



KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów szkół podstawowych województwa mazowieckiego
w roku szkolnym 2018/2019

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 5 do zad.12) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt	1 pkt	1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	D	C	A	D

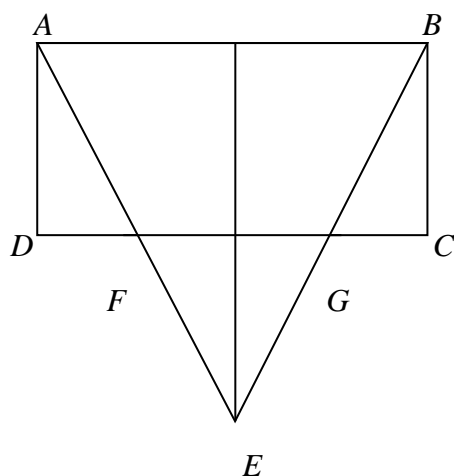
ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (2 pkt)

Na boku AB trójkąta równobocznego ABE zbudowano prostokąt $ABCD$ o bokach $|AB| = 2$ i $|AD| = 1$ tak, że obydwie figury częściowo się pokrywają. Oblicz, jakie jest pole tej części trójkąta, którą zakrywa prostokąt.

Uczeń:

1. analizuje dane zadania i zauważa, że szukaną figurą jest trapez równoramienny,



następnie oblicza wysokość h w trójkącie FGE : $h = \sqrt{3} - 1$ oraz bok trójkąta równobocznego FGE , bok $|FG| = 2 - \frac{2}{3}\sqrt{3}$

2. oblicza pole trapezu $ABGF$: $P_{ABGF} = 2 - \frac{\sqrt{3}}{3}$

Uwaga: dopuszcza się obliczenia bez usuwania niewymierności z mianownika.

1p.

1p.

Zadanie 6. (2 pkt)

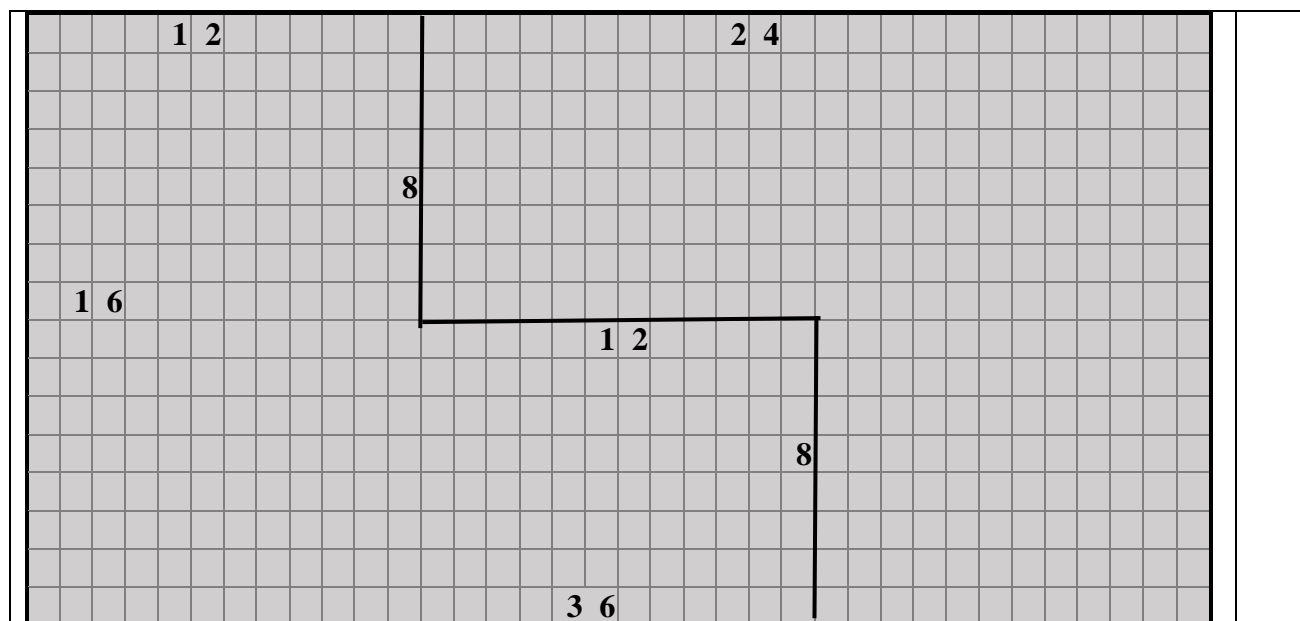
Wykaż, że prostokąt o wymiarach 16×36 można podzielić na dwa wielokąty, z których da się złożyć kwadrat.

Uczeń:

1. oblicza pole prostokąta $36 \cdot 16 = 576$ i bok kwadratu o takim samym polu – bok kwadratu jest równy 24;
2. dzieli prostokąt - rysuje łamaną zgodnie z rysunkiem.

1p.

1p.



Zadanie 7. (2 pkt)

Suma pewnych dwóch liczb wynosi $\sqrt{20}$, a ich różnica $\sqrt{12}$. Wykaż, że iloczyn tych liczb jest równy 2.

Uczeń:

1. zapisuje sumę i różnicę dwóch liczb np. dla a i b

1p.

$$a + b = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}, \quad a - b = \sqrt{12} = 2\sqrt{3} \text{ i oblicza } a = \sqrt{5} + \sqrt{3}, \quad b = \sqrt{5} - \sqrt{3}$$

2. oblicza iloczyn liczb a i b

1p.

$$(\sqrt{5} + \sqrt{3}) \cdot (\sqrt{5} - \sqrt{3}) = 5 - 3 = 2$$

lub

1. korzysta z tożsamości $4ab = (a + b)^2 - (a - b)^2$ lub przekształca tożsamość otrzymując $(a + b)^2 - (a - b)^2 = 4ab$

1p.

2. oblicza $4ab = (\sqrt{20})^2 - (\sqrt{12})^2 = 8$, więc $ab = 2$

1p.

Zadanie 8. (2 pkt)

Dwa samochodziki **A** i **B**, ustawione na linii START ruszyły jednocześnie w kierunku METY. Samochodzik **A** pokonał początkowe 25 cm w czasie 4 sekund. Samochodzik **B** pokonał początkowe 30 cm w czasie 5 sekund. Na całej trasie samochodziki nie zmieniały prędkości. Na metę jeden z nich przyjechał dwie sekundy przed drugim. Jak długa była trasa wyścigu?

Uczeń:	
1. oblicza prędkości samochodziku A i B $A \quad 25 : 4 = 6,25 \text{ [cm/s]}$ $B \quad 30 : 5 = 6 \text{ [cm/s]}$	1p.
2. oblicza czas (t) potrzebny na przebycie drogi od startu do mety $6,25 \cdot t = (t + 2) \cdot 6$, skąd $t = 48 \text{ [s]}$. Oblicza drogę $S = 6,25 \cdot 48 = 300 \text{ [cm]}$ lub $S = 6 \cdot 50 = 300 \text{ [cm]} = 3 \text{ [m]}$.	1p.
lub	
1. znajduje NWW $(25, 30) = 150$ i oblicza czas przejazdu tego odcinka dla każdego samochodziku: B przejeżdża dystans 150 cm w ciągu $5 \cdot 5 = 25 \text{ [s]}$ A przejeżdża dystans 150 cm w ciągu $6 \cdot 4 = 24 \text{ [s]}$	1p.
2. wnioskuje, że na 150 cm różnica czasu jest $25 - 24 = 1 \text{ [s]}$, to droga jest równa $2 \cdot 150 = 300 \text{ [cm]} = 3 \text{ [m]}$	1p.
Odp. Trasa wyścigu miała długość 3 m (300 cm).	

Zadanie 9. (2 pkt)

Mamy prostopadłościennne klocki o wymiarach 1 x 2 x 4. Jaka jest najmniejsza liczba takich klocków, aby można było z nich zbudować sześcian o krawędzi wyrażającej się liczbą naturalną? Jak zmieni się liczba klocków, gdy będziemy budować sześcian z klocków o wymiarach 2 x 4 x 8? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:	
1. zauważa, że najmniejszym sześcianem zbudowanym z klocków o wymiarach 1 x 2 x 4 jest sześcian o krawędzi 4 i wnioskuje, że należy dołożyć jeszcze 7 takich prostopadłościanów (Odp. Razem należy użyć minimum 8 klocków);	1p.
2. zauważa, że dla prostopadłościanów, których krawędzie są dwa razy większe tj. 2 x 4 x 8 liczba dostawionych sześcianów jest taka sama, krawędź nowego sześcianu jest równa 8 (Odp. Liczba klocków nie zmieni się).	1p.

Zadanie 10. (2 pkt)

Bok kwadratu nr I ma długość 12. Bok kwadratu nr II ma długość równą długości przekątnej kwadratu nr I. Ogólnie: bok kwadratu nr n ma długość równą długości przekątnej kwadratu nr $(n-1)$. Jaki numer będzie miał kwadrat, którego bok ma długość większą od 100 i mniejszą od 200? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:

1. oblicza kolejne boki i przekątne kwadratów:

Numer kwadratu	bok	przekątna
I	12	$12\sqrt{2}$
II	$12\sqrt{2}$	$12\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 24$
III	24	$24\sqrt{2}$
IV	$24\sqrt{2}$	$24\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 48$
V	48	$48\sqrt{2}$
VI	$48\sqrt{2}$	$48\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 96$
VII	96	$96\sqrt{2}$
VIII	$96\sqrt{2}$	$96\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 192$
IX	192	

2. stwierdza, że kwadrat nr VIII będzie miał bok równy $96\sqrt{2}$ ($100 < 96\sqrt{2} < 200$)
lub stwierdza, że kwadrat nr IX będzie miał bok równy 192 ($100 < 192 < 200$).

Odp. Kwadrat nr VIII, kwadrat nr IX .

Uwaga: dopuszcza się podanie w odpowiedzi tylko jednego kwadratu.

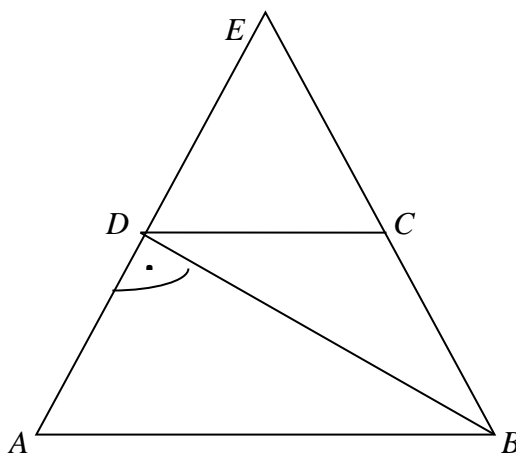
1p.

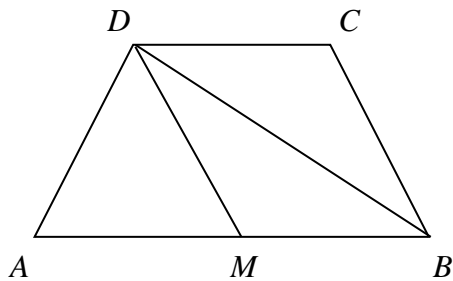
1p.

Zadanie 11. (2 pkt)

W trapezie równoramiennym przekątna jest prostopadła do ramienia i dzieli kąt ostry trapezu na dwa kąty o równej mierze. Uzasadnij, że długość jednej podstawy trapezu jest dwa razy dłuższa od długości drugiej podstawy.

Uczeń:



<p>1. przedłuża ramiona trapezu i otrzymuje trójkąt ABE, stwierdza, że jest to trójkąt równoboczny, bo trójkąt prostokątny ABD ma kąty ostre 60° i 30°, miara kąta ABE jest równa 60°, więc miara kąta AEB jest równa się 60°;</p>	<p>1p. 1p.</p>
<p>2. zauważa, że przekątna DB jest wysokością trójkąta równobocznego ABC, dzieli więc bok AE na połowy ($AE = AB$). Zauważa, że trójkąt DCE jest trójkątem o kątach równych 60° - jest więc równoboczny, a zatem bok $DC = DE = 0,5 AB$.</p>	
<p>lub</p>	
	
<p>1. zaznacza środek M boku AB w trapezie $ABCD$ i uzasadnia, że czworokąt $MBCD$ jest rombem;</p>	<p>1p.</p>
<p>2. wskazuje na równość boków czworokąta $MBCD$ i wnioskuje, że $MB = DC = 0,5 AB$.</p>	<p>1p.</p>

Zadanie 12. (2 pkt)

Miesięczny dochód pana Piotra stanowi $\frac{5}{8}$ łącznego miesięcznego dochodu pana Piotra i pana

Jana. Natomiast suma miesięcznych wydatków obu panów stanowi $\frac{7}{8}$ ich łącznych miesięcznych dochodów. Każdy z panów oszczędza miesięcznie 600 zł. Oblicz roczny dochód pana Jana.

<p>Uczeń:</p>	
<p>1. oznacza np. przez x - łączne miesięczne dochody, przez $\frac{7}{8}x$ - łączne miesięczne wydatki. Korzystając z zależności podanych w zadaniu układa i rozwiązuje równanie: $\frac{5}{8}x + \frac{3}{8}x - 1200 = \frac{7}{8}x$; otrzymuje $x = 9600$ zł,</p>	<p>1p.</p>
<p>2. oblicza miesięczny dochód pana Jana $\frac{3}{8} \cdot 9600 = 3600$ zł, następnie oblicza roczny dochód pana Jana - 43200 zł. Odp. Roczny dochód pana Jana to 43200 zł.</p>	<p>1p.</p>