强化练习四（不是作业）
注：仅供参考

1. 求以下矩阵的行列式

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1-x & 2-x & 4 \\ x & 2-x & 1 \\ 1 & 1+x & 2+x^2 \end{bmatrix}, \quad C = 2A.$$

**解.**

$$det(A) = 1(2\times 2 - 1\times 3) - 2\times(3\times 2 - 1\times 3) + 4(3\times 3 - 2\times 3)$$
$$= 1 - 6 + 12 = 7.$$

$$det(B) = (1-x)\big((2-x)(2+x^2) - 1(1+x)\big) - (2-x)\big(x(2+x^2) - 1\big)$$
$$+4\big(x(1+x) - (2-x)\big)$$
$$= (1-x)(-x^3+2x^2-3x+3) - (2-x)(x^3+2x-1) + 4(x^2+2x-2)$$
$$= \big(x^4-3x^3+5x^2-6x+3\big) + \big(x^4-2x^3+2x^2-5x+2\big) + \big(4x^2+8x-8\big)$$
$$= 2x^4 - 5x^3 + 11x^2 - 3x - 3,$$

$$det(C) = 2^3 det(A) = 8det(A) = 56.$$

□

2. 求以下矩阵的行列式

$$A = \big[i + x_i y_j\big]_{n\times n}, \quad B = \big[x_i^{j-1}\big]_{n\times n}$$

**解.** 因为

$$det(A) = det(\big[i + x_i y_j\big]_{n\times n})$$

$$= \begin{bmatrix} 1+x_1y_1 & 1+x_1y_2 & \cdots & 1+x_1y_n \\ (x_2-2x_1)y_1 & (x_2-2x_1)y_2 & \cdots & (x_2-2x_1)y_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (x_n-nx_1)y_1 & (x_n-nx_1)y_2 & \cdots & (x_n-nx_1)y_n \end{bmatrix} = 0.$$

注意到$B$是一个范德蒙矩阵，因此行列式为

$$det(B) = \prod_{i,j\in\{1,\cdots,n\},\ i<j} (x_j - x_i).$$

$\square$

3. 试求使得以下矩阵不可逆的$x$的集合.

$$A_x = \begin{bmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ x & 1 & 1 \\ 1 & 1+x & 1 \end{bmatrix}$$

**解.** $A_x$不可逆当且仅当$det(A_x) = 0$. 因为

$$\begin{aligned} det(A_x) &= (1-x)(1-(1+x)) - 1(x-1) + (x(1+x)-1) \\ &= x^2 - x - x + 1 + x^2 + x - 1 = 2x^2 - x = 0, \end{aligned}$$

所以使得$A_x$不可逆的$x$的集合为$\{0, 1/2\}$.

$\square$

4. 求以下矩阵的行列式

$$B = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & 0 \end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}$$

其中$A_1$为$m \times n$阶矩阵， $A_2$为$m$阶方阵， $A_3$为$n$阶方阵。

**解.** 经过$mn$次互换行操作后，我们将$(1, 2, \cdots, m, m+1, \cdots, m+n)$换成$(m+1, \cdots, m+n, \cdots, 1, 2, \cdots, m)$. 因此，我们有

$$det(B) = (-1)^{mn} det(\begin{bmatrix} A_3 & 0 \\ A_1 & A_2 \end{bmatrix}_{(m+n)\times(m+n)}) = (-1)^{mn} det(A_3) det(A_2).$$

$\square$

5. 证明以下命题：
   (i) 试证奇数次反对称矩阵不可逆。
   (ii) 给定$n$矩阵$A$. 若$A$不可逆，试证$A$的伴随矩阵的秩为0或者1.

**证明.** *(i)* 因为

$$A = -A^T, \quad \Longrightarrow det(A) = (-1)^n det(A^T),$$

所以

$$\Longrightarrow det(A) = -det(A), \quad \Longrightarrow det(A) = 0.$$

*(ii)* 记$A = [a_1, \cdots, a_n]$. 因为$A$不可逆， 所以$rank(A) < n$.

- 若$rank(A) \leq n-2$, 则对任何元素$a_{ij}$的余子式$det(A_{ij})$为零， 其中$A_{ij}$为去掉$A$的第$i$行第$j$列形成的矩阵。

原因如下，记$A_{ij}=[\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_{j-1},\tilde{a}_{j+1},\cdots\tilde{a}_n]$. 因为$rank(A)\leq n-2$, 所以去掉一个向量$a_j$的向量组$\{a_1,\cdots,a_{j-1},a_{j+1},\cdots a_n\}$仍然线性相关。也就是说存在不全为零的实数$\lambda_1,\cdots,\lambda_{j-1},\lambda_{j+1},\cdots,\lambda_n$使得

$$\lambda_1 a_1+\cdots+\lambda_{j-1}a_{j-1}+\lambda_{j+1}a_{j+1}+\cdots+\lambda_n a_n=0.$$

因此

$$\lambda_1\tilde{a}_1+\cdots+\lambda_{j-1}\tilde{a}_{j-1}+\lambda_{j+1}\tilde{a}_{j+1}+\cdots+\lambda_n\tilde{a}_n=0.$$

也就是说向量组$\{\tilde{a}_1,\cdots,\tilde{a}_{j-1},\tilde{a}_{j+1},\cdots\tilde{a}_n\}$线性相关，因此 $det(A_{ij})=0$. 也就是说$A$的伴随矩阵为零矩阵$[0]_{n\times n}$. 此时秩为零。

- 若$rank(A)=n-1$。

不失一般性，我们假设$\{a_1,\cdots,a_{n-1}\}$线性无关，$a_n$可以被向量组$\{a_1,\cdots,a_{n-1}\}$线性表示。也就是说存在$\lambda_1,\cdots,\lambda_{n-1}\in\mathbb{R}$, 使得

$$a_n=\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\cdots+\lambda_{n-1}a_{n-1}. \tag{1}$$

记

$$\alpha:=\begin{bmatrix}(-1)^{1+n}det(A_{1n})\\(-1)^{2+n}det(A_{2n})\\\vdots\\(-1)^{n+n}det(A_{nn})\end{bmatrix}_{n\times 1}=\left[(-1)^{n+i}det(A_{in})\right]_{n\times 1}.$$

注意到$A_{in}$也是$n\times(n-1)$矩阵$[a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}]$去掉第$i$行后所得到的矩阵。由于$\{a_1,\cdots,a_{n-1}\}$线性无关，所以至少存在一个矩阵$A_{in}$满秩，也就是说$\alpha$非零。

注意到，对任何$j\in\{1,\cdots,n-1\}$,$i\in\{1,\cdots,n\}$, 通过换将第$n$列换到第$j$列，由于等式(1), 我们有

$$det(A_{ij})=(-1)^{n-j-1}\lambda_j det(A_{in})$$

因此

$$[C_{ij}]_{n\times 1}=[(-1)^{i+j}det(A_{ij})]_{n\times 1}$$
$$=[(-1)^{i+n-1}\lambda_j det(A_{in})]_{n\times 1}=-\lambda_j[(-1)^{i+n}det(A_{in})]_{n\times 1}=-\lambda_j\alpha.$$

也就是说

$$C=[-\lambda_1\alpha,-\lambda_2\alpha,\cdots,\lambda_{n-1}\alpha,\alpha]_{n\times n}$$

因此$A$的伴随矩阵$C^T$秩为*1.*

$\square$

**证明.** 若$rank(A)=n-1$的证法*2*。感谢邓泽枫同学提供！

根据讲义*57*页例题*6.14*（课后练习*2.4.18)*的结论，我们有

$$rank(AC^T)+n\geq rank(A)+rank(C^T)$$

因为

$$AC^T=det(A)I_n=0,\quad\Longrightarrow rank(AC^T)=0,$$

所以当$A$的秩为$n-1$时，我们有

$$\Longrightarrow rank(C^T) \leq n-(n-1) = 1.$$

因此在$rank(A)=n-1$时，$C$的秩至多为$1$.

$\square$

6. 若$A$是$n$阶实正交矩阵，且$det(A)<0$, 试证$I_n+A$不可逆。

**证明.** 因为$A$是正交矩阵, 所以

$$A^TA = I_n, \quad \Longrightarrow det(A^TA) = 1, \quad \Longrightarrow \big(det(A)\big)^2 = 1, +det(A) < 0,$$

$$\Longrightarrow det(A) = -1.$$

若$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$在计重数的意义下为$A$的$n$个特征值， 则

$$-1 = det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad p_A(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} (\lambda - \lambda_i). \tag{2}$$

注意到由于$A$是实矩阵，则$A$的特征多项式的系数是实数。 若$\lambda_i$是$p_A(\lambda)$的根，则

$$p_A(\lambda_i) = \lambda_i^n + \cdots + c_0 = 0, \quad \Longrightarrow \overline{\lambda_i}^n + \cdots + c_0 = 0, \quad \Longrightarrow p_A(\overline{\lambda_i}) = 0.$$

也就是说 $\overline{\lambda_i}$也是$A$的特征值。 因此

$$\prod_{i\in\{1,\cdots,n\}, \lambda_i \notin \mathbb{R}} \lambda_i > 0. \tag{3}$$

接下来我们考虑$A$的任意一个实特征根$\lambda_i$. 考虑$A$的一个特征对$(\lambda_i, x), x \in \mathbb{C}^n/\{0\}$, 我们有

$$\lambda_i^2 \langle x, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = \langle x, A^TAx\rangle = \langle x, x\rangle, \quad \Longrightarrow \lambda_i^2 = 1.$$

因此实特征根$\lambda_i \in \{1, -1\}$. 根据(2)和(3)的结论，我们知道至少存在一个特征值$-1$. 因此$I_n + A$不可逆。

$\square$

**证明** (证法2). 感谢刘知翰同学提供！

$$A^TA = I_n, \quad \Longrightarrow I + A = A^TA + A = (A^T + I)A$$

$$\Longrightarrow \quad det(I+A) = det(A)det(I+A^T), \Longrightarrow det(I+A) = det(A)det(I+A),$$

$$(1 - det(A))det(I + A) = 0.$$

因为$det(A) < 0$, 所以

$$det(I + A) = 0.$$

因此$I_n + A$不可逆。

□

7. 若$n$阶实矩阵$A=[a_{ij}]$为对角占优矩阵且对任何$i\in\{1,\cdots,n\}$，$a_{ii}>0$ ，试证明$det(A)>0$.

**证明.** 考虑$A$的特征多项式

$$p_A(\lambda)=det(\lambda I-A).$$

若$\lambda_1,\cdots,\lambda_n$在计重数的意义下为$A$的$n$个特征值，则

$$det(A)=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i. \tag{4}$$

注意到由于$A$是实矩阵，则$A$的特征多项式的系数是实数。

在上一题中我们证明过这样的结论：若$\lambda_i$是$p_A(\lambda)$的根，则$\overline{\lambda_i}$也是$A$的特征值。因此

$$\prod_{i\in\{1,\cdots,n\},\lambda_i\notin\mathbb{R}}\lambda_i>0. \tag{5}$$

注意到若$\lambda\in\mathbb{R},\,\lambda\leq 0$，则$\lambda I-A$仍然为对角占优矩阵，故可逆。因此$A$的实特征值必然为正。综上所述我们有$det(A)>0$.

□