KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów gimnazjów województwa mazowieckiego w roku szkolnym 2017/2018

Model odpowiedzi i schematy punktowania

UWAGA 1.
Łącznie uczeń może zdobyć **20 punktów**.

Do etapu wojewódzkiego zakwalifikowani będą uczniowie, którzy w etapie rejonowym uzyskają **co najmniej 90%** punktów możliwych do zdobycia **(co najmniej 18 punktów)**.

UWAGA 2.
Za **każde poprawne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

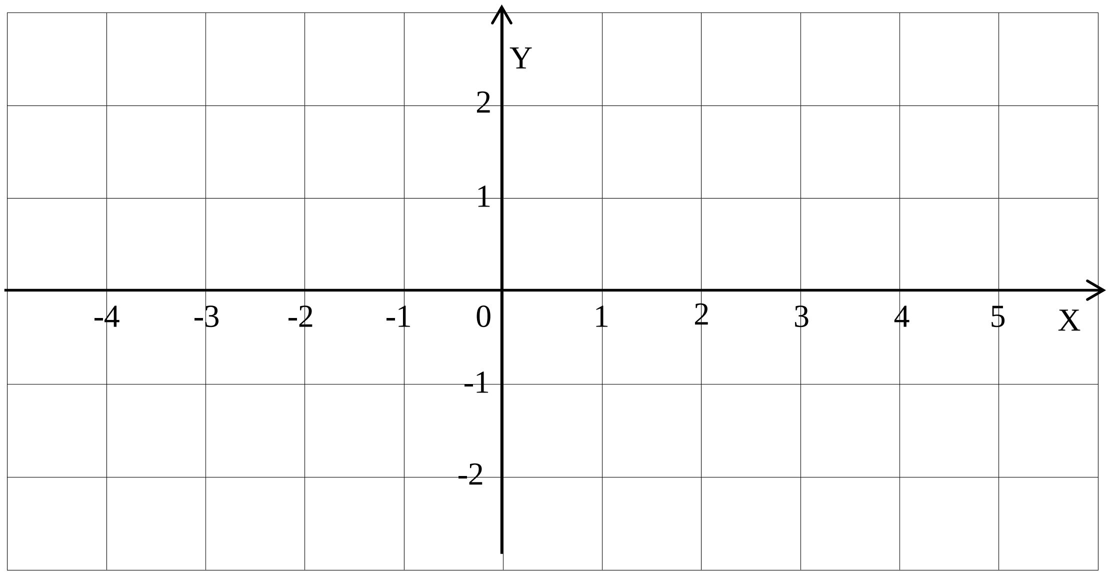
ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt	1 pkt	1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	B	B	C	A

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

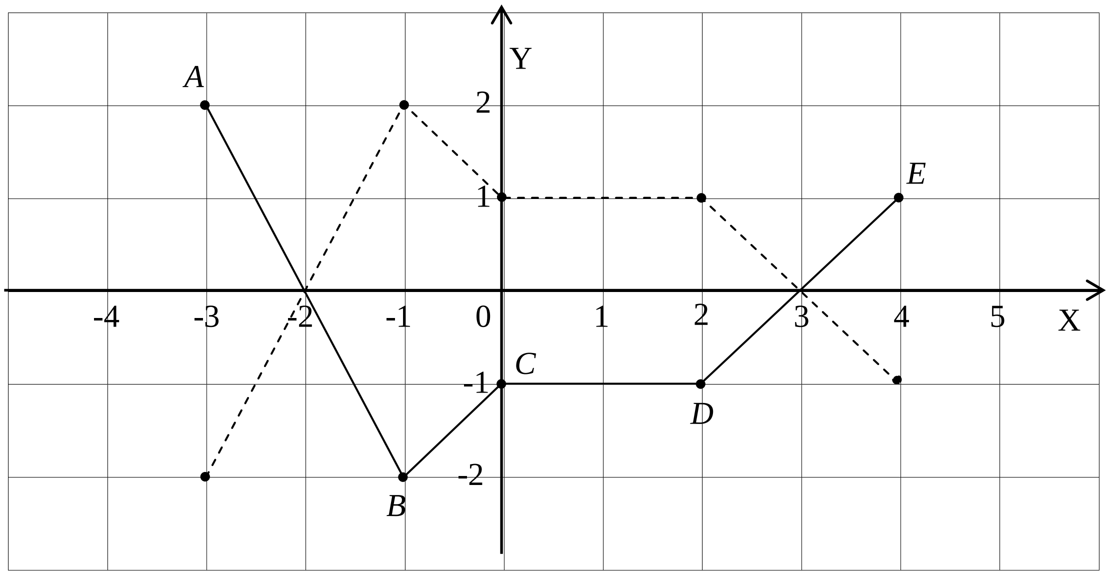
Zadanie 5. (2 pkt)

W układzie współrzędnych zaznacz punkty $A = (–3; 2)$, $B = (–1; –2)$, $C = (0; –1)$, $D = (2; –1)$, $E = (4; 1)$. Narysuj odcinki AB, BC, CD, DE. Narysuj figurę symetryczną do otrzymanej względem osi OX.



Uczeń:

1. zaznacza punkty *A*, *B*, *C*, *D*, *E* i rysuje odcinki *AB*, *BC*, *CD*, *DE* — 1p.



2. rysuje figurę symetryczną do otrzymanej względem osi OX — 1p.

Zadanie 6. (2 pkt)

Znajdź taką liczbę pierwszą p, dla której liczba $p+9$ jest kwadratem liczby naturalnej.
Ile jest takich liczb? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. zapisuje liczbę $p+9$ jako kwadrat liczby naturalnej m i przekształca otrzymane równanie: $p+9=m^2$ $p=(m-3)(m+3)$ 2. zauważa, że liczba p jest pierwsza, więc $m-3=1$ (bo $m-3<m+3$) i $m+3=p$, czyli $m=4$ i $p=7$, zatem tylko liczba 7 spełnia warunki zadania	1p. 1p.

Zadanie 7. (2 pkt)

Rozwiąż równanie $|x-2|-5=3-|2-x|$.

Uczeń: 1. zapisuje równość w postaci równoważnej $|x-2|=4$ 2. znajduje wszystkie liczby spełniające równość: 6, -2.	1p. 1p.

Zadanie 8. (2 pkt)

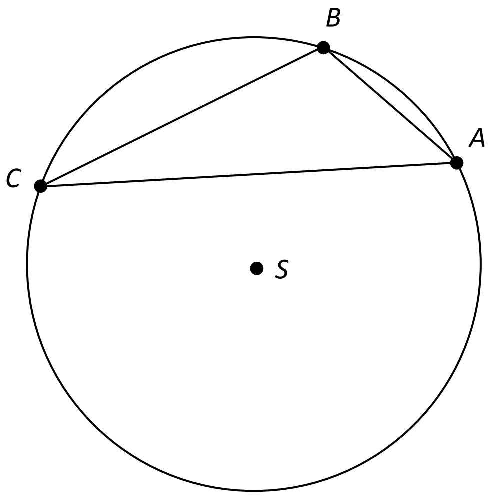
Uzasadnij, że liczba $2017^2+4\cdot 2017+4$ jest podzielna przez 3.

Uczeń: 1. zapisuje wyrażenie w postaci $(2017+2)^2=2019^2$ 2. uzasadnia, że liczba 2019 jest podzielna przez 3	1p. 1p.

Zadanie 9. (2 pkt)

Trójkąt ABC jest wpisany w okrąg o środku S, jak na rysunku.

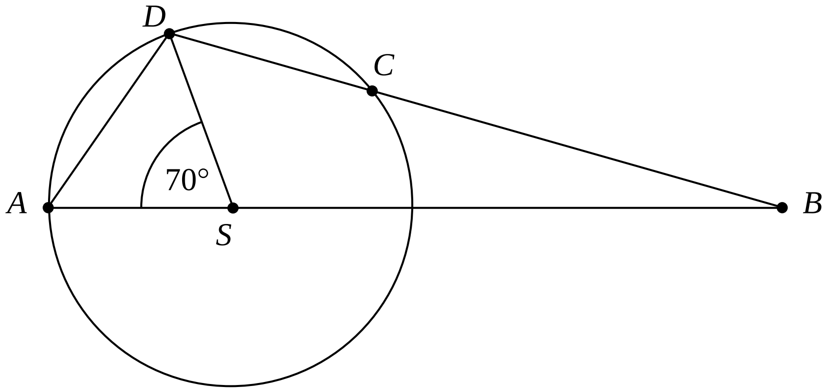
Bok BC ma długość 4, kąt CAB ma 45°. Oblicz długość odcinka BS.

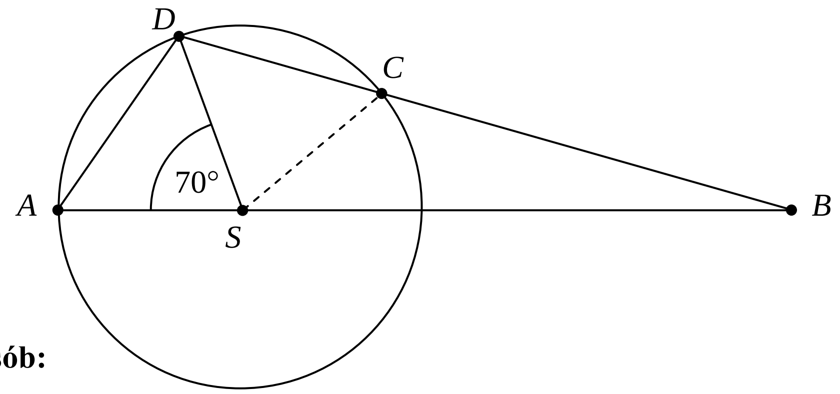


Uczeń: 1. zauważa i uzasadnia, że trójkąt BSC jest prostokątny równoramienny o przeciwprostokątnej BC	1p.
2. korzysta z twierdzenia Pitagorasa lub wzoru na przekątną kwadratu i oblicza $\lvert BS \rvert = 2\sqrt{2}$	1p.

Zadanie 10 (2 pkt)

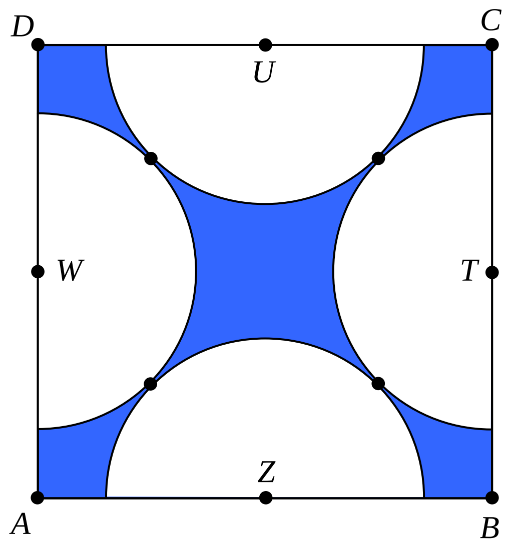
Punkt S jest środkiem okręgu opisanego na trójkącie CDA, jak na rysunku.
Odcinki DA i DC są równe. Oblicz miarę kąta ABC.

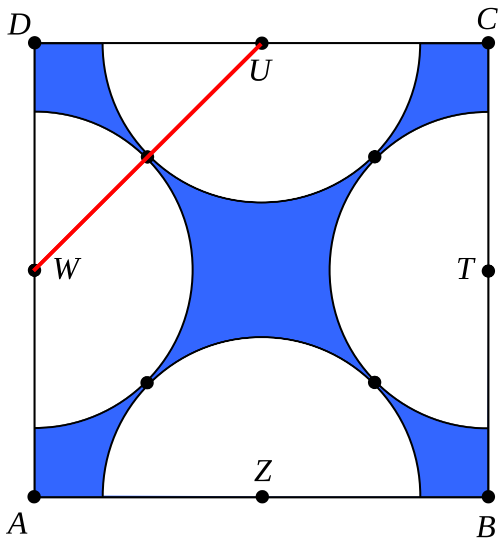


	
pierwszy sposób:	
Uczeń:	
1. dorysowuje odcinek CS,	1p.
zauważa i uzasadnia, że $\lvert\angle DCS\rvert = \lvert\angle DAS\rvert = 55^\circ$	
$\lvert\angle CSD\rvert = \lvert\angle DSA\rvert = 70^\circ$	1p.
2. oblicza $\lvert\angle CSB\rvert = 180^\circ - 2\cdot 70^\circ = 40^\circ$ i $\lvert\angle ABC\rvert = \lvert\angle DCS\rvert - \lvert\angle CSB\rvert = 15^\circ$	
drugi sposób:	
Uczeń:	
1. dorysowuje odcinek CS,	1p.
zauważa i uzasadnia, że $\lvert\angle CDS\rvert = \lvert\angle ADS\rvert = \lvert\angle DAS\rvert = 55^\circ$	1p.
2. oblicza $\lvert\angle ABC\rvert = 180^\circ - \lvert\angle DAB\rvert - \lvert\angle ADB\rvert = 15^\circ$	

Zadanie 11. (2 pkt)

Bok kwadratu $ABCD$ ma długość 2.
Punkty T, U, W, Z są środkami boków tego kwadratu, jak na rysunku.
W tym kwadracie umieszczono takie 4 przystające półkola o środkach T, U, W, Z, że każde półkole jest styczne do dwóch pozostałych, jak na rysunku.
Oblicz pole ciemniejszego obszaru.





Uczeń:

1. zauważa, że $|DU| = |DW| = 1$
   oraz, że
   przeciwprostokątna UW trójkąta WUD jest równa sumie promieni półkoli i korzystając ze wzoru na długość przekątnej kwadratu oblicza długość r promienia — 1p.

   $2r = 1 \cdot \sqrt{2}$, $r = \frac{\sqrt{2}}{2}$

2. oblicza pole ciemniejszego obszaru — 1p.

   $4 - 4 \cdot \frac{1}{2}\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 4 - \pi$

Zadanie 12. (2 pkt)

Dane są liczby 2^{600} , $\left(\sqrt{3}\right)^{480}$, 25^{180}. Uporządkuj te liczby rosnąco. Odpowiedź uzasadnij.

pierwszy sposób: Uczeń: 1. zauważa, że $2^{600}=\left(2^5\right)^{120}=32^{120}$ $\left(\sqrt{3}\right)^{480}=\left(\sqrt{3}\right)^{4\cdot 120}=9^{120}$ $25^{180}=\left(5^3\right)^{120}=125^{120}$ 2. porządkuje liczby rosnąco: $\left(\sqrt{3}\right)^{480}<2^{600}<25^{180}$	1p. 1p.
drugi sposób: Uczeń: 1. zauważa, że $2^{600}=\left(2^2\right)^{300}=4^{300}$ $\left(\sqrt{3}\right)^{480}=\left(\left(\sqrt{3}\right)^2\right)^{240}=3^{240}$ $25^{180}=\left(5^2\right)^{180}=5^{360}$ 2. porządkuje liczby rosnąco: $\left(\sqrt{3}\right)^{480}<2^{600}<25^{180}$	1p. 1p.