习题课 2

2019 年 10 月 12 日

符号说明：I 为单位矩阵（不强调阶数），$I_n = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$ 为 n 阶单位矩阵，$\mathbf{0}$ 为零向量.

练习 2.1 计算：

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$;

5. $\begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 4 & 6 & -4 \\ 8 & 8 & -6 \end{bmatrix}^6$.

练习 2.2 证明：实数集上的任意方阵 A 可以唯一地表为 $A = B + C$，其中 B 是对称矩阵，C 是反对称矩阵．[1]

练习 2.3 证明：不存在 n 阶实方阵 A, B，使得 $AB - BA = I_n$ 成立.

练习 2.4 证明：对 $m \times n$ 矩阵 A 和 $n \times m$ 矩阵 B，$I_m + AB$ 可逆当且仅当 $I_n + BA$ 可逆.

练习 2.5 证明 Sherman-Morrison-Woodbury 公式：对 n 阶可逆矩阵 A 和 $n \times p$ 矩阵 U, V，$A + UV^T$ 可逆当且仅当 $I + V^T A^{-1} U$ 可逆，且 $A + UV^T$ 可逆时，有 $(A + UV^T)^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I + V^T A^{-1} U)^{-1} V^T A^{-1}$. 特别地，当 $p = 1$ 时，$(A + uv^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1+v^T A^{-1} u} A^{-1} uv^T A^{-1}$.

练习 2.6 计算：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & a \end{bmatrix}^{-1}$.

[1] C 是反对称阵的意思是 $C^t = -C$.

练习 2.7 计算:

1. $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{bmatrix}^{-1};$$

2. $$\begin{bmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a & a+h & \cdots & a+(n-3)h & a+(n-2)h \\ a+(n-2)h & a+(n-1)h & a & \cdots & a+(n-4)h & a+(n-3)h \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+h & a+2h & a+3h & \cdots & a+(n-1)h & a \end{bmatrix}^{-1}.$$

练习 2.8 证明：任意可逆矩阵都是初等矩阵的乘积. [2]

练习 2.9 证明对于对换矩阵 $P_{ij}(i<j)$ 以下性质成立:

1. $\forall i<k<j$ 我们有
   - $P_{ik}P_{ij}=P_{kj}P_{ik}=P_{ij}P_{kj}$;
   - $P_{ij}P_{ik}=P_{kj}P_{ij}=P_{ik}P_{kj}$;
   - $(P_{ik}P_{ij})^3=I$.
2. 若 i,j,k,l 互不相等，则
   - $P_{kl}P_{ij}=P_{ij}P_{kl}$;
   - $(P_{kl}P_{ij})^2=I$.

练习 2.10 请找出一个矩阵 A 满足：存在矩阵 X 使得 $XA=I$，但不存在 Y 使得 $AY=I$. 看看这种矩阵的行数与列数应该满足什么条件.

练习 2.11 令 $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 为一个 2 阶实方阵，证明:

(1) $A^2-(a+d)A+(ad-bc)I_2=\mathbf{0}$ （这即是 2 阶方阵情形下的 Hamilton-Cayley 定理）;

(2) 若 $A^2=I_2$ 且 $A\neq\pm I_2$，则 $a+d=0$ 且 $ad-bc=-1$;

(3) 若 $A^3=I_2$ 且 $A\neq I_2$，则 $a+d=-1$ 且 $ad-bc=1$;

(4) 若 $A^N=I_2, N\in\mathbb{N}, n\geq 1$，则 $(ad-bc)^N=1$. [3]

练习 2.12 A 为 n 阶实方阵，证明以下结论:

1. 若对于任意的 n 维实列向量 α，都有 $(A\alpha)\cdot(A\alpha)=\alpha\cdot\alpha$，则 A 必须是正交矩阵.
2. 若对于任意两个 n 维实列向量 α,β，都有 $(A\alpha)\cdot\beta=\alpha\cdot(A\beta)$，则 A 必须是对称矩阵.

---

[2] 课上证明过的定理

[3] (3)(4) 属于体验型题目，学了更高级的知识之后很容易证明，目前只能生算，如果你算个半个小时还毫无头绪的话，我建议放弃。