



KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów szkół podstawowych województwa mazowieckiego
w roku szkolnym 2018/2019

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 5 do zad.12) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt	1 pkt	1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	A	C	B	B

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (2 pkt)

Trzy pompy mają opróżnić basen. Pierwsza pompa samodzielnie opróżniłaby basen w ciągu 15 godzin, druga w ciągu 10 godzin, a trzecia w ciągu 9 godzin. Oblicz, czy trzy pompy pracujące jednocześnie zdążą opróżnić ten basen w ciągu 3 godzin.

Uczeń:	
<i>I sposób</i>	
1. wprowadza oznaczenia i układa równanie (zależność) zgodne z warunkami zadania, np.: x – liczba godzin potrzebna do opróżnienia basenu przez wszystkie trzy pompy, pojemność basenu przyjmujemy 1.	1p.
ilość wody wypompowana przez poszczególne pompy w ciągu jednej godziny:	
I pompa: $\frac{1}{15}x$, II pompa: $\frac{1}{10}x$, III pompa: $\frac{1}{9}x$	1p.
2. rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź	
$\frac{1}{15}x + \frac{1}{10}x + \frac{1}{9}x = 1$	
$25x = 90$ stąd $x = 3,6$	
Odp. Trzy pompy nie zdążą opróżnić basenu w ciągu 3 godzin.	
<i>II sposób</i>	
1. oblicza ilość wody usuniętej przez wszystkie 3 pompy w ciągu 1 godziny	
$\frac{1}{15} + \frac{1}{10} + \frac{1}{9} = \frac{25}{90}$	
2. oblicza ilość wody usuniętej przez wszystkie 3 pompy w ciągu 3 godzin $\left(\frac{75}{90}\right)$	
i wnioskuje, że jest to za mało.	
Odp. Trzy pompy nie zdążą opróżnić basenu w ciągu 3 godzin.	

Zadanie 6. (2 pkt)

Punkty $A = (0,0)$ oraz $C = (0,-8)$ są przeciwległymi wierzchołkami kwadratu $ABCD$. Wyznacz współrzędne punktu E leżącego na osi OX , wiedząc, że pole kwadratu $ABCD$ jest dwa razy mniejsze od pola trójkąta ACE . Podaj wszystkie rozwiązania.

Uczeń:	
1. podaje współrzędne pozostałych wierzchołków kwadratu tj. punktów $B = (4,-4)$ oraz $D = (-4,-4)$ i zauważa, że pole trójkąta ACE jest dwa razy większe od pola kwadratu $ABCD$; wtedy, gdy wysokość trójkąta AE jest dwa razy dłuższa od przekątnej kwadratu $ABCD$;	1p.
2. wskazuje możliwe współrzędne punktu E : $E_1 = (16,0)$ oraz $E_2 = (-16,0)$. Odp. Punkt E może mieć współrzędne $(16,0)$ lub $(-16,0)$. <i>Uwaga: jeżeli uczeń rozważy w pełni tylko jeden przypadek (poda w odpowiedzi współrzędne jednego punktu E) otrzymuje 1 punkt.</i>	1p.

Zadanie 7. (2 pkt)

Stosunek mas trzech różnych stopów srebra wynosi $7 : 10 : 18$, natomiast stosunek mas czystego srebra zawartego w tych stopach równa się odpowiednio $7 : 9 : 12$. Po stopieniu wszystkich kawałków otrzymano 350 gramów stopu, w którym czyste srebro stanowi 72% jego masy. Oblicz, w którym stopie jest najmniejsza procentowa zawartość srebra.

Uczeń:	
<i>I sposób</i>	
1. oblicza masy trzech różnych stopów: $7x + 10x + 18x = 350, \quad 35x = 350, \quad x = 10$ I stop $7 \cdot 10 = 70$ g, II stop $10 \cdot 10 = 100$ g, III stop $18 \cdot 10 = 180$ g (masy stopów);	1p.
2. oblicza masy srebra w poszczególnych stopach: $7y + 9y + 12y = 0,72 \cdot 350$ czyli $7y + 9y + 12y = 252$ stąd $28y = 252$ zatem $y = 9$ I stop $7 \cdot 9 = 63$ g, II stop $9 \cdot 9 = 81$ g, III stop $12 \cdot 9 = 108$ g (masa srebra w stopach) i oblicza procent srebra w poszczególnych stopach. W I stopie jest 90% srebra, w II stopie jest 81% srebra, w III stopie jest 60% srebra. Odp. Najmniejsza procentowa zawartość srebra jest w III stopie.	1p.
<i>II sposób</i>	
1. oblicza, że w I stopie jest $\frac{7}{35} = \frac{28}{140}$ ogólnej masy i $\frac{7}{28} = \frac{35}{140}$ ogólnego srebra, a stosunek tych ułamków (masy srebra do ogólnej masy) to $\frac{35}{28}$. Analogicznie oblicza, że w II stopie jest $\frac{10}{35} = \frac{40}{140}$ ogólnej masy oraz $\frac{9}{28} = \frac{45}{140}$ masy srebra, a stosunek tych ułamków to $\frac{45}{40}$, zaś w III stopie jest $\frac{18}{35} = \frac{72}{140}$ ogólnej masy i $\frac{12}{28} = \frac{60}{140}$ masy srebra,	

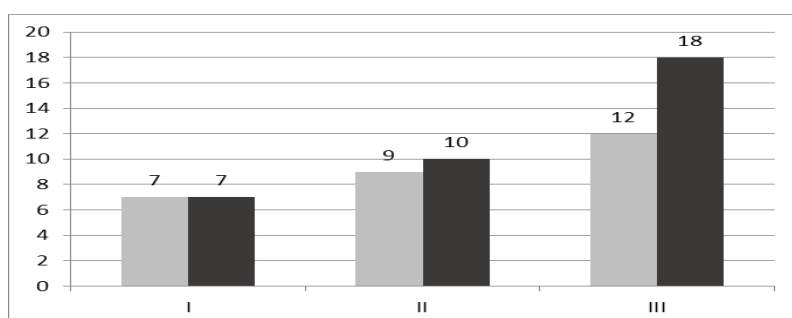
a stosunek tych ułamków to $\frac{60}{72}$;

2. stwierdza, że w trzecim stopie stosunek ułamków jest mniejszy niż 1, a w pozostałych stopach większy (bo I stop: $\frac{35}{28} > 1$, II stop: $\frac{45}{40} > 1$, III stop: $\frac{60}{72} < 1$) oraz wnioskuje stąd, że w III stopie jest najmniej srebra.

Odp. Najmniejsza procentowa zawartość srebra jest w III stopie.

III sposób

1. analizuje graficznie treść zadania np. rysuje diagram słupkowy danych {7,7}, {9, 10}, {12,18}



tj. I stop: słupek srebra wysokości 7 i obok słupek wysokości 7,

II stop: słupek srebra wysokości 9 i obok słupek wysokości 10,

III stop: słupek srebra wysokości 12 i obok słupek wysokości 18.

2. wnioskuje na podstawie diagramu, gdzie jest najmniej srebra oraz zapisuje odpowiedź.

Odp. Najmniejsza procentowa zawartość srebra jest w III stopie.

Zadanie 8. (2 pkt)

Podstawą prostopadłościanu jest kwadrat o boku długości a . Przekątne dwóch ścian bocznych poprowadzone z jednego wierzchołka tworzą kąt 60° . Wykaż, że jest to sześcian.

Uczeń:

1. uzasadnia, że trójkąt o ramionach będących przekątnymi ścian bocznych jest trójkątem równoramiennym o kącie przy wierzchołku równym 60° , a więc jest to trójkąt równoboczny o długości boku $a\sqrt{2}$ (przekątna kwadratu o boku a);

2. oblicza wysokość H prostopadłościanu (z trójkąta prostokątnego o bokach H , $a\sqrt{2}$, a)

np. $H^2 = (a\sqrt{2})^2 - a^2$ stąd $H = a$ i wnioskuje, że ten prostopadłościan jest sześcianem o krawędzi a .

1p.

1p.

Zadanie 9. (2 pkt)

Po torze wyścigowym jeździ kolarz. Jeden pełny obrót pedałem powoduje 4 pełne obroty koła rowerowego. Koło rowerowe ma średnicę 70 cm. Ile pełnych obrotów pedałem wykona kolarz, aby przejechać 1 km? Zakładamy, że kręci pedałami bez przerwy. Wykonaj obliczenia przyjmując, że liczba π jest w przybliżeniu równa $3\frac{1}{7}$.

Uczeń:

1. oblicza odległość przy jednym obrocie pedałem $s_1 \approx 880$ cm;

2. oblicza liczbę obrotów na trasie 1 km = 100000 cm, $100000 : 880 \approx 113,6 \approx 114$ obrotów

Odp. Kolarz wykona 114 pełnych obrotów pedałem.

Uwaga: dopuszcza się podanie w odpowiedzi liczby 113 jako liczby pełnych obrotów będącej przybliżeniem otrzymanego wyniku z niedomiarem.

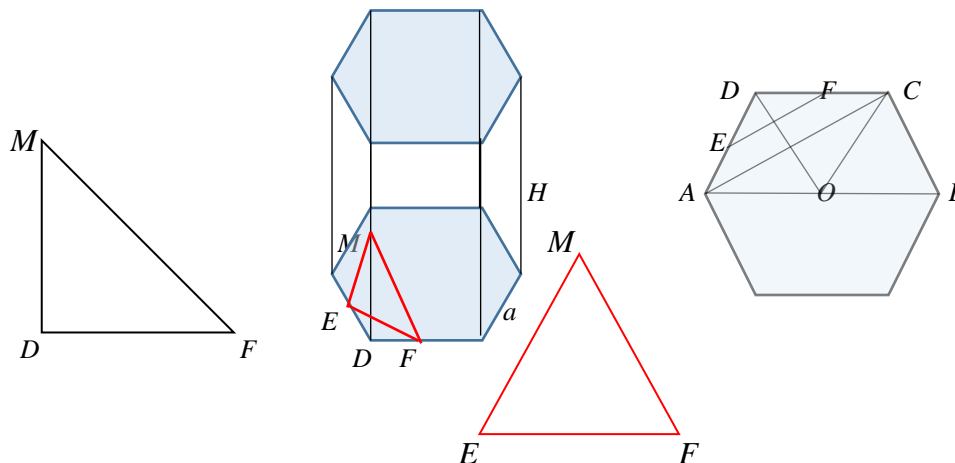
1p.

1p.

Zadanie 10. (2 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym sześciokątnym o krawędzi podstawy $a = 4$ cm oraz wysokości $H = 4\sqrt{2}$ cm połączono odcinkami środki krawędzi wychodzących z jednego wierzchołka i otrzymano trójkąt. Wykaż, że jest to trójkąt równoboczny.

Uczeń:



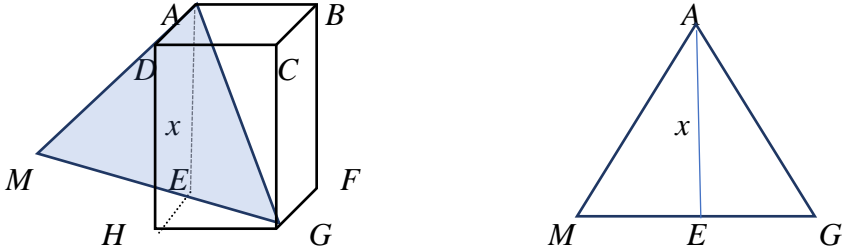
1. analizuje warunki zadania np. oznacza krawędź podstawy graniastosłupa $a = |AG| = |GH| = |HB| = |AD| = |DC| = |CO| = |OD| = |AO| = 4$ cm i uzasadnia, że $|EF| = 0,5 |AC|$, zaś $|AC|$ równa się podwojonej wysokości trójkąta równobocznego o boku $a = 4$ cm (bo czworokąt $A OCD$ jest rombem, więc przekątne dzielą się na połowy, pod kątem prostym) zatem $|AC| = 4\sqrt{3}$ cm i $|EF| = 2\sqrt{3}$ cm;

1p.

2. zauważa, że trójkąt EFM jest równoramienny (bo $ MF = ME $ – są to odcinki łączące środki sąsiednich boków w jednakowych prostokątach) i korzystając z tego, że $ DM = 0,5 H = 2\sqrt{2}$ cm oraz $ DF = 2$ cm znajduje $ MF $ (bo trójkąt MDF jest prostokątny) $ MF = 2\sqrt{3}$ cm, po czym wnioskuje, że trójkąt EFM jest równoboczny, gdyż $ EF = MF = ME = 2\sqrt{3}$ cm.	1p.
--	-----

Zadanie 11. (2 pkt)

W graniastosłupie prawidłowym czworokątnym kąt między przekątną graniastosłupa a przekątną jego podstawy, wychodzącymi z jednego wierzchołka, jest równy 60° . Oblicz objętość tego graniastosłupa, wiedząc, że krawędź jego podstawy jest równa 10.

<p>Uczeń:</p> 	
1. zauważa, że krawędź boczna AE graniastosłupa jest jednocześnie wysokością trójkąta równobocznego MGA , zaś podwojona przekątna podstawy graniastosłupa jest podstawą trójkąta MGA i oblicza krawędź boczną graniastosłupa $x = AE = 10\sqrt{6}$;	1p.
2. oblicza objętość graniastosłupa. Odp. $V = 1000\sqrt{6}$.	1p.

Zadanie 12. (2pkt)

Wykaż, że nie istnieje para liczb całkowitych dodatnich spełniających równość:
 $3x^2 + 5y^2 = 360$.

<p>Uczeń:</p> <p><i>I sposób</i></p> <p>1. zauważa, że jeżeli x i y są dwiema liczbami całkowitymi dodatnimi takimi, że $3x^2 + 5y^2 = 360$, to $x \leq 10$ (gdy $x \leq 10$ to $3x^2 < 360$, zaś dla $x = 11$, $3 \cdot 121 > 360$) i $y \leq 8$ (gdy $y \leq 8$ to $5y^2 < 360$, zaś dla $y = 9$, $5 \cdot 81 > 360$) a ponadto x dzieli się przez 5 (gdyż $3x^2 = 5(72 - y^2)$), zaś y dzieli się przez 3 (gdyż $5y^2 = 3(120 - x^2)$);</p>	1p.
---	-----

<p>2. wyznacza pary $(5,3)$, $(5,6)$, $(10,3)$, $(10,6)$ mogące spełniać równość, następnie sprawdza i stwierdza, że nie istnieje całkowite dodatnie rozwiązanie tej równości.</p> <p><i>II sposób</i></p> <p>1. typuje $x \leq 10$ (gdy $x \leq 10$ to $3x^2 < 360$, zaś dla $x = 11$, $3 \cdot 121 > 360$) i $y \leq 8$ (gdy $y \leq 8$ to $5y^2 < 360$, zaś dla $y = 9$, $5 \cdot 81 > 360$) jako możliwy zakres rozwiązań;</p> <p>2. sprawdza przypadki np. dla $y = 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1$ oraz ustala i podaje odpowiedź, że nie istnieje całkowite dodatnie rozwiązanie tej równości.</p>	1p.
--	-----