强化练习五（不是作业）

1. 试求以下矩阵的特征值

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

解. 注意到A的特征多项式为

$$p_A(\lambda) = det(\begin{bmatrix} \lambda-1 & -1 & -3 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-1 \end{bmatrix})$$
$$= (-1)\big(1+3(\lambda-2)\big) + (\lambda-1)\big((\lambda-1)(\lambda-2)\big)$$
$$= (\lambda^2-2\lambda+1)(\lambda-2) - 3\lambda + 5 = \lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 - 3\lambda + 5$$
$$= \lambda^3 - 4\lambda^2 + 2\lambda + 3$$

我们发现

$$p_A(3) = 3^3 - 4 \times 3^2 + 6 + 3 = 0.$$

因此3为$p_A(\lambda)$的一个根。我们进一步将特征多项式分解成如下乘积

$$p_A(\lambda) = (\lambda-3)\big(\lambda^2-\lambda-1\big).$$

因此另外两个根为

$$\frac{1\pm\sqrt{5}}{2}.$$

□

2. 判断题：判断以下命题是否正确并说明理由。

(i) 若方阵的元素都为正，则特征值为正。
(ii) 若方阵A的元素都为正，A的特征值可能全部为负。
(iii) 若n阶矩阵A的秩为r，则对任何n阶矩阵B, AB存在一个代数重数至少是$n-r$的特征根。
(iv) 若n阶实矩阵A的行列式为负，则存在一个向量$x \in \mathbb{R}^n$使得$x^TAx < 0$.

解. *(i)* 错误。令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad p_A(\lambda) = (\lambda-1)^2 - 4 = \lambda^2 - 2\lambda - 3.$$

则A的特征值为$3, -1$, 不都为正。

(ii) 错误。因为

$$trace(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i > 0,$$

所以A的特征值不可能全部为负

(iii) 正确。因为

$$rank(AB) \le rank(A) = r, \quad \Longrightarrow dim(N(AB)) \ge n - r.$$

因此AB的特征值0的几何重数至少是$n-r$。因为几何重数不大于代数重数，所以特征值0的代数重数至少是$n-r$。

*(iv)*正确。因为

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i < 0,$$

所以存在一个负的特征值λ. 记 (λ, x)是一个特征对，则

$$x^T A x = \lambda x^T x < 0.$$

□

3. 求以下矩阵的谱分解

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

解. A的特征多项式为

$$p_A(\lambda) = det(\begin{bmatrix} \lambda - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda - 2 & -1 \\ 0 & -1 & \lambda - 2 \end{bmatrix}) = (\lambda-1)\big((\lambda-2)^2-1\big) = (\lambda-1)^2(\lambda-3).$$

因此A的特征值为$1, 3$. 接下来我们找A的特征值为1的特征子空间的基,

$$N(A-I) = N\Big(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\Big) = N\Big(\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Big) = span\Big(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\Big)$$

接下来我们找A的特征值为3的特征子空间的基,

$$N(A-3I) = N\Big(\begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\Big) = N\Big(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\Big) = span\Big(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\Big)$$

因此

$$AX = X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

最后我们用求解X的逆. 注意到X是一个正交矩阵，所以$X^{-1} = X^T$, 也就是说

$$A = X \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} X^T$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

□

4. 给定n阶矩阵A。 若$|det(A)| < 1$, 试存在一个非零向量$x \in \mathbb{R}^n$, 使得

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} |A^n x| = 0.$$

证明. 若$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$在计重数的意义下为$A$的$n$个特征值， 则

$$det(A) = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i, \quad \Longrightarrow |det(A)| = \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| \tag{1}$$

因此存在一个特征值$\lambda, |\lambda| < 1$. 取A的一个特征对(λ, x), 则我们有

$$\lim_{n \longrightarrow +\infty} |A^n x| = \lim_{n \longrightarrow +\infty} |\lambda|^n |x| = 0.$$

□

5. 若$a_0 = 0, b_0 = 1$,

$$\forall n \in \mathbb{Z}_+, \quad b_{n+1} = 1 + 3a_n + 3b_n, \quad a_{n+1} = 2 + a_n + b_n,$$

试求a_n, b_n的通项公式。

解. 为了将通项公式内的常数项消掉。我们令

$$c_n = a_n - a, \quad d_n = b_n - b,$$

其中a, b待定使得

$$d_{n+1} = 3c_n + 3d_n, \quad c_{n+1} = c_n + d_n$$
$$b = 1 + 3a + 3b, \quad a = 2 + a + b,$$
$$\Longrightarrow b = -2, \quad 3a = -1 - 2(-2) = 3, \quad a = 1,$$
$$\Longrightarrow c_0 = a_0 - a = -1, \quad d_0 = 1 - (-2) = 3.$$
$$\Longrightarrow c_1 = 2, \quad d_1 = 6, \quad a_1 = 3, \quad b_1 = 4.$$

注意到

$$\begin{bmatrix} c_{n+1} \\ d_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix}, \quad \Longrightarrow \begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} = A^n \begin{bmatrix} c_0 \\ d_0 \end{bmatrix}, \quad A := \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}$$

接下来我们计算A的谱分解。 A的特征多项式为

$$p_A(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 3) - 3 = \lambda^2 - 4\lambda$$

因此A的特征值为$0, 4$. 接下来我们找A的特征值为0的特征子空间的基,

$$N(A) = N(\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 3 \end{bmatrix}) = span(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

$$N(A - 4I) = N(\begin{bmatrix} -3 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}) = span(\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix})$$

因此

$$AX = X \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad X^{-1} = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^n = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -4^n & -4^n \end{bmatrix}$$
$$= \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} -4^n & -4^n \\ -3 \times 4^n & -3 \times 4^n \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} c_n \\ d_n \end{bmatrix} = A^{n-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ d_1 \end{bmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} -4^{n-1} & -4^{n-1} \\ -3 \times 4^{n-1} & -3 \times 4^{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \frac{-1}{4} \begin{bmatrix} -2 \times 4^n \\ -6 \times 4^n \end{bmatrix}$$

对任何$n \in [1, +\infty) \cap \mathbb{Z}$,

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \times 4^{n-1} \\ 6 \times 4^{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

□

6. 给定n阶方阵$A = [a_1, \cdots, a_n]$. 试证明一定存在一个A特征值λ使得

$$|\lambda| \in [0, \max\{|a_1|, \cdots, |a_n|\}]$$

证明. 记$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$在计重数的意义下为$A$的$n$个特征值。通过$A$的$QR$分解，我们知道

$$A = QR, \quad |R_{ii}| \leq |a_i|, \quad \Longrightarrow |det(A)| = \prod_{i=1}^{n} R_{ii} \leq \prod_{i=1}^{n} |a_i|.$$

若不存在A特征值λ使得

$$|\lambda| \in [0, \max\{|a_1|, \cdots, |a_n|\}]$$

也就是说

$$\forall i \in \{1, \cdots, n\}, |\lambda_i| > \max\{|a_1|, \cdots, |a_n|\}$$
$$\Longrightarrow \prod_{i=1}^{n} |\lambda_i| > \prod_{i=1}^{n} |a_i| = |det(A)|.$$

因为$det(A) = \prod_{i=1}^n \lambda_i$，所以得出矛盾。因此一定存在一个$A$特征值$\lambda$使得

$$|\lambda| \in [0, \max\{|a_1|, \cdots, |a_n|\}].$$

□

7. 以下矩阵是否正定?若是，试证明。若否，请说明理由。

$$A := [(i+j)^{-1}]_{n\times n}$$

解. 注意到

$$\forall x \in \mathbb{R}^n/\{0\}, \quad x^T Ax = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{x_i x_j}{i+j} = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n x_i x_j \int_0^1 t^{i+j-1} dt$$

$$= \int_0^1 t\Big(\sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i\Big)^2 dt \geq 0.$$

任取$[0,1]$中任意n个不同的点$t_1, \cdots, t_n$。令

$$u_i := (1, t_i, \cdots, t_i^{n-1})^T, \quad U = [u_1, \cdots, u_n]$$

注意到U^T是一个范德蒙矩阵，所以U是可逆的，也就是说Ux是一个非零向量. 因为$t\big(\sum_{i=1}^n t^{i-1} x_i\big)^2$是连续函数，所以在某个$t_i$附近均非零。也就是说

$$\forall x \in \mathbb{R}^n/\{0\}, \quad x^T Ax > 0.$$

因此A是正定的。

□