

清华大学 2017-2018 秋季学期期末考试

科目：微积分 B(1) 时间：120 分钟

一、填空题（共 10 小题，每题 4 分）

1. 已知函数 $y = f(x)$ 与 $y = e^{2x} - 1$ 在原点处相切，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} n f(\frac{4}{n}) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (e^{\frac{1}{n}} - 1)^p$ 条件收敛，则 p 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
3. 求曲线 $\begin{cases} x = t + \sin t \\ y = 2 + \cos t \end{cases} (0 \leq t \leq 2\pi)$ 的弧长为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
4. 在 $x \rightarrow 0$ 时， x^α 是 $\int_0^{x^2} \sin t^2 dt$ 的高阶无穷小，则 α 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
5. 无穷积分 $\int_1^{+\infty} (1 - \cos \frac{1}{x^p}) dx$ 收敛，则 p 的取值范围为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
6. 函数 $f(x) = \arctan x$ 在 $x \rightarrow \infty$ 时的渐近线方程为 $\underline{\hspace{2cm}}$.
7. 函数 $\begin{cases} x = 3t - \sin t \\ y = e^t - \cos t \end{cases}$ ，则 $\frac{dy}{dx} \big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\frac{d^2y}{dx^2} \big|_{t=0} = \underline{\hspace{2cm}}$.
8. 已知 $S(x)$ 是将 $f(x) = x^2 (0 \leq x \leq 2\pi)$ 以 2π 为周期展开的傅立叶级数，则 $S(\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$ ，
 $S(2\pi) = \underline{\hspace{2cm}}$.
9. 求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2n-1}{n!} = \underline{\hspace{2cm}}$.
10. 求级数 $\sum_{k=1}^n \frac{n}{n^2 + k(k-1)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

二、解答题（共 6 小题，每题 10 分，附加题 5 分）

11. 求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{x} - \sin x}{x - \sin x}$
12. 求不定积分 $\int \frac{3x^2 + x + 1}{(x-1)(x^2 + 2x + 2)} dx$
13. 已知正整数 n 不等于 7，比较 $(\sqrt{n+1})^{\sqrt{n}}$ 与 $(\sqrt{n})^{\sqrt{n+1}}$ 的大小
14. 求级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3} x^{4n}$ 的收敛域及和函数
15. 平面区域 D 由曲线 $y = \arctan x$ ，直线 $x=1$ 和 x 轴围成
 - (1) 求 D 的面积
 - (2) 求 D 绕 y 轴一周所成旋转体的体积

16. 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上二阶可导, $f''(x) > 0$, $f(0)=0$, $\int_0^1 f(x)dx=0$

证明: (1) $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有且仅有一个零点 x_0

(2) 当 $x \in (0, x_0)$ 时, $f(x) < 0$

(3)(附加题) $\int_0^1 xf(x)dx > 0$