线性代数期中考试(A卷)参考解答　　　　　　　　杨利军　　2017年11月11日

一. 填空题(每题4分共36分).

1. 设 $\alpha=(4,-1,5)$, $\beta=(1,2,3)$, $\gamma=(3,1,1)$ 为一右手直角坐标系中的三个向量, 则以 α,β,γ 为棱边的平行六面体的体积为 __________.

答案: 37.

注解: 由混合积的计算公式可知, 向量 α,β,γ 的混合积为

$$(\alpha,\beta,\gamma)=\begin{vmatrix}4&-1&5\\1&2&3\\3&1&1\end{vmatrix}=-37.$$

根据向量混合积的几何意义可以所求平行六面体体积为 37.

2. 设 A 为3阶可逆矩阵, 将 A 的第1列的 a 倍加到第2列得到的矩阵为 B, 则

$$A^{-1}B=\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_.$$

答案:

$$A^{-1}B=\begin{bmatrix}1&a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

注解: 根据题设可知, 矩阵 B 可表为 $B=AC$, 其中矩阵 C 为

$$C=\begin{bmatrix}1&a&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}.$$

于是 $A^{-1}B=A^{-1}AC=C$. 故答案如上.

3. 设 $\alpha=(\frac{1}{2},0,\cdots,0,\frac{1}{2})$, 矩阵 $A=-I+\alpha^T\alpha$, $B=I+2\alpha^T\alpha$, 则 $AB=$__________.

答案：$AB=-I$.

注解: 注意

$$\alpha\alpha^T=(1/2,0,\cdots,0,1/2)\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\\0\\\vdots\\0\\\frac{1}{2}\end{bmatrix}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}.$$

因此

$$AB=(-I+\alpha^T\alpha)(I+2\alpha^T\alpha)=-I+\alpha^T\alpha-2\alpha^T\alpha+2\alpha^T\alpha\alpha^T\alpha$$

$$=-I+\alpha^T\alpha-2\alpha^T\alpha+\alpha^T\alpha=-I.$$

解答完毕.

4. 线性方程组

$$\begin{bmatrix}a&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}$$

有解的充分必要条件是 ________.

答案：$a\neq 0$.

注解: 当 $a\neq 0$ 时, 系数矩阵可逆. 故此时方程组有解(且唯一). 考虑情形 $a=0$ 方程组

$$\begin{bmatrix}0&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}.$$

解这个方程组得 $x_3=1$, $x_2=0$, $x_3=2$. 矛盾. 这说明 $a\neq 0$ 方程组无解. 解答完毕.

5. 设 A, B 为 n 阶矩阵, 伴随矩阵分别记为 A^*, B^*, 则矩阵

$$M = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$$

的伴随矩阵 M^* __________.

<u>答案</u>:

$$M^* = \begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}.$$

<u>注解</u>: 当 A, B 均可逆时, 根据公式 $M^* = \det(M)M^{-1}$ 不难证明上述结论. 当 A, B 之一不可逆时, 通过取极限并利用连续函数的性质可知上述等式仍成立. 详细证明可参见第二次习题课讨论题9的解答.

6. 设 A, B 为 3 阶矩阵, 且 $|A| = 3$, $|B| = -2$, 则分块矩阵

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 2A \\ -B & 0 \end{bmatrix}$$

的行列式 $|D| =$________.

<u>答案</u>: $|D| = -48$.

<u>注解</u>: 根据课本第29页分块行列式公式(2) 可知

$$|D| = (-1)^{3^2}|2A||-B| = -2^3|A|(-1)^3|B| = 8|A||B| = 8 \cdot 3 \cdot (-2) = -48.$$

7. 设

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix},$$

二阶矩阵 B 满足 $BA - B + 2I = 0$, 则 B________

答案：

$$B = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix}.$$

注解：根据假设 $BA - B + 2I = 0$ 可知 $B(A - I) = -2I$. 故

$$B = -2(A - I)^{-1} = -2\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}^{-1} = -2\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

解答完毕.

8. 在直角坐标系下, 点 $A(0, 1, 0)$ 关于平面 $2x - y + z = 0$ 的对称点 B 的坐标为 $B =$________.

答案： $B = \frac{1}{3}(2, 2, 1)$.

注解：先求点 A 到平面 $2x - y + z = 0$ 的距离. 根据公式得

$$d = \frac{|2 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

于是点 B 的坐标为

$$B = (x, y, z) = (0, 1, 0) + 2d\frac{(2, -1, 1)}{\sqrt{6}} = (0, 1, 0) + \frac{2}{\sqrt{6}} \cdot \frac{(2, -1, 1)}{\sqrt{6}}$$

$$= (0, 1, 0) + \frac{1}{3}(2, -1, 1) = \frac{1}{3}(2, 2, 1).$$

9. 已知在右手直角坐标系中点 $A(0, 1, -1)$, 以及两个平面 π_1: $-x + 4y + 2 = 0$, π_2: $x + 2y + 3z = 0$, 则过点 A 且同时平行于 π_1 和 π_2 的直线标准方程为 ________.

答案： 所求方程为 $\frac{x}{4} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+1}{-2}$.

注解：根据假设所求直线的方向为

$$(-1, 4, 0) \times (1, 2, 3) = (12, 3, -6) \parallel (4, 1, -2).$$

因此所求直线即为过点 $A(0,1,-1)$ 且方向为 $(4,1,-2)$ 的直线, 其方程为

$$\frac{x}{4}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+1}{-2}.$$

二. 计算题与证明题(共64分).

10.(14分) 设

$$A=\begin{bmatrix}1&1&a\\1&a&1\\a&1&1\end{bmatrix},\quad \beta=\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix},$$

已知线性代数方程组 $Ax=\beta$ 有解但不唯一. (1) 求 a 的值. (2) 求 A 的相抵标准形.

解: 对方程组 $Ax=\beta$ 的增广矩阵作行初等变换以判断解的情况.

$$[A|\beta]=\begin{bmatrix}1&1&a&1\\1&a&1&1\\a&1&1&-2\end{bmatrix}\to\cdots\to\begin{bmatrix}1&1&a&1\\0&a-1&1-a&0\\0&0&(a-1)(a+2)&a+2\end{bmatrix}$$

现根据 a 的不同取值, 讨论如下.

(i) 当 $a\neq 1$ 且 $a\neq -2$ 时, 方程组 $Ax=\beta$ 有唯一解.

(ii) 当 $a=1$ 时,

$$[A|\beta]\to\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&0&0&0\\0&0&0&3\end{bmatrix}$$

由此可见方程组无解.

(iii) 当 $a=-2$ 时,

$$[A|\beta] \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

此时方程组有解但不唯一. 因此所求 $a=-2$. 此时

$$A \to \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

解答完毕.

11.(16分) 计算 (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2)

$$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1+a_2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1+a_n \end{vmatrix}$$

解: (1) 可直接求逆矩阵求得计算结果.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 13 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

因此所求计算结果为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 0 \\ -2 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}.$$

解(2): 令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix},$$

则所求行列式可写作 $|A+B|$. 回忆第一次习题课讨论题三的解答里, 我们建立了两个矩阵之和的行列式公式. 设 A 和 B 为两个 n 阶方阵, 设 $A = (a_1, \cdots, a_n)$ 和 $B = (b_1, \cdots, b_n)$. 我们称行列式 $|c_1, \cdots, c_n|$ 为 $|A+B|$ 的一般项, 如果 $c_i = a_i$ 或 b_i, $i = 1, 2, \cdots, n$. 再对于 $k = 0, 1, \cdots, n$, 记

$$\Delta_k := \sum_{\text{含有}k\text{个列向量}b_i\text{的一般项}} |c_1, \cdots, c_n|.$$

例如对于情形 $n = 3$,

$$\begin{aligned} \Delta_0 &= |a_1 a_2 a_3|, \\ \Delta_1 &= |b_1 a_2 a_3| + |a_1 b_2 a_3| + |a_1 a_2 b_3|, \\ \Delta_2 &= |b_1 b_2 a_3| + |b_1 a_2 b_3| + |a_1 b_2 b_3|, \\ \Delta_3 &= |b_1 b_2 b_3|. \end{aligned}$$

利用上述记号, 我们可以得到一个关于两个矩阵之和的行列式计算公式

$$|A+B| = \sum_{k=0}^{n} \Delta_k.$$

对于上述定义的矩阵 A, B, 显然有 $\Delta_k = 0$, 对任意 $k \geq 2$. 因为矩阵 A 的各列相同. 因此 $|A+B| = \Delta_0 + \Delta_1$, 这里 Δ_0 不含矩阵 A 中的列, 也就是说 $\Delta_0 = |B| = a_1 \cdots a_n$; Δ_1 恰好含矩阵 A 中的一个列. 这样的矩阵有 n 个. 第 k 个行列式为 $a_1 \cdots \hat{a}_k \cdots a_n$; 这里符号 $\hat{a}_k$ 表示乘积例缺少项 a_k. 例如 $n = 4$, 则 $a_1\hat{a}_2a_3a_4 = a_1a_3a_4$. 于是所求行列式为

$$|A+B| = a_1 \cdots a_n + \sum_{k=1}^{n} a_1 \cdots \hat{a}_k \cdots a_n.$$

12.(14分) 设

$$A = \begin{bmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}.$$

(1) 求所有与 A 交换的矩阵 B(即 $AB = BA$); (2) 求 A^n.

解(1): 这道题与课本第77页习题8(4)小题类似. 先将矩阵 A 写作 $A = aI + N$, 其中 I 为三阶单位矩阵,

$$N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

设三阶矩阵

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

与矩阵 A 可交换, 则 $AB=BA$, 即 $(I+N)B=B(I+N)$. 由此可知 $BN=NB$. 将矩阵等式 $BN=NB$ 即

$$\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$$

按乘法展开即得

$$\begin{bmatrix} 0 & b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{21} & b_{22} \\ 0 & b_{31} & b_{32} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

由上述矩阵等式可知 $b_{21}=b_{31}=b_{32}=0$, 且 $b_{11}=b_{22}=b_{33}$, $b_{12}=b_{23}$. 于是所求矩阵 B 具有如下形式

$$B=\begin{bmatrix} \lambda & \mu & \gamma \\ 0 & \lambda & \mu \\ 0 & 0 & \lambda \end{bmatrix},$$

其中 λ,μ,γ 为任意实数.

解(2). 之前我们已将矩阵 A 写作 $A=aI+N$. 显然 $IN=NI$ 且

$$N^2=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad N^k=0, \quad \forall k\geq 3.$$

因此根据矩阵二项展开定理得

$$\begin{aligned} A^n &= (aI+N)^n=(aI)^n+C_n^1(aI)^{n-1}N+C_n^2(aI)^{n-2}N^2 \\ &= \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1} & \frac{n(n-1)a^{n-2}}{2} \\ 0 & a^n & na^{n-1} \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

解答完毕.

13.(6分) 设 $\{O, e_1, e_2, e_3\}$ 为一个仿射坐标系, 其度量矩阵

$$A = \begin{bmatrix} e_1 \cdot e_1 & e_1 \cdot e_2 & e_1 \cdot e_3 \\ e_2 \cdot e_1 & e_2 \cdot e_2 & e_2 \cdot e_3 \\ e_3 \cdot e_1 & e_3 \cdot e_2 & e_3 \cdot e_3 \end{bmatrix}.$$

设有非零向量 $\alpha = (x_1, x_2, x_3)$ 和实数 λ 满足 $A\alpha^T = \lambda\alpha^T$. 证明 $\lambda > 0$.

<u>证明</u>: 于等式 $A\alpha^T = \lambda\alpha^T$ 两边同时左乘行向量 α 即得 $\alpha A\alpha^T = \lambda\alpha\alpha^T$. 注意 $\alpha\alpha^T = x_1^2 + x_2^2 + x_3 > 0$. 考虑 $\alpha A\alpha^T$. 令 $\xi = x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3$, 则向量 ξ 是非零向量, 其长度 $\|\xi\| > 0$. 于是

$$\|\xi\|^2 = \xi \cdot \xi = (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) \cdot (x_1e_1 + x_2e_2 + x_3e_3) = \alpha A\alpha^T.$$

这说明 $\alpha A\alpha^T = \|\xi\|^2 > 0$. 再根据等式 $\alpha A\alpha^T = \lambda\alpha\alpha^T$ 可知 $\lambda > 0$. 证毕.

14. 设 M 为 n 阶可逆方阵, 分块为

$$M = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix},$$

其中 D 为 k 阶可逆矩阵 $(k < n)$. (1) 证明 $|M| = |D||A - BD^{-1}C|$; (2) 求 M^{-1}.

<u>证明</u>: 利用矩阵打洞技术可知

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & \\ X & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A + BX & B \\ C + DX & D \end{bmatrix}.$$

由假设 D 可逆, 故取 $X = -D^{-1}C$ 时,

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ -D^{-1}C & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BD^{-1}C & B \\ 0 & D \end{bmatrix}.$$

于上式两边取行列式得 $|M|=|D||A-BD^{-1}C|$. 结论(1)得证.

解(2). 求逆矩阵 M^{-1}的方法参阅课本第67页例2.37. 对矩阵 M^{-1} 作如下分块

$$M^{-1}=\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k \end{bmatrix}.$$

将左边分块矩阵乘法展开得

$$\begin{bmatrix} AX+BZ & AY+BW \\ CX+DZ & CY+DW \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} E_{n-k} & 0 \\ 0 & E_k \end{bmatrix}.$$

由此得

$$\begin{cases} AX+BZ=E_{n-k}, \\ AY+BW=0, \\ CX+DZ=0, \\ CY+DW=E_k. \end{cases} \tag{1}$$

根据三个方程可求得 $Z=-D^{-1}CX$. 再将式 $Z=-D^{-1}CX$ 带入第一个方程得 $(A-BD^{-1}C)X=E_{n-k}$. 根据结论 (i) 知 $|M|=|D||A-BD^{-1}C|$. 由于 M 可逆可知矩阵 $A-BD^{-1}C$ 可逆. 于是由 $(A-BD^{-1}C)X=E_{n-k}$ 可解得

$$X=(A-BD^{-1}C)^{-1},\quad Z=-D^{-1}C(A-BD^{-1}C)^{-1}. \tag{2}$$

再根据式 (1) 的第四个方程得 $W=D^{-1}-D^{-1}CY$. 将这个表达式带入式 (1) 的第二个方程得

$$AY+B(D^{-1}-D^{-1}CY)=0 \quad 或 \quad Y=-(A-BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}.$$

于是我们解得

$$Y = -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}, \quad W = D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1}. \tag{3}$$

于是逆矩阵

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$$

被确定, 其中子矩阵 X, Y, Z, W 由式 (2) 和 (3) 给出. 解答完毕.

注：求逆矩阵 M^{-1} 也可利用课本第74页例2.41中所用的方法.