微积分 B（1）第二次习题课题目

注：本次讨论课题目难度较大．带★题目不在课堂上讨论，供同学们课下练习．

一、数列极限的四则运算法则与数列极限存在的充分条件

1．（四则运算）已知 $a_1, a_2, \cdots, a_m$ 是实数且满足 $a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 0$，求极限

$$\lim_{n\to\infty}(a_1\sqrt{n+1} + a_2\sqrt{n+2} + \cdots + a_m\sqrt{n+m}).$$

2．（四则运算）（1）已知数列 $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right]$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{F_n}{F_{n+1}}$；

（2）已知 $(2+\sqrt{2})^n = A_n + B_n\sqrt{2}$，其中 A_n, B_n 是整数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$．

3．求极限 （夹逼定理）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^n\right)^{\frac{1}{n}} + \left(\sum\limits_{k=1}^{m} a_k^{-n}\right)^{\frac{1}{n}}\right]$，其中 $a_k > 0\ (k = 1, 2, \cdots, m)$；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=n^2}^{(n+1)^2}\frac{1}{\sqrt{k}}$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}[(n^k+1)^{-\frac{1}{k}} + (n^k-1)^{-\frac{1}{k}}]$；

（4）★$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\cdots\cdot(2n)}$．

4．★设 $x_1 > x_2 > 0$， $x_{n+2} = \sqrt{x_{n+1}x_n}\ (n = 1, 2, \cdots)$ ．

（1）假设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在，求其值;（极限运算）

（2）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.（单调有界收敛定理、数列极限与子列极限的关系）

5．设数列 $\{a_n\}$ 满足： $a_1 = 1$， $a_k = k(a_{k-1}+1)$， $k = 2, 3, \cdots$．已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} = \mathrm{e}$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+\frac{1}{a_k})$．（极限运算）

6．设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1} = a$， $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n} = b$，求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$．

（已知 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n = C \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty}c_{2n} = C = \lim\limits_{n\to\infty}c_{2n-1}$）

二、极限的存在性证明

1．已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n = 0$．

（1）证明： $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = 0$．

（2）当 $\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}\beta_n=0$ 时，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\alpha_1\beta_n+\alpha_2\beta_{n-1}+\cdots+\alpha_n\beta_1}{n}=0$.

（3）当 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=B$ 时，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1}{n}=AB$.

2. ★设极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ 存在，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0$.（极限与无穷小关系、极限运算）

3. ★设 $\theta\neq k\pi$，证明数列 $\{\sin n\theta\}$ 发散.（反证法. 三角恒等式（两角和公式、同角关系式）、极限运算）

三、实数理论（柯西收敛准则，Bolzano 定理，区间套，有限覆盖）

1. 设 $a_n=\dfrac{p_1}{10}+\dfrac{p_2}{10^2}+\cdots+\dfrac{p_n}{10^n}\ (n=1,2,\cdots)$，其中 $\{p_k\}$ 是一有界非负数列，试证数列 $\{a_n\}$ 收敛.

2. 若数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1}-a_n|\leqslant q|a_n-a_{n-1}|\,(n=1,2,\cdots)$，其中 $0<q<1$，试证数列 $\{a_n\}$ 收敛.（Cauchy 收敛准则）

3. 下列哪些命题与柯西列定义等价，证明你的结论或举出反例.

（1）对于任意的 $p\in\mathbb{N}^*$，均有 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_{n+p}-a_n)=0$.

（2）$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbb{N}^*$，只要 $n>N$，就有 $|a_n-a_N|<\varepsilon$.

（3）$\forall\varepsilon>0$，$\exists N_\varepsilon\in\mathbb{N}^*$ 以及 $A_\varepsilon\in\mathbb{R}$，只要 $n>N_\varepsilon$，就有 $|a_n-A_\varepsilon|<\varepsilon$.

4. 证明：有界数列 $\{a_n\}$ 若不收敛，则必存在两个子列 $\{a_{n_k}\}$，$\{a_{m_k}\}$，使得 $\lim\limits_{k\to\infty}a_{n_k}=a,\ \lim\limits_{k\to\infty}a_{m_k}=b$ 且 $a\neq b$.

5.（1）利用 Cauchy 收敛准则证明单调有界数列收敛.（反证法）

（2）利用区间套定理证明单调有界数列收敛.

四、书后与课堂部分题目

1. 求下列极限（书后习题）

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$；（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2\left(\pi\sqrt{n^2+n}\right)$.

2. 设 $u_n=(1+\dfrac{1}{n})^{n+1}$（易知数列 $\{u_n\}$ 收敛于 e）.**（讲课提纲材料，不再讨论）**

（1）研究数列 $\{u_n\}$ 的单调性；

（2）利用（1）的结果证明 $\dfrac{1}{n+1}<\ln(1+\dfrac{1}{n})<\dfrac{1}{n}$ 对于任意正整数 n 都成立.

（3）证明：数列 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$ 收敛.