Mathematics

- คณิตศาสตร์นั้นมีบทบาทสำคัญใน competitive programming และจะเป็นไปไม่ได้เลยที่จะเป็น competitive programmer ที่ประสบความสำเร็จโดยที่ไม่มีทักษะทางด้านคณิตศาสตร์

- ในส่วนนี้จะพูดถึงแนวคิดเชิงคณิตศาสตร์และสูตรที่สำคัญที่ถูกใช้บ่อย

Sum

- ผลรวมนั้นจะอยู่ในรูป

$$\sum_{x=1}^{n} x^k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots n^k$$

- เมื่อ k เป็นจำนวนเต็มบวก
- ทั้งนี้มีรูปแบบปิด ตัวอย่างเช่น
- $\sum_{x=1}^{n} x = 1 + 2 + 3 + \cdots n = \frac{n(n+1)}{2}$
- $\sum_{x=1}^{n} x^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

ลำดับเลขคณิต

- ลำดับเลขคณิต (Arithmetic progression) เป็นลำดับของจำนวนที่ผลต่างระหว่างตัวเลขสองตัวที่ติดกันใดๆ เป็นค่าคงที่ ตัวอย่างเช่น

3, 7, 11, 15

- เป็นลำดับเลขคณิตที่มี "ผลต่างร่วม" 4
- ผลรวมของลำดับเลขคณิตหรือ อนุกรมเลขคณิต สามารถคำนวณได้จากสูตร

$$a + \cdots + b = \frac{n(a+b)}{2}$$

- เมื่อ a เป็นเลขตัวแรก, b เป็นเลขตัวสุดท้าย และ n เป็นจำนวนตัวเลข

- ตัวอย่างเช่น
- 3 + 7 + 11 + 15 = ...
- นอกจากนี้ยังสามารถหาพจน์ที่ n ได้
- ให้ a_1, a_2, a_3,... เป็นลำดับเลขคณิต ผลต่างระหว่างพจน์ที่ n+1 กับพจน์ที่ n มีค่าเป็น d ($d=a_2-a_1$) ดังนั้น
- $a_n = a_1 + (n-1)*d$

ลำดับเรขาคณิต

- ลำดับเรขาคณิต (Geometric progression) คือลำดับของจำนวนที่อัตราส่วนร่วม (common ratio) ระหว่างจำนวนสองจำนวนที่ติดกันเป็นค่าคงที่ ตัวอย่างเช่น
  3,6,12,24 เป็น ลำดับเรขาคณิตที่มี อัตราส่วนร่วมเป็น 2
- ผลรวมของลำดับเรขาคณิตหรืออนุกรมเรขาคณิตสามารถคำนวณได้จากสูตร
- $a + ak + ak^2 + \cdots + b$ มีรูปแบบปิดไหม

- ลองคิดดูว่าสูตร
- $a + ak + ak^2 + \cdots + b = \frac{bk-a}{k-1}$

หามาได้อย่างไร

- ตัวอย่างเช่น
- 3+6+12+24 = ………………..
- นอกจากนี้ยังสามารถหาพจน์ที่ n ได้
- จากสูตร $a_n = a_1 r^{n-1}$
- หมายเหตุ special case ของอนุกรมเรขาคณิต

$$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^{n-1} = 2^n - 1$$

ลำดับฮาร์มอนิก

- อนุกรมฮาร์มอนิกอยู่ในรูปของ
- $\sum_{x=1}^{n} \frac{1}{x} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$
- ขอบเขตบน(Upper bound) ของอนุกรมฮาร์มอนิคคือ $log_2\,(n) + 1$
- เราสามารถแปลงพจน์ $\frac{1}{k}$ เพื่อให้ k กลายเป็นค่าสองยกกำลังที่ใกล้ที่สุดที่ไม่เกิน k ตัวอย่างเช่น ถ้า k=6 เราสามารถประมาณผลรวมได้ดังนี้
- $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} < 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

- ซึ่งได้ upper bound เป็น $\log(n) + 1$
- มากจาก 1, 2*1/2, 4*1/4,... แต่ละเลขซ้ำรวมกันเป็น 1

Set Theory

- Set คือ กลุ่มของสมาชิก ตัวอย่างเช่น เซต
- $X = \{2, 6, 7\}$
- ประกอบด้วยสมาชิก 2,6 และ 7
- เซตที่ไม่มีสมาชิกหรือ เซตว่างแทนด้วย $\emptyset$
- และ $|X|$ แทนขนาดของเซต X หรือจำนวนสมาชิก
- ตัวอย่างเช่น $|X| = 3$

- ถ้าเซต X มี a เป็นสมาชิก เขียนแทนด้วย $a \in X$ หากไม่เป็นสมาชิก เขียนแทนด้วย $a \notin X$
- ตัวอย่างในเซตก่อนหน้าจะได้ว่า $2 \in X$ และ $10 \notin X$
- เซตใหม่สามารถถูกสร้างได้จากการดำเนินการ
- Intersection $A \cap B$ ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A และ B
- Union $A \cup B$ ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A หรือ B
- Complement $\bar{A}$ ประกอบด้วยสมาชิกที่ไม่อยู่ใน A ซึ่งขึ้นกับ universal set ที่มีทุกสมาชิกที่เป็นไปได้
- Difference $A \backslash \mathrm{B} = \mathrm{A} \cap \bar{B}$ประกอบด้วยสมาชิกที่อยู่ใน A แต่ไม่อยู่ใน B

- ถ้าแต่ละสมาชิกของ A เป็นสมาชิกของ S เราจะเรียกว่า A เป็น subset ของ S แทนด้วย $A \subset S$
- เซต S จะมีซับเซต $2^{|S|}$ ซึ่งรวม empty set ตัวอย่างเช่นซับเซตของเซต $\{2, 4, 7\}$ คือ $\emptyset, \{2\}, \{4\}, \{7\}, \{2, 4\}, \{2, 7\}, \{4, 7\}, \{2, 4, 7\}$

- เซตของจำนวนต่างๆ
- N แทน จำนวนธรรมชาติ natural numbers
- Z แทน จำนวนเต็ม integers
- Q แทน จำนวนตรรกยะ rational numbers
- R แทน จำนวนจริง real numbers
- ทั้งนี้ N สามารถนิยามได้สองแบบขึ้นกับเหตุการณ์นั้นคือ
  - N={0,1,2,3,...} หรือ N={1,2,3,...}

นอกจากนี้เรายังสามารถสร้างเซตโดยใช้กฎในรูปนี้ได้

$$\{f(n): n \in S\}$$

เมื่อ $f(n)$ คือบางฟังก์ชัน เซตนี้ประกอบด้วยทุกสมาชิกในรูป $f(n)$ เมื่อ n คือสมาชิกใน S ตัวอย่างเช่น เซต

$$X = \{2n: n \in Z\}$$

เซต X ประกอบด้วยจำนวนเต็มคู่ทุกตัว

Logic

- ค่าของนิพจน์ทางตรรกศาสตร์นั้นเป็นได้ true(1) หรือ false (0)
- ตัวดำเนินการทางตกรรรกศาสตร์ที่สำคัญได้แก่ ¬(negation), ∧(conjunction), ∨(disjunction), →(implication), ↔(equivalence) ตารางด้านล่างแสดงความหมายของการดำเนินการเหล่านี้

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
0	0	1	1	0	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1	0
1	0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	0	1	1	1	1

- ประพจน์ (Proposition) คือข้อความที่สามารถระบุค่าความจริงได้ว่าเป็นจริงหรือเท็จ แต่จะไม่เป็นจริงและเท็จพร้อมกัน
- Predicate เป็นนิพจน์ที่มีค่าเป็นจริงหรือเท็จขึ้นกับ parameter ของมัน Predicate ส่วนใหญ่แทนด้วยตัวอักษรตัวใหญ่ ตัวอย่างเช่น เราสามารถนิยามว่า P(x) มีค่าเป็นจริงถ้า x เป็นจำนวนเฉพาะ
- จากนิยามจะได้ว่า P(7) เป็นจริงแต่ P(8) เป็นเท็จ

- ตัวบ่งปริมาณ(Quantifier) เชื่อมระหว่างนิพจน์ทางตรรกศาสตร์กับสมาชิกของเซต ตัวบ่งปริมาณที่สำคัญได้แก่
- ∀ (for all) และ ∃ (there is, for some)
- ตัวอย่างเช่น
- $\forall x\big(\exists y(y < x)\big)$
- หมายความว่า สำหรับแต่ละสมาชิก x ในเซต จะมีสมาชิก y ในเซตที่ y มีค่าน้อยกว่า x ซึ่งเป็นจริงกับเซตของ integer แต่ไม่จริงสำหรับเซตของ natural numbers

- การใช้สัญลักษณ์ ที่อธิบายไปแล้ว เราสามารถแสดงประพจน์ได้หลายชนิดตัวอย่างเช่น
- $\forall x\big((x > 1 \land \neg P(x)\big) \to (\exists a\big(\exists b(a > 1 \land b > 1 \land x = ab)\big))$
- หมายความว่า ถ้าจำนวน x มีค่ามากกว่า 1 และไม่เป็นจำนวนเฉพาะแล้ว จะมีจำนวน a และ b ที่มีค่ามากกว่า 1 และคูณกันได้ x ซึ่งประพจน์นี้เป็นจริงในเซตของจำนวนเต็ม

Functions

- ฟังก์ชัน $\lfloor x \rfloor$ จะปัดจำนวน x ลงไปเป็นจำนวนเต็มมากที่สุดที่น้อยกว่า x และ $\lceil x \rceil$ จะปัดจำนวน x ขึ้นไปเป็นจำนวนเต็มที่น้อยที่สุดที่มากกว่า x
- ตัวอย่างเช่น
- $\left\lfloor \frac{3}{2} \right\rfloor = 1 \quad \left\lceil \frac{3}{2} \right\rceil = 2$
- ฟังก์ชัน $\min(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ และ $\max(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ จะคืนค่าที่น้อยที่สุดและมากที่สุดจาก $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$
- ตัวอย่างเช่น
  - min(1,2,3) = 1 และ max(1,2,3) = 3

- factorial n! ถูกนิยามได้ด้วย
- $\prod_{x=1}^{n} x = 1 * 2 * 3 * \cdots * n$
- หรือนิยามด้วย recursive
- 0! == 1
- n! = n*(n-1)!

- Fibonacci numbers นั้นเกิดขึ้นได้ในหลายๆ เหตุการณ์ สามารถถูกนิยามได้ด้วย
- $f(0) = 0 \quad f(1) = 1$
- $f(n) = f(n-1)+f(n-2)$
- ซึ่งจะได้ลำดับ 0,1,1,2,3,5,8,13,21,34,55,...
- ยังมี closed-form สำหรับคำนวณ Fibonacci numbers ซึ่งบางครั้งเรียกว่า Binet's formular
- $f(n) = \frac{(1+\sqrt{5})^n - (1-\sqrt{5})^n}{2^n\sqrt{5}}$

Logarithms

- logarithm ของจำนวน x แทนด้วย $\log_k(x)$ เมื่อ k เป็นฐานของ logarithm
- ตามนิยาม $\log_k(x) = a$ เมื่อ $k^a = x$
- คุณสมบัติของ logarithms คือ logk(x) เท่ากับจำนวนครั้งที่เราต้องหาร x ด้วย k ก่อนที่เราจะถึง 1 ตัวอย่างเช่น $\log_2(32) = 5$ เพราะว่านำ 2 ไปหาร 5 ครั้ง
- 32 -> 16 -> 8 -> 4 -> 2 -> 1
- Logarithms นั้นถูกใช้ในการวิเคราะห์อัลกอริทึม เพราะว่าอัลกอริทึมที่มีประสิทธิภาพหลายอันถูกแบ่งครึ่งในแต่ละขั้น ดังนั้น เราสามารถประมาณประสิทธิภาพการทำงานได้โดยใช้ logarithms

- Logarithms ของผลคูณคือ
- $\log_k(ab) = \log_k(a) + \log_k(b)$
- ทำให้ได้ว่า
- $\log_k(x^n) = n*\log_k(x)$
- Logarithms ของผลหารคือ
- $\log_k\left(\frac{a}{b}\right) = \log_k(a) - \log_k(b)$
- อีกสูตรที่ใช้บ่อยคือ
- $\log_u(x) = \frac{\log_k(x)}{\log_k(u)}$

- ซึ่งทำให้เราสามารถคำนวณ logarithms ของฐานใดๆ ได้ ถ้าเรามีวิธีการคำนวณ logarithms ของบางฐาน
- natural logarithms หรือ logarithms ฐานธรรมชาติ ln(x) ของจำนวน x คือ logarithm ที่ฐานเป็น $e \approx 2.71828$
- อีกคุณสมบัติหนึ่งของ logarithms คือ จำนวนหลักของจำนวนเต็ม x ในฐาน b คือ $\lfloor \log_b(x) + 1 \rfloor$
- ตัวอย่างเช่น แทน 123 ฐานสองจะได้ 1111011 นั่นคือ $\lfloor \log_2(123) + 1 \rfloor = 7$