微积分 B(1)第六次习题课题目

说明：带“★”题目不在课堂讨论，作为课后练习.

一、微分中值定理

1．证明方程 $2^x+2x^2+x-1=0$ 至多有两个不同实根.

2．已知 $a_0+\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{3}+\cdots+\frac{a_n}{n+1}=0$，证明方程 $a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n=0$ 至少有一个实根.

3．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，且 $f(a)=f(b)=0$．求证：$\forall\alpha\in\mathbf{R}$，$\exists\xi\in(a,b)$，使得 $\alpha f(\xi)=f'(\xi)$.

4．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一阶可导，在 (a,b) 内二阶可导，且 $f(a)=f(b)=0$，$f'(a)f'(b)>0$，证明：

（1）存在 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$；

（2）存在 $\eta\in(a,b)$，使 $f''(\eta)=f'(\eta)$；

（3）★存在 $\zeta\in(a,b)$，使得 $f''(\zeta)=f(\zeta)$.

5．设函数 $f(x),g(x),h(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 (a,b) 内可导，试证：存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\begin{vmatrix} f(a) & g(a) & h(a) \\ f(b) & g(b) & h(b) \\ f'(\xi) & g'(\xi) & h'(\xi) \end{vmatrix}=0.$$

6．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，过点 $A(a,f(a)),B(b,f(b))$ 的直线与曲线 $y=f(x)$ 相交于 $C(c,f(c))$，其中 $a<c<b$.

证明：在 (a,b) 中存在一点 ξ，使得 $f''(\xi)=0$.

7．设 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$，求证：$\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\alpha}<\tan\beta-\tan\alpha<\frac{\beta-\alpha}{\cos^2\beta}$.

8．已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：

（1）存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f(\xi)=1-\xi$；

（2）存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$，使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

9．★已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$，$f(1)=1$．证明：对任意大于零的实数 a,b，总存在 $(0,1)$ 内不同的两点 ξ,η，使得 $af'(\xi)+bf'(\eta)=a+b$.

10．设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，且 $f(a)=f(b)$，$f'_+(a)>0$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)<0$.（试用几种不同的方法进行证明）

11．设函数 $f(x)$ 在 $[1,2]$ 上连续，在 $(1,2)$ 内可导．证明：存在 $\xi\in(1,2)$，使得

$$f(2)-f(1)=\frac{1}{2}\xi^2 f'(\xi).$$

12．设函数 $f(x)\in C[a,b]$，在 (a,b) 内可导，且 $f'(x)\neq 0$．求证：存在 $\xi,\eta\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{f'(\eta)}=\frac{\mathrm{e}^b-\mathrm{e}^a}{b-a}\mathrm{e}^{-\eta}.$$

13．★设函数 $f(x)$ 二阶可导，若 $f''(\xi)>0$，试证存在 a,b 满足 $a<\xi<b$，使得 $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$．（要用到极值点的充分条件）

14．设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上满足

$$|f(x)-f(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha},\quad \forall x,y\in[a,b],$$

其中 M,α 是常数且 $M>0,\alpha>1$．证明：$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上恒为常数.

二、罗比达法则

求极限

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos^2 x-\frac{1}{2}x\sin 2x}{x^2(\mathrm{e}^{x^2}-1)}$；

（2）$\lim\limits_{x\to 0^+}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x}}$；

（3）$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x-x^x}{1-x+\ln x}$；

（4）$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)$；

（5）$\lim\limits_{x\to a}\frac{\sqrt{2a^3x-x^4}-a\sqrt[3]{a^2x}}{a-\sqrt[4]{ax^3}}\ (a>0)$ （洛必达书中的第一个例子）.

三、（教材上）第 5 章的几道补充题

1．P213 第 9 题

2．P212 第 1 题

3．P213 第 4 题