线性代数期末小班辅导讲义

小班辅导讲师 何昊天

2020 年秋季学期

目录

1 正交性

1.1 四大子空间

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵且满足 $rank(A) = r$，通过前半学期的学习，我们来到了矩阵 A 的四个基本子空间：

(i) 列空间 $C(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n, Ax = y\}$，维数 $\dim C(A) = r$.

(ii) 零空间 $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$，维数 $\dim N(A) = n - r$.

(iii) 行空间 $C(A^T) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^m, A^T x = y\}$，维数 $\dim C(A^T) = r$.

(iv) 左零空间 $N(A^T) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid A^T x = 0 (x^T A = 0)\}$，维数 $\dim N(A^T) = m - r$.

在这一章里，我们得到了四大子空间之间更精细的关系：

(i) $C(A)$ 和 $N(A^T)$ 互为正交补.

(ii) $C(A^T)$ 和 $N(A)$ 互为正交补.

其中两个空间正交 $S \perp T$ 指 $\forall x \in S, y \in T$ 有 $x^T y = 0$，$\mathbb{R}^n$ 的一个子空间 S 的正交补为 $S^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in S, x^T y = 0\}$.

对于 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间 S, T，它们的并未必还是子空间，但我们可以做“交”与“和”两种运算来得到新的子空间：

(i) $S \cap T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in S, x \in T\}$

(ii) $S + T = \{x + y \mid x \in S, y \in T\}$

关于子空间的维数，有两个重要的数量关系：

(i) $\dim S + \dim T = \dim(S \cap T) + \dim(S + T)$

(ii) $\dim S + \dim S^\perp = n$

Problem 1.1 (2019 期末)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

分别找出 $N(A), N(A^T), C(A), C(A^T)$ 的一组基.

若求A的行空间，由于 $\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & 3 & \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ 本质上做行变换，故不影响行空间，故直接取其中三个向量

Solution: A 的分解形式就是一个高斯消元法的过程，行简化阶梯形矩阵中主元所在的行和列分别就是 A 行空间和列空间的基，也即 $C(A)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$，$C(A^T)$ 的一组基为 $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T$，零空间的一组基可由将非主元位置分别设为 1 解得 $\begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T$，注意到 $\dim C(A) = 3$，利用正交补关系知 $N(A^T)$ 的基是空集.

1.2 内积与正交化

与公理化定义线性空间类似，我们可以公理化地定义线性空间上的内积，设 V 是一个线性空间，称一个二元函数 $<>: V \times V \to \mathbb{R}$ 是 V 上的内积，若它满足：

(i) $\forall x, y \in V, < x, y >=< y, x >$

(ii) $\forall x, y, z \in V, < x + y, z >=< x, z > + < y, z >$

(iii) $\forall x, y \in V, c \in \mathbb{R}, < cx, y >= c < x, y >$

(iv) $\forall x \in V, < x, x >\geq 0$，等号成立当且仅当 $x = 0$

有了内积的概念，我们就可以继续公理化地定义范数、距离、夹角和正交，并可以验证很多之前对向量空间上通常内积满足的性质在公理化定义下仍然满足.

如果内积空间 V 的一组基在所定义的内积下两两正交，则称这组基为正交基，如果其中每个基向量的长度都为 1，则称这组基为标准正交基.

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 维内积空间 V 的一组基，Gram-Schmidt 正交化给出了从这组基出发构造出一组正交基的流程：

$$\begin{aligned}
&y_1 = x_1 \\
&y_2 = x_2 - \frac{< x_2, y_1 >}{||y_1||^2} y_1 \\
&y_3 = x_3 - \frac{< x_3, y_1 >}{||y_1||^2} y_1 - \frac{< x_3, y_2 >}{||y_2||^2} y_2 \\
&\cdots \\
&y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{< x_n, y_i >}{||y_i||^2} y_i
\end{aligned}$$

Problem 1.2 设 V 是所有次数小于等于 2 的实系数多项式构成的实线性内积空间，对 $\forall f(x), g(x) \in V$ 定义内积为 $< f(x), g(x) >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$，试从基 $1, x, x^2$ 出发由 *Gram-Schmidt* 正交化构造 V 的一组标准正交基.

Solution: 设 $f_1(x) = 1, f_2(x) = x, f_3(x) = x^2$，按照 Gram-Schmidt 正交化流程操作：

$$\begin{aligned}
&g_1(x) = f_1(x) = 1 \\
\Rightarrow\ &L_1(x) = \frac{g_1(x)}{\sqrt{\int_{-1}^{1} g_1^2(x)\mathrm{d}x}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\
&g_2(x) = f_2(x) - \int_{-1}^{1} f_2(x)L_1(x)\mathrm{d}x \cdot L_1(x) = x - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2} x\mathrm{d}x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = x \\
\Rightarrow\ &L_2(x) = \frac{g_2(x)}{\sqrt{\int_{-1}^{1} g_2^2(x)\mathrm{d}x}} = \frac{x}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^2\mathrm{d}x}} = \frac{\sqrt{6}}{2} x
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g_3(x) &= f_3(x) - \int_{-1}^{1} f_3(x)L_1(x)\mathrm{d}x \cdot L_1(x) - \int_{-1}^{1} f_3(x)L_2(x)\mathrm{d}x \cdot L_2(x) \\
&= x^2 - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{2}}{2}x^2\mathrm{d}x \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{6}}{2}x^3\mathrm{d}x \cdot \frac{\sqrt{6}}{2}x = x^2 - \frac{1}{3} \\
\Rightarrow L_3(x) &= \frac{g_3(x)}{\sqrt{\int_{-1}^{1} g_3^2(x)\mathrm{d}x}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^{1} x^4 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{9}\mathrm{d}x}} = \frac{3\sqrt{10}}{2}x^2 - \frac{\sqrt{10}}{2}
\end{aligned}
$$

其中 $L_1(x), L_2(x), L_3(x)$ 即为所求，如果依此类推到所有次数小于等于 n 的实系数多项式构成的实线性空间，得到的多项式称为 Legendre 多项式.

Problem 1.3 设 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 是内积空间 V 中的一组向量，定义它们的 *Gram* 矩阵为：

$G = [v_1 v_2 \cdots v_n]^T [v_1 v_2 \cdots v_n]$

$= \begin{bmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ \vdots \\ v_n^T \end{bmatrix} [v_1 v_2 \cdots v_n] = \begin{bmatrix} v_1^T v_1 & v_i^T v_1 \end{bmatrix}$

$$
G = G(v_1, v_2, \cdots, v_n) = \begin{bmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & \cdots & < v_1, v_n > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > & \cdots & < v_2, v_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < v_n, v_1 > & < v_n, v_2 > & \cdots & < v_n, v_n > \end{bmatrix}
$$

证明 G 是半正定矩阵，且 G 正定当且仅当 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 线性无关.

Solution: 考虑半正定矩阵的定义，对任意非零向量 $u = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix}^T$，有：

$$
\begin{aligned}
u^T G u &= \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} < v_1, v_1 > & < v_1, v_2 > & \cdots & < v_1, v_n > \\ < v_2, v_1 > & < v_2, v_2 > & \cdots & < v_2, v_n > \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ < v_n, v_1 > & < v_n, v_2 > & \cdots & < v_n, v_n > \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdots \\ c_n \end{bmatrix} \\
&= \underline{\sum_{i,j=1}^{n} c_i c_j < v_i, v_j > = < \sum_{i=1}^{n} c_i v_i, \sum_{i=1}^{n} c_i v_i > \geq 0} \quad \star
\end{aligned}
$$

由内积的定义，上式中只可能是零向量和自己的内积为零，而存在一组非零系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得 $\sum_{i=1}^{n} c_i v_i$ 是零向量当且仅当 $v_1, v_2, \cdots, v_n$ 线性相关，故原命题得证.

不是标准正交

Problem 1.4 设 *Gram-Schmidt* 正交化将线性无关的向量组 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 变成了<u>正交的</u>向量组 $v_1, v_2, \cdots, v_m$，证明两组向量的 *Gram* 矩阵行列式满足：

$[u_1 \cdots u_n] = [v_1 \cdots v_n] R \quad |U^T U| \quad |R^T V^T V R| = |R^T R| \, |V^T V|$

$$
|G(u_1, u_2, \cdots, u_n)| = |G(v_1, v_2, \cdots, v_n)| = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \cdots \|v_n\|^2
$$

Solution: 由 Gram-Schmidt 正交化过程可得 $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} A$，其中 A 是一个主对角线元素为 1 的上三角矩阵.

上式两侧分别和自己的转置相乘得 $G(u_1, u_2, \cdots, u_n) = A^T G(v_1, v_2, \cdots, v_n) A$，所以有行列式 $|G(u_1, u_2, \cdots, u_n)| = |A^T| \cdot |G(v_1, v_2, \cdots, v_n)| \cdot |A| = \|v_1\|^2 \|v_2\|^2 \cdots \|v_n\|^2$.

1.3 QR 分解

设 A 是 n 阶实矩阵，若 $A^TA = AA^T = I_n$，则称 A 是 n 阶正交矩阵，典型的正交矩阵包括旋转矩阵和反射矩阵 $I - uu^T$，其中 u 是一个单位向量.

对可逆矩阵 A 做 QR 分解可以看作是对 Gram-Schmidt 正交化的一种应用：

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$$

在上述过程中我们都对 A 做列变换，所有列变换矩阵都是上三角的，即得 $A = QR$，其中 Q 是正交阵，R 是上三角阵，如果 A 不是方阵，上述过程仍然可以进行，但得到的矩阵 Q 也不是方阵，且只能满足 $Q^TQ = I$，不满足 $QQ^T = I$.

Problem 1.5 (2019 期末) 设 $A = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，第一个矩阵记为 Q，第二个矩阵记为 R.

(1) 求到 $C(A)$ 的投影矩阵.

(2) 设 $b = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$，求 $Ax = b$ 的最小二乘解.

Solution:

(1) 设投影矩阵为 P，注意到 R 显然是可逆的，那么 A^TA 也是可逆的，所以有 $P = A(A^TA)^{-1}A^T = QR(R^TQ^TQR)^{-1}R^TQ^T = QR(R^TR)^{-1}R^TQ^T = QRR^{-1}(R^T)^{-1}R^TQ^T = QQ^T$，直接代入计算可得 $P = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$.

(2) 最小二乘解对应方程组 $A^TAx = A^Tb$ 的解，由于 A^TA 可逆，所以有 $x = (A^TA)^{-1}A^Tb = (R^TQ^TQR)^{-1}R^TQ^Tb = (R^TR)^{-1}R^TQ^Tb = R^{-1}Q^Tb$，代入计算可得 $\hat{x} = \begin{bmatrix} 2\sqrt{2}+4 & -2 & 2 \end{bmatrix}^T$.

1.4 投影

$\alpha^T(u-p) = 0 \quad \alpha^T(u - t\alpha)$

投影问题可以从简单情形出发，逐步推广到一般的情形： $\alpha^Tu = \alpha^T\alpha t \quad t = \frac{\alpha^Tu}{\alpha^T\alpha}$

(i) 计算向量 u 在向量 α 上的投影向量 p，不妨设 $u = p + e, p = t\alpha (t \in \mathbb{R})$，则有 $e \perp \alpha$，又因为 $e = u - p = u - t\alpha$，所以 $\alpha^T(u - t\alpha) = 0$，即 $t = \frac{\alpha^Tu}{\alpha^T\alpha}$，所以 $p = \frac{\alpha^Tu}{\alpha^T\alpha}\alpha$.

$u = t\alpha = \frac{\alpha^Tu}{\alpha^T\alpha}\alpha$

(ii) 计算 $\mathbb{R}^3$ 中向量 u 在平面 π 上的投影 p，同理不妨设 $u = p + e$，则有 $e \perp \pi$，取平面上两个不共线的向量拼成矩阵 $A_{3\times 2}$，则存在 x 使得 $Ax = p$ 成立，又因为 $e = u - p = u - Ax$，所以 $A^T(u - Ax) = 0$，即 $A^TAx = A^Tu$，解之即得 x，若 A^TA 可逆，则有 $p = A(A^TA)^{-1}A^Tu$.

$AA^+ \longrightarrow C(A)$

$A^+A \longrightarrow C(A^T)$

使用伪逆

(iii) 若继续向高维推广，最后都能得到形如 $A^TAx = A^Tu$ 的方程，注意这个方程是一定有解的，但 $\boxed{A^TA \text{ 未必可逆}}$，若 A^TA 可逆则有投影矩阵 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$.

Problem 1.6 已知 $\alpha = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}$，$P$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中将向量投影到 α 所在直线的投影矩阵，求 P 的列空间和零空间.

Solution: 根据投影空间的定义知投影矩阵 P 的列空间就是 α 张成的空间，也即 P 的列空间为 $C(P) = \{k\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\end{bmatrix}^T \mid k \in \mathbb{R}\}$.

为计算 P 的零空间，只需计算 α 张成的空间的正交补，即解方程 $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$，可得基础解系为 $\xi_1 = \begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T, \xi_2 = \begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\end{bmatrix}^T$，所以 P 的零空间为 $\{k_1\begin{bmatrix}-2 & 1 & 0\end{bmatrix}^T + k_2\begin{bmatrix}-3 & 0 & 1\end{bmatrix}^T \mid k_1, k_2 \in \mathbb{R}\}$.

Problem 1.7 (2019 期末) 设 $P = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}\left(\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}\right)^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}$，求 P 的特征多项式，并说明理由.

Solution: 只需要求出 P 的特征值即可写出 P 的特征多项式，设 $A = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\\2 & 3\end{bmatrix}$，不难发现 P 就是到 $C(A)$ 的投影矩阵.

注意到投影矩阵 P 满足 $P^2 = P$，而 P^2 的特征值一定是 P 的特征值的平方，所以 P 的特征值只能为 0 和 1，又因为投影矩阵满足 $C(P) = C(A)$，所以 P 的秩为 2，那么特征值 0 的几何重数为 1，则 1 的代数重数为 2，P 的特征多项式为 $\lambda(\lambda-1)^2$.

此外不难发现投影矩阵 P 一定是可对角化的，实际上对称和幂等两个条件分别都可以推出 P 可对角化，前者是基本结论，后者可以从 $r(A) + r(A-I) = n$ 来解释，对 n 阶矩阵 A 只要 $r(A-\lambda I) = r < n$ 即可说明 λ 是 A 的特征值，且几何重数为 $n-r$.

2 行列式

2.1 行列式的定义

矩阵 $A=(a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式有三种常用的定义方法：

(i) 用单形的体积公理化定义为满足某些性质的唯一函数.

(ii) 利用代数余子式展开定义：设余子式 M_{ij} 表示 A 去掉第 i 行和第 j 列后剩余元素组成的行列式，代数余子式 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$，则有 $\forall 1\le j\le n, |A|=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}$.

(iii) 利用完全展开定义：$|A|=\sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n}(-1)^{\sigma(k_1,k_2,\cdots,k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$，其中 S_n 表示 $1,2,\cdots,n$ 构成的排列全体，$\sigma(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 表示排列 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 的逆序对数量.

Problem 2.1 设 $f(x)=\begin{vmatrix}2x & x & 1 & 2\\ 1 & x & 1 & -1\\ 3 & 2 & x & 1\\ 1 & 1 & 1 & x\end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 展开式中 x^3 项的系数是多少？

Solution: 观察得展开式中只有一项为 x^3 项，其系数为 -1.

Problem 2.2 设 n 阶方阵 $A(n\ge 2)$ 的所有元素都是 ±1，求证 $|A|$ 为偶数.

Solution: 直接考虑行列式的定义，展开式一共有 $n!$ 项，且每一项均为 ±1，因为 $n\ge 2$ 时 $n!$ 是个偶数，而偶数个奇数的和必然还是偶数，故 $|A|$ 为偶数.

2.2 行列式的性质

直接使用定义来计算行列式非常繁琐，更多时候需要借助行列式的性质：

(i) 上三角行列式和下三角行列式的值等于对角线元素之积.

(ii) 用常数 k 乘行列式的某一行或某一列，所得行列式的值为原行列式的 k 倍.

(iii) 对换行列式的两行或两列，行列式值不改变.

(iv) 若行列式两行或两列成比例，则该行列式的值为零.

(v) 若行列式某一行或某一列的元素可以写作 $a_{ij}=b_{ij}+c_{ij}$，则该行列式可以分解成两个行列式之和，这两个行列式的对应行或列分别为 b_{ij} 与 c_{ij}.

(vi) 将行列式的某一行或某一列乘以常数 k 加到另一行或另一列上，行列式的值不变.

(vii) 转置不改变行列式的值.

Problem 2.3 (2019 期末) 已知整数 $1653, 2581, 3451, 4582$ 可以被 29 整除，证明下面的四阶行列式值被 29 整除：

$$\begin{vmatrix} 1 & 6 & 5 & 3 \\ 2 & 5 & 8 & 1 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 8 & 2 \end{vmatrix}$$

Solution: 将第一列乘以 1000，再将第二列的 100 倍加到第一列、第三列的 10 倍加到第一列、第四列加到第一列，这样第一列就是给定的四个整数，将 29 提出来即可证明.

但是注意到上面这个方法有点小瑕疵，将第一列乘以 1000 其实改变了行列式的值，只不过 29 是一个质数所以不影响结论，更好的做法是类似地加到第四列上去.

x $\quad$ xy^2

Problem 2.4 计算行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$. $= \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

Solution: 将 $|A|$ 看成关于 x, y 的二元函数，若 $x = 0$ 或 $y = 0$ 显然有 $|A| = 0$，所以 $|A|$ 一定有因子 xy，将 x 换成 $-x$，同时交换前两行和前两列后行列式不改变，所以 $|A|$ 的 x 因子是偶数次幂的，将 y 换成 $-y$，同时交换后两行和后两列后行列式不改变，所以 $|A|$ 的 y 因子也是偶数次幂的.

$\begin{vmatrix} -x & 0 & 0 \\ 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$

显然 A 中最高次项为 4 次，且 x^2y^2 项系数为 1，所以 $|A| = x^2y^2$.

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -y \end{vmatrix}$

Problem 2.5 计算行列式 $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}$. $\quad (x+y+z+w)\begin{vmatrix} 1 & y & z & w \\ 1 & x & w & z \\ 1 & w & x & y \\ 1 & z & y & x \end{vmatrix}$ $\quad (-x)(-y^2)$ $\quad -y^2$

xy^2 $\quad$ $1-y^2 \; y$

Solution: 将 $|A|$ 看成关于 x, y, z, w 的四元函数，将所有行加到第 1 行上可以提出因子 $x + y + z + w$，将第 2 行的 1 倍、第 3, 4 行的 -1 倍加到第 1 行上可以提出因子 $x + y - z - w$，将第 3 行的 1 倍、第 2, 4 行的 -1 倍加到第 1 行上可以提出因子 $x - y + z - w$，将第 4 行的 1 倍、第 2, 3 行的 -1 倍加到第 1 行上可以提出因子 $x - y - z + w$.

显然 A 中最高次项为 4 次，且 x^4 项系数为 1，所以 $|A| = (x+y+z+w)(x+y-z-w)(x-y+z-w)(x-y-z+w)$.

2.3 特殊行列式

范德蒙德行列式是一种特殊的行列式，在线性代数一些定理的证明经常出现：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

这个等式可以用数学归纳法证明，而范德蒙德行列式应用的重点在于观察出它的形态.

一般情况下我们有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |A||D| - |B||C|$，但对于分块上三角矩阵有 $\begin{vmatrix} A & B \\ 0 & D \end{vmatrix} = |A||D|$，此外对分块矩阵行列式的计算使用下面两个结论将对我们很有帮助：

(i) 设 A, B, C, D 为同阶方阵，若 A 可逆，则：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$$

若 D 可逆，则：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D||A - BD^{-1}C|$$

(ii) 设 A, D 可逆但不必同阶，则 $|A||D - CA^{-1}B| = |D||A - BD^{-1}C|$

Problem 2.6 (2019 期末) 解关于 x 的方程 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \end{vmatrix} = 0.$ 范德蒙行列式

Solution: 利用范德蒙德行列式易知解为 $x = 1, \pm 2$.

Problem 2.7 设 a, b, c 为互异实数，证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$ 的充要条件为 $a + b + c = 0.$

Solution: 考虑范德蒙德行列式 $D(x) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & x \\ a^2 & b^2 & c^2 & x^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & x^3 \end{vmatrix}$，则题目中的行列式为 $D(x)$ 中 x^2 项的系数，由 $D(x) = (b-a)(c-a)(c-b)(x-a)(x-b)(x-c) = (b-a)(c-a)(c-b)[-(a+b+c)x^2 + \lambda]$ 知原行列式等于 $-(b-a)(c-a)(c-b)(a+b+c)$，故其值为 0 的充要条件为 $a + b + c = 0$.

Problem 2.8 设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个不全为 0 的实数，求证：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} > 1$$

Solution:

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} = \left| I_n + \begin{bmatrix} a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & a_n^2 \end{bmatrix} \right|$$

$$= \left| I_n + \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} (1)^{-1} \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \right| = |I_n| \left| 1 + \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix} I_n^{-1} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_n \end{bmatrix} \right|$$

故原行列式的值为 $1+\sum_{i=1}^n a_i^2 > 1$.

2.4 伴随矩阵

设 A 是 n 阶方阵，定义 A 的伴随矩阵 $A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$，其中 A_{ij} 表示 A 的代数余子式，对伴随矩阵我们有如下性质：

(i) $AA^* = A^*A = |A|I_n$，特别当 A 可逆时有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$.

(ii) $(AB)^* = B^*A^*, (A^T)^* = (A^*)^T$，若 A 可逆还有 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$.

Problem 2.9 设 A 为 n 阶矩阵，证明 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

Solution: 若 A 可逆，在 $AA^* = |A|I_n$ 两侧取行列式得 $|A| \cdot |A^*| = |A|^n$，两边除以 $|A|$ 得 $|A^*| = |A|^{n-1}$.

若 A 不可逆，有 $|A| = 0$，设 A 的秩为 r，存在可逆矩阵 P, Q 使得 $PAQ = B = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，若 $r \le n-2$，显然 $B^* = 0$，若 $r = n-1$ 有 $B^* = \begin{bmatrix} 0_{n-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，两种情况下都有 $|B^*| = 0$，根据 $A = P^{-1}BQ^{-1}$ 得 $|A^*| = |(Q^{-1})^*B^*(P^{-1})^*| = |(Q^{-1})^*| \cdot |B^*| \cdot |(P^{-1})^*| = 0$，所以 $|A^*| = |A|^{n-1}$ 仍然成立.

Problem 2.10 设 A 为 m 阶矩阵，B 为 n 阶矩阵，求矩阵 $C=\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵.

Solution: 与上题类似，我们需要分别考虑 A,B 可逆、不可逆的情况，其中最简单的情形是 A,B 都可逆，虽然需要分类讨论，但伴随矩阵相关的结论形式无论矩阵是否可逆往往都是相同的，因此可以利用可逆的情形首先得到结论，再根据结论的形式来证明不可逆的情形仍然成立即可.

当 A,B 都可逆时显然 C 也可逆，有 $C^{-1}=\begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & B^{-1} \end{bmatrix}$，由 $CC^*=|C|I_{n+m}$ 得 $C^*=|C|C^{-1}$，再由 $|C|=|A|\cdot|B|$ 和 $AA^*=|A|I_m, BB^*=|B|I_n$ 得 $C^*=\begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}$.

接下来断言对任意情形都有 $C^*=\begin{bmatrix} |B|A^* & 0 \\ 0 & |A|B^* \end{bmatrix}$，并根据这个结论证明即可.

$|CC^*| = |A|^n|B|^n$

3 特征值与对角化

3.1 特征值

设 A 是数域 $\mathbf{F}$ 上的 n 阶矩阵，若 $\lambda \in \mathbf{F}$，x 是 $\mathbb{F}^n$ 上非零列向量，满足 $Ax = \lambda x$，则称 λ 是 A 的特征值，x 是从属于特征值 λ 的特征向量，在这个定义中需要注意几点：

(i) 特征值的取值和数域相关，n 阶实矩阵记重数也未必有 n 个特征值，但将它看成复数域上的矩阵则是成立的.

(ii) 特征值可以是 0，但特征向量一定是非零向量. 证明题常用

(iii) 从属于不同特征值的特征向量一定是线性无关的，而从属于同一个特征值的特征向量可能是无关也可能是相关的.

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵，称多项式 $f(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ 为 A 的特征多项式，记 n 阶矩阵 A 的行列式为 $|A|$，迹为 $tr(A)$，则 A 的特征多项式有以下形式：

$$\boxed{f(\lambda) = \lambda^n - tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|}$$

由于相似矩阵有相同的特征值和特征多项式，这个性质可以用来简单地证明相似矩阵有相同的行列式和迹，且行列式等于特征值之积、迹等于特征值之和：

(i) $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$

(ii) $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

Problem 3.1 设 A 是 n 阶方阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值，$f(x)$ 是一个多项式，证明 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的全部特征值.

Solution: 注意到 A 未必相似于对角矩阵，但 A 一定可以相似于一个上三角矩阵，且对角线上元素就是 A 的特征值，即存在可逆矩阵 P 使得：

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

上三角矩阵的和、数乘与幂次都是上三角矩阵，考虑矩阵多项式 $f(A)$，可计算得：

$$P^{-1}f(A)P = f(P^{-1}AP) = \begin{bmatrix} f(\lambda_1) & * & \cdots & * \\ 0 & f(\lambda_2) & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & f(\lambda_n) \end{bmatrix}$$

因此 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的全部特征值.

$Ax = \lambda x \quad x = A^{-1}\lambda x \quad A^{-1}x = \frac{1}{\lambda}x$

Problem 3.2 设 A 是 n 阶可逆方阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值，A^{-1} 是 A 的逆矩阵，证明 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值.

Solution: 设 λ 是 A 的特征值，x 是从属于 λ 的特征向量，有 $Ax = \lambda x$，两边同时左乘 A^{-1} 和 λ^{-1} 得 $A^{-1}x = \lambda^{-1}x$，所以 λ^{-1} 是 A^{-1} 的特征值，原命题得证.

Problem 3.3 设 A 是 n 阶方阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值，A^* 是 A 的伴随矩阵，证明 $\prod_{i\neq 1}\lambda_i, \prod_{i\neq 2}\lambda_i, \cdots, \prod_{i\neq n}\lambda_i$ 是 A^* 的全部特征值.

Solution: A 一定可以相似于一个上三角矩阵，且对角线上元素就是 A 的特征值，即存在可逆矩阵 P 使得：

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \cdots & * \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$$

上三角矩阵的伴随矩阵仍然是上三角矩阵，可计算得：

$$P^*A^*(P^*)^{-1} = (P^{-1}AP)^* = \begin{bmatrix} \prod_{i\neq 1}\lambda_i & * & \cdots & * \\ 0 & \prod_{i\neq 2}\lambda_i & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \prod_{i\neq n}\lambda_i \end{bmatrix}$$

因此 $\prod_{i\neq 1}\lambda_i, \prod_{i\neq 2}\lambda_i, \cdots, \prod_{i\neq n}\lambda_i$ 是 A^* 的全部特征值.

Problem 3.4 设 A 是 n 阶整数矩阵，证明方程 $Ax = \frac{1}{2}x$ 没有非零解.

Solution: 若方程有非零解，等价于 $\frac{1}{2}$ 是 A 的特征值，考虑特征多项式 $f(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_n$，其中 $a_1, \cdots, a_n$ 都是整数，代入 $\lambda = \frac{1}{2}$ 后可得 $f(\frac{1}{2}) = (\frac{1}{2})^n + a_1(\frac{1}{2})^{n-1} + \cdots + a_n = (\frac{1}{2})^n + (\frac{1}{2})^{n-1}c$，其中 c 是一个整数，则显然 $f(\frac{1}{2})$ 不能为 0，故原方程无解.

3.2 对角化

设 A, B 是 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$，则称 A 与 B 相似，如果矩阵 A 与一个对角矩阵 Λ 相似，则称 A 可对角化.

对于矩阵 A 的特征值 λ 的重数有两个不同的刻画：

(i) 设 V_λ 表示方程 $(\lambda I - A)x = 0$ 的解空间，则称 $\dim V_\lambda$ 为 A 的几何重数.

(ii) 设 $f(x)$ 为 A 的特征多项式，则 $f(x)$ 中 $x - \lambda$ 因子的次数称为 A 的代数重数，可以证明每个特征值的几何重数不大于代数重数.

有如下几个方法判定矩阵 A 是否可对角化：

(i) A 可对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量.

(ii) 若 A 有 n 个不同的特征值，则 A 可对角化.

(iii) A 可对角化当且仅当对任一特征值几何重数等于代数重数.

将一个可对角化的 n 阶矩阵进行对角化，等价于去求出该矩阵 n 个线性无关的特征向量，这里面最重要的是实对称矩阵，可以证明实对称矩阵 A 能进行正交相似对角化，其过程如下：

(i) 计算 $|\lambda I - A|$ 得到 A 的特征多项式，令特征多项式等于 0 求出 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$.

(ii) 对每个 λ_i 解方程 $(\lambda_i I - A)x = 0$，得到基础解系 $\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \cdots, \xi_{i,k_i}$，由于矩阵 A 可对角化，应该有 $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$，其中 n 为 A 的阶数.

(iii) 对每个 λ_i，将基础解系 $\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \cdots, \xi_{i,k_i}$ 做 Gram-Schmidt 正交化并单位化，得到单位正交向量组 $q_{i,1}, q_{i,2}, \cdots, q_{i,k_i}$.

(iv) 将所有特征值对应的单位正交向量组拼在一起得矩阵 Q，则 Q 是正交阵且 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ 为对角阵，其中 Λ 对角线上为对应的特征值.

Problem 3.5 (2019 期末) 判断以下矩阵是否可以相似对角化，并简单说明理由.

(1) $\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 100 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 23 & 69 & 188 \\ 69 & 45 & 202 \\ 188 & 202 & 68 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 4 & 8 & 12 \end{bmatrix}$

Solution:

(1) 这个矩阵有两个不同的特征值 3, 5，所以可对角化.

(2) 这个矩阵有唯一的特征值 100，但显然 100 的几何重数为 1，所以不可对角化.

(3) 这个矩阵是实对称矩阵，实对称矩阵一定可对角化.

(4) 这个矩阵是秩为 1 的矩阵，其一定有特征值 0，且 0 的几何重数为 2，而根据迹或乘得该矩阵的两个向量的内积可以判断出还有一个特征值为 17，则特征值的几何重数之和为 3，故该矩阵可对角化.

Problem 3.6 设 α, β 是两个正交非零列向量，求矩阵 $A = \alpha\beta^T$ 的特征值，并判断 A 是否可以相似对角化.

$\alpha^T\beta = 0$　　A为零阵

Solution: $A^2 = \alpha\beta^T\alpha\beta^T = (\beta^T\alpha)\alpha\beta^T = 0$，所以 A^2 特征值均为 0，则 A 特征值也均为 0.

若 A 可以相似对角化，则 A 一定相似于零矩阵，这等价于 A 就是零矩阵，与 α, β 非零矛盾，所以 A 不可以相似对角化.

$P^{-1}AP = \Lambda$

Problem 3.7 设 n 阶矩阵 A 可对角化，证明矩阵 $\begin{bmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{bmatrix}$ 可对角化.

Solution: 因为 A 可对角化，所以 A 有 n 个线性无关特征向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，设它们依次对应特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$，注意到：从定义出发进行证明

$$\begin{bmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i \end{bmatrix} = (\lambda_i + \lambda_i^2) \begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_i \\ -\alpha_i \end{bmatrix} = (\lambda_i - \lambda_i^2) \begin{bmatrix} \alpha_i \\ -\alpha_i \end{bmatrix}$$

显然 $\begin{bmatrix} \alpha_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \alpha_i \\ -\alpha_i \end{bmatrix}$ 线性无关，因此 $\begin{bmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{bmatrix}$ 有 $2n$ 个线性无关特征向量，故可以对角化.

Problem 3.8 设 A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵，C 是 $m \times n$ 矩阵，$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$，证明若 M 可对角化，则 A, B 都可对角化.

Solution: 对一个矩阵 A 的特征值 λ，我们记其几何重数为 $GM_A(\lambda)$，代数重数为 $AM_A(\lambda)$.

此前已经证明过 $|\lambda I_{m+n} - M| = |\lambda I_m - A| \cdot |\lambda I_n - B|$，所以任取 M 的特征值 λ_0 有 $AM_M(\lambda_0) = AM_A(\lambda_0) + AM_B(\lambda_0)$.

考虑分块矩阵 $\lambda_0 I_{m+n} - M = \begin{bmatrix} \lambda_0 I_m - A & C \\ 0 & \lambda_0 I_n - B \end{bmatrix}$，有矩阵秩的不等式 $r(\lambda_0 I_{m+n} - M) \geq r(\lambda_0 I_m - A) + r(\lambda_0 I_n - B)$ 成立，则 $GM_M(\lambda_0) = (m+n) - r(\lambda_0 I_{m+n} - M) \leq (m - r(\lambda_0 I_m - A)) + (n - r(\lambda_0 I_n - B)) = GM_A(\lambda_0) + GM_B(\lambda_0)$.

由特征值几何重数不大于代数重数，有不等式 $GM_M(\lambda_0) \leq AM_M(\lambda_0)$、$GM_A(\lambda_0) \leq AM_A(\lambda_0)$、$GM_B(\lambda_0) \leq AM_B(\lambda_0)$，但 M 可对角化，所以 $GM_M(\lambda_0) = AM_M(\lambda_0)$，则 $GM_A(\lambda_0) + GM_B(\lambda_0) = AM_A(\lambda_0) + AM_B(\lambda_0)$，进而有 $GM_A(\lambda_0) = AM_A(\lambda_0), GM_B(\lambda_0) + AM_B(\lambda_0)$ 成立，所以 A, B 都可对角化.

3.3 正定矩阵

称实对称矩阵 A 是正定矩阵，有许多等价定义：

(i) A 的所有特征值 $\lambda_i > 0$.

(ii) $x^T Ax > 0$ 对所有非零向量 x 成立.

(iii) A 的所有顺序主子式为正（或 A 的所有主子式为正）.

(iv) 存在列满秩矩阵 R 使得 $A = R^T R$.

正定矩阵有如下性质：

(i) 若 A, B 都是正定矩阵，则 $A + B$ 也是正定矩阵.

(ii) 若 A 是正定矩阵，则存在矩阵 B，使得 $A = B^2$，对 A 做正交相似对角化得 $A = Q\Lambda Q^T$ 可知 $B = Q\sqrt{\Lambda}Q^T$.

(iii) 若 A 是正定矩阵，则 A^2, A^{-1} 都是正定矩阵.

(iv) 若 A 是正定矩阵，C 是可逆阵，则 $A^T CA$ 也是正定矩阵.

仿照正定矩阵，可以类似定义实对称矩阵 A 是半正定矩阵，其等价定义如下：

(i) A 的所有特征值 $\lambda_i \geq 0$.

(ii) $x^T Ax \geq 0$ 对所有非零向量 x 成立.

(iii) A 的所有主子式非负（此处仅有顺序主子式非负是不够的）.

(iv) 存在矩阵 R 使得 $A = R^T R$.

Problem 3.9 (2019 期末) 判断以下实对称阵是否正定，并简单说明理由.

(1) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 0 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

(4) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Solution:

$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $2[v_1] + 2[v_4]$

$2 \quad 2v_3 = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]A$

$[[v_1]\ [v_2]\ [v_3]\ [v_4]] = [v_1\ v_2\ v_3\ v_4]A$

(1) 简单计算所有顺序主子式即可知该矩阵正定.

(2) 这是一个 3 阶方阵，但它的秩不超过 2，所以不是正定矩阵.

(3) 这个矩阵被写成了 R^TR 的形式，且 R 是列满秩的，所以是正定矩阵.

(4) 这个矩阵可以合同变换为中间的对角阵，所以不是正定矩阵.

Problem 3.10 设 A 是可逆的实对称矩阵，B 是实反对称矩阵且 $AB = BA$，证明 $A + B$ 是可逆矩阵.

Solution: 考虑任意非零向量 x，有 $x^T(A+B)^T(A+B)x = x^T(A^TA+A^TB+B^TA+B^TB)x$，而 $A^TB+B^TA = AB-BA = 0$,因此 $x^T(A+B)^T(A+B)x = x^T(A^TA+B^TB)x = x^TA^TAx+x^TB^TBx$，注意到 A^TA 是正定矩阵，B^TB 是半正定矩阵，因此 $x^T(A+B)^T(A+B)x > 0$，即 $(A+B)^T(A+B)$ 是正定矩阵，有 $|A+B|^2 > 0$，所以 $A+B$ 是可逆矩阵.

Problem 3.11 设 A 是 n 阶正定矩阵，计算函数 $f(x) = x^TAx + 2\beta^Tx + c$ 的最小值.

Solution: 注意到 $f(x) = \begin{bmatrix} x^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & \beta \\ \beta^T & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix}$，由 A 可逆，做变换 $\begin{bmatrix} x \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -A^{-1}\beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix}$ 得 $f(x) = \begin{bmatrix} y^T & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & c-\beta^TA^{-1}\beta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ 1 \end{bmatrix} = y^TAy - \beta^TA^{-1}\beta + c$，由于 A 正定，所以当 $x = -A^{-1}\beta$ 时 $f(x)$ 有最小值 $c - \beta^TA^{-1}\beta$.

4 奇异值分解

Problem 4.1 (2019 期末) 设 $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

(1) 求 A 的奇异值分解 $A = U\Sigma V^T$，其中 U 是 3 阶正交阵，V 是 2 阶正交阵.

(2) 应用上一问写出 A 的四个基本子空间的一组标准正交基.

(3) 设 $M = \begin{bmatrix} 0 & A \\ A^T & 0 \end{bmatrix}$，若 $Av = \sigma u$，其中 u, v 是奇异向量，σ 是奇异值，证明 $\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$ 是 M 的特征向量，并由此用奇异向量给出 5 阶正交阵 Q，使得 Q^TMQ 是对角阵.

Solution:

(1) 直接按照奇异值分解的流程进行计算即可，结果为：

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 \\ 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, V = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

(2) 这里用到一个结论，设 A 是一个秩为 r 的 $n \times m$ 矩阵，有奇异值分解 $A = U\Sigma V^T$，则有：

- $u_1, u_2, \cdots, u_r$ 是 $C(A)$ 的一组标准正交基.
- $u_{r+1}, u_{r+2}, \cdots, u_n$ 是 $N(A^T)$ 的一组标准正交基.
- $v_1, v_2, \cdots, v_r$ 是 $C(A^T)$ 的一组标准正交基.
- $v_{r+1}, v_{r+2}, \cdots, v_m$ 是 $N(A)$ 的一组标准正交基.

由此不难写出原问题中 A 的四个基本子空间的一组标准正交基，此处不再赘述.

(3) 按照题意可以直接验证 $\begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_3 \\ 0 \end{bmatrix}$ 都是 M 的特征向量，此外可再构造两个特征向量 $\begin{bmatrix} u_1 \\ -v_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_2 \\ -v_2 \end{bmatrix}$，分别单位化即可得正交阵 Q，结果为：

$$Q = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & 0 & 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

5 线性变换

5.1 线性变换的性质

设 U,V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，线性映射 $\varphi : U \to V$ 是满足如下条件的映射：

(i) $\forall \alpha\beta \in U, \varphi(\alpha+\beta) = \varphi(\alpha) + \varphi(\beta)$

(ii) $\forall \alpha \in U, k \in \mathbb{F}, \varphi(k\alpha) = k\varphi(\alpha)$

对线性映射 φ，同样有单射和满射的概念，如果 φ 既是单射又是满射，则称 φ 是线性同构，从 V 到 V 自身的线性映射称为 V 上的线性变换.

设 φ 是从 U 到 V 的线性映射，φ 的像构成 V 的子空间，记作 $\operatorname{Im}\varphi$，其维数称为 φ 的秩，U 中在 φ 下映射为零向量的所有向量构成 U 的子空间，记作 $\operatorname{Ker}\varphi$，其维数称为 φ 的零化度，若 A 是 φ 在任意一组基下的表示矩阵，有 φ 的秩等于 A 的秩.

关于像和核的维数，有维数公式：

$$\dim \operatorname{Im}\varphi + \dim \operatorname{Ker}\varphi = \dim U$$

Problem 5.1 设 φ 是 n 维线性空间 U 上的线性变换，$\alpha \in U$ 满足 $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$ 而 $\varphi^m(\alpha) = 0$，证明 $\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \cdots, \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关.

Solution: 设 $a_0\alpha + a_1\varphi(\alpha) + a_2\varphi^2(\alpha) + \cdots + a_{m-1}\varphi^{m-1}(\alpha) = 0$，在两边同时作用 φ^{m-1} 得 $a_0\varphi^{m-1}(\alpha) = 0$，由于 $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$，所以 $a_0 = 0$.

再在等式两边同时作用 φ^{m-2} 得 $a_1\varphi^{m-1}(\alpha) = 0$，由于 $\varphi^{m-1}(\alpha) \neq 0$，所以 $a_1 = 0$，依此类推可得 $a_0 = a_1 = \cdots = a_{m-1} = 0$，所以 $\alpha, \varphi(\alpha), \varphi^2(\alpha), \cdots, \varphi^{m-1}(\alpha)$ 线性无关.

Problem 5.2 设 A 是 n 阶方阵，证明 $r(A^n) = r(A^{n+1}) = r(A^{n+2}) = \cdots$.

Solution: 将 A 看作是 n 维向量空间上线性变换的表示矩阵，设 φ 表示该线性变换，注意到我们有子空间链：

$$\operatorname{Im}\varphi^{n+1} \subseteq \operatorname{Im}\varphi^n \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{Im}\varphi^2 \subseteq \operatorname{Im}\varphi \subseteq \mathbb{R}^n$$

由于链中 $n+2$ 个子空间的维数都应该在 $[0,n]$ 中，所以必然存在 $m \in [0,n]$ 使得 $\operatorname{Im}\varphi^m =\in \varphi^{m+1}$，接下来我们证明对任意 $k \geq m$ 都有 $\operatorname{Im}\varphi^k = \operatorname{Im}\varphi^{k+1}$.

一方面显然 $\operatorname{Im}\varphi^{k+1} \subseteq \operatorname{Im}\varphi^k$，另一方面 $\forall \alpha \in \operatorname{Im}\varphi^k$，都存在 $\beta \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\varphi^k(\beta) = \alpha$，由于 $\varphi^m(\beta) \in \operatorname{Im}\varphi^m = \operatorname{Im}\varphi^{m+1}$，所以 $\exists \gamma \in \mathbb{R}^n$ 使得 $\varphi^m(\beta) = \varphi^{m+1}(\gamma)$，从而：

$$\alpha = \varphi^k(\beta) = \varphi^{k-m}(\varphi^m(\beta)) = \varphi^{k-m}(\varphi^{m+1}(\gamma)) = \varphi^{k+1}(\gamma) \in \operatorname{Im}\varphi^{k+1}$$

所以 $\forall k \geq m$ 都有 $\operatorname{Im}\varphi^k = \operatorname{Im}\varphi^{k+1}$，对等式两边取维数后原命题得证.

$$D_{2n} = a\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 0 \; c & & & & & d \;\; d \end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & 0 & 0 & \cdots & & d \; 0 \end{vmatrix}$$

5.2 线性变换的矩阵

$= ad\,D_{2n-2} - bc\,D_{2n-2}$

$= (ad-bc)\,D_{2n-2}$ $\quad (ad-bc)^n$

设 φ 是从 n 维线性空间 U 到 m 维线性空间 V 的线性映射，分别取 U 的基为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，V 的基为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，令：

$D_n = (\alpha+\beta)D_{n-1} - \alpha\beta D_{n-2}$

$D_n - \alpha D_{n-1} \quad \beta = (D_{n-1} - \alpha D_{n-2})$

$$\begin{cases} \varphi(e_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m \\ \varphi(e_2) = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m \\ \qquad\qquad \cdots \\ \varphi(e_n) = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nm}\alpha_m \end{cases}$$

则称矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times m}$ 是 φ 在给定基下的表示矩阵，两个线性映射的复合对应它们表示矩阵的乘法运算.

设 U 是 n 维线性空间，φ 是 U 上的一个线性变换，在一组基下的表示矩阵为 A，另一组基下的表示矩阵为 B，且从第一组基到第二组基的过渡矩阵为 P，则有 $B = P^{-1}AP$，换句话说线性变换在不同的基下的表示矩阵是相似的.

Problem 5.3 (2019 期末) 定义 $M_2(\mathbb{R})$ 上的线性变换 $T: M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ 满足：

$$T(A) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} A \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

求 T 在基 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 下的矩阵.

Solution: 分别设 $E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，代入计算得：

$$T(E_1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2E_1 + 2E_3$$

$$T(E_2) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 + E_4$$

$$T(E_3) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = 2E_1 + 2E_3$$

$$T(E_4) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2 + E_4$$

根据计算结果，可以直接写出对应矩阵为 $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.