Mazowiecki Kurator Oświaty
Al. Jerozolimskie 32, 00-024 Warszawa

MSCDN

KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów gimnazjów oraz oddziałów gimnazjalnych województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2018/2019

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 5 do zad.12) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**	**4.**
Maks. liczba punktów	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**	**1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**D**	**C**	**A, B**	**D**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (2 pkt)

Solanka, to wodny roztwór soli. Do 5 kg 30%-owej solanki dolano taką ilość 40%-owej solanki, że po pobraniu 2 kg powstałego roztworu i całkowitym odparowaniu z niego wody otrzymano 700 g soli. Ile kilogramów 40%-owej solanki dolano?

Uczeń: 1. oblicza stężenie wodnego roztworu soli (*x*) po zmieszaniu 5 kg solanki 30% i *a* kg solanki 40%: $0{,}3 \cdot 5 + 0{,}4\,a = (5 + a) \cdot x$ $x = \dfrac{1{,}5 + 0{,}4a}{5 + a}$ 2. oblicza wagę wodnego roztworu soli 40%: $2 \cdot \dfrac{1{,}5 + 0{,}4a}{5 + a} = 0{,}7$; stąd $a = 5$ kg. Odp. Dolano 5 kg solanki o stężeniu 40%.	1p. 1p.

Zadanie 6. (2 pkt)

Miesięczny dochód pana Piotra stanowi $\frac{5}{8}$ łącznego miesięcznego dochodu pana Piotra i pana Jana. Natomiast jego miesięczne wydatki stanowią $\frac{9}{14}$ łącznych miesięcznych wydatków obu panów. Każdy z panów oszczędza miesięcznie 600 zł. Oblicz roczny dochód pana Jana.

Uczeń: 1. oznacza np. przez *x* - łączne miesięczne dochody, przez *y* – łączne miesięczne wydatki. Korzystając z zależności podanych w zadaniu układa i rozwiązuje układ równań: $\begin{cases} \frac{5}{8}x - \frac{9}{14}y = 600 \\ \frac{3}{8}x - \frac{5}{14}y = 600 \end{cases}$ rozwiązanie układu: $x = 9600$ zł, $y = 8400$ zł 2. oblicza miesięczny dochód pana Jana - 3600 zł, następnie oblicza roczny dochód pana Jana - 43200 zł. Odp. Roczny dochód pana Jana to 43200 zł.	1p. 1p.

Zadanie 7. (2 pkt)

Suma pewnych dwóch liczb wynosi $\sqrt{20}$, a ich różnica $\sqrt{12}$. Wykaż, że ich iloczyn jest równy 2.

Uczeń: I sposób 1. zapisuje sumę i różnicę dwóch liczb np. dla a i b $a+b=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$, $a-b=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$ i oblicza $a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$, $b=\sqrt{5}-\sqrt{3}$	1p.
2. oblicza iloczyn liczb a i b $(\sqrt{5}+\sqrt{3})\cdot(\sqrt{5}-\sqrt{3})=5-3=2$ lub	1p.
II sposób 1. korzysta z tożsamości $4ab=(a+b)^2-(a-b)^2$ lub przekształca tożsamość otrzymując $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$	1p.
2. zapisuje zależność: $(\sqrt{20})^2-(\sqrt{12})^2=4ab$ stąd $4ab=8$, więc $ab=2$	1p.

Zadanie 8. (2 pkt)

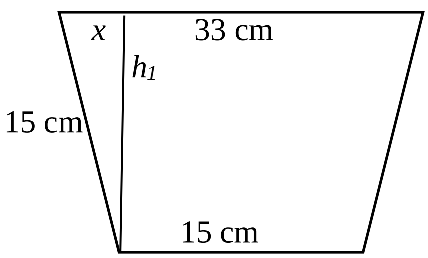
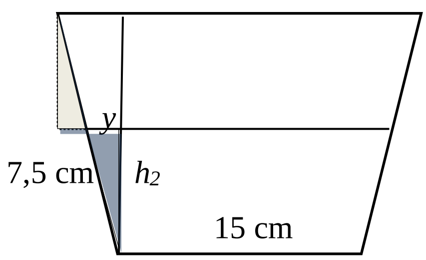
Dwa samochodziki ***A*** i ***B***, ustawione na linii START ruszyły jednocześnie w kierunku METY. Samochodzik ***A*** pokonał początkowe 25 cm w czasie 4 sekund. Samochodzik ***B*** pokonał początkowe 30 cm w czasie 5 sekund. Na całej trasie samochodziki nie zmieniały prędkości. Na metę jeden z nich przyjechał dwie sekundy przed drugim.
Jak długa była trasa wyścigu?

Uczeń: I sposób 1. oblicza prędkości samochodziku ***A*** i ***B*** ***A*** 25 : 4 = 6,25 [cm/s] ***B*** 30 : 5 = 6 [cm/s]	1p.
2. oblicza czas (t) potrzebny na przebycie drogi od startu do mety $6{,}25\cdot t=(t+2)\cdot 6$, skąd $t=48$ [s]. Oblicza drogę $S=6{,}25\cdot 48=300$ [cm] lub $S=6\cdot 50=300$ [cm] = 3[m].	1p.

lub II sposób 1. znajduje NWW (25,30) = 150 i oblicza czas przejazdu tego odcinka dla każdego samochodziku: ***B*** przejeżdża dystans 150 cm w ciągu $5 \cdot 5 = 25$ [s] ***A*** przejeżdża dystans 150 cm w ciągu $6 \cdot 4 = 24$ [s]	1p.
2. wnioskuje, że na 150 cm różnica czasu jest 25 – 24 = 1s, to droga jest równa $2 \cdot 150 = 300$ [cm] = 3[m]. Odp. Trasa wyścigu miała długość 3 m (300 cm).	1p.

Zadanie 9. (2 pkt)

Pojemnik na wodę jest zbudowany z pięciu płytek: trzech w kształcie prostokąta o bokach długości 10 cm i 15 cm oraz dwóch w kształcie trapezu równoramiennego o bokach długości: 15 cm, 15 cm, 15 cm, 33 cm. Ile wody zmieści się w pojemniku wypełnionym do połowy swojej głębokości?

Uczeń: 1. zauważa, że pojemnik stoi na podstawie w kształcie prostokąta oraz ma on kształt graniastosłupa o podstawie trapezu równoramiennego i oblicza pole trapezu, którego wysokość jest równa połowie wysokości h_1: $x = (33 – 15) : 2 = 9$ [cm] (rys.1), wysokość trapezu $h_1 = 12$ cm stąd $h_2 = 12 : 2 = 6$ [cm], następnie np. korzystając z własności przystających trójkątów prostokątnych podaje długość odcinka $y = 4{,}5$ cm (rys.2), zatem dłuższa podstawa powstałego trapezu jest równa $15 + 2 \cdot 4{,}5 = 24$ [cm] stąd $P = (24 + 15) \cdot 6 : 2 = 117$ [cm^2]	1p.
2. oblicza objętość wody w pojemniku wypełnionym do połowy głębokości: $V = 117 \cdot 10 = 1170$ [cm^3] rys.1   rys. 2	1p.

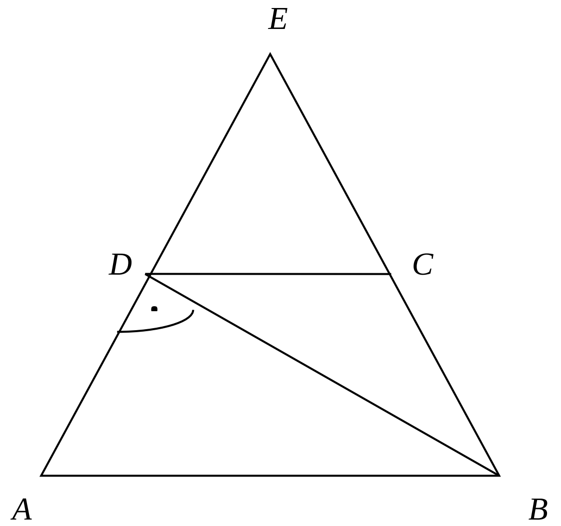
Zadanie 10. (2 pkt)

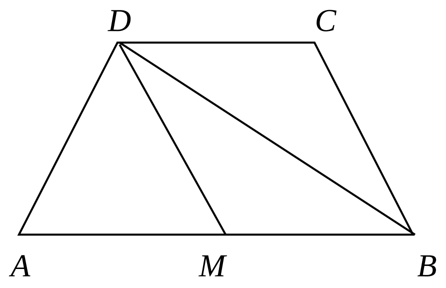
Wyznacz wszystkie dodatnie liczby całkowite *n*, dla których liczba $n^2 + 2n + 7$ jest podzielna przez $n+1$.

Uczeń: 1. przekształca wyrażenie $n^2 + 2n + 7 = (n+1)^2 + 6$; 2. analizuje podzielność sumy przez $n+1$ i stwierdza, że pierwszy składnik jest podzielny $n+1$, zatem i drugi składnik też musi być podzielny przez $n+1$, a tak się dzieje dla $n = 1$, 2 i 5, gdyż liczba 6 dzieli się przez: 1,2,3,6. *Uwaga: W przypadku wyznaczenia poprawnie <u>wszystkich</u> liczb poprzez podstawienie i sprawdzenie oraz braku <u>uzasadnienia</u>, że są to wszystkie liczby – uczeń otrzymuje 1 pkt.*	 1p. 1p.

Zadanie 11. (2 pkt)

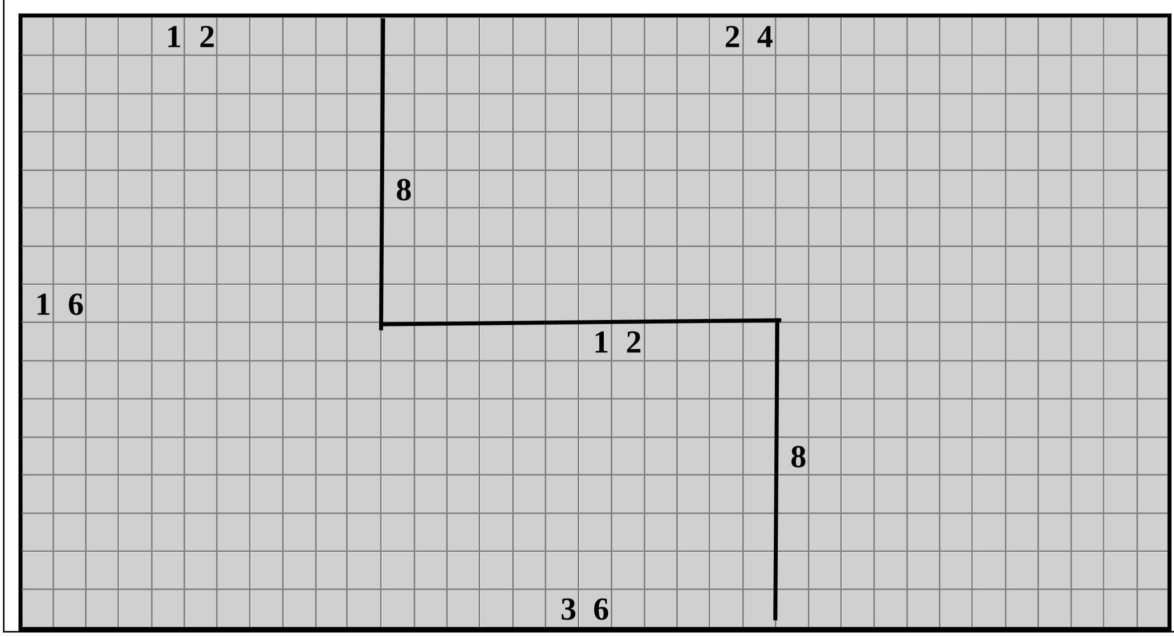
W trapezie równoramiennym przekątna jest prostopadła do ramienia i dzieli kąt ostry trapezu na dwa kąty o równej mierze. Uzasadnij, że długość jednej podstawy trapezu jest dwa razy większa od długości drugiej podstawy.

Uczeń: I sposób  1. zauważa, że trójkąt prostokątny *ABD* ma kąty ostre 60° i 30° więc miara kąta *ABC* jest równa 60°. Przedłuża ramiona trapezu i otrzymuje trójkąt *ABE*, stwierdza, że jest to trójkąt równoboczny, bo ma równe kąty;	1p.

2. zauważa, że przekątna *DB* jest wysokością trójkąta równobocznego *ABC*, dzieli więc bok *AE* na połowy (|*AE*| = |*AB*|). Zauważa, że trójkąt *DCE* jest trójkątem o kątach równych 60° - jest więc równoboczny, a zatem bok |*DC*| = |*DE*| = 0,5 |*AB*|. lub II sposób  1. zaznacza środek *M* boku *AB* w trapezie *ABCD* i uzasadnia, że czworokąt *MBCD* jest rombem; 2. wskazuje na równość boków czworokąta *MBCD* i wnioskuje, że |*MB*| = |*DC*| = 0,5 |*AB*|.	1p. 1p. 1p.

Zadanie 12. (2 pkt)

Wykaż, że prostokąt o wymiarach 16 × 36 można podzielić na dwa wielokąty, z których da się złożyć kwadrat.

Uczeń: 1. oblicza pole prostokąta 16 · 36 = 576 i bok kwadratu o takim samym polu – bok kwadratu jest równy 24; 2. dzieli prostokąt - rysuje łamaną zgodnie z rysunkiem. 	1p. 1p.