



KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów gimnazjów oraz oddziałów gimnazjalnych
województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2018/2019

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 5 do zad.12) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt	1 pkt	1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	D	C	A, B	D

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (2 pkt)

Solanka, to wodny roztwór soli. Do 5 kg 30%-owej solanki dolano taką ilość 40%-owej solanki, że po pobraniu 2 kg powstałego roztworu i całkowitym odparowaniu z niego wody otrzymano 700 g soli. Ile kilogramów 40%-owej solanki dolano?

<p>Uczeń:</p> <p>1. oblicza stężenie wodnego roztworu soli (x) po zmieszaniu 5 kg solanki 30% i a kg solanki 40%:</p> $0,3 \cdot 5 + 0,4 a = (5 + a) \cdot x$ $x = \frac{1,5 + 0,4a}{5 + a}$ <p>2. oblicza wagę wodnego roztworu soli 40%:</p> $2 \cdot \frac{1,5 + 0,4a}{5 + a} = 0,7; \text{ stąd } a = 5 \text{ kg.}$ <p>Odp. Dolano 5 kg solanki o stężeniu 40%.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	-----------------------

Zadanie 6. (2 pkt)

Miesięczny dochód pana Piotra stanowi $\frac{5}{8}$ łącznego miesięcznego dochodu pana Piotra i pana Jana. Natomiast jego miesięczne wydatki stanowią $\frac{9}{14}$ łącznych miesięcznych wydatków obu panów. Każdy z panów oszczędza miesięcznie 600 zł. Oblicz roczny dochód pana Jana.

<p>Uczeń:</p> <p>1. oznacza np. przez x - łączne miesięczne dochody, przez y - łączne miesięczne wydatki. Korzystając z zależności podanych w zadaniu układu i rozwiązuje układ równań:</p> $\begin{cases} \frac{5}{8}x - \frac{9}{14}y = 600 \\ \frac{3}{8}x - \frac{5}{14}y = 600 \end{cases}$ <p>rozwiązanie układu: $x = 9600$ zł, $y = 8400$ zł</p> <p>2. oblicza miesięczny dochód pana Jana - 3600 zł, następnie oblicza roczny dochód pana Jana - 43200 zł.</p> <p>Odp. Roczny dochód pana Jana to 43200 zł.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	-----------------------

Zadanie 7. (2 pkt)

Suma pewnych dwóch liczb wynosi $\sqrt{20}$, a ich różnica $\sqrt{12}$. Wykaż, że ich iloczyn jest równy 2.

Uczeń:	
I sposób	1p.
1. zapisuje sumę i różnicę dwóch liczb np. dla a i b $a + b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$, $a - b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ i oblicza $a = \sqrt{5} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{5} - \sqrt{3}$	
2. oblicza iloczyn liczb a i b $(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$ lub	1p.
II sposób	
1. korzysta z tożsamości $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$ lub przekształca tożsamość otrzymując $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$	1p.
2. zapisuje zależność: $(\sqrt{20})^2 - (\sqrt{12})^2 = 4ab$ stąd $4ab = 8$, więc $ab = 2$	1p.

Zadanie 8. (2 pkt)

Dwa samochodziki **A** i **B**, ustawione na linii START ruszyły jednocześnie w kierunku METY. Samochodzik **A** pokonał początkowe 25 cm w czasie 4 sekund. Samochodzik **B** pokonał początkowe 30 cm w czasie 5 sekund. Na całej trasie samochodziki nie zmieniały prędkości. Na metę jeden z nich przyjechał dwie sekundy przed drugim. Jak długa była trasa wyścigu?

Uczeń:	
I sposób	
1. oblicza prędkości samochodziku A i B A $25 : 4 = 6,25$ [cm/s] B $30 : 5 = 6$ [cm/s]	1p.
2. oblicza czas (t) potrzebny na przebycie drogi od startu do mety $6,25 \cdot t = (t + 2) \cdot 6$, skąd $t = 48$ [s]. Oblicza drogę $S = 6,25 \cdot 48 = 300$ [cm] lub $S = 6 \cdot 50 = 300$ [cm] = 3[m].	1p.

lub	
II sposób	
1. znajduje NWW $(25,30) = 150$ i oblicza czas przejazdu tego odcinka dla każdego samochodziku: B przejeżdża dystans 150 cm w ciągu $5 \cdot 5 = 25$ [s] A przejeżdża dystans 150 cm w ciągu $6 \cdot 4 = 24$ [s]	1p.
2. wnioskuje, że na 150 cm różnica czasu jest $25 - 24 = 1$ s, to droga jest równa $2 \cdot 150 = 300$ [cm] = 3[m].	1p.
Odp. Trasa wyścigu miała długość 3 m (300 cm).	

Zadanie 9. (2 pkt)

Pojemnik na wodę jest zbudowany z pięciu płytek: trzech w kształcie prostokąta o bokach długości 10 cm i 15 cm oraz dwóch w kształcie trapezu równoramiennego o bokach długości: 15 cm, 15 cm, 15 cm, 33 cm. Ile wody zmieści się w pojemniku wypełnionym do połowy swojej głębokości?

Uczeń:	
1. zauważa, że pojemnik stoi na podstawie w kształcie prostokąta oraz ma on kształt graniastosłupa o podstawie trapezu równoramiennego i oblicza pole trapezu, którego wysokość jest równa połowie wysokości h_1 : $x = (33 - 15) : 2 = 9$ [cm] (rys.1), wysokość trapezu $h_1 = 12$ cm stąd $h_2 = 12 : 2 = 6$ [cm], następnie np. korzystając z własności przystających trójkątów prostokątnych podaje długość odcinka $y = 4,5$ cm (rys.2), zatem dłuższa podstawa powstałego trapezu jest równa $15 + 2 \cdot 4,5 = 24$ [cm] stąd $P = (24 + 15) \cdot 6 : 2 = 117$ [cm ²]	1p.
2. oblicza objętość wody w pojemniku wypełnionym do połowy głębokości: $V = 117 \cdot 10 = 1170$ [cm ³]	1p.
<div style="display: flex; justify-content: space-around; align-items: flex-end;"> <div style="text-align: center;"> <p>rys.1</p> </div> <div style="text-align: center;"> <p>rys. 2</p> </div> </div>	

Zadanie 10. (2 pkt)

Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite n , dla których liczba $n^2 + 2n + 7$ jest podzielna przez $n+1$.

Uczeń:

1. przekształca wyrażenie $n^2 + 2n + 7 = (n + 1)^2 + 6$;
2. analizuje podzielność sumy przez $n+1$ i stwierdza, że pierwszy składnik jest podzielny $n+1$, zatem i drugi składnik też musi być podzielny przez $n+1$, a tak się dzieje dla $n = 1, 2$ i 5 , gdyż liczba 6 dzieli się przez: $1, 2, 3, 6$.

Uwaga: W przypadku wyznaczenia poprawnie wszystkich liczb poprzez podstawienie i sprawdzenie oraz braku uzasadnienia, że są to wszystkie liczby – uczeń otrzymuje 1 pkt.

1p.

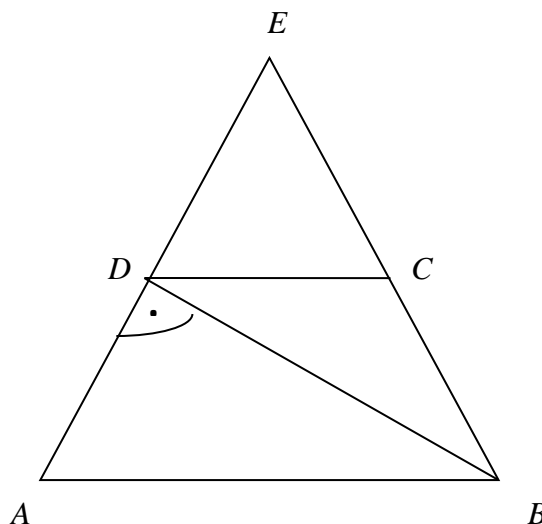
1p.

Zadanie 11. (2 pkt)

W trapezie równoramiennym przekątna jest prostopadła do ramienia i dzieli kąt ostry trapezu na dwa kąty o równej mierze. Uzasadnij, że długość jednej podstawy trapezu jest dwa razy większa od długości drugiej podstawy.

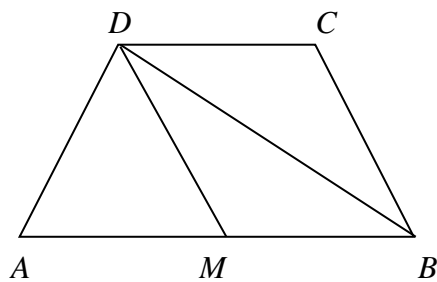
Uczeń:

I sposób



1. zauważa, że trójkąt prostokątny ABD ma kąty ostre 60° i 30° więc miara kąta ABC jest równa 60° . Przedłuża ramiona trapezu i otrzymuje trójkąt ABE , stwierdza, że jest to trójkąt równoboczny, bo ma równe kąty;

1p.

2. zauważa, że przekątna DB jest wysokością trójkąta równobocznego ABC , dzieli więc bok AE na połowy ($ AE = AB $). Zauważa, że trójkąt DCE jest trójkątem o kątach równych 60° - jest więc równoboczny, a zatem bok $ DC = DE = 0,5 AB $.	1p.
lub II sposób	
	1p.
1. zaznacza środek M boku AB w trapezie $ABCD$ i uzasadnia, że czworokąt $MB CD$ jest rombem;	1p.
2. wskazuje na równość boków czworokąta $MB CD$ i wnioskuje, że $ MB = DC = 0,5 AB $.	

Zadanie 12. (2 pkt)

Wykaż, że prostokąt o wymiarach 16×36 można podzielić na dwa wielokąty, z których da się złożyć kwadrat.

<p>Uczeń:</p>	
<p>1. oblicza pole prostokąta $16 \cdot 36 = 576$ i bok kwadratu o takim samym polu – bok kwadratu jest równy 24;</p>	1p.
<p>2. dzieli prostokąt - rysuje łamaną zgodnie z rysunkiem.</p>	1p.
