



KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów gimnazjów oraz oddziałów gimnazjalnych
województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2018/2019

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 5 do zad.12) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt	1 pkt	1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	A	C	B	B

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

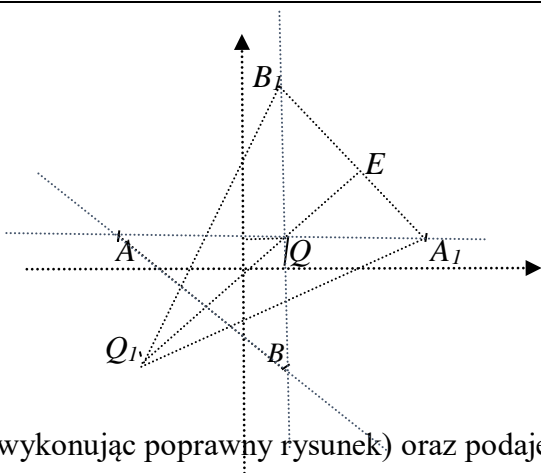
Zadanie 5. (2 pkt)

Trzy pompy mają opróżnić basen. Pierwsza pompa samodzielnie opróżniłaby basen w ciągu 15 godzin, druga w ciągu 10 godzin, a trzecia w ciągu 9 godzin. Oblicz, czy trzy pompy pracujące jednocześnie zdążą opróżnić ten basen w ciągu 3 godzin.

<p>Uczeń:</p> <p><i>I sposób</i></p>	
<p>1. wprowadza oznaczenia i układa równanie (zależność) zgodne z warunkami zadania, np.: x – liczba godzin potrzebna do opróżnienia basenu przez wszystkie trzy pompy, pojemność basenu przyjmujemy 1. ilość wody wypompowana przez poszczególne pompy w ciągu jednej godziny: I pompa: $\frac{1}{15}x$, II pompa: $\frac{1}{10}x$, III pompa: $\frac{1}{9}x$</p>	1p.
<p>2. rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź</p> $\frac{1}{15}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{9}x = 1$ $25x = 90 \text{ stąd } x = 3,6$ <p>Odp. Trzy pompy nie zdążą opróżnić basenu w ciągu 3 godzin.</p>	1p.
<p><i>II sposób</i></p> <p>1. oblicza ilość wody usuniętej przez wszystkie 3 pompy w ciągu 1 godziny</p> $\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{25}{90}$ <p>2. oblicza ilość wody usuniętej przez wszystkie 3 pompy w ciągu 3 godzin $\left(\frac{75}{90}\right)$</p> <p>i wnioskuje, że jest to za mało.</p> <p>Odp. Trzy pompy nie zdążą opróżnić basenu w ciągu 3 godzin.</p>	

Zadanie 6. (2 pkt)

Dany jest trójkąt QAB , gdzie $A = (-5,1)$, $B = (1,-5)$ i $Q = (1,1)$. Punkt A_1 jest obrazem punktu A w symetrii osiowej względem prostej QB , punkt B_1 jest obrazem punktu B w symetrii osiowej względem prostej QA oraz punkt Q_1 jest obrazem punktu Q w symetrii osiowej względem prostej AB . Oblicz pole trójkąta $Q_1A_1B_1$.

<p>Uczeń:</p>  <p>1. analizuje warunki zadania (np. wykonując poprawny rysunek) oraz podaje współrzędne punktów: $A_1=(7,1)$, $B_1=(1,7)$, $Q_1=(-5, -5)$;</p> <p>2. zauważa, że w trójkącie $A_1B_1Q_1$ wysokość Q_1E stanowi 1,5 długości przekątnej kwadratu $AQBQ_1$ ($QE = \frac{1}{2} Q_1Q$), zaś podstawa A_1B_1 trójkąta A_1B_1Q równa jest przekątnej tego kwadratu ($A_1B_1 = AB$). Oblicza pole trójkąta $A_1B_1Q_1$.</p> <p>Odp. Pole trójkąta $A_1B_1Q_1$ jest równe 54.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
---	-----------------------

Zadanie 7. (2 pkt)

Stosunek mas trzech różnych stopów srebra wynosi 7 : 10 : 18, natomiast stosunek mas czystego srebra zawartego w tych stopach równa się odpowiednio 7 : 9 : 12. Po stopieniu wszystkich kawałków otrzymano 350 gramów stopu, w którym czyste srebro stanowi 72% jego masy. Oblicz, w którym stopie jest największa procentowa zawartość srebra.

<p>Uczeń:</p> <p><i>I sposób</i></p> <p>1. oblicza masy trzech różnych stopów:</p> $7x + 10x + 18x = 350, \quad 35x = 350, \quad x = 10$ <p>I stop $7 \cdot 10 = 70$ g, II stop $10 \cdot 10 = 100$ g, III stop $18 \cdot 10 = 180$ g (masy stopów);</p> <p>2. oblicza masy srebra w poszczególnych stopach:</p> $7y + 9y + 12y = 0,72 \cdot 350 \text{ czyli } 7y + 9y + 12y = 252 \text{ stąd } 28y = 252 \text{ zatem } y = 9$ <p>I stop $7 \cdot 9 = 63$ g, II stop $9 \cdot 9 = 81$ g, III stop $12 \cdot 9 = 108$ g (masa srebra w stopach)</p> <p>i oblicza procent srebra w poszczególnych stopach.</p> <p>W I stopie jest 90% srebra, w II stopie jest 81% srebra, w III stopie jest 60% srebra.</p> <p>Odp. Największa procentowa zawartość srebra jest w I stopie.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	-----------------------

II sposób

1. oblicza, że w I stopie jest $\frac{7}{35} = \frac{28}{140}$ ogólnej masy i $\frac{7}{28} = \frac{35}{140}$ ogólnego srebra,

a stosunek tych ułamków (*masy srebra do ogólnej masy*) to $\frac{35}{28}$. Analogicznie oblicza,

że w II stopie jest $\frac{10}{35} = \frac{40}{140}$ ogólnej masy oraz $\frac{9}{28} = \frac{45}{140}$ masy srebra, a stosunek tych

ułamków to $\frac{45}{40}$, zaś w III stopie jest $\frac{18}{35} = \frac{72}{140}$ ogólnej masy i $\frac{12}{28} = \frac{60}{140}$ masy srebra,

a stosunek tych ułamków to $\frac{60}{72}$;

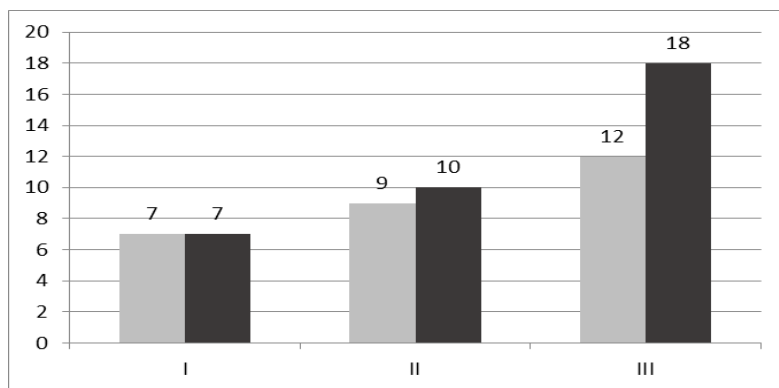
2. stwierdza, że w trzecim stopie stosunek ułamków jest mniejszy niż 1, a w pozostałych stopach większy (bo I stop: $\frac{35}{28} > 1$, II stop: $\frac{45}{40} > 1$, III stop: $\frac{60}{72} < 1$) oraz wnioskuje stąd,

że w I stopie jest najwięcej srebra (bo $\frac{350}{280} > \frac{315}{280}$).

Odp. Największa procentowa zawartość srebra jest w I stopie.

III sposób

1. analizuje graficznie treść zadania np. rysuje diagram słupkowy danych {7,7}, {9, 10}, {12,18}



tj. I stop: słupek srebra wysokości 7 i obok słupek wysokości 7,

II stop: słupek srebra wysokości 9 i obok słupek wysokości 10,

III stop: słupek srebra wysokości 12 i obok słupek wysokości 18.

2. wnioskuje na podstawie diagramu, gdzie jest najwięcej srebra oraz zapisuje odpowiedź.

Odp. Największa procentowa zawartość srebra jest w I stopie.

Zadanie 8. (2 pkt)

Pewna liczba całkowita dodatnia przy dzieleniu przez 5 daje resztę 3, a przy dzieleniu przez 6 daje resztę 2. Znajdź resztę z dzielenia tej liczby przez 30.

Uczeń:	
1. oznacza liczbę całkowitą dodatnią np. przez x i przedstawia ją w postaci: $x = 5a + 3$ stąd $6x = 30a + 18$ oraz $x = 6b + 2$ stąd $5x = 30b + 10$ (a, b – są to liczby całkowite dodatnie);	1p.
2. oblicza różnicę $6x - 5x = 30a + 18 - (30b + 10)$, stąd $x = 30(a - b) + 8$, wnioskuje, że reszta z dzielenia tej liczby przez 30 jest równa 8.	1p.
Odp. Reszta z dzielenia tej liczby przez 30 jest równa 8.	

Zadanie 9. (2 pkt)

Z walca o średnicy podstawy równej 8 cm i wysokości 21 cm wycięto stożek o promieniu podstawy równym 3 cm i wysokości 14 cm. Oblicz, czy z pozostałej części walca można utworzyć kulę o średnicy równej 12 cm. Przyjmij, że liczba π jest w przybliżeniu równa $3\frac{1}{7}$.

Uczeń:	
1. oblicza objętość walca $V_w = 1056 \text{ cm}^3$ oraz objętość stożka $V_s = 132 \text{ cm}^3$;	1p.
2. oblicza różnicę objętości walca i stożka $V_w - V_s = V_k = 924 \text{ cm}^3$. Oblicza objętość kuli o promieniu 6 cm i porównuje wynik z objętością $V_k = 924 \text{ cm}^3$ ($924 > 905$) oraz podaje odpowiedź.	1p.
Odp. Z pozostałej części walca można utworzyć kulę o średnicy równej 12 cm.	

Zadanie 10. (2 pkt)

Pole trójkąta równobocznego ABC jest równe 4 cm^2 . Punkty K, L, M leżą odpowiednio na prostych AB, BC, AC w taki sposób, że punkt A jest środkiem odcinka KB , punkt B jest środkiem odcinka CL , punkt C jest środkiem odcinka AM . Oblicz pole trójkąta KLM .

Zadanie 12. (2 pkt)

Wykaż, że nie istnieje para liczb całkowitych dodatnich spełniających równość:
 $3x^2 + 5y^2 = 360$.

<p>Uczeń:</p> <p><i>I sposób</i></p> <p>1. zauważa, że jeżeli x i y są dwiema liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $3x^2 + 5y^2 = 360$, to $x \leq 10$ (gdy $x \leq 10$ to $3x^2 < 360$, zaś dla $x = 11$, $3 \cdot 121 > 360$) i $y \leq 8$ (gdy $y \leq 8$ to $5y^2 < 360$, zaś dla $y = 9$, $5 \cdot 81 > 360$) a ponadto x dzieli się przez 5 (gdyż $3x^2 = 5(72 - y^2)$), zaś y dzieli się przez 3 (gdyż $5y^2 = 3(120 - x^2)$);</p> <p>2. wyznacza pary (5,3), (5,6), (10,3), (10,6) mogące spełniać równość, następnie sprawdza i stwierdza, że nie istnieje całkowite dodatnie rozwiązanie tej równości.</p> <p><i>II sposób</i></p> <p>1. typuje $x \leq 10$ (gdy $x \leq 10$ to $3x^2 < 360$, zaś dla $x = 11$, $3 \cdot 121 > 360$) i $y \leq 8$ (gdy $y \leq 8$ to $5y^2 < 360$, zaś dla $y = 9$, $5 \cdot 81 > 360$) jako możliwy zakres rozwiązań;</p> <p>2. sprawdza przypadki np. dla $y = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ oraz ustala i podaje odpowiedź, że nie istnieje całkowite dodatnie rozwiązanie tej równości.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
--	-----------------------