几何与代数(1)考试样题二

一．填空题（将答案填在空格内．每空 4 分，合计 40 分）

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} =$ ________________ .

$\lambda_A\lambda_B = 2\lambda_A + \lambda_B$

2．设 A, B 都是 3 阶矩阵，满足 $AB = 2A + B$，已知行列式 $|A - I| = 1$，则行列式

$|B - 2I| =$ __2__ .

$(A-I)B - 2(A-I) = 2I$

$(A-I)(B-2I) = 2I$

$|B-2I| = 2$

$|A-I||B-2I| = 2$

3．设 A 是 3 阶矩阵，将 A 的第一行的 -2 倍加到第三行，再将第二行和第三行对换，得到

矩阵 B，则 $BA^{-1} =$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$\begin{bmatrix} 1 & & \\ -2 & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & & \\ 2 & & 1 \\ & 1 & \end{bmatrix}$ $A\ A^{-1}$

4．过点 $(3,\ 2,\ 1)$ 与直线 $\dfrac{x}{3} = \dfrac{y}{0} = z$ 平行且与平面 $x - y + z + 1 = 0$ 垂直的平面的方程为

________________________________ .

5．设 R^3 上的向量 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关，矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$，当 $a =$ __-1__ 时，向量

组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 线性相关.

$B = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$ $A(B-I)$

6．设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，已知矩阵 A 与矩阵 B 相似，则秩 $r(AB - A) =$ __1__ .

$A(B-I)$ $|B-I| = 0$

7．已知矩阵 $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -1 \\ -4 & 4 & a \end{pmatrix}$ 有特征值 $\lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 5$，则 $a =$ __1__ .

$\begin{vmatrix} & & 0 \\ & 1-\lambda & -1 \\ & & -\lambda-1 \end{vmatrix} =$

8．设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta$ 是 R^3 上的向量，其中 α_1, α_2 线性无关，已知 $\beta = \alpha_1 - \alpha_2 + \alpha_3$，

且 $\beta = 2\alpha_1 + \alpha_2 - \alpha_3$，$A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$，则非齐次线性方程组 $Ax = \beta$ 的通解

是______________________________ .

$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \beta$

$r = 2$, $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} + k\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$

$\alpha_1 + 2\alpha_2 - 2\alpha_3$ 为

9．设 A 是 3 阶矩阵，已知 α 是 A 的属于特征值 λ 的一个特征向量，B 是与 A 相似的矩阵，

且 $B = P^{-1}AP$，则 ___$P^{-1}\lambda$___ 是 B 的属于特征值 λ 的一个特征向量.

$P^{-1}AP\,P^{-1}\alpha = B\,P^{-1}\alpha = P^{-1}\lambda\alpha$.

10．实二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 - 2x_1x_3$ 的规范形为____________________ .

$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ ~~对角化~~ 取特征值.

二．解答题（第 11，12，13 题各 15 分，14 题 7 分，15 题 8 分，合计 60 分）

11．已知 R^3 的两个基分别为 $\varepsilon_1 = (1,\ 0,\ 0)^T$，$\varepsilon_2 = (0,\ 1,\ 1)^T$，$\varepsilon_3 = (0,\ 1,\ 0)^T$ 和 $\eta_1 = (1,\ -1,\ 0)^T$，$\eta_2 = (1,\ 0,\ 0)^T$，$\eta_3 = (0,\ 0,\ 1)^T$，

（1） 设 σ 是 R^3 上的线性变换，已知 σ 在基 η_1,η_2,η_3 下的矩阵为 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

$\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

求 σ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵.

（2）设 $\alpha = (1,\ -1,\ 1)^T$，求 $\sigma(\alpha)$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的坐标.

$= \varepsilon_1 - \varepsilon_3,\ \varepsilon_1,\ -\varepsilon_1$ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

12．设三元二次型 $f(x_1,x_2,x_3) = x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + ax_3^2 - x_2x_3$ 的秩为 2，

（1）求参数 a；

（2）求正交矩阵 Q，作正交替换 $X = QY$，化二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形；

（3）指出 $f(x_1,x_2,x_3) = 1$ 表示何种二次曲面.

13．设齐次线性方程组 $(n \geq 2)$

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 + bx_3 + \cdots + bx_n = 0, \\ bx_1 + ax_2 = 0, \\ bx_1 + ax_3 = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ bx_1 + ax_n = 0, \end{cases}$$

其中 $b \neq 0$．试讨论 a,b 取何值时，该方程组只有零解；a,b 取何值时，有非零解，并在有非零解时，求方程组的通解.

$N(A)$

$n-r$. $\beta \in C(A^T)$

14．设 A 是 n 阶方阵，已知齐次线性方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$，若 β 不是方程组 $Ax = 0$ 的一个解，试证明向量组 $\beta, \alpha_1+\beta, \alpha_2+\beta, \cdots, \alpha_t+\beta$ 线性无关.

15．设 A 是 n 阶可逆实矩阵，试证明

（1） A^TA 是正定矩阵；

（2）A 可分解为一个正交矩阵和一个正定矩阵的乘积，即 $A = QS$，其中 Q 是正交矩阵，S 是正定矩阵.