KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów szkół podstawowych województwa mazowieckiego w roku szkolnym 2018/2019

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

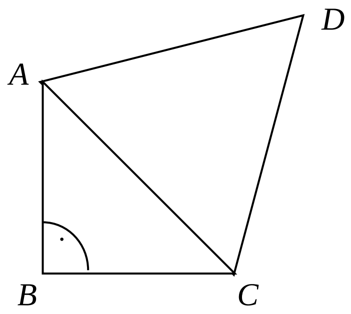
ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

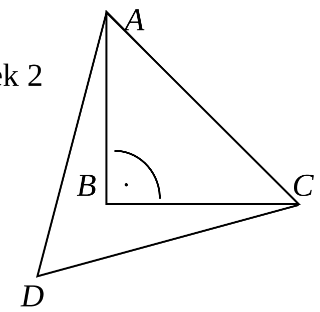
Nr zadania	1.	2.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	D	C

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 3. (2 pkt)

Trójkąt *ABC* jest prostokątny i równoramienny. Na przeciwprostokątnej *AC* zbudowano trójkąt równoboczny *ACD*. Oblicz miary kątów trójkąta *ABD*. Rozważ wszystkie możliwości ułożenia trójkątów.

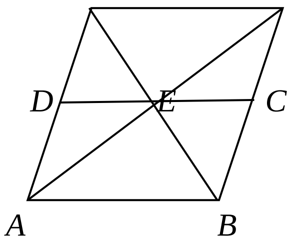
<table>
<tr><td>
Uczeń:
1. analizuje pierwszy przypadek i oblicza miary trójkąta ABD
Przypadek 1


|< DAB| = 60° + 45° = 105°
|< ADB|= 0,5 · 60° = 30°
|< ABD| = 180° - 135° = 45°
Miary kątów trójkąta ABD: 105°, 30°, 45°
</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>
2. analizuje drugi przypadek i oblicza miary trójkąta ABD
Przypadek 2


|< DAB| = 60° – 45° = 15°
|< ADB | = 0,5 · 60° = 30°
|< ABD| = 180° - 45° = 135°
Miary kątów trójkąta ABD: 15°, 30°, 135°
</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 4. (2 pkt)

W równoległoboku *ABCD* długość boku *AB* jest dwa razy dłuższa od długości boku *BC*. Punkt *E* jest środkiem odcinka *CD*. Uzasadnij, że kąt *AEB* jest kątem prostym.

<table>
<tr><td>Uczeń:
I sposób
1. dopełnia równoległobok do rombu o boku $2 \cdot |BC|$

</td><td>
1p.</td></tr>
<tr><td>2. korzystając z własności przekątnych rombu wnioskuje, że miara kąta AEB jest równa 90°.</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>II sposób
1. zauważa, że trójkąty AED i BCE są równoramienne ($|AD| = |DE| = |EC| = |CB|$).
Jeśli oznaczymy $|\sphericalangle ADE| = \alpha$, wówczas $|\sphericalangle BCE| = 180^{\circ} - \alpha$,
zatem $|\sphericalangle AED| = (180^{\circ} - \alpha) : 2 = 90^{\circ} - \alpha/2$ (z sumy kątów w trójkącie równoramiennym ADE) zaś $|\sphericalangle BEC| = \alpha/2$ (z sumy kątów w trójkącie równoramiennym BCE).</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>2. oblicza $|\sphericalangle AEB| = 180^{\circ} – (90^{\circ} – \alpha/2 + \alpha/2) = 90^{\circ}$ (kąty $\sphericalangle AED$, $\sphericalangle AEB$, $\sphericalangle BEC$ tworzą kąt półpełny).</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 5. (2 pkt)

Aniela, Basia i Celina zrywały jabłka. Aniela zerwała 4 kg jabłek, Basia tyle, ile Aniela i połowę tego co Celina, a Celina tyle, ile Basia i połowę tego co Aniela. Ile kilogramów ważyły jabłka zerwane przez dziewczynki?

<table>
<tr><td>Uczeń:
1. zauważa zależności oraz układa i rozwiązuje równanie
Aniela 4 [kg]
Basia (4 + 0,5 x) [kg]
Celina x = 4 + 0,5 x + 2
0,5 x = 6
x = 12 [kg] – Celina zerwała 12 kg jabłek</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>2. oblicza wagę jabłek zerwanych przez Basię i wagę wszystkich zerwanych przez dziewczynki jabłek</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Basia $4 + 0{,}5 \cdot 12 = 10$ [kg] Jabłka zerwane przez dziewczynki ważyły: $4 + 10 + 12 = 26$ [kg].	

Zadanie 6. (3 pkt)

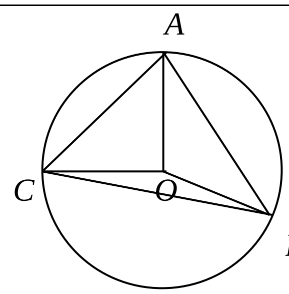
Trzy liczby naturalne dwucyfrowe ustawione w kolejności malejącej stanowią szyfr do sejfu. Iloczyn pewnych dwóch spośród tych trzech liczb równa się 888. Iloczyn innych dwóch liczb spośród tych trzech równa się 999. Jaki jest szyfr do tego sejfu? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:	
1. układa dwa równania $ab = 888$ i $bc = 999$ z trzema niewiadomymi i wykorzystuje fakt, że są to liczby całkowite i dwucyfrowe a z tego zapisu wnioskuje, że b jest wspólnym dzielnikiem liczb 888 i 999.	1p.
2. rozkłada liczby 888 i 999 na czynniki: $888 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$, $999 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ i wnioskuje, że b może się równać 1, 3, 37 lub 111, a jedynym dwucyfrowym czynnikiem jest 37, stąd $b = 37$.	1p.
3. oblicza $a = 888 : 37 = 24$ i $c = 999 : 37 = 27$ i porządkuje liczby malejąco oraz udziela odpowiedzi np. Szyfr do sejfu to: 37 27 24.	1p.

Zadanie 7. (2 pkt)

Na okrągłej tarczy zegara połączono odcinkami punkty leżące na jej brzegu i odpowiadające godzinom 4, 9 i 12. Oblicz miary kątów otrzymanego trójkąta.

Uczeń:	
1. zauważa, że po połączeniu środka zegara z wierzchołkami trójkąta ABC mamy trzy trójkąty równoramienne: AOC, AOB, BOC, w których odpowiednio: $\angle AOC$ jest prosty, zatem kąty przy podstawie mają miary równe; $\lvert\angle OCA\rvert = \lvert\angle OAC\rvert = 45°$ $\lvert\angle AOB\rvert = \frac{1}{3} \cdot 360° = 120°$, zatem kąty przy podstawie mają miary równe; $\lvert\angle OAB\rvert = \lvert\angle OBA\rvert = 30°$ $\lvert\angle COB\rvert = 360° - 90° - 120° = 150°$, zatem kąty przy podstawie mają miary równe; $\lvert\angle OCB\rvert = \lvert\angle OBC\rvert = 15°$	1p.
2. oblicza miary kątów trójkąta ABC: $\lvert\angle ABC\rvert = 30° + 15° = 45°$, $\lvert\angle BCA\rvert = 15° + 45° = 60°$, $\lvert\angle CAB\rvert = 45° + 30° = 75°$	1p.



Miary kątów trójkąta ABC to: 45°, 60°, 75°.

Uwaga: *W przypadku obliczenia miary jednego lub miar dwóch kątów trójkąta ABC uczeń otrzymuje 1 pkt, przy pełnym rozwiązaniu uczeń otrzymuje 2 pkt.*

Zadanie 8. (2 pkt)

Liczby a i b są parzyste, ich różnica wynosi 6. Wykaż, że liczba $a^2 - b^2$ jest podzielna przez 12.

Uczeń:

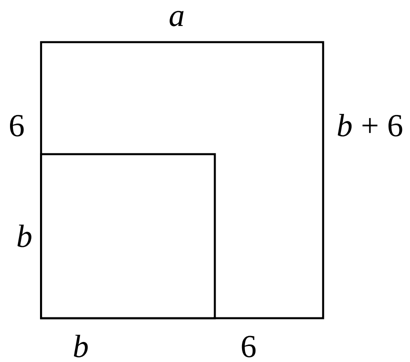
I sposób — 1p.

1. zapisuje zależność $a - b = 6$ i wyznacza np. $a = 6 + b$ i podstawia a do wzoru $a^2 - b^2 = (6 + b)^2 - b^2$ — 1p.

2. przekształca wyrażenie;
$(6 + b)^2 - b^2 = (6 + b)\cdot(6 + b) - b^2 = 36 + 12b = 12(3 + b)$ i wnioskuje o podzielności iloczynu przez 12.

II sposób

1. rysuje dwa kwadraty: o boku b i polu $P_2 = b^2$ oraz o boku $a = b + 6$ i polu $P_1 = a^2$ — 1p.



zauważa, że różnica pól kwadratów P_1 i P_2 to suma pól prostokątów o bokach 6 i b oraz $b + 6$ i 6

2. oblicza różnicę pól $a^2 - b^2 = 6b + 6(b + 6) = 6b + 6b + 36 = 12b + 36 = 12(b + 3)$ i wnioskuje o podzielności przez 12. — 1p.

Zadanie 9. (3 pkt)

Długości krawędzi prostopadłościanu, wyrażone w centymetrach, są liczbami naturalnymi. Jedna ze ścian ma pole 45 cm^2, a druga 36 cm^2. Jakie wymiary może mieć ten prostopadłościan? Podaj wszystkie możliwości.

Uczeń: 1. oznacza długości boków prostopadłościanu np. a, b, c i zapisuje wzory na pola trzech ścian: $P_1 = ab$, $P_2 = ac$, $P_3 = bc$ następnie zauważa że np. dla P_1 i P_2 wspólnym dzielnikiem jest a. Bada iloczyny liczb $45 = 9 \cdot 5$ oraz $36 = 9 \cdot 4$. Na tej podstawie znajduje długości boków prostopadłościanu np. (1 możliwość) $a = 9$, $b = 5$, $c = 4$	1p.
2. znajduje pozostałe dwie możliwości np.: $a = 3$, $b = 15$, $c = 12$ lub $a = 1$, $b = 45$, $c = 36$ Prostopadłościan ten może mieć wymiary: $a = 9$, $b = 5$, $c = 4$ lub $a = 3$, $b = 15$, $c = 12$ lub $a = 1$, $b = 45$, $c = 36$ ***Uwaga:*** *Za każdą poprawnie podaną możliwość uczeń otrzymuje 1 pkt.*	2p.

Zadanie 10. (2 pkt)

Sumę 50 składników zmieniono następująco:
pierwszy składnik zmniejszono o 1,
drugi składnik zwiększono o 2,
trzeci składnik zmniejszono o 3,
czwarty składnik zwiększono o 4,
itd. ……………………………….,
pięćdziesiąty składnik zwiększono o 50.
Jak zmieniła się wartość tej sumy? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. zauważa np., że każda para składników, po zmianie, zwiększa się o 1.	1p.
2. zauważa prawidłowość przy kolejnych parach składników i stwierdza, że przy 50 składnikach czyli 25 parach suma (po zmianie) zwiększa się o 25.	1p.