MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP REJONOWY 2021/2022

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**
Maks. liczba punktów	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**B., C.**	**B., C.**	**P, P**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 4. (0-2 pkt)

Uzasadnij, że wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ jest liczbą naturalną.

I sposób

<table>
<tr><td>

Uczeń:

1. Przekształca dane wyrażenie grupując po dwa kolejne wyrazy licznika, wyłącza dwukrotnie przed nawias największy wspólny czynnik i skraca ułamek.

$$\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}=$$
$$=\frac{(3+3^2)-(3^3+3^4)+(3^5+3^6)-(3^7+3^8)+(3^9+3^{10})}{4}=$$
$$=\frac{3(1+3)-3^3(1+3)+3^5(1+3)-3^7(1+3)+3^9(1+3)}{4}=\frac{4(3-3^3+3^5-3^7+3^9)}{4}$$
$$=3-3^3+3^5-3^7+3^9$$

2. Uzasadnia, że otrzymane wyrażenie jest liczbą naturalną.

$3-3^3+3^5-3^7+3^9=(3+3^5+3^9)-(3^3+3^7)$

$(3+3^5+3^9)$ - liczba naturalna, (3^3+3^7) - liczba naturalna

oraz $(3+3^5+3^9)>(3^3+3^7)$, więc $3-3^3+3^5-3^7+3^9$ jest liczbą naturalną,

zatem wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ też jest liczbą naturalną.

</td><td>

1p.

1p.

</td></tr>
</table>

II sposób

<table>
<tr><td>

Uczeń:

1. Przekształca dane wyrażenie grupując po dwa kolejne wyrazy licznika, wyłącza dwukrotnie przed nawias największy wspólny czynnik i skraca ułamek.

</td><td>1p.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>

$$\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}=$$
$$=\frac{(3+3^2)-(3^3+3^4)+(3^5+3^6)-(3^7+3^8)+(3^9+3^{10})}{4}=$$
$$=\frac{3(1+3)-3^3(1+3)+3^5(1+3)-3^7(1+3)+3^9(1+3)}{4}=\frac{4(3-3^3+3^5-3^7+3^9)}{4}$$
$$=3-3^3+3^5-3^7+3^9$$

2. Uzasadnia, że otrzymane wyrażenie jest liczbą naturalną.

$3-3^3+3^5-3^7+3^9=\ 3+(3^5-3^3)+(3^9-3^7)=\ 3+3^3(3^2-1)+3^7(3^2-1)=$ $3+8(3^3+3^7)$ - jest liczbą naturalną,

zatem wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ też jest liczbą naturalną.

</td><td>1p.</td></tr>
</table>

III sposób

<table>
<tr><td>

Uczeń:

1. Przekształca dane wyrażenie grupując po dwa wyrazy licznika, wyłącza dwukrotnie przed nawias największy wspólny czynnik i skraca ułamek.

$$\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}=$$
$$=\frac{(3^{10}-3^8)+(3^9-3^7)+(3^6-3^4)+(3^5-3^3)+(3^2+3)}{4}=$$
$$=\frac{3^8(9-1)+3^7(9-1)+3^4(9-1)+3^3(9-1)+12}{4}$$
$$=\frac{3^8\cdot 8+3^7\cdot 8+3^4\cdot 8+3^3\cdot 8+12}{4}$$

</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>

2. Uzasadnia, że otrzymane wyrażenie jest liczbą naturalną.

$$\frac{3^8\cdot 8+3^7\cdot 8+3^4\cdot 8+3^3\cdot 8+12}{4}=\frac{4(3^8\cdot 2+3^7\cdot 2+3^4\cdot 2+3^3\cdot 2+3)}{4}$$

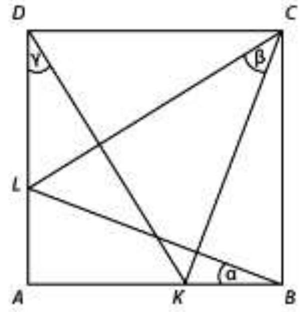
$=3^8\cdot 2+3^7\cdot 2+3^4\cdot 2+3^3\cdot 2+3$ - jest liczbą naturalną,

zatem wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ też jest liczbą naturalną.

</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 5. **(0-3 pkt)**

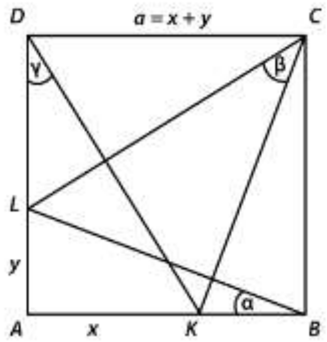
Na bokach *AB* i *AD* kwadratu *ABCD* zaznaczono punkty *K* i *L* tak, że $|AK| + |AL| = |CD|$. Następnie połączono punkt *K* z wierzchołkami *C* i *D* kwadratu, a punkt *L* z wierzchołkami *B* i *C* (patrz rysunek). Uzasadnij, że suma kątów: $\propto$, β i γ jest równa 90°.



<table>
<tr><td>
Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku.

Zauważa, że $|LA| = y = |KB|$ lub $|AK| = x = |DL|$



</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>
2. Uzasadnia, że trójkąty LAB i KBC oraz KAD i LDC są przystające.

W ΔLAB:

$|LA| = y = |KB|$,

$|AB| = a = |BC|$,

$|\sphericalangle LAB| = |\sphericalangle KBC| = 90°$,

więc zgodnie z cechą bkb trójkąty LAB i KBC są przystające, zatem $|\sphericalangle KCB| = \propto$.
</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>
3. Dowodzi, że trójkąty KAD i LDC są przystające oraz uzasadnia tezę.

W ΔKAD:

$|AK| = x = |DL|$,

$|AD| = a = |DC|$,

$|\sphericalangle KAD| = |\sphericalangle LDC| = 90°$,

więc zgodnie z cechą bkb trójkąty KAD i LDC są przystające, zatem $|\sphericalangle DCL| = \gamma$.

Ponieważ $|\sphericalangle DCB| = 90°$, więc $\propto + \beta + \gamma = 90°$.
</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 6. (0-3 pkt)

W listopadzie baton czekoladowy był dwa razy droższy od batona truskawkowego.
W grudniu baton czekoladowy staniał o 18%, a baton truskawkowy zdrożał o 9%. Paulina kupiła w grudniu dwa batony truskawkowe i jeden baton czekoladowy. Oblicz, czy zapłaciła więcej, czy mniej, niż gdyby je kupiła w listopadzie oraz o ile procent. Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. Wykonuje analizę zadania np.: Listopad: x – cena batona truskawkowego $2x$ – cena batona czekoladowego Grudzień: $1,09x$ – cena batona truskawkowego $0,82 \cdot 2x$ – cena batona czekoladowego	1p.
2. Zapisuje w postaci wyrażeń algebraicznych koszt zakupu dwóch batonów truskawkowych i jednego batona czekoladowego w poszczególnych miesiącach. Listopad: $2x + 2x = 4x$ Grudzień: $2 \cdot 1,09x + 1,64x = 2,18x + 1,64x = 3,82x$	1p.
3. Podaje odpowiedź z uzasadnieniem. $3,82x < 4x$, więc Paulina zapłaciła mniej. $100\% - \frac{382}{4}\% = 100\% - 95,5\% = 4,5\%$ Odpowiedź. Paulina zapłaciła mniej o 4,5%.	1p.

Zadanie 7. (0-3 pkt)

Jacek dodał cztery kolejne liczby naturalne. Pamięta, że otrzymał liczbę trzycyfrową o cyfrach 1, 4, 6. Jakie liczby mógł dodać Jacek? Podaj wszystkie rozwiązania.

I sposób

<table>
<tr><td>
Uczeń:

1. Zapisuje w postaci wyrażenia sumę tych liczb.

$x, x+1, x+2, x+3 -$ kolejne liczby naturalne

Ich suma to $4x+6$.

2. Zauważa, że suma tych liczb jest liczbą parzystą i z cyfr 1, 4, 6 tworzy parzyste liczby trzycyfrowe oraz sprawdza, która z nich może, a która nie może być sumą trzech kolejnych liczb naturalnych.

Suma tych liczb $4x+6=2(2x+3)$, czyli jest liczbą podzielna przez 2, a więc liczbą parzystą.

Z cyfr 1, 4, 6 można utworzyć cztery trzycyfrowe liczby parzyste: 146, 164, 416, 614.

$2(2x+3)=146$

$2x+3=73$

$2x=70$

$x=35$ – jest liczbą naturalną.

$2(2x+3)=164$

$2x+3=82$

$2x=79$

$x=39{,}5$ - nie jest liczbą naturalną

$2(2x+3)=416$

$2x+3=208$

$2x=205$

$x=102{,}5$ - nie jest liczbą naturalną

$2(2x+3)=614$
</td><td>
1p.

1p.
</td></tr>
</table>

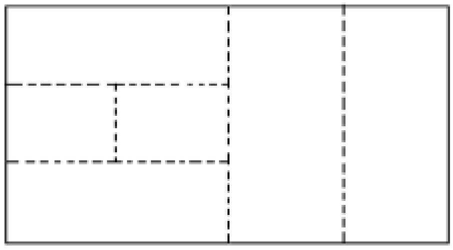
$2x + 3 = 307$ $2x = 304$ $x = 152$ - jest liczbą naturalną 3. Wyznacza liczby, jakie mógł dodać Jacek. Jeśli $x = 35$, to tymi liczbami są: 35, 36, 37, 38, a ich suma wynosi 146. Jeśli $x = 152$, to tymi liczbami są: 152, 153, 154, 155, a ich suma wynosi 614.	1p.

II sposób

Uczeń:	
1. Zapisuje w postaci wyrażenia sumę tych liczb i stwierdza. $x, x+1, x+2, x+3 -$ kolejne liczby naturalne Ich suma to $4x + 6$.	1p.
2. Zauważa, że suma tych liczb jest liczbą parzystą i z cyfr 1, 4, 6 tworzy parzyste liczby trzycyfrowe oraz sprawdza, która z nich może, a która nie może być sumą trzech kolejnych liczb naturalnych . Suma tych liczb jest liczbą parzystą. Gdy odejmiemy od tej sumy 6, to otrzymamy liczbę podzielną przez 4. Z cyfr 1, 4, 6 można utworzyć cztery trzycyfrowe liczby parzyste: 146, 164, 416, 614. 146, 146 – 6 = 140 liczba podzielna przez 4, bo 40 dzieli się przez 4. 164, 164 – 6 = 158 liczba niepodzielna przez 4, bo 58 nie dzieli się przez 4. 416, 416 – 6 = 410 liczba niepodzielna przez 4, bo 10 nie dzieli się przez 4. 614, 614 – 6 = 608 liczba podzielna przez 4, bo 8 dzieli się przez 4.	1p.
3. Wyznacza liczby, jakie mógł dodać Jacek. Jeśli sumą tych liczb jest 146, to najmniejszą liczbą jest 35, a kolejnymi: 36, 37, 38. Jeśli sumą tych liczb jest 614, to najmniejszą liczbą jest 152, a kolejnymi: 153, 154, 155.	1p.

Uwaga. Jeśli uczeń nie zauważy, że suma tych liczb jest liczbą parzystą, a rozpatrzy sześć przypadków, to należy mu przyznać maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 8. (0-3 pkt)

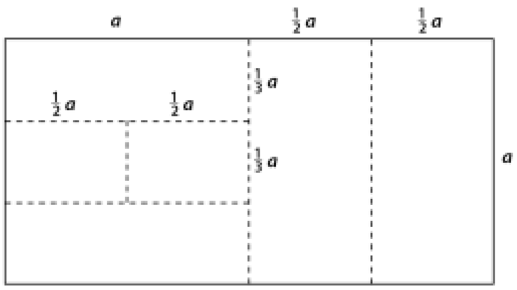


Prostokątną kartkę o polu 648 cm^2 Marysia przecięła na pół i otrzymała dwa kwadraty. Następnie jeden z tych kwadratów przecięła na dwa, a drugi na trzy przystające prostokąty i wreszcie jeden z mniejszych prostokątów przecięła na dwa przystające prostokąty (patrz rysunek). Z otrzymanych kawałków złożyła siatkę prostopadłościanu. Czy w naczyniu o pojemności równej objętości tego prostopadłościanu zmieści się 1 litr mleka? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:

1. Przyjmuje oznaczenia np. takie, jak na rysunku i wyznacza wartość a. 1p.

$$a \cdot 2a = 648$$
$$2a^2 = 648$$
$$a^2 = 324$$
$$a = 18$$



2. Oblicza objętość V prostopadłościanu. 1p.

Prostopadłościan ma wymiary $a \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{3}a$, czyli 18 cm × 9 cm × 6 cm, zatem $V = 972$ cm^3.

3. Podaje odpowiedź z uzasadnieniem.

972 cm^3 = 0,972 dm^3. 1p.

Pojemność naczynia o objętości 972 cm^3 wynosi 0,972 l, a zatem nie zmieści się w nim 1 litr mleka.

II sposób

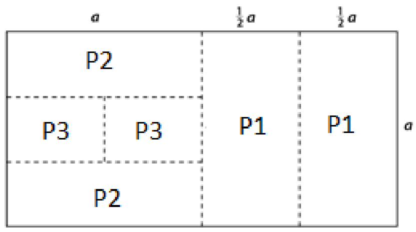
Uczeń:

1. Oblicza pole kwadratu 1p.

   648 : 2 = 324 [cm^2]

   Następnie wyznacza bok kwadratu

   $a = \sqrt{324} = 18$ [cm]



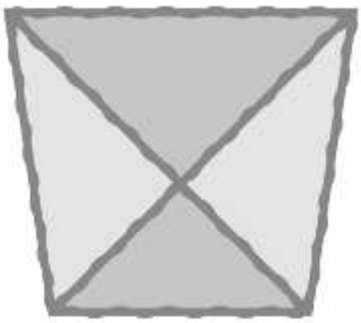
2. Oblicza pola prostokątów P_1, P_2, P_3

   P_1 = 324 : 2 = 162 [cm^2] 1p.

   P_2 = 324 : 3 = 108 [cm^2]

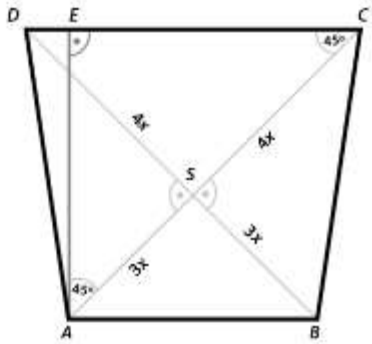
$P_3 = 108 : 2 = 54$ [cm^2] Oblicza objętość *V* prostopadłościanu $V = P_3 \cdot a$ czyli $V = 54$ cm$^2 \cdot 18$ cm, zatem $V = 972$ cm^3. 3. Podaje odpowiedź z uzasadnieniem. 972 cm^3 = 0,972 dm^3. Pojemność naczynia o objętości 972 cm^3 wynosi 0,972 l, a zatem nie zmieści się w nim 1 litr mleka.	1p.

Zadanie 9. (0-3 pkt)



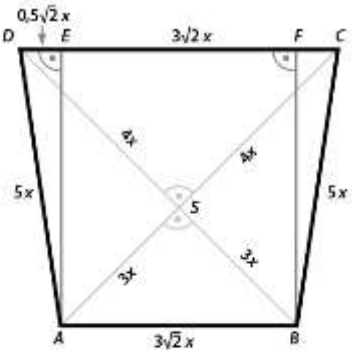
Witrażowe okno jest wykonane m.in. z elementu w kształcie trapezu równoramiennego składającego się z czterech trójkątów prostokątnych, połączonych ołowianą taśmą tak, jak na rysunku. Brzeg elementu również wykończony jest tą taśmą. Stosunek długości przyprostokątnych w trójkątach przystających wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz, czy na wykonanie elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej, jeśli odległość między podstawami trapezu wynosi 7 cm.

I sposób

Uczeń: 1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku i zauważa, że trójkąt *AEC* jest prostokątny oraz równoramienny, a jego przeciwprostokątna ma długość 7*x*.  Trójkąt *AEC* jest prostokątny i równoramienny, bo kąty *AEC* i *ACE* mają po 45°. $\|AC\| = 7x$. 2. Oblicza wartość *x* i wyznacza długości boków trapezu oraz długości jego przekątnych, korzystając z twierdzenia Pitagorasa lub wzoru na przekątną kwadratu. $\|AE\| = \|EC\| = 7$ cm. Ponieważ $\|AC\| = \|DB\| = 7x = 7\sqrt{2}$ cm, więc $x = \sqrt{2}$. W trójkącie *ABS*: $\|AS\| = \|BS\| = 3\sqrt{2}$ cm, więc $\|AB\| = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ cm = 6 cm. W trójkącie *CSD*: $\|CS\| = \|DS\| = 4\sqrt{2}$ cm, więc $\|CD\| = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ cm = 8 cm.	1p.

W trójkącie *BSC*: $\lvert BC\rvert^2 = \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \left(3\sqrt{2}\right)^2 = 32 + 18 = 50$, więc $\lvert BC\rvert = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ [cm], $\lvert AD\rvert = \lvert BC\rvert = 5\sqrt{2}$ cm, 3.Oblicza • poprawnie szacując , czy na wykonanie elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej i podaje odpowiedź. d – długość taśmy ołowianej $d = \lvert AB\rvert + \lvert CD\rvert + \lvert AD\rvert + \lvert BC\rvert + \lvert AC\rvert + \lvert BD\rvert = 6 + 8 + 2 \cdot 5\sqrt{2} + 2 \cdot 7\sqrt{2} =$ $14 + +10\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 14 + 24\sqrt{2} < 14 + 24 \cdot 1{,}5 = 14 + 36 = 50$ [cm] • lub dokonując obliczeń, stwierdza, że $d = 14 + 24\sqrt{2} < 50$ $\sqrt{2} < 1{,}5$, bo $2 < 2{,}25$, więc $24\sqrt{2} < 36$ Zatem $d < 0{,}5$ m. Odpowiedź. Na wykonanie tego elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej.	1p. 1p.

II sposób

Uczeń: 1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku i wyznacza długość odcinka *DE* w zależności od x.  Trójkąty *ASB* i *DSC* są prostokątne i równoramienne, bo ich ramiona mają długości odpowiednio: 3*x* i 3*x* oraz 4*x* i 4*x*, zatem $\lvert AB\rvert = 3\sqrt{2}x,\ \lvert CD\rvert = 4\sqrt{2}x,$ $\lvert DE\rvert = \dfrac{4\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}x}{2} = 0{,}5\sqrt{2}x.$ 2. Wyznacza długości pozostałych boków trapezu oraz jego przekątnych, korzystając z twierdzenia Pitagorasa i oblicza wartość x. $\lvert AE\rvert = 7$ cm.	 1p. 1p.

$|AD| = |BC| = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x.$

$|AC| = |BD| = 7x.$

W trójkącie AED: $|AE|^2 + |DE|^2 = |AD|^2$, więc

$7^2 + \left(0{,}5\sqrt{2}x\right)^2 = (5x)^2$

$49 = 24{,}5x^2$

$x^2 = 2$, stąd $x = \sqrt{2}$.

3.Oblicza

- poprawnie szacując , czy na wykonanie elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej i podaje odpowiedź. — 1p.

d – długość taśmy ołowianej

$d = |AB| + |CD| + |AD| + |BC| + |AC| + |BD| = 6 + 8 + 2 \cdot 5\sqrt{2} + 2 \cdot 7\sqrt{2} =$
$14 + +10\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 14 + 24\sqrt{2} < 14 + 24 \cdot 1{,}5 = 14 + 36 = 50$ [cm]

- lub dokonując obliczeń, stwierdza, że $d = 14 + 24\sqrt{2} < 50$
  $\sqrt{2} < 1{,}5$, bo $2 < 2{,}25$,
  więc

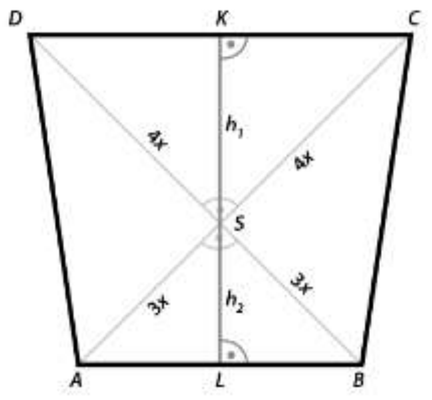
$24\sqrt{2} < 36$

Zatem $d < 0{,}5$ m.

Odpowiedź. Na wykonanie tego elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej.

III sposób

Uczeń:



1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku i wyznacza h_1 oraz h_2 w zależności od x. — 1p.

$h_1 = \frac{4\sqrt{2}x}{2} = 2\sqrt{2}x$

$h_2 = \frac{3\sqrt{2}x}{2} = 1{,}5\sqrt{2}x$

2. Oblicza wartość x oraz długości boków trapezu i jego przekątnych, korzystając z twierdzenia Pitagorasa lub wzoru na przekątną kwadratu. — 1p.

$h_1 + h_2 = 3{,}5\sqrt{2}x$, ale $h_1 + h_2 = \|KL\| = 7$ cm, więc $3{,}5\sqrt{2}x = 7$, stąd $x = \frac{7}{3{,}5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ [cm] Trójkąty *ASB* i *DSC* są prostokątne i równoramienne, bo ich ramiona mają długości odpowiednio: 3*x* i 3*x* oraz 4*x* i 4*x*. $\|AD\| = \|BC\| = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x = 5\sqrt{2}$ [cm], $\|AB\| = 3\sqrt{2}x = 6$ [cm], $\|CD\| = 4\sqrt{2}x = 8$ [cm], $\|AC\| = \|BD\| = 7x = 7\sqrt{2}$ [cm]. 3. Oblicza, czy na wykonanie elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej i podaje odpowiedź. *d* – długość taśmy ołowianej $d = \|AB\| + \|CD\| + \|AD\| + \|BC\| + \|AC\| + \|BD\| = 6 + 8 + 2 \cdot 5\sqrt{2} + 2 \cdot 7\sqrt{2} = 14 +$ $+ 10\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 14 + 24\sqrt{2} < 14 + 24 \cdot 1{,}5 = 14 + 36 = 50$ [cm] Zatem $d < 0{,}5$ m. Odpowiedź. Na wykonanie tego elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej.	1p.

Uwaga. Jeżeli uczeń wyznaczy, za pomocą x, długości wszystkich boków i przekątnych trapezu – otrzymuje 1p.

Jeżeli uczeń błędnie szacuje (za pierwiastek z dwóch podstawi wartość 1,4 lub 1,41) – nie otrzymuje ostatniego punktu.