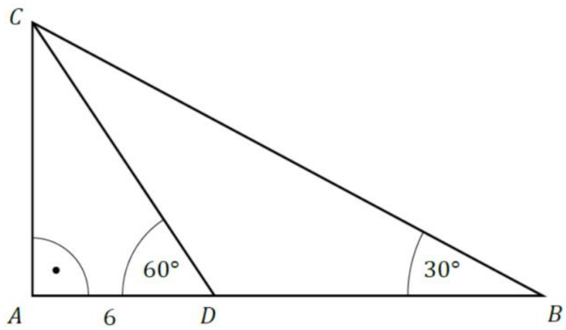
WOJEWÓDZKI KONKURS PRZEDMIOTOWY
Z MATEMATYKI
dla uczniów szkół podstawowych w roku szkolnym 2021/2022

etap wojewódzki - SCHEMAT OCENIANIA

Nr zadania	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	
Poprawna odpowiedź	B	D	C	D	E	C	D	C	A	B	E	A	E	F	P
Liczba punktów	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3

Zadanie nr 15 (7 pkt)
W trójkącie prostokątnym ABC kąt przy wierzchołku A jest prosty, a kąt przy wierzchołku B ma miarę 30º. Na boku AB tego trójkąta obrano punkt D tak, że miara kąta CDA jest równa 60º, a odcinek AD ma długość 6. Oblicz pole powierzchni trójkąta ABC.

Rozwiązanie:



Kąt ACD ma miarę 30º, a więc w trójkącie ADC $|CD| = 12$ i $|AC| = 6\sqrt{3}$

I sposób: Kąt CDB ma miarę 120º, a więc kąt BCD ma miarę 30º.

II sposób: Kąt ACB ma miarę 60º, a więc kąt DCB ma miarę 30º.

Ponieważ w trójkącie DBC dwa kąty mają równe miary, to jest on równoramienny

i $|DB| = |CD| = 12$

$|AB| = 6 + 12 = 18$

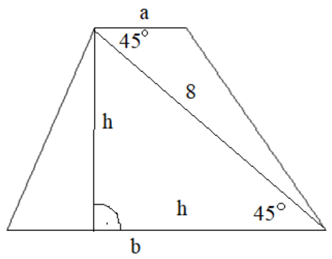
$P = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2} \cdot 18 \cdot 6\sqrt{3} = 54\sqrt{3}$

Rysunek	1 pkt
Obliczenie kąta ACD 30º	1 pkt
Obliczenie kąta DCB 30º	1 pkt
Podanie długości $\|AC\| = 6\sqrt{3}$	1 pkt
Podanie długości $\|CD\| = 12$	1 pkt
Zauważenie, że trójkąt DBC jest równoramienny i podanie $\|DB\| = 12$	1 pkt
Obliczenie pola trójkąta ABC	1 pkt

Zadanie nr 16 (7 pkt)

Przekątna trapezu ma długość 8 i tworzy z podstawami tego trapezu kąty 45º. Połowa sumy długości podstaw trapezu jest równa długości jego wysokości. Oblicz pole tego trapezu.

Rozwiązanie:



$h\sqrt{2} = 8$ stąd $h = \frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$ lub $h^2 + h^2 = 8^2$ $2h^2 = 64$ $h^2 = 32$ $h = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}$

Zapisujemy zależność wynikającą z treści zadania $\frac{1}{2}(a+b) = h$ czyli $a + b = 2h = 8\sqrt{2}$

Obliczamy pole $P = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h = \frac{1}{2}\cdot 8\sqrt{2}\cdot 4\sqrt{2} = 16\cdot 2 = 32$

lub $P = h\cdot h = h^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 = 16\cdot 2 = 32$

Rysunek z zaznaczoną przekątną i kątami 45º	1 pkt
Narysowanie wysokości i zauważenie, że trójkąt jest prostokątny równoramienny	1 pkt
Obliczenie wysokości (1 pkt za metodę)	2 pkt
Zapisanie zależności między wysokością i sumą długości podstaw	1 pkt
Obliczenie pola powierzchni (1 pkt za poprawną metodę)	2pkt

Zadanie nr 17 (7 pkt)

Dana jest liczba dwucyfrowa, w której cyfra jedności jest większa od cyfry dziesiątek. Liczba ta przy dzieleniu przez sumę swoich cyfr daje iloraz 4 i resztę 3. Przy dzieleniu przez różnicę cyfr daje iloraz 15 i resztę 2. Jaka to liczba?

Rozwiązanie:

x – cyfra dziesiątek

y – cyfra jedności

10x + y – szukana liczba

$\begin{cases} 10x + y = 4(x+y) + 3 \\ 10x + y = 15(y-x) + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 10x + y = 4x + 4y + 3 \\ 10x + y = 15y - 15x + 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 6x - 3y = 3 \ \ /:3 \\ 25x - 14y = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 25x - 14y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 25x - 14(2x - 1) = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ 25x - 28x + 14 = 2 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ -3x = -12 \quad /:(-3) \end{cases}$ $\begin{cases} x = 4 \\ y = 7 \end{cases}$

Szukaną liczbą jest 47.

Oznaczenie cyfry dziesiątek i cyfry jedności	1 pkt
Zapisanie szukanej liczby w postaci 10x + y	1 pkt
Zapisanie pierwszego równania	1 pkt
Zapisanie drugiego równania	1 pkt
Rozwiązanie układu równań	2 pkt
Podanie odpowiedzi: szukana liczba to 47.	1 pkt

UWAGA:

Jeżeli układ równań rozwiązany jest z usterką, przyznajemy za rozwiązanie układu 1 pkt. Nie przyznajemy wówczas punktu za odpowiedź.

Zadanie nr 18 (6 pkt)

W dwóch pudełkach znajdują się czerwone i białe kule. W pierwszym jest 15 kul, w tym 5 białych. W drugim pudełku jest 25 kul, w tym 18 czerwonych. Do obu pudełek dokładamy jeszcze 16 białych kul. Oblicz, po ile kul należy dołożyć do każdego z pudełek, aby prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli z każdego z nich było takie samo.

Rozwiązanie:

Wprowadzamy oznaczenia:

x - liczba białych kul dołożonych do I pudełka

16-x - liczba białych kul dołożonych do II pudełka

I pudełko 15+x kul, w tym 5+x białych

II pudełko 25+16-x kul, w tym 7+16-x białych

Układamy równanie $\frac{5+x}{15+x} = \frac{23-x}{41-x}$ stąd (5+x)(41-x)=(15+x)(23-x)

205-5x+41x-x²=345-15x+23x-x²

czyli 28x=140, a więc x=5 16-5=11

Do I pudełka dokładamy 5 kul, do II 11 kul.

Zapisanie liczby kul i liczby białych kul w każdym z pudełek po dołożeniu białych kul	2 pkt
Ułożenie równania	1 pkt
Zastosowanie własności proporcji	1 pkt
Rozwiązanie równania x=5	1 pkt
Odpowiedź: do I pudełka dokładamy 5 kul, do II 11 kul	1 pkt

x – ilość białych kul dołożonych do I pudełka

y – ilość białych kul dołożonych do II pudełka

$\begin{cases} x + y = 16 \\ \frac{5+x}{15+x} = \frac{7+y}{25+y} \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 16 \\ (5 + x)(25 + y) = (15 + x)(7 + y) \end{cases}$

$\begin{cases} x + y = 16 \\ 125 + 5y + 25x + xy = 105 + 15y + 7x + xy \end{cases}$ $\begin{cases} x + y = 16 \\ 18x - 10y = -20 \end{cases}$

$$\begin{cases} 5x+5y=80 \\ 9x-5y=-10 \end{cases} \qquad \begin{cases} 14x=70 \ /:14 \\ x+y=16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=5 \\ 5+y=16 \end{cases} \qquad \begin{cases} x=5 \\ y=11 \end{cases}$$

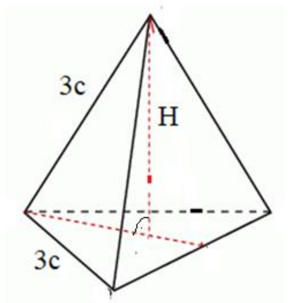
Do I pudełka dokładamy 5 kul, do II 11 kul.

Wprowadzenie oznaczeń	1 pkt
Zapisanie układu równań	2 pkt
Zastosowanie własności proporcji	1 pkt
Rozwiązanie układu równań x=5, y=11	1 pkt
Odpowiedź	1 pkt

Zadanie nr 19 (8 pkt)

Oblicz pole powierzchni i objętość czworościanu foremnego o krawędzi długości 3c.

Rozwiązanie:



$P = 4 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = a^2\sqrt{3} = (3c)^2 \cdot \sqrt{3} = 9c^2\sqrt{3}$

Wysokość podstawy $h = \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{3c\sqrt{3}}{2}$, obliczamy $\frac{2}{3}$ wysokości podstawy $\frac{2}{3} \cdot \frac{3c\sqrt{3}}{2} = c\sqrt{3}$

Aby obliczyć wysokość czworościanu H, zapisujemy twierdzenie Pitagorasa

$H^2 + \left(c\sqrt{3}\right)^2 = (3c)^2 \qquad H^2 + 3c^2 = 9c^2 \qquad H^2 = 6c^2 \qquad H = c\sqrt{6}$

$V = \frac{1}{3}P_p \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{(3c)^2\sqrt{3}}{4} \cdot c\sqrt{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{9c^2\sqrt{3}}{4} \cdot c\sqrt{6} = \frac{3c^3\sqrt{18}}{4} = \frac{9c^3\sqrt{2}}{4}$

Rysunek	1 pkt
Obliczenie pola powierzchni czworościanu (1 pkt za wzór na pole trójkąta równobocznego)	2 pkt
Obliczenie $\frac{2}{3}$ wysokości podstawy	1 pkt
Poprawne zapisanie twierdzenia Pitagorasa	1 pkt
Obliczenie wysokości czworościanu	1 pkt
Obliczenie objętości czworościanu (1 pkt za poprawną metodę)	2 pkt

UWAGA:

Za każde poprawne rozwiązanie inne niż w schemacie oceniania przyznajemy maksymalną liczbę punktów.