# 微积分 B(1)第一次习题课参考答案

**教学目的：** 本次习题课希望巩固**确界**、**极限**、**子列**等概念，这些是微积分的基本概念，通过对习题的演练，使同学们加深对相关概念的理解．同时，希望通过书写解答过程，体会数学语言的运用．

另外，本次习题课也准备了一些与常用的初等数学知识相关的习题，帮助大家衔接中学与大学的内容．这些习题主要由同学课下自己完成．

说明：本次讨论课，课内主要讨论以下两部分的题目：

一、集合的界与确界，　　二、数列极限的定义

## 一、集合的界与确界

1．证明：（1）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在定义域内有下界，无上界；

（2）对 $\delta>0$，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ 上有界．

（思考：一个函数在某个区间上无界如何叙述？）

**证：**（1）因为 $\dfrac{1}{x^2}>0$，所以 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在其定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内有下界．

对 $\forall G>0$，取 $x_G=\dfrac{1}{2\sqrt{G}}$，则 $x_G\in(0,+\infty)$ 且 $f(x_G)=\dfrac{1}{x_G^2}=4G>G$，因此 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在其定义域 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 内无上界．

（2）当 $x\in(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ 时，有 $x^2\geqslant\delta^2$，所以

$$0<\frac{1}{x^2}\leqslant\frac{1}{\delta^2},$$

即函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ 上有界．

2．证明：$\sup\{\arctan x\}=\dfrac{\pi}{2}$．

**证：** 因为 $-\dfrac{\pi}{2}<\arctan x<\dfrac{\pi}{2}$，所以 $\dfrac{\pi}{2}$ 是 $\arctan x$ 的上界．

任给 $\varepsilon>0$，不妨设 $\varepsilon<\pi$．取 $y_0=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\varepsilon}{2}$，则 $0<y_0<\dfrac{\pi}{2}$．

令 $x_0=\tan y_0$，则

$$\arctan x_0=\arctan(\tan y_0)=y_0=\frac{\pi}{2}-\frac{\varepsilon}{2}>\frac{\pi}{2}-\varepsilon .$$

综上可知 $\sup\{\arctan x\}=\dfrac{\pi}{2}$．

3．设 $A,B$ 均是非空有界实数集，定义：$A+B=\{x+y\mid x\in A,\,y\in B\}$．证明：

（1）$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$；　　　　（2）$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$.

**证：**仅证（1)；（2）的证法类似于（1).

记 $a=\inf A$，$b=\inf B$．由确界的定义，$\forall x\in A$，$y\in B$ 均有

$$x\geqslant a，\ y\geqslant b，$$

因此 $x+y\geqslant a+b$，即 $a+b$ 是集合 $A+B$ 的一个下界.

另一方面，$\forall\varepsilon>0$，因为 $a=\inf A$，$b=\inf B$，所以 $\exists x_\varepsilon\in A$，$y_\varepsilon\in B$，使得

$$x_\varepsilon<a+\frac{\varepsilon}{2}，\ y_\varepsilon<b+\frac{\varepsilon}{2}，$$

因此 $x_\varepsilon+y_\varepsilon<a+b+\varepsilon$，所以 $a+b$ 是集合 $A+B$ 的最大下界.

综上可知 $\inf(A+B)=a+b=\inf A+\inf B$.

4．设 $A,B$ 均是由非负实数构成的有界数集，定义 $AB=\{xy\,|\,x\in A,y\in B\}$．证明：

（1）$\inf AB=\inf A\cdot\inf B$；　　　　（2）$\sup AB=\sup A\cdot\sup B$.

**证：**（1）略，仅证（2).

记 $a=\sup A$，$b=\sup B$．若 $a=0$ 或 $b=0$，则结论显然成立.

下面设 $a>0$，$b>0$.

由确界的定义，$\forall\, x\in A$，$y\in B$，均有 $0\leqslant x\leqslant a,\ 0\leqslant y\leqslant b$，因此

$$0\leqslant xy\leqslant ab，$$

即 $ab$ 是集合 $AB$ 的一个上界.

另一方面，$\forall\varepsilon>0$，对于 $\dfrac{\varepsilon}{a+b}$，因为 $a=\sup A$，$b=\sup B$，所以 $\exists\, x_\varepsilon\in A$，$\exists y_\varepsilon\in B$，使得

$$x_\varepsilon>a-\frac{\varepsilon}{a+b}，\ y_\varepsilon>b-\frac{\varepsilon}{a+b}，$$

因此

$$x_\varepsilon y_\varepsilon>(a-\frac{\varepsilon}{a+b})(b-\frac{\varepsilon}{a+b})=ab-\frac{\varepsilon}{a+b}(a+b)+(\frac{\varepsilon}{a+b})^2>ab-\varepsilon，$$

所以 $ab$ 是集合 $AB$ 的最小上界.

综上可知 $\sup AB=ab=\sup A\cdot\sup B$.

**注：**（1）的证明中，也要用到类似“$\forall\varepsilon>0$，对于 $\dfrac{\varepsilon}{a+b}$ $\exists x_\varepsilon\in A,y_\varepsilon\in B$ 使得 $x_\varepsilon>a-\dfrac{\varepsilon}{a+b},y_\varepsilon>b-\dfrac{\varepsilon}{a+b}$”的技巧.

## 二、数列极限的定义

1．用极限定义证明

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$．

**证：**$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<\dfrac{1}{\sqrt{n}}$．

$\forall\varepsilon>0$，欲使 $|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|<\varepsilon$，只需 $\dfrac{1}{\sqrt{n}}<\varepsilon$，即 $n>\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]$ 便可.

取 $N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon^2}\right]+1$，则当$n>N$时，有

$$|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}|<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$．

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$．

**证：** 因为 $\sqrt[n]{n}>1$，令$\sqrt[n]{n}=1+a_n$，则$a_n>0$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$等价于$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$．

由于

$$n=(1+a_n)^n=1+na_n+\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2+\cdots+a_n^n>\frac{1}{2}n(n-1)a_n^2,$$

所以
$$0<a_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

因此 $\forall\varepsilon>0$，取 $N=\left[\dfrac{2}{\varepsilon^2}\right]+1$，则当 $n>N$时，有

$$0<a_n<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$．从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$．

注：利用均值不等式进行变形化简.

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\underbrace{1\times1\times\cdots\times1}_{n-2}\times\sqrt{n}\times\sqrt{n}}<\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-2}+\sqrt{n}+\sqrt{n}}{n}=1-\frac{2}{n}+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Remark：以下放缩对此题无效.

$$1\leqslant\sqrt[n]{n}=\sqrt[n]{\underbrace{1\times1\times\cdots\times1}_{n-1}\times n}<\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n-1}+n}{n}=2-\frac{1}{n}.$$

（3）*已知$a>1$，$k>0$．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$．

**证：**令$a=1+b\,(b>0)$．当$n>[k]+1$时，因为

$$a^n=(1+b)^n>C_n^{[k]+1}b^{[k]+1},$$

所以

$$0<\frac{n^k}{a^n}<\frac{n^k}{C_n^{[k]+1}}\frac{1}{b^{[k]+1}}<\frac{n^k}{(n-[k])^{[k]+1}}\frac{([k]+1)!}{b^{[k]+1}}=\frac{n^{k-[k]-1}}{(1-\frac{[k]}{n})^{[k]+1}}\frac{([k]+1)!}{b^{[k]+1}}.$$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}(1-\frac{[k]}{n})^{[k]+1}=1$，所以存在$N_1>0$，当$n>N_1$时，$(1-\frac{[k]}{n})^{[k]+1}>\frac{1}{2}$.

所以当$n>\max\{N_1,[k]+1\}$时，

$$0<\frac{n^k}{a^n}<\frac{C}{n^{[k]+1-k}}\text{，其中}C=2\frac{([k]+1)!}{b^{[k]+1}}.$$

对于$\forall\,\varepsilon>0$，取$N=\max\{N_1,[k]+1,\left[\sqrt[[k]+1-k]{\frac{C}{\varepsilon}}\right]+1\}$，则当$n>N$时，有

$$0<\frac{n^k}{a^n}<\varepsilon.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}=0$.

2．下列说法中，哪些与$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$等价．如果等价，请证明，如果不等价，请举出反例．

（1）对于无限多个正数$\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}^*$，只要$n\geqslant N$，就有$|a_n-A|<\varepsilon$；

（2）$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}^*$，只要$n\geqslant N$，就有$|a_n-A|<\varepsilon$；

（3）$\forall\varepsilon\in(0,1),\ \exists\,N\in\mathbb{N}^*$，只要$n>N$，就有$|a_n-A|<\varepsilon$；

（4）$k>0,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}^*$，只要$n>N$，就有$|a_n-A|<k\varepsilon$；

（5）$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}^*$，只要$n>N$，就有$|a_n-A|<\varepsilon^{\frac{2}{3}}$；

（6）$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \exists\,N_k\in\mathbb{N}^*$，只要$n>N_k$，就有$|a_n-A|<\frac{1}{2^k}$；

（7）$\exists\,N\in\mathbb{N}^*$，只要$n>N$，就有$|a_n-A|<\frac{1}{n}$；

（8）$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}^*$，只要$n>N$，就有$|a_n-A|<\frac{\varepsilon}{n}$；

（9）$\forall\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbb{N}^*$，只要$n>N$，就有$|a_n-A|<\sqrt{n}\varepsilon$.

**解**：（2）（3）（4）（5）（6）与$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$等价．

（1）必要不充分．一个反例是$\left|(-1)^n-1\right|<2+\frac{1}{k}$，其中$k$为正整数．

（7）（8）充分不必要．一个共同反例是$\{\frac{2}{n}\}$.

（9）必要不充分．一个反例是$\{(-1)^n\}$，对$\forall\varepsilon>0$，可取$N=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]+1$.

3．用 $\varepsilon - N$ 语言叙述："$\{a_n\}$ 不收敛于 $A$". 并讨论下列哪些说法与"$\{a_n\}$ 不收敛于 $A$"等价：

（1）$\exists \varepsilon_0 > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*$，只要 $n > N$，就有 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon_0$；

（2）$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbb{N}^*$，只要 $n \geqslant N$，就有 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon$；

（3）$\exists \varepsilon_0 > 0$，使得 $\{a_n\}$ 中除有限项外，都满足 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon_0$；

（4）$\exists \varepsilon_0 > 0$，使得 $\{a_n\}$ 中有无穷多项满足 $|a_n - A| \geqslant \varepsilon_0$.

**解**：（4）与"$\{a_n\}$ 不收敛于 $A$"等价.

（1）（2）（3）充分不必要，一个反例是 $\{(-1)^n\}$.

4．证明：若单调数列具有收敛的子列，则此单调数列收敛.

**证**：不妨设 $\{a_n\}$ 为一单调增加数列，$\{a_{n_k}\}$ 为 $\{a_n\}$ 的一个子列，且 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A = \sup\{a_{n_k}\}$.

$\forall \varepsilon > 0$，因为 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = A$，所以 $\exists N_0 > 0$，当 $k \geqslant N_0$ 时，有 $\left|a_{n_k} - A\right| < \varepsilon$.

由于 $\{a_n\}$ 单增，所以当 $n > n_{N_0}$ 时，有 $A - \varepsilon < a_{n_{N_0}} \leqslant a_n$.

对于 $n > n_{N_0}$，总存在 $k_n$，使得 $n_{k_n} > n$，由单调性知 $a_n \leqslant a_{n_k}$.

综上可知，当 $n > n_{N_0}$ 时，总有 $A - \varepsilon < a_{n_{N_0}} \leqslant a_n \leqslant a_{n_k} \leqslant A$ 成立．故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

## 三、函数及其性质

1．（1）设 $f(x) = \mathrm{e}^x$，且 $f(g(x)) = 1 - x$，求函数 $g(x)$ 的定义域.

（2）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求函数 $g(x) = \sqrt{1-x}\cdot f(\sin \pi x) + \sqrt{1+x}\cdot f(1+\cos \pi x)$ 的定义域.

**解**：（1）由 $f(x) = \mathrm{e}^x$，得到

$$f(g(x)) = \mathrm{e}^{g(x)} = 1 - x,$$

因此 $g(x) = \ln(1-x)$．所以 $g(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 1)$.

（2）　因为函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，所以

$$\begin{cases} 1 - x \geqslant 0, \\ 1 + x \geqslant 0, \\ 0 \leqslant \sin \pi x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant 1 + \cos \pi x \leqslant 1, \end{cases} \quad \text{即} \begin{cases} -1 \leqslant x \leqslant 1, \\ 0 \leqslant \sin \pi x \leqslant 1, \\ -1 \leqslant \cos \pi x \leqslant 0. \end{cases}$$

解得 $x=-1$ 或 $\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$．所以 $g(x)$ 的定义域为 $[\frac{1}{2},1]\cup\{-1\}$．

2．（1）设 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}(x\neq 2,且x\neq 3)$，求 $f(f(x))$， $f(f(f(x)))$．

（2）设 $f(x)=x+|x|$， $g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$， $g(f(x))$．

**解**：（1） $f(f(x))=\dfrac{1}{2-f(x)}=\dfrac{1}{2-\dfrac{1}{2-x}}=\dfrac{2-x}{3-2x}\ (x\neq 2,3,\frac{3}{2},\frac{5}{3})$，

$$f(f(f(x)))=\frac{1}{2-f(f(x))}=\frac{3-2x}{4-3x}\quad(x\neq 2,3,\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{4}{3},\frac{7}{5}).$$

（2） $f(g(x))=g(x)+|g(x)|=\begin{cases}2g(x), & g(x)\geqslant 0,\\ 0, & g(x)<0\end{cases}=\begin{cases}2x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$

$$g(f(x))=\begin{cases}f(x), & f(x)<0,\\ [f(x)]^2, & f(x)\geqslant 0\end{cases}=[f(x)]^2=\begin{cases}4x^2, & x\geqslant 0,\\ 0, & x<0.\end{cases}$$

3．（1）已知函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$．如果对于任意 $x$ 都有 $f(a+x)=f(b-x)$，那么 $f(x)$ 的图象有什么性质？

（2）已知函数 $f(x)$，请说明函数 $f(a+x)$ 的图象与函数 $f(b-x)$ 的图象关于哪条直线对称．

**解**：（1） $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称．

事实上， $f(x)$ 图象上任意一点 $(x_0,f(x_0))$ 关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 的对称点为 $(a+b-x_0,f(x_0))$，所以只需要说明点 $(a+b-x_0,f(x_0))$ 仍然在 $f(x)$ 的图象上即可．

由 $f(a+x)=f(b-x)$ 可知，对于任意的 $x$，都有 $f(a+b-x)=f(x)$，即点 $(a+b-x_0,f(x_0))$ 在 $f(x)$ 的图象上．由 $x_0$ 的任意性可知 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{a+b}{2}$ 对称．

（2） $f(a+x)$ 与函数 $f(b-x)$ 关于直线 $x=\dfrac{b-a}{2}$ 对称．

$f(a+x)$ 的图象是由 $f(x)$ 向左平移 $a$ 个单位得到，并且 $f(x)$ 图象上任意一点 $(x_0,f(x_0))$ 经过平移后的坐标为 $(x_0-a,f(x_0))$，因此 $(x_0-a,f(x_0))$ 在 $f(a+x)$ 的图象上．

$f(x)$ 的图象向左平移 $b$ 个单位得到 $f(b+x)$ 的图象，同样的道理得到 $(x_0-b,f(x_0))$ 在 $f(b+x)$ 的图象上．

再将 $f(b+x)$ 的图象关于 $y$ 轴对称，得到 $f(b-x)$ 的图象，这样 $(b-x_0,f(x_0))$ 在 $f(b-x)$

图象上．由 $(x_0-a,f(x_0))$ 与 $(b-x_0,f(x_0))$ 关于直线 $x=\dfrac{b-a}{2}$ 对称，及 $x_0$ 的任意性，得到 $f(a+x)$ 与 $f(b-x)$ 的图象关于直线 $x=\dfrac{b-a}{2}$ 对称．

4．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 与 $x=b\ (a<b)$ 对称，证明：$f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数．

**证**：由于 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 对称，所以对于任意的 $x$，有

$$f(a+x)=f(a-x),$$

同理有 $f(b+x)=f(b-x)$．

因此 $f(x)=f(2a-x)=f(2b-(2a-x))=f(2(b-a)+x)$，即 $f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数．

（思考：一个函数不是周期函数如何叙述？）

5．已知函数 $f(x)$ 满足：对任意的实数 $x,y$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$．当 $x>0$ 时，有 $f(x)<0$，并且 $f(-1)=2$．

（1）求证 $f(x)$ 为奇函数 ；

（2）$f(x)$ 在区间 $[-3,3]$ 上是否存在最值？如果存在，求出最值，如果不存在，请说明理由；

（3）设 $b>0$，解关于 $x$ 的不等式：$\dfrac{1}{2}f(bx^2)-f(x)>\dfrac{1}{2}f(b^2x)-f(b)$．

**解**：（1）当 $x=y=0$ 时，有 $f(0)=2f(0)$，所以 $f(0)=0$．

当 $y=-x$ 时，有 $f(0)=f(x)+f(-x)$，所以 $f(-x)=-f(x)$．故 $f(x)$ 为奇函数．

（2）先考察 $f(x)$ 的单调性．

$\forall x_1,x_2\in\mathbf{R}\ (x_1<x_2)$，由已知条件得到 $f(x_2-x_1)<0$，所以

$$f(x_2)+f(-x_1)<0,$$

故 $f(x_2)<-f(-x_1)=f(x_1)$，$f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数．

因此 $f(x)$ 在 $[-3,3]$ 上有最值，最大值 $f(-3)=3f(-1)=6$，最小值 $f(3)=-6$．

（3） 当 $y=x$ 时，有 $f(2x)=2f(x)$，所以对于任意的 $x$，有 $f(x)=\dfrac{1}{2}f(2x)$，所以

$$\frac{1}{2}f(bx^2)-f(x)=f(\frac{1}{2}bx^2-x),\quad \frac{1}{2}f(b^2x)-f(b)=f(\frac{1}{2}b^2x-b).$$

由于 $f(x)$ 为 $\mathbf{R}$ 上的减函数，所以 $\dfrac{1}{2}f(bx^2)-f(x)>\dfrac{1}{2}f(b^2x)-f(b)$ 等价于

$$\frac{1}{2}bx^2-x<\frac{1}{2}b^2x-b,$$

整理得 $(bx-2)(x-b)<0$．

若$0<b<\sqrt{2}$，所求的解集为$(b,\frac{2}{b})$；若$b=\sqrt{2}$，所求的解集为空集； 若$b>\sqrt{2}$，所求的解集为$(\frac{2}{b},b)$．

6．设$f(x)$在$\left[a,b\right]$上是下凸函数，证明：$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)=\max\{f(a),f(b)\}$．

**证明**：因为对任意的$x\in[a,b]$，都有

$$f(x)=f(\frac{b-x}{b-a}a+\frac{x-a}{b-a}b)\leqslant\frac{b-x}{b-a}f(a)+\frac{x-a}{b-a}f(b)\leqslant\max\{f(a),f(b)\},$$

且$\max\{f(a),f(b)\}$可以取到，所以$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)=\max\{f(a),f(b)\}$．

7．（1） 函数$f(x)=\sqrt{x-1}+2\ (x\geqslant 1)$的反函数是____________.

（2）若点$(4,3)$既在函数$y=1+\sqrt{ax+b}$的图象上，又在它的反函数的图象上，求函数的解析式.

（3）若$f(x-1)=x^2-2x+3\ (x\leqslant 1)$，则$f^{-1}(4)=$____________.

（4）已知函数$y=f(x)$存在反函数，那么与函数$y=f(x)$的反函数图象关于原点对称的图象所对应的函数表达式为____________.

（5）函数$f(x)=\frac{x-3}{2x-3}\ (x\neq\frac{3}{2})$，若$y=f(x+1)$的图象是$C_1$，它关于直线$y=x$对称图象是$C_2$，$C_2$关于原点对称的图象为$C_3$，则$C_3$对应的函数解析式是____________.

**解**：（1）$f(x)=\sqrt{x-1}+2$．由$x\geqslant 1$，得到$f(x)\geqslant 2$．反解$f(x)=\sqrt{x-1}+2$得到

$$x=(f(x)-2)^2+1.$$

所以反函数为$y=(x-2)^2+1\ (x\geqslant 2)$．

（2）由互为反函数图象的关系知，$(3,4)$也在函数$y=1+\sqrt{ax+b}$图象上，所以有

$$\begin{cases}1+\sqrt{3a+b}=4,\\1+\sqrt{4a+b}=3,\end{cases}$$

解得$\begin{cases}a=-5,\\b=24.\end{cases}$ 函数解析式为$y=1+\sqrt{24-5x}$．

（3）可以先求出反函数，再求$f^{-1}(4)$．也可以先令$x^2-2x+3=4\ (x\leqslant 1)$，解得$x=1-\sqrt{2}$，即$f(1-\sqrt{2}-1)=4$，所以$f^{-1}(4)=-\sqrt{2}$．

（4） $y=f(x)$ 的反函数 $y=f^{-1}(x)$，其图象关于原点对称的图象的函数解析式为 $y=-f^{-1}(-x)$.

（5）由于 $f(x)=\dfrac{x-3}{2x-3}\ (x\neq\dfrac{3}{2})$，所以

$$y=f(x+1)=\frac{x-2}{2x-1}\ (x\neq\frac{1}{2}),$$

其反函数解析式仍为 $y=\dfrac{x-2}{2x-1}\ (x\neq\dfrac{1}{2})$．因此 $C_3$ 对应的函数解析式为 $y=-\dfrac{x+2}{2x+1}\ (x\neq-\dfrac{1}{2})$.

8．试写出一个从 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 的一一对应映射.

**解**：令

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}, & x=0,\\ \dfrac{1}{3}, & x=1,\\ \dfrac{1}{n+2}, & x=\dfrac{1}{n},n=2,3,4\cdots,\\ x, & \text{其他,}\end{cases}$$

则 $y=f(x)$ 就是一个从 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 的一一对应映射.

## 四、不等式

1．试证明Cauchy不等式：$a_i\ (i=1,2,\cdots n)$，$b_i\ (i=1,2,\cdots n)$ 为两组实数，求证：

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

并考虑取得等号的条件.

**证**：如果 $a_i\ (i=1,2,\cdots n)$ 全部为零，那么左右两端恒等，不等式显然成立.

假设 $a_i\ (i=1,2,\cdots n)$ 中至少有一个不为零，构造函数

$$f(x)=(a_1x+b_1)^2+(a_2x+b_2)^2+\cdots+(a_nx+b_n)^2.$$

整理得

$$f(x)=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)x^2+2(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)x+(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2).$$

这是一个关于 $x$ 的二次函数．由 $f$ 的定义，对于任意的 $x$，均有 $f(x)\geqslant0$，因此 $\Delta\leqslant0$，

即 $(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$.

下面考虑取等条件：如果取等，即 $\Delta=0$，那么抛物线与 $x$ 轴相切.

设切点坐标为 $(x_0,0)$，所以有 $f(x_0)=0$，因此有

$$a_1x_0+b_1=a_2x_0+b_2=\cdots=a_nx_0+b_n=0\text{，}$$

所以我们得到$a_i,b_i$两组实数对应成比例．反之，如果这两组实数对应成比例，易证

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2=(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)\text{．}$$

因此，取得等号的充分必要条件是$a_i,b_i$两组实数对应成比例．

2．证明：设$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，则$\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}{n}}\geqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$．

**证**：$\{a_i\}_{i=1}^n$，$\{\dfrac{1}{n}\}_{i=1}^n$为两组数，由Cauchy不等式有

$$(a_1\frac{1}{n}+a_2\frac{1}{n}+\cdots+a_n\frac{1}{n})^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^2}+\cdots+\frac{1}{n^2})\text{，}$$

即$\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}{n}\geqslant(\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n})^2$．

由于$a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，因此有$\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}{n}}\geqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$．

## 五、数学归纳法（第一数学归纳法、第二数学归纳法、归纳，猜想，证明）

1．（Bernoulli 不等式）证明对于任意的正整数$n$，$(1+x)^n\geqslant1+nx,\ \forall x\geqslant-1$．

**证**：当$n=1$时，命题显然成立．

假设$n=k\ (k\geqslant1)$命题成立，即$(1+x)^k\geqslant1+kx$；

当$n=k+1$时，由于$1+x\geqslant0$，因此有

$$(1+x)^{k+1}=(1+x)^k(1+x)\geqslant(1+kx)(1+x)=1+(k+1)x+kx^2>1+(k+1)x\text{．}$$

综上可知，对于任意的正整数$n$，$(1+x)^n\geqslant1+nx,\ \forall x\geqslant-1$．

2．斐波那契数列$\{F_n\}$满足$F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，求证：

$$F_n=\frac{1}{\sqrt5}[(\frac{1+\sqrt5}{2})^n-(\frac{1-\sqrt5}{2})^n]\text{．}$$

**证**：利用第二数学归纳法证明．

当$n=1$时，$F_1=1$，命题成立，当$n=2$时，$F_2=1$，命题仍然成立．

假设当$n\leqslant k\ \ (k\geqslant2)$时命题成立；

当$n=k+1$时，

$$F_{k+1}=F_k+F_{k-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^k-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^k]+\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k-1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k-1}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[\frac{2}{1+\sqrt{5}}(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1}+(\frac{2}{1+\sqrt{5}})^2(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1}-\frac{2}{1-\sqrt{5}}(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}-(\frac{2}{1-\sqrt{5}})^2(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}]$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{k+1}-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{k+1}],$$

即当$n=k+1$时命题成立．因此$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n]$．