<u>清华大学本科生考试试题专用纸</u>

2011级微积分B（2）试题（A卷）

（2012年6月11日）

班级　　　　　　姓名　　　　　　学号

一、填空题（每题4分，共10题，　计40分）

1．函数 $f(x,y,z)=x^2+2y^2+2z^2$ 在点 $(1,1,1)$ 处最大的方向导数为____________.

答案：6

2．设 $\Sigma=\{(x,y,z)\mid x+y+z=1, x\geqslant 0, y\geqslant 0, z\geqslant 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma}(y+z)\mathrm{d}S=$____________.

答案：$\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

3．已知 $D=\left\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant 1\right\}$．若函数 $f(x,y)$ 具有连续偏导数，且 $f(x,1)=0$，

$\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=2$，则 $\iint\limits_{D}y\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=$____________.

答案：-2

4．设 $\Omega=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2\leqslant 1, z\geqslant 0\}$，则 $\iiint\limits_{\Omega}(\sqrt{x^2+y^2+z^2}+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=$____________.

答案：$\dfrac{3\pi}{4}$

5．若 $\mathrm{d}f(x,y)=\mathrm{e}^{xy}(y\sin x+\cos x)\mathrm{d}x+x\mathrm{e}^{xy}\sin x\mathrm{d}y$，且 $f(0,0)=1$，则

$f(x,y)=$____________.

答案：$\mathrm{e}^{xy}\sin x+1$

6．设 $f(x,y,z)=xy^2z^3$，则 $\mathrm{grad}f(x,y,z)\big|_{(1,1,1)}=$____________；

$\mathrm{div}[\mathrm{grad}f(x,y,z)]\big|_{(1,1,1)}=$____________.

答案：$i+2j+3k$；8

7．设有向曲线 L 的方程为 $\begin{cases}x+y+z=0,\\ x^2+y^2=1,\end{cases}$ 方向是从 z 轴的正向往原点看去为逆时针方向，则

曲线积分 $\oint_L y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z=$____________.

答案：-2π

8．微分方程 $y'-y=\mathrm{e}^x\sin x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为 $y=$____________.

答案：$\mathrm{e}^x(1-\cos x)$.

9．若 $y=\mathrm{e}^x$ 和 $y=\sin 2x$ 是某三阶线性常系数齐次微分方程的两个解，则该微分方程

是______________.

答案：$y'''-y''+4y'-4y=0$

10．欧拉方程 $x^2y''+xy'+y=2\ln x$ 的通解为 $y=$______________.

答案：$C_1\cos(\ln x)+C_2\sin(\ln x)+2\ln x$.

二、解答题（共 5 题，每题 12 分，计 60 分）

11．求函数 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 的极值.

解：由 $f(x,y)=xy\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$，得

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}=y(1-2x^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)},$$
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=x(1-2y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}. \quad \cdots\cdots 2\text{ 分}$$

令 $\begin{cases}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=0,\\ \dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0,\end{cases}$

解得驻点 $(0,0)$，$(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$，$(\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})$，$(-\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$，$(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})$. ……………………………4 分

记

$$A=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x^2}=xy(4x^2-6)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)},$$

$$B=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\partial y}=(1-2x^2)(1-2y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)},$$

$$C=\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y^2}=xy(4y^2-6)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}. \quad \cdots\cdots 7\text{ 分}$$

在点 $(0,0)$ 处，由于

$$AC-B^2=-1<0,$$

所以 $(0,0)$ 不是函数 $f(x,y)$ 的极值点. ……………………………………………………8 分

在点 $(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})$ 和 $(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})$ 处，由于

$$AC-B^2=\frac{4}{\mathrm{e}^2}>0，且 A=-\frac{2}{\mathrm{e}}<0,$$

所以 $f(\frac{1}{\sqrt2},\frac{1}{\sqrt2})=f(-\frac{1}{\sqrt2},-\frac{1}{\sqrt2})=\frac{1}{2\mathrm{e}}$ 是函数 $f(x,y)$ 的极大值. ……………………………10 分

在点$(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})$和$(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})$处，由于

$$AC-B^2=\frac{4}{\mathrm{e}^2}>0，且 A=\frac{2}{\mathrm{e}}>0，$$

所以$f(\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}})=f(-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}})=-\frac{1}{2\mathrm{e}}$是函数$f(x,y)$的极小值．…………………………12 分

12. 设函数$f(u)$具有二阶连续导数，且$f(0)=f'(0)=0$．若函数$g(x,y)=f(\ln(x^2+y^2))$满足方程

$$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{x^2+y^2},$$

求函数$f(u)$的表达式．

解：因为 $g(x,y)=f(\ln(x^2+y^2))$，所以

$$\frac{\partial g}{\partial x}=f'(u)\frac{2x}{x^2+y^2},$$ ……………………………………………………1 分

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x\partial y}=f''(u)\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}-f'(u)\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}.$$ ……………………………3 分

又因为$\frac{\partial^2 g(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{xy}{x^2+y^2}$，所以

$$f''(u)\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}-f'(u)\frac{4xy}{(x^2+y^2)^2}=\frac{xy}{x^2+y^2},$$

即 $f''(u)-f'(u)=\frac{1}{4}(x^2+y^2)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^u$． ……………………………………………………………4 分

线性常系数齐次方程$f''(u)-f'(u)=0$的通解为

$$f(u)=C_1+C_2\mathrm{e}^u.$$ ………………………………………6 分

设$f''(u)-f'(u)=\frac{1}{4}\mathrm{e}^u$的一个特解为 $f^*(u)=Au\mathrm{e}^u$，………………………………………8 分

代入方程得$A=\frac{1}{4}$，…………………………………………………………………………………9 分

所以该方程的通解为$f(u)=C_1+C_2\mathrm{e}^u+\frac{1}{4}u\mathrm{e}^u$．…………………………………………10 分

由$f(0)=0$，$f'(0)=0$，得$C_1=\frac{1}{4}$，$C_2=-\frac{1}{4}$．

故函数$f(u)$的表达式为$f(u)=\frac{1}{4}\left(1+\mathrm{e}^u+u\mathrm{e}^u\right)$．…………………………………………12 分

13．设有界区域Ω由抛物面$4x^2+9y^2=36z$与平面$z=1$围成，计算三重积分

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2(x+y)^2\mathrm{dxdydz}\ .$$

解：

解法一：先一后二积分（柱坐标）

$$I=\iiint\limits_{\Omega} z^2(x+y)^2\mathrm{dxdydz}=\iint\limits_{4x^2+9y^2\le 36} dxdy\int_{\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}}^{1} z^2(x+y)^2dz$$ ……3 分

$$=\frac{1}{3}\iint\limits_{4x^2+9y^2\le 36}(x+y)^2[1-(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4})^3]dxdy$$ ……5 分

设$x=3r\cos\theta, y=2r\sin\theta$, ……6 分

$$I=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2(2\sin\theta+3\cos\theta)^2(1-r^6)6rdr$$ ……9 分

$$=2\int_0^{2\pi}(2\sin\theta+3\cos\theta)^2d\theta\int_0^1 r^2(1-r^6)rdr=2\int_0^{2\pi}(2\sin\theta+3\cos\theta)^2d\theta\int_0^1(r^3-r^9)dr$$

$$=2\times(4\pi+9\pi)\times(\frac{1}{4}-\frac{1}{10})=\frac{39}{10}\pi$$ ……12 分

注：在柱坐标变换时，$I=\frac{1}{3}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1 r^2(2\sin\theta+3\cos\theta)^2(1-r^6)6rdr$，这一步的 3 分为$\theta$的范围 1 分，$r$的范围 1 分，雅克比矩阵行列式的绝对值是$6r$，1 分。(有的同学容易忘掉$6$，其余都对，只扣这一分)，被积函数的形式可以不看，为了方便阅卷，最后结果只要不是$\frac{39}{10}\pi$，就不得这三分。

解法二：先二后一。

$$I=\int_0^1\mathrm{dz}\iint\limits_{4x^2+9y^2\le 36z} z^2(x+y)^2\mathrm{dxdy}$$ ……5 分

设$x=3r\cos\theta, y=2r\sin\theta$, ……6 分

则

$$I=\int_0^1\mathrm{dz}\iint\limits_{4x^2+9y^2\le 36z} z^2(x+y)^2\mathrm{dxdy}=\int_0^1\mathrm{dz}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}} z^2r^2(3\cos\theta+2\sin\theta)^2\cdot 6r\mathrm{d}r$$ ……9 分

$$=6\int_0^1 z^2\mathrm{dz}\int_0^{2\pi}(3\cos\theta+2\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}} r^3\mathrm{dr}=\frac{3}{2}\int_0^1 z^4\mathrm{dz}\int_0^{2\pi}(3\cos\theta+2\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta=\frac{3}{2}\times\frac{1}{5}\times(9\pi+4\pi)$$

$$=\frac{39}{10}\pi\ .$$ ……12 分

注：在极坐标变换时，$\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{z}} z^2r^2(3\cos\theta+2\sin\theta)^2\cdot 6r\mathrm{d}r$，这一步的 3 分与第一种解法类似，为了方便阅卷，最后结果只要不是$\frac{39}{10}\pi$，就不得这三分。

解法三：广义球坐标（估计很少有人这么做，但是还是给出答案）

$x=3r\cos\theta\sin\varphi, y=2r\sin\theta\sin\varphi, z=r\cos\varphi$ ……………………………………2 分

首先确定平面 $z=1$ 和 $4x^2+9y^2=36z$ 相交时，φ 角的大小。

相交时，由 $4x^2+9y^2=36z=36$，可以得到 $r^2\sin^2\varphi=1$。由 $z=r\cos\varphi=1$，得到 $r^2\cos^2\varphi=1$

因此 $r^2=2$，$\cos\varphi=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\varphi=\frac{\pi}{4}$。……………………………………4 分

方程 $z=1$ 化为 $r=\frac{1}{\cos\varphi}$，曲面 $4x^2+9y^2=36z$ 化为 $r=\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}$ ……………………6 分

$$I=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r^2\cos^2\varphi(3r\cos\theta\sin\varphi+2r\sin\theta\sin\varphi)^2 6r^2\sin\varphi dr$$

$$+\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\int_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}r^2\cos^2\varphi(3r\cos\theta\sin\varphi+2r\sin\theta\sin\varphi)^2 6r^2\sin\varphi dr$$ ……………………9 分

$$=6\int_0^{2\pi}(3\cos\theta+2\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int_0^{\frac{1}{\cos\varphi}}r^6dr$$

$$+6\int_0^{2\pi}(3\cos\theta+2\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos^2\varphi d\varphi\int_0^{\frac{\cos\varphi}{\sin^2\varphi}}r^6dr$$

$$=\frac{6}{7}\int_0^{2\pi}(3\cos\theta+2\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\cos^2\varphi\frac{1}{\cos^7\varphi}d\varphi$$

$$+\frac{6}{7}\int_0^{2\pi}(3\cos\theta+2\sin\theta)^2\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos^2\varphi\frac{\cos^7\varphi}{\sin^{14}\varphi}d\varphi$$

$$=\frac{6}{7}\times 13\pi[\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin^3\varphi\frac{1}{\cos^5\varphi}d\varphi+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^9\varphi}{\sin^{11}\varphi}d\varphi]$$

$$=\frac{6}{7}\times 13\pi\times\frac{7}{20}=\frac{39}{10}\pi$$ ……………………………………12 分

注：最后结果只要不是 $\frac{39}{10}\pi$，就不得最后三分。

14. 设有向曲线段 L 的起点是 $(0,0)$，终点是 $(2,-4)$，方程为 $y=x(x-4)$. 计算曲线积分

$$I=\int_L[y^2(1+x)+4y+2xy]\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+2(1+x+xy)\mathrm{e}^x\mathrm{d}y.$$

解：

解法一：将曲线积分化为定积分

$$I=\int_0^2[x^2(x-4)^2(1+x)+4x(x-4)+2x^2(x-4)]\mathrm{e}^x\mathrm{d}x+2(1+x+x^2(x-4))\mathrm{e}^x(2x\text{-}4)\mathrm{d}x$$ …………4 分

$$=\int_0^2[x^2(x-4)^2(1+x)+4x(x-4)+2x^2(x-4)+2(1+x+x^2(x-4))(2x\text{-}4)]\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^2[x^2(x-4)^2(1+x)+4x(x-4)+2x^2(x-4)+2(1+x+x^2(x-4))(2x\text{-}4)]\mathrm{e}^x\mathrm{d}x$$

=。。。 $=8\mathrm{e}^2$ ……………………………………12 分

注：此解法中，只要最后结果不是$8\mathrm{e}^2$**，就不得最后 8 分。**

解法二：

记 $P(x,y)=[y^2(1+x)+4y+2xy]\mathrm{e}^x$， $Q(x,y)=2(1+x+xy)\mathrm{e}^x$，则 $P,Q\in C^1(\mathrm{R}^2)$，且

$$\frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}=(4+2x+2y+2xy)\mathrm{e}^x,\quad \frac{\partial P}{\partial y}=(4+2x+2y+2xy)\mathrm{e}^x,$$ ………3 分

因此 $\dfrac{\partial Q}{\partial x}=\dfrac{\partial P}{\partial y}$ 所以曲线积分与路径无关．…………………………………………………………5 分

取 L_1 是从点 $(0,0)$ 到点 $(2,0)$ 的线段，L_1 是从点 $(2,0)$ 到点 $(2,-4)$ 的线段，…………………………7 分

则

$$I=\int_{L_1}+\int_{L_2}=\int_0^2 0\mathrm{d}x+\int_0^{-4}2(1+2+2y)\mathrm{e}^2\mathrm{d}y$$ ……………………………………………………10 分

$=8\mathrm{e}^2$．…………………………………………………………………………………………12 分

15．计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$ ．

（Ⅰ）Σ 的方程为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，上侧为正；

（Ⅱ）Σ 的方程为 $z=4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}}$，上侧为正．

解：

（Ⅰ）$I=\iint\limits_{\Sigma}\dfrac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ …………………2 分

取 Σ_1： $z=0$， $x^2+y^2\le 1$，下侧为正，记 Σ 与 Σ_1 围成的半球体为 Ω_1，则

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_1}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y-\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_1}3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\Sigma_1}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y.$$ ……………………………………………5 分

$=2\pi\text{-}0=2\pi$ ………………………………………………………………………………6 分

（Ⅱ）

解法一：设 Σ_2 的方程为 $z=-4\sqrt{1-\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{9}}$，取下侧为正。可知，积分

$$I=\iint\limits_{\Sigma}x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$ ……………8 分

$\Sigma+\Sigma_2$ 的方程为 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$，取外侧为正。

设 Σ_3 的方程为 $x^2+y^2+z^2=1$，取外侧为正。

这样由 $\Sigma+\Sigma_2$ 与 Σ_3 围城的空间区域 V 上

$$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\iiint\limits_V div\{\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\}dxdydz=\iiint\limits_V 0dxdydz=0$$ …………10 分

即 $$\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

由第一问可以知道，$\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=4\pi$

因此 $I=\frac{1}{2}\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=2\pi$. ……………………………………………12 分

解法二：设 Σ_4 的方程为 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$ ，下侧为正；设 Σ_5 为 xOy 平面上介于 $x^2+y^2=1$ 与 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=1$ 之间的区域，下侧为正；Σ 与 Σ_4 及 Σ_5 围成的区域记为 Ω_2 .

$$I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$=\iint\limits_{\Sigma+\Sigma_2+\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$ ……………………8 分

$$=\iiint\limits_{\Omega_2} div\{\frac{x}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}},\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$-\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

$$=\iiint\limits_{\Omega_2}0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint\limits_{\Sigma_2}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}-\iint\limits_{\Sigma_3}\frac{x\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$ ……10 分

$=0+2\pi-0=2\pi$ ………………………………………………………………12 分

三、附加题（5 分）

设 $D\subset \mathrm{R}^2$ 是一平面区域， $X(x,y),Y(x,y)\in C(D)$．证明：

“曲线积分 $\int_L X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$ 在 D 上与路径无关”的充分必要条件是

“$X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$ 是 D 上的全微分式”.

证：必要性证明：在 D 中取定 $A(x_0,y_0)$，任取 $B(x,y)$，设 D 内连接 A,B 的路径为 L．令

$$\varphi(x,y)=\int_{L(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(s,t)\mathrm{d}s+Y(s,t)\mathrm{d}t .$$

因为曲线积分 $\int_{L(A)}^{(B)} X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$ 与路径无关，且 $X(x,y),Y(x,y)\in C(D)$，所以

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x,y)-\varphi(x,y)}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{(x_0,y_0)}^{(x+\Delta x,y)} X(s,t)\mathrm{d}s+Y(s,t)\mathrm{d}t-\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} X(s,t)\mathrm{d}s+Y(s,t)\mathrm{d}t}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{(x,y)}^{(x+\Delta x,y)} X(s,t)\mathrm{d}s+Y(s,t)\mathrm{d}t}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\int_{x}^{x+\Delta x} X(s,y)\mathrm{d}s}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}X(x+\theta\Delta x,y)=X(x,y),$$

$$\frac{\partial\varphi(x,y)}{\partial y}=Y(x,y) .$$

从而函数 $\varphi(x,y)$ 可微，且

$$\mathrm{d}\varphi(x,y)=X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y ，\quad (x,y)\in D .$$

故 $X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$ 是 D 上的全微分式．…………………………………………………3 分

充分性证明：设 $\mathrm{d}\varphi(x,y)=X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$，$(x,y)\in D$．设 L 是 D 内的任意一条（分段）光滑曲线段， A,B 是其端点，又设 L： $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ A 对应参数 a， B 对应参数 b，则

$$\int_{L(A)}^{(B)} X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_a^b\left[X(x(t),y(t))x'(t)+Y(x(t),y(t))y'(t)\right]\mathrm{d}t$$

$$=\int_a^b\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\varphi(x(t),y(t))\right)\mathrm{d}t$$

$$=\varphi(x(b),y(b))-\varphi(x(a),y(a))=\varphi(B)-\varphi(A) .$$

故曲线积分 $\int_L X(x,y)\mathrm{d}x+Y(x,y)\mathrm{d}y$ 在 D 上与路径无关．…………………………………………5 分