习题课 1

2019 年 10 月 1 日

1, 设 $\triangle ABC$ 是平面中的三角形，三边 BC, AC, AB 上的垂线分别记为 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. 用点积证明 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 交于一点 H.

提示：将 $\triangle ABC$ 放在直角坐标系中，P 为平面上的任意一点，则点 $P \in \ell_1$ 当且仅当 P, A, B, C 四点的坐标满足什么关系？类似的 $P \in \ell_2$ 或 $P \in \ell_3$ 当且仅当 P, A, B, C 四点的坐标满足什么关系？

2, 平面中至多可以找到 3 个向量使得它们的两两内积为负数。$\mathbb{R}^n$ 中至多可以找到多少个向量使得它们的两两内积为负数呢？

3, 四维立方体有多少个顶点？多少条棱？多少个 2 维的面？多少个 3 维的面？若以上数字分别记为 k_0, k_1, k_2, k_3，则 $k_0 - k_1 + k_2 - k_3$ 等于多少？n 维立方体的 $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ 分别是多少？$k_0 - k_1 + k_2 - \ldots + (-1)^{n-1} k_{n-1}$ 又是多少？

4, 证明：若 n 阶方阵 A 的各列元素之和为 1，则对任意的 $\beta \in \mathbb{R}^n$, 向量 $A\beta$ 的 n 个分量之和等于 β 的 n 个分量之和。若 n 阶方阵 A, B 的各列元素之和均为 1, 则 AB 的各列元素之和也均为 1.

提示：构造一个行向量 e 使得 e 与 A 相乘等价于取 A 的各列元素之和。

5, 定义 $m \times n$ 阶实矩阵 $A = (a_{ij})$ 的范数为

$$||A|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

证明：

1. $||A|| \geqslant 0$，且 $||A|| = 0$ 当且仅当 $A = 0$,
2. $||cA|| = |c|\ ||A||$,
3. $||A + B|| \leqslant ||A|| + ||B||$,
4. $||AB|| \leqslant ||A||\ ||B||$.

证明范数
$$||A||_\infty = \max_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$
也满足性质 1-4.

提示：$||\cdot||$ 定义的范数与 $\mathbb{R}^{mn}$ 中向量的范数有何不同？要证明 4，可以先证明 B 是一个列向量 β 的情形，此时 $A\beta$ 的各分量是 A 的行向量与 β 的点积；证明一般的情形时，可将 $B = (\beta_1 \dots \beta_k)$ 按列分块后用不等式 $||A\beta|| \leqslant ||A||\ ||\beta||$. 证明 $||\cdot||_\infty$ 满足性质 4 时，可以先证明 A 是一个行向量 α 的情形，即 $||\alpha B||_\infty \leqslant ||\alpha||_\infty ||B||_\infty$；证明一般情形时，可对 A 按行分块。

6, 设 $A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_n(\mathbb{R})$, 证明若 A, C 可逆，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 也可逆，并求其逆矩阵。

用以上结论证明，对角线元素全非零的上三角阵 U 可逆，其逆矩阵 U^{-1} 也是上三角阵，且 U^{-1} 的对角线元素是 U 的对角线元素的倒数。

7, 对于一个线段 AB，我们可以这样描述这个线段上的点：对于任何一个线段上的点 P，我们有 $P = sA + tB$，这里 $s + t = 1$ 并且 s 和 t 都是非负的实数。很容易验证，对于固定的 P，这里的系数 s 和 t 都存在并且唯一。事实上，我们也可以这样看这个式子 $P = sA + tB$：这个式子是说，线段上的任意一点都可以看成是 A 和 B 的加权平均。

1. 对于一个三角形 ABC，证明三角形内部的任何点 P 都有 $P = rA + sB + tC$，这里 $r + s + t = 1$ 并且这三个系数都是非负的实数，并且每个 P 都对应着唯一的 (r, s, t) 系数组。（换句话说，三角形内部的每一个点都可以看成是三个顶点的加权平均值。）
2. 对于空间中的正四面体 $ABCD$，猜测一个由以上推广的类似结论。
3. 对于平面上的四边形 $ABCD$ 内部的任意一个点 P，是否能够找到非负系数使得 $P = sA + tB + xC + yD$，这里 $s + t + x + y = 1$？这样的系数组是否唯一？

8, 我们想解一个线性方程组 $Ax = b$。这里 b 是 $\mathbb{R}^m$ 里给定的向量，x 是 $\mathbb{R}^n$ 里我们想要求解的未知向量，而 A 是 $m \times n$ 阶的矩阵，也可以看成是一个函数 $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$。我们的目标是要证明 A 的列向量线性无关，当且仅当定义域中任何向量都是 A 的行向量的线性组合，当且仅当 A 是一个单射函数。（我们这里只证明一部分。）

1. 假设 A 一共有三列，第一列的 4 倍加上第二列的 3 倍减去第三列的 2 倍等于零向量。求证 $Ax = b$ 当且仅当对于任意的 $k \in \mathbb{R}$，$A(x + k\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}) = b$。

2. 假设 $A = \begin{pmatrix} w_1^T \\ \vdots \\ w_m^T \end{pmatrix}$，这里 $w_1^T, ..., w_m^T$ 代表行向量。那么可以看出实际上 $w_1, ..., w_m$ 是 A 的定义域里的向量。假设定义域内的任何向量都是 $w_1, ..., w_m$ 的线性组合，并且 $Ax = 0$，求证 x 和定义域内的所有向量都垂直。

9, 我们知道，假设 $i \neq j$，那么我们从单位矩阵 I 出发，把 (i,j) 项改成 1，就得到了矩阵 E_{ij}。而从单位矩阵 I 出发，把 (i,i) 项和 (j,j) 项改成零，而把 (i,j) 项和 (j,i) 项改成 1，就得到了矩阵 P_{ij}。对于任意两个矩阵 A, B，我们定义 $[A, B] = AB - BA$。

1. 假设 i, j, k 两两不同，计算 $[E_{ij}, E_{jk}]$，$[E_{ij}, P_{jk}]$ 以及 $[P_{ij}, P_{jk}]$。（除生算外，也可以直接考虑作为行操作或列操作，两个矩阵的顺序调换后，到底差别在哪里。）
2. 假设 $i \neq j$，并且我们有对角阵 $D = diag(d_1, ..., d_n)$，计算 $[E_{ij}, E_{ji}]$，$[E_{ij}, D]$ 和 $[P_{ij}, D]$。（除生算外，也可以直接考虑作为行操作或列操作，两个矩阵的顺序调换后，到底差别在哪里。）

10, 我们定义这样一个 n 阶方阵 T：它的对角项是 $1, 2, 2, ..., 2$，而紧挨着对角线的项都是 -1。比如说，如果 $n = 3$，那么 $T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$。求 T^{-1}。(提示：可以计算一下 $n = 1, 2, 3$ 时的情况来寻找灵感。另外，T 经过哪些行操作可以变成 I？那么怎么能从 I 变成 T^{-1}？)

11, 求证：对于任何 $m \times n$ 的矩阵 A 和 $n \times m$ 的矩阵 B，$I_m + AB$ 可逆当且仅当 $I_n + BA$ 可逆。这里 I_m 是 m 阶单位矩阵，I_n 是 n 阶单位矩阵。(提示：一种巧方法是巧妙利用 $A(I_n + BA) = (I_m + AB)A$，用一个的逆凑出另一个的逆。另一种方法是考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$，并用行列操作使其分块对角化。等学了特征值或者矩阵级数，这里还有其他方法。)

12, 如果一个 n 阶方阵 A 的 (i,j) 项在 $i + j > n + 1$ 的时候都是 0，那么我们说这个矩阵 A 是西北矩阵。放过来，如果一个 n 阶方阵 A 的 (i,j) 项在 $i + j < n + 1$ 的时候都是 0，那么我们说这个矩阵 A 是东南矩阵。

1. 假设 A 是可逆西北矩阵。那么 A^T, A^2, A^{-1} 中哪些必然是西北矩阵？哪些必然是东南矩阵？哪些有可能都不是？证明或给出反例。
2. 假设 A 是西北矩阵，B 是东南矩阵，那么 AB 必然是什么样的矩阵？要求证明。