



MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP REJONOWY 2021/2022

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.
Maks. liczba punktów	0-1 pkt	0-1 pkt	0-1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	B., C.	B., C.	P, P

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 4. (0-2 pkt)

Uzasadnij, że wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ jest liczbą naturalną.

I sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przekształca dane wyrażenie grupując po dwa kolejne wyrazy licznika, wyłącza dwukrotnie przed nawias największy wspólny czynnik i skraca ułamek.</p> $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4} =$ $= \frac{(3+3^2)-(3^3+3^4)+(3^5+3^6)-(3^7+3^8)+(3^9+3^{10})}{4} =$ $= \frac{3(1+3)-3^3(1+3)+3^5(1+3)-3^7(1+3)+3^9(1+3)}{4} = \frac{4(3-3^3+3^5-3^7+3^9)}{4}$ $= 3-3^3+3^5-3^7+3^9$	1p.
<p>2. Uzasadnia, że otrzymane wyrażenie jest liczbą naturalną.</p> $3-3^3+3^5-3^7+3^9 = (3+3^5+3^9)-(3^3+3^7)$ <p>$(3+3^5+3^9)$ - liczba naturalna, (3^3+3^7) - liczba naturalna</p> <p>oraz $(3+3^5+3^9) > (3^3+3^7)$, więc $3-3^3+3^5-3^7+3^9$ jest liczbą naturalną,</p> <p>zatem wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ też jest liczbą naturalną.</p>	1p.

II sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przekształca dane wyrażenie grupując po dwa kolejne wyrazy licznika, wyłącza dwukrotnie przed nawias największy wspólny czynnik i skraca ułamek.</p>	1p.
--	-----

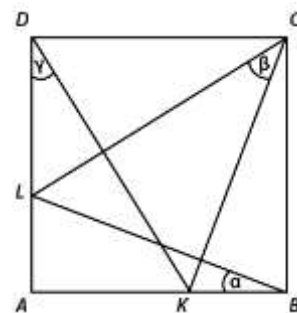
$\frac{3 + 3^2 - 3^3 - 3^4 + 3^5 + 3^6 - 3^7 - 3^8 + 3^9 + 3^{10}}{4} =$ $= \frac{(3 + 3^2) - (3^3 + 3^4) + (3^5 + 3^6) - (3^7 + 3^8) + (3^9 + 3^{10})}{4} =$ $= \frac{3(1 + 3) - 3^3(1 + 3) + 3^5(1 + 3) - 3^7(1 + 3) + 3^9(1 + 3)}{4} = \frac{4(3 - 3^3 + 3^5 - 3^7 + 3^9)}{4}$ $= 3 - 3^3 + 3^5 - 3^7 + 3^9$ <p>2. Uzasadnia, że otrzymane wyrażenie jest liczbą naturalną.</p> $3 - 3^3 + 3^5 - 3^7 + 3^9 = 3 + (3^5 - 3^3) + (3^9 - 3^7) = 3 + 3^3(3^2 - 1) + 3^7(3^2 - 1) = 3 + 8(3^3 + 3^7) - \text{jest liczbą naturalną,}$ <p>zatem wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ też jest liczbą naturalną.</p>	1p.
---	-----

III sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przekształca dane wyrażenie grupując po dwa wyrazy licznika, wyłącza dwukrotnie przed nawias największy wspólny czynnik i skraca ułamek.</p> $\frac{3 + 3^2 - 3^3 - 3^4 + 3^5 + 3^6 - 3^7 - 3^8 + 3^9 + 3^{10}}{4} =$ $= \frac{(3^{10} - 3^8) + (3^9 - 3^7) + (3^6 - 3^4) + (3^5 - 3^3) + (3^2 + 3)}{4} =$ $= \frac{3^8(9 - 1) + 3^7(9 - 1) + 3^4(9 - 1) + 3^3(9 - 1) + 12}{4}$ $= \frac{3^8 \cdot 8 + 3^7 \cdot 8 + 3^4 \cdot 8 + 3^3 \cdot 8 + 12}{4}$ <p>2. Uzasadnia, że otrzymane wyrażenie jest liczbą naturalną.</p> $\frac{3^8 \cdot 8 + 3^7 \cdot 8 + 3^4 \cdot 8 + 3^3 \cdot 8 + 12}{4} = \frac{4(3^8 \cdot 2 + 3^7 \cdot 2 + 3^4 \cdot 2 + 3^3 \cdot 2 + 3)}{4}$ $= 3^8 \cdot 2 + 3^7 \cdot 2 + 3^4 \cdot 2 + 3^3 \cdot 2 + 3 - \text{jest liczbą naturalną,}$ <p>zatem wartość wyrażenia $\frac{3+3^2-3^3-3^4+3^5+3^6-3^7-3^8+3^9+3^{10}}{4}$ też jest liczbą naturalną.</p>	1p.
---	-----

Zadanie 5. (0-3 pkt)

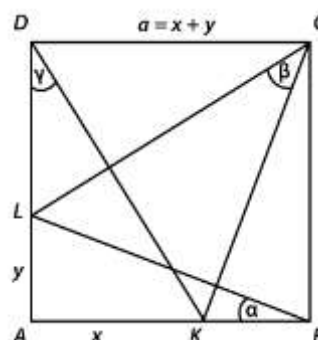
Na bokach AB i AD kwadratu $ABCD$ zaznaczono punkty K i L tak, że $|AK| + |AL| = |CD|$. Następnie połączono punkt K z wierzchołkami C i D kwadratu, a punkt L z wierzchołkami B i C (patrz rysunek). Uzasadnij, że suma kątów: α , β i γ jest równa 90° .



Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku.

Zauważa, że $|LA| = y = |KB|$ lub $|AK| = x = |DL|$



1p.

2. Uzasadnia, że trójkąty LAB i KBC oraz KAD i LDC są przystające.

W $\triangle LAB$:

$$|LA| = y = |KB|,$$

$$|AB| = a = |BC|,$$

$$|\sphericalangle LAB| = |\sphericalangle KBC| = 90^\circ,$$

więc zgodnie z cechą bkb trójkąty LAB i KBC są przystające, zatem $|\sphericalangle KCB| = \alpha$.

3. Dowodzi, że trójkąty KAD i LDC są przystające oraz uzasadnia tezę.

W $\triangle KAD$:

$$|AK| = x = |DL|,$$

$$|AD| = a = |DC|,$$

$$|\sphericalangle KAD| = |\sphericalangle LDC| = 90^\circ,$$

więc zgodnie z cechą bkb trójkąty KAD i LDC są przystające, zatem $|\sphericalangle DCL| = \gamma$.

Ponieważ $|\sphericalangle DCB| = 90^\circ$, więc $\alpha + \beta + \gamma = 90^\circ$.

1p.

1p.

Zadanie 6. (0-3 pkt)

W listopadzie baton czekoladowy był dwa razy droższy od batona truskawkowego.

W grudniu baton czekoladowy staniał o 18%, a baton truskawkowy zdrożał o 9%. Paulina kupiła w grudniu dwa batony truskawkowe i jeden baton czekoladowy. Oblicz, czy zapłaciła więcej, czy mniej, niż gdyby je kupiła w listopadzie oraz o ile procent. Odpowiedź uzasadnij.

<p>Uczeń:</p> <p>1. Wykonuje analizę zadania np.:</p> <p>Listopad: x – cena batona truskawkowego $2x$ – cena batona czekoladowego</p> <p>Grudzień: $1,09x$ – cena batona truskawkowego $0,82 \cdot 2x$ – cena batona czekoladowego</p> <p>2. Zapisuje w postaci wyrażeń algebraicznych koszt zakupu dwóch batonów truskawkowych i jednego batona czekoladowego w poszczególnych miesiącach.</p> <p>Listopad: $2x + 2x = 4x$</p> <p>Grudzień: $2 \cdot 1,09x + 1,64x = 2,18x + 1,64x = 3,82x$</p> <p>3. Podaje odpowiedź z uzasadnieniem.</p> <p>$3,82x < 4x$, więc Paulina zapłaciła mniej.</p> <p>$100\% - \frac{382}{4}\% = 100\% - 95,5\% = 4,5\%$</p> <p>Odpowiedź. Paulina zapłaciła mniej o 4,5%.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	----------------------------------

Zadanie 7. (0-3 pkt)

Jacek dodał cztery kolejne liczby naturalne. Pamięta, że otrzymał liczbę trzycyfrową o cyfrach 1, 4, 6. Jakie liczby mógł dodać Jacek? Podaj wszystkie rozwiązania.

Isposób

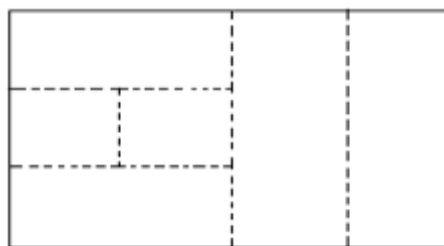
<p>Uczeń:</p> <p>1. Zapisuje w postaci wyrażenia sumę tych liczb.</p> <p>$x, x + 1, x + 2, x + 3$ – kolejne liczby naturalne</p> <p>Ich suma to $4x + 6$.</p> <p>2. Zauważa, że suma tych liczb jest liczbą parzystą i z cyfr 1, 4, 6 tworzy parzyste liczby trzycyfrowe oraz sprawdza, która z nich może, a która nie może być sumą trzech kolejnych liczb naturalnych.</p> <p>Suma tych liczb $4x + 6 = 2(2x + 3)$, czyli jest liczbą podzielna przez 2, a więc liczbą parzystą.</p> <p>Z cyfr 1, 4, 6 można utworzyć cztery trzycyfrowe liczby parzyste: 146, 164, 416, 614.</p> <p>$2(2x + 3) = 146$</p> <p>$2x + 3 = 73$</p> <p>$2x = 70$</p> <p>$x = 35$ – jest liczbą naturalną.</p> <p>$2(2x + 3) = 164$</p> <p>$2x + 3 = 82$</p> <p>$2x = 79$</p> <p>$x = 39,5$ - nie jest liczbą naturalną</p> <p>$2(2x + 3) = 416$</p> <p>$2x + 3 = 208$</p> <p>$2x = 205$</p> <p>$x = 102,5$ - nie jest liczbą naturalną</p> <p>$2(2x + 3) = 614$</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
---	-----------------------

<p>Uczeń:</p> <p>1. Zapisuje w postaci wyrażenia sumę tych liczb i stwierdza.</p> <p>$x, x + 1, x + 2, x + 3$ – kolejne liczby naturalne</p> <p>Ich suma to $4x + 6$.</p> <p>2. Zauważa, że suma tych liczb jest liczbą parzystą i z cyfr 1, 4, 6 tworzy parzyste liczby trzycyfrowe oraz sprawdza, która z nich może, a która nie może być sumą trzech kolejnych liczb naturalnych .</p> <p>Suma tych liczb jest liczbą parzystą. Gdy odejmiemy od tej sumy 6, to otrzymamy liczbę podzielną przez 4.</p> <p>Z cyfr 1, 4, 6 można utworzyć cztery trzycyfrowe liczby parzyste: 146, 164, 416, 614.</p> <p>146, $146 - 6 = 140$ liczba podzielna przez 4, bo 40 dzieli się przez 4.</p> <p>164, $164 - 6 = 158$ liczba niepodzielna przez 4, bo 58 nie dzieli się przez 4.</p> <p>416, $416 - 6 = 410$ liczba niepodzielna przez 4, bo 10 nie dzieli się przez 4.</p> <p>614, $614 - 6 = 608$ liczba podzielna przez 4, bo 8 dzieli się przez 4.</p> <p>3. Wyznacza liczby, jakie mógł dodać Jacek.</p> <p>Jeśli sumą tych liczb jest 146, to najmniejszą liczbą jest 35, a kolejnymi: 36, 37, 38.</p> <p>Jeśli sumą tych liczb jest 614, to najmniejszą liczbą jest 152, a kolejnymi: 153, 154, 155.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
---	----------------------------------

Uwaga. Jeśli uczeń nie zauważy, że suma tych liczb jest liczbą parzystą, a rozpatrzy sześć przypadków, to należy mu przyznać maksymalną liczbę punktów.

Zadanie 8. (0-3 pkt)

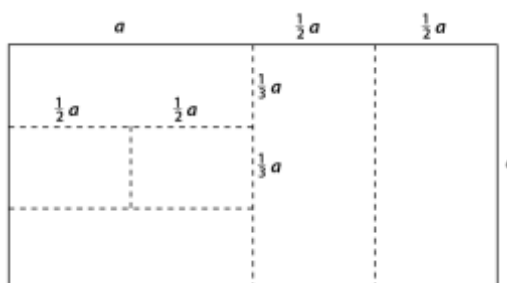
Prostokątną kartkę o polu 648 cm^2 Marysia przecięła na pół i otrzymała dwa kwadraty. Następnie jeden z tych kwadratów przecięła na dwa, a drugi na trzy przystające prostokąty i wreszcie jeden z mniejszych prostokątów przecięła na dwa przystające prostokąty (patrz rysunek). Z otrzymanych kawałków złożyła siatkę prostopadłościanu. Czy w naczyniu o pojemności równej objętości tego prostopadłościanu zmieści się 1 litr mleka? Odpowiedź uzasadnij.



Uczeń:

1. Przyjmuje oznaczenia np. takie, jak na rysunku i wyznacza wartość a .

$$\begin{aligned} a \cdot 2a &= 648 \\ 2a^2 &= 648 \\ a^2 &= 324 \\ a &= 18 \end{aligned}$$



2. Oblicza objętość V prostopadłościanu.

Prostopadłościan ma wymiary $a \times \frac{1}{2}a \times \frac{1}{3}a$, czyli $18 \text{ cm} \times 9 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$, zatem $V = 972 \text{ cm}^3$.

3. Podaje odpowiedź z uzasadnieniem.

$$972 \text{ cm}^3 = 0,972 \text{ dm}^3.$$

Pojemność naczynia o objętości 972 cm^3 wynosi 0,972 l, a zatem nie zmieści się w nim 1 litr mleka.

1p.

1p.

1p.

II sposób

Uczeń:

1. Oblicza pole kwadratu

$$648 : 2 = 324 [\text{cm}^2]$$

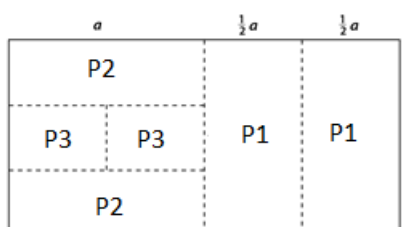
Następnie wyznacza bok kwadratu

$$a = \sqrt{324} = 18 [\text{cm}]$$

2. Oblicza pola prostokątów P_1, P_2, P_3

$$P_1 = 324 : 2 = 162 [\text{cm}^2]$$

$$P_2 = 324 : 3 = 108 [\text{cm}^2]$$



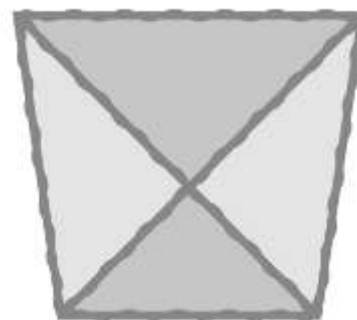
1p.

1p.

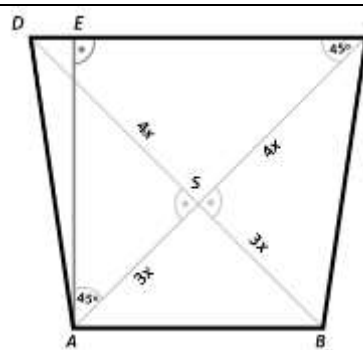
$P_3 = 108 : 2 = 54 \text{ [cm}^2\text{]}$ Oblicza objętość V prostopadłościanu $V = P_3 \cdot a$ czyli $V = 54 \text{ cm}^2 \cdot 18 \text{ cm}$, zatem $V = 972 \text{ cm}^3$. 3. Podaje odpowiedź z uzasadnieniem. $972 \text{ cm}^3 = 0,972 \text{ dm}^3$. Pojemność naczynia o objętości 972 cm^3 wynosi $0,972 \text{ l}$, a zatem nie zmieści się w nim 1 litr mleka.	1p.
---	-----

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Witrażowe okno jest wykonane m.in. z elementu w kształcie trapezu równoramiennego składającego się z czterech trójkątów prostokątnych, połączonych ołowianą taśmą tak, jak na rysunku. Brzeg elementu również wykończony jest tą taśmą. Stosunek długości przyprostokątnych w trójkątach przystających wynosi $\frac{3}{4}$. Oblicz, czy na wykonanie elementu witraża wystarczy $0,5 \text{ m}$ taśmy ołowianej, jeśli odległość między podstawami trapezu wynosi 7 cm .

*I sposób*

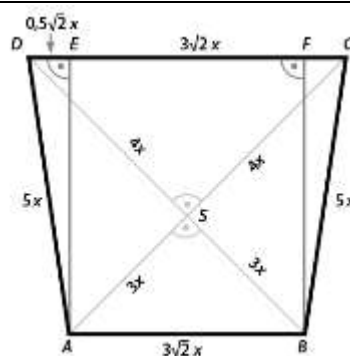
Uczeń: 1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku i zauważa, że trójkąt AEC jest prostokątny oraz równoramienny, a jego przeciwprostokątna ma długość $7x$. Trójkąt AEC jest prostokątny i równoramienny, bo kąty AEC i ACE mają po 45° . $ AC = 7x$. 2. Oblicza wartość x i wyznacza długości boków trapezu oraz długości jego przekątnych, korzystając z twierdzenia Pitagorasa lub wzoru na przekątną kwadratu. $ AE = EC = 7 \text{ cm}$. Ponieważ $ AC = DB = 7x = 7\sqrt{2} \text{ cm}$, więc $x = \sqrt{2}$. W trójkącie ABS : $ AS = BS = 3\sqrt{2} \text{ cm}$, więc $ AB = 3\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = 6 \text{ cm}$. W trójkącie CSD : $ CS = DS = 4\sqrt{2} \text{ cm}$, więc $ CD = 4\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \text{ cm} = 8 \text{ cm}$.	1p.
---	-----



<p>W trójkącie BSC: $BC ^2 = (4\sqrt{2})^2 + (3\sqrt{2})^2 = 32 + 18 = 50$,</p> <p>więc $BC = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$ [cm],</p> <p>$AD = BC = 5\sqrt{2}$ cm,</p> <p>3. Oblicza</p> <ul style="list-style-type: none"> poprawnie szacując, czy na wykonanie elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej i podaje odpowiedź. 	1p.
<p>d – długość taśmy ołowianej</p> $d = AB + CD + AD + BC + AC + BD = 6 + 8 + 2 \cdot 5\sqrt{2} + 2 \cdot 7\sqrt{2} = 14 + 10\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 14 + 24\sqrt{2} < 14 + 24 \cdot 1,5 = 14 + 36 = 50$ [cm] <ul style="list-style-type: none"> lub dokonując obliczeń, stwierdza, że $d = 14 + 24\sqrt{2} < 50$ $\sqrt{2} < 1,5$, bo $2 < 2,25$, więc <p>$24\sqrt{2} < 36$</p> <p>Zatem $d < 0,5$ m.</p> <p>Odpowiedź. Na wykonanie tego elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej.</p>	1p.

II sposób

<p>Uczeń:</p> <p>1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku i wyznacza długość odcinka DE w zależności od x.</p> <p>Trójkąty ASB i DSC są prostokątne i równoramienne, bo ich ramiona mają długości odpowiednio: $3x$ i $3x$ oraz $4x$ i $4x$, zatem</p> $ AB = 3\sqrt{2}x, \quad CD = 4\sqrt{2}x,$ $ DE = \frac{4\sqrt{2}x - 3\sqrt{2}x}{2} = 0,5\sqrt{2}x.$ <p>2. Wyznacza długości pozostałych boków trapezu oraz jego przekątnych, korzystając z twierdzenia Pitagorasa i oblicza wartość x.</p>	1p.
<p>$AE = 7$ cm.</p>	1p.



$$|AD| = |BC| = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x.$$

$$|AC| = |BD| = 7x.$$

W trójkącie AED : $|AE|^2 + |DE|^2 = |AD|^2$, więc

$$7^2 + (0,5\sqrt{2}x)^2 = (5x)^2$$

$$49 = 24,5x^2$$

$$x^2 = 2, \text{ stąd } x = \sqrt{2}.$$

3. Oblicza

- poprawnie szacując, czy na wykonanie elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej i podaje odpowiedź.

d – długość taśmy ołowianej

$$d = |AB| + |CD| + |AD| + |BC| + |AC| + |BD| = 6 + 8 + 2 \cdot 5\sqrt{2} + 2 \cdot 7\sqrt{2} = 14 + 10\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 14 + 24\sqrt{2} < 14 + 24 \cdot 1,5 = 14 + 36 = 50 \text{ [cm]}$$

- lub dokonując obliczeń, stwierdza, że $d = 14 + 24\sqrt{2} < 50$
 $\sqrt{2} < 1,5$, bo $2 < 2,25$,
 więc

$$24\sqrt{2} < 36$$

Zatem $d < 0,5$ m.

Odpowiedź. Na wykonanie tego elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej.

1 p.

III sposób

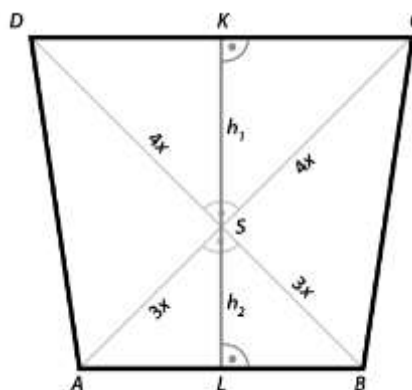
Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku i wyznacza h_1 oraz h_2 w zależności od x .

$$h_1 = \frac{4\sqrt{2}x}{2} = 2\sqrt{2}x$$

$$h_2 = \frac{3\sqrt{2}x}{2} = 1,5\sqrt{2}x$$

2. Oblicza wartość x oraz długości boków trapezu i jego przekątnych, korzystając z twierdzenia Pitagorasa lub wzoru na przekątną kwadratu.



1 p.

1 p.

<p> $h_1 + h_2 = 3,5\sqrt{2}x$, ale $h_1 + h_2 = KL = 7$ cm, więc $3,5\sqrt{2}x = 7$, stąd $x = \frac{7}{3,5\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$ [cm] Trójkąty ASB i DSC są prostokątne i równoramienne, bo ich ramiona mają długości odpowiednio: $3x$ i $3x$ oraz $4x$ i $4x$. $AD = BC = \sqrt{(3x)^2 + (4x)^2} = 5x = 5\sqrt{2}$ [cm], $AB = 3\sqrt{2}x = 6$ [cm], $CD = 4\sqrt{2}x = 8$ [cm], $AC = BD = 7x = 7\sqrt{2}$ [cm]. 3. Oblicza, czy na wykonanie elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej i podaje odpowiedź. d – długość taśmy ołowianej $d = AB + CD + AD + BC + AC + BD = 6 + 8 + 2 \cdot 5\sqrt{2} + 2 \cdot 7\sqrt{2} = 14 + 10\sqrt{2} + 14\sqrt{2} = 14 + 24\sqrt{2} < 14 + 24 \cdot 1,5 = 14 + 36 = 50$ [cm] Zatem $d < 0,5$ m. Odpowiedź. Na wykonanie tego elementu witraża wystarczy 0,5 m taśmy ołowianej. </p>	<p>1p.</p>
---	------------

Uwaga. Jeżeli uczeń wyznaczy, za pomocą x , długości wszystkich boków i przekątnych trapezu – otrzymuje 1p.

Jeżeli uczeń błędnie szacuje (za pierwiastek z dwóch podstawia wartość 1,4 lub 1,41) – nie otrzymuje ostatniego punktu.