



MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT PUNKTOWANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP SZKOLNY 2022/2023

Ważne terminy!

Zgodnie z harmonogramem termin ogłoszenia wyników w szkole mija **28.10.2022 r.**

Najpóźniej do 8.11.2022 r. należy bezwzględnie wprowadzić wyniki **wszystkich uczniów** na Platformę Konkursów Przedmiotowych. Zgłoszenie uczestników po wyznaczonym terminie nie będzie przyjęte i **skutkuje ich dyskwalifikacją.**

21.11.2022 r. należy zapoznać się z listą uczniów zakwalifikowanych do etapu rejonowego oraz przekazać informację o ewentualnym zakwalifikowaniu się do kolejnego etapu konkursu uczniom i ich rodzicom/opiekunom prawnym.

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może otrzymać maksymalnie 1 punkt, a za rozwiązanie zadania otwartego 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	0-1 pkt	0-1 pkt	0-1 pkt	0-1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	T., C.	C.	B., D.	P, P

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (0-2 pkt)

W pewnym sklepie od poniedziałku do piątku maliny są sprzedawane w 400-gramowych opakowaniach. W sobotę za tę samą cenę maliny są sprzedawane w opakowaniach o 25% większych. Oblicz, o ile procent tańsze są maliny w sobotę.

I sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania.</p> <p>x - cena malin od poniedziałku do piątku</p> <p>$\frac{x}{400}$ – cena 1 g malin od poniedziałku do piątku</p> <p>$\frac{x}{500}$ - cena 1 g malin w sobotę</p> <p>2. Oblicza, o ile procent tańsze są maliny w sobotę i podaje odpowiedź.</p> <p>Nowa cena stanowi $\frac{x}{500} : \frac{x}{400} = 0,8$ starej ceny, czyli 80%.</p> <p>Odpowiedź. Maliny w sobotę są o 20% tańsze.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------

II sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania.</p> <p>x - cena malin od poniedziałku do piątku</p> <p>$\frac{x}{4}$ – cena 100 g malin od poniedziałku do piątku</p> <p>$\frac{x}{5}$ - cena 100 g malin w sobotę</p> <p>2. Oblicza, o ile procent tańsze są maliny w sobotę i podaje odpowiedź.</p> <p>Różnica cen za 400 g malin to</p> <p>$\left(\frac{x}{4} - \frac{x}{5}\right) \cdot 4 = \frac{x}{5}$, czyli 20% ceny od poniedziałku do piątku.</p> <p>Odpowiedź. Maliny w sobotę są o 20% tańsze.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------

III sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania.</p> <p>x - cena za 400 g malin od poniedziałku do piątku</p> <p>x - cena za 500 g malin w sobotę</p> <p>2. Oblicza, o ile procent tańsze są maliny w sobotę i podaje odpowiedź.</p> <p>Cena za 400 g malin w sobotę to 80% x.</p> <p>Odpowiedź. Maliny w sobotę są o 20% tańsze.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------

Uwaga. Jeśli uczeń przyjmie konkretną cenę malin np. 10 zł i przedstawi poprawne i pełne rozwiązanie, to otrzymuje 2 punkty.

Zadanie 6. (0-2 pkt)

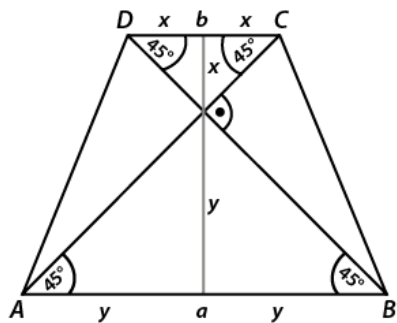
Wśród ośmiu różnych i dowolnych liczb naturalnych żadna nie jest podzielna przez 5, natomiast różnica między największą a najmniejszą liczbą wynosi 8. Uzasadnij, że suma tych ośmiu liczb jest podzielna przez 5 i przez 8.

<p>Uczeń:</p> <p>1. Zapisuje w postaci wyrażeń algebraicznych osiem dowolnych liczb niepodzielnych przez 5, wśród których różnica między największą a najmniejszą liczbą wynosi 8.</p> <p>$5x + 1, 5x + 2, 5x + 3, 5x + 4, 5x + 6, 5x + 7, 5x + 8, 5x + 9,$</p> <p>gdzie x – liczba naturalna.</p> <p>2. Uzasadnia, że ich suma jest podzielna przez 5 i 8.</p> <p>$5x + 1 + 5x + 2 + 5x + 3 + 5x + 4 + 5x + 6 + 5x + 7 + 5x + 8 + 5x + 9 = 40x + 40 = 40(x + 1) = 8 \cdot 5 \cdot (x + 1)$</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------

Zadanie 7. (0-3 pkt)

Uzasadnij, że pole trapezu równoramiennego o wysokości h , w którym przekątne są prostopadłe jest równe polu kwadratu, którego bok ma długość równą wysokości tego trapezu.

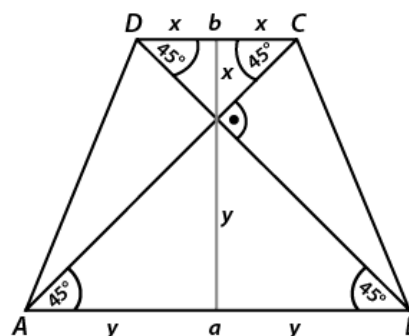
I sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Wykonuje analizę zadania np. w postaci rysunku.</p> <p>2. Zapisuje zależności między długościami odcinków w trapezie.</p> <p>$\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b = x + y = h$, więc $a + b = 2h$</p> <p>3. Wyznacza pole trapezu.</p> <p>$P = \frac{(a+b) \cdot h}{2}$, zatem $P = \frac{2h \cdot h}{2} = h^2$</p>	 <p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

II sposób

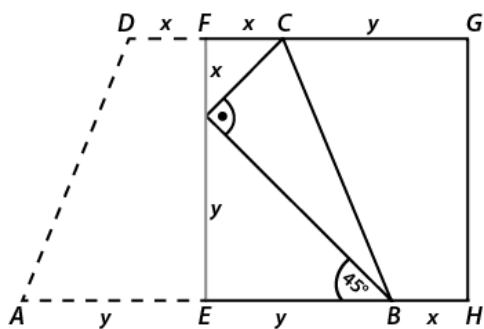
Uczeń:

1. Wykonuje analizę zadania np. w postaci rysunku.



1p.

2. Zauważa, że po rozcięciu trapezu wzdłuż wysokości i ułożeniu otrzymanych części tak, jak na poniższym rysunku, otrzymamy prostokąt EFGH o polu równym polu wyjściowego trapezu.



1p.

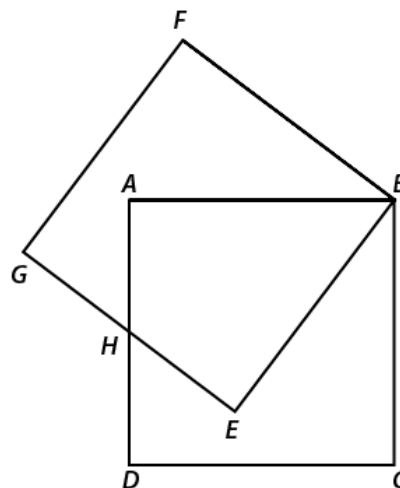
3. Uzasadnia, że otrzymany prostokąt EFGH jest kwadratem, którego długość boku jest równa wysokości trapezu.

$$|EF| = |FG| = |GH| = |HE| = x + y = h$$

1p.

Zadanie 8. (0-3 pkt)

Na rysunku boki kwadratów $ABCD$ i $BEGF$ są jednakowej długości, a punkt H jest środkiem odpowiednich boków tych kwadratów. Oblicz, ile razy pole sześciokąta $BCDHGF$ jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów.



I sposób

<p>Uczeń:</p>	
<p>1. Przyjmuje oznaczenie długości boku kwadratu i zapisuje jego pole oraz oblicza pole czworokąta $ABEH$.</p>	1p.
<p>$2a$ – długość boku kwadratu</p>	
<p>$P_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$</p>	
<p>$P_{ABEH} = 2 \cdot \frac{1}{2} a \cdot 2a = 2a^2$</p>	
<p>2. Uzasadnia, że pola czworokąta $ABEH$ i pięciokąta $HGFBA$ są równe.</p>	1p.
<p>$P_{HGFBA} = 4a^2 - 2a^2 = 2a^2 = P_{ABEH}$</p>	
<p>3. Oblicza, ile razy pole sześciokąta $BCDHGF$ jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów i podaje odpowiedź.</p>	1p.
<p>$P_{BCDHGF} = 3 \cdot 2a^2$</p>	
<p>$\frac{3 \cdot 2a^2}{4a^2} = \frac{3}{2} = 1,5$</p>	
<p>Odpowiedź. Pole sześciokąta $BCDHGF$ jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.</p>	

II sposób

Uczeń:

1. Uzasadnia, że pole każdego z przystających trójkątów ABH i BEH stanowi $\frac{1}{4}$ pola kwadratu $ABCD$.

$2a$ – długość boku kwadratu $ABCD$

$$P_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$$

$$P_{ABH} = P_{BEH} = \frac{2a \cdot a}{2} = a^2$$

2. Uzasadnia, że pole czworokąta $BCDH$ stanowi $\frac{3}{4}$ pola każdego z rozważanych kwadratów.

$$P_{BCDH} = P_{ABCD} - P_{ABH} = 4a^2 - a^2 = 3a^2$$

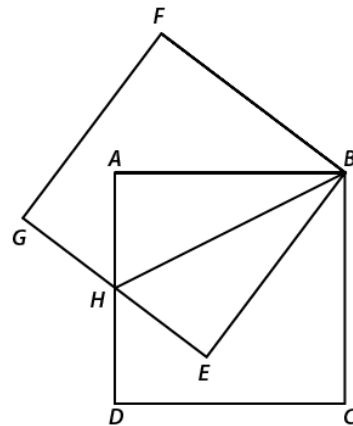
$$\frac{P_{BCDH}}{P_{ABCD}} = \frac{3a^2}{4a^2} = \frac{3}{4}$$

3. Uzasadnia, że pole sześciokąta $BCDHGF$ jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.

$$P_{BCDHGF} = 2P_{BCDH}$$

$$\frac{P_{BCDHGF}}{P_{ABCD}} = 2 \cdot \frac{3}{4} = 1,5.$$

Odpowiedź. Pole sześciokąta $BCDHGF$ jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.

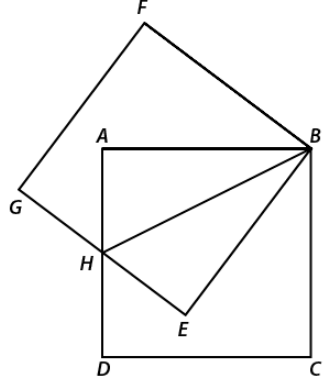


1p.

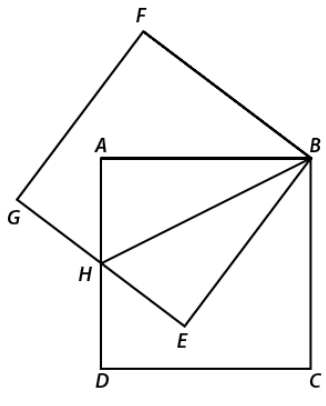
1p.

1p.

III sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Uzasadnia, że pole każdego z przystających trójkątów ABH i BEH stanowi $\frac{1}{4}$ pola kwadratu $ABCD$.</p> <p>2a – długość boku kwadratu $ABCD$</p> $P_{ABCD} = (2a)^2 = 4a^2$ $P_{ABH} = P_{BEH} = \frac{2a \cdot a}{2} = a^2$ <p>2. Oblicza pole czworokąta $ABEH$ i szukanego sześciokąta.</p> $P_{ABEH} = 2P_{ABH} = 2a^2$ $P_{BCDHGF} = 2P_{ABCD} - P_{ABEH} = 8a^2 - 2a^2 = 6a^2$ <p>3. Uzasadnia, że pole sześciokąta $BCDHGF$ jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.</p> $\frac{6a^2}{4a^2} = \frac{3}{2} = 1,5$ <p>Odpowiedź. Pole sześciokąta $BCDHGF$ jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.</p>	 <p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

IV sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przyjmuje, że bok kwadratu ma długość 1, więc jego pole jest równe 1 oraz stwierdza, że pole każdego z przystających trójkątów ABH i BEH stanowi $\frac{1}{4}$ pola kwadratu $ABCD$, czyli jest równe $\frac{1}{4}$.</p> <p>2. Stwierdza, że pięciokąt $BCDHE$ oraz $ABFGH$ mają pole równe $\frac{1}{2}$.</p> <p>3. Uzasadnia, że pole sześciokąta $BCDHGF$ jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.</p> $\frac{2 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4}}{1} = 1,5$ <p>Odpowiedź. Pole sześciokąta $BCDHGF$ jest większe od pola każdego z rozważanych kwadratów 1,5 raza.</p>	 <p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Różnica dwóch liczb naturalnych jest równa 32, a ich iloraz wynosi 2 i reszty 6. Co to za liczby? Odpowiedź uzasadnij.

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania i zapisuje zależności między nimi.</p> <p>x – większa liczba, y – mniejsza liczba</p> <p>$x - y = 32$ oraz $x : y = 2 \text{ r } 6$</p> <p>2. Zapisuje liczbę x w postaci $x = y \cdot q + r$ i układa równanie z jedną niewiadomą.</p> <p>$x = 2y + 6$</p> <p>$2y + 6 - y = 32$</p> <p>3. Rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź.</p> <p>$y + 6 = 32$</p> <p>$y = 26$, więc $x = 58$</p> <p>Odpowiedź. Tymi liczbami są: 58 i 26.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------

Zadanie 10. (0-3 pkt)

Zosia skleiła wszystkie możliwe modele prostopadłościanów, których długości krawędzi są liczbami naturalnymi, natomiast jedna ze ścian każdego z tych prostopadłościanów ma pole równe 12, a druga 30. Ile modeli prostopadłościanów wykonała Zosia i jakie są ich objętości? Odpowiedź uzasadnij.

I sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przyjmuje oznaczenia długości krawędzi prostopadłościanu i zapisuje pola jego różnych ścian.</p> <p>x, y, z – długości krawędzi</p> <p>xy, yz, xz – pola ścian</p> <p>2. Zapisuje rozumowanie, mające na celu ustalenie możliwych wymiarów prostopadłościanu.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------

<p>Jeśli $xy = 12$ i $yz = 30$ to $x = \frac{12}{y}$, $z = \frac{30}{y}$, więc y jest wspólnym dzielnikiem 12 i 30, zatem $y = 1$ lub 2, lub 3, lub 6</p> <p>i odpowiednio</p> <p>$x = 12$ lub 6, lub 4, lub 2</p> <p>$z = 30$ lub 15, lub 10, lub 5</p> <p>3. Uzasadnia, liczbę modeli prostopadłościanów, które wykonała Zosia i oblicza ich objętości.</p> <p>Zosia wykonała 4 modele prostopadłościanów o wymiarach $1 \times 12 \times 30$, $2 \times 6 \times 15$, $3 \times 4 \times 10$, $6 \times 2 \times 5$, a ich objętości wynoszą 360, 180, 120, 60.</p> <p><i>Uwaga. Za rozwiązanie zadania, w którym uczeń poda trzy możliwe wymiary prostopadłościanów wraz z poprawnie obliczonymi objętościami należy przyznać 2 punkty, natomiast jeśli rozpatrzy co najwyżej dwa przypadki, to otrzymuje 1 punkt.</i></p>	1p.
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

II sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przyjmuje oznaczenia długości krawędzi prostopadłościanu i zapisuje pola jego różnych ścian.</p> <p>x, y, z – długości krawędzi</p> <p>xy, yz, xz – pola ścian</p> <p>2. Zapisuje rozumowanie, mające na celu ustalenie możliwych wymiarów prostopadłościanu.</p> <p>Jeśli $xy = 12$ i $yz = 30$ to $\frac{xy}{yz} = \frac{12}{30}$ zatem $\frac{x}{z} = \frac{2}{5}$</p> <p>Gdy $x = 2$, wówczas $z = 5, y = 6$.</p> <p>Gdy $x = 4$, wówczas $z = 10, y = 3$.</p> <p>Gdy $x = 6$, wówczas $z = 15, y = 2$.</p> <p>Gdy $x = 8$, wówczas $z = 20, y$ – nie jest liczbą całkowitą.</p> <p>Gdy $x = 10$, wówczas $z = 25, y$ – nie jest liczbą całkowitą.</p> <p>Gdy $x = 12$, wówczas $z = 30, y = 1$.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------

<p>3. Uzasadnia, liczbę modeli prostopadłościanów, które wykonała Zosia i oblicza ich objętości.</p> <p>Zosia wykonała 4 modele prostopadłościanów o wymiarach $12 \times 1 \times 30$, $6 \times 2 \times 15$, $4 \times 3 \times 10$, $2 \times 6 \times 5$, a ich objętości wynoszą 360, 180, 120, 60.</p> <p><i>Uwaga. Za rozwiązanie zadania, w którym uczeń poda trzy możliwe wymiary prostopadłościanów wraz z poprawnie obliczonymi objętościami należy przyznać 2 punkty, natomiast jeśli rozpatrzy co najwyżej dwa przypadki, to otrzymuje 1 punkt.</i></p>	
-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--

III sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Rozkłada liczby 12 i 30 na czynniki pierwsze.</p> <p>$12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$</p> <p>$30 = 2 \cdot 3 \cdot 5$</p> <p>2. Zauważa, że wspólna krawędź dwóch ścian o polach 12 i 30 może mieć długość: 1, 2, 3 lub 6.</p> <p>3. Ustala wymiary modeli prostopadłościanów, które wykonała Zosia i oblicza ich objętości.</p> <p>Zosia wykonała 4 modele prostopadłościanów o wymiarach $1 \times 12 \times 30$, $2 \times 6 \times 15$, $3 \times 4 \times 10$, $6 \times 2 \times 5$, a ich objętości wynoszą 360, 180, 120, 60.</p> <p><i>Uwaga. Za rozwiązanie zadania, w którym uczeń poda trzy możliwe wymiary prostopadłościanów wraz z poprawnie obliczonymi objętościami należy przyznać 2 punkty, natomiast jeśli rozpatrzy co najwyżej dwa przypadki, to otrzymuje 1 punkt.</i></p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------