



**MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA
KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII
UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO
ETAP WOJEWÓDZKI 2020/2021**

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2, 3 lub 4 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	0-1 pkt	0-1 pkt	0-1 pkt	0-1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	P, F	D	N - A	A, C

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (0-2 pkt)

Uzasadnij, że dokładnie 8 liczb pierwszych spełnia nierówność

$$(x - 1)^2 + (x - \sqrt{7})(\sqrt{7} + x) \geq (2x + 10)(x - 5).$$

<p>Uczeń:</p> <p>1. Rozwiązuje nierówność korzystając ze wzorów skróconego mnożenia</p> $(x - 1)^2 + (x - \sqrt{7})(\sqrt{7} + x) \geq (2x + 10)(x - 5)$ $x^2 - 2x + 1 + x^2 - 7 \geq 2(x + 5)(x - 5)$ $x^2 - 2x + 1 + x^2 - 7 \geq 2(x^2 - 25)$ $x^2 - 2x + 1 + x^2 - 7 \geq 2x^2 - 50$ $-2x \geq -44$ $x \leq 22$ <p>2. Wypisuje liczby pierwsze spełniające nierówność i podaje odpowiedź.</p> <p>Tymi liczbami są: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, a więc jest ich 8.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
---	-----------------------

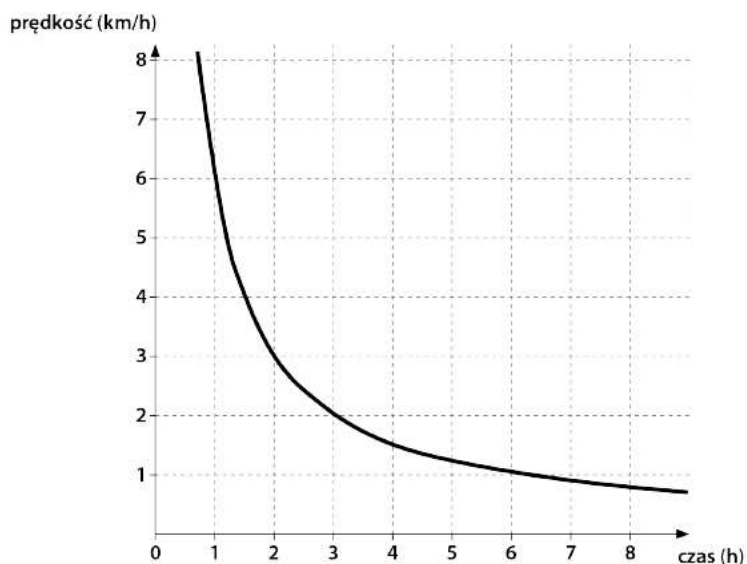
Zadanie 6. (0-2 pkt)

Uzasadnij, że jeśli wartość wyrażenia $a^{-1} + (\sqrt{a})^{-1} - \left(\frac{a}{2}\right)^{-1}$ jest liczbą ujemną, to $a < 1$ i $a > 0$.

Uczeń:	
1. Przekształca dane wyrażenie, stosując definicję potęgi o wykładniku ujemnym.	1 p.
$a^{-1} + (\sqrt{a})^{-1} - \left(\frac{a}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{a} + \frac{1}{\sqrt{a}} - \frac{2}{a} = \frac{1}{a} + \frac{\sqrt{a}}{a} - \frac{2}{a} = \frac{\sqrt{a}-1}{a}$	
2. Ustala wartość liczby a .	1 p.
Liczba a jest dodatnia, bo jest liczbą podpierwiastkową i występuje w mianowniku, więc nie może być liczbą ujemną i zerem. Aby wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{a}-1}{a}$ była liczbą ujemną licznik musi być liczbą ujemną, zatem $\sqrt{a}-1 < 0$, stad $a < 1$ i $a > 0$. <i>Uwaga. Jeśli uczeń pomyli założenie z tezą (uzasadnia twierdzenie odwrotne) to może uzyskać co najwyżej 1p.</i>	

Zadanie 7. (0-2 pkt)

Pan Stanisław dba o swoją kondycję fizyczną, więc codziennie pieszo pokonuje drogę z domu do pracy i z powrotem. Na wykresie przedstawiono zależność między prędkością a czasem podczas przemieszczania się pana Stanisława w jedną stronę. Oblicz długość drogi z domu do pracy oraz czas w minutach na pokonanie tej drogi rowerem z prędkością 4 razy większą.



Ze względu na techniczny błąd wydruku - ukrycie $V_{\text{śr}} \text{ pieszego}$

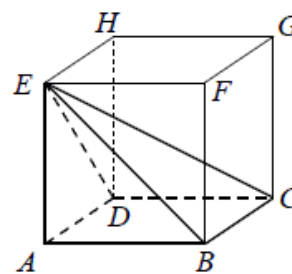
Komisja Wojewódzka dostosowała schemat punktowania zadania do pierwszej części pytania.

<p>Uczeń:</p> <p>1. Dokonuje analizy zadania, np. zapisuje zależność między prędkością, drogą i czasem; odczytuje z wykresu, że np. gdy $v = 3 \text{ km/h}$, to $t = 2 \text{ h}$.</p> <p>2. Oblicza drogę S z domu do pracy</p> <p>$S = v \cdot t$ $S = 6 \text{ [km]}$</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
---	-----------------------

Zadanie 8. (0-3 pkt)

Dany jest sześcian $ABCDEFGH$ o krawędzi 5.

Przyjmij za jednostkę długość boku kratki i narysuj siatkę ostrosłupa $ABCDE$. Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa i przedstaw je w postaci iloczynu.

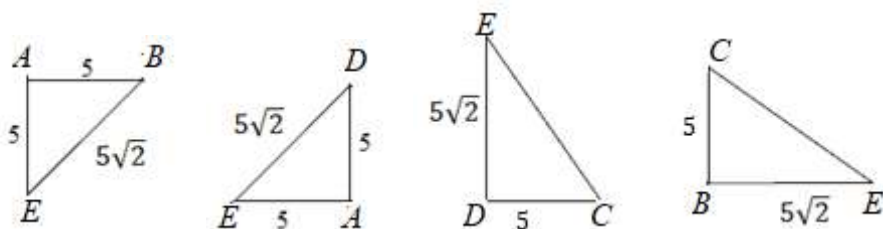


Uczeń:

1. Zauważa, że ściany boczne są trójkątami prostokątnymi i wyznacza długości ich przyprostokątnych.

1p.

Ściany boczne są trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych wskazanych na rysunku.



2. Rysuje prawidłową siatkę ostrosłupa przyjmując za jednostkę długość boku kratki.

1p.

Na przykład:

- rysuje kwadrat $ABCD$ o boku 5,
- rysuje odcinek AE równy 5, a następnie odcinek BE ,
- rysuje odcinek AE_1 równy 5, a następnie odcinek E_1D ,
- rysuje odcinek DE_2 , którego długość wynosi $5\sqrt{2}$ i jest równa przekątnej kwadratu $ABCD$, a następnie odcinek E_2C ,
- rysuje odcinek BE_3 równy odcinkowi $BD = 5\sqrt{2}$, a następnie odcinek E_3C .

	<p>3. Oblicza pole powierzchni bocznej ostrosłupa i przedstawia je w postaci iloczynu.</p> $P_b = 2 \cdot \frac{25}{2} + 2 \cdot \frac{25\sqrt{2}}{2} = 25 + 25\sqrt{2} = 25(1 + \sqrt{2})$ <p><i>Uwaga. Jeśli uczeń przedstawi pole powierzchni bocznej ostrosłupa w postaci innego iloczynu, to też otrzymuje 1p.</i></p> <p style="text-align: right;">1p.</p>
--	---

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Julka zapisuje liczby sześciocyfrowe, które można utworzyć przy użyciu wszystkich spośród cyfr 3, 4 i 5 tak, aby każde dwie sąsiednie cyfry w ich zapisach były liczbami różniącymi się o jeden. Oblicz, ile najwięcej różnych liczb spełniających te warunki może zapisać Julka.

Uczeń:

1. Przedstawia możliwy układ cyfr w liczbie sześciu cyfrowej.

Na przykład:

A

3	4	3 5	4	3 5	4
---	---	---------------------------	---	---------------------------	---

B

4	3 5	4	3 5	4	3 5
---	---------------------------	---	---------------------------	---	---------------------------

C

5	4	3 5	4	3 5	4
---	---	---------------------------	---	---------------------------	---

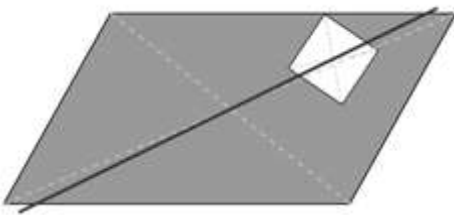
1p.

<p>2. Oblicza, ile jest liczb w poszczególnych wariantach.</p> <p>A. $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ B. $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8$ C. $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$</p>	1p.
<p>3. Eliminuje z każdego wariantu liczby utworzone z dwóch różnych cyfr i oblicza, ile jest wszystkich liczb spełniających warunki zadania oraz podaje odpowiedź.</p> <p>Należy wykluczyć liczby w:</p> <p>A: 343434 B: 434343 i 454545 C: 545454</p> <p>Zatem $4 + 8 + 4 - 4 = 12$</p> <p>Odpowiedź. Jest 12 liczb sześciocyfrowych, które można napisać przy użyciu cyfr 3, 4 i 5 tak, aby każde dwie sąsiednie cyfry w ich zapisach były liczbami różniącymi się o jeden.</p> <p><i>Uwaga. Jeśli uczeń rozwiąże zadanie przez wypisywanie liczb spełniających warunki zadania i popełni jeden błąd (wypisze o jedną liczbę za dużo lub o jedną za mało), to otrzymuje 2p., a jeśli popełni dwa błędy – otrzymuje 1p.</i></p>	1p.

Zadanie 10. (0-4 pkt)

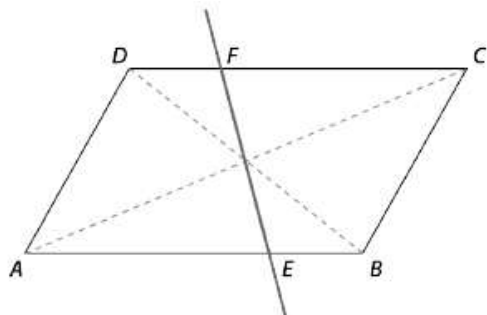
Z równoległoboku wycięto romb tak, jak na rysunku. Narysuj prostą przechodzącą przez środki symetrii równoległoboku i rombu, a następnie uzasadnij, że ta prosta dzieli otrzymaną figurę na dwie figury o równych polach.



<p>Uczeń:</p> <p>1. Uzupełnia rysunek zgodnie z treścią zadania.</p> 	1p.
--	-----

2. Zauważa, że prosta przechodząca przez środek symetrii S dowolnego równoległoboku dzieli go na dwa czworokąty o równych polach.

1p.



Prosta EF dzieli równoległobok $ABCD$ na dwa czworokąty $AEFD$ i $BEFC$. Każdy z tych czworokątów składa się z trójkątów, które są przystające. Trapez $AEFD$: z trójkątów AES , DFS i ASD , a trapez $BEFC$: z trójkątów BES , CFS i BSC .

3. Uzasadnia przystawanie trójkątów lub równość pól powołując się na twierdzenie zawarte w punkcie 2.

1p.

$\triangle AES \equiv \triangle CFS$, bo $|\angle ASE| = |\angle CSF|$ jako kąty wierzchołkowe,

$|\angle EAS| = |\angle FCS|$ jako kąty naprzemianległe, $|AS| = |CS|$ - cecha kbk

$\triangle ASD \equiv \triangle BSC$, bo $|AD| = |BC|$, $|AS| = |CS|$, $|DS| = |BS|$ - cecha bbb

$\triangle DSF \equiv \triangle BES$, bo $|\angle DSF| = |\angle BSE|$ jako kąty wierzchołkowe,

$|\angle SDF| = |\angle SBE|$ jako kąty naprzemianległe, $|DS| = |BS|$ - cecha kbk

Ponieważ czworokąty $AEFD$ i $BEFC$ składają się z przystających trójkątów, więc ich pola są równe.

4. Podsumowuje i zapisuje wniosek.

Ponieważ romb jest równoległobokiem, więc prosta przechodząca przez punkt przecięcia jego przekątnych dzieli romb na dwa czworokąty o równych polach. Zatem prosta, która przechodzi przez punkty przecięcia przekątnych równoległoboku i rombu dzieli otrzymaną figurę na dwie części o równych polach.

1p.