【往年试题】

清华大学本科生考试试题专用纸

Xxxx 级微积分 B（1）试题（x 卷）

班级　　　　姓名　　　　学号

一、填空题（每题 4 分，共 10 题，计 40 分）

1． $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{1-\sqrt{1+x^2}}=$______.

答案：1

2. $\int\dfrac{x+1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=$______$+C$.

答案：$3\ln|x-2|-2\ln|x-1|$

3．数列$\left\{\dfrac{(n+1)^3}{(n-1)^2}\right\}(n=2,3,\cdots)$的最小项的项数为$n=$______.

答案：5

4. 设$f(x)=x^2\mathrm{e}^x$，则$f^{(10)}(x)=$______.

5. 设数列$\{a_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$．又$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k(n=1,2,\cdots)$无界，则幂级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛域是______ .

答案：$[0,2)$

6．若$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\int_a^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，则$a=$______.

答案：

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=$______.

8. 函数$f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\pi,\\ -1, & -\pi<x<0\end{cases}$的以$2\pi$为周期的 Fourier 级数是______.

答案：

9. 当且仅当参数$p,q$满足______时，数项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\ln^q n}$收敛.

10. 叙述函数项级数一致收敛的定义．函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 $I$ 一致收敛于 $S(x)$ 是指：________________.

二、解答题（共 6 题，每题 10 分，计 60 分）

注：16（Ⅲ）是附加题，解答正确得 5 分.

11．已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有一阶导数，且满足条件

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\mathrm{e}^{x^2}\sin x}{x^2}\right)=1 .$$

求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的一阶带皮亚诺型余项的泰勒公式.

解：因为

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+o(x),$$

$$\mathrm{e}^{x^2}\sin x=[1+x^2+o(x^2)]\cdot[x+o(x^2)]$$

$$=x+o(x^2),$$

所以

$$\frac{f(x)}{x}+\frac{\mathrm{e}^{x^2}\sin x}{x^2}=\frac{f(0)+f'(0)x+o(x)}{x}+\frac{x+o(x^2)}{x^2}$$

$$=\frac{f(0)+1}{x}+f'(0)+\frac{o(x)}{x}+\frac{o(x^2)}{x^2} .$$

又因为 $\lim_{x\to 0}\left(\frac{f(x)}{x}+\frac{\mathrm{e}^{x^2}\sin x}{x^2}\right)=1$，所以 $\lim_{x\to 0}\frac{f(0)+1}{x}=1-f'(0)$，

所以 $f(0)=-1$，$f'(0)=1$.

故 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的一阶带皮亚诺型余项的泰勒公式为

$$f(x)=-1+x+o(x) .$$

12. 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}x^n$ 的收敛域及和函数.

解：因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{n+3}{n+2}\cdot\frac{n+1}{n+2}=1$，所以幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}x^n$ 的收敛半径为 $R=1$.

又因为当 $x=\pm 1$ 时，级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}x^n$ 均不收敛，所以其收敛域为 $(-1,1)$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^n\ .$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}\ x\in(-1,1)\ .$$

记 $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n+1}x^{n+1}$，则 $S'(x)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n=\frac{1}{1+x}\ x\in(-1,1)$ .

因为 $S(0)=0$，所以 $S(x)=\int_0^x\frac{1}{1+t}\mathrm{d}t=\ln(1+x)$ .

从而 $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}x^n=\begin{cases}\frac{1}{1+x}+\frac{\ln(1+x)}{x}, & x\in(-1,0)\cup(0,1),\\ 2, & x=0.\end{cases}$

13．证明 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$，并计算定积分 $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$ .

解：令 $x=\frac{\pi}{2}-t$，得 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{6}}\frac{\sin^2 t}{(\frac{\pi}{2}-t)2t}(-\mathrm{d}t)=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 t}{(\pi-2t)t}\mathrm{d}t$ .

所以 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$ .

从而 $I=\frac{1}{2}\left[\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\sin^2 x}{(\pi-2x)x}\mathrm{d}x\right]$

$$=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\left(\frac{1}{x}+\frac{2}{\pi-2x}\right)\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{2\pi}\ln\frac{x}{\pi-2x}\Bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}$$

$$=\frac{\ln 2}{\pi}\ .$$

14. 已知曲线段 $L$: $y=\ln x$（$1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$），有界区域 $D$ 由 $L$ 与 $x$ 轴及直线 $x=\sqrt{3}$ 围成.

（Ⅰ）求 $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所成的旋转体的体积；

（Ⅱ）求曲线段 $L$ 的长.

解：（Ⅰ） $D$ 绕 $x$ 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$V=\int_1^{\sqrt{3}}\pi\ln^2 x\mathrm{d}x=\pi x\ln^2 x\Big|_1^{\sqrt{3}}-2\pi\int_1^{\sqrt{3}}\ln x\mathrm{d}x$$

$$=\pi\sqrt{3}\ln^2\sqrt{3}-2\pi(x\ln x-x)\Big|_1^{\sqrt{3}}$$

$$=\pi\sqrt{3}\ln^2\sqrt{3}-2\pi(\sqrt{3}\ln\sqrt{3}-\sqrt{3}+1)\ .$$

（Ⅱ）曲线段 $L$ 的长为

$$l=\int_1^{\sqrt{3}}\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\mathrm{d}x\overset{x=\tan t}{=}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin t\cdot\cos^2 t}\mathrm{d}t$$

$$\overset{u=\cos t}{=}\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{1}{(1-u^2)u^2}\mathrm{d}u$$

$$=\left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+u}{1-u}-\frac{1}{u}\right)\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

$$=\ln\frac{2+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}+2-\sqrt{2}\ .$$

15．已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\ a]$ $(a>0)$ 上可导，且点 $(0,0),(a,a)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上.
证明：

（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,\ a)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{a}{2}$；

（Ⅱ）存在两个不同的点 $\eta_1,\eta_2\in(0,\ a)$，使得 $\dfrac{1}{f'(\eta_1)}+\dfrac{1}{f'(\eta_2)}=2$ .

证：（Ⅰ）因为 $f(x)$ 在区间 $[0,\ a]$ 上可导，所以连续.
又因为 $f(0)=0, f(a)=a$，

根据连续函数的介值定理，存在 $\xi\in(0,\ a)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{a}{2}$ .

（Ⅱ）因为 $f(x)$ 在区间 $[0,\ a]$ 上可导，$\xi\in(0,\ a)$，分别在区间 $[0,\ \xi]$ 和 $[\xi,\ a]$ 对 $f(x)$ 应用微分中值定理，存在 $\eta_1\in(0,\ \xi)$，$\eta_2\in(\xi,\ a)$，使得

$$f(\xi)-f(0)=f'(\eta_1)\xi\ ,$$

$$f(a)-f(\xi)=f'(\eta_2)(a-\xi)\ .$$

即 $\dfrac{\frac{a}{2}}{f'(\eta_1)}=\xi$，$\dfrac{\frac{a}{2}}{f'(\eta_2)}=a-\xi$ .

两式相加并整理，得 $\dfrac{1}{f'(\eta_1)}+\dfrac{1}{f'(\eta_2)}=2$ .

16. 已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{e^x-1}{x}$， $x_1=1$， $x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$ .

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间;

（Ⅱ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ .

（III）（附加题）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.

解：当 $x\neq 0$ 时， $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}$ .

令 $g(x)=xe^x-e^x+1$，则 $g'(x)=xe^x$ .

易知 $g(x)=xe^x-e^x+1>g(0)=0$， $x\neq 0$ .

当 $x\neq 0$ 时，又因为 $x(e^x-1)>0$，所以 $f'(x)=\dfrac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}>0$ .

故 $f(x)$ 的单调递增区间是 $(-\infty,0)$ 和 $(0,+\infty)$ .

（Ⅱ）因为 $x_1=1$，所以 $x_2=f(x_1)=\ln\dfrac{e-1}{1}<1$，故 $0<x_2<x_1$ .

由于函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单增，且 $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\ln\dfrac{e^x-1}{x}=0$，所以

$$0<x_3=f(x_2)<f(x_1)=x_2 .$$

由归纳法可知，数列 $\{x_n\}$ 是单减数列且 $0$ 是其下界，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

记 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则 $A=\inf\{x_n\}\geqslant 0$ .

若 $A>0$，由 $x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$ 及 $f(x)$ 在 $x=A$ 处连续，得 $A=f(A)$ .

这与 $f(A)=\ln\dfrac{e^A-1}{A}<A$ 矛盾. 所以 $A=0$ .

（III）因为 $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xe^x-e^x+1}{x(e^x-1)}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{xe^x}{2x}=\dfrac{1}{2}$，

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{f(x_n)}{x_n}=\dfrac{1}{2}$ .

由比值判敛法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.