微积分 B(1)第四次习题课题目

说明：带★的题目不在课堂讨论，留作课后练习.

一、连续函数的概念及其性质

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant -1,\\ 0, & x=0,\\ 2, & x\geqslant 1,\\ ax^2+bx+c, & 0<|x|<1,\end{cases}$ 若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，求 a,b,c 的值.

2．研究下列函数在定义域内的连续性，指出间断点及其类别.

（1） $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ $x\in(0,2\pi)$；

（2） $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$；

（3） $f(x)=[|\cos x|]$；

（4） $f(x)=\dfrac{[\sqrt{x}]\ln(1+x)}{1+\sin x}$；

（5） $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}, & x\neq 1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$

注　（3）（4）中的 $[x]$ 是取整函数.

3．★试举出定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$，要求：$f(x)$ 仅在 $0,1,2$ 三点处连续，其余的点都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

4．利用零点存在定理，证明：

（1）若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，则在任何一个周期内都存在 $\xi\in\mathbf{R}$,使得

$$f(\xi+\pi)=f(\xi).$$

（2）已知函数 f 在圆周上有定义，并且连续．证明：存在一条直径，使得其两个端点 A，B 满足 $f(A)=f(B)$.

5．证明：设 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，且存在唯一的 $x_0\in\mathbf{R}$ 使得 $f(f(x_0))=x_0$，则存在唯一的 $\xi\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(\xi)=\xi$.

6．证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并且存在反函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调.

7．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且对 $\forall x\in[a,b]$，总存在 $y\in[a,b]$ 使得 $|f(y)|\leqslant\dfrac{1}{2}|f(x)|$．求证：至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $f(\eta)=0$.

8．设 $f(x)\in C[a,+\infty)$ 且有界，若 $f(a)<\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$，则当 α 满足

$$f(a)<\alpha<\sup_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$$

时，都存在$\xi\in[a,+\infty)$，使得$\alpha=f(\xi)$.

9．设$f(x)$，$g(x)$均在区间$[a,b]$上连续．证明：

（1）$|f(x)|$，$\max\{f(x),g(x)\}$，$\min\{f(x),g(x)\}$均在区间$[a,b]$上连续；

（2）★$M(x)=\max\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$，$m(x)=\min\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$均在区间$[a,b]$上连续.

10．★研究函数$f(x)=\begin{cases}\dfrac{p}{q+1}, & x=\dfrac{p}{q},\text{ 其中}p,q\text{ 互质},q\geqslant 1,\\ |x|, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$在有理点与无理点的连续性.

二、一致连续性

1．有人断言：“如果函数$f(x)$在$a\in\mathbf{R}$的一个邻域中有定义并在a处连续，则$f(x)$在a的一个邻域内是一致连续的”．他给出如下证明：

“因为$f(x)$在$a\in\mathbf{R}$处连续，所以对任意$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$使得只要$x\in(a-\delta,a+\delta)$，就有

$$\left|f(x)-f(a)\right|<\varepsilon .$$

因此对任意$x,y\in(a-\delta,a+\delta)$（此时$\left|x-y\right|<2\delta$），都有

$$\left|f(x)-f(y)\right|\leqslant\left|f(x)-f(a)\right|+\left|f(a)-f(y)\right|<2\varepsilon .$$

所以$f(x)$在$(a-\delta,a+\delta)$中是一致连续的.”

请问：这个断言和证明正确吗？

2．证明：函数$f(x)=\sin\sqrt{x}$在$[0,+\infty)$上一致连续.

3．证明：函数$f(x)=\sin x^2$在$[0,+\infty)$上不一致连续.

4．设$f(x)\in C[0,+\infty),\ g(x)\in C[0,+\infty)$，且$\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$．证明：函数$f(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续当且仅当函数$g(x)$在$[0,+\infty)$上一致连续.

5．证明：函数$f(x)$在区间I上一致连续的充要条件是：对区间I上的任何两个数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$，当$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$时，有$\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$．并证明：函数$f(x)=\mathrm{e}^x$在$(-\infty,+\infty)$上不一致连续.

6．设函数$f(x)$在区间$[a,+\infty)$ $(a>0)$上有定义，且存在$L>0$使得对任意的$x,y\in[a,+\infty)$都有$|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$．证明：

（1）$\dfrac{f(x)}{x}$在区间$[a,+\infty)$上有界；

（2）$\dfrac{f(x)}{x}$在区间$[a,+\infty)$上一直连续.