微积分 B(1)第 7 次习题课题目

说明：带“★”题目不在课堂讨论，作为课后练习.

一、导数的应用

1．设实数a,b满足$b>a>\mathrm{e}$，试证 $a^b>b^a$.

2．已知函数$f(x)=\dfrac{x^3}{(1+x)^2}+3$.

（1）求函数的单调区间与极值；　　　　（2）求函数的上凸和下凸区间及拐点；

（3）求函数图形的渐近线.

3．在椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$上求一点，使得过此点作椭圆切线与坐标轴构成的三角形的面积最小.

4．在半径为R的球内作内接正圆锥，试求正圆锥的最大体积.

5．设函数$f(x)=2nx(1-x)^n$，求$M_n=\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\}$及$\lim\limits_{n\to\infty}M_n$.

6．设$a>0$，$x_1=\ln a$，$x_{n+1}=x_n+\ln(a-x_n)$，证明数列$\{x_n\}$收敛，并求极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$的值.

（提示：证明$\{x_n\}$单调有界）

二、泰勒公式

1．已知函数$f(x)=x^3-2x^2+5x+1$，写出$f(x)$在$x_0=1$处带拉格朗日余项的1阶与2阶泰勒公式.

2．若$f(x)\in D^2(-\infty,+\infty)$, 证明对任意的$a<c<b$，都存在$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}=\frac{1}{2}f''(\xi).$$

3．设函数$f(x)$在$[0,1]$上二阶可导，$f(0)=f(1)$，且$|f''(x)|\leqslant 2$，求证：$|f'(x)|\leqslant 1, x\in[0,1]$.

4．设函数$f(x)$在$[a,b]$上二阶可导，且$f'_+(a)=0,\ f'_-(b)=0$．证明：存在一点$\xi\in(a,b)$，使得$|f''(\xi)|\geqslant\dfrac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$.

5．★设函数$f(x)$在$[a,b]$上连续，在(a,b)内二阶可导，且$|f''(x)|\geqslant m>0$，$f(a)=0,\ f(b)=0$．证明：$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|\geqslant\dfrac{m}{8}(b-a)^2$.

6．设$f(x)\in C^2(a,b)$，$x_0\in(a,b)$，$f''(x_0)\neq 0$．若$\theta\in(0,1)$ 满足

$$f(x_0+h)-f(x_0)=f'(x_0+\theta h)h,$$

证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{2}$.

7．已知函数 $f(x)=\arctan x$ ．设 $x\,(x\neq 0),\xi$ 满足 $f(x)=x\,f'(\xi)$ ，求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\xi^2}{x^2}$.

8．★设函数 $f(x)$ 在内具有 $n+1$ 阶导数， $x_0\in(a,b)$ ， $f^{(n+1)}(x_0)\neq 0$ ．若 $\theta\in(0,1)$ 满足 $f(x_0+h)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{1}{k!}f^{(k)}(x_0)h^k+\dfrac{1}{n!}f^{(n)}(x_0+\theta h)h^n$ ，证明 $\lim\limits_{h\to 0}\theta=\dfrac{1}{n+1}$.

9．设函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上存在 2 阶导数，且对任意的 $x\in[0,1]$ 都有 $|f''(x)|\leqslant 1$ ．若 $f(x)$ 在区间 $(0,1)$ 内取到最大值，证明： $|f'(0)|+|f'(1)|\leqslant 1$.

10．★★设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内存在 2 阶导数，M_1 ，M_2 是两个正实数. 若对任意的 $x\in\mathbf{R}$ ，都有 $|f(x)|\leqslant M_1$ ， $|f''(x)|\leqslant M_2$ ，求证： $|f'(x)|\leqslant\sqrt{2M_1M_2}$.

11．★设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内存在 3 阶导数．若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 存在， $\lim\limits_{x\to+\infty}f'''(x)=0$ ，证明：

$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ ， $\lim\limits_{x\to+\infty}f''(x)=0$.

12．★设函数 $f(x)$ 具有 4 阶导数，且 $\lim\limits_{x\to\infty}xf(x)=0$ ， $\lim\limits_{x\to\infty}xf^{(4)}(x)=0$ ，求证：

$$\lim_{x\to\infty}xf'(x)=0\,,\quad \lim_{x\to\infty}xf''(x)=0\,,\quad \lim_{x\to\infty}xf'''(x)=0\,.$$

13．★设函数 $f(x)$ 具有 2 阶连续导数， $f(\xi)=0$ ， $f'(\xi)\neq 0$ ．若 $\{x_n\}$ 以 ξ 为极限且满足

$\begin{cases}x_0\\ x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},n=1,2,3,\cdots,\end{cases}$ 求证： $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n-x_{n-1}}{(x_{n-1}-x_{n-2})^2}=-\dfrac{f''(\xi)}{2f'(\xi)}$.

14．求下列极限

（1） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x\sin x-x-x^2}{\sin^3 x}$ ；

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\arctan x}{\sin x-\tan x}$ ；

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}[(x^3-x^2+\dfrac{x}{2})e^{\frac{1}{x}}-\sqrt{1+x^6}\,]$ ；

（4） $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(e^x-1)-(e^{\sin x}-1)}{\sin^4(3x)}$ ；

（5）★ $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{e^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$.

15．设函数 $f(x)$ 在区间 $(-1,1)$ 内存在 1 阶导数，且 $f'(0)=0$ ， $f''(0)$ 存在，证明：

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(\ln(1+x))}{x^3}=\frac{1}{2}f''(0)\,.$$

16．讨论当 $x\to 0$ 时， $f(x)=\ln(1+\sin^2 x)+\alpha(\sqrt[3]{2-\cos x}-1)$ 是几阶无穷小量.

16．若极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{200}}{x^{\alpha}-x^{\alpha}(1-\dfrac{1}{x})^{\alpha}}$ 存在，求 α 的取值范围与此极限的值.

18．求函数 $f(x)=x^2\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 处的 100 阶导数 $f^{(100)}(0)$.