KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów szkół podstawowych województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2018/2019

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 5 do zad.12) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maks. liczba punktów	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**A**	**C**	**B**	**B**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (2 pkt)

Trzy pompy mają opróżnić basen. Pierwsza pompa samodzielnie opróżniłaby basen w ciągu 15 godzin, druga w ciągu 10 godzin, a trzecia w ciągu 9 godzin. Oblicz, czy trzy pompy pracujące jednocześnie zdążą opróżnić ten basen w ciągu 3 godzin.

<table>
<tr><td>Uczeń:
I sposób
1. wprowadza oznaczenia i układa równanie (zależność) zgodne z warunkami zadania, np.:
x – liczba godzin potrzebna do opróżnienia basenu przez wszystkie trzy pompy, pojemność basenu przyjmujemy 1.
ilość wody wypompowana przez poszczególne pompy w ciągu jednej godziny:
I pompa: $\frac{1}{15}x$, II pompa: $\frac{1}{10}x$, III pompa: $\frac{1}{9}x$
2. rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź
$\frac{1}{15}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{9}x = 1$
$25x = 90$ stąd $x = 3{,}6$
Odp. Trzy pompy nie zdążą opróżnić basenu w ciągu 3 godzin.
II sposób
1. oblicza ilość wody usuniętej przez wszystkie 3 pompy w ciągu 1 godziny
$\frac{1}{15}+\frac{1}{10}+\frac{1}{9}=\frac{25}{90}$
2. oblicza ilość wody usuniętej przez wszystkie 3 pompy w ciągu 3 godzin $\left(\frac{75}{90}\right)$
i wnioskuje, że jest to za mało.
Odp. Trzy pompy nie zdążą opróżnić basenu w ciągu 3 godzin.</td><td>1p.

1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 6. (2 pkt)

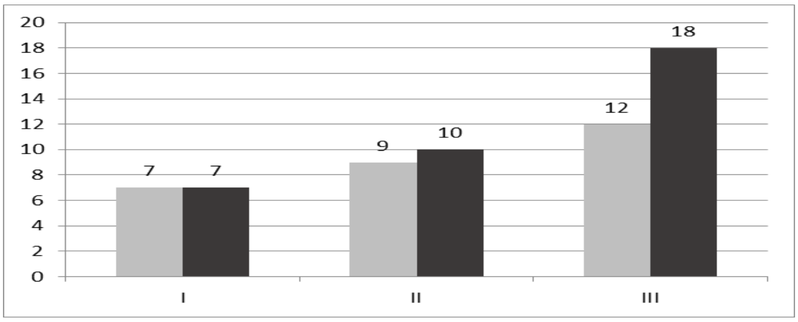
Punkty $A = (0,0)$ oraz $C = (0,-8)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz współrzędne punktu E leżącego na osi OX, wiedząc, że pole kwadratu $ABCD$ jest dwa razy mniejsze od pola trójkąta ACE. Podaj wszystkie rozwiązania.

Uczeń:	
1. podaje współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu tj. punktów B = (4,-4) oraz D = (-4,-4) i zauważa, że pole trójkąta ACE jest dwa razy większe od pola kwadratu $ABCD$ wtedy, gdy wysokość trójkąta AE jest dwa razy dłuższa od przekątnej kwadratu $ABCD$;	1p.
2. wskazuje możliwe współrzędne punktu E: E_1 = (16,0) oraz E_2 = (-16,0).	1p.
Odp. Punkt E może mieć współrzędne (16,0) lub (-16,0).	
Uwaga: jeżeli uczeń rozważy w pełni tylko jeden przypadek (poda w odpowiedzi współrzędne jednego punktu E) otrzymuje 1 punkt.	

Zadanie 7. (2 pkt)

Stosunek mas trzech różnych stopów srebra wynosi 7 : 10 : 18, natomiast stosunek mas czystego srebra zawartego w tych stopach równa się odpowiednio 7 : 9 : 12. Po stopieniu wszystkich kawałków otrzymano 350 gramów stopu, w którym czyste srebro stanowi 72% jego masy. Oblicz, w którym stopie jest najmniejsza procentowa zawartość srebra.

Uczeń:	
I sposób	
1. oblicza masy trzech różnych stopów:	1p.
$7x + 10x + 18x = 350$, $35x = 350$, $x = 10$	
I stop $7\cdot 10 = 70\ g$, II stop $10\cdot 10= 100\ g$, III stop $18\cdot 10 = 180\ g$ (masy stopów);	
2. oblicza masy srebra w poszczególnych stopach:	1p.
$7y + 9y +12y = 0{,}72\cdot 350$ czyli $7y + 9y +12y =252$ stąd $28y= 252$ zatem $y = 9$	
I stop $7\cdot 9 = 63\ g$, II stop $9\cdot 9 = 81\ g$, III stop $12\cdot 9 = 108\ g$ (masa srebra w stopach)	
i oblicza procent srebra w poszczególnych stopach.	
W I stopie jest 90% srebra, w II stopie jest 81% srebra, w III stopie jest 60% srebra.	
Odp. Najmniejsza procentowa zawartość srebra jest w III stopie.	
II sposób	
1. oblicza, że w I stopie jest $\frac{7}{35}=\frac{28}{140}$ ogólnej masy i $\frac{7}{28}=\frac{35}{140}$ ogólnego srebra, a stosunek tych ułamków (*masy srebra* do *ogólnej masy*) to $\frac{35}{28}$. Analogicznie oblicza, że w II stopie jest $\frac{10}{35}=\frac{40}{140}$ ogólnej masy oraz $\frac{9}{28}=\frac{45}{140}$ masy srebra, a stosunek tych ułamków to $\frac{45}{40}$, zaś w III stopie jest $\frac{18}{35}=\frac{72}{140}$ ogólnej masy i $\frac{12}{28}=\frac{60}{140}$ masy srebra,	

a stosunek tych ułamków to $\frac{60}{72}$; 2. stwierdza, że w trzecim stopie stosunek ułamków jest mniejszy niż 1, a w pozostałych stopach większy (bo I stop: $\frac{35}{28} > 1$, II stop: $\frac{45}{40} > 1$, III stop: $\frac{60}{72} < 1$) oraz wnioskuje stąd, że <u>w III stopie jest najmniej srebra</u>. Odp. Najmniejsza procentowa zawartość srebra jest w III stopie. *III sposób* 1. analizuje graficznie treść zadania np. rysuje diagram słupkowy danych {7,7}, {9, 10}, {12,18}  tj. I stop: słupek srebra wysokości 7 i obok słupek wysokości 7, II stop: słupek srebra wysokości 9 i obok słupek wysokości 10, III stop: słupek srebra wysokości 12 i obok słupek wysokości 18. 2. wnioskuje na podstawie diagramu, gdzie jest najmniej srebra oraz zapisuje odpowiedź. Odp. Najmniejsza procentowa zawartość srebra jest w III stopie.	

Zadanie 8. (2 pkt)

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku długości a. Przekątne dwóch ścian bocznych poprowadzone z jednego wierzchołka tworzą kąt 60°. Wykaż, że jest to sześcian.

Uczeń: 1. uzasadnia, że trójkąt o ramionach będących przekątnymi ścian bocznych jest trójkątem równoramiennym o kącie przy wierzchołku równym 60°, a więc jest to trójkąt równoboczny o długości boku $a\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku a);	1p.
2. oblicza wysokość H prostopadłościanu (z trójkąta prostokątnego o bokach H, $a\sqrt{2}$, a) np. $H^2 = \left(a\sqrt{2}\right)^2 - a^2$ stąd $H = a$ i wnioskuje, że ten prostopadłościan jest sześcianem o krawędzi a.	1p.

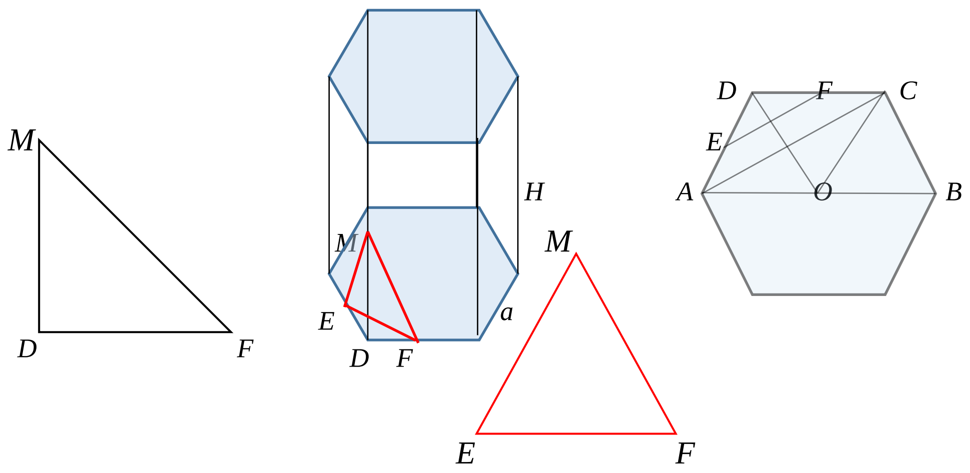
Zadanie 9. (2 pkt)

Po torze wyścigowym jeździ kolarz. Jeden pełny obrót pedałami powoduje 4 pełne obroty koła rowerowego. Koło rowerowe ma średnicę 70 cm. Ile pełnych obrotów pedałami wykona kolarz, aby przejechać 1 km? Zakładamy, że kręci pedałami bez przerwy. Wykonaj obliczenia przyjmując, że liczba π jest w przybliżeniu równa $3\frac{1}{7}$.

Uczeń:	
1. oblicza odległość przy jednym obrocie pedałami $s_1 \approx 880$ cm;	1p.
2. oblicza liczbę obrotów na trasie 1 km = 100000 cm, 100000 : 880 ≈ 113,6 ≈114 obrotów	1p.
Odp. Kolarz wykona 114 pełnych obrotów pedałami.	
Uwaga: dopuszcza się podanie w odpowiedzi liczby 113 jako liczby pełnych obrotów będącej przybliżeniem otrzymanego wyniku z niedomiarem.	

Zadanie 10. (2 pkt)

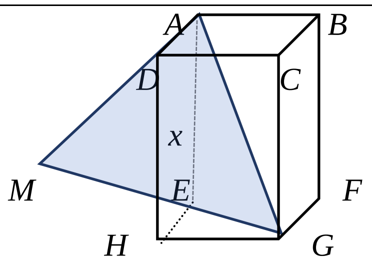
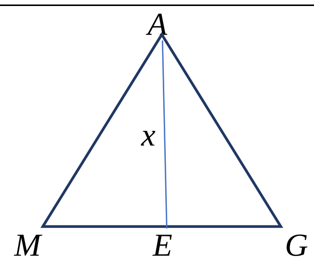
W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy $a = 4$ cm oraz wysokości $H = 4\sqrt{2}$ cm połączono odcinkami środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka i otrzymano trójkąt. Wykaż, że jest to trójkąt równoboczny.

Uczeń:  	
1. analizuje warunki zadania np. oznacza krawędź podstawy graniastosłupa $a = \lvert AG\rvert = \lvert GH\rvert = \lvert HB\rvert = \lvert AD\rvert = \lvert DC\rvert = \lvert CO\rvert = \lvert OD\rvert = \lvert AO\rvert = 4$ cm i uzasadnia, że $\lvert EF\rvert = 0{,}5\ \lvert AC\rvert$, zaś $\lvert AC\rvert$ równa się podwojonej wysokości trójkąta równobocznego o boku $a = 4$ cm (bo czworokąt *AOCD* jest rombem, więc przekątne dzielą się na połowy, pod kątem prostym) zatem $\lvert AC\rvert = 4\sqrt{3}$ cm i $\lvert EF\rvert = 2\sqrt{3}$ cm;	1p.

2. zauważa, ze trójkąt EFM jest równoramienny (bo $\lvert MF\rvert = \lvert ME\rvert$ – są to odcinki łączące środki sąsiednich boków w jednakowych prostokątach) i korzystając z tego, że $\lvert DM\rvert = 0{,}5\ H = 2\sqrt{2}$ cm oraz $\lvert DF\rvert = 2$ cm znajduje $\lvert MF\rvert$ (bo trójkąt MDF jest prostokątny) $\lvert MF\rvert = 2\sqrt{3}$ cm, po czym wnioskuje, że trójkąt EFM jest równoboczny, gdyż $\lvert EF\rvert = \lvert MF\rvert = \lvert ME\rvert = 2\sqrt{3}$ cm.	1p.

Zadanie 11. (2 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną jego podstawy, wychodzącymi z jednego wierzchołka, jest równy 60°. Oblicz objętość tego graniastosłupa, wiedząc, że krawędź jego podstawy jest równa 10.

Uczeń:  	
1. zauważa, że krawędź boczna AE graniastosłupa jest jednocześnie wysokością trójkąta równobocznego MGA, zaś podwojona przekątna podstawy graniastosłupa jest podstawą trójkąta MGA i oblicza krawędź boczną graniastosłupa $x = \lvert AE\rvert = 10\sqrt{6}$;	1p.
2. oblicza objętość graniastosłupa. Odp. $V = 1000\sqrt{6}$.	1p.

Zadanie 12. (2pkt)

Wykaż, że nie istnieje para liczb całkowitych dodatnich spełniających równość: $3x^2 + 5y^2 = 360$.

Uczeń: *I sposób* 1. zauważa, że jeżeli x i y są dwiema liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $3x^2 + 5y^2 = 360$, to $x \le 10$ (gdy $x \le 10$ to $3x^2 < 360$, zaś dla $x = 11$, $3\cdot 121 > 360$) i $y \le 8$ (gdy $y \le 8$ to $5y^2 < 360$, zaś dla $y = 9$, $5\cdot 81 > 360$) a ponadto x dzieli się przez 5 (gdyż $3x^2 = 5(72 - y^2)$), zaś y dzieli się przez 3 (gdyż $5y^2 = 3(120 - x^2)$);	1p.

2. wyznacza pary (5,3), (5,6), (10,3), (10,6) mogące spełniać równość, następnie sprawdza i stwierdza, że **nie istnieje** całkowite dodatnie rozwiązanie tej równości. *II sposób* 1. typuje $\boldsymbol{x \leq 10}$ (gdy $x \leq 10$ to $3x^2 < 360$, zaś dla $x = 11$, $3 \cdot 121 > 360$) i $\boldsymbol{y \leq 8}$ (gdy $y \leq 8$ to $5y^2 < 360$, zaś dla $y = 9$, $5 \cdot 81 > 360$) jako możliwy zakres rozwiązań; 2. sprawdza przypadki np. dla y = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1 oraz ustala i podaje odpowiedź, że **nie istnieje** całkowite dodatnie rozwiązanie tej równości.	1p.