2019.10.28 周一晚习题课

2019 年 10 月 28 日

习题 1. 求如下矩阵 A 的 LU 分解, 特别的，给出一个 a, b, c, d 应当满足的限制条件, 使分解可进行。

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

习题 2. 举例说明以下命题都不成立：

(a) $Col(AB) = Col(A)$,

(b) $Col(AB) \subseteq Col(B)$,

(c) $N(B) = N(AB)$,

(d) $N(A) \subseteq N(AB)$,

(e) $Col(A) = Col(A^T)$,

(f) $N(A) = N(A^T)$.

习题 3. *(PS3.1, 32)* 证明：$Col(A) = Col([A\ AB])$. 一个 n 阶方阵 A 满足 $Col(A) = \mathbb{R}^n$ 当且仅当 A 是一个 _______ 矩阵。一般的，一个 $m \times n$ 阶矩阵 A 满足 $Col(A) = \mathbb{R}^m$ 当且仅当 $r(A) =$ ___. 构造一个方阵 A 使得 $Col(A^2) \subsetneq Col(A)$.

习题 4. 试证：若 $N(B) = N(AB)$, 则 $\forall C$, $N(BC) = N(ABC)$.

习题 5. 设 $A \in M_{m\times k}(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times \ell}(\mathbb{R})$, 试证：$Col(A) \subseteq Col(B)$ 的充要条件是 $\exists C \in M_{\ell\times k}(\mathbb{R})$ 使得 $A = BC$.

习题 6. 用上题证明：若 $Col(AB) = Col(A)$，则 $\forall C$, $Col(CAB) = Col(CA)$.

习题 7. 设 $A \in M_n(\mathbb{R})$, 考虑 $\mathbb{R}^n$ 中子空间的升链

$$N(A) \subseteq N(A^2) \subseteq N(A^3) \subseteq \cdots$$

和子空间的降链

$$Col(A) \supseteq Col(A^2) \supseteq Col(A^3) \supseteq \cdots$$

试证：

1. 若 $N(A^k) = N(A^{k+1})$，则 $N(A^{k+1}) = N(A^{k+2})$.

2. 若 $Col(A^k) = Col(A^{k+1})$，则 $Col(A^{k+1}) = Col(A^{k+2})$.

习题 8. 若 A, B, C 是某个集合 S 的子集，在集合论里我们有交与并的分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

子空间的交与和是否有分配律呢？也就是说，如果 U_1, U_2, U_3 是线性空间 V 的子空间，那么是否有

$$U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)?$$

习题 9. 证明：子空间的和有结合律和交换律，也就是说

1. $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$,

2. $U_1 + U_2 = U_2 + U_1$.

用这两个性质，我们可以定义任意有限个子空间的和 $U_1 + U_2 + \cdots + U_k$.