MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP REJONOWY 2023/2024

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maks. liczba punktów	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**F, F**	**B., D.**	**A., D.**	**N-C.**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (0-2 pkt)

Wśród czterech kolejnych liczb naturalnych, z których najmniejsza jest parzysta, iloczyn dwóch liczb nieparzystych jest o 35 większy od iloczynu dwóch liczb parzystych. Oblicz średnią arytmetyczną tych czterech liczb.

I sposób

Uczeń: 1. Zapisuje te liczby w postaci wyrażeń, zapisuje równanie i rozwiązuje je. $2n, \quad 2n+1, \quad 2n+2, \quad 2n+3,$ $(2n+1)(2n+3)-35=2n(2n+2)$ $4n^2+6n+2n+3-35=4n^2+4n$ $4n=32,$ zatem $n=8$.	1p.
2. Podaje te liczby i oblicza ich średnią arytmetyczną. Te liczby to: 16, 17, 18, 19. Średnia arytmetyczna = $\frac{16+17+18+19}{4}=\frac{70}{4}=17{,}5$. *Uwaga. Jeśli uczeń najmniejszą z czterech liczb oznaczy jako n zamiast 2n i otrzyma rozwiązanie n = 16 oraz obliczy poprawnie średnią arytmetyczną, bez komentarza, że n jest liczbą parzysta, to otrzymuje maksymalną liczbę punktów.*	1p.

II sposób

Uczeń: 1. Zapisuje w postaci wyrażeń te liczby oraz ich średnią arytmetyczną np.: $n, \quad n+1, \quad n+2, \quad n+3,$ $\frac{n+n+1+n+2+n+3}{4} = \frac{4n+6}{4} = n+1{,}5.$	1p.
2. Układa równanie korzystając z warunków zadania, rozwiązuje je i oblicza średnią arytmetyczną. $(n+1)(n+3) - 35 = n(n+2)$ $n^2 + 3n + n + 3 - 35 = n^2 + 2n$ $2n = 32,$ stąd $n = 16.$ Średnia arytmetyczna to 16 + 1,5 $= 17{,}5$.	1p.

Zadanie 6. (0-2 pkt)

Na parkingu pewnej galerii handlowej ponumerowano miejsca kolejnymi liczbami naturalnymi zaczynając od 1. W tej numeracji 60 razy użyto cyfry 8. Oblicz, ile maksymalnie miejsc może być na tym parkingu.

Uczeń: 1. Przeprowadza analizę zadania, np. za pomocą następującego rozumowania: Od 1 do 79 jest 8 ósemek. Od 80 do 100 jest 12 ósemek, zatem w pierwszej setce jest 20 ósemek. Tak samo jest w drugiej i trzeciej setce, czyli razem w jest 60 ósemek.	1p.
2. Oblicza, ile maksymalnie miejsc może być na tym parkingu. Wyczerpano już wszystkie ósemki, ale nie będzie ósemki do numeru 307. Zatem na tym parkingu może być maksymalnie 307 miejsc.	1p.

Zadanie 7. (0-3 pkt)

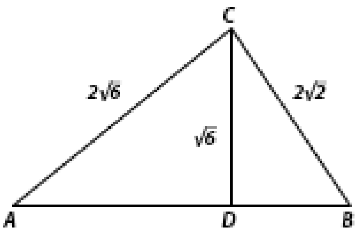
Dana jest prosta *AB*. Punkt *C* leży w odległości $\sqrt{6}$ od prostej *AB*, w odległości $2\sqrt{6}$ od punktu *A* oraz w odległości $2\sqrt{2}$ od punktu *B*. Wyznacz miarę kąta *ACB*. Rozważ wszystkie możliwości.

I sposób

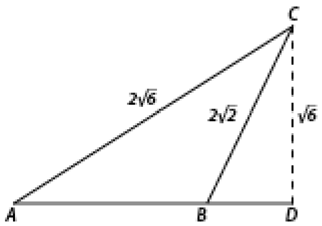
Uczeń:

1. Ustala możliwe położenia punktu *C*. — 1p.

I przypadek



II przypadek



2. Wyznacza miarę kąta *ACB* w I przypadku. — 1p.

Trójkąty *ADC* i *CDB* są prostokątne, stąd

$$|AD| = \sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{24-6} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2},$$

$$|BD| = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{8-6} = \sqrt{2},$$

$$|AB| = 4\sqrt{2},$$

$(AB)^2 = 32$ oraz $(AC)^2 + (BC)^2 = \left(2\sqrt{6}\right)^2 + \left(2\sqrt{2}\right)^2 = 24 + 8 = 32.$

Zatem kąt *ACB* jest prosty.

3. Wyznacza miarę kąta *ACB* w II przypadku. — 1p.

Trójkąt *ADC* jest połową trójkąta równobocznego, bo $|DC| = \frac{1}{2}|AC|$ oraz kąt *ADC* jest prosty. Zatem kąt *ACD* ma 60°, a kąt *BAC* 30°. Ponieważ

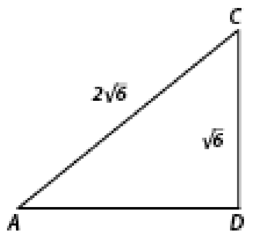
$|BD| = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{2}$ oraz $|AD| = \sqrt{\left(2\sqrt{6}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2} = 3\sqrt{2}$,

więc
$|AB| = 2\sqrt{2}$, zatem trójkąt *ABC* jest równoramienny, czyli kąt *ACB* ma 30°.

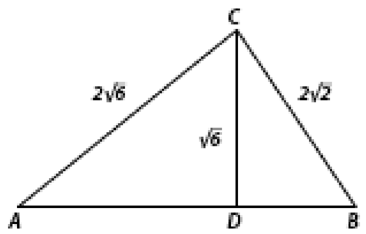
II sposób

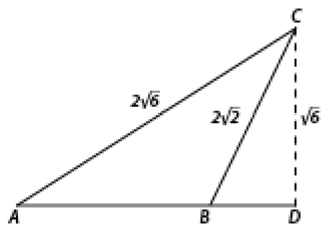
<table>
<tr><td>
Uczeń:

1. Rozpatruje trójkąt ACD, w którym odcinek CD jest odległością punktu C od prostej AB niezależnie od położenia punktu B.



Trójkąt ADC jest połową trójkąta równobocznego, bo $|DC| = \frac{1}{2}|AC|$ oraz kąt ADC jest prosty. Zatem kąt ACD ma 60°.





</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>
2. Rozpatruje trójkąt CBD niezależnie od położenia punktu B.

W trójkącie prostokątnym CBD (w obu przypadkach)

$|BD| = \sqrt{\left(2\sqrt{2}\right)^2 - \left(\sqrt{6}\right)^2} = \sqrt{8-6} = \sqrt{2}.$

Trójkąt BDC jest połową trójkąta równobocznego, bo $|BD| = \frac{1}{2}|BC|$ oraz kąt BDC jest prosty. Zatem kąt BCD ma 30°.
</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>
3. Wyznacza miarę kąta ACB w obu przypadkach.

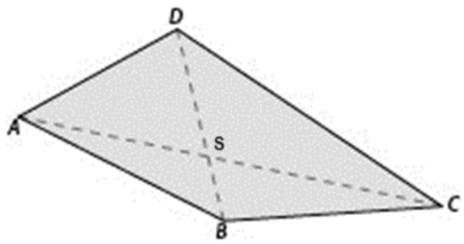
Trójkąt BDC może leżeć zarówno wewnątrz, jak i na zewnątrz trójkąta ADC, zatem kąt ACB ma odpowiednio miarę $60° + 30° = 90°$ lub $60° - 30° = 30°$.
</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 8. (0-3 pkt)

W czworokącie wypukłym przekątne przecinają się pod kątem $120°$ i dzielą go na cztery trójkąty o polach równych 15. Uzasadnij, że czworokąt jest równoległobokiem. Wykaż, że stosunek długości tych przekątnych wynosi $\frac{\sqrt{3}}{5}$, jeżeli krótsza przekątna ma długość $4\sqrt{3}$.

Uczeń:

1. Uczeń uzasadnia, że opisany czworokąt jest równoległobokiem. 1p.

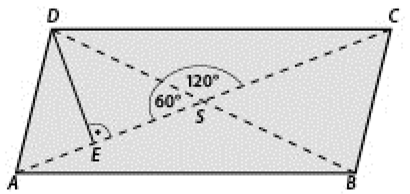


Zauważa, że $P_{ABD} = P_{ABS} + P_{ASD} = 30$ oraz $P_{ABC} = P_{ABS} + P_{BCS} = 30$.
Ponieważ trójkąty *ABD* i *ABC* mają wspólną podstawę *AB* oraz równe pola to ich wysokości są tej samej długości. Zatem punkty *C* i *D* leżą w tej samej odległości od odcinka *AB*, czyli odcinki *AB* i *CD* są równoległe.

Analogicznie w trójkątach *ABC* i *DBC*. Zatem odcinki *AD* i *BC* są równoległe.

Czworokąt *ABCD* jest równoległobokiem co było do uzasadnienia.

2. Oblicza długość dłuższej przekątnej równoległoboku. 1p.



$|DS| = 2\sqrt{3}$

$|DE| = \frac{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}{2} = 3,$ jako wysokość trójkąta równobocznego o boku *DS*.

$P_{ACD} = \frac{|AC|\cdot 3}{2} = 30$

$|AC| = \frac{60}{3} = 20$

3. Oblicza stosunek długości przekątnych. $\frac{\lvert AC \rvert}{\lvert DB \rvert} = \frac{20}{4\sqrt{3}} = \frac{5}{\sqrt{3}}$ lub $\frac{\lvert DB \rvert}{\lvert AC \rvert} = \frac{4\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{5}$ co należało wykazać.	1p.

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Oblicz, dla jakich liczb całkowitych *x*, liczba $x^2 + 12x + 15$ jest kwadratem liczby 10.

I sposób

Uczeń:	
1. Przekształca dane wyrażenie do innej postaci, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia np.: $x^2 + 12x + 15 = x^2 + 12x + 36 - 21 = (x + 6)^2 - 21.$	1p.
2. Zapisuje równanie i przekształca je w postać iloczynową, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia. $(x + 6)^2 - 21 = 100$ $(x + 6)^2 - 11^2 = 0$ $(x + 6 + 11)(x + 6 - 11) = 0$ $(x + 17)(x - 5) = 0.$	1p.
3. Rozwiązuje równanie i sprawdza, czy otrzymane liczby spełniają warunki zadania. $x + 17 = 0$ lub $x - 5 = 0$ $x = -17$ lub $x = 5.$ Sprawdzenie Dla $x = -17$ mamy $(-17)^2 + 12 \cdot (-17) + 15 = 289 - 204 + 15 = 100.$ Dla $x = 5$ mamy $5^2 + 12 \cdot 5 + 15 = 25 + 60 + 15 = 100.$ *Uwaga. Jeśli uczeń znajdzie te liczby, a nie sprawdzi, czy spełniają one warunki zadania, to też otrzymuje maksymalną liczbę punktów.*	1p.

II sposób

Uczeń: 1. Przekształca dane wyrażenie do innej postaci, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia np.: $x^2 + 12x + 15 = x^2 + 12x + 36 - 21 = (x + 6)^2 - 21.$	1p.
2. Zapisuje równanie i przekształca je w postać iloczynową, korzystając z odpowiedniego wzoru skróconego mnożenia. $(x + 6)^2 - 10^2 = 21$ $(x + 6 + 10)(x + 6 - 10) = 21$ $(x + 16)(x - 4) = 21.$	1p.
3. Rozwiązuje równanie i sprawdza, które liczby spełniają warunki zadania i podaje odpowiedź. Liczby $x + 16$ i $x - 4$ są całkowite oraz $x + 16 > x - 4$, a ich iloczyn wynosi 21. Sprawdzamy iloczyny: $21 \cdot 1, -1 \cdot (-21), 7 \cdot 3, -3 \cdot (-7).$ Gdy $x + 16 = 21$, to $x = 5$, wtedy $x - 4 = 5 - 4 = 1$, więc dla $x = 5$ $(x + 16)(x - 4) = 21.$ Gdy $x + 16 = -1$, to $x = -17$, wtedy $x - 4 = -17 - 4 = -21$, więc dla $x = -17$ $(x + 16)(x - 4) = 21.$ Gdy $x + 16 = 7$, to $x = -9$, wtedy $x - 4 = -9 - 4 = -13 \neq 3$, więc dla $x = -9$ $(x + 16)(x - 4) \neq 21.$ Gdy $x + 16 = -3$, to $x = -19$, wtedy $x - 4 = -19 - 4 = -23 \neq -7$, więc dla $x = -19$ $(x + 16)(x - 4) \neq 21.$ Odpowiedź. Tymi liczbami są 5 i –17.	1p.

III sposób

Uczeń: 1. Zapisuje równanie i przekształca je do innej postaci np.: $x^2 + 12x + 15 = 100$ $x(x + 12) = 85.$	1p.
2. Zapisuje lewą stronę równania za pomocą iloczynu liczb całkowitych. Ponieważ liczby x i $x + 12$ są całkowite oraz $x < x + 12$, więc mogą zachodzić następujące równania: $x(x + 12) = 1 \cdot 85,$ $x(x + 12) = -85 \cdot (-1),$ $x(x + 12) = 5 \cdot 17,$ $x(x + 12) = -17 \cdot (-5).$	1p.
3. Sprawdza, które liczby spełniają warunki zadania i podaje odpowiedź. Gdy $x = 1$, to $x + 12 = 13$, więc dla $x = 1$ $x(x + 12) \neq 85.$ Gdy $x = -85$, to $x + 12 = -72$, więc dla $x = -85$ $x(x + 12) \neq 85.$ Gdy $x = 5$, to $x + 12 = 17$, więc dla $x = 5$ $x(x + 12) = 85.$ Gdy $x = -17$, to $x + 12 = -5$, więc dla $x = -17$ $x(x + 12) = 85.$ Odpowiedź. Tymi liczbami są 5 i –17.	1p.

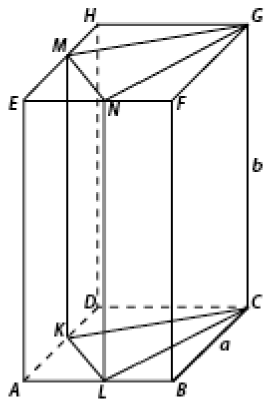
Zadanie 10. (0-3 pkt)

Klocek w kształcie graniastosłupa prawidłowego czworokątnego *ABCDEFGH* rozcięto na cztery klocki każdy w kształcie graniastosłupa prostego trójkątnego. Podstawą jednego z nich jest trójkąt, którego dwa wierzchołki *K* i *L* są środkami krawędzi podstawy graniastosłupa czworokątnego, trzeci wierzchołek jest jednym z wierzchołków tej podstawy, a ponadto żadna ze ścian bocznych tego graniastosłupa trójkątnego nie zawiera się w żadnej ścianie graniastosłupa czworokątnego. Oblicz, ile procent objętości największego z otrzymanych po rozcięciu klocków stanowi objętość najmniejszego klocka.
Wynik podaj z dokładnością do 1%.

I sposób

Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku. — 1p.



2. Oblicza pola podstaw otrzymanych klocków. — 1p.

$P_{ALK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^2}{8}$, $\quad P_{LBC} = P_{KCD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{2} \cdot a = \frac{a^2}{4}$,

$P_{KLC} = a^2 - \frac{a^2}{8} - 2 \cdot \frac{a^2}{4} = \frac{8a^2 - a^2 - 4a^2}{8} = \frac{3a^2}{8}$.

3. Oblicza z dokładnością do 1%, ile procent objętości największego z otrzymanych klocków, stanowi objętość najmniejszego klocka. — 1p.

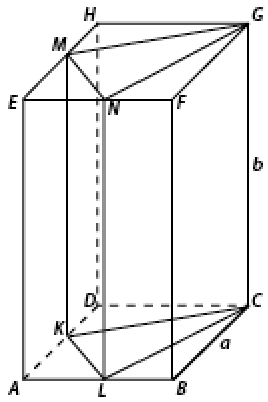
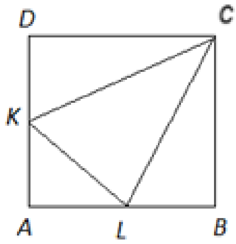
Ponieważ wszystkie powstałe klocki mają taką samą wysokość, największą objętość ma ten klocek, którego pole podstawy jest największe.

Zatem największą objętość ma klocek *KLCMNG*, a najmniejszą klocek *ALKENM.*

Stosunek objętości klocka *ALKENM* do objętość ma klocka *KLCMNG* wynosi:

$\frac{a^2}{8} : \frac{3a^2}{8} = \frac{a^2}{8} \cdot \frac{8}{3a^2} = \frac{1}{3}$, czyli około 33%.

II sposób

Uczeń:	
1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku. 	1p.
2. Przedstawia podział podstawy graniastosłupa na cztery trójkąty np. za pomocą rysunku i porównuje ich pola.  Trójkąty *LBC* i *KDC* mają jednakowe pola, a pole trójkąta *KAL* jest najmniejsze i stanowi połowę pola trójkąta *LBC* (*KDC*). Suma pól dwóch jednakowych trójkątów jest równa sumie pól dwóch pozostałych trójkątów. Zatem trójkąt *KLC* ma największe pole.	1p.
3. Oblicza z dokładnością do 1%, ile procent objętości największego z otrzymanych klocków stanowi objętość najmniejszego klocka. Ponieważ wszystkie powstałe klocki mają taką samą wysokość, największą objętość ma ten klocek, którego pole podstawy jest największe. Zatem największą objętość ma klocek *KLCMNG*, a najmniejszą klocek *ALKENM.* Objętości poszczególnych graniastosłupów stanowią odpowiednio 1/8, 1/4, 1/4 i 3/8 objętości całego graniastosłupa czworokątnego Stosunek objętości klocka *ALKENM* do objętość ma klocka *KLCMNG* wynosi: $\frac{1}{8} : \frac{3}{8} = \frac{1}{8} \cdot \frac{8}{3} = \frac{1}{3}$, czyli około 33%.	1p.