习题课 3

2019 年 10 月 19 日

习题 1. 设 $\alpha_1, \cdots, \alpha_{n+1} \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha_i \cdot \alpha_j < 0, \forall i \neq j$. 证明: 其中任意 n 个向量都线性无关.

习题 2. 设 $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 的所有的连续函数构成的集合. 定义 $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ 上的加法和数乘如下:

$$(f_1 + f_2)(x) := f_1(x) + f_2(x), \quad (cf)(x) = cf(x).$$

1. 证明 $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ 是线性空间;
2. 设 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是互不相同的 n 个实数, $f_i(x) = e^{\lambda_i x}, 1 \leq i \leq n$. 证明 $\{f_1(x), \cdots, f_n(x)\}$ 线性无关.
3. 对任意 $n \geq 1$, 证明 $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ 中的下面三组函数都是线性无关的:
   - $\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx$;
   - $1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx$;
   - $1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \cdots, \sin nx, \cos nx$.

习题 3. $V = \Big\{AB - BA : A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})\Big\}$. 证明 $\dim V = n^2 - 1$.

习题 4. 证明: 若 $C \in M_{n\times r}(\mathbb{R})$ 的列向量线性无关, $A \in M_{r\times m}(\mathbb{R}), B = CA$, 则 B 的第 $j_1, \cdots, j_s$ 列线性相关 (resp. 线性无关) 当且仅当 A 的第 $j_1, \cdots, j_s$ 列线性相关 (resp. 线性无关). 特别的, A 与 B 的秩相同.

习题 5.

1. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times \ell}(\mathbb{R})$; 证明 $\operatorname{rank}(AB) \leq \operatorname{rank}(B)$.
2. 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), B \in M_{n\times \ell}(\mathbb{R})$. 证明方程组 $AB\boldsymbol{x} = 0$ 和方程组 $B\boldsymbol{x} = 0$ 同解的充要条件是 $\operatorname{rank}(AB) = \operatorname{rank}(B)$.
3. 设 $A, B \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 且 $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(AB)$. 证明 $\operatorname{rank}(B^2) = \operatorname{rank}(AB^2)$.

习题 6. 如果 $A=(a_{ij})\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 满足条件:

$$|a_{ii}|>\sum_{j=1,j\neq i}^{n}|a_{ij}|,\quad 1\le i\le n;$$

则称 A 是对角占优矩阵. 求证: 对角占优矩阵是满秩矩阵.

习题 7. 设线性空间 V 中有向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 线性无关. 考虑有序向量组 $\{\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k\}$. 求证: 或者该有序向量组线性无关, 或者存在唯一的 i 使得 α_i 可由 $\beta,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$ 线性表出.

习题 8.

1. 设 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k$ 是有限维线性空间 V 中的一组线性无关的向量. 证明我们可以把它们扩张成 V 的一组基.
2. 设 V,W 都是线性空间 X 的有限维子空间. 证明

$$\dim(V)+\dim(W)=\dim(V\cap W)+\dim(V+W).$$

习题 9. 设 $W\subseteq V=\mathbb{R}^n$ 设维数为 $r<n$ 的线性子空间, $S:=\{U\subseteq V: U$是 V 的线性子空间$,W\subseteq U,\dim U=n-1\}$. 证明

$$W=\bigcap_{U\in S}U.$$

习题 10. 设 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $\alpha_1,\cdots,\alpha_r\in \mathrm{Null}(A)$ 是一个极大线性无关组, β 是非齐次方程组 $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的一个特解. 证明: $\alpha_1,\cdots,\alpha_r,\beta\in\mathbb{R}^n$ 也是线性无关的.

习题 11. 考察 $\mathbb{R}^4$ 中的向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_5$:

$$\alpha_1=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\4\end{bmatrix},\quad \alpha_2=\begin{bmatrix}0\\3\\1\\2\end{bmatrix},\quad \alpha_3=\begin{bmatrix}3\\0\\7\\14\end{bmatrix},\quad \alpha_4=\begin{bmatrix}1\\-1\\2\\0\end{bmatrix},\quad \alpha_5=\begin{bmatrix}2\\1\\5\\0\end{bmatrix}.$$

(i) 找出它们的一组极大线性无关组，也就是 $\mathrm{span}\{\alpha_1,\cdots,\alpha_5\}$ 的一组基，给出这个向量组的秩。

(ii) 用这组基表示向量组中的其他向量。

习题 12. 考察 $\mathbb{R}^5$ 中的三个平面

$$\begin{aligned}
S_1&:=\{\mathbf{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_5)^T\,:\,3x_1+2x_2+x_3+x_4+x_5=7\},\\
S_2&:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5\,:\,3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=-2\},\\
S_3&:=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^5\,:\,5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=12\}.
\end{aligned}$$

(i) 求它们的交集 S. 判断 $\mathbf{0}$ 是否在 S 里，判断 S 是否构成一个线性空间 *(*即是 $\mathbb{R}^5$ 的一个子空间*)*。

(ii) 求一个线性空间 V 和一个向量 $\mathbf{x}_0$ 使得 $S = \mathbf{x}_0 + V := \{\mathbf{x}_0 + \mathbf{x} : \mathbf{x} \in V\}$. 找出 V 的一组基。

习题 13. 求如下矩阵 A 的 LU 分解, 特别的，给出一个 a, b, c, d 应当满足的限制条件, 使分解可进行。

$$A = \begin{bmatrix} a & a & a & a \\ a & b & b & b \\ a & b & c & c \\ a & b & c & d \end{bmatrix}.$$

习题 14. 判断以下命题是否正确？证明你的答案。.

(i) A 和 A^T 的零空间相同。

(ii) 可以找到一个矩阵 A, 它的列空间包括向量 $(1, 1, 0)$ 和 $(0, 1, 1)$, 并且它的零空间包含 $(1, 0, 1)$ 和 $(0, 0, 1)$.

(iii) 对于 n 阶方阵 $A, B \in \mathbb{M}_n$, $n \geq 2$, 我们有 $\mathrm{rank}(AB) = \mathrm{rank}(BA)$.

(iv) 对于 $A \in \mathbb{M}_n$, 和非零向量 $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$, 已知 $\mathbf{x}_p$ 是非齐次方程组 $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 的特解, 它是在通解 S 里，令自由未知数取零得到的。则 $\|\mathbf{x}_p\| = \min_{\mathbf{x} \in S} \|\mathbf{x}\|$, 也就是说它是 S 里长度最短的解。

习题 15. 求下列线性空间的维数。其中，复数矩阵所配的加法和数乘是普通的矩阵加法和数乘, 实函数的加法和它与实数的数乘如本习题练习 *2*.

(i) *2 by 2* 复矩阵 $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$，作为数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间。

(ii) *2 by 2* 复矩阵 $\mathbb{M}_2(\mathbb{C})$ 作为数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

(iii) 在 $\mathbb{R}$ 上连续的实函数集 $\mathcal{C}(\mathbb{R})$，作为数域 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。