最后一次大作业，不用交，周四课上讲

1. 判断以下矩阵是否可对角化,并说明理由。

$$(a)\quad \begin{bmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},\quad (b)\quad \begin{bmatrix}1&1&2\\1&1&0\\2&0&1\end{bmatrix},\quad (c)\begin{bmatrix}1&-3&1\\1&-3&1\\2&-6&2\end{bmatrix}$$

2. 判断以下命题是否正确,并说明理由。

(i) 若实对称矩阵A的所有顺序主子式的行列式非负，则A半正定。

(ii) 存在$m\times n$矩阵A, $n\times m$的矩阵B，使得AB和BA有一个不一样的非零特征值。

(iii) 给定任意方阵A。若λ是方阵A的特征值，则λ^2是方阵A^TA的特征值.

3. 判断下面每组矩阵是否可以同时对角化,并证明。

(i)

$$A:=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&1&2\\0&0&1\end{bmatrix},\quad B:=\begin{bmatrix}1&1&2\\4&1&2\\3&2&1\end{bmatrix}$$

(ii)

$$C:=\begin{bmatrix}1&1&2\\0&2&2\\0&0&3\end{bmatrix},\quad D:=\begin{bmatrix}1&0&0\\4&2&0\\3&2&5\end{bmatrix}.$$

4. 试计算以下矩阵的行列式

$$(a)\quad A:=\begin{bmatrix}1&1&2\\4&1&2\\3&2&1\end{bmatrix},\quad (b)\quad B:=[b_{ij}]_{n\times n},\quad 若\ i+j\geq n+2, b_{ij}=0$$

5. 给定以下矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}9&0&0\\0&4&0\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1/\sqrt{2}&1/\sqrt{2}\\0&1/\sqrt{2}&-1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

(i) 试求$N(A), N(A^T), R(A), R(A^T)$的一组基。

(ii) 试求最小二乘问题$\inf_{x\in\mathbb{R}^3}|Ax-b|$的解中模长最小的解，其中$b=[1,0,0,0]^T$.

6. 给定以下矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1 & 1 & a\\ 1 & 1 & 2\\ a & 2 & 1\end{bmatrix},$$

其中$a\in\mathbb{R}$是参数。试给出使得A正定的a的集合。

7. 令

$$A:=\begin{bmatrix}3 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 6\end{bmatrix}$$

试求

$$\sup_{Q\in M_{4\times 2}(\mathbb{R}),Q^TQ=I_2} trace(Q^TAQ),$$

其中$M_{4\times 2}(\mathbb{R})$表示的是所有$4\times 2$的矩阵的集合。

8. 给定任意n阶可逆实对称矩阵A. 试证明

$$|det(C)|\leq\|A\|^{n(n-1)},\quad C:=[(-1)^{i+j}det(A_{ij})]_{n\times n},$$

其中A_{ij}是矩阵A去掉第i行第j列后剩下的$(n-1)$阶矩阵。