

## KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów klas IV-VIII szkół podstawowych  
województwa mazowieckiego  
w roku szkolnym 2019/2020

### Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 3 do zad. 11) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

### ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

| Nr zadania           | 1.    | 2.    |
|----------------------|-------|-------|
| Maks. liczba punktów | 1 pkt | 1 pkt |
| Prawidłowa odpowiedź | NB    | C     |

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

### Zadanie 3. (2 pkt)

Cyfrą dziesiątek liczby osiem razy większej od pewnej liczby dwucyfrowej jest 6,  
a cyfrą jedności liczby dziewięć razy większej od tej samej liczby dwucyfrowej jest 7.  
Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe spełniające opisane warunki. Odpowiedź uzasadnij.

*I sposób*

|  |                       |
|--|-----------------------|
| <p>Uczeń:</p> <p>1. Wprowadza oznaczenia i znajduje cyfrę jedności, np.:</p> <p><math>10a + b</math> - szukana liczba dwucyfrowa</p> $\begin{array}{r} \boxed{a} \boxed{b} \\ \cdot \quad 9 \\ \hline 7 \end{array}$ <p>stąd <math>b = 3</math>.</p> <p>2. Znajduje cyfrę dziesiątek i podaje odpowiedź. Np.</p> $\begin{array}{r} \quad 2 \\ \boxed{a} \boxed{3} \\ \cdot \quad 8 \\ \hline 6 \quad 4 \end{array}$ <p>stąd <math>a = 3</math> lub <math>a = 8</math>.</p> <p>Odpowiedź. Są dwie takie liczby 33 i 83.</p> | <p>1p.</p> <p>1p.</p> |
|--|-----------------------|

*II sposób*

|  |                       |
|--|-----------------------|
| <p>Uczeń:</p> <p>1. Zauważa, że jeśli pomnożymy dowolną liczbę przez 9 i w wyniku w rzędzie jedności otrzymamy 7, to cyfrą jedności szukanej liczby jest 3.</p> <p>2. Zapisuje wszystkie liczby dwucyfrowe, w których 3 jest cyfrą jedności: 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93 i wybiera z nich te, które spełniają warunki zadania oraz podaje odpowiedź.</p> <p>Są dwie takie liczby 33 i 83, bo <math>33 \cdot 8 = 264</math> i <math>33 \cdot 9 = 297</math> oraz <math>83 \cdot 8 = 664</math> i <math>83 \cdot 9 = 747</math></p> <p>Odpowiedź. Są dwie takie liczby 33 i 83.</p> | <p>1p.</p> <p>1p.</p> |
|--|-----------------------|

**Zadanie 4.** (2 pkt)

Wykaż, że liczba  $2^2 a (a^2 - 1) + \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot 4\sqrt{5} (a^2 - 1)$  jest podzielna przez 8, gdy  $a$  jest liczbą całkowitą.

|  |     |  |
|--|-----|--|
| Uczeń:   |     |  |
| 1. Przekształca wyrażenie $2^2 a (a^2 - 1) + \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot 4\sqrt{5} (a^2 - 1)$ do postaci $4a(a^2 - 1) + 8(a^2 - 1)$ oraz zauważa, że jeśli każda z dwóch liczb całkowitych dzieli się przez 8, to ich suma też dzieli się przez 8. Drugi składnik liczby $4a(a^2 - 1) + 8(a^2 - 1)$ dzieli się przez 8, zatem wystarczy wykazać, że pierwszy składnik dzieli się przez 8.   | 1p. |  |
| 2. Uzasadnia, że liczba $4a(a^2 - 1)$ dzieli się przez 8. Np.: liczba ta jest podzielna przez 4 oraz $4a(a^2 - 1) = 4a(a + 1)(a - 1)$ . Spośród liczb $a$ i $a + 1$ jedna musi być parzysta, bo są to kolejne liczby, więc iloczyn $a(a + 1)$ jest podzielny przez 2, zatem w rozkładzie na czynniki liczby $4a(a + 1)(a - 1)$ występują czynniki 2 i 4 ( $2 \cdot 4 = 8$ ), więc także dzieli się ona przez 8. Zatem dana liczba jest podzielna przez 8, co należało wykazać. | 1p. |  |

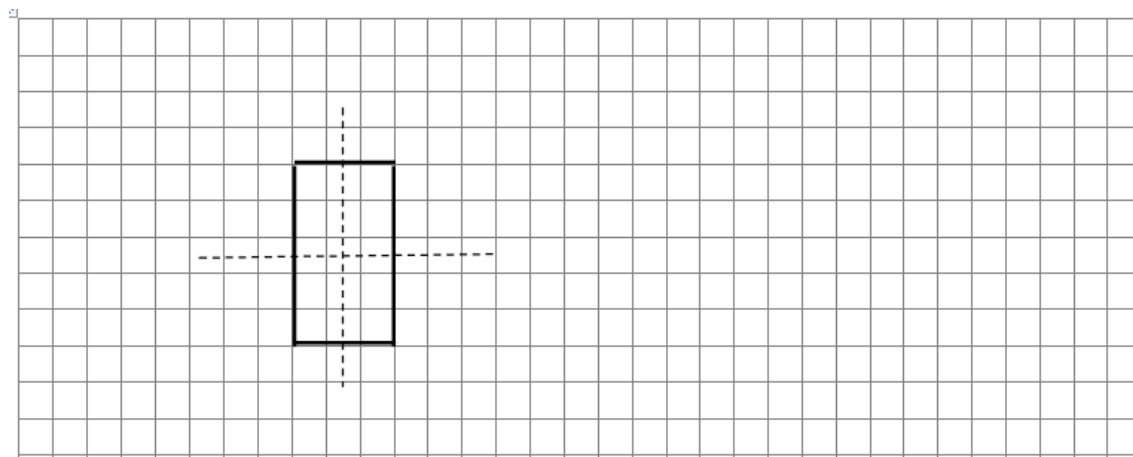
**Zadanie 5.** (2 pkt)

Jeśli zmniejszymy pewną liczbę naturalną  $x$  o 4, to zmniejszymy ją o więcej niż 11% jej wartości. Jeśli tę samą liczbę naturalną  $x$  powiększymy o 6, to powiększymy ją o mniej niż 17% jej wartości. Co to za liczba? Odpowiedź uzasadnij.

|  |     |  |
|--|-----|--|
| Uczeń:   |     |  |
| 1. Przyjmuje oznaczenia i zapisuje treść zadania w postaci nierówności. Np.<br>$x$ – liczba naturalna<br>$0,89x$ – liczba $x$ zmniejszona o 11%<br>$1,17x$ – liczba $x$ powiększona o 17%<br>$x - 4 < 0,89x$ i $x + 6 < 1,17x$   | 1p. |  |
| 2. Rozwiązuje nierówności i podaje odpowiedź. Np.<br>$x < \frac{400}{11}$ i $\frac{400}{11} \approx 36,4$<br>$x > \frac{600}{17}$ i $\frac{600}{17} \approx 35,3$<br>zatem $x = 36$ .<br>Odpowiedź. Tą liczbą naturalną jest 36. | 1p. |  |

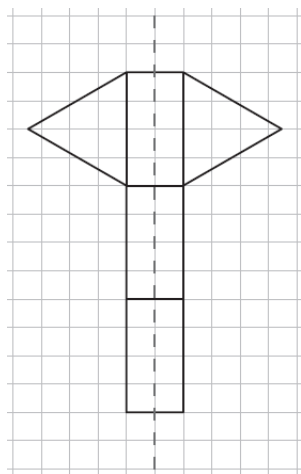
**Zadanie 6.** (2 pkt)

Na rysunku przedstawiono prostokąt i jego osie symetrii. Uzupełnij rysunek tak, aby powstała siatka graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, która ma tylko jedną oś symetrii. Przedstaw dwa różne rozwiązania.

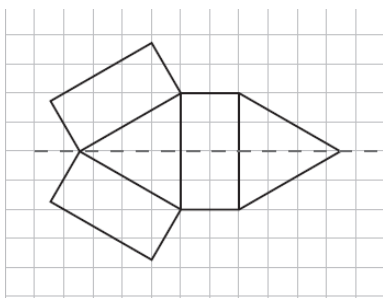


Uczeń:

1. Przedstawia jedno rozwiązanie, np.:



2. Przedstawia drugie rozwiązanie, np.:



1p.

1p.

**Zadanie 7.** (2 pkt)

Przygotowując obóz harcerski, zaplanowano, że pięciu harcerzy rozstawi wszystkie namioty w dwie godziny. Tymczasem drużyna harcerska przybyła na miejsce obozu na półtorej godziny przed zmierzchem. Ilu co najmniej harcerzy trzeba dobrać, aby rozbijanie namiotów trwało nie dłużej niż 1 godzinę i 15 minut?

Przyjmij, że każdy harcerz będzie pracował jednakowo wydajnie.

*I sposób*

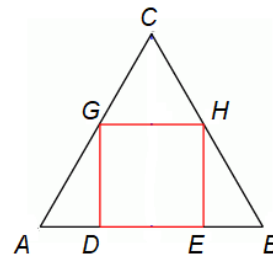
|  |                       |
|--|-----------------------|
| <p>Uczeń:</p> <p>1. Przyjmuje oznaczenia i zapisuje symbolicznie treść zadania rozpoznając wielkości odwrotnie proporcjonalne. Np.</p> <p><math>x</math> – liczba dodatkowych harcerzy</p> $\begin{array}{ccc} 5 & - & 2 \\ \downarrow & & \uparrow \\ x+5 & - & 1,25 \end{array}$ <p>2. Układa proporcję, rozwiązuje ją i podaje odpowiedź. Np.</p> $\frac{5}{x+5} = \frac{1,25}{2}$ <p>stąd <math>x = 3</math></p> <p>Odpowiedź. Do rozstawiania namiotów trzeba jeszcze wyznaczyć <u>co najmniej</u> trzech harcerzy.</p> | <p>1p.</p> <p>1p.</p> |
|--|-----------------------|

*II sposób*

|   |                       |
|---|-----------------------|
| <p>Uczeń:</p> <p>1. Na podstawie treści zadania zapisuje symbolicznie związek między podanymi wielkościami, pozwalający obliczyć minimalną liczbę harcerzy do wykonania tej pracy, np.: <math>\frac{x}{y} \cdot a</math>, gdzie <math>x</math> - zaplanowany czas pracy, <math>y</math> - czas pracy, w którym tę pracę trzeba wykonać, <math>a</math> - zaplanowana liczba harcerzy.</p> <p>2. Wykonuje obliczenia i podaje odpowiedź. Np.</p> $\frac{2}{1,25} \cdot 5 = \frac{10}{1,25} = \frac{1000}{125} = 8$ $8 - 5 = 3$ <p>Odpowiedź. Do rozstawiania namiotów trzeba jeszcze wyznaczyć <u>co najmniej</u> trzech harcerzy.</p> | <p>1p.</p> <p>1p.</p> |
|---|-----------------------|

**Zadanie 8.** (2 pkt)

Na rysunku trójkąt  $ABC$  jest równoboczny o boku długości  $\sqrt{3} + 2$ . Oblicz, o ile bok kwadratu  $DEHG$  jest krótszy od boku trójkąta  $ABC$ .



Uczeń:

1. Przyjmuje oznaczenie np.  $x$  na długość boku kwadratu. Uzasadnia, że trójkąt  $GHC$  jest równoboczny o boku długości  $x$  oraz trójkąty  $ADG$  i  $BEH$  są przystającymi trójkątami prostokątnymi o kątach ostrych  $30^\circ$  i  $60^\circ$  i są „połówkami” trójkąta równobocznego o wysokości  $x$ , a więc

$$x = |EB| \cdot \sqrt{3}, \text{ to } |EB| = \frac{x}{\sqrt{3}} = |AD|$$

2. Zapisuje, że  $|AB| = \frac{x}{\sqrt{3}} + x + \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2$ , więc  $x = \sqrt{3}$   $\left(x = \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}\right)$

oblicza różnicę długości boku trójkąta  $ABC$  i kwadratu  $DEHG$  i podaje odpowiedź.

$$\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2$$

Odpowiedź. Bok kwadratu  $DEHG$  jest o 2 krótszy od boku trójkąta  $ABC$ .

1p.

1p.

**Zadanie 9.** (2 pkt)

Liczby całkowite  $x$  i  $y$  spełniają warunek  $x > y$ . Wyniki działań:  $x + y$ ,  $x - y$ ,  $x \cdot y$ ,  $x : y$  zapisane w kolejności malejącej to: 18, 12,  $-5$ ,  $-45$ . Znajdź liczby  $x$  i  $y$ .

Uczeń:

1. Wykonuje poprawnie działania. Np.

$$(x + y) + (x - y) = 2x; \quad (x \cdot y) : (x : y) = x^2$$

2. Zapisuje, że  $x = 15$  lub  $x = -25$  (bo tylko  $18 + 12$  i  $-5 + (-45)$  są liczbami parzystymi) oraz że jedynym iloczynem dwóch liczb spośród: 18, 12,  $-5$ ,  $-45$ , który jest jednocześnie kwadratem liczby całkowitej jest  $(-5) \cdot (-45) = 225$ , zatem  $x = 15$ . Spośród liczb: 18, 12,  $-5$ ,  $-45$  tylko liczba  $-45$  jest podzielna przez 15, a więc  $y = -3$ .

Odpowiedź. Szukane liczby, to  $x = 15$  oraz  $y = -3$ .

1p.

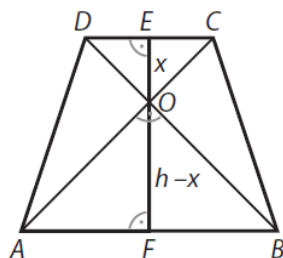
1p.

**Zadanie 10.** (2pkt)

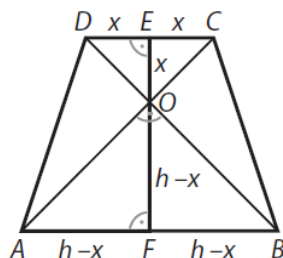
Uzasadnij, że pole trapezu równoramiennego o wysokości  $h$ , którego przekątne są prostopadłe, jest równe  $h^2$ .

Uczeń

1. Wykonuje poprawny rysunek (np. Rys. 1) i uzasadnia, że trójkąty:  $DEO$ ,  $CEO$ ,  $AFO$  i  $BFO$  są równoramienne. Np. kąty ostre tych trójkątów mają po  $45^\circ$  (Rys. 2).



Rys. 1



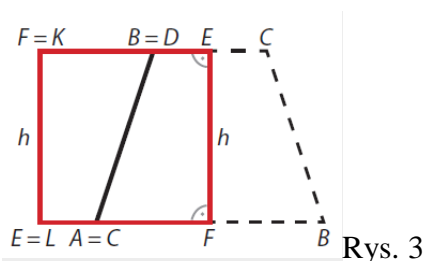
Rys. 2

2. Uzasadnia, że pole trapezu  $ABCD$  jest równe  $h^2$ . Np.

$$P = \frac{1}{2} (x + x + h - x + h - x) \cdot h = \frac{2h \cdot h}{2} = h^2, \text{ zatem } P = h^2$$

lub

Po rozcięciu trapezu wzdłuż  $EF$ , prawą połówkę, tj. trapez  $EFBC$  przykładamy do trapezu  $AFED$  i obracamy tak, by bok  $BC$  pokrył się z bokiem  $AD$  (Rys. 3)



Rys. 3

Otrzymaliśmy kwadrat o boku  $h$ , zatem  $P = h^2$ .

**Zadanie 11.** (2 pkt)

Czworokąt  $ABCD$  ma środek symetrii. Oblicz długość dłuższej przekątnej czworokąta  $ABCD$ , jeżeli  $A = (1, 0)$ ,  $B = (10, -9)$ ,  $C = (9, 6)$ .

*I sposób*

Uczeń:

1. Oblicza współrzędne środka  $S$  przekątnej  $AC$  (środka symetrii) oraz współrzędne punktu  $D = (x, y)$ . Np.

|   |     |
|---|-----|
| $S = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (5, 3)$ oraz $S = \left(\frac{10+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) = (5, 3)$ , stąd $x = 0$ , $y = 15$ ,<br>a więc $D = (0, 15)$ .<br>2. Oblicza długości przekątnych $AC$ i $BD$ oraz porównuje je. Podaje odpowiedź. Np.<br>$ AC  = \sqrt{(9-1)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$<br>$ BD  = \sqrt{(0-10)^2 + (-9-15)^2} = \sqrt{100+576} = \sqrt{676} = 26$<br>$ BD  >  AC $<br>Odpowiedź. Długość dłuższej przekątnej czworokąta $ABCD$ jest równa 26. | 1p. |
|---|-----|

*II sposób*

|   |     |
|---|-----|
| Uczeń:<br>1. Oblicza współrzędne środka $S$ przekątnej $AC$ (środka symetrii) oraz długość odcinka $BS$ . Np.<br>$S = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (5, 3)$ $ BS  = \sqrt{(5-10)^2 + (3+9)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ 2. Oblicza długości przekątnych $AC$ i $BD$ oraz porównuje je. Podaje odpowiedź. Np.<br>$ AC  = \sqrt{(9-1)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$<br>$ BD  = 2 \cdot  BS  = 26$<br>$ BD  >  AC $<br>Odpowiedź. Długość dłuższej przekątnej czworokąta $ABCD$ jest równa 26. | 1p. |
|---|-----|

*Uwaga. Jeśli uczeń przedstawi **poprawne i pełne** rozwiązanie zadania 11 metodą graficzną, to otrzymuje maksymalną liczbę punktów.*