$) i $y \leq 8$ (gdy $y \leq 8$ to $5y^2 < 360$, zaś dla $y = 9$, $5\cdot81 > 360$) a ponadto x dzieli się przez 5 (gdyż $3x^2 = 5(72 - y^2)$), zaś y dzieli się przez 3 (gdyż $5y^2 = 3(120 - x^2)$); 2. wyznacza pary (5,3), (5,6), (10,3), (10,6) mogące spełniać równość, następnie sprawdza i stwierdza, że **nie istnieje** całkowite dodatnie rozwiązanie tej równości.	1p. 1p.
II sposób 1. typuje $\boldsymbol{x \leq 10}$ (gdy $x \leq 10$ to $3x^2 < 360$, zaś dla $x = 11$, $3\cdot121 > 360$) i $\boldsymbol{y \leq 8}$ (gdy $y \leq 8$ to $5y^2 < 360$, zaś dla $y = 9$, $5\cdot81 > 360$) jako możliwy zakres rozwiązań; 2. sprawdza przypadki np. dla $y = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ oraz ustala i podaje odpowiedź, że **nie istnieje** całkowite dodatnie rozwiązanie tej równości.	