



## KONKURS MATEMATYCZNY

dla uczniów gimnazjów oraz oddziałów gimnazjalnych  
województwa mazowieckiego

w roku szkolnym 2018/2019

### Model odpowiedzi i schematy punktowania

Za **każde poprawne i pełne** rozwiązanie, inne niż przewidziane w schemacie punktowania rozwiązań zadań, przyznajemy **maksymalną** liczbę punktów.

### ROZWIĄZANIA ZADAŃ ZAMKNIĘTYCH

Nr zadania	1.	2.
Maks. liczba punktów	1 pkt	1 pkt
Prawidłowa odpowiedź	D	C

### ROZWIĄZANIA ZADAŃ OTWARTYCH

**Zadanie 3.** (2 pkt)

Trójkąt  $ABC$  jest prostokątny i równoramienny. Na przeciwprostokątnej  $AC$  zbudowano trójkąt równoboczny  $ACD$ . Oblicz miary kątów trójkąta  $ABD$ . Rozważ wszystkie możliwości ułożenia trójkątów.

Uczeń:	
1. analizuje pierwszy przypadek i oblicza miary kątów trójkąta $ABD$	1p.
Przypadek 1	
$ \angle DAB  = 60^\circ + 45^\circ = 105^\circ$	
$ \angle ADB  = 0,5 \cdot 60^\circ = 30^\circ$	
$ \angle ABD  = 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$	
Miary kątów trójkąta $ABD$ : $105^\circ$ , $30^\circ$ , $45^\circ$ .	
2. analizuje drugi przypadek i oblicza miary kątów trójkąta $ABD$	
Przypadek 2	1p.
$ \angle DAB  = 60^\circ - 45^\circ = 15^\circ$	
$ \angle ADB  = 0,5 \cdot 60^\circ = 30^\circ$	
$ \angle ABD  = 180^\circ - 45^\circ = 135^\circ$	
Miary kątów trójkąta $ABD$ : $15^\circ$ , $30^\circ$ , $135^\circ$ .	

#### Zadanie 4. (2 pkt)

Dany jest trójkąt, którego wysokości mają długości: 12 cm, 13 cm i 31,2 cm. Wiedząc, że jest to trójkąt prostokątny, oblicz pole tego trójkąta.

Uczeń:	
1. analizuje długości wysokości i wybiera dwie najdłuższe 13 cm i 31,2 cm do obliczenia pola trójkąta, uzasadniając np., że ponieważ przyprostokątna jest krótsza od przeciwprostokątnej trójkąta prostokątnego zatem $h = 12$ cm musi być wysokością opuszczoną na przeciwprostokątną danego w zadaniu trójkąta.	1p.

Basia wysypała na podłogę 10 sześciennych kostek do gry (kostka do gry ma oczka od 1 do 6). Zanim je pozbierała obliczyła, że na wszystkich widocznych ściankach (tzn. nie przylegających bezpośrednio do podłogi) były w sumie 184 oczka. Jaka jest największa możliwa liczba szóstek, które znajdują się na ścianach przylegających bezpośrednio do podłogi? Odpowiedź uzasadnij.

<p>Uczeń:</p> <p>1. oblicza, że suma oczek na jednej kostce wynosi <math>1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21</math>, a na 10 kostkach suma oczek wynosi 210 i wnioskuje, że <math>210 - 184 = 26</math> to suma oczek na niewidocznych ściankach.</p> <p>2. prowadzi rozumowanie, że ścianek niewidocznych jest 10 i na każdej jest co najmniej 1 oczko; zatem <math>26 - 10 = 16</math> to ilość oczek, którymi można dopełnić jedynek do szóstek. Skoro <math>16 : 5 = 3</math> r.1 stąd wnioskuje, że mogły być niewidoczne <b>co najwyżej trzy szóstki</b>.</p> <p>Odp.: Na niewidocznych ściankach mogło być, co najwyżej, trzy szóstki.</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p>
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----------------------

Trzy liczby naturalne dwucyfrowe ustawione w kolejności malejącej stanowią szyfr do sejfu. Iloczyn pewnych dwóch spośród tych trzech liczb równa się 888. Iloczyn innych dwóch liczb spośród tych trzech równa się 999. Jaki jest szyfr do tego sejfu? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:	
1. układa dwa równania $ab = 888$ i $bc = 999$ z trzema niewiadomymi i wykorzystuje fakt, że są to liczby całkowite i dwucyfrowe a z tego zapisu wnioskuje, że $b$ jest wspólnym dzielnikiem liczb 888 i 999.	1p.
2. rozkłada liczby 888 i 999 na czynniki: $888 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 37$ , $999 = 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 37$ i wnioskuje, że $b$ może się równać 1, 3, 37 lub 111, a jedynym dwucyfrowym czynnikiem jest 37, stąd $b = 37$ .	1p.
3. oblicza $a = 888 : 37 = 24$ i $c = 999 : 37 = 27$ i porządkuje liczby malejąco oraz udziela odpowiedzi np.: Szyfr do sejf u to: 37 27 24.	1p.

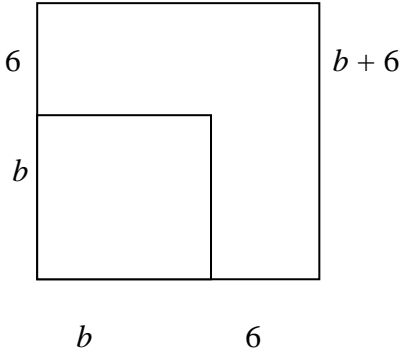
**Zadanie 7.** (2 pkt)

O godzinie 15:00 kąt między wskazówkami zegara wynosi  $90^\circ$ . Po ilu minutach wskazówki zegara, po raz pierwszy od tego momentu, utworzą kąt  $130^\circ$ ? Odpowiedź uzasadnij.

Uczeń:	
1. zauważa, że przez 1 minutę wskazówka minutowa zakreśla kąt o mierze $6^\circ = 360^\circ : 60$ , a godzinowa $0,5^\circ = (\frac{1}{12} \cdot 360^\circ) : 60$ , a następnie wnioskuje, że przez $x$ minut wskazówka minutowa zakreśla kąt o mierze $6x$ stopni, a godzinowa $0,5x$ stopni. Zatem po $x$ minutach kąt (zorientowany!) między wskazówką minutową a godzinową rośnie o $6x - 0,5x$ stopni.	1p.
2. stwierdza, że jeśli mamy w pewnym momencie kąt $90^\circ$ i wskazówka minutowa jest przed godzinową, to $130^\circ$ nastąpi, gdy kąt (zorientowany!) między wskazówkami wzrośnie o $220^\circ = 90^\circ + 130^\circ$ . Stąd $6x - 0,5x = 220$ , co daje $x = 40$ minut.  Odp.: Wskazówki utworzą kąt $130^\circ$ za 40 min.	1p.

**Zadanie 8.** (2 pkt)

Liczby  $a$  i  $b$  są nieparzyste i ich różnica wynosi 6. Wykaż, że liczba  $a^2 - b^2$  jest podzielna przez 24.

<p>Uczeń:</p>	
<p>I sposób</p>	<p>1p.</p>
<p>1. zapisuje zależność <math>a - b = 6</math> i wyznacza np. <math>a = 6 + b</math> i podstawia <math>a</math> do wzoru <math>a^2 - b^2 = (6 + b)^2 - b^2</math></p>	<p>1p.</p>
<p>2. przekształca wzór;  <math>(6 + b)^2 - b^2 = (6 + b) \cdot (6 + b) - b^2 = 36 + 12b = 12(3 + b)</math> i wnioskuje o podzielności iloczynu przez <math>24 = 12 \cdot 2</math>, bo drugi czynnik <math>3 + b</math> jest parzysty.</p>	
<p>II sposób</p>	
<p>1. rysuje dwa kwadraty: o boku <math>b</math> i polu <math>P_2 = b^2</math> oraz o boku <math>a = b + 6</math> i polu <math>P_1 = a^2</math></p>	<p>1p.</p>
<div style="text-align: center;">  </div>	
<p>zauważa, że różnica pól kwadratów <math>P_1</math> i <math>P_2</math> to suma pól prostokątów o bokach <math>6</math> i <math>b</math> oraz <math>6 + b</math> i <math>6</math></p>	
<p>2. oblicza różnicę pól <math>a^2 - b^2 = 6b + 6(b + 6) = 6b + 6b + 36 = 12b + 36 = 12(b + 3)</math> i wnioskuje o podzielności przez <math>12 \cdot 2 = 24</math>, bo drugi czynnik <math>(b + 3)</math> jest parzysty.</p>	<p>1p.</p>

**Zadanie 9.** (3 pkt)

Dany jest ułamek  $\frac{a}{b}$ , w którym licznik  $a$  i mianownik  $b$  są liczbami dodatnimi oraz  $a > b$ .

Do licznika i mianownika tego ułamka dodano pewną liczbę dodatnią. Wykaż, że w ten sposób otrzymano ułamek mniejszy od wyjściowego.

<p>Uczeń:</p>	
<p>1. zapisuje nierówność <math>\frac{a}{b} &gt; \frac{a+x}{b+x}</math>, gdzie <math>a</math> – licznik ułamka, <math>b</math> – mianownik ułamka, <math>x</math> - dodana liczba dodatnia,</p>	<p>1p.</p>
<p>2. przekształca nierówność do postaci: <math>\frac{a}{b} - \frac{a+x}{b+x} &gt; 0</math> i sprowadza ułamki do wspólnego</p>	<p>1p.</p>

<p>mianownika stąd <math>\frac{a(b+x)}{b(b+x)} - \frac{b(a+x)}{b(b+x)} &gt; 0</math>,</p> <p>3 wnioskuje, że <math>ab + ax &gt; ab + bx</math>, stąd <math>ax &gt; bx</math> stąd prawdziwa jest nierówność <math>a &gt; b</math>, ujęta w warunkach zadania, zatem ułamek zmniejszył się.</p>	1p.
------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	-----

**Zadanie 10.** (2 pkt)

W równoległoboku  $ABCD$  długość boku  $AB$  jest dwa razy dłuższa od długości boku  $BC$ . Punkt  $E$  jest środkiem odcinka  $CD$ . Uzasadnij, że kąt  $AEB$  jest kątem prostym.

<p>Uczeń:</p> <p>I sposób</p> <p>1. dopełnia równoległobok do rombu o boku <math>2 \cdot  BC </math></p> <div data-bbox="400 837 691 1072" data-label="Image"> </div> <p>2. korzystając z własności przekątnych rombu wnioskuje, że miara kąta <math>AEB</math> jest równa <math>90^\circ</math>.</p> <p>II sposób</p> <p>1. zauważa, że trójkąty <math>AED</math> i <math>BCE</math> są równoramienne (<math> AD  =  DE  =  EC  =  CB </math>).          Jeśli oznaczymy <math> \angle ADE  = \alpha</math>, wówczas <math> \angle BCE  = 180^\circ - \alpha</math>,          zatem <math> \angle AED  = (180^\circ - \alpha) : 2 = 90^\circ - \alpha/2</math> (z sumy kątów w trójkącie równoramiennym <math>ADE</math>) zaś <math> \angle BEC  = \alpha/2</math> (z sumy kątów w trójkącie równoramiennym <math>BCE</math>).</p> <p>2. oblicza <math> \angle AEB  = 180^\circ - (90^\circ - \alpha/2 + \alpha/2) = 90^\circ</math> (kąty <math>\angle AED</math>, <math>\angle AEB</math>, <math>\angle BEC</math> tworzą kąt półpełny).</p>	<p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p> <p>1p.</p>
---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	---------------------------------------------