

KONKURS MATEMATYCZNY
dla uczniów klas IV-VIII szkół podstawowych
województwa mazowieckiego
w roku szkolnym 2019/2020

Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

W zadaniach otwartych (od zad. 3 do zad. 11) za zastosowanie w pełni poprawnej metody przyznajemy 1 punkt, zaś za pełne, poprawne rozwiązanie **całego zadania** przyznajemy 2 punkty.

ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

| Nr zadania | 1. | 2. |
|----------------------|-------|-------|
| Maks. liczba punktów | 1 pkt | 1 pkt |
| Prawidłowa odpowiedź | NB | C |

ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 3. (2 pkt)

Cyfrą dziesiątek liczby osiem razy większej od pewnej liczby dwucyfrowej jest 6,
a cyfrą jedności liczby dziewięć razy większej od tej samej liczby dwucyfrowej jest 7.
Znajdź wszystkie liczby dwucyfrowe spełniające opisane warunki. Odpowiedź uzasadnij.

I sposób

| | |
|---|-----|
| <p>Uczeń:</p> <p>1. Wprowadza oznaczenia i znajduje cyfrę jedności, np.:</p> <p>$10a + b$ - szukana liczba dwucyfrowa</p> $\begin{array}{r} \boxed{a} \boxed{b} \\ \cdot \quad 9 \\ \hline 7 \end{array}$ <p>stąd $b = 3$.</p> | 1p. |
| <p>2. Znajduje cyfrę dziesiątek i podaje odpowiedź. Np.</p> $\begin{array}{r} \\ \boxed{a} \boxed{3} \\ \cdot \quad 8 \\ \hline 6 \end{array}$ <p>stąd $a = 3$ lub $a = 8$.</p> <p>Odpowiedź. Są dwie takie liczby 33 i 83.</p> | 1p. |

II sposób

| | |
|--|-----|
| <p>Uczeń:</p> <p>1. Zauważa, że jeśli pomnożymy dowolną liczbę przez 9 i w wyniku w rzędzie jedności otrzymamy 7, to cyfrą jedności szukanej liczby jest 3.</p> | 1p. |
| <p>2. Zapisuje wszystkie liczby dwucyfrowe, w których 3 jest cyfrą jedności: 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93 i wybiera z nich te, które spełniają warunki zadania oraz podaje odpowiedź.</p> <p>Są dwie takie liczby 33 i 83, bo $33 \cdot 8 = 264$ i $33 \cdot 9 = 297$ oraz $83 \cdot 8 = 664$ i $83 \cdot 9 = 747$</p> <p>Odpowiedź. Są dwie takie liczby 33 i 83.</p> | 1p. |

Zadanie 4. (2 pkt)

Wykaż, że liczba $2^2 a (a^2 - 1) + \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot 4\sqrt{5} (a^2 - 1)$ jest podzielna przez 8, gdy a jest liczbą całkowitą.

| | | | | |
|---|-----------|--|------------|-----|
| Uczeń: | | | | |
| 1. Przekształca | wyrażenie | $2^2 a(a^2 - 1) + \sqrt{\frac{4}{5}} \cdot 4\sqrt{5}(a^2 - 1)$ | do postaci | 1p. |
| $4a(a^2 - 1) + 8(a^2 - 1)$ oraz zauważa, że jeśli każda z dwóch liczb całkowitych dzieli się przez 8, to ich suma też dzieli się przez 8. Drugi składnik liczby $4a(a^2 - 1) + 8(a^2 - 1)$ dzieli się przez 8, zatem wystarczy wykazać, że pierwszy składnik dzieli się przez 8. | | | | |
| 2. Uzasadnia, | że liczba | $4a(a^2 - 1)$ dzieli się przez 8. Np.: liczba ta jest podzielna przez 4 oraz | | 1p. |
| $4a(a^2 - 1) = 4a(a + 1)(a - 1)$. Spośród liczb a i $a + 1$ jedna musi być parzysta, bo są to kolejne liczby, więc iloczyn $a(a + 1)$ jest podzielny przez 2, zatem w rozkładzie na czynniki liczby $4a(a + 1)(a - 1)$ występują czynniki 2 i 4 ($2 \cdot 4 = 8$), więc także dzieli się ona przez 8. Zatem dana liczba jest podzielna przez 8, co należało wykazać. | | | | |

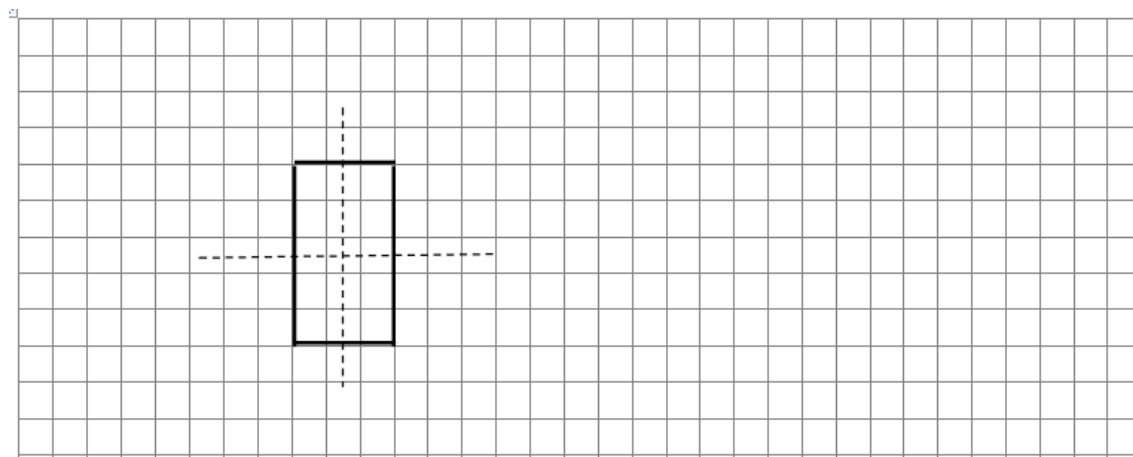
Zadanie 5. (2 pkt)

Jeśli zmniejszymy pewną liczbę naturalną x o 4, to zmniejszymy ją o więcej niż 11% jej wartości. Jeśli tę samą liczbę naturalną x powiększymy o 6, to powiększymy ją o mniej niż 17% jej wartości. Co to za liczba? Odpowiedź uzasadnij.

| | | |
|--|--|-----|
| Uczeń: | | |
| 1. Przyjmuje oznaczenia i zapisuje treść zadania w postaci nierówności. Np. x – liczba naturalna $0,89x$ – liczba x zmniejszona o 11% $1,17x$ – liczba x powiększona o 17% $x - 4 < 0,89x$ i $x + 6 < 1,17x$ | | 1p. |
| 2. Rozwiązuje nierówności i podaje odpowiedź. Np. $x < \frac{400}{11}$ i $\frac{400}{11} \approx 36,4$ $x > \frac{600}{17}$ i $\frac{600}{17} \approx 35,3$ zatem $x = 36$. Odpowiedź. Tą liczbą naturalną jest 36. | | 1p. |

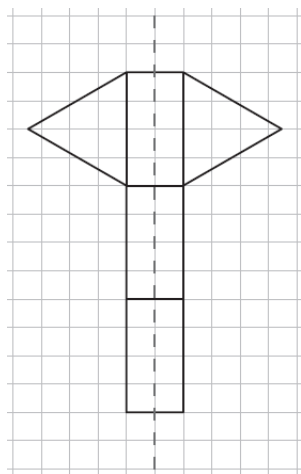
Zadanie 6. (2 pkt)

Na rysunku przedstawiono prostokąt i jego osie symetrii. Uzupełnij rysunek tak, aby powstała siatka graniastosłupa prawidłowego trójkątnego, która ma tylko jedną oś symetrii. Przedstaw dwa różne rozwiązania.

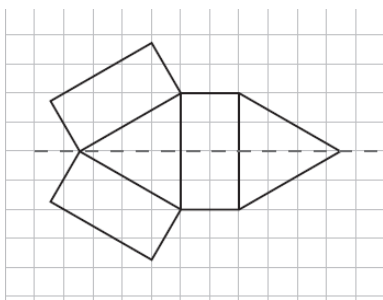


Uczeń:

1. Przedstawia jedno rozwiązanie, np.:



2. Przedstawia drugie rozwiązanie, np.:



1p.

1p.

Zadanie 7. (2 pkt)

Przygotowując obóz harcerski, zaplanowano, że pięciu harcerzy rozstawi wszystkie namioty w dwie godziny. Tymczasem drużyna harcerska przybyła na miejsce obozu na półtorej godziny przed zmierzchem. Ilu co najmniej harcerzy trzeba dobrać, aby rozbijanie namiotów trwało nie dłużej niż 1 godzinę i 15 minut?

Przyjmij, że każdy harcerz będzie pracował jednakowo wydajnie.

I sposób

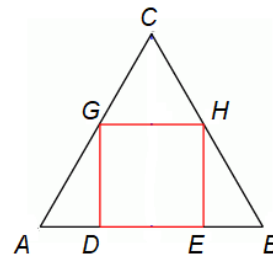
| | |
|--|-----------------------|
| <p>Uczeń:</p> <p>1. Przyjmuje oznaczenia i zapisuje symbolicznie treść zadania rozpoznając wielkości odwrotnie proporcjonalne. Np.</p> <p>x – liczba dodatkowych harcerzy</p> $\begin{array}{ccc} 5 & - & 2 \\ \downarrow & & \uparrow \\ x+5 & - & 1,25 \end{array}$ <p>2. Układa proporcję, rozwiązuje ją i podaje odpowiedź. Np.</p> $\frac{5}{x+5} = \frac{1,25}{2}$ <p>stąd $x = 3$</p> <p>Odpowiedź. Do rozstawiania namiotów trzeba jeszcze wyznaczyć <u>co najmniej</u> trzech harcerzy.</p> | <p>1p.</p> <p>1p.</p> |
|--|-----------------------|

II sposób

| | |
|---|-----------------------|
| <p>Uczeń:</p> <p>1. Na podstawie treści zadania zapisuje symbolicznie związek między podanymi wielkościami, pozwalający obliczyć minimalną liczbę harcerzy do wykonania tej pracy, np.: $\frac{x}{y} \cdot a$, gdzie x - zaplanowany czas pracy, y - czas pracy, w którym tę pracę trzeba wykonać, a - zaplanowana liczba harcerzy.</p> <p>2. Wykonuje obliczenia i podaje odpowiedź. Np.</p> $\frac{2}{1,25} \cdot 5 = \frac{10}{1,25} = \frac{1000}{125} = 8$ $8 - 5 = 3$ <p>Odpowiedź. Do rozstawiania namiotów trzeba jeszcze wyznaczyć <u>co najmniej</u> trzech harcerzy.</p> | <p>1p.</p> <p>1p.</p> |
|---|-----------------------|

Zadanie 8. (2 pkt)

Na rysunku trójkąt ABC jest równoboczny o boku długości $\sqrt{3} + 2$. Oblicz, o ile bok kwadratu $DEHG$ jest krótszy od boku trójkąta ABC .



Uczeń:

1. Przyjmuje oznaczenie np. x na długość boku kwadratu. Uzasadnia, że trójkąt GHC jest równoboczny o boku długości x oraz trójkąty ADG i BEH są przystającymi trójkątami prostokątnymi o kątach ostrych 30° i 60° i są „połówkami” trójkąta równobocznego o wysokości x , a więc

$$x = |EB| \cdot \sqrt{3}, \text{ to } |EB| = \frac{x}{\sqrt{3}} = |AD|$$

2. Zapisuje, że $|AB| = \frac{x}{\sqrt{3}} + x + \frac{x}{\sqrt{3}} = \frac{x(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} + 2$, więc $x = \sqrt{3}$ $\left(x = \frac{2\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}+2}\right)$

oblicza różnicę długości boku trójkąta ABC i kwadratu $DEHG$ i podaje odpowiedź.

$$\sqrt{3} + 2 - \sqrt{3} = 2$$

Odpowiedź. Bok kwadratu $DEHG$ jest o 2 krótszy od boku trójkąta ABC .

1p.

1p.

Zadanie 9. (2 pkt)

Liczby całkowite x i y spełniają warunek $x > y$. Wyniki działań: $x + y$, $x - y$, $x \cdot y$, $x : y$ zapisane w kolejności malejącej to: 18, 12, -5 , -45 . Znajdź liczby x i y .

Uczeń:

1. Wykonuje poprawnie działania. Np.

$$(x + y) + (x - y) = 2x; \quad (x \cdot y) : (x : y) = x^2$$

2. Zapisuje, że $x = 15$ lub $x = -25$ (bo tylko $18 + 12$ i $-5 + (-45)$ są liczbami parzystymi) oraz że jedynym iloczynem dwóch liczb spośród: 18, 12, -5 , -45 , który jest jednocześnie kwadratem liczby całkowitej jest $(-5) \cdot (-45) = 225$, zatem $x = 15$. Spośród liczb: 18, 12, -5 , -45 tylko liczba -45 jest podzielna przez 15, a więc $y = -3$.

Odpowiedź. Szukane liczby, to $x = 15$ oraz $y = -3$.

1p.

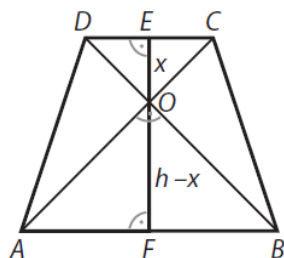
1p.

Zadanie 10. (2pkt)

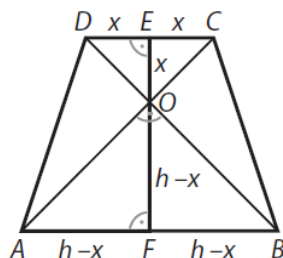
Uzasadnij, że pole trapezu równoramiennego o wysokości h , którego przekątne są prostopadłe, jest równe h^2 .

Uczeń

1. Wykonuje poprawny rysunek (np. Rys. 1) i uzasadnia, że trójkąty: DEO , CEO , AFO i BFO są równoramienne. Np. kąty ostre tych trójkątów mają po 45° (Rys. 2).



Rys. 1



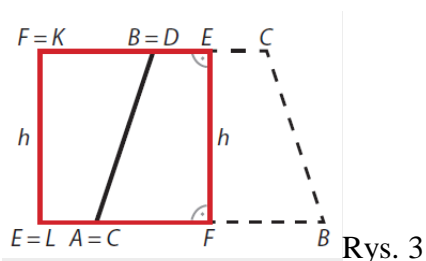
Rys. 2

2. Uzasadnia, że pole trapezu $ABCD$ jest równe h^2 . Np.

$$P = \frac{1}{2} (x + x + h - x + h - x) \cdot h = \frac{2h \cdot h}{2} = h^2, \text{ zatem } P = h^2$$

lub

Po rozcięciu trapezu wzdłuż EF , prawą połówkę, tj. trapez $EFBC$ przykładamy do trapezu $AFED$ i obracamy tak, by bok BC pokrył się z bokiem AD (Rys. 3)



Rys. 3

Otrzymaliśmy kwadrat o boku h , zatem $P = h^2$.

Zadanie 11. (2 pkt)

Czworokąt $ABCD$ ma środek symetrii. Oblicz długość dłuższej przekątnej czworokąta $ABCD$, jeżeli $A = (1, 0)$, $B = (10, -9)$, $C = (9, 6)$.

I sposób

Uczeń:

1. Oblicza współrzędne środka S przekątnej AC (środką symetrii) oraz współrzędne punktu $D = (x, y)$. Np.

| | |
|---|-----|
| $S = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (5, 3)$ oraz $S = \left(\frac{10+x}{2}, \frac{-9+y}{2}\right) = (5, 3)$, stąd $x = 0$, $y = 15$, a więc $D = (0, 15)$. 2. Oblicza długości przekątnych AC i BD oraz porównuje je. Podaje odpowiedź. Np. $ AC = \sqrt{(9-1)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ $ BD = \sqrt{(0-10)^2 + (-9-15)^2} = \sqrt{100+576} = \sqrt{676} = 26$ $ BD > AC $ Odpowiedź. Długość dłuższej przekątnej czworokąta $ABCD$ jest równa 26. | 1p. |
|---|-----|

II sposób

| | |
|---|-----|
| Uczeń: 1. Oblicza współrzędne środka S przekątnej AC (środka symetrii) oraz długość odcinka BS . Np. $S = \left(\frac{1+9}{2}, \frac{0+6}{2}\right) = (5, 3)$ $ BS = \sqrt{(5-10)^2 + (3+9)^2} = \sqrt{25+144} = \sqrt{169} = 13$ 2. Oblicza długości przekątnych AC i BD oraz porównuje je. Podaje odpowiedź. Np. $ AC = \sqrt{(9-1)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{64+36} = \sqrt{100} = 10$ $ BD = 2 \cdot BS = 26$ $ BD > AC $ Odpowiedź. Długość dłuższej przekątnej czworokąta $ABCD$ jest równa 26. | 1p. |
|---|-----|

*Uwaga. Jeśli uczeń przedstawi **poprawne i pełne** rozwiązanie zadania 11 metodą graficzną, to otrzymuje maksymalną liczbę punktów.*