Mazowiecki Kurator Oświaty
Al. Jerozolimskie 32, 00-024 Warszawa

MSCDN
MAZOWIECKIE SAMORZĄDOWE
CENTRUM DOSKONALENIA NAUCZYCIELI

KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów klas IV-VIII szkół podstawowych województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2019/2020

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 3 do zad. 11) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**
Maks. liczba punktów	**1 pkt**	**1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**NB**	**C**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 3. (2 pkt)

Cyfrą dziesiątek liczby osiem razy większej od pewnej liczby dwucyfrowej jest 6, a cyfrą jedności liczby dziewięć razy większej od tej samej liczby dwucyfrowej jest 7. Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe spełniające opisane warunki. Odpowiedź uzasadnij.

I sposób

<table>
<tr><td>Uczeń:
1. Wprowadza oznaczenia i znajduje cyfrę jedności, np.:

$10a + b$ - szukana liczba dwucyfrowa

$\begin{array}{r} \boxed{a}\,\boxed{b} \\ \cdot \quad\quad 9 \\ \hline 7 \end{array}$

stąd $b = 3$.</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>2. Znajduje cyfrę dziesiątek i podaje odpowiedź. Np.

$\begin{array}{r} {\scriptstyle 2}\phantom{\,\boxed{3}} \\ \boxed{a}\,\boxed{3} \\ \cdot \quad\quad 8 \\ \hline 6\ \ 4 \end{array}$

stąd $a = 3$ lub $a = 8$.
Odpowiedź. Są dwie takie liczby 33 i 83.</td><td>1p.</td></tr>
</table>

II sposób

<table>
<tr><td>Uczeń:
1. Zauważa, że jeśli pomnożymy dowolną liczbę przez 9 i w wyniku w rzędzie jedności otrzymamy 7, to cyfrą jedności szukanej liczby jest 3.</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>2. Zapisuje wszystkie liczby dwucyfrowe, w których 3 jest cyfrą jedności: 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93 i wybiera z nich te, które spełniają warunki zadania oraz podaje odpowiedź.
Są dwie takie liczby 33 i 83, bo $33\cdot 8 = 2\mathbf{6}4$ i $33\cdot 9 = 29\mathbf{7}$ oraz $83\cdot 8 = 6\mathbf{6}4$ i $83\cdot 9 = 74\mathbf{7}$
Odpowiedź. Są dwie takie liczby 33 i 83.</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 4. (2 pkt)

Wykaż, że liczba $2^2 a\left(a^2-1\right)+\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot 4\sqrt{5}\left(a^2-1\right)$ jest podzielna przez 8, gdy a jest liczbą całkowitą.

Uczeń: 1. Przekształca wyrażenie $2^2a(a^2-1)+\sqrt{\frac{4}{5}}\cdot 4\sqrt{5}(a^2-1)$ do postaci $4a(a^2-1)+8(a^2-1)$ oraz zauważa, że jeśli każda z dwóch liczb całkowitych dzieli się przez 8, to ich suma też dzieli się przez 8. Drugi składnik liczby $4a(a^2-1)+8(a^2-1)$ dzieli się przez 8, zatem wystarczy wykazać, że pierwszy składnik dzieli się przez 8.	1p.
2. Uzasadnia, że liczba $4a(a^2-1)$ dzieli się przez 8. Np.: liczba ta jest podzielna przez 4 oraz $4a(a^2-1)=4a(a+1)(a-1)$. Spośród liczb a i $a+1$ jedna musi być parzysta, bo są to kolejne liczby, więc iloczyn $a(a+1)$ jest podzielny przez 2, zatem w rozkładzie na czynniki liczby $4a(a+1)(a-1)$ występują czynniki 2 i 4 ($2\cdot 4=8$), więc także dzieli się ona przez 8. Zatem dana liczba jest podzielna przez 8, co należało wykazać.	1p.

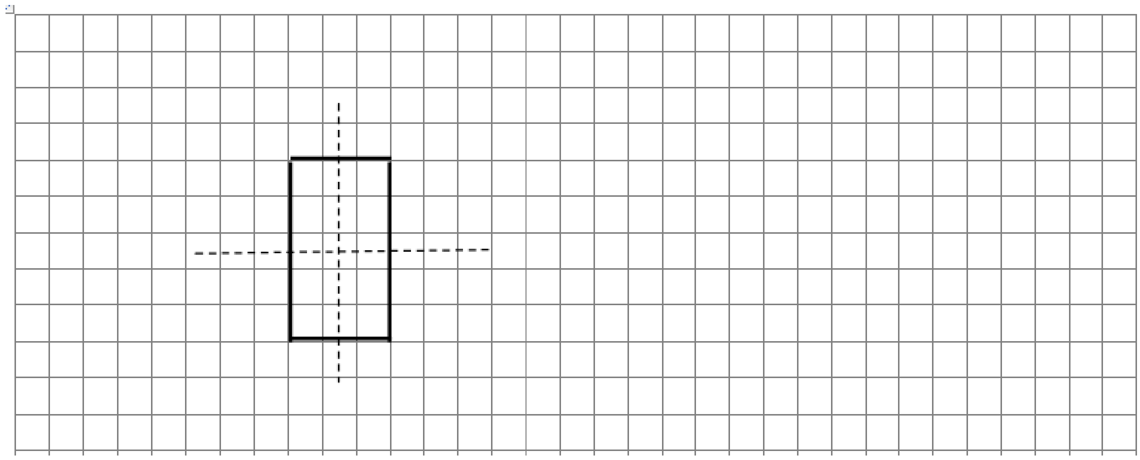
Zadanie 5. (2 pkt)

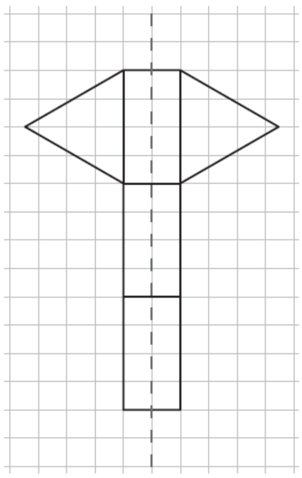
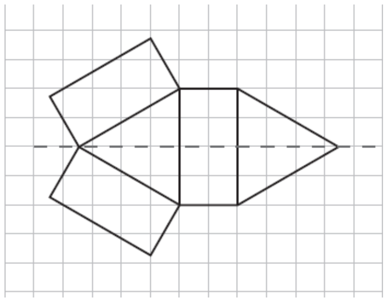
Jeśli zmniejszymy pewną liczbę naturalną x o 4, to zmniejszymy ją o więcej niż 11% jej wartości. Jeśli tę samą liczbę naturalną x powiększymy o 6, to powiększymy ją o mniej niż 17% jej wartości. Co to za liczba? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń: 1. Przyjmuje oznaczenia i zapisuje treść zadania w postaci nierówności. Np. x – liczba naturalna $0{,}89x$ – liczba x zmniejszona o 11% $1{,}17x$ – liczba x powiększona o 17% $x-4<0{,}89x$ i $x+6<1{,}17x$	1p.
2. Rozwiązuje nierówności i podaje odpowiedź. Np. $x<\frac{400}{11}$ i $\frac{400}{11}\approx 36{,}4$ $x>\frac{600}{17}$ i $\frac{600}{17}\approx 35{,}3$ zatem $x=36$. Odpowiedź. Tą liczbą naturalną jest 36.	1p.

Zadanie 6. (2 pkt)

Na rysunku przedstawiono prostokąt i jego osie symetrii. Uzupełnij rysunek tak, aby powstała siatka graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, która ma tylko jedną oś symetrii. Przedstaw dwa różne rozwiązania.



Uczeń: 1. Przedstawia jedno rozwiązanie, np.: 	1p.
2. Przedstawia drugie rozwiązanie, np.: 	1p.

Zadanie 7. (2 pkt)

Przygotowując obóz harcerski, zaplanowano, że pięciu harcerzy rozstawi wszystkie namioty w dwie godziny. Tymczasem drużyna harcerska przybyła na miejsce obozu na półtorej godziny przed zmierzchem. Ilu co najmniej harcerzy trzeba dobrać, aby rozbijanie namiotów trwało nie dłużej niż 1 godzinę i 15 minut?
Przyjmij, że każdy harcerz będzie pracował jednakowo wydajnie.

I sposób

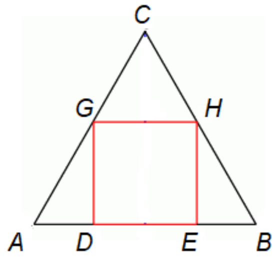
<table>
<tr><td>Uczeń:
1. Przyjmuje oznaczenia i zapisuje symbolicznie treść zadania rozpoznając wielkości odwrotnie proporcjonalne. Np.
x – liczba dodatkowych harcerzy
$\begin{array}{ccccc} \downarrow & 5 & - & 2 & \uparrow \\ & x+5 & - & 1{,}25 & \end{array}$</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>2. Układa proporcję, rozwiązuje ją i podaje odpowiedź. Np.
$\frac{5}{x+5} = \frac{1{,}25}{2}$
stąd $x = 3$
Odpowiedź. Do rozstawiania namiotów trzeba jeszcze wyznaczyć <u>co najmniej</u> trzech harcerzy.</td><td>1p.</td></tr>
</table>

II sposób

<table>
<tr><td>Uczeń:
1. Na podstawie treści zadania zapisuje symbolicznie związek między podanymi wielkościami, pozwalający obliczyć minimalną liczbę harcerzy do wykonania tej pracy, np.: $\frac{x}{y} \cdot a$, gdzie x - zaplanowany czas pracy, y - czas pracy, w którym tę pracę trzeba wykonać, a - zaplanowana liczba harcerzy.</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>2. Wykonuje obliczenia i podaje odpowiedź. Np.
$\frac{2}{1{,}25} \cdot 5 = \frac{10}{1{,}25} = \frac{1000}{125} = 8$
$8 - 5 = 3$
Odpowiedź. Do rozstawiania namiotów trzeba jeszcze wyznaczyć <u>co najmniej</u> trzech harcerzy.</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 8. (2 pkt)

Na rysunku trójkąt *ABC* jest równoboczny o boku długości $\sqrt{3}+2$. Oblicz, o ile bok kwadratu *DEHG* jest krótszy od boku trójkąta *ABC*.



Uczeń: 1. Przyjmuje oznaczenie np. *x* na długość boku kwadratu. Uzasadnia, że trójkąt *GHC* jest równoboczny o boku długości *x* oraz trójkąty *ADG* i *BEH* są przystającymi trójkątami prostokątnymi o kątach ostrych 30° i 60° i są „połówkami” trójkąta równobocznego o wysokości *x*, a więc $x = \lvert EB\rvert \cdot \sqrt{3}$, to $\lvert EB\rvert = \frac{x}{\sqrt{3}} = \lvert AD\rvert$	1p.
2. Zapisuje, że $\lvert AB\rvert = \frac{x}{\sqrt{3}} + x + \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}+2$, więc $x = \sqrt{3}$ $\left(x = \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}\right)$ oblicza różnicę długości boku trójkąta *ABC* i kwadratu *DEHG* i podaje odpowiedź. $\sqrt{3}+2-\sqrt{3}=2$ Odpowiedź. Bok kwadratu *DEHG* jest o 2 krótszy od boku trójkąta *ABC*.	1p.

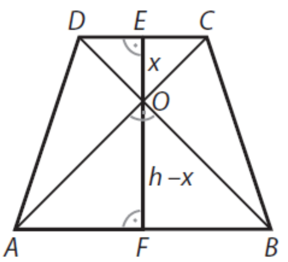
Zadanie 9. (2 pkt)

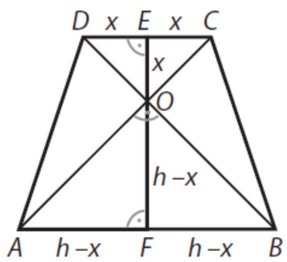
Liczby całkowite *x* i *y* spełniają warunek $x > y$. Wyniki działań: $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $x : y$ zapisane w kolejności malejącej to: 18, 12, − 5, − 45. Znajdź liczby *x* i *y*.

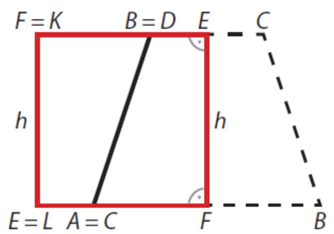
Uczeń: 1. Wykonuje poprawnie działania. Np. $(x+y)+(x-y)=2x$; $(x \cdot y)\cdot(x : y) = x^2$	1p.
2. Zapisuje, że $x = 15$ lub $x = -25$ (bo tylko 18 + 12 i $-5+(-45)$ są liczbami parzystymi) oraz że jedynym iloczynem dwóch liczb spośród: 18, 12, −5, −45, który jest jednocześnie kwadratem liczby całkowitej jest $(-5)\cdot(-45)=225$, zatem $x = 15$. Spośród liczb: 18, 12, −5, −45 tylko liczba −45 jest podzielna przez 15, a więc $y = -3$. Odpowiedź. Szukane liczby, to $x = 15$ oraz $y = -3$.	1p.

Zadanie 10. (2pkt)

Uzasadnij, że pole trapezu równoramiennego o wysokości h, którego przekątne są prostopadłe, jest równe h^2.

<table>
<tr><td>Uczeń
1. Wykonuje poprawny rysunek (np. Rys. 1) i uzasadnia, że trójkąty: DEO, CEO, AFO i BFO są równoramienne. Np. kąty ostre tych trójkątów mają po $45°$ (Rys. 2).


Rys. 1


Rys. 2</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>2. Uzasadnia, że pole trapezu ABCD jest równe h^2. Np.
$P = \frac{1}{2}(x + x + h - x + h - x) \cdot h = \frac{2h \cdot h}{2} = h^2$, zatem $P = h^2$
lub
Po rozcięciu trapezu wzdłuż EF, prawą połówkę, tj. trapez EFBC przykładamy do trapezu AFED i obracamy tak, by bok BC pokrył się z bokiem AD (Rys. 3)


Rys. 3
Otrzymaliśmy kwadrat o boku h, zatem $P = h^2$.</td><td>1p.</td></tr>
</table>

Zadanie 11. (2 pkt)

Czworokąt *ABCD* ma środek symetrii. Oblicz długość dłuższej przekątnej czworokąta *ABCD*, jeżeli $A = (1, 0)$, $B = (10, -9)$, $C = (9, 6)$.

I sposób

Uczeń: 1. Oblicza współrzędne środka S przekątnej AC (środka symetrii) oraz współrzędne punktu $D = (x, y)$. Np.	1p.

$S=\left(\frac{1+9}{2},\frac{0+6}{2}\right)=(5,3)$ oraz $S=\left(\frac{10+x}{2},\frac{-9+y}{2}\right)=(5,3)$, stąd $x=0,\ y=15$, a więc $D=(0,15)$. 2. Oblicza długości przekątnych *AC* i *BD* oraz porównuje je. Podaje odpowiedź. Np. $\lvert AC\rvert=\sqrt{(9-1)^2+(6-0)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$ $\lvert BD\rvert=\sqrt{(0-10)^2+(-9-15)^2}=\sqrt{100+576}=\sqrt{676}=26$ $\lvert BD\rvert>\lvert AC\rvert$ Odpowiedź. Długość dłuższej przekątnej czworokąta *ABCD* jest równa 26.	1p.

II sposób

Uczeń: 1. Oblicza współrzędne środka *S* przekątnej *AC* (środka symetrii) oraz długość odcinka *BS*. Np. $S=\left(\frac{1+9}{2},\frac{0+6}{2}\right)=(5,3)$ $\lvert BS\rvert=\sqrt{(5-10)^2+(3+9)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$	1p.
2. Oblicza długości przekątnych *AC* i *BD* oraz porównuje je. Podaje odpowiedź. Np. $\lvert AC\rvert=\sqrt{(9-1)^2+(6-0)^2}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$ $\lvert BD\rvert=2\cdot\lvert BS\rvert=26$ $\lvert BD\rvert>\lvert AC\rvert$ Odpowiedź. Długość dłuższej przekątnej czworokąta *ABCD* jest równa 26.	1p.

Uwaga. Jeśli uczeń przedstawi ***poprawne i pełne*** *rozwiązanie zadania 11 metodą graficzną, to otrzymuje maksymalną liczbę punktów.*