MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA
KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII
UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP WOJEWÓDZKI 2020/2021

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2, 3 lub 4 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**P, F**	**D**	**N - A**	**A, C**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (0-2 pkt)

Uzasadnij, że dokładnie 8 liczb pierwszych spełnia nierówność

$(x-1)^2 + (x-\sqrt{7})(\sqrt{7}+x) \geq (2x+10)(x-5).$

Uczeń: 1. Rozwiązuje nierówność korzystając ze wzorów skróconego mnożenia $(x-1)^2+(x-\sqrt{7})(\sqrt{7}+x) \geq (2x+10)(x-5)$ $x^2-2x+1+x^2-7 \geq 2(x+5)(x-5)$ $x^2-2x+1+x^2-7 \geq 2(x^2-25)$ $x^2-2x+1+x^2-7 \geq 2x^2-50$ $-2x \geq -44$ $x \leq 22$ 2. Wypisuje liczby pierwsze spełniające nierówność i podaje odpowiedź. Tymi liczbami są: 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, a więc jest ich 8.	1p. 1p.

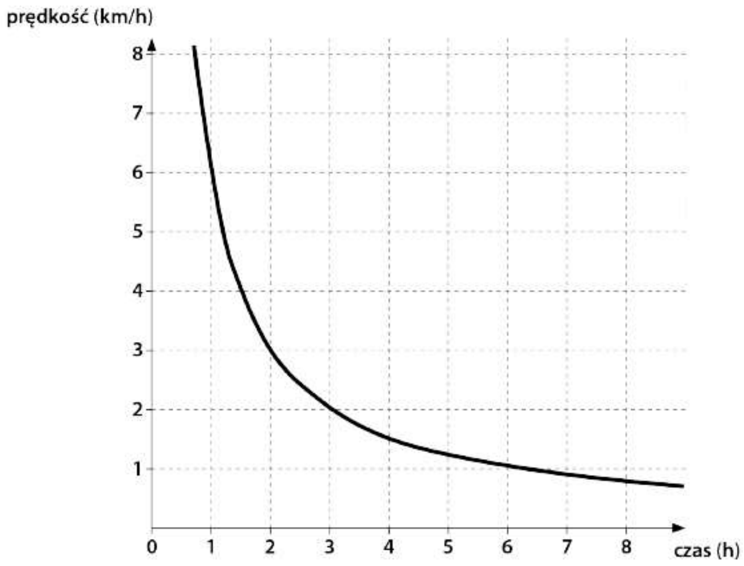
Zadanie 6. (0-2 pkt)

Uzasadnij, że jeśli wartość wyrażenia $a^{-1}+(\sqrt{a})^{-1}-\left(\frac{a}{2}\right)^{-1}$ jest liczbą ujemną, to $a<1$ i $a>0$.

Uczeń: 1. Przekształca dane wyrażenie, stosując definicję potęgi o wykładniku ujemnym. $a^{-1}+(\sqrt{a})^{-1}-\left(\frac{a}{2}\right)^{-1}=\frac{1}{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}-\frac{2}{a}=\frac{1}{a}+\frac{\sqrt{a}}{a}-\frac{2}{a}=\frac{\sqrt{a}-1}{a}$ 2. Ustala wartość liczby a. Liczba *a* jest dodatnia, bo jest liczbą podpierwiastkową i występuje w mianowniku, więc nie może być liczbą ujemną i zerem. Aby wartość wyrażenia $\frac{\sqrt{a}-1}{a}$ była liczbą ujemną licznik musi być liczbą ujemną, zatem $\sqrt{a}-1<0$, stąd $a<1$ i $a>0$. *Uwaga. Jeśli uczeń pomyli założenie z tezą (uzasadnia twierdzenie odwrotne) to może uzyskać co najwyżej 1p.*	1p. 1p.

Zadanie 7. (0-2 pkt)

Pan Stanisław dba o swoją kondycję fizyczną, więc codziennie pieszo pokonuje drogę z domu do pracy i z powrotem. Na wykresie przedstawiono zależność między prędkością a czasem podczas przemieszczania się pana Stanisława w jedną stronę. Oblicz długość drogi z domu do pracy ~~oraz czas w minutach na pokonanie tej drogi rowerem z prędkością 4 razy większą.~~



Ze względu na techniczny błąd wydruku - ukrycie $V_{\text{śr pieszego}}$

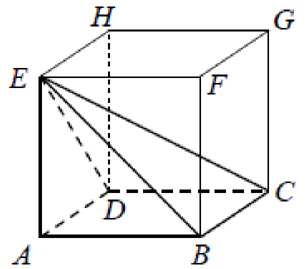
Komisja Wojewódzka dostosowała schemat punktowania zadania do pierwszej części pytania.

Uczeń: 1. Dokonuje analizy zadania, np. zapisuje zależność między prędkością, drogą i czasem; odczytuje z wykresu, że np. gdy v = 3 km/h, to t = 2 h.	 1p.
2. Oblicza drogę S z domu do pracy $S = v \cdot t$ $\qquad$ $S = 6$ [km]	1p.

Zadanie 8. (0-3 pkt)

Dany jest sześcian *ABCDEFGH* o krawędzi 5.

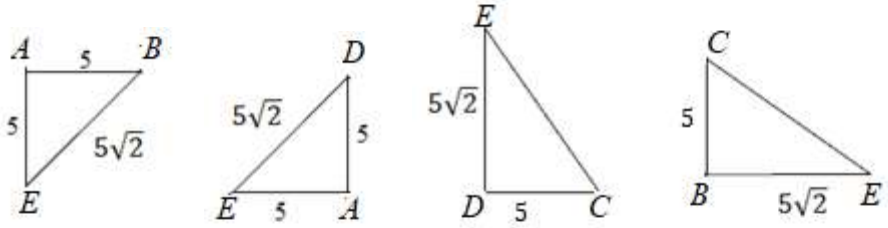
Przyjmij za jednostkę długość boku kratki i narysuj siatkę ostrosłupa *ABCDE* . Oblicz pole powierzchni bocznej ostrosłupa i przedstaw je w postaci iloczynu.



Uczeń:

1. Zauważa, że ściany boczne są trójkątami prostokątnymi i wyznacza długości ich przyprostokątnych. — 1p.

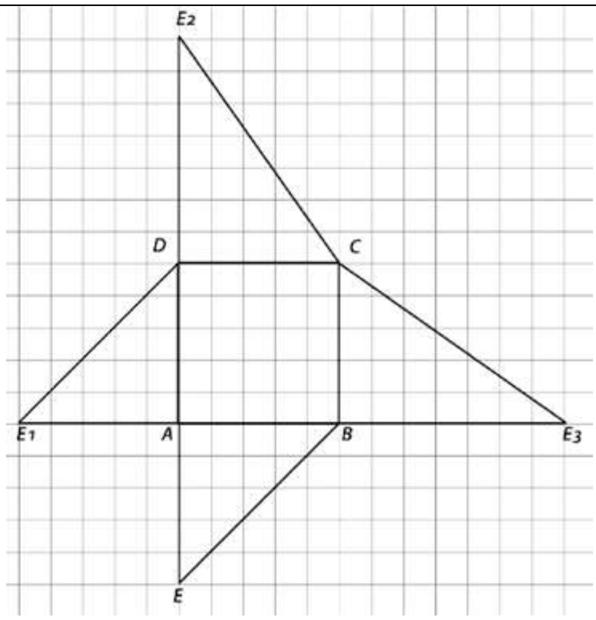
Ściany boczne są trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych wskazanych na rysunku.



2. Rysuje prawidłową siatkę ostrosłupa przyjmując za jednostkę długość boku kratki. — 1p.

Na przykład:

- rysuje kwadrat *ABCD* o boku 5,
- rysuje odcinek *AE* równy 5, a następnie odcinek *BE,*
- rysuje odcinek AE_1 równy 5, a następnie odcinek E_1D,
- rysuje odcinek DE_2, którego długość wynosi $5\sqrt{2}$ i jest równa przekątnej kwadratu *ABCD,* a następnie odcinek E_2C,
- rysuje odcinek BE_3 równy odcinkowi $BD = 5\sqrt{2}$, a następnie odcinek E_3C.

 3. Oblicza pole powierzchni bocznej ostrosłupa i przedstawia je w postaci iloczynu. $P_b = 2 \cdot \frac{25}{2} + 2 \cdot \frac{25\sqrt{2}}{2} = 25 + 25\sqrt{2} = 25\left(1 + \sqrt{2}\right)$ *Uwaga. Jeśli uczeń przedstawi pole powierzchni bocznej ostrosłupa w postaci innego iloczynu, to też otrzymuje 1p.*	1p.

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Julka zapisuje liczby sześciocyfrowe, które można utworzyć przy użyciu wszystkich spośród cyfr 3, 4 i 5 tak, aby każde dwie sąsiednie cyfry w ich zapisach były liczbami różniącymi się o jeden. Oblicz, ile najwięcej różnych liczb spełniających te warunki może zapisać Julka.

Uczeń: 1. Przedstawia możliwy układ cyfr w liczbie sześciu cyfrowej. Na przykład: **A**: 3 | 4 | 3/5 | 4 | 3/5 | 4 **B**: 4 | 3/5 | 4 | 3/5 | 4 | 3/5 **C**: 5 | 4 | 3/5 | 4 | 3/5 | 4	1p.

<table>
<tr><td>
2. Oblicza, ile jest liczb w poszczególnych wariantach.

A . $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$ B. $1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 8$ C. $1 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 = 4$

3. Eliminuje z każdego wariantu liczby utworzone z dwóch różnych cyfr i oblicza, ile jest wszystkich liczb spełniających warunki zadania oraz podaje odpowiedź.

Należy wykluczyć liczby w:

A: 343434   B: 434343 i 454545   C: 545454

Zatem 4 + 8 + 4 – 4 = 12

Odpowiedź. Jest 12 liczb sześciocyfrowych, które można napisać przy użyciu cyfr 3, 4 i 5 tak, aby każde dwie sąsiednie cyfry w ich zapisach były liczbami różniącymi się o jeden.

Uwaga. Jeśli uczeń rozwiąże zadanie przez wypisywanie liczb spełniających warunki zadania i popełni jeden błąd (wypisze o jedną liczbę za dużo lub o jedną za mało), to otrzymuje 2p., a jeśli popełni dwa błędy – otrzymuje 1p.
</td><td>1p.

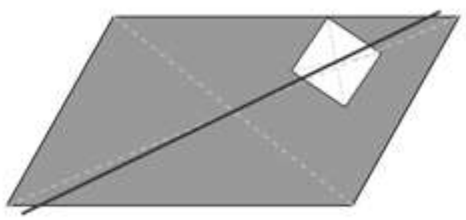
1p.</td></tr>
</table>

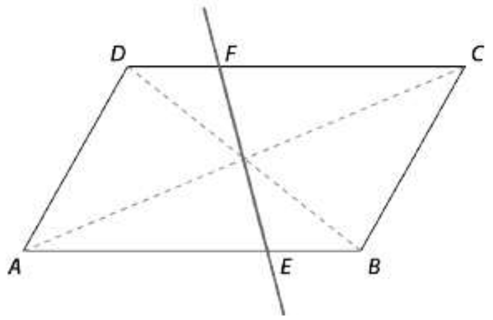
Zadanie 10. (0-4 pkt)

Z równoległoboku wycięto romb tak, jak na rysunku. Narysuj prostą przechodzącą przez środki symetrii równoległoboku i rombu, a następnie uzasadnij, że ta prosta dzieli otrzymaną figurę na dwie figury o równych polach.

<table>
<tr><td>
Uczeń:

1.Uzupełnia rysunek zgodnie z treścią zadania.


</td><td>1p.</td></tr>
</table>

2. Zauważa, że prosta przechodząca przez środek symetrii *S* dowolnego równoległoboku dzieli go na dwa czworokąty o równych polach.  Prosta *EF* dzieli równoległobok *ABCD* na dwa czworokąty *AEFD* i *BEFC*. Każdy z tych czworokątów składa się z trójkątów, które są przystające. Trapez *AEFD*: z trójkątów *AES*, *DFS* i *ASD*, a trapez *BEFC*: z trójkątów *BES*, *CFS* i *BSC*.	1p.
3. Uzasadnia przystawanie trójkątów lub równość pól powołując się na twierdzenie zawarte w punkcie 2. $\Delta AES \equiv \Delta CFS,$ bo $\lvert\measuredangle ASE\rvert = \lvert\measuredangle CSF\rvert$ jako kąty wierzchołkowe, $\lvert\measuredangle EAS\rvert = \lvert\measuredangle FCS\rvert$ jako kąty naprzemianległe, $\lvert AS\rvert = \lvert SC\rvert$ - cecha kbk $\Delta ASD \equiv \Delta BSC,$ bo $\lvert AD\rvert = \lvert BC\rvert, \lvert AS\rvert = \lvert CS\rvert, \lvert DS\rvert = \lvert BS\rvert$ - cecha bbb $\Delta DSF \equiv \Delta BES,$ bo $\lvert\measuredangle DSF\rvert = \lvert\measuredangle BSE\rvert$ jako kąty wierzchołkowe, $\lvert\measuredangle SDF\rvert = \lvert\measuredangle SBE\rvert$ jako kąty naprzemianległe, $\lvert DS\rvert = \lvert SB\rvert$ - cecha kbk Ponieważ czworokąty *AEFD* i *BEFC* składają się z przystających trójkątów, więc ich pola są równe.	1p.
4. Podsumowuje i zapisuje wniosek. Ponieważ romb jest równoległobokiem, więc prosta przechodząca przez punkt przecięcia jego przekątnych dzieli romb na dwa czworokąty o równych polach. Zatem prosta, która przechodzi przez punkty przecięcia przekątnych równoległoboku i rombu dzieli otrzymaną figurę na dwie części o równych polach.	1p.