习题课材料（二）

注: 带♡号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

习题1 (矩阵的对角化). 计算:

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$;

2. $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$;

3. $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$.

4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$;

5. $\begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 4 & 6 & -4 \\ 8 & 8 & -6 \end{bmatrix}^6$.

习题2. 对n 阶方阵A, 设$\mathrm{Com}(A) = \{n \text{ 阶方阵} B : AB = BA\}$. (Com表示*Commutator.)*

1. 证明: 任取$B, C \in \mathrm{Com}(A)$, 都有$I_n, kB + \ell C, BC \in \mathrm{Com}(A)$, 其中$k, \ell \in \mathbb{R}$.

2. 设$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 证明：$J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathrm{Com}(A)$, 而且$\mathrm{Com}(A) = \{k_1 I_3 + k_2 J_3 + k_3 J_3^2 : k_1, k_2, k_3 \in \mathbb{R}\}$.

习题3. 是否存在矩阵A 满足：存在矩阵X 使得$XA = I$, 但不存在Y 使得$AY = I$? 有没有方阵满足上述条件？

习题4. 定义函数$\mathrm{tr}: M_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}, A \mapsto \mathrm{tr}(A) := a_{11} + \cdots + a_{nn}$, 为取方阵的对角线元素之和. $\mathrm{tr}(A)$称为方阵A 的迹.

1. 证明tr 满足如下三个条件：

- $\mathrm{tr}(kA + \ell B) = k\mathrm{tr}(A) + \ell\mathrm{tr}(B)$, $k, \ell \in \mathbb{R}$.
- $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$；
- $\mathrm{tr}(I_n) = n$.

2. 说明是否存在A, B, 使得$AB - BA = I_n$.

3. *(♡)* 在$n = 2$时证明满足上述三个条件的函数一定是tr.

4. *(♡)* 对一般的n证明满足上述三个条件的函数一定是tr.

习题5. *1.* 任取$m \times n$ 矩阵X; 证明: 分块矩阵$\begin{pmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ 可逆, 并求其逆矩阵.

2. 对分块矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, 计算$\begin{pmatrix} I_m & X \\ 0 & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$. 由此判断矩阵

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & c_{n-1} \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & a \end{bmatrix}$$

何时可逆, 并在它可逆时计算它的逆.

3. 设$A \in M_m(\mathbb{R})$, $B \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $C \in M_n(\mathbb{R})$, 证明：若A, C 可逆, 则分块矩阵$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 也可逆, 并求其逆矩阵.

习题6. *1.* 对n 阶可逆矩阵A 和n 维列向量$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}$, 设$1 + \boldsymbol{v}^T A^{-1}\boldsymbol{u} \neq 0$, 证明：$A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T$ 可逆, 且

$$(A + \boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T)^{-1} = A^{-1} - \frac{1}{1 + \boldsymbol{v}^T A^{-1}\boldsymbol{u}} A^{-1}\boldsymbol{u}\boldsymbol{v}^T A^{-1}.$$

(这称为Sherman-Morrison-Woodbury公式.)

2. 设$a_i > 0(1 \le i \le n)$, 求矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_1+1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_2+1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & a_3+1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & a_n+1 \end{bmatrix}$$

的逆矩阵.

习题7. 如果矩阵$A = \left[a_{ij}\right]_{n\times n}$满足: 对于任意$i = 1,\ldots,n$, 都有$|a_{ii}| > \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$, 则称其为(行)对角占优的. 证明：对角占优矩阵一定可逆.

习题8. 证明：

1. 任意方阵A 都可以唯一地表为$A = B+C$, 其中B 是对称矩阵, C 是反对称矩阵.

2. (♡) n 阶方阵A 是反对称矩阵当且仅当任取n 维列向量$\boldsymbol{x}$, 都有$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = 0$.

3. 设A,B 是对称矩阵, 则$A = B$ 当且仅当任取n 维列向量$\boldsymbol{x}$, 都有$\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T B\boldsymbol{x}$.

习题9 (♡). A 为n 阶实方阵. 证明以下结论：

1. 若对于任意的n 维实列向量$\boldsymbol{x}$, 都有$(A\boldsymbol{x})\cdot(A\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}$, 则$A$ 必须是正交矩阵.

2. 若对于任意两个n 维实列向量$\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$, 都有$(A\boldsymbol{x})\cdot\boldsymbol{y} = \boldsymbol{x}\cdot(A\boldsymbol{y})$, 则$A$ 必须是对称矩阵.

思考题: 对于n阶方阵A试说明下列几条为何等价：

1. A可逆.

2. 任取n维向量$\boldsymbol{b}$，方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ 的解唯一，且解为$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$.

3. 齐次方程组$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$只有零解.

4. A对应的阶梯型矩阵有n个主元.

5. A对应的行简化阶梯形矩阵一定是I_n.

6. A是有限个初等矩阵的乘积.