习题课七解答

2019 年 11 月 23 日

[记号] 设 $A=(a_{ij})$ 是 n 阶方阵,$(n\geq 2)$, $C=(c_{ij})$, 其中 c_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式. 记 $A^*=C^T$, A^* 称为 A 的伴随矩阵.

[事实] 代数学基本定理：设 $f(t)=a_0t^n+\cdots+a_n$ 是关于 t 的 n 次多项式，系数 a_i 为复数，$a_0\neq 0$，则 $f(t)$ 恰好有 n 个复数根（记重数）。

习题 1. 设

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

不直接计算 C_{ij}, 求解以下各题:

$$(1)-2C_{11}+2C_{21}+3C_{31}+4C_{41};$$
$$(2)C_{13}+C_{23}+C_{33}+C_{43}.$$

解. (1) 将 D 的第一行换成 $(-2,2,3,4)$ 再求行列式, 等于 0;

(2) 将 D 的第三行换成 $(1,1,1,1)$ 再求行列式, 等于 5. □

习题 2. 设

$$D=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

求 $S_1=C_{12}+2C_{22}$ 和 $S_2=C_{32}+C_{42}$.

解. 由展开定理可知：$D = 3S_1 + S_2$. 把 a_{21}, a_{22} 变成 0，然后求相应的行列式即为 S_2, 等于 -1. 求 $D = 5$, 故 $S_1 = 2$. □

习题 3. *设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶可逆矩阵,$(n \geq 2)$, 求:*

(1) $(A^*)^{-1}$*;*

(2) $(A^{-1})^*$*;*

(3) $(kA)^*$*;*

(4) $(A^*)^*$*.*

解. 由 $AC^T = |A|I$ 可知, $A^* = |A|A^{-1}$

(1) $(A^*)^{-1} = |A|^{-1}A$;

(2) $(A^{-1})^* = |A^{-1}|(A^{-1})^{-1} = |A|^{-1}A$;

(3) $(kA)^* = |kA|(kA)^{-1} = k^{n-1}|A|A^{-1} = k^{n-1}A^*$;

(4) $(A^*)^* = |A^*|(A^*)^{-1} = |A|^{n-1}|A|^{-1}A = |A|^{n-2}A$.

□

习题 4. 设

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}.$$

求 $D'(x)$.

解. 根据大公式

$$\begin{aligned} D'(x) &= \begin{vmatrix} a'_{11}(x) & a'_{12}(x) & a'_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a'_{21}(x) & a'_{22}(x) & a'_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix} \\ &+ \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a'_{31}(x) & a'_{32}(x) & a'_{33}(x) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

□

习题 5. 设 A 为可逆方阵, D 为方阵, 证明:

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

证明. 第一步，首先证明

$$\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A||D|.$$

再由分块矩阵的行初等变换可知

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ -CA^{-1} & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{bmatrix}.$$

因此，

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

□

习题 6. 求如下推广的 n 阶范德蒙行列式:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

解. 将其扩充成一个标准的范德蒙 $n+1$ 阶行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} & x_n^n \\ 1 & y & \cdots & y^{n-2} & y^{n-1} & y^n \end{vmatrix} = D_{n+1} = \prod_{1 \le i \le n} (y - x_i) \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j).$$

原来的行列式为新的矩阵关于 y^{n-1} 的代数余子式的相反数，因此等于 D_{n+1} 关于 y 的次幂的展开式中 y^{n-1} 的系数的相反数, 即为 $(\sum_{1 \le i \le n} x_i) \prod_{1 \le j < k \le n} (x_k - x_j)$. □

习题 7. 设 A 是 n 阶实方阵，求证：存在充分小的 $t > 0$，使得 $A + tI_n$ 是可逆的。*(粗略地说，给定任何一个方阵，总可以做一个微扰，得到可逆矩阵。)*

证明. $A+tI_n$ 可逆当且仅当 $|A+tI_n|\neq 0$. 把 $f(t)=|A+tI_n|$ 看成是 t 的函数. 根据大公式, $f(t)=t^n+\cdots$ 为关于 t 的 n 次多项式，且首项系数为 1.

由代数学基本定理, $f(t)=0$ 至多有 n 个实根。总可以取到充分小的 $t_0>0$, 使得 $f(t_0)\neq 0$, 因此 $A+t_0I_n$ 可逆. □

习题 8. *设 A 是 n 阶实方阵，$\boldsymbol{x}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量，$\lambda\in\mathbb{R}$。若方程 $A\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}$ 有非零解，则称 λ 为 A 的特征值, $\boldsymbol{x}$ 为属于特征值 λ 的特征向量. 求证：A 至多有 n 个不同的特征值.*

证明. 与上一题类似. λ 为 A 的特征值当且仅当 $A-\lambda I_n$ 不可逆, 当且仅当 $|A-\lambda I_n|=0$. 而多项式 $f(t)=|A-tI_n|$ 至多有 n 个实根. □

习题 9. *设 A,B 是 n 阶方阵, A^* 为 A 的伴随矩阵. 求证: $(AB)^*=B^*A^*$.*

证明. (1) 先证明 A,B 都是可逆矩阵的情形: 此时

$$(AB)^*=|AB|(AB)^{-1}=|B||A|B^{-1}A^{-1}=B^*A^*.$$

(2) 利用第七题的微扰法可以证明, 存在一个开区间 $(0,\delta)$, 使得任取 $t\in(0,\delta)$, $A+tI_n, B+tI_n$ 同时可逆. 因此 $((A+tI_n)(B+tI_n))^*=(B+tI_n)^*(A+tI_n)^*$. 注意到这个矩阵等式里的 n^2 项, 其中每一项都是关于 t 的多项式函数. 特别地, 每一项都是 t 的连续函数. 令 $t\to 0$, 得到 $(AB)^*=B^*A^*$. □

习题 10. *设 $A=(a_{ij})$ 是一个主对角线占优的 n 阶实方阵, 即 $a_{ii}>\sum\limits_{1\leq j\leq n, j\neq i}|a_{ij}|$, 对于所有的 $1\leq i\leq n$ 成立. 求证：$|A|>0$.*

证明. 用反证法可知，$A\boldsymbol{x}=0$ 没有非零解，因此 A 可逆, $|A|\neq 0$. 考虑含参数 t 的矩阵 $A(t)=(a(t)_{ij})$, 其中

$$a(t)_{ij}=\begin{cases} t\cdot a_{ij} & i\neq j \\ a_{ii} & i=j \end{cases}$$

当 $t\in[0,1]$ 时, $A(t)$ 也是主对角线占优的矩阵. 因此 $|A(t)|\neq 0$, 对于所有的 $t\in[0,1]$.

设 $f(t)=|A(t)|$, 则 $f(t)$ 是 t 的多项式函数, 因此是连续函数. 我们有 $f(t)\neq 0$, 对于所有的 $t\in[0,1]$. 而且, $f(0)=|A(0)|=\prod\limits_{1\leq i\leq n}a_{ii}>0$. 最后用反证法, 假设 $f(1)=|A(1)|=|A|<0$, 由连续函数介值定理, 一定存在 $t_0\in(0,1)$，使得 $f(t_0)=0$，矛盾。 □

习题 11. *设 Q 是 n 阶正交矩阵, 即 $Q^TQ=QQ^T=I_n$.*

(1) 若 $|Q|<0$，求证：$|Q+I_n|=0$，因此存在非零向量 $\boldsymbol{v}\in\mathbb{R}^n$，使得 $Q\boldsymbol{v}=-\boldsymbol{v}$.

(2) 若 $|Q|>0$, 试分析 $|Q-I_n|=0$ 何时成立.

证明. (1) 考虑 $f(t) = |Q + tI_n|$，其为关于 t 的 n 次多项式，且首项系数为 1. 因为

$$f(0) < 0, \lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty,$$

由连续函数介值定理, 一定存在 $\lambda > 0$, 使得 $f(\lambda) = |Q+\lambda I_n| = 0$, 即 $Q+\lambda I_n$ 不满秩. 因此存在非零向量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$, 使得 $Q\boldsymbol{v} = -\lambda\boldsymbol{v}$. 因为 Q 是正交矩阵, 考虑 $(Q\boldsymbol{v})^T(Q\boldsymbol{v}) = \boldsymbol{v}^TQ^TQ\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$. 另一方面 $(Q\boldsymbol{v})^T(Q\boldsymbol{v}) = \lambda^2\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{v}$. 因此 $\lambda^2 = 1, \lambda = 1$.

(2) 当 n 为奇数时, $|Q - I_n| = 0$ 总成立. 特别地，当 $n = 2$ 时，

$$Q = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix},$$

$\theta \neq 2k\pi$ 时, $|Q - I_2| \neq 0$。 □

习题 12. 设 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵. 取 A 的任意 k 行和任意 k 列构成一个 k 阶方阵, 它的行列式称为 A 的一个 k 阶子式. 定义

$$r_{\det}(A) = \max\{k \mid A \text{ 有一个非零的 } k \text{ 阶子式}\}.$$

求证：$r_{\det}(A) = r(A)$.

证明. 设 $r = r(A)$. 矩阵 A 的列向量组有 r 列是线性无关的, 取出对应的 r 列, 构成一个子矩阵 B, 且 $r(B) = r(A) = r$. 对于矩阵 B, 它的行向量组有 r 行是线性无关的，取出对应的 r 行, 构成一个 r 阶方阵 C, 且 $r(C) = r(B) = r$. 因此 C 是满秩的, 所以 $|C| \neq 0$, 也就是 A 有一个 r 阶子式不为零. 因此 $r_{\det}(A) \geq r$.

设 $r_{\det}(A) = k$, 即 A 存在一个非零的 k 阶子式, 它对应的 k 阶方阵满秩. 由 A 的这 k 列构成的向量组一定线性无关, 因此 $r = r(A) \geq k$.

另证 (大概思路): 直接证 $r_{\det}(A)$ 在初等变换下不变, 然后在相抵标准型上与 $r(A)$ 一样. □

习题 13. 设 A 是 n 阶方阵, 根据 $r(A)$ 的取值, 试分析 $r(A^*)$.

解. 分三种情况:

(1) $r(A) = n$: 此时 A 可逆, $A^* = |A|A^{-1}$ 也可逆，因此 $r(A^*) = n$.

(2) $r(A) < n - 1$: 由上一题知, A 的所有 $n - 1$ 阶子式全为零, 因此 $A^* = 0, r(A^*) = 0$.

(3) $r(A) = n - 1$: 由上一题知，A 有一个 $n - 1$ 阶子式不为零，因此 A 有一个代数余子式不为零，$A^* \neq 0, r(A^*) > 0$. 另一方面, $AA^* = |A|I_n = 0$, 由此推出 $r(A^*) \leq 1$. 因此 $r(A^*) = 1$.

□