线性代数期中小班辅导

小班辅导讲师 何昊天

2020 年秋季学期

线性代数

线性代数的研究对象：线性空间（现在我们在 $\mathbb{R}^n$ 的阶段）
研究一个对象就要研究它上面的态射：线性映射（现在我们在矩阵的阶段）
课程的三条路线：向量、矩阵、线性方程组

向量

向量从少到多，性质与结构逐渐丰富
一个向量：分量与长度
两个向量：加法、内积与夹角
向量组：生成的空间 $\text{span}(S)$、线性相关性
向量空间：四大子空间、基与维数

矩阵

矩阵的来源：向量拼成矩阵、线性映射的表示矩阵、线性方程组的系数矩阵

代数运算：$n \times m$ 的矩阵 $\Leftrightarrow \mathbb{R}^{n\times m}$ 中的向量

矩阵的逆：核心概念，需要知道如何判断、如何求解、如何使用

初等变换（重要的不变量：秩）$\Rightarrow$ 矩阵的 LU 分解

线性方程组

$Ax = b$ 的解集：$N(A) + x_p$
更高的观点：解线性方程组 $\Leftrightarrow$ 从行空间 $C(A^T)$ 到零空间 $N(A)$ $\Leftrightarrow$ 计算一个子空间的补空间

线性映射的概念

向量空间的基本性质：八条公理，可以反过来用这些性质公理化定义线性空间

线性映射：保持向量空间加法和数乘结构的映射

线性映射例题

例题

设有映射 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 和 $g,h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，满足 $f\left(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix}g(x,y,z)\\h(x,y,z)\end{bmatrix}$，证明 f 是线性映射当且仅当 g,h 都是线性映射。

向量组的概念

对于一个向量组 S，我们重点关注两个性质：$\mathrm{span}(S)$ 和 S 的线性相关性

在向量组中，我们需要解决三个问题：

i. S 能否表示出一个向量 b？S 能否表示出另一个向量组 T？S, T 是否等价？
ii. S 的极大线性无关组是什么
iii. S 的秩是多少

向量组例题

例题

设

$$a_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix},\ a_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix},\ a_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\k+2\\1\end{bmatrix},\ a_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\k+l\end{bmatrix},\ b=\begin{bmatrix}1\\1\\l+3\\5\end{bmatrix},$$

计算:

- i 当 k,l 取何值时，b 不能由 a_1,a_2,a_3,a_4 线性表示
- ii 当 k,l 取何值时，b 能由 a_1,a_2,a_3,a_4 唯一线性表示

向量组例题

例题

设 $a_1=\begin{bmatrix}0\\1\\2\\3\end{bmatrix}$, $a_2=\begin{bmatrix}3\\0\\1\\2\end{bmatrix}$, $a_3=\begin{bmatrix}2\\3\\0\\1\end{bmatrix}$, $b_1=\begin{bmatrix}2\\1\\1\\2\end{bmatrix}$, $b_2=\begin{bmatrix}0\\-2\\1\\1\end{bmatrix}$, $b_3=\begin{bmatrix}4\\4\\1\\3\end{bmatrix}$，证明 $\{b_1,b_2,b_3\}$ 可由 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 线性表示，但 $\{a_1,a_2,a_3\}$ 不能由 $\{b_1,b_2,b_3\}$ 线性表示。

向量组例题

例题

设 $a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，证明 $\{a_1, a_2\}$ 和 $\{b_1, b_2, b_3\}$ 是等价的。

向量组例题

例题

设 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个含有 s 个向量的向量组，假设对于任意一组数 $c_1, c_2, \cdots, c_s$，都有：

$$\sum_{i=1}^{s} c_i a_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} c_i b_i = 0$$

证明：$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 的一个极大线性无关组当且仅当 $b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_r}$ 是 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 的一个极大线性无关组。

基与维数的概念

从向量组继续扩展得到向量空间，最重要的是矩阵的四个子空间
生成整个空间 $+$ 线性无关 $=$ 一组基
两组基大小一定相同 $\Rightarrow$ 维数
注意！从逻辑上是先有基后有~~蛋~~维数

维数有关的性质

设 A 是一个 $n\times m$ 矩阵，则有:

i. $\dim C(A)+\dim N(A^T)=n$
ii. $\dim C(A^T)+\dim N(A)=m$

此外有维数公式:

$$\dim(U+V)=\dim U+\dim V-\dim(U\cap V)$$

基与维数例题

例题

设 a_1, a_2, a_3, a_4 是空间 $\mathcal{M}$ 的一组基，证明 $a_1 + a_2, a_2 + a_3, a_3 + a_4, a_4$ 也是 $\mathcal{M}$ 的基。

例题

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 $\mathcal{M}$ 中一组线性无关的向量，令 $b \in \mathcal{M}$ 是任意向量，证明 $\dim \operatorname{span}(a_1 + b, a_2 + b, \cdots, a_n + b) \geq n - 1$。

矩阵的代数运算

对于两个大小相同的矩阵 A, B，我们可以定义矩阵的加法，对任意一个矩阵我们可以定义它的数乘，加法和数乘满足的性质与一个数域上的线性空间的性质是完全相同的

矩阵上比线性空间更丰富的结构是矩阵的乘法，如果矩阵 A 的列数与矩阵 B 的行数相同，我们就可以按照规则对每个位置依次计算矩阵乘法

矩阵乘法没有交换律、有零因子且没有消去律，但矩阵乘法满足结合律、对加法满足分配律、对数乘满足交换律

矩阵的基本运算例题

例题

计算下列矩阵的 n 次幂：

i $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

ii $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

iii $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

矩阵的基本运算例题

例题

设 $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，计算所有满足 $AB=BA$ 的矩阵 B。

例题

设 $A=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{bmatrix}$，计算所有满足 $AB=BA$ 的矩阵 B。

矩阵的转置与逆

对于一个 $n \times m$ 的矩阵 $A = (a_{ij})$，定义它的转置是一个 $m \times n$ 矩阵 $A^T = (b_{ij})$，满足 $b_{ij} = a_{ji}$
对于一个 n 阶方阵 A，如果存在一个矩阵 B 使得 $AB = BA = I_n$，则称 A 是可逆的，B 称为 A 的逆矩阵，可以记作 A^{-1}
两个可逆矩阵的乘积也是可逆的，但不可逆矩阵做乘法结果一定不可逆
矩阵的转置与逆满足如下性质：

i $(A^T)^T = A, (A^{-1})^{-1} = A$
ii $(AB)^T = B^T A^T, (AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$
iii $(kA)^T = kA^T, (kA)^{-1} = \frac{1}{k} A^{-1}$
iv $(A + B)^T = A^T + B^T$，但 $A + B$ 的逆没有计算公式
v $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$

逆矩阵计算方法总结

常用的几类逆矩阵计算方法简单总结如下：

i Gauss-Jordan 消元法：利用 $A^{-1}\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & A^{-1} \end{bmatrix}$，对增广矩阵 $\begin{bmatrix} A & I \end{bmatrix}$ 进行初等变换消元

ii 分块矩阵求逆：对于 2×2 分块矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$，如果 A 和 A 的 Schur 补 $D - CA^{-1}B$ 都可逆，则可以计算出分块矩阵的逆矩阵来

iii Sherman-Morrison 公式：若 A 可逆，则 $A + uv^T$ 也可逆，其中 u, v 是 n 维向量，且有 $(A+uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{A^{-1}uv^TA^{-1}}{1+v^TA^{-1}u}$

iv 对于一个一般的抽象矩阵问题，可以直接用定义构造出其逆矩阵来

矩阵的逆例题

例题

设 $A=\begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$，其中 $a_i \neq 0, i=1,2,\cdots,n$，计算 A^{-1}。

初等变换的概念与性质

对一个矩阵有三类初等变换：对换、倍乘和倍加，分别对应于 Gauss 消元法的三类操作，对单位阵做一次初等变换得到初等变换矩阵，一个矩阵左乘初等变换矩阵等价于对行做了相应变换，右乘初等变换矩阵等价于对列做了相应变换，两个矩阵 A, B 相抵是说对 A 做若干初等变换后可以变成矩阵 B

任意矩阵 A 都相抵于 $\begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，其中 $r = r(A)$ 称为矩阵 A 的秩，

作为推论我们得知一个矩阵可逆当且仅当它可以分解成有限个初等变换矩阵的乘积

矩阵的初等变换例题

例题

证明任意一个秩为 r 的矩阵都可以写成 r 个秩为 1 的矩阵之和，但不能写成少于 r 个秩为 1 的矩阵之和。

矩阵的秩的性质

以下几个关于矩阵的秩的性质比较常用：

例题

证明下述结论：

i $r(AB) \leq \min(r(A), r(B))$

ii $r(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}) = r(A) + r(B), r(\begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}) \geq r(A) + r(B)$

iii $r(A+B) \leq r(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}) \leq r(A) + r(B)$

矩阵的秩例题

例题

设 A 为 n 阶方阵，证明 $A^2 = I$ 当且仅当 $r(A+I) + r(A-I) = n$。

例题

设 A 为 n 阶方阵，满足 $r(A) = r(A^2)$，证明 $\forall k, r(A) = r(A^k)$。

矩阵的秩例题

例题

设 A, B 为 n 阶方阵，满足 r(A)=r(BA)，证明 $r(A^2) = r(BA^2)$。

例题

设 A 是 $n \times m$ 阶矩阵，证明 $r(A^TA) = r(A)$。

线性方程组

线性方程组 $Ax=b$ 表示如下的一组方程：

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1m}x_m=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2m}x_m=b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nm}x_m=b_n \end{cases}$$

我们可以直接用秩来判断方程组解的情况：

i 若 $r(A)=r(\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix})=m$，则方程组有唯一解，特别的若 $n=m$ 则这个解就是 $x=A^{-1}b$

ii 若 $r(A)=r(\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix})<m$，则方程组有无穷多解

iii 若 $r(A)\neq r(\begin{bmatrix}A & b\end{bmatrix})$，则方程组无解

线性方程组的基本性质例题

例题

设有两个线性方程组 $Ax = b$ 和 $\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，证明第一个方程组有解的充要条件是第二个方程组无解。

线性方程组解的结构

当线性方程组有无穷多组解时，所有的解可以写成基础解系 $+$ 特解的形式，简记为 $N(A)+x_p$
基础解系只是 $N(A)$ 的任意一组基，当然可以有不同的基础解系
特解只是方程组的任意一个解，当然可以有不同的特解
注意到我们按照标准的方法去解方程组会获得确定的基础解系和特解，这是因为我们最后一步是“观察”得来的，而并不是推导的必然结果

线性方程组的解集例题

例题

求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为

$$a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}。$$

线性方程组的解集例题

例题

设 $r(A_{m\times 4})=3$， a_1,a_2,a_3 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解向量，且 $a_1=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}, a_2+a_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$， 求 $Ax=b$ 的通解。

线性代数是不是非常有趣?

是的!

谢谢大家

衷心希望这份资料对大家有所帮助，谢谢大家 $(> \omega <)$
祝同学们身体健康！