注：2019 春季

多元微分学与重积分学习的有关问题

★课程内容　　★★常见问题　　★★★典型函数或典型问题

教学内容

多元微分学	多元函数微分学	空间点集，多元函数的概念、极限、连续
		多元函数的偏导数、全微分、方向导数、梯度
		多元函数的微分法
		高阶全微分、泰勒公式
	多元微分学应用	曲线的切线及法平面
		曲面的切平面及法线
		多元函数极值点的概念、必要条件、充分条件
		多元函数的条件极值问题、拉格朗日乘子法
多元积分学之数值函数的积分	重积分	重积分的概念
		重积分的性质
		二重积分的计算、三重积分的计算
		重积分的几何应用、重积分的物理应用
		*含参积分
	第一型线面积分	第一型曲线积分
		第一性曲面积分

多元函数微分学内容之一：

空间点集	距离 $\mathrm{d}(P_1,P_2)$，点列的极限 $\lim\limits_{k\to\infty} P_k = P^*$，有界点集
	邻域，内点、外点、边界点、聚点
	开集、闭集，连通、区域、闭区域
多元函数	多元函数的概念
	多元函数的图形，二元函数的等值线、三元函数的等值面

多元函数微分学内容之二：

多元函数的极限	重极限 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=A$， $P\to P_0 \Leftrightarrow \mathrm{d}(P,P_0)\to 0$
	累次极限 $\lim\limits_{y\to y_0}\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\neq y_0}} f(x,y)$，重极限与累次极限的关系
	求重极限的常用方法，说明重极限不存在的常用方法
多元函数的连续性	点连续的概念 $\lim\limits_{P\to P_0} f(P)=f(P_0)$、区域上一致连续的概念
	连续函数的运算性质、多元初等函数的连续性
	区域上连续函数的零点存在性， 有界闭域（集）上连续函数最值的存在性 有界闭域（集）上连续与一致连续的等价性

多元函数微分学内容之三：

多元函数的偏导数	偏导数的概念 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right\|_{(x_0,y_0)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x,y_0)-f(x_0,y_0)}{x-x_0}$ 偏导数的几何意义 具体表达式函数偏导数的求法
	高阶偏导数 $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}=\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)$， 混合偏导数与求导顺序无关的条件
多元函数的全微分	全微分概念 $f(x,y)=f(x_0,y_0)+\mathrm{d}f(x_0,y_0)+o(\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2})$ 全微分的几何意义 $z=f(x_0,y_0)+\mathrm{d}f(x_0,y_0)$
	全微分存在的必要条件、全微分计算公式 $\mathrm{d}f(a,b)=\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}\mathrm{d}y$ *证明不可微的常用方法
	全微分存在的充分条件 全微分存在的充要条件： $\Delta f(a,b)=\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial x}\Delta x+\dfrac{\partial f(a,b)}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$， 其中 $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_1=0$， $\lim\limits_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}}\varepsilon_2=0$

多元函数微分学内容之四：

多元函数的微分法	复合函数微分法 一阶全微分的形式不变性	
	隐函数（组）存在定理	
高阶全微分*	一阶全微分 $$\mathrm{d}f(x,y)=\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}y=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)f(x,y)$$	
	二阶全微分 $$\mathrm{d}^2 f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^2 f(x,y)$$	
	m 阶全微分 $$\mathrm{d}^m f(x,y)=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{d}y\right)^m f(x,y)=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\frac{\partial^m f(x,y)}{\partial x^k\partial y^{m-k}}\mathrm{d}x^k\mathrm{d}y^{m-k}$$	

多元函数微分学内容之五：

多元函数的方向导数	方向导数的概念 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right\|_{(a,b)}=\lim\limits_{t\to 0}\frac{f(a+t\cos\alpha,b+t\sin\alpha)-f(a,b)}{t}$ 注：$\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right\|_{(a,b)}=\lim\limits_{t\to 0^+}\frac{f(a+t\cos\alpha,b+t\sin\alpha)-f(a,b)}{t}$
	方向导数的计算 $\frac{\partial f(a,b)}{\partial l}=\frac{\partial f(a,b)}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f(a,b)}{\partial y}\sin\alpha$
多元函数的梯度向量	**梯度向量的概念** $\frac{\partial f(a,b)}{\partial l_0}=\max\limits_{\\|l\\|=1}\{\frac{\partial f(a,b)}{\partial l}\}$，$\mathrm{grad}f(a,b)=\frac{\partial f(a,b)}{\partial l_0}\boldsymbol{l}_0$
	梯度向量的计算 $\mathrm{grad}f(a,b)=(\frac{\partial f(a,b)}{\partial x},\frac{\partial f(a,b)}{\partial y})$
	梯度向量与方向导数 $\frac{\partial f(a,b)}{\partial l}=\mathrm{grad}f(a,b)\cdot\boldsymbol{l}$ 梯度向量与等值线（等值面）的关系

多元函数微分学内容之六：

<table>
<tr><td rowspan="3">$\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ **的映射***</td><td>映射的概念、极限（收敛）、连续、偏导数、全微分，
导数、定积分</td></tr>
<tr><td>**Jacobi 矩阵** $\dfrac{\partial(y_1,y_2,\cdots,y_m)}{\partial(x_1,x_2,\cdots,x_n)} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial y_m}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\boldsymbol{x}_0}$

Jacobi 行列式 $\dfrac{\mathrm{D}(y_1,y_2,\cdots,y_n)}{\mathrm{D}(x_1,x_2,\cdots,x_n)}$</td></tr>
<tr><td>**复合映射的微分法** $J\big(\boldsymbol{f}\circ\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\big) = J\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{u}_0)\big)J\big(\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}_0)\big)$

逆映射的微分法 $J\big(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\big)J\Big(\boldsymbol{f}^{-1}(\boldsymbol{y})\Big) = E$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">**多元函数的泰勒公式**</td><td>$$f(x,y) = f(a,b) + \left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right) f(a,b)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^2 f(a,b)$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{\partial}{\partial x}(x-a) + \frac{\partial}{\partial y}(y-b)\right)^n f(a,b) + o(\rho^n),$$</td></tr>
<tr><td>0 阶情形
$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a,b) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a+\theta\Delta x, b+\theta\Delta y)$$</td></tr>
<tr><td>**1** 阶情形
$$f(a+\Delta x, b+\Delta y) = f(a,b) + \left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right) f(a,b)$$
$$+\frac{1}{2}\left(\Delta x\frac{\partial}{\partial x} + \Delta y\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(a+\theta\Delta x, b+\theta\Delta y)$$</td></tr>
</table>

多元函数微分学常见的问题及一般求解方法

常见问题	一般求解方法
极限问题	如何判断函数在一点极限不存在（特殊路径法）$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{x^2+y^2}{x+y}$
	如何求极限值（夹逼定理、转化为一元函数极限）
	如何利用极限性质（保号性）
连续函数的问题	如何证明存在点满足等式（零点定理、介值定理）
	如何证明存在点满足不等式（最值定理、保号性）
偏导数的问题	利用偏导数定义说明偏导数不存在 利用函数关于 x 不连续说明关于 x 的偏导数不存在
	利用偏导数定义求偏导数 利用四则运算法则求偏导数 利用链导法则求偏导数 利用一阶全微分的形式不变性求偏导数 注：求高阶偏导数要注意的问题
全微分的问题	利用全微分计算公式求全微分
	利用可微与连续、可微与可导的关系说明不可微
	利用全微分定义及全微分与偏导数的关系说明不可微或求全微分
	利用可微的充要条件处理相关问题

方向导数的问题	利用方向导数计算公式求方向导数 利用定义求方向导数
	利用方向导数反映的函数性质处理相关问题
梯度的问题	利用计算公式求梯度
	利用梯度反映的函数性质处理相关问题
映射的问题	利用定义求 Jacobi 矩阵 利用链导法则求 Jacobi 矩阵 会求逆映射的 Jacobi 矩阵
泰勒公式问题	会写简单函数的低阶泰勒多项式（公式）
	利用泰勒多项式处理相关问题或做近似计算

几个典型函数：

（1） $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

在原点，累次极限存在、二重极限不存在、不连续、偏导数存在

（2） $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

在原点，累次极限存在、二重极限存在、连续、偏导数存在、不可微

$$\frac{\partial f(0,0)}{\partial l}=\frac{1}{2\sqrt{2}}，\quad \frac{\partial f(0,0)}{\partial x}\times\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=0\neq\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

（3） $$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

在原点，累次极限存在、二重极限存在、连续、偏导数存在、可微

（4） $$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

在原点，累次极限存在、二重极限存在、连续、偏导数存在、可微、偏导数不连续

（5） $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

在原点，累次极限存在、二重极限存在、连续、偏导数存在、可微、二阶混合偏导数不同

（6） $f(x,y)=\begin{cases} 1, & y=x^3, x\neq 0, \\ 0, & \text{otherwise}. \end{cases}$

在原点，累次极限存在、二重极限不存在、沿任意方向的方向导数存在、不连续

（7） $f(x,y)=\begin{cases} xy, & xy\neq 0, \\ y, & x=0, \\ x, & y=0 \end{cases}$

在原点，$(\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial x},\dfrac{\partial f(0,0)}{\partial y})$ 不是梯度

多元函数微分学应用内容之一：

几何应用：曲线的切线与法平面	基本概念：切向量、切线、法平面
	参数方程给出曲线的切向量 $\boldsymbol{T}=(x'(t_0),y'(t_0),z'(t_0))$
	一般方程给出曲线的切向量 $\boldsymbol{T}=\mathrm{grad}F\times\mathrm{grad}G=\left(\begin{vmatrix}F_y & F_z\\ G_y & G_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_z & F_x\\ G_z & G_x\end{vmatrix},\begin{vmatrix}F_x & F_y\\ G_x & G_y\end{vmatrix}\right)$
几何应用：曲面的法线与切平面	基本概念：切平面、法线
	一般（隐式）方程给出曲面的法向量 $\boldsymbol{n}=(F_x,F_y,F_z)=\mathrm{grad}F$ 显式方程给出曲面的法向量 $\boldsymbol{n}=(-f_x,-f_y,1)$
	参数方程给出曲面的法向量 $\boldsymbol{n}=(x_u,y_u,z_u)\times(x_v,y_v,z_v)=(\dfrac{\mathrm{D}(y,z)}{\mathrm{D}(u,v)},\dfrac{\mathrm{D}(z,x)}{\mathrm{D}(u,v)},\dfrac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)})$

多元函数微分学应用内容之二：

多元函数的极值	基本概念：（严格）极值、（严格）极值点、边界极值（点）
	可导极值点的必要条件、驻点
	判断驻点是极值点的充分条件 说明驻点不是极值点的常用方法
	与一元函数的不同： （1）唯一极值点不见得是最值点 （2）可以只有多个极小值或只有多个极大值
多元函数的条件极值	条件问题的描述（目标函数、约束函数）， 二元函数、三元函数条件极值问题的几何背景
	条件极值点的必要条件 （目标函数梯度与约束函数梯度的关系）
	拉格朗日乘子法求解条件极值问题 *如何判断拉格朗日乘子函数的驻点是否是条件极值问题的解
	有界闭域上最值问题的解法
	*最小二乘法

多元函数微分学应用常见的问题及一般求解方法

常见问题	一般求解方法
切线问题	已知曲线方程求切线方程
	已知切线的方向向量，求切点及切线方程
	求曲线与曲线、曲线与曲面在相交处的夹角
切平面问题	已知曲面方程求切平面方程
	讨论两张曲面在交线处相切、垂直的问题
	讨论切平面与其他直线、平面的位置关系
极值问题	二元显函数求极值的一般方法 *当充分条件不满足时，如何判断驻点是否是极值点？
	二元隐函数求极值的一般方法
条件极值问题	利用直接法求解条件极值问题
	利用拉格朗日乘子法求解条件极值问题

	利用条件极值问题处理一些简单的实际问题
	*利用条件极值求证不等式问题
	*利用条件极值问题的不要条件处理函数的相关问题
最值问题	有界闭域上求函数最值的一般方法

几个典型函数：

（1）$f(x,y)=xy$

原点是驻点，但不是极值点

（2）$f(x,y)=x^2-3x^2y+y^3$

三个驻点均不是极值点，$(0,0)$ 不是极值点的判断（$f(0,y)$）

（3）$f(x,y)=x^4+y^4-x^2-2xy-y^2$

原点是驻点，但不是极值点。$(0,0)$ 不是极值点的判断（$f(x,x)$ 与 $f(x,-x)$）

（4）$f(x,y)=(y-x^2)(y-2x^2)$

$f(x,kx)$ 在 $x=0$ 取到极小值，但 $f(0,0)$ 不是 $f(x,y)$ 的极小值

（5）$f(x,y)=3(x^2+y^2)-x^3$

原点是唯一极小值点，但不是最值点

数值函数的积分内容之一：

重积分的概念	曲顶柱体的体积，二重积分的定义 $$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k)\Delta\sigma_k$$
	物体的质量，三重积分的定义 $$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta V_k$$
	重积分的几何意义，多元函数的平均值
	重积分存在的必要条件，重积分存在的充要条件，连续函数的可积性
	如何利用定义求积分值，如何利用定义或充要条件说明不可积
重积分的性质	线性运算性质、乘积函数的可积性
	区域可加性
	区域对称性
	比较定理、估值定理，绝对值函数的可积性
	积分中值定理

数值函数的积分内容之二：

二重积分的计算	直角坐标系中，二重积分化为累次积分 $$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y$$ $$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_c^d \mathrm{d}y\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x$$ 注：累次积分交换积分次序
	二重积分的变量替换 $$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(x(u,v),y(u,v))\left\|\frac{\mathrm{D}(x,y)}{\mathrm{D}(u,v)}\right\|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
	极坐标系中，二重积分化为累次积分 $$\iint\limits_{D} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1} f(r\cos\theta, r\sin\theta)\cdot r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$ 注：广义极坐标

数值函数的积分内容之三：

<table>
<tr><td rowspan="4">三重积分的计算</td><td>直角坐标系中，三重积分化为累次积分
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint\limits_{D_{xy}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_a^b\mathrm{d}z\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
注：累次积分交换积分次序</td></tr>
<tr><td>三重积分的变量替换
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega_1} f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\left|\frac{\mathrm{D}(x,y,z)}{\mathrm{D}(u,v,w)}\right|\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$$</td></tr>
<tr><td>柱坐标系中的三重积分
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega_1} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\bullet r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$
注：广义柱坐标</td></tr>
<tr><td>球坐标系中的三重积分
$$\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint\limits_{\Omega_1} f(r\sin\varphi\cos\theta,r\sin\varphi\sin\theta,r\cos\varphi)\bullet r^2\sin\varphi\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$
注：广义球坐标</td></tr>
</table>

数值函数的积分内容之四：

<table>
<tr><td rowspan="3">重积分的几何应用</td><td>平面域的面积、空间体的体积</td></tr>
<tr><td>显式方程 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in D$ 下曲面面积的计算
$$\lim_{\lambda\to 0}\sum\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\Delta D=\iint\limits_{D}\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$</td></tr>
<tr><td>参数方程 $\begin{cases}x=x(u,v),\\ y=y(u,v),(u,v)\in D\\ z=z(u,v)\end{cases}$ 下曲面面积的计算
$$S=\iint\limits_{D}\sqrt{A^2+B^2+C^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v\text{，}\quad S=\iint\limits_{D}\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$</td></tr>
<tr><td>重积分的简单物理应用</td><td>质心问题 $\overline{x}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} x\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$，</td></tr>
</table>

	$\bar{y}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} y\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$，$\bar{z}=\dfrac{\iiint\limits_{\Omega} z\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}$
	引力问题 $F_x=\iiint\limits_{\Omega} G\dfrac{\rho(x,y,z)}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}\cdot\dfrac{x-x_0}{\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$
	转动惯量问题 $J_x=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)(y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， $J_y=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)(x^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$， $J_z=\iiint\limits_{\Omega}\rho(x,y,z)(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

数值函数的积分内容之五：

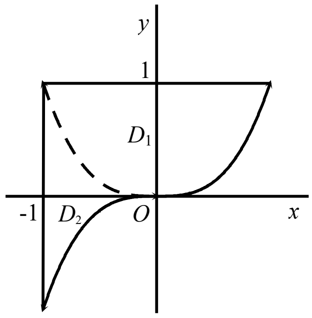
第一型曲线积分	概念：绳索的质量、特殊柱面的面积，定义 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}l=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta l_k$ 性质：与方向无关！
	空间曲线积分的计算 $\int_L f(x,y,z)\mathrm{d}l=\int_{\alpha}^{\beta} f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2+z'(t)^2}\,\mathrm{d}t$
	平面曲线积分的计算 L： $y=y(x)\in C^1[a,b]$， $\int_L f(x,y)\mathrm{d}l=\int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+y'(x)^2}\,\mathrm{d}x$； L： $r=r(\theta)\in C^1[\alpha,\beta]$， $\int_L f(x,y)\mathrm{d}l=\int_{\alpha}^{\beta} f(r(\theta)\cos\theta,r(\theta)\sin\theta)\sqrt{r(\theta)^2+r'(\theta)^2}\,\mathrm{d}\theta$
第一型曲面积分	概念：曲面物体的质量，定义 $\iint\limits_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(x_k,y_k,z_k)\Delta S_k$ 性质：与方向无关！

	参数方程下曲面积分的计算 $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D} f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$
	显式方程下曲面积分的计算 $$\iint_{\Sigma} f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint_{D} f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
*含参积分问题	

数值函数积分常见的问题及一般求解方法

常见问题	一般求解方法
二重积分问题	利用性质处理二重积分的相关问题
	化二重积分为先 y 后 x 的累次积分
	化二重积分为先 x 后 y 的累次积分
	累次积分交换积分次序
	在极坐标系下化二重积分为累次积分（广义极坐标）
	利用变量替换将二重积分化为累次积分（或处理相关问题）
三重积分问题	利用性质处理三重积分的相关问题
	化三重积分为先定积分后二重积分的累次积分
	化三重积分为先二重积分后定积分的累次积分
	在柱坐标系下化三重积分为累次积分（广义柱坐标）
	在球坐标系下化三重积分为累次积分（广义球坐标）
	利用变量替换将三重积分化为累次积分（或处理相关问题）
	讨论切平面与其他直线、平面的位置关系
重积分应用问题	求面积（平面区域、曲面）
	求体积（利用二重积分、利用三重积分）
	求质心（平面薄板、空间物体）
	求关于坐标轴的转动惯量（平面薄板、空间物体）
第一型曲线积分问题	化曲线积分为定积分（空间曲线、平面曲线）
	利用曲线积分求特殊柱面的面积
	简单应用问题
第一型曲面积分问题	化曲面积分为二重积分（显式方程、参数方程）
	简单应用问题（曲面面积、质量、质心、转动惯量等）
*含参积分问题	

几个典型问题：



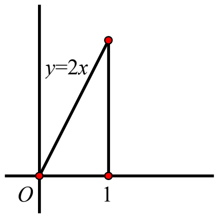
（1）设有界闭域 D 由曲线 $y=x^3$ 与直线 $y=1$ 及 $x=-1$ 围成，计算二重积分 $I=\iint\limits_D xy\ln(1+x^2+y^2)\mathrm{d}\sigma$.

注：对称性！

（2） $f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\text{是有理点},\\ -1, & (x,y)\text{非有理点}.\end{cases}$

注：说明有界函数不见得可积；说明绝对值函数可积、原来函数不见得可积

（3）计算二重积分 $I=\iint\limits_D\sqrt{4x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma$，其中 D 由直线 $y=0$， $x=1$ 和 $y=2x$ 围成.

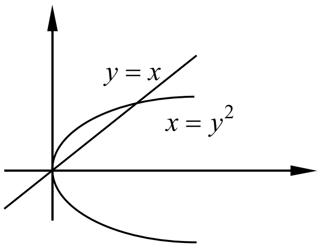


注：先 y 后 x 积分次序简单！几何意义

解： $I=\iint\limits_D\sqrt{4x^2-y^2}\,\mathrm{d}\sigma=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{2x}\sqrt{4x^2-y^2}\,\mathrm{d}y=\int_0^1\frac{1}{4}\pi(2x)^2\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\pi$.

（4）设平面区域 D 由直线 $y=x$ 与抛物线 $x=y^2$ 围成，计算二重积分 $\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

注：先 x 后 y 积分次序简单！



解：因为 $D=\{(x,y)\mid y^2\leqslant x\leqslant y,0\leqslant y\leqslant 1\}$，所以

$$\iint\limits_D\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}y\int_{y^2}^{y}\frac{\sin y}{y}\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^1(1-y)\sin y\mathrm{d}y=-\cos y\Big|_0^1+y\cos y\Big|_0^1-\int_0^1\cos y\mathrm{d}y=1-\cos 1+\cos 1-\sin 1=1-\sin 1 .$$

（5）已知函数 f 连续， $D=\{(x,y)\,\|x|+|y|\leqslant 1\}$. 将二重积分 $\iint\limits_D f(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为定积分.

注：变量替换 $\begin{cases}u=y+x,\\ v=y-x,\end{cases}$

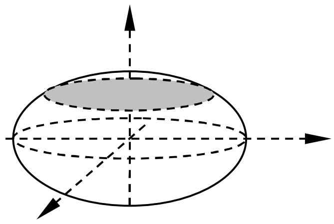
（6）设Ω是椭球体$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$.

（A）求Ω的体积V；

（B）计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

（C）计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$；

（D）计算三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x+y+z)^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.



注：如何选取合适的积分次序；灵活运用对称性质

（7）Ω由锥面$z=\sqrt{x^2+y^2}$与平面$z=1$围成;

Ω由曲面$z=\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)$与平面$z=2$和$z=8$围成;

Ω是上半球体$x^2+y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant 0$.

注：Ω中点的柱坐标的联立不等式表示

（8）$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2+z^2\leqslant 1\}$；

Ω由$z=\sqrt{x^2+y^2}$与$z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$；

Ω由曲面$(x^2+y^2+z^2)^2=az\ (a>0)$围成.

注：Ω中点的球坐标的联立不等式表示