Mazowiecki Kurator Oświaty
Al. Jerozolimskie 32, 00-024 Warszawa

MSCDN
MAZOWIECKIE SAMORZĄDOWE
CENTRUM DOSKONALENIA NAUCZYCIELI

MODEL ODPOWIEDZI I SCHEMAT OCENIANIA

KONKURS MATEMATYCZNY DLA KLAS IV-VIII

UCZNIÓW SZKÓŁ PODSTAWOWYCH WOJEWÓDZTWA MAZOWIECKIEGO

ETAP WOJEWÓDZKI 2021/2022

Uczeń maksymalnie może zdobyć 20 punktów.

Za poprawne rozwiązanie zadania zamkniętego uczeń może zdobyć maksymalnie 1 punkt, a za zadanie otwarte 2 lub 3 punkty. Za każde poprawne i pełne rozwiązanie zadania otwartego, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań, należy przyznać maksymalną liczbę punktów.

ODPOWIEDZI DO ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	**1.**	**2.**	**3.**
Maks. liczba punktów	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**	**0-1 pkt**
Prawidłowa odpowiedź	**B., D.**	**B.**	**C.**

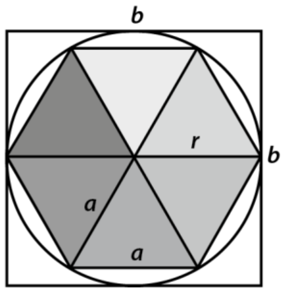
ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

Zadanie 4. (0-2 pkt)

Szybę do okrągłego okna wycięto z kwadratowej tafli tak, aby było jak najmniej odpadów. Na tej szybie Zosia wykonała kolorowy rysunek w kształcie sześciokąta foremnego tak, że wierzchołki rysunku leżą na obrzeżach szyby. Oblicz pole szklanych odpadów, jeśli pole rysunku Zosi wynosi $24\sqrt{3}$ dm^2. Do obliczeń przyjmij, że $\pi = 3$.

Uczeń:

1. Przyjmuje oznaczenia np. takie, jak na rysunku i oblicza długość promienia szyby okna. — 1p.



$$6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 24\sqrt{3}$$

$$3a^2\sqrt{3} = 48\sqrt{3}$$

$$a^2 = 16$$

$a = 4$ [dm] $= r$

2. Oblicza pole szklanych odpadów. — 1p.

Pole szklanych odpadów jest równe różnicy pola P_1 kwadratu o boku b i pola P_2 koła o promieniu r.

$b = 2r \quad P_1 = 4r^2 = 64$ [dm^2], $P_2 = \pi r^2 = 16\pi$ [dm^2],

$P_1 - P_2 = 64 - 16\pi = 16(4 - \pi) = 16(4 - 3) = 16$ [dm^2]

Zadanie 5. (0-2 pkt)

W urnie są kule białe i czerwone. Prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wynosi $\frac{1}{4}$. Gdy dołożymy cztery białe kule, prawdopodobieństwo wylosowania białej kuli wzrośnie o 0,15. Oblicz, ile białych i ile czerwonych kul jest w tej urnie.

Uczeń: 1. Przeprowadza analizę zadania i układa równanie. x – liczba białych kul $4x$ – liczba wszystkich kul $\frac{x+4}{4x+4} = \frac{1}{4} + 0{,}15$	1p.
2. Rozwiązuje równanie i podaje odpowiedź. $\frac{x+4}{4x+4} = \frac{1}{4} + \frac{3}{20} = \frac{2}{5}$ $\frac{x+4}{4x+4} = \frac{2}{5}$ $5x + 20 = 8x + 8$ $3x = 12, \qquad x = 4$ Liczba czerwonych kul: $4x - x = 3x = 12$ Odpowiedź. W urnie są 4 białe kule i 12 czerwonych kul przed zmianą. lub W urnie jest 8 białych kul i 12 czerwonych kul po dołożeniu.	1p.

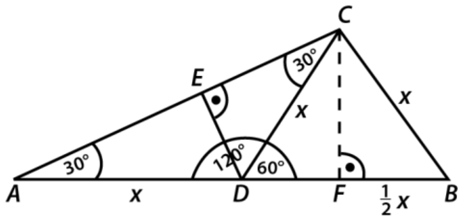
Zadanie 6. (0-2 pkt)

W trójkącie różnobocznym *ABC* środek *D* najdłuższego boku połączono z przeciwległym wierzchołkiem trójkąta. Trójkąt *ABC* został podzielony na dwa trójkąty, z których jeden jest równoboczny. Oblicz, ile procent pola trójkąta *ABC* stanowi pole powstałego trójkąta równobocznego.

I sposób

Uczeń:

1. Przedstawia analizę zadania np. za pomocą rysunku. — 1p.



2. Uzasadnia, że pole trójkąta *ADC* jest równe polu trójkąta *DCB* i podaje odpowiedź.

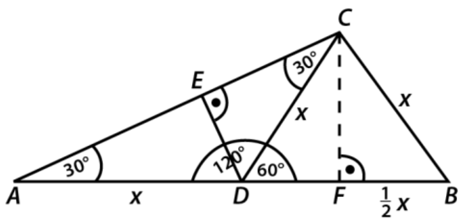
Trójkąty *ADE* i *DCE* są przystające (cecha kbk) i każdy z nich jest połową trójkąta równobocznego o boku *x*, a więc suma ich pól jest równa polu trójkąta *DBC*.

Odpowiedź. Pole trójkąta *DBC* stanowi 50% pola trójkąta *ABC*. — 1p.

II sposób

Uczeń:

1. Przedstawia analizę zadania np. za pomocą rysunku i uzasadnia, że trójkąt *ABC* jest prostokątny. — 1p.



Miara kąta DCB wynosi 60°, więc kąt *ACB* jest prosty, zatem trójkąt *ABC* jest prostokątny.

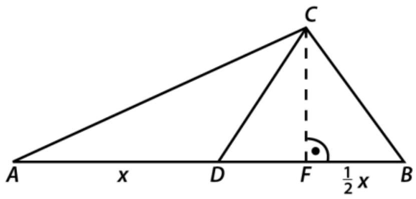
2. Uzasadnia, że pole trójkąta *ADC* jest równe polu trójkąta *DCB* i podaje odpowiedź.

Trójkąty *ADE* i *DCE* są przystające (cecha kbk), więc odcinki *AE* i *EC* są jednakowej długości równej $\frac{x\sqrt{3}}{2}$. Pole P_1 trójkąta *ABC* wynosi — 1p.

$$P_1 = \frac{x\sqrt{3} \cdot x}{2} = \frac{x^2\sqrt{3}}{2}$$

Pole P_2 trójkąta równobocznego o boku x wynosi $P_1 = \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$, a więc jest połową pola trójkąta *ABC*. Odpowiedź. Pole trójkąta *DBC* stanowi 50% pola trójkąta *ABC*.	

III sposób

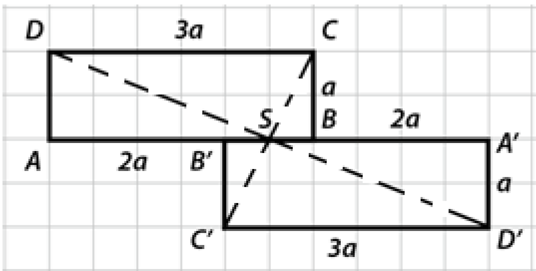
Uczeń: 1. Przedstawia analizę zadania np. za pomocą rysunku.  2. Uzasadnia, że pola trójkątów *ADC* i *DBC* są równe i podaje odpowiedź. W trójkątach *ADC* i *DBC* podstawy *AD* i *DB* są jednakowej długości, a wysokość *CF* jest wspólna, a więc pola tych trójkątów są równe, zatem pole trójkąta *DBC* jest połową pola trójkąta *ABC*. Odpowiedź. Pole trójkąta *DBC* stanowi 50% pola trójkąta *ABC*.	1p. 1p.

Zadanie 7. (0-2 pkt)

W prostokącie *ABCD* bok *AD* jest trzy razy krótszy od boku *AB*. Punkt *S* dzieli bok *AB* w stosunku 5:1 licząc od wierzchołka *A*. Prostokąt *A'B'C'D'* jest symetryczny do prostokąta *ABCD* względem punktu *S*. Oblicz, jaką częścią obwodu wielokąta *AB'C'D'A'BCD* jest obwód prostokąta *ABCD*.

<table>
<tr><td>
Uczeń:

1. Analizuje zadanie wykonując rysunek pomocniczy i oznacza długości odpowiednich odcinków za pomocą a np.



</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>
2. Oblicza, jaką częścią obwodu wielokąta AB'C'D'A'BCD jest obwód prostokąta ABCD i podaje odpowiedź

Obwód prostokąta ABCD jest równy $8a$.

Obwód wielokąta AB'C'D'A'BCD jest równy $14a$.

Odpowiedź. Obwód prostokąta ABCD stanowi $\frac{4}{7}$ obwodu wielokąta AB'C'D'A'BCD.
</td><td>1p.</td></tr>
</table>

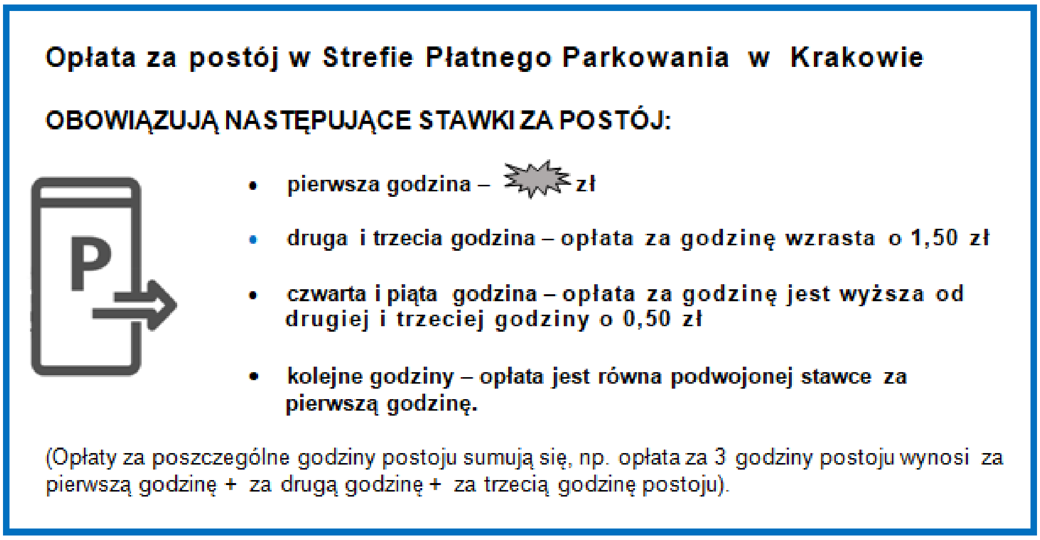
Zadanie 8. (0-3 pkt)

Pewna firma otrzymała zamówienie na dwa typy kodów dla uczestników internetowej grupy dyskusyjnej.
Kody typu I mają mieć dwie litery na początku i jedną na końcu, a między nimi 3 cyfry. Mogą w nich występować tylko litery S, B i K oraz cyfry 4, 6, 8, przy czym litery i cyfry mogą się powtarzać.
Kody typu II mają mieć na początku dwie litery spośród: W, Y i Z, a następnie 5 cyfr spośród: 1, 3, 5, 7, 9, przy czym litery i cyfry nie mogą się powtarzać.
Ilu maksymalnie uczestników może liczyć ta grupa, jeśli każdy uczestnik musi mieć inny kod? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:	
1. Oblicza, ile można utworzyć kodów typu I. W kodach typu I: – pierwszą literę można wybrać na 3 sposoby, drugą i ostatnią też na 3 (bo litery mogą się powtarzać), – pierwszą cyfrę oraz każdą kolejną można wybrać na 3 sposoby (bo cyfry mogą się powtarzać). W ten sposób można utworzyć $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^6 = 729$ kodów pierwszego typu.	1p.
2. Oblicza, ile można utworzyć kodów typu II. W kodach typu II: – pierwszą literę można wybrać na 3 sposoby, a drugą już tylko na 2 sposoby (bo litery nie mogą się powtarzać), – pierwszą cyfrę można wybrać na 5 sposobów, drugą na 4 sposoby, trzecią na 3, czwartą na 2, a piątą na 1 sposób (bo cyfry nie mogą się powtarzać). W ten sposób można utworzyć $3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$ kodów drugiego rodzaju.	1p.
3. Oblicza, ilu maksymalnie uczestników może liczyć internetowa grupa dyskusyjna. Łącznie jest $729 + 720 = 1449$ kodów. Odpowiedź. Internetowa grupa dyskusyjna może maksymalnie liczyć 1449 uczestników.	1p.

Zadanie 9. (0-3 pkt)

Pan Adam zwiedzając Kraków, korzystał z parkingu samochodowego. Niestety na tablicy informacyjnej wysokość opłaty za pierwszą godzinę parkowania była nieczytelna.



Opłata za postój w Strefie Płatnego Parkowania w Krakowie

OBOWIĄZUJĄ NASTĘPUJĄCE STAWKI ZA POSTÓJ:

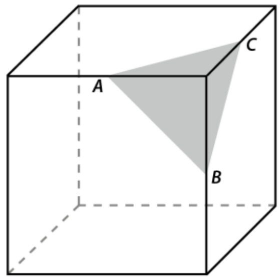
- pierwsza godzina – zł
- **druga i trzecia godzina – opłata za godzinę wzrasta o 1,50 zł**
- **czwarta i piąta godzina – opłata za godzinę jest wyższa od drugiej i trzeciej godziny o 0,50 zł**
- **kolejne godziny – opłata jest równa podwojonej stawce za pierwszą godzinę.**

(Opłaty za poszczególne godziny postoju sumują się, np. opłata za 3 godziny postoju wynosi za pierwszą godzinę + za drugą godzinę + za trzecią godzinę postoju).

Pan Adam zostawił samochód na 7 godzin. Oblicz stawkę za pierwszą godzinę parkowania wiedząc, że jest ona liczbą całkowitą, a pan Adam zapłacił nie więcej niż 34 zł, ale nie mniej niż 16 zł. Podaj wszystkie możliwe odpowiedzi.

Uczeń: 1. Wykonuje analizę zadania np.: x – opłata za pierwszą godzinę. $2 \cdot (x + 1{,}5) = 2x + 3$ - opłata za drugą i trzecią godzinę $2 \cdot (x + 2) = 2x + 4$ - opłata za czwartą i piątą godzinę $4x$ - opłata za szóstą i siódmą godzinę	1p.
2. Układa nierówności. $x + 2x + 3 + 2x + 4 + 4x \leq 34$ oraz $x + 2x + 3 + 2x + 4 + 4x \geq 16$	1p.
3. Rozwiązuje nierówności i podaje odpowiedź. $9x \leq 34 - 7$ oraz $9x \geq 16 - 7$ $9x \leq 27$ $9x \geq 9$ $x \leq 3$ $x \geq 1$ zatem $1 \leq x \leq 3$ Odpowiedź. Opłata za pierwszą godzinę parkowania mogła wynosić 1 zł lub 2 zł, lub 3 zł.	1p.

Zadanie 10. (0-3 pkt)



Filip z drewnianego klocka sześciennego odciął wszystkie „rogi" i w ten sposób otrzymał nowe klocki.
Na rysunku pokazano sposób odcięcia jednego „rogu", a zaznaczone punkty *A*, *B*, *C* są środkami krawędzi sześcianu.
Klocki w kształcie „rogów" Filip pomalował na czerwono, a pozostały klocek na zielono.
Czy łączna powierzchnia wszystkich klocków czerwonych jest większa od powierzchni klocka zielonego? Odpowiedź uzasadnij.

I sposób

<table>
<tr><td>Uczeń:

1. Przyjmuje, że długość krawędzi sześcianu jest równa np. a, oraz zauważa, że jedna ze ścian klocka powstałego po odcięciu „rogów" jest kwadratem.

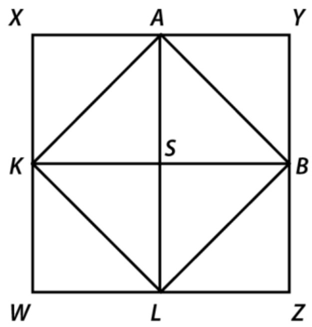
Czworokąt $ABLK$ jest kwadratem ponieważ każdy z przystających trójkątów ABY, BZL, LWK, KXA jest prostokątny równoramienny, a więc kąty przy podstawie mają po 45°. Stwierdza, że $|AB| = \frac{a\sqrt{2}}{2}$ np. wykorzystując twierdzenie Pitagorasa.</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>2. Ustala, ile i jakie klocki powstaną po odcięciu wszystkich „rogów".

Ponieważ sześcian ma 8 wierzchołków, więc Filip otrzyma osiem jednakowych czerwonych klocków w kształcie czworościanu, którego podstawą jest trójkąt równoboczny o boku długości $\frac{a\sqrt{2}}{2}$, a ściany boczne są trójkątami prostokątnymi o przyprostokątnych równych $\frac{1}{2}a$ oraz jeden zielony klocek, który ma 8 ścian w kształcie trójkąta równobocznego o boku długości $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ i 6 kwadratów o boku długości $\frac{a\sqrt{2}}{2}$.</td><td>1p.</td></tr>
<tr><td>3. Poprawnie zapisuje za pomocą wyrażeń powierzchnię P_1 czerwonych klocków i powierzchnię P_2 zielonego klocka oraz porównuje je.

$$P_1 = 8\cdot\left(\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} + \frac{a^2}{8}\cdot 3\right) = 2\cdot\frac{2a^2\sqrt{3}}{4} + 3a^2 = a^2\sqrt{3} + 3a^2 = a^2\left(3+\sqrt{3}\right)$$
$$P_2 = 6\cdot\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8\cdot\frac{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2\sqrt{3}}{4} = 3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2\left(3+\sqrt{3}\right),$$
a zatem powierzchnia wszystkich czerwonych klocków jest taka sama jak powierzchnia zielonego klocka.

Uwaga. Jeżeli uczeń zauważy, że na łączną powierzchnię czerwonych klocków składa się taka sama liczba przystających trójkątów równobocznych co na powierzchnię zielonego klocka i w związku z tym porówna tylko pola 6 kwadratów z polem 24 trójkątów prostokątnych, to należy przyznać mu 1punkt.</td><td>1p.</td></tr>
</table>

II sposób



Uczeń: 1. Zauważa np. wykonując rysunek, że jedna ze ścian klocka powstałego po odcięciu „rogów” jest kwadratem o polu P_1 równym połowie pola P_2 ściany sześcianu oraz polu czterech ścian bocznych odciętych „rogów”. Trójkąty AYB, BZL, LWK, KXA, ASB, BSL, LSK, KSA są przystające, więc $P_{ABLK} = \frac{1}{2} P_{XYZW} = 4 \cdot P_{ABY}$	1p.
2. Ustala, ile i jakie klocki powstaną po odcięciu wszystkich „rogów”. Ponieważ sześcian ma 8 wierzchołków, więc Filip otrzyma osiem jednakowych czerwonych klocków w kształcie czworościanu, którego podstawą jest trójkąt równoboczny, a ściany są przystającymi trójkątami prostokątnymi oraz jeden zielony klocek, który ma 8 ścian w kształcie trójkąta równobocznego przystającego do podstawy czerwonego klocka i 6 kwadratów o polu równym polu trzech ścian sześcianu.	1p.
3. Porównuje pola powierzchni wszystkich czerwonych klocków z polem powierzchni zielonego klocka. Na pole powierzchni czerwonych klocków składają się pola: 8 trójkątów równobocznych identycznych jak ściany w klocku zielonym oraz 24 jednakowych trójkątów prostokątnych. Pole 4 tych trójkątów odpowiada polu jednego kwadratu w zielonym klocku, a więc pole 24 trójkątów prostokątnych odpowiada polu 6 kwadratów w zielonym klocku. Zatem powierzchnia wszystkich czerwonych klocków jest taka sama jak powierzchnia zielonego klocka. *Uwaga. Jeżeli uczeń zauważy, że na łączną powierzchnię czerwonych klocków składa się taka sama liczba przystających trójkątów równobocznych co na powierzchnię zielonego klocka i w związku z tym porówna tylko pola 6 kwadratów z polem 24 trójkątów prostokątnych, to należy przyznać mu 1punkt.*	1p.