KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów szkół podstawowych województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2017/2018

Model odpowiedzi i schematy punktowania

ETAP WOJEWÓDZKI

UWAGA

Za **każde poprawne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 5 do zad.12) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt	1 pkt	1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	C	D	C	B

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (2 pkt)

Z liczby trzycyfrowej a utworzono dwie liczby: pierwszą przez dopisanie cyfry 2 na początku, a drugą przez dopisanie cyfry 2 na końcu. Uzasadnij, że iloczyn otrzymanych liczb pomniejszony o dwukrotność liczby a jest podzielny przez 10.

Uczeń: 1. Zapisuje treść zadania w postaci wyrażenia: $(2 \cdot 1000 + a) \cdot (10a + 2) - 2a$, gdzie a jest liczbą trzycyfrową 2. Przekształca wyrażenie i wykazuje podzielność przez 10 <u>Odpowiedź:</u> Suma jest podzielna przez 10, bo każdy składnik jest podzielny przez 10.	1p. 1p.

Zadanie 6. (2 pkt.)

Mamy 3 beczki: pierwsza jest pełna wody, a dwie kolejne są puste. Jeżeli drugą beczkę napełnimy wodą z pierwszej, to w pierwszej beczce zostanie $\frac{3}{5}$ jej zawartości.

Jeżeli następnie trzecią napełnimy wodą z drugiej, to w drugiej zostanie $\frac{1}{6}$ jej zawartości.

Gdyby zaś z pierwszej pełnej beczki napełnić wodą obie puste beczki: drugą i trzecią, to w pierwszej zostanie 320 litrów wody. Jaka jest pojemność każdej beczki?

Uczeń: 1.Oblicza x - objętość pierwszej beczki: $x - 320 = \frac{2}{5}x + \frac{2}{5} \cdot \frac{5}{6}x$, $x = 1200$ 2. Oblicza objętość drugiej: $\frac{2}{5} \cdot 1200 = 480$ i trzeciej beczki $1200 - 480 - 320 = 400$ <u>Odpowiedź:</u> Pojemność pierwszej beczki: 1200 litrów, drugiej beczki: 480 litrów, trzeciej beczki: 400 litrów.	1p. 1p.

Zadanie 7. (2 pkt.)

Trzech pracowników wykonało pewną pracę w ciągu 8 dni. Pierwszy z nich mógłby wykonać sam całą pracę w ciągu 20 dni. Drugi pracownik na wykonanie tej pracy potrzebowałby 24 dni. W ciągu ilu dni wykonałby tę pracę trzeci pracownik?

Uczeń: 1. Określa „wydajności" poszczególnych pracowników, gdyby pracę wykonywali samodzielnie: pierwszy $\frac{1}{20}$, drugi $\frac{1}{24}$, trzeci $\frac{1}{x}$ (gdzie x to szukana liczba dni). 2. Układa równanie: $\frac{1}{20} + \frac{1}{24} + \frac{1}{x} = \frac{1}{8}$ i wyznacza $x = 30$ <u>Odpowiedź:</u> Trzeci pracownik wykonałby tę pracę w 30 dni.	1p. 1p.

Zadanie 8. (2 pkt.)

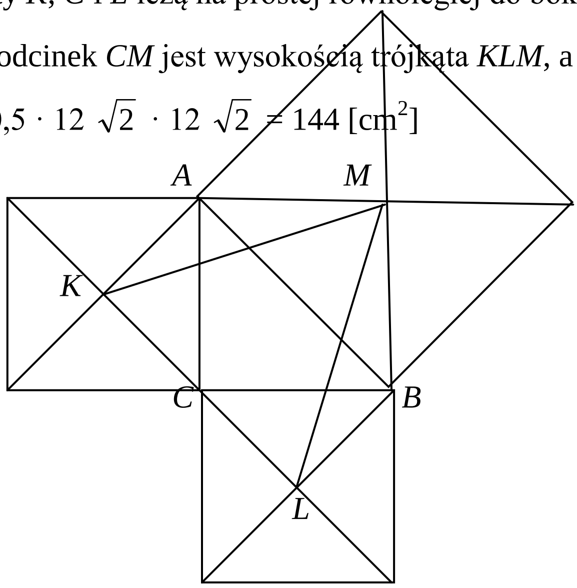
Określ, dla jakich liczb a nie można obliczyć wartości wyrażenia:

$$\frac{(a+3)\cdot(a-4)\cdot\sqrt{a}}{|3a|-9}$$

Uczeń: 1. Wyklucza te wartości liczby a, dla których mianownik byłby równy 0: $a \neq 3$ i $a \neq -3$ 2. Wyklucza te wartości liczby a, dla których wyrażenie podpierwiastkowe byłoby ujemne i podaje odpowiedź. <u>Odpowiedź:</u> Ułamek algebraiczny traci sens liczbowy dla $a = 3$ lub $a < 0$.	1p. 1p.

Zadanie 9. (2 pkt.)

Przyprostokątna trójkąta prostokątnego równoramiennego ma długość 12 cm. Na zewnątrz, na każdym boku trójkąta zbudowano kwadrat. Punkty przecięcia przekątnych w każdym z trzech kwadratów są wierzchołkami nowego trójkąta. Oblicz pole nowopowstałego trójkąta.

Uczeń: 1. Zauważa, że punkty *K*, *C* i *L* leżą na prostej równoległej do boku *AB* oraz $KL = 2KC$, $KL = 12\sqrt{2}$ cm i odcinek *CM* jest wysokością trójkąta *KLM*, a $CM = 12\sqrt{2}$ cm	1p.
2. Oblicza $P_{\Delta KLM} = 0{,}5 \cdot 12\sqrt{2} \cdot 12\sqrt{2} = 144\ [cm^2]$	1p.
	
<u>Odpowiedź:</u> Pole trójkąta *KLM* jest równe 144 cm^2.	

Zadanie 10. (2 pkt.)

Obwód trójkąta równoramiennego *ABC* wynosi 40 cm. Gdy jeden z boków trójkąta powiększymy dwukrotnie, to obwód będzie wynosił 48 cm. Jakiej długości mogą być boki trójkąta *ABC*? Uzasadnij odpowiedź.

Uczeń: 1. Rozważa jeden z przypadków, np.: <u>I przypadek:</u> 1. Wyznacza boki trójkąta korzystając z zależności: $b = 40 - 2a$ (*b* to podstawa trójkąta, *a* to ramię trójkąta) i $2b + 2a = 48$ otrzymując $a = 16$, $b = 8$, stąd boki trójkąta *ABC* są długości: $a = 16$ cm, $a = 16$ cm, $b = 8$ cm.	1p.
2. Rozważa drugi z przypadków i uzasadnia odpowiedź, np.: <u>II przypadek</u> 2. Wyznacza boki trójkąta korzystając z zależności: $b = 40 - 2a$ (*b* to podstawa trójkąta, *a* to ramię trójkąta) i $b + 3a = 48$ otrzymując $a = 8$, $b = 24$, a następnie wnioskuje, że trójkąt nie może mieć boków o takich długościach, bo nie spełniają nierówności trójkąta. <u>Odpowiedź</u>: Boki trójkąta *ABC* mogą być jedynie długości: 16 cm, 16cm, 8cm.	1p.

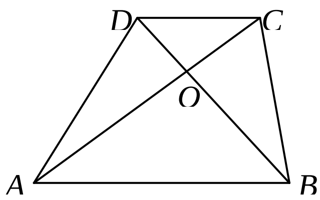
Zadanie 11. (2 pkt.)

Dwa jednakowe prostopadłościany sklejamy w jeden na wszystkie możliwe sposoby. Oznaczmy największe z pól powierzchni otrzymanych prostopadłościanów przez P_D, a najmniejsze przez P_M. Czy możliwe jest, żeby $\frac{P_D}{P_M}$ = 2,5? Uzasadnij odpowiedź.

Uczeń: 1. Zapisuje oba pola: $P_D = 2bc + 2ac + ab$ i $P_M = bc + 2ac + 2ab$ lub zapisuje iloraz pól $\frac{P_D}{P_M} = \frac{2bc+2ac+ab}{bc+2ac+2ab}$, oznaczając krawędzie wyjściowych prostopadłościanów w kolejności niemalejącej np. przez *a, b, c*.	1p.
2. Zauważa, że gdyby po skróceniu ułamka wynik był równy 2,5, to z równania: $2bc + 2ac + ab = 2{,}5(bc + 2ac + 2ab)$ mielibyśmy $0{,}5bc + 3ac + 4ab = 0$, skąd wnioskuje, że opisana w zadaniu sytuacja jest niemożliwa.	1p.

Zadanie 12. (2 pkt.)

W dowolnym trapezie *ABCD* przekątne i boki wyznaczają osiem trójkątów. Znajdź wszystkie pary trójkątów o równych polach. Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:  	
1. Zauważa, że Δ *ABC* i Δ *ABD* mają równe pola, bo mają te same wysokości i te same podstawy. Analogicznie uzasadnia równość pól Δ *CDB* i Δ *CDA*.	1p.
2. Zauważa, że równe pola mają Δ *AOD* i Δ *COB*, bo od trójkątów o równych polach (Δ *ABC* i Δ *ABD*) odejmujemy ich część wspólną tj. pole Δ *ABO*. <u>Odpowiedź:</u> Szukane pary trójkątów o równych polach: Δ *ABC* i Δ *ABD*, Δ *CDB* i Δ *CDA*, Δ *AOD* i Δ *COB*. *Uwaga: Uczeń uzyskuje 1 punkt, jeżeli poprawnie uzasadni i wskaże dwie pary trójkątów o równych polach.*	1p.