MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP SZKOLNY 2021/2022

Ważne terminy!

Zgodnie z harmonogramem termin ogłoszenia wyników w szkole mija **25 października 2021 r.**

Najpóźniej do 3 listopada 2021 r. należy bezwzględnie wprowadzić wyniki **wszystkich uczniów** na Platformę Konkursów Przedmiotowych. Zgłoszenie uczestników po wyznaczonym terminie nie będzie przyjęte i **skutkuje ich dyskwalifikacją**.

Do 16 listopada 2021 r. należy zapoznać się z listą uczniów zakwalifikowanych do etapu rejonowego oraz przekazać informację o ewentualnym zakwalifikowaniu się do kolejnego etapu konkursu uczniom i ich rodzicom/opiekunom prawnym.

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI I ROZWIĄZANIA ZADAŃ

Nr zadania	1.	2.	3.	4.
Maks. liczba punktów	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**N., B.**	**F, P**	**A.**	**A., C.**

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 5. (0-2 pkt)

Kuba i Bartek jeżdżą do szkoły rowerami. Droga Kuby do szkoły jest półtora raza dłuższa niż droga Bartka. Pewnego razu Bartek przebył tę drogę w czasie stanowiącym $\frac{2}{3}$ czasu jazdy Kuby. Porównaj prędkości chłopców.

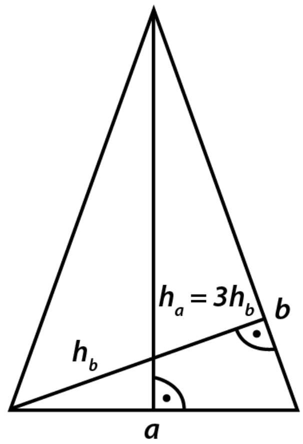
Uczeń: 1. Przyjmuje oznaczenia wielkości występujących w treści zadania. x – droga Bartka $1{,}5x$ – droga Kuby t – czas Kuby $\frac{2}{3}t$ – czas Bartka V_B – prędkość Bartka V_K – prędkość Kuby 2. Wyraża prędkości obu chłopców za pomocą odpowiednich wyrażeń algebraicznych, porównuje je i podaje odpowiedź.	1p. 1p.

$V_B = \frac{x}{\frac{2}{3}t} = \frac{3x}{2t} = \frac{1{,}5x}{t}$ $V_K = \frac{1{,}5x}{t}$, $V_B = V_K$ Odpowiedź. Obaj chłopcy jechali z taką samą prędkością.	

Zadanie 6. (0-2 pkt)

W trójkącie równoramiennym wysokość poprowadzona na ramię trójkąta jest trzy razy krótsza od wysokości poprowadzonej na jego podstawę. Oblicz, ile procent obwodu trójkąta stanowi długość jego podstawy. Odpowiedź podaj z dokładnością do 0,1%.

Uczeń:



1. Przyjmuje oznaczenia (np. wykonując rysunek pomocniczy) i wyznacza np. wartość *b* w zależności od *a*. $\frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$ oraz $h_a = 3h_b$, więc $\frac{a \cdot 3h_b}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$, stąd $b = 3a$	1p.
2. Oblicza, ile procent obwodu trójkąta stanowi długość jego podstawy z dokładnością do 0,1% i podaje odpowiedź. $\frac{a}{a+2b} = \frac{a}{a+6a} = \frac{a}{7a} = \frac{1}{7} = \frac{100}{7}\% \approx 14{,}3\%$ Odpowiedź. Długość podstawy tego trójkąta stanowi około 14,3% jego obwodu.	1p.

Zadanie 7. (0-3 pkt)

Wojtek i Kasia chodzą do jednej klasy technikum. Wojtek ma w klasie dwa razy tyle kolegów co koleżanek, a Kasia o dziesięciu kolegów więcej niż koleżanek. Oblicz, ilu uczniów liczy ta klasa.

I sposób

Uczeń:	
1. Wykonuje analizę zadania.	1p.
x – liczba dziewcząt	
$2x + 1$ – liczba chłopców	
$x - 1$ – liczba koleżanek Kasi	
2. Układa równanie	1p.
$x - 1 + 10 = 2x + 1$	
3. Rozwiązuje równanie i oblicza, ilu uczniów jest w tej klasie oraz podaje odpowiedź.	1p.
$x - 2x = 1 + 1 - 10$	
$-x = -8$	
$x = 8$	
W klasie jest 8 dziewcząt. Wojtek ma $8 \cdot 2 = 16$ kolegów, więc liczba chłopców wynosi 17, zatem w tej klasie jest $8 + 17 = 25$ osób.	
Odpowiedź. Ta klasa liczy 25 osób.	

II sposób

Uczeń: 1. Wykonuje analizę zadania. y – liczba chłopców $y - 1$ – liczba kolegów Wojtka $\frac{y-1}{2}$ – liczba dziewcząt $\frac{y-1}{2} - 1$ – liczba koleżanek Kasi	1p.
2. Układa równanie. $y = \frac{y-1}{2} - 1 + 10$	1p.
3. Rozwiązuje równanie i oblicza, ilu uczniów jest w tej klasie oraz podaje odpowiedź. $2y = y - 1 - 2 + 20$ $y = 17$ W klasie jest 17 chłopców. Wojtek ma 16 kolegów, więc liczba dziewcząt wynosi 16 : 2 = 8, zatem w tej klasie jest 17 + 8 = 25 osób. Odpowiedź. Ta klasa liczy 25 osób.	1p.

Zadanie 8. (0-3 pkt)

Julka ma 43 sześcienne kostki o krawędzi długości 1. Zbudowała sześcian o krawędzi równej 3, a ze wszystkich pozostałych kostek prostopadłościan. Oblicz, jakie wymiary ma zbudowany prostopadłościan, jeśli wiadomo, że pole powierzchni całkowitej sześcianu jest o 35% większe od pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu. Rozpatrz wszystkie możliwości.

<table>
<tr><td>
Uczeń:

1. Oblicza pole powierzchni całkowitej P_{c_s} sześcianu o krawędzi 3.

$P_{c_s} = 6 \cdot 3^2 = 6 \cdot 9 = 54$

2. Oblicza pole powierzchni całkowitej P_c prostopadłościanu.

Powierzchnia całkowita sześcianu stanowi 135% pola powierzchni całkowitej prostopadłościanu, zatem pole powierzchni prostopadłościanu wynosi

$P_c = \frac{54 \cdot 100\%}{135\%} = 40$

3. Ustala, jakie wymiary ma zbudowany prostopadłościan i podaje odpowiedź.

Prostopadłościan został zbudowany z 16 kostek, ponieważ objętość V_{sz} sześcianu

$V_{sz} = 3^3 = 27$, więc objętość V_P otrzymanego prostopadłościanu $V_P = 43 - 27 = 16$.

Zatem wymiary prostopadłościanu mogą być:

1 × 1 × 16, $P_{c_1} = 2(1+1) \cdot 16 + 2 = 4 \cdot 16 + 2 = 66 \neq 40$

1 × 2 × 8, $P_{c_2} = 2(1+2) \cdot 8 + 4 = 6 \cdot 8 + 4 = 52 \neq 40$

1 × 4 × 4, $P_{c_3} = 2(1+4) \cdot 4 + 8 = 10 \cdot 4 + 8 = 48 \neq 40$

2 × 2 × 4, $P_{c_4} = 2(2+2) \cdot 4 + 8 = 8 \cdot 4 + 8 = 40$

Odpowiedź. Wymiary zbudowanego prostopadłościanu to 2 × 2 × 4.

Uwaga. Jeśli uczeń wypisze poprawnie 4 przypadki wymiarów prostopadłościanu oraz stwierdzi wyraźnie (nawet bez czytelnego i dokładnego uzasadnienia), że spośród nich tylko 2×2×4 ma pole całkowite równe 40, to należy mu przyznać maksymalną liczbę punktów.
</td><td>

1p.

1p.

1p
</td></tr>
</table>

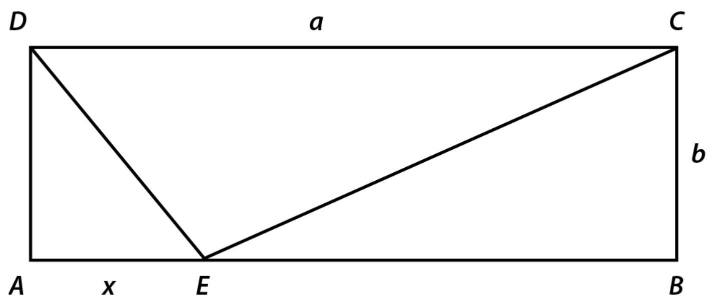
Zadanie 9. (0-3 pkt)

W prostokącie *ABCD* na boku *AB* zaznaczono punkt *E* tak, że pole trapezu *AECD* jest równe 40 cm^2, a pole trapezu *EBCD* 56 cm^2. Oblicz, jaką długość ma bok *k* kwadratu, którego pole jest równe polu prostokąta *ABCD*.

I sposób

Uczeń:

1. Przyjmuje oznaczenia (np. wykonując rysunek pomocniczy) i wyznacza np. wartość *b* w zależności od *a* i *x*, korzystając ze wzoru na pole trapezu *AECD*. — 1p.



$P_{AECD} = \frac{(x+a)\cdot b}{2} = 40,$

stąd $b = \frac{80}{x+a}$

2. Wyznacza wartość *a* w zależności od *x*, korzystając ze wzoru na pole trapezu *EBCD*. — 1p.

$$P_{EBCD} = \frac{(a-x+a)\cdot b}{2} = 56$$

$$\frac{(a-x+a)\cdot b}{2} = \frac{(2a-x)\cdot 80}{2(x+a)} = \frac{(2a-x)\cdot 40}{(x+a)} = 56$$

$$(2a-x)\cdot 40 = 56\cdot(x+a)$$

$$80a - 40x = 56x + 56a$$

$24a = 96x$, stąd $a = 4x$

3. Oblicza pole *P* prostokąta *ABCD* oraz długość boku kwadratu i podaje odpowiedź. — 1p.

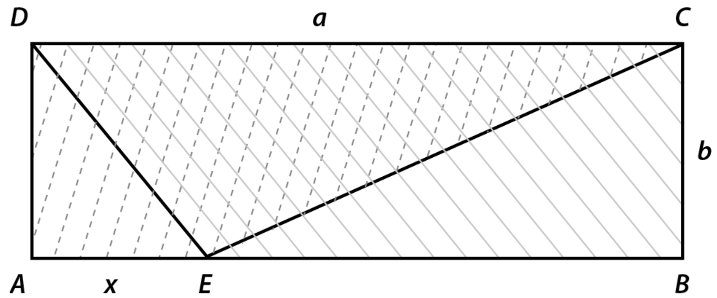
$P = ab = 4x\cdot\frac{80}{x+4x} = \frac{4x\cdot 80}{5x} = 4\cdot 16 = 64$ [cm^2], $k = \sqrt{64} = 8$ [cm]

Odpowiedź. Długość boku *k* kwadratu, którego pole jest równe polu prostokąta *ABCD* wynosi 8 cm.

II sposób

<table>
<tr><td>
Uczeń:

1. Zauważa, że $P_{ABCD} = P_{AECD} + P_{EBDC} - P_{DEC}$ (np. wykonując rysunek pomocniczy).



2. Zapisuje pole prostokąta za pomocą dwóch wyrażeń i układa równanie.

$P_{ABCD} = 56 + 40 - P_{DEC}$, ale $P_{DEC} = \frac{1}{2} a \cdot b$, więc $P_{ABCD} = 96 - \frac{1}{2} a \cdot b$

oraz $P_{ABCD} = a \cdot b$, zatem $a \cdot b = 96 - \frac{1}{2} a \cdot b$.

3. Oblicza pole P_{ABCD} prostokąta *ABCD* oraz długość boku *k* kwadratu i podaje odpowiedź.

$\frac{3}{2} a \cdot b = 96$, stąd $P_{ABCD} = a \cdot b = 64$ [cm^2], $k = \sqrt{64} = 8$ [cm]

Odpowiedź. Długość boku *k* kwadratu, którego pole jest równe polu prostokąta *ABCD* wynosi 8 cm.
</td><td>
1p.

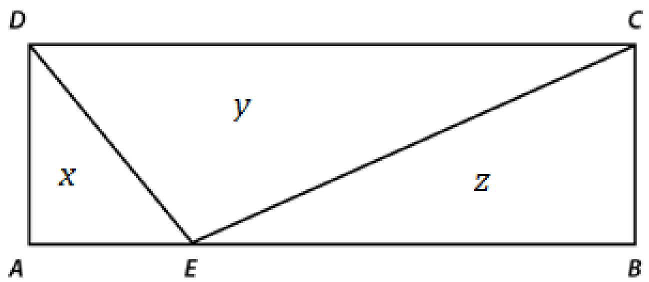
1p.

1p.
</td></tr>
</table>

III sposób

<table>
<tr><td>
Uczeń:

1. Przyjmuje oznaczenia np. literami *x*, *y*, *z* odpowiednio pola trójkątów *AED*, *DEC* i *CB*E i stwierdza, że *y* (pole trójkąta *DEC*) jest połową pola prostokąta *ABCD*.

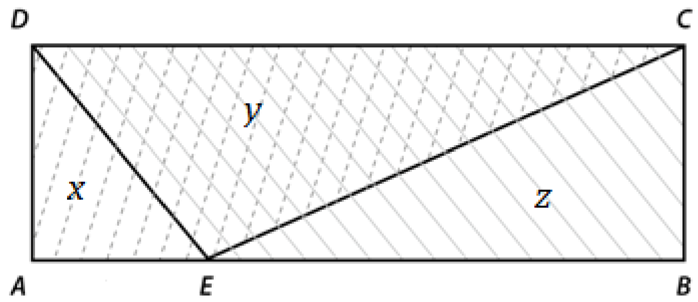


</td><td>
1p.
</td></tr>
</table>

$P_{ABCD} = |DC| \cdot |AD|$, $y = \frac{|DC| \cdot |AD|}{2}$

stąd $y = \frac{1}{2} P_{ABCD}$

2. Zauważa, że suma pól trapezów *AECD* i *EBCD* stanowi 1,5 pola prostokąta *ABCD*. 1p.



$x + y = 40$ oraz $z + y = 56$,

więc $x + y + z + y = 96$, $x + y + z = P_{ABCD}$ i $y = 0{,}5P_{ABCD}$,

zatem $1{,}5P_{ABCD} = 96$

3. Oblicza pole *P* prostokąta *ABCD* oraz długość boku kwadratu i podaje odpowiedź. 1p.

Skoro $1{,}5P_{ABCD} = 96$, to $P_{ABCD} = 64$ [cm^2],

natomiast $k = \sqrt{64} = 8$ [cm]

Odpowiedź. Długość boku *k* kwadratu, którego pole jest równe polu prostokąta *ABCD* wynosi 8 cm.

Zadanie 10. (0-3 pkt)

W pewnym sklepie przez weekend trwała promocja, w ramach której co 25. klient otrzymywał dwudziestoprocentową zniżkę na zakupy i co 40. klient – zniżkę osiemdziesięcioprocentową, naliczane niezależnie jedna po drugiej. W tym czasie zakupów dokonało 7200 klientów i każdy z tych klientów był w sklepie tylko raz. Pani Ewa otrzymała dwie zniżki i za swoje zakupy zapłaciła 128 zł. Oblicz, ilu jeszcze klientów otrzymało obie zniżki oraz ile złotych zaoszczędziła pani Ewa.

I sposób

Uczeń:	
1. Oblicza, ilu klientów, oprócz pani Ewy, otrzymało obie zniżki.	1p.
NWW(25, 40) = 200, czyli co 200 klient otrzymał obie zniżki i łącznie było ich	
7200 : 200 = 36 osób, 36 –1 = 35.	
2. Zapisuje w postaci wyrażenia zniżkę, jaką otrzymała pani Ewa.	1p.
x – kwota jaką zapłaciłaby pani Ewa za zakupy bez zniżek	
Obie zniżki od kwoty x wynoszą $0{,}2x + 0{,}8 \cdot 0{,}8x = 0{,}84x$	
3. Oblicza, ile złotych zaoszczędziła pani Ewa i podaje odpowiedź.	1p.
$0{,}16x = 128$, stąd $x = 128 : 0{,}16 = 800$ [zł], $800 - 128 = 672$ [zł]	
Odpowiedź. Oprócz pani Ewy 35 klientów otrzymało obie zniżki, a pani Ewa zaoszczędziła 672 zł.	

II sposób

Uczeń:	
1. Oblicza, ilu klientów, oprócz pani Ewy, otrzymało obie zniżki.	1p.
NWW(25, 40) = 200, czyli co 200 klient otrzymał obie zniżki i łącznie było ich	
7200 : 200 = 36 osób, 36 –1 = 35.	
2. Zapisuje w postaci wyrażenia kwotę, jaką zapłaciła pani Ewa za zakupy.	1p.
y – kwota jaką zapłaciłaby pani Ewa za zakupy bez zniżek.	
Kwota, jaką zapłaciła pani Ewa za zakupy wynosi $0{,}2 \cdot 0{,}8y$	
3. Oblicza, ile złotych zaoszczędziła pani Ewa i podaje odpowiedź.	1p.
$0{,}16y = 128$, stąd $y = 128 : 0{,}16 = 800$ [zł].	
$800 - 128 = 672$ [zł]	
Odpowiedź. Oprócz pani Ewy 35 klientów otrzymało obie zniżki, a pani Ewa zaoszczędziła 672 zł.	