



## **MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA**

### **KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII**

### **UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO**

### **ETAP REJONOWY 2022/2023**

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

## **ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH**

<b>Nr zadania</b>	<b>1.</b>	<b>2.</b>	<b>3.</b>
<b>Maks. liczba punktów</b>	<b>0-1 pkt</b>	<b>0-1 pkt</b>	<b>0-1 pkt</b>
<b>Prawidłowa odpowiedź</b>	<b>P, P</b>	<b>A., C.</b>	<b>A., D.</b>

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

### Zadanie 4. (0-2 pkt)

Kolejne cyfry 2 a 3 4 b liczby pięciocyfrowej są różne. Liczba ta jest podzielna przez 36. Co to za liczba? Podaj wszystkie możliwości i uzasadnij odpowiedź.

*I sposób*

Uczeń:	
1. Zapisuje warunki jakie spełniają liczby $a$ oraz $b$ , korzystając z cech podzielności przez 4 i 9.	1p.
Tę liczbę można zapisać za pomocą iloczynu $9 \cdot 4 \cdot k$ , więc $a + b = 0$ lub $a + b = 9$ , lub $a + b = 18$ oraz $b = 0$ lub $b = 4$ , lub $b = 8$ .	
2. Eliminuje te warunki, które są sprzeczne z treścią zadania i podaje odpowiedź.	1p.
Gdy $a + b = 0$ , to $a = b = 0$ sprzeczność z warunkami zadania, podobnie gdy $a + b = 18$ , to $a = b = 9$ sprzeczność z warunkami zadania, również $b$ nie może być równe 4, bo już jest, zatem $a + b = 9$ oraz $b = 0$ lub $b = 8$ , stąd $a = 9$ lub $a = 1$ .	
Odpowiedź. Ta liczba to 21 348 lub 29 340.	

*Uwaga : Jeżeli uczeń oprócz liczb 29340, 21348 poda dodatkowo jedną spośród liczb 20340, 25344, to za całe zadanie otrzymuje 1 punkt.*

*II sposób*

Uczeń:	
1. Zapisuje warunki podzielności tej liczby przez 4.	1p.
Skoro liczba jest podzielna przez 36, to jest podzielna przez 4, więc dwie ostatnie cyfry mogą tworzyć liczby: 40, 44 (sprzeczne), 48.	
2. Uwzględnia warunki podzielności tej liczby przez 9 i podaje odpowiedź.	1p.
Skoro liczba jest podzielna przez 36, to jest podzielna przez 9, więc gdy dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 40, to $b = 0$ , $a = 9$ , a gdy tworzą liczbę 48, to $b = 8$ , $a = 1$ .	
Odpowiedź. Ta liczba to 29 340 lub 21 348.	

*Uwaga : Jeżeli uczeń oprócz liczb 29340, 21348 poda dodatkowo jedną spośród liczb 20340, 25344, to za całe zadanie otrzymuje 1 punkt.*

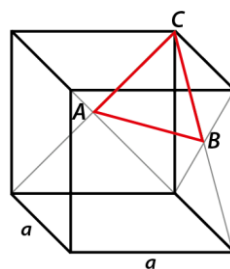
**Zadanie 5. (0-3 pkt)**

Punkty  $A$  i  $B$  są środkami dwóch sąsiednich ścian sześcianu o krawędzi  $a$ . Punkt  $C$  jest jednym ze wspólnych wierzchołków tych ścian sześcianu, na których leżą punkty  $A$  i  $B$ . Zapisz obwód trójkąta  $ABC$  za pomocą  $a$ .

*I sposób*

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku.



1p.

2. Uzupełnia rysunek i wyznacza długości odcinków  $AC$  i  $BC$ .

$a$  – długość boku sześcianu

Odcinki  $AC$  i  $BC$  mają długość równą połowie przekątnej ściany sześcianu, czyli są równe  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

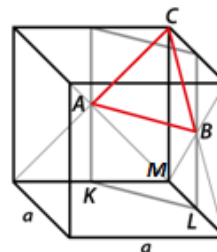
3. Wyznacza długość boku  $AB$  oraz zapisuje wyrażenie określające obwód otrzymanej figury.

$$|AB| = |KL|$$

Trójkąt  $KLM$  jest prostokątny i równoramienny, w którym

$$|LM| = |KM| = \frac{a}{2}, \text{ więc } |KL| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Zatem } L_{ABC} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$

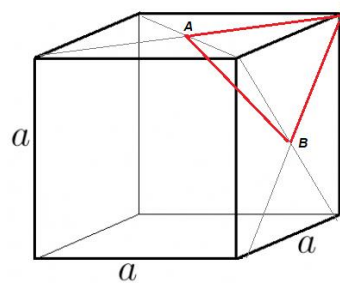


1p.

II sposób

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku.



1p.

2. Uzupełnia rysunek i wyznacza długości odcinków  $AC$  i  $BC$ .

1p.

$a$  – długość boku sześcianu

Odcinki  $AC$  i  $BC$  mają długość równą połowie przekątnej ściany sześcianu, czyli są równe  $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ .

3. Wyznacza długość boku  $AB$  oraz zapisuje wyrażenie określające obwód otrzymanej figury.

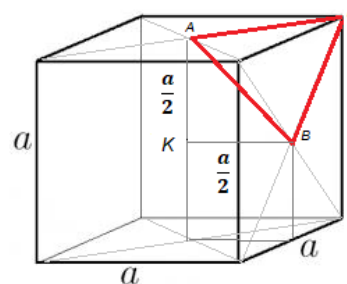
1p.

$$|AK| = |KB|$$

Trójkąt  $KAB$  jest prostokątny i równoramienny, którym

$$|KA| = |KB| = \frac{a}{2}, \text{ więc } |AB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}.$$

$$\text{Zatem } L_{ABC} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}.$$



**Zadanie 6. (0-3 pkt)**

Ośmiu zawodników zgłosiło się na Rowerowy Rajd, a wśród nich poprzedni triumfator Łukasz. Dwa dni przed zawodami Łukasz doznał kontuzji. Na jego miejsce pojechał dwukrotnie młodszy Wojtek. W związku z tym średnia wieku uczestników rajdu zmniejszyła się o 1 rok. Oblicz, ile lat ma Wojtek.

*I sposób*

Uczeń:	
1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania. $x$ – wiek Wojtki $y$ – suma wieku pozostałych uczestników	1p.
2. Układa równanie, korzystając z własności średniej arytmetycznej. $\frac{2x + y}{8} = \frac{x + y}{8} + 1$	1p.
3. Rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź. $2x + y = x + y + 8$ $x = 8$ Odpowiedź. Wojtek ma 8 lat.	1p.

*II sposób*

Uczeń:	
1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania. $s$ – łączny wiek uczestników przed zmianą $\frac{s}{8}$ – średnia wieku zawodników przed zmianą	1p.
2. Zapisuje średnią wieku zawodników po zmianie. $\frac{s}{8} - 1 = \frac{s}{8} - \frac{8}{8} = \frac{s-8}{8}$ , a więc jeśli średnia wieku uczestników zmniejszyła się o 1, to łączny wiek uczestników zmniejszył się o tyle, ilu jest zawodników.	1p.

<p>3. Oblicza, ile lat ma Wojtek.</p> <p>Ponieważ jest 8 zawodników, więc Wojtek jest o 8 lat młodszy od Łukasza.</p> <p>Jeśli przyjmiemy, że: <math>y</math> – wiek Łukasza, a <math>x</math> – wiek Wojtki, to</p> <p><math>y - x = 8</math> oraz <math>y = 2x</math>, więc <math>2x - x = 8</math>, zatem <math>x = 8</math></p> <p>Odpowiedź. Wojtek ma 8 lat.</p>	1p.
--	-----

### Zadanie 7. (0-3 pkt)

Pan Tomasz wyruszył w podróż samochodem o godzinie 9:15. Czwartą część trasy przejechał ze średnią prędkością 60 km/h, a pozostałą część drogi ze średnią prędkością 25 m/s. Do celu dotarł o 12:45. Oblicz długość trasy, którą przebył pan Tomasz oraz średnią prędkość na całej trasie.

*I sposób*

<p>Uczeń:</p> <p>1. Wyraża prędkości w jednakowych jednostkach i przeprowadza analizę treści zadania:</p> $25 \text{ m/s} = \frac{0,025 \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 90 \text{ km/h} \quad \text{lub} \quad 60 \text{ km/h} = 60 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 16 \frac{2}{3} \text{ m/s}$ <p><math>s</math> – przebyta droga [w km],</p> <p><math>t_1</math> – czas pierwszej części trasy [w h], <math>t_2</math> – czas drugiej części trasy [w h]</p> <p>2. Zapisuje zależności między drogą, czasem i prędkością na poszczególnych odcinkach trasy i wyznacza czas w postaci wyrażenia z niewiadomą <math>s</math>:</p> $\frac{0,25s}{t_1} = 60, \text{ więc } t_1 = \frac{0,25s}{60} = \frac{s}{240} \text{ [h]}, \quad \frac{0,75s}{t_2} = 90, \text{ więc } t_2 = \frac{0,75s}{90} = \frac{s}{120} \text{ [h]}$ <p>3. Oblicza średnią prędkość na całej trasie i długość trasy, jaką przebył pan Tomasz:</p> <p>Średnia prędkość na całej trasie:</p> $\frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{240} + \frac{s}{120}} = \frac{s}{\frac{s}{240} + \frac{2s}{240}} = \frac{s \cdot 240}{3s} = 80 \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]$ <p>Długość trasy:</p> $s = 80 \cdot 3,5 = 280 \text{ [km]}$ <p>Odpowiedź. Pan Tomasz przebył trasę równą 280 km ze średnią prędkością 80 km/h.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	----------------------------------

## II sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Wyznacza całkowity czas oraz wyraża prędkości w jednakowych jednostkach i przeprowadza analizę treści zadania:</p> <p><math>t = 12.45 - 9.15 = 3,5 \text{ h}</math></p> <p><math>25 \text{ m/s} = \frac{0,025 \text{ km}}{\frac{1}{3600} \text{ h}} = 90 \text{ km/h}</math>    <i>lub</i>    <math>60 \text{ km/h} = 60 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 16 \frac{2}{3} \text{ m/s}</math></p> <p><math>s</math> – przebyta droga [w km],</p> <p><math>t_1</math> – czas pierwszej części trasy [w h], <math>t_2</math> – czas drugiej części trasy [w h]</p> <p>2. Zapisuje zależności między drogą, czasem i prędkością na poszczególnych odcinkach trasy i wyznacza czas w postaci wyrażenia z niewiadomą <math>s</math>:</p> <p><math>\frac{0,25s}{t_1} = 60</math>, więc <math>t_1 = \frac{0,25s}{60} = \frac{s}{240} \text{ [h]}</math>, <math>\frac{0,75s}{t_2} = 90</math>, więc <math>t_2 = \frac{0,75s}{90} = \frac{s}{120} \text{ [h]}</math></p> <p>3. Oblicza długość trasy i średnią prędkość na całej trasie:</p> <p><math>3,5 = \frac{s}{240} + \frac{s}{120}</math></p> <p><math>3,5 = \frac{s}{240} + \frac{s}{120} \mid \cdot 10</math></p> <p><math>35 = \frac{s}{24} + \frac{s}{12}</math></p> <p><math>35 = \frac{s + 2s}{24} = \frac{s}{8}</math></p> <p><math>s = 35 \cdot 8 = 280 \text{ [km]}</math></p> <p>Średnia prędkość <math>v</math> na całej trasie:</p> <p><math>v = \frac{280}{3,5} = 80 \left[ \frac{\text{km}}{\text{h}} \right]</math></p> <p>Odpowiedź. Pan Tomasz przebył trasę równą 280 km ze średnią prędkością 80 km/h.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	----------------------------------

### Zadanie 8. (0-3 pkt)

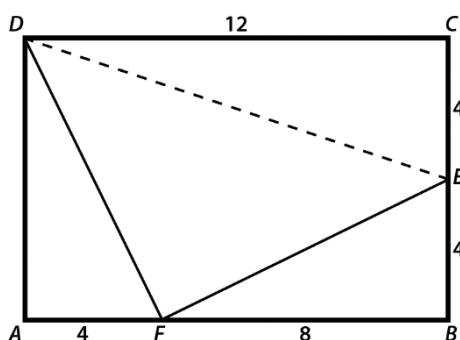
Boki prostokąta  $ABCD$  mają długości:  $|AB| = 12$ ,  $|BC| = 8$ . Punkt  $E$  dzieli bok  $BC$  na połowy, a punkt  $F$  dzieli bok  $AB$  w stosunku  $1 : 2$ . Wykaż, że trójkąt  $EFD$  jest prostokątny. Rozpatrz dwa przypadki.

*I sposób*

Uczeń:

1. Rozwiązuje I przypadek wyznacza długości boków trójkąta  $FED$  korzystając z twierdzenia Pitagorasa

1p.



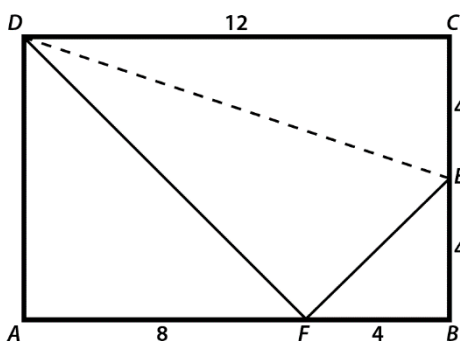
$$|FE| = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

$$|FD| = \sqrt{16 + 64} = \sqrt{80}$$

$$|DE| = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$$

2. Rozwiązuje II przypadek wyznacza długości boków trójkąta  $FED$  korzystając z twierdzenia Pitagorasa

1p.



$$|FE| = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$

$$|FD| = \sqrt{64 + 64} = \sqrt{128}$$

$$|DE| = \sqrt{144 + 16} = \sqrt{160}$$

3. Uzasadnia, że trójkąt  $EFD$  jest prostokątny, stosując twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa.

1p.

W obu przypadkach

$$|FE|^2 + |FD|^2 = |DE|^2$$

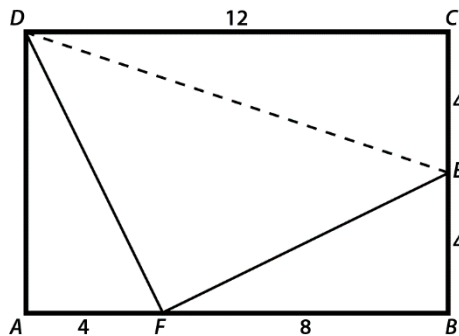
Zatem kąt  $EFD$  jest prosty.



II sposób

Uczeń:

1. Rozwiązuje I przypadek (różnoboczny)



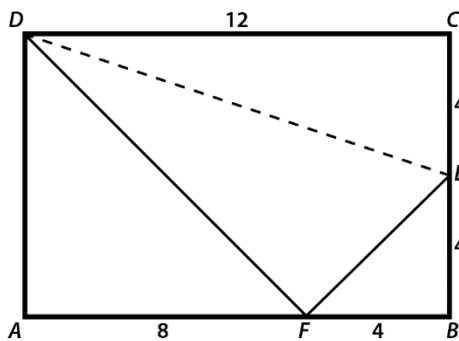
Zauważa, że trójkąty  $DAF$  i  $EBF$  są przystające.

$$|AD| = |FB| = 8$$

$$|AF| = |EB| = 4$$

$$|\angle DAF| = |\angle EBF| = 90^\circ$$

2. Rozwiązuje II przypadek (równoramienny)



Zauważa, że trójkąty  $DAF$  i  $EBF$  są prostokątne równoramienne,

$$|AD| = |AF| = 8$$

$$|BE| = |BF| = 4$$

kąty ostre w trójkątach  $DAF$  i  $EBF$  mają po  $45^\circ$ .  
więc  $|\angle AFD| = |\angle BFE| = 45^\circ$

3. Uzasadnia, że trójkąt  $EFD$  jest prostokątny.

I przypadek

$$|\angle DFE| = 180^\circ - (|\angle EFB| + 90^\circ - |\angle EFB|)$$

$$= 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

II przypadek

$$|\angle DFE| = 180^\circ - 2 \cdot 45^\circ = 90^\circ$$

1p.

1p.

1p.

### Zadanie 9. (0-3 pkt)

Graniastosłup prosty ma w podstawie romb o wysokości równej 4 cm. Kąt rozwarty rombu ma miarę pięć razy większą od miary kąta ostrego. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że pole podstawy graniastosłupa stanowi 20% pola jego powierzchni całkowitej.

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku .  
Analizuje podstawę (wyznacza kąta ostry rombu oraz długość boku rombu)

oblicza miarę kąta ostrego podstawy.

$\alpha$  – kąt ostry podstawy

$$\alpha + 5\alpha = 180^\circ$$

$$\alpha = 30^\circ$$

Zauważa, że trójkąt  $DAK$  jest połową trójkąta równobocznego, zatem  $|AD| = 8$  cm.  
Ponieważ podstawą graniastosłupa jest romb, więc  $|AB| = |AD| = 8$  cm.

2. Oblicza pole powierzchni całkowitej oraz pole jednej ściany tego graniastosłupa.

$$P_p = 8 \cdot 4 = 32 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_c = 32 \cdot 5 = 160 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_b = 160 - 2 \cdot 32 = 96 \text{ [cm}^2\text{]}$$

$$P_s = 96 : 4 = 24 = 8 \cdot h$$

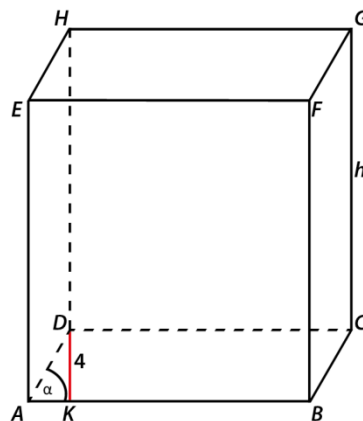
3. Oblicza wysokość graniastosłupa i objętość graniastosłupa i podaje odpowiedź.

$$P_s = 24 = 8 \cdot h$$

$$h = 3 \text{ cm}$$

$$V = P_p \cdot h = 32 \cdot 3 = 96 \text{ [cm}^3\text{]}$$

Odpowiedź. Objętość tego graniastosłupa jest równa  $96 \text{ cm}^3$ .



1p.

1p.

1p.