



## **MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA**

### **KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII**

### **UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO**

### **ETAP WOJEWÓDZKI 2021/2022**

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

## **ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH**

<b>Nr zadania</b>	<b>1.</b>	<b>2.</b>	<b>3.</b>
<b>Maks. liczba punktów</b>	<b>0-1 pkt</b>	<b>0-1 pkt</b>	<b>0-1 pkt</b>
<b>Prawidłowa odpowiedź</b>	<b>B., D.</b>	<b>B.</b>	<b>C.</b>

## ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

## Zadanie 4. (0-2 pkt)

Szybę do okrągłego okna wycięto z kwadratowej tafli tak, aby było jak najmniej odpadów. Na tej szybie Zosia wykonała kolorowy rysunek w kształcie sześciokąta foremnego tak, że wierzchołki rysunku leżą na obrzeżach szyby. Oblicz pole szklanych odpadów, jeśli pole rysunku Zosi wynosi  $24\sqrt{3} \text{ dm}^2$ . Do obliczeń przyjmij, że  $\pi = 3$ .

Uczeń:

1. Przyjmuje oznaczenia np. takie, jak na rysunku i oblicza długość promienia szyby okna.

$$6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$$

$$3a^2\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$$

$$a^2 = 16$$

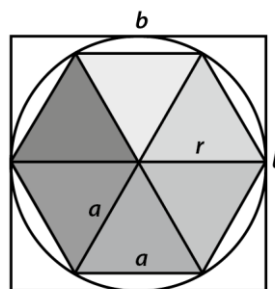
$$a = 4 \text{ [dm]} = r$$

2. Oblicza pole szklanych odpadów.

Pole szklanych odpadów jest równe różnicy pola  $P_1$  kwadratu o boku  $b$  i pola  $P_2$  koła o promieniu  $r$ .

$$b = 2r \quad P_1 = 4r^2 = 64 \text{ [dm}^2\text{]}, \quad P_2 = \pi r^2 = 16\pi \text{ [dm}^2\text{]},$$

$$P_1 - P_2 = 64 - 16\pi = 16(4 - \pi) = 16(4 - 3) = 16 \text{ [dm}^2\text{]}$$



1p.

1p.

**Zadanie 5. (0-2 pkt)**

W urnie są kule białe i czerwone. Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wynosi  $\frac{1}{4}$ . Gdy dołożymy cztery białe kule, prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wzrośnie o 0,15. Oblicz, ile białych i ile czerwonych kul jest w tej urnie.

<p>Uczeń:</p>	
<p>1. Przeprowadza analizę zadania i układa równanie.</p> <p><math>x</math> – liczba białych kul</p> <p><math>4x</math> – liczba wszystkich kul</p> $\frac{x+4}{4x+4} = \frac{1}{4} + 0,15$	<p>1p.</p>
<p>2. Rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź.</p> $\frac{x+4}{4x+4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$ $\frac{x+4}{4x+4} = \frac{2}{5}$ $5x + 20 = 8x + 8$ $3x = 12, \quad x = 4$ <p>Liczba czerwonych kul: <math>4x - x = 3x = 12</math></p> <p>Odpowiedź. W urnie są 4 białe kule i 12 czerwonych kul przed zmianą.</p> <p>lub</p> <p>W urnie jest 8 białych kul i 12 czerwonych kul po dołożeniu.</p>	<p>1p.</p>

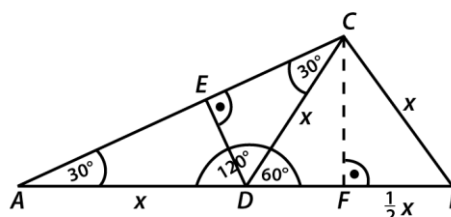
### Zadanie 6. (0-2 pkt)

W trójkącie różnobocznym  $ABC$  środek  $D$  najdłuższego boku połączono z przeciwległym wierzchołkiem trójkąta. Trójkąt  $ABC$  został podzielony na dwa trójkąty, z których jeden jest równoboczny. Oblicz, ile procent pola trójkąta  $ABC$  stanowi pole powstałego trójkąta równobocznego.

#### I sposób

Uczeń:

1. Przedstawia analizę zadania np. za pomocą rysunku.



1p.

2. Uzasadnia, że pole trójkąta  $ADC$  jest równe polu trójkąta  $DCB$  i podaje odpowiedź.

Trójkąty  $ADE$  i  $DCE$  są przystające (cecha kbk) i każdy z nich jest połową trójkąta równobocznego o boku  $x$ , a więc suma ich pól jest równa polu trójkąta  $DBC$ .

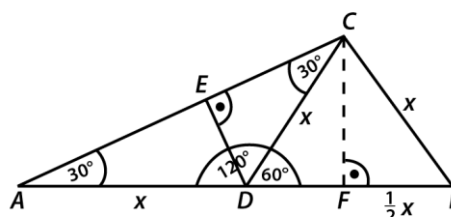
1p.

Odpowiedź. Pole trójkąta  $DBC$  stanowi 50% pola trójkąta  $ABC$ .

#### II sposób

Uczeń:

1. Przedstawia analizę zadania np. za pomocą rysunku i uzasadnia, że trójkąt  $ABC$  jest prostokątny.



1p.

Miara kąta  $DCB$  wynosi  $60^\circ$ , więc kąt  $ACB$  jest prosty, zatem trójkąt  $ABC$  jest prostokątny.

2. Uzasadnia, że pole trójkąta  $ADC$  jest równe polu trójkąta  $DCB$  i podaje odpowiedź.

Trójkąty  $ADE$  i  $DCE$  są przystające (cecha kbk), więc odcinki  $AE$  i  $EC$  są jednakowej długości równej  $\frac{x\sqrt{3}}{2}$ . Pole  $P_1$  trójkąta  $ABC$  wynosi

1p.

$$P_1 = \frac{x\sqrt{3} \cdot x}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

Pole  $P_2$  trójkąta równobocznego o boku  $x$  wynosi

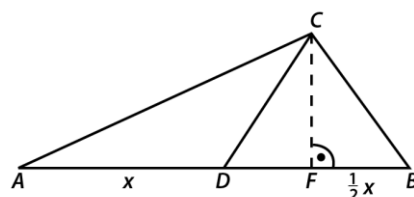
$$P_1 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}, \text{ a więc jest połową pola trójkąta } ABC.$$

Odpowiedź. Pole trójkąta  $DBC$  stanowi 50% pola trójkąta  $ABC$ .

### III sposób

Uczeń:

1. Przedstawia analizę zadania np. za pomocą rysunku.



1p.

2. Uzasadnia, że pola trójkątów  $ADC$  i  $DBC$  są równe i podaje odpowiedź.

W trójkątach  $ADC$  i  $DBC$  podstawy  $AD$  i  $DB$  są jednakowej długości, a wysokość  $CF$  jest wspólna, a więc pola tych trójkątów są równe, zatem pole trójkąta  $DBC$  jest połową pola trójkąta  $ABC$ .

Odpowiedź. Pole trójkąta  $DBC$  stanowi 50% pola trójkąta  $ABC$ .

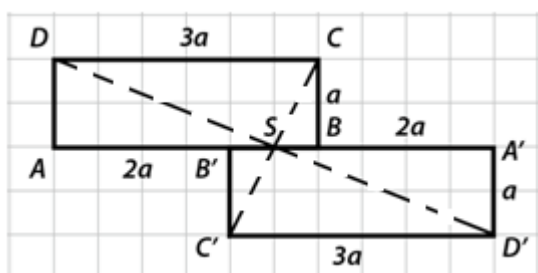
1p.

**Zadanie 7. (0-2 pkt)**

W prostokącie  $ABCD$  bok  $AD$  jest trzy razy krótszy od boku  $AB$ . Punkt  $S$  dzieli bok  $AB$  w stosunku 5:1 licząc od wierzchołka  $A$ . Prostokąt  $A'B'C'D'$  jest symetryczny do prostokąta  $ABCD$  względem punktu  $S$ . Oblicz, jaką częścią obwodu wielokąta  $AB'C'D'A'BCD$  jest obwód prostokąta  $ABCD$ .

Uczeń:

1. Analizuje zadanie wykonując rysunek pomocniczy i oznacza długości odpowiednich odcinków za pomocą  $a$  np.



1p.

2. Oblicza, jaką częścią obwodu wielokąta  $AB'C'D'A'BCD$  jest obwód prostokąta  $ABCD$  i podaje odpowiedź

1p.

Obwód prostokąta  $ABCD$  jest równy  $8a$ .

Obwód wielokąta  $AB'C'D'A'BCD$  jest równy  $14a$ .

Odpowiedź. Obwód prostokąta  $ABCD$  stanowi  $\frac{4}{7}$  obwodu wielokąta  $AB'C'D'A'BCD$ .

**Zadanie 8. (0-3 pkt)**

Pewna firma otrzymała zamówienie na dwa typy kodów dla uczestników internetowej grupy dyskusyjnej.

Kody typu I mają mieć dwie litery na początku i jedną na końcu, a między nimi 3 cyfry. Mogą w nich występować tylko litery S, B i K oraz cyfry 4, 6, 8, przy czym litery i cyfry mogą się powtarzać.

Kody typu II mają mieć na początku dwie litery spośród: W, Y i Z, a następnie 5 cyfr spośród: 1, 3, 5, 7, 9, przy czym litery i cyfry nie mogą się powtarzać.

Ilu maksymalnie uczestników może liczyć ta grupa, jeśli każdy uczestnik musi mieć inny kod? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:	
1. Oblicza, ile można utworzyć kodów typu I.	1p.
W kodach typu I: – pierwszą literę można wybrać na 3 sposoby, drugą i ostatnią też na 3 (bo litery mogą się powtarzać), – pierwszą cyfrę oraz każdą kolejną można wybrać na 3 sposoby (bo cyfry mogą się powtarzać). W ten sposób można utworzyć $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$ kodów pierwszego typu.	
2. Oblicza, ile można utworzyć kodów typu II.	1p.
W kodach typu II: – pierwszą literę można wybrać na 3 sposoby, a drugą już tylko na 2 sposoby (bo litery nie mogą się powtarzać), – pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów, drugą na 4 sposoby, trzecią na 3, czwartą na 2, a piątą na 1 sposób (bo cyfry nie mogą się powtarzać). W ten sposób można utworzyć $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ kodów drugiego rodzaju.	
3. Oblicza, ilu maksymalnie uczestników może liczyć internetowa grupa dyskusyjna.	1p.
Łącznie jest $729 + 720 = 1449$ kodów.	
Odpowiedź. Internetowa grupa dyskusyjna może maksymalnie liczyć 1449 uczestników.	

<p>Uczeń:</p> <p>1. Wykonuje analizę zadania np.:  <math>x</math> – opłata za pierwszą godzinę.  <math>2 \cdot (x + 1,5) = 2x + 3</math> - opłata za drugą i trzecią godzinę  <math>2 \cdot (x + 2) = 2x + 4</math> - opłata za czwartą i piątą godzinę  <math>4x</math> - opłata za szóstą i siódmą godzinę</p> <p>2. Układa nierówności.</p> <p><math>x + 2x + 3 + 2x + 4 + 4x \leq 34</math>    oraz    <math>x + 2x + 3 + 2x + 4 + 4x \geq 16</math></p> <p>3. Rozwiązuje nierówności i podaje odpowiedź.</p> <p><math>9x \leq 34 - 7</math>                      oraz              <math>9x \geq 16 - 7</math>  <math>9x \leq 27</math>                              <math>9x \geq 9</math>  <math>x \leq 3</math>                                  <math>x \geq 1</math></p> <p>zatem  <math>1 \leq x \leq 3</math></p> <p>Odpowiedź. Opłata za pierwszą godzinę parkowania mogła wynosić 1 zł lub 2 zł, lub 3 zł.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	----------------------------------



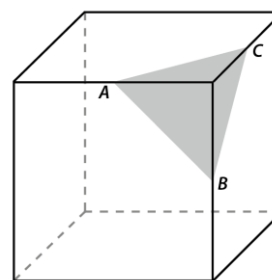
**Zadanie 10. (0-3 pkt)**

Filip z drewnianego klocka sześciennego odciął wszystkie „rogi” i w ten sposób otrzymał nowe klocki.

Na rysunku pokazano sposób odcięcia jednego „rogu”, a zaznaczone punkty  $A$ ,  $B$ ,  $C$  są środkami krawędzi sześcianu.

Klocki w kształcie „rogów” Filip pomalował na czerwono, a pozostały klocek na zielono.

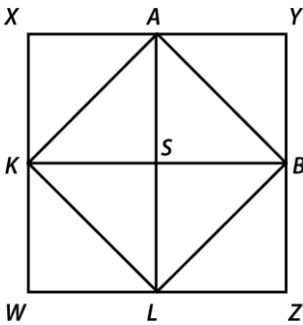
Czy łączna powierzchnia wszystkich klocków czerwonych jest większa od powierzchni klocka zielonego? Odpowiedź uzasadnij.



*I sposób*

<p>Uczeń:</p>	
<p>1. Przyjmuje, że długość krawędzi sześcianu jest równa np. <math>a</math>, oraz zauważa, że jedna ze ścian klocka powstałego po odcięciu „rogów” jest kwadratem.</p> <p>Czworokąt <math>ABLK</math> jest kwadratem ponieważ każdy z przystających trójkątów <math>ABY</math>, <math>BZL</math>, <math>LWK</math>, <math>KXA</math> jest prostokątny równoramienny, a więc kąty przy podstawie mają po <math>45^\circ</math>. Stwierdza, że <math> AB  = \frac{a\sqrt{2}}{2}</math> np. wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.</p>	1p.
<p>2. Ustala, ile i jakie klocki powstaną po odcięciu wszystkich „rogów”.</p> <p>Ponieważ sześcián ma 8 wierzchołków, więc Filip otrzyma osiem jednakowych czerwonych klocków w kształcie czworoscianu, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości <math>\frac{a\sqrt{2}}{2}</math>, a ściany boczne są trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych równych <math>\frac{1}{2}a</math> oraz jeden zielony klocek, który ma 8 ścian w kształcie trójkąta równobocznego o boku długości <math>\frac{a\sqrt{2}}{2}</math> i 6 kwadratów o boku długości <math>\frac{a\sqrt{2}}{2}</math>.</p>	1p.
<p>3. Poprawnie zapisuje za pomocą wyrażeń powierzchnię <math>P_1</math> czerwonych klocków i powierzchnię <math>P_2</math> zielonego klocka oraz porównuje je.</p> $P_1 = 8 \cdot \left( \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} + \frac{a^2}{8} \cdot 3 \right) = 2 \cdot \frac{2a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 = a^2\sqrt{3} + 3a^2 = a^2(3 + \sqrt{3})$ $P_2 = 6 \cdot \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8 \cdot \frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 \sqrt{3}}{4} = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(3 + \sqrt{3}),$ <p>a zatem powierzchnia wszystkich czerwonych klocków jest taka sama jak powierzchnia zielonego klocka.</p> <p><i>Uwaga. Jeżeli uczeń zauważy, że na łączną powierzchnię czerwonych klocków składa się taka sama liczba przystających trójkątów równobocznych co na powierzchnię zielonego klocka i w związku z tym porówna tylko pola 6 kwadratów z polem 24 trójkątów prostokątnych, to należy przyznać mu 1punkt.</i></p>	1p.

II sposób

<p>Uczeń:</p>		1p.
<p>1. Zauważa np. wykonując rysunek, że jedna ze ścian klocka powstałego po odcięciu „rogów” jest kwadratem o polu <math>P_1</math> równym połowie pola <math>P_2</math> ściany sześcianu oraz polu czterech ścian bocznych odciętych „rogów”.</p>		
<p>Trójkąty <math>AYB</math>, <math>BZL</math>, <math>LWK</math>, <math>KXA</math>, <math>ASB</math>, <math>BSL</math>, <math>LSK</math>, <math>KSA</math> są przystające, więc <math>P_{ABLK} = \frac{1}{2}P_{XYZW} = 4 \cdot P_{ABY}</math></p>		
<p>2. Ustala, ile i jakie klocki powstaną po odcięciu wszystkich „rogów”.</p>		1p.
<p>Ponieważ sześcian ma 8 wierzchołków, więc Filip otrzyma osiem jednakowych czerwonych klocków w kształcie czworoscianu, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, a ściany są przystającymi trójkątami prostokątnymi oraz jeden zielony klocek, który ma 8 ścian w kształcie trójkąta równobocznego przystającego do podstawy czerwonego klocka i 6 kwadratów o polu równym polu trzech ścian sześcianu.</p>		
<p>3. Porównuje pola powierzchni wszystkich czerwonych klocków z polem powierzchni zielonego klocka.</p>		1p.
<p>Na pole powierzchni czerwonych klocków składają się pola: 8 trójkątów równobocznych identycznych jak ściany w klocku zielonym oraz 24 jednakowych trójkątów prostokątnych. Pole 4 tych trójkątów odpowiada polu jednego kwadratu w zielonym klocku, a więc pole 24 trójkątów prostokątnych odpowiada polu 6 kwadratów w zielonym klocku. Zatem powierzchnia wszystkich czerwonych klocków jest taka sama jak powierzchnia zielonego klocka.</p>		
<p><i>Uwaga. Jeżeli uczeń zauważy, że na łączną powierzchnię czerwonych klocków składa się taka sama liczba przystających trójkątów równobocznych co na powierzchnię zielonego klocka i w związku z tym porówna tylko pola 6 kwadratów z polem 24 trójkątów prostokątnych, to należy przyznać mu 1punkt.</i></p>		