强化练习二（不是作业）
注：答案是双刃剑，容易让人产生思维定式。仅仅作为参考，某些题答案不唯一，强烈建议自己思考自己动手。

1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

若A不可逆, 求a. 再求此时A所确定的$R(A), N(A), R(A)^{\perp}, N(A)^{\perp}$.
注：此题也可以用行列式等于零求出a，在此我们用高斯消元法。

解.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & a & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 3 & a & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & a-6 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 1+(a-6)/2 \end{bmatrix}$$

因此A不可逆等价于第三行为零行。也就是说$1+(a-6)/2=0$, $a=4$.
此时 $rank(A)=2, dim(N(A))=1$, A为如下矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 5 & -2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \Longrightarrow R(A) = span(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}).$$

A的行简化阶梯型矩阵的求解过程如下

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -12 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从上面的行简化阶梯型矩阵，我们得知

$$N(A) = \{x : Ax = 0, x \in \mathbb{R}^3\} = \{x : x = \begin{bmatrix} 0 \\ x_3/2 \\ x_3 \end{bmatrix}, x_3 \in \mathbb{R}\} = span(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})$$

接下来我们找子空间$R(A)$的正交补。注意到

$$x \in R(A)^{\perp}, \quad \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 = 0 \end{array} \right., \quad \Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & -5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -13 \\ 0 & 1 & 6 \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} 13x_3 \\ -6x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

$$\Longrightarrow R(A)^{\perp} = span(\begin{bmatrix} 13 \\ -6 \\ 1 \end{bmatrix})$$

接下来我们找子空间$N(A)$的正交补。注意到

$$x \in N(A)^{\perp} = \big(span(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})\big)^{\perp}, \quad \Longleftrightarrow x_2 + 2x_3 = 0, \quad \Longleftrightarrow x = \begin{bmatrix} x_1 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

$$\Longrightarrow N(A)^{\perp} = span(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix})$$

□

2. 试给出一个不存在LU分解的3阶可逆矩阵. 再找出它的一个PLU分解。

解. 此题有很多例题。 首先我们要找一个可逆矩阵但是其某一个顺序主子式不可逆，这样才能保证LU分解不存在。因为存在LU分解的充分必要条件是其顺序主子式都可逆。 最简单的做法就是让第一个顺序主子式不可逆，也就是令第一行第一列元素为零。

令

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

则A不存在LU分解。注意到A其实是一个置换矩阵，因此$A = AII$就是A一个PLU分解。

□

3. 令

$$X = \begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}$$

试给出X可逆关于A, B的充分必要条件并证明， 最后试求出X的逆。

解. X可逆的充分必要条件是A, B都为方阵且A, B均可逆。

- X可逆$\Longrightarrow$ A, B都为方阵且A, B均可逆。

若A为$m\times n$的矩阵， B为$k\times l$的矩阵， 则X为$(m+k)\times(n+l)$的矩阵。 因此X可逆，所以$m+k=n+l$且X满秩。

(i). 若$m<n$. 则A非列满秩，因此X非列满秩， 矛盾。

(ii). 若$m>n$. 则A非行满秩，因此X非行满秩， 矛盾。

因此只有一种可能$m=n$. 又因为$m+k=n+l$，所以$k=l$. 也就是说A,B均为方阵。且A,B行满秩且列满秩，否则X非满秩。 也就是说A,B满秩因此均可逆。

- A,B都为方阵且A,B均可逆 $\Longrightarrow$ X可逆.

因为

$$\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & A \\ B & 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

所以X可逆且逆为

$$\begin{bmatrix} 0 & B^{-1} \\ A^{-1} & 0 \end{bmatrix}$$

□

4. 给定n阶矩阵A, 若$rank(A)=r$. 求以下矩阵的秩并证明

$$B_1=\begin{bmatrix} A \\ CA \end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}$$

解. 回忆秩的定义,$rank(A)=dim(R(A))$. 注意到

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} A \\ CA \end{bmatrix}=B_1,\quad X:=\begin{bmatrix} I & 0 \\ C & I \end{bmatrix}$$

因为X可逆且左乘可逆矩阵不会改变矩阵的秩，所以我们有

$$rank(B_1)=rank(\begin{bmatrix} A \\ 0 \end{bmatrix})=rank(A)=r.$$

$$B_2=\begin{bmatrix} A & A \\ 0 & A \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix},\quad Y:=\begin{bmatrix} I & I \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

因为Y可逆且右乘可逆矩阵不会改变矩阵的秩， 所以

$$rank(B_2)=rank(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix}).$$

记$A=[a_1,\cdots,a_n]\subset\mathbb{R}^n$， 记$\{a_{i_1},\cdots,a_{i_r}\}$为向量组$\{a_1,\cdots,a_n\}$的极大线性无关部分组。 记

$$b_i=[a_i^T,0,\cdots,0]^T,\quad c_i=[0,\cdots,0,a_i^T]^T,$$

$$\Longrightarrow R(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & A \end{bmatrix})=span(b_1,\cdots,b_n,c_1,\cdots,c_n)\subset\mathbb{R}^{2n}.$$

且$\{b_{i_1},\cdots,b_{i_r},c_{i_1},\cdots,c_{i_r}\}$为子空间$span(b_1,\cdots,b_n,c_1,\cdots,c_n)$的一组基。因此

$$rank(B_2)=rank(\begin{bmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{bmatrix})=2rank(A)=2r.$$

□

5. 给定一个多项式$P(x)$。若$P(0)=0$, 试证明$rank(P(A))\le rank(A)$.

解. 因为$P(x)$是多项式，所以存在常数$c_0,\cdots,c_n\in\mathbb{C}$使得

$$P(x)=c_nx^n+\cdots+c_1x+c_0.$$

又因为$P(0)=0$, 所以

$$c_0=0,\quad \Longrightarrow P(x)=xf(x),\quad f(x)=c_nx^{n-1}+\cdots+c_1.$$

又因为 $rank(XY)\le\min\{rank(X),rank(Y)\}$, 所以

$$rank(P(A))=rank(Af(A))\le rank(A).$$

□

6. 令

$$A=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&0&1\\2&2&1&2\\3&3&2&3\end{bmatrix}$$

(i) 求$N(A),N(A^T)$, $R(A)$
(ii) 试构造一个矩阵B使得对任何$u\in N(A)$, 我们有$Bu\in R(A)$.
(iii) 试构造一个正交矩阵Q使得对任何$u\in N(A^T)$, 我们有$Qu\in R(A)$.

解. *(i)* 注意到

$$R(A)=span(v_1,v_2),\quad v_1:=\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix},\quad v_2:=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}.$$

接下来我们求解$N(A)$. 我们先用高斯消元法将A转化成行简化阶梯型矩阵。

$$A \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

因此主元位置在$1, 3$, 自由变量为x_2, x_4. 因此零空间$N(A)$为

$$N(A) := \{x : Ax = 0, x \in \mathbb{R}^4\} = \{x : x = \begin{bmatrix} -x_2 - x_4 \\ x_2 \\ 0 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_2, x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$= span(u_1, u_2), \quad u_1 := \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 := \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

最后我们求解$N(A^T)$. 我们既可以先求出A^T然后再用高斯消元法也可以用子空间的关系$N(A^T) = (R(A))^\perp$推出

$$x \in N(A^T) = (R(A))^\perp, \quad \Longleftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

因此主元位置在$1, 2$, 自由变量为x_3, x_4. 因此零空间$N(A^T)$为

$$N(A^T) := \{x : x = \begin{bmatrix} -x_3 - 2x_4 \\ -x_3 - x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\} = span(v_3, v_4)$$

其中

$$v_3 := \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(ii) 我们先将$N(A)$的一组基$\{u_1,u_2\}$扩张成$\mathbb{R}^4$的一组基。我们添加主元所对应的e_1,e_3. 容易验证$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}, u_3:=e_1, u_4:=e_3$线性无关为一组基。原因如下：

若$\lambda_1 u_1+\cdots+\lambda_4 u_4=0$, 我们注意到$u_3,u_4$在第二，第四分量均为零。同时$u_1,u_2$在 第二，第四分量不同时为零且不同时不为零，因此$\lambda_1=\lambda_2=0$. 接下来我们可以通过判断第一，第三分量推出$\lambda_3=\lambda_4=0$. 也就是说$\{u_1,u_2,u_3,u_4\}$线性无关。

满足条件的矩阵有很多个。主要我们将一组基之间建立一个对应的关系，那么子空间之间也就建立了相应的对应的关系。

例如只要

$$Bu_1=v_1, \quad Bu_2=v_2, \quad Bu_3=0, \quad Bu_4=0.$$

我们就有$\forall u\in N(A)=span(u_1,u_2), Bu\in span(v_1,v_2)=R(A)$. 注意到

$$e_2=u_1+e_1=u_1+u_3, \quad e_4=u_2+e_1=u_2+u_3$$

$$\Longrightarrow B=BI_4=B[e_1,e_2,e_3,e_4]=[0,v_1,0,v_2]=\begin{bmatrix}0&1&0&1\\0&1&0&0\\0&2&0&1\\0&3&0&2\end{bmatrix}$$

(iii) 因为$R(A)$为$N(A^T)$的正交补，所以 $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$为一组基。为了得到一组标准正交基，我们先用*Gram-Schmidt* 正交化然后再标准化。 注意到$R(A)$为$N(A^T)$的正交补， 所以其实我们只用分别将$\{v_1,v_2\}$和$\{v_3,v_4\}$标准正交化即可。 令

$$\tilde{v}_1=v_1, \quad \tilde{v}_2=v_2-\frac{v_2\cdot\tilde{v}_1}{|\tilde{v}_1|^2}\tilde{v}_1=\begin{bmatrix}1\\0\\1\\2\end{bmatrix}-\frac{1+2+6}{15}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2/5\\-3/5\\-1/5\\1/5\end{bmatrix}$$

$$\tilde{v}_3=v_3, \quad \tilde{v}_4=v_4-\frac{v_4\cdot\tilde{v}_3}{|\tilde{v}_3|^2}\tilde{v}_3=\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\1\end{bmatrix}-\frac{3}{3}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

接下来我们将得到的正交向量组标准化，

$$w_1:=\frac{\tilde{v}_1}{|\tilde{v}_1|}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}1\\1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad w_2=\frac{\tilde{v}_2}{|\tilde{v}_2|}=\frac{1}{\sqrt{15}}\begin{bmatrix}2\\-3\\-1\\1\end{bmatrix}$$

$$w_3 = \frac{\tilde{v}_3}{|\tilde{v}_3|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\\0\end{bmatrix}, \quad w_4 = \frac{\tilde{v}_4}{|\tilde{v}_4|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\0\\-1\\1\end{bmatrix}$$

因此我们得到一组标准正交基$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$且$R(A) = span(w_1, w_2)$，$N(A^T) = span(w_3, w_4)$.

令

$$Qw_3 = w_1, \quad Qw_4 = w_2, \quad Qw_1 = w_3, \quad Qw_2 = w_4.$$

则对任何$u \in N(A^T)$, 我们有$Qu \in R(A)$. 并且$QQ_1 = Q_2$, 其中

$$Q_1 := [w_3, w_4, w_1, w_2], \quad Q_2 := [w_1, w_2, w_3, w_4]$$

因为Q_1, Q_2的列向量组都是一组标准正交基，所以Q_1, Q_2均为正交矩阵。又因为$Q = Q_2Q_1^{-1}$, 所以Q也为正交矩阵。

$$Q = Q_2Q_1^{-1} = Q_2Q_1^T = [w_1, w_2, w_3, w_4]\begin{bmatrix}w_3^T\\w_4^T\\w_1^T\\w_2^T\end{bmatrix} = w_1w_3^T + w_2w_4^T + w_3w_1^T + w_4w_2^T$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1 & -1 & 1 & 0\\-1 & -1 & 1 & 0\\-2 & -2 & 2 & 0\\-3 & -3 & 3 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2 & 0 & -2 & 2\\3 & 0 & 3 & -3\\1 & 0 & 1 & -1\\-1 & 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$+\frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-1 & -1 & -2 & -3\\-1 & -1 & -2 & -3\\1 & 1 & 2 & 3\\0 & 0 & 0 & 0\end{bmatrix} + \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-2 & 3 & 1 & -1\\0 & 0 & 0 & 0\\-2 & 3 & 1 & -1\\2 & -3 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{3\sqrt{5}}\begin{bmatrix}-6 & 1 & -2 & -2\\1 & -2 & 2 & -6\\-2 & 2 & 6 & 1\\-2 & -6 & 1 & 2\end{bmatrix}.$$

$\square$