习题课材料（一）

注: 带♡号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

习题1. 设$A=\begin{bmatrix}1&1&0\\-1&0&1\\0&-1&-1\end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$，证明：

1. $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解当且仅当$b_1+b_2+b_3=0$.
2. 齐次线性方程组$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的解集是$\{k\boldsymbol{x}_1, k\in\mathbb{R}\}$, $\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}$.
3. 当$A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 有解时，设$\boldsymbol{x}_0$ 是一个解，则解集是$\{\boldsymbol{x}_0+k\boldsymbol{x}_1, k\in\mathbb{R}\}$.

习题2. 令$A=\begin{bmatrix}1&1&1\\1&3&1\end{bmatrix}$.

1. 求所有的3×2 矩阵X, 使得$AX=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$.
2. 求一个3×2 矩阵X, 使得$AX=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.
3. 求所有3×2 矩阵X, 使得$AX=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$.

习题3. 设$A\in M_3(\mathbb{R})$, 考虑方程组$A\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}2\\4\\2\end{bmatrix}$. 已知$\left\{\begin{bmatrix}2\\0\\0\end{bmatrix}+c\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+d\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}: c,d\in\mathbb{R}\right\}$是它所有的解; 请求出$A$.

习题4. 设$\triangle ABC$ 是平面中的三角形，三边BC, AC, AB 上的垂线分别记为ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3. 用点积证明ℓ_1,ℓ_2,ℓ_3 交于一点.

（提示：将$\triangle ABC$ 放在直角坐标系中，P 为平面上的任意一点，则点$P \in \ell_1$ 当且仅当P,A,B,C 四点的坐标满足什么关系？类似的$P \in \ell_2$ 或$P \in \ell_3$ 当且仅当P,A,B,C 四点的坐标满足什么关系？）

习题5. 证明：

1. 设n 维向量$\boldsymbol{x}$ 的每个分量都是1，则n 阶方阵A 的各行元素之和为1 当且仅当$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}$.

2. 若n 阶方阵A,B 的各行元素之和均为1, 则AB 的各行元素之和也均为1.

3. 若n 阶方阵A,B 的各列元素之和均为1, 则AB 的各列元素之和也均为1.

习题6. *(a)* 设2 阶方阵

$$R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

由矩阵和向量的乘法给出$\mathbb{R}^2$ 上的变换$f_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \boldsymbol{x} \mapsto R_\theta \boldsymbol{x}$.

(1) 证明: f_θ 是逆时针旋转角度θ 的变换.

(2) 证明: 设$\theta \neq k\pi$, 不存在非零向量$\boldsymbol{x}$, 满足$R_\theta \boldsymbol{x} = \pm \boldsymbol{x}$.

(3) 计算R_θ^n, n是整数.

(b) 设

$$H_\theta = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}, \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}, \boldsymbol{w} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \end{bmatrix}.$$

(1) 证明: $H_\theta^2 = I_2, H_\theta = I_2 - 2\boldsymbol{w}\boldsymbol{w}^T$.

(2) 证明: $\boldsymbol{v} \perp \boldsymbol{w}, |\boldsymbol{v}| = |\boldsymbol{w}| = 1; H_\theta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}, H_\theta \boldsymbol{w} = -\boldsymbol{w}$. 试分析变换$\boldsymbol{x} \mapsto H_\theta \boldsymbol{x}$ 的几何意义.

(c) 证明: $R_{-\theta} H_\phi R_\theta = H_{\phi-\theta}, H_\phi R_\theta H_\phi = R_{-\theta}$, 并分析其几何意义.

习题7. 设n 阶方阵

$$T = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}.$$

利用初等变换证明: 存在分解式$T = LU$, 其中L 是下三角矩阵, U 是上三角矩阵. 据此求出T^{-1}.

习题8. 证明*:* 对角线元素全非零的上三角阵U 可逆, 其逆矩阵U^{-1} 也是上三角阵, 且U^{-1} 的对角线元素是U 的对角线元素的倒数.

习题9 ($\heartsuit$)**.** 假设$i \neq j$. 我们把单位矩阵I 的(i,j) 项改成1, 其他项保持不变, 这样得到的矩阵记作E_{ij}. 单位矩阵I 的(i,i) 项和(j,j) 项改成零, 再把(i,j) 项和(j,i) 项改成1, 这样得到的矩阵记作P_{ij}.

(a) 证明*:* 对于矩阵$P_{ij}(i<j)$, 以下性质成立*:*

1. 若$\forall i<k<j$, 则

- $P_{ik}P_{ij} = P_{kj}P_{ik} = P_{ij}P_{kj}$;
- $P_{ij}P_{ik} = P_{kj}P_{ij} = P_{ik}P_{kj}$;
- $(P_{ik}P_{ij})^3 = I$.

2. 若i,j,k,ℓ 互不相等，则

- $P_{k\ell}P_{ij} = P_{ij}P_{k\ell}$;
- $(P_{k\ell}P_{ij})^2 = I$.

(b) 对于任意两个矩阵A,B, 我们定义$[A,B] = AB - BA$.

1. 假设i,j,k 两两不同, 计算$[E_{ij},E_{jk}]$, $[E_{ij},P_{jk}]$ 和$[P_{ij},P_{jk}]$. *(*除生算外, 也可以直接考虑作为行操作或列操作, 两个矩阵的顺序调换后, 到底差别在哪里*.)*

2. 令$D = \mathrm{diag}(d_1,...,d_n)$ 为对角矩阵*;* 假设$i \neq j$, 计算$[E_{ij},E_{ji}]$, $[E_{ij},D]$ 和$[P_{ij},D]$. *(*除生算外, 也可以直接考虑作为行操作或列操作, 两个矩阵的顺序调换后, 到底差别在哪里*.)*

习题10 ($\heartsuit$)**.** *1.* 定义$m \times n$ 阶实矩阵$A = (a_{ij})$ 的范数为

$$\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2}.$$

$\sum_{i,j} a_{ij} b_{ij} \le (\sum_{i,j} a_{ij}^2 \sum_{i,j} b_{ij}^2)$

证明**:**

(a) $\|A\| \geq 0$; 且$\|A\| = 0$ 当且仅当$A = 0$, easy

(b) $\|cA\| = |c| \cdot \|A\|$, easy.

(c) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$,

(d) $\|AB\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$.

$\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}(a_{ij}+b_{ij})^2}$.

2. 证明范数

$$\|A\|_\infty = \max_{1\leq i\leq m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 + 2\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ij} + \sum\sum b_{ij}^2$

也满足性质*(a)*-*(d)*.

$\sqrt{\sum a_{ij}^2 b_{ij}^2}$

$\sqrt{\sum\sum a_{ij}^2}+\sqrt{\sum\sum b_{ij}^2}$.

$\sqrt{\sum\sum a_{ij}^2}\cdot\sqrt{\sum\sum b_{ij}^2}$

$\sum a_{ij}^2 b_{ij}^2$ $\quad$ $\sum\sum a_{ij}^2 \cdot \sum\sum b_{ij}^2$.