Mazowiecki Kurator Oświaty
Al. Jerozolimskie 32, 00-024 Warszawa

MSCDN
MAZOWIECKIE SAMORZĄDOWE
CENTRUM DOSKONALENIA NAUCZYCIELI

MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP REJONOWY 2022/2023

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**
Maks. liczba punktów	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**P, P**	**A., C.**	**A., D.**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 4. (0-2 pkt)

Kolejne cyfry 2 a 3 4 b liczby pięciocyfrowej są różne. Liczba ta jest podzielna przez 36. Co to za liczba? Podaj wszystkie możliwości i uzasadnij odpowiedź.

I sposób

Uczeń:	
1. Zapisuje warunki jakie spełniają liczby a oraz b, korzystając z cech podzielności przez 4 i 9. Tę liczbę można zapisać za pomocą iloczynu $9 \cdot 4 \cdot k$, więc $a + b = 0$ lub $a + b = 9$, lub $a + b = 18$ oraz $b = 0$ lub $b = 4$, lub $b = 8$.	1p.
2. Eliminuje te warunki, które są sprzeczne z treścią zadania i podaje odpowiedź. Gdy $a + b = 0$, to $a = b = 0$ sprzeczność z warunkami zadania, podobnie gdy $a + b = 18$, to $a = b = 9$ sprzeczność z warunkami zadania, również b nie może być równe 4, bo już jest, zatem $a + b = 9$ oraz $b = 0$ lub $b = 8$, stąd $a = 9$ lub $a = 1$. Odpowiedź. Ta liczba to 21 348 lub 29 340.	1p.

Uwaga : Jeżeli uczeń oprócz liczb 29340, 21348 poda dodatkowo jedną spośród liczb 20340, 25344, to za całe zadanie otrzymuje 1 punkt.

II sposób

Uczeń:	
1. Zapisuje warunki podzielności tej liczby przez 4. Skoro liczba jest podzielna przez 36, to jest podzielna przez 4, więc dwie ostatnie cyfry mogą tworzyć liczby: 40, 44 (sprzeczne), 48.	1p.
2. Uwzględnia warunki podzielności tej liczby przez 9 i podaje odpowiedź. Skoro liczba jest podzielna przez 36, to jest podzielna przez 9, więc gdy dwie ostatnie cyfry tworzą liczbę 40, to $b = 0$, $a = 9$, a gdy tworzą liczbę 48, to $b = 8$, $a = 1$. Odpowiedź. Ta liczba to 29 340 lub 21 348.	1p.

Uwaga : Jeżeli uczeń oprócz liczb 29340, 21348 poda dodatkowo jedną spośród liczb 20340, 25344, to za całe zadanie otrzymuje 1 punkt.

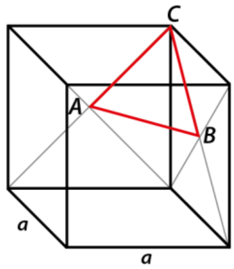
Zadanie 5. (0-3 pkt)

Punkty A i B są środkami dwóch sąsiednich ścian sześcianu o krawędzi a. Punkt C jest jednym ze wspólnych wierzchołków tych ścian sześcianu, na których leżą punkty A i B. Zapisz obwód trójkąta ABC za pomocą a.

I sposób

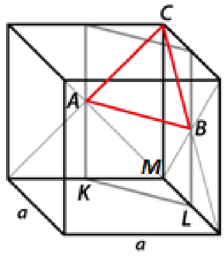
<table>
<tr><td>Uczeń:

1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku.


</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>2. Uzupełnia rysunek i wyznacza długości odcinków AC i BC.

a – długość boku sześcianu

Odcinki AC i BC mają długość równą połowie przekątnej ściany sześcianu, czyli są równe $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>3. Wyznacza długość boku AB oraz zapisuje wyrażenie określające obwód otrzymanej figury.

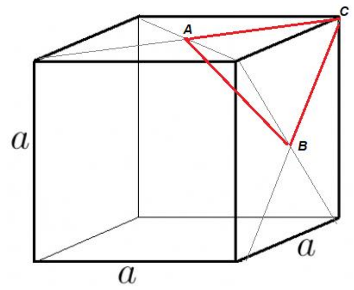
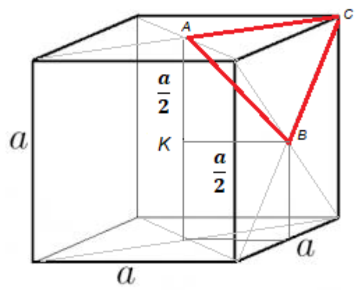


$|AB| = |KL|$

Trójkąt KLM jest prostokątny i równoramienny, w którym $|LM| = |KM| = \frac{a}{2}$, więc $|KL| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.

Zatem $L_{ABC} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.</td><td>1p.</td></tr>
</table>

II sposób

Uczeń: 1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku.  	1p.
2. Uzupełnia rysunek i wyznacza długości odcinków *AC* i *BC*. *a* – długość boku sześcianu Odcinki *AC* i *BC* mają długość równą połowie przekątnej ściany sześcianu, czyli są równe $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.	1p.
3. Wyznacza długość boku *AB* oraz zapisuje wyrażenie określające obwód otrzymanej figury. $\lvert AK\rvert = \lvert KB\rvert$ Trójkąt *KAB* jest prostokątny i równoramienny, którym $\lvert KA\rvert = \lvert KB\rvert = \frac{a}{2}$, więc $\lvert AB\rvert = \frac{a\sqrt{2}}{2}$.  Zatem $L_{ABC} = \frac{3a\sqrt{2}}{2}$.	1p.

Zadanie 6. (0-3 pkt)

Ośmiu zawodników zgłosiło się na Rowerowy Rajd, a wśród nich poprzedni triumfator Łukasz. Dwa dni przed zawodami Łukasz doznał kontuzji. Na jego miejsce pojechał dwukrotnie młodszy Wojtek. W związku z tym średnia wieku uczestników rajdu zmniejszyła się o 1 rok. Oblicz, ile lat ma Wojtek.

I sposób

Uczeń: 1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania. x – wiek Wojtka y – suma wieku pozostałych uczestników	1p.
2. Układa równanie, korzystając z własności średniej arytmetycznej. $\frac{2x+y}{8} = \frac{x+y}{8} + 1$	1p.
3. Rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź. $2x + y = x + y + 8$ $x = 8$ Odpowiedź. Wojtek ma 8 lat.	1p.

II sposób

Uczeń: 1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania. s– łączny wiek uczestników przed zmianą $\frac{s}{8}$ – średnia wieku zawodników przed zmianą	1p.
2. Zapisuje średnią wieku zawodników po zmianie. $\frac{s}{8} - 1 = \frac{s}{8} - \frac{8}{8} = \frac{s-8}{8}$, a więc jeśli średnia wieku uczestników zmniejszyła się o 1, to łączny wiek uczestników zmniejszył się o tyle, ilu jest zawodników.	1p.

3. Oblicza, ile lat ma Wojtek. Ponieważ jest 8 zawodników, więc Wojtek jest o 8 lat młodszy od Łukasza. Jeśli przyjmiemy, że: y – wiek Łukasza, a *x*– wiek Wojtka, to $y - x = 8$ oraz $y = 2x$, więc $2x - x = 8$, zatem $x = 8$ Odpowiedź. Wojtek ma 8 lat.	1p.

Zadanie 7. (0-3 pkt)

Pan Tomasz wyruszył w podróż samochodem o godzinie 9:15. Czwartą część trasy przejechał ze średnią prędkością 60 km/h, a pozostałą część drogi ze średnią prędkością 25 m/s. Do celu dotarł o 12:45. Oblicz długość trasy, którą przebył pan Tomasz oraz średnią prędkość na całej trasie.

I sposób

Uczeń: 1.Wyraża prędkości w jednakowych jednostkach i przeprowadza analizę treści zadania: 25 m/s = $\frac{0{,}025\text{ km}}{\frac{1}{3600}\text{ h}} = 90\text{km/h}$ *lub* 60 km/h = $60\ \frac{1000\text{ m}}{3600\text{ s}} = 16\ \frac{2}{3}\text{m/s}$ *s* – przebyta droga [w km], t_1 – czas pierwszej części trasy [w h], t_2 – czas drugiej części trasy [w h]	1p.
2. Zapisuje zależności między drogą, czasem i prędkością na poszczególnych odcinkach trasy i wyznacza czas w postaci wyrażenia z niewiadomą *s*: $\frac{0{,}25s}{t_1} = 60$, więc $t_1 = \frac{0{,}25s}{60} = \frac{s}{240}$ [h], $\frac{0{,}75s}{t_2} = 90$, więc $t_2 = \frac{0{,}75s}{90} = \frac{s}{120}$ [h]	1p.
3. Oblicza średnią prędkość na całej trasie i długość trasy, jaką przebył pan Tomasz: Średnia prędkość na całej trasie: $\frac{s}{t_1 + t_2} = \frac{s}{\frac{s}{240} + \frac{s}{120}} = \frac{s}{\frac{s}{240} + \frac{2s}{240}} = \frac{s \cdot 240}{3s} = 80\ [\frac{\text{km}}{\text{h}}]$ Długość trasy: $s = 80 \cdot 3{,}5 = 280$ [km] Odpowiedź. Pan Tomasz przebył trasę równą 280 km ze średnią prędkością 80 km/h.	1p.

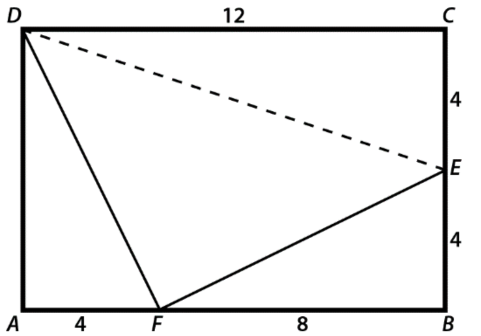
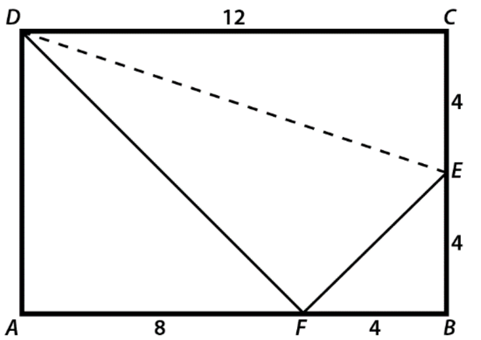
II sposób

Uczeń: 1.Wyznacza całkowity czas oraz wyraża prędkości w jednakowych jednostkach i przeprowadza analizę treści zadania: t = 12.45 - 9.15 =3,5 h 25 m/s = $\frac{0{,}025\ \text{km}}{\frac{1}{3600}\ \text{h}} = 90\text{km/h}$ *lub* 60 km/h = 60 $\frac{1000\ \text{m}}{3600\ \text{s}} = 16\ \frac{2}{3}\text{m/s}$ *s* – przebyta droga [w km], t_1 – czas pierwszej części trasy [w h], t_2 – czas drugiej części trasy [w h]	1p.
2. Zapisuje zależności między drogą, czasem i prędkością na poszczególnych odcinkach trasy i wyznacza czas w postaci wyrażenia z niewiadomą *s*: $\frac{0{,}25s}{t_1} = 60$, więc $t_1 = \frac{0{,}25s}{60} = \frac{s}{240}$ [h], $\frac{0{,}75s}{t_2} = 90$, więc $t_2 = \frac{0{,}75s}{90} = \frac{s}{120}$ [h]	1p.
3.Oblicza długość trasy i średnią prędkość na całej trasie: $3{,}5 = \frac{s}{240} + \frac{s}{120}$ $3{,}5 = \frac{s}{240} + \frac{s}{120} \,\vert \cdot 10$ $35 = \frac{s}{24} + \frac{s}{12}$ $35 = \frac{s + 2s}{24} = \frac{s}{8}$ $s = 35 \cdot 8 = 280$ [km] Średnia prędkość *v* na całej trasie: $v = \frac{280}{3{,}5} = 80\ [\frac{\text{km}}{\text{h}}]$ Odpowiedź. Pan Tomasz przebył trasę równą 280 km ze średnią prędkością 80 km/h.	1p.

Zadanie 8. (0-3 pkt)

Boki prostokąta *ABCD* mają długości: $|AB| = 12, |BC| = 8$. Punkt *E* dzieli bok *BC* na połowy, a punkt *F* dzieli bok *AB* w stosunku 1 : 2. Wykaż, że trójkąt *EFD* jest prostokątny. Rozpatrz dwa przypadki.

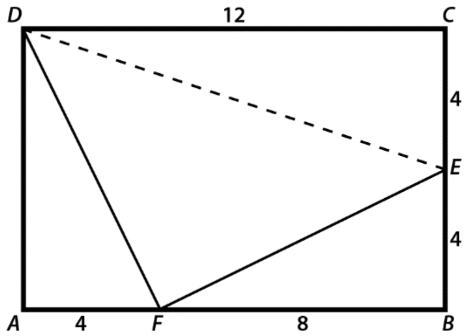
I sposób

Uczeń: 1.Rozwiązuje I przypadek wyznacza długości boków trójkąta FED korzystając z twierdzenia Pitagorasa  $\lvert FE\rvert = \sqrt{64+16} = \sqrt{80}$ $\lvert FD\rvert = \sqrt{16+64} = \sqrt{80}$ $\lvert DE\rvert = \sqrt{144+16} = \sqrt{160}$	1p.
2. Rozwiązuje II przypadek wyznacza długości boków trójkąta FED korzystając z twierdzenia Pitagorasa  $\lvert FE\rvert = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$ $\lvert FD\rvert = \sqrt{64+64} = \sqrt{128}$ $\lvert DE\rvert = \sqrt{144+16} = \sqrt{160}$	1p.
3. Uzasadnia, że trójkąt *EFD* jest prostokątny, stosując twierdzenie odwrotne do twierdzenia Pitagorasa. W obu przypadkach $\lvert FE\rvert^2 + \lvert FD\rvert^2 = \lvert DE\rvert^2$ Zatem kąt *EFD* jest prosty.	1p.

II sposób

Uczeń:

1.Rozwiązuje I przypadek (różnoboczny) — 1p.

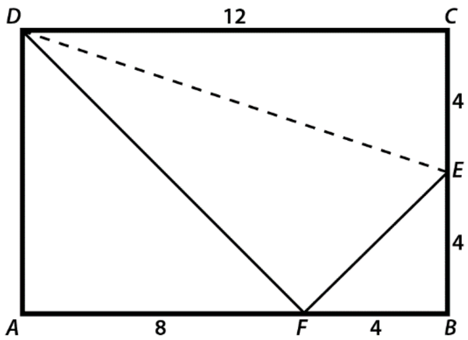


Zauważa, że trójkąty *DAF* i *EBF* są przystające.

$|AD| = |FB| = 8$
$|AF| = |EB| = 4$

$|\sphericalangle DAF| = |\sphericalangle EBF| = 90°$

2.Rozwiązuje II przypadek (równoramienny) — 1p.



Zauważa, że trójkąty *DAF* i *EBF* są prostokątne równoramienne,

$|AD| = |AF| = 8$
$|BE| = |BF| = 4$

kąty ostre w trójkątach *DAF* i *EBF* mają po 45°.
więc $|\sphericalangle AFD| = |\sphericalangle BFE| = 45°$

3. Uzasadnia, że trójkąt *EFD* jest prostokątny. — 1p.

I przypadek

$|\sphericalangle DFE| = 180° - (|\sphericalangle EFB| + 90° - |\sphericalangle EFB|)$

$= 180° - 90° = 90°$

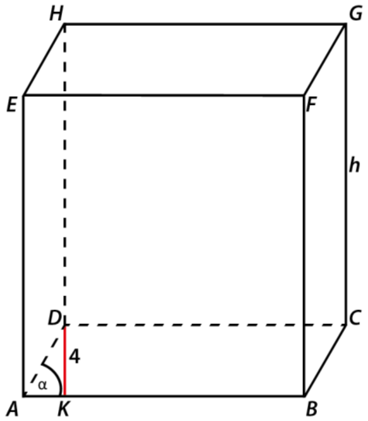
II przypadek

$|\sphericalangle DFE| = 180° - 2 \cdot 45° = 90°$

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Graniastosłup prosty ma w podstawie romb o wysokości równej 4 cm. Kąt rozwarty rombu ma miarę pięć razy większą od miary kąta ostrego. Oblicz objętość tego graniastosłupa, jeśli wiadomo, że pole podstawy graniastosłupa stanowi 20% pola jego powierzchni całkowitej.

Uczeń:



1. Przeprowadza analizę zadania np. za pomocą rysunku . Analizuje podstawę (wyznacza kąta ostry rombu oraz długość boku rombu) — 1p.

oblicza miarę kąta ostrego podstawy.

$\alpha -$ kąt ostry podstawy

$\alpha + 5\alpha = 180°$

$\alpha = 30°$

Zauważa, że trójkąt *DAK* jest połową trójkąta równobocznego, zatem $|AD| = 8$ cm. Ponieważ podstawą graniastosłupa jest romb, więc $|AB| = |AD| = 8$ cm.

2. Oblicza pole powierzchni całkowitej oraz pole jednej ściany tego graniastosłupa. — 1p.

$P_p = 8 \cdot 4 = 32$ [cm^2]

$P_c = 32 \cdot 5 = 160$ [cm^2]

$P_b = 160 - 2 \cdot 32 = 96$ [cm^2]

$P_ś = 96 : 4 = 24 = 8 \cdot h$

3. Oblicza wysokość graniastosłupa i objętość graniastosłupa i podaje odpowiedź. — 1p.

$P_ś = 24 = 8 \cdot h$

$h = 3$ cm

$V = P_p \cdot h = 32 \cdot 3 = 96$ [cm^3]

Odpowiedź. Objętość tego graniastosłupa jest równa 96 cm^3.