

样题（二）

说明：

1. 样题仅供学生熟悉考试形式。因教学进度等方面的差异，样题对实际考试内容、考试难度等无任何指导。

题1 (8分). 判断以下矩阵是否可以相似对角化，并简单说明理由。

$$(a) \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 100 \end{bmatrix} \quad (c) \begin{bmatrix} 23 & 69 & 188 \\ 69 & 45 & 202 \\ 188 & 202 & 68 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$$

题2 (8分). 判断以下实对称阵是否正定，并简单说明理由。

$$(a) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \quad (b) \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$
$$(c) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (d) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

题3 (10分). 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ ，分别找出 $N(A)$, $N(A^T)$, $C(A)$, $C(A^T)$ 的一组基。

题4 (5分). 设 $P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 求 P 的特征多项式，并说明理由。

题5 (16分). 设

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

等号右边的第一个矩阵记为 Q , 第二个矩阵记为 R .

(1) (2分) 验证 $Q^T Q = I$.

(2) (6分) 求到 $C(A)$ 的投影矩阵。

(3) (8分) 设 $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. 求 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的最小二乘解。

题6 (6分). 已知: 整数1653, 2581, 3451, 4582可以被29整除. 证明下面的四阶行列式值被29整除.

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

题7 (6分). 解关于 x 的方程

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$$

题8 (6分). 定义 $M_2(\mathbb{R})$ 上线性变换 $T: M_2(\mathbb{R}) \rightarrow M_2(\mathbb{R})$ 满足

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

求 T 在基 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵。

题9 (20分). 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(a) (10分) 求 A 的奇异值分解 $A = U\Sigma V^T$, 其中 U 是3阶正交阵, V 是2阶正交阵。

(b) (2分) 应用(a)写出 A 的四个基本子空间的一组标准正交基。

(c) (8分) 设 $M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$. 若 $A\mathbf{v} = \sigma\mathbf{u}$, 其中 \mathbf{u}, \mathbf{v} 是奇异向量(singular vector), σ 是奇异值(singular value), 证明 $\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}$ 是 M 的特征向量, 并由此应用 A 的奇异向量给出5阶正交阵 Q , 使得 $Q^T M Q$ 是对角阵.

题10 (10分). 在以下两题中选且仅选一道题完成。

(1) $C: 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 6x_2^2 = 1$ 是实平面上哪种二次曲线, 椭圆、双曲还是抛物线? 若 C 是椭圆, 请算出它的长、短轴长, 以及长、短轴所在的直线方程; 若 C 是双曲线, 请算出它的虚、实轴长以及虚、实轴所在的直线方程, 以及两条渐近线方程; 若 C 是抛物线, 请算出它的顶点以及对称轴方程。

(2) 令 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$. 求4阶正交阵 Q 和对角阵 Λ 使得 $Q^T A Q = \Lambda$.

题11 (5分). 设 $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$, A 的算子范数(operator norm) 是

$$\|A\| = \max_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{v}\|=1}} \|A\mathbf{v}\| = \max_{\substack{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \mathbf{v} \neq \mathbf{0}}} \frac{\|A\mathbf{v}\|}{\|\mathbf{v}\|}.$$

试证:

$$\|A\| = \max_{\substack{\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n \\ \|\mathbf{u}\|=\|\mathbf{v}\|=1}} \mathbf{u}^T A \mathbf{v}.$$