习题课 2

2019 年 10 月 19 日

符号说明：I 为单位矩阵（不强调阶数），$I_n = \begin{bmatrix} e_1 & \cdots & e_n \end{bmatrix}$ 为 n 阶单位矩阵，$\mathbf{0}$ 为零向量.

练习 2.1 计算：

1. $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$;
2. $\begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$;
3. $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5$.
4. $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 2 & \\ & & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -5 & 4 \end{bmatrix}$;
5. $\begin{bmatrix} 8 & 6 & -6 \\ 4 & 6 & -4 \\ 8 & 8 & -6 \end{bmatrix}^6$.

解.

1. $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}$;
2. $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$;
3. $\begin{bmatrix} 17 & -6 \\ 35 & -12 \end{bmatrix}^5 = \left(\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} \right)^5 = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}^5 \begin{bmatrix} -7 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3197 & -1266 \\ 7385 & -2922 \end{bmatrix}$.
4. $\begin{bmatrix} 4 & 3 & -3 \\ 2 & 3 & -2 \\ 4 & 4 & -3 \end{bmatrix}$;

5. 方法一：
$$\begin{bmatrix}8&6&-6\\4&6&-4\\8&8&-6\end{bmatrix}^6=\left(2\begin{bmatrix}4&3&-3\\2&3&-2\\4&4&-3\end{bmatrix}\right)^6=2^6\left(\begin{bmatrix}1&3&1\\2&2&1\\3&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&-1\\-2&-5&4\end{bmatrix}\right)^6$$
$$=64\begin{bmatrix}1&3&1\\2&2&1\\3&4&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&&\\&2&\\&&1\end{bmatrix}^6\begin{bmatrix}0&2&-1\\1&1&-1\\-2&-5&4\end{bmatrix}=64\begin{bmatrix}190&189&-189\\126&127&-126\\252&252&-251\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}12160&12096&-12096\\8064&8128&-8064\\16128&16128&-16064\end{bmatrix}.$$

方法二：记 $a=\begin{bmatrix}3\\2\\4\end{bmatrix}, b=\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$，则 $\begin{bmatrix}8&6&-6\\4&6&-4\\8&8&-6\end{bmatrix}=2(I_3+ab^T)$. 注意到 $(I+k_iab^T)(I+ab^T)=I+[k_i+1+k_ib^Ta]ab^T=:I+k_{i+1}ab^T$ 而 $b^Ta=1$. 故只需计算序列 $k_1=1, k_{i+1}=2k_i+1$ 到第六项：$k_6=63$. 于是 $[2(I+ab^T)]^6=64(I+63ab^T)$. □

练习 2.2 证明：实数集上的任意方阵 A 可以唯一地表为 $A=B+C$，其中 B 是对称矩阵，C 是反对称矩阵. [1]

证. 显然 $A=\frac{A+A^T}{2}+\frac{A-A^T}{2}$，而 $\frac{A+A^T}{2}$ 对称，$\frac{A-A^T}{2}$ 反对称.

下证唯一. 若 $A=B+C=B_1+C_1$，其中 B,B_1 对称，C,C_1 反对称，则 $B-B_1=C_1-C=:D$. 注意到 $D=B-B_1$ 对称，$D=C_1-C$ 反对称. 于是 $D=D^T=-D$，得到 $D=0$. 即 $B=B_1, C=C_1$.
[2] □

练习 2.3 证明：不存在 n 阶实方阵 A,B，使得 $AB-BA=I_n$ 成立.

证. 显然，如果能进行运算，则必有 A,B 是同阶方阵. 对于任意同阶方阵 A,B，考虑 $AB-BA$ 的对角元的和：$\sum_i\left(\sum_k a_{ik}b_{ki}-\sum_k b_{ik}a_{ki}\right)=\sum_i\sum_k a_{ik}b_{ki}-\sum_i\sum_k a_{ki}b_{ik}=0$. 而 I 的对角元的和不可能为 0. 因此 $AB-BA=I$ 永不成立. [3] □

练习 2.4 证明：对 $m\times n$ 矩阵 A 和 $n\times m$ 矩阵 B，I_m+AB 可逆当且仅当 I_n+BA 可逆.

证. 证法一：考虑辅助矩阵 $H=\begin{bmatrix}I_m&A\\-B&I_n\end{bmatrix}$. 简单计算有
$$\begin{bmatrix}I&0\\B&I\end{bmatrix}H=\begin{bmatrix}I&A\\0&BA+I\end{bmatrix},\qquad\begin{bmatrix}I&-A\\0&I\end{bmatrix}H=\begin{bmatrix}AB+I&0\\-B&I\end{bmatrix}.$$
由此即知，$I+AB$ 可逆，当且仅当 H 可逆，当且仅当 $I+BA$ 可逆. [4]

[1] C 是反对称阵的意思是 $C^t=-C$.

[2] 不同的证法：若 $A=B+C$，其中 B 对称，C 反对称，则取转置得 $A^T=B^T+C^T=B-C$，两式相加相减得 $B=\frac{A+A^T}{2}, C=\frac{A-A^T}{2}$。这说明了，这样的分解若存在则必唯一，即 B 必须是 $\frac{A+A^T}{2}$，C 必须是 $\frac{A-A^T}{2}$. 进一步验证 $(\frac{A+A^T}{2})^T=\frac{(A+A^T)^T}{2}=\frac{A^T+(A^T)^T}{2}=\frac{A^T+A}{2}$，和 $(\frac{A-A^T}{2})^T=\frac{(A-A^T)^T}{2}=\frac{A^T-(A^T)^T}{2}=\frac{A^T-A}{2}=-\frac{A-A^T}{2}$，即前者对称，后者反对称。证毕。

[3] 对任意的方阵 $A=(a_{ij})\in M_n(\mathbb{R})$，定义 A 的迹为 $a_{11}+a_{22}+\ldots+a_{nn}$，记作 $\mathrm{tr}(A)$。矩阵的迹有以下性质：$\mathrm{tr}(A+B)=\mathrm{tr}(A)+\mathrm{tr}(B)$，$\mathrm{tr}(cA)=c\mathrm{tr}(A)$，$\mathrm{tr}(A)=\mathrm{tr}(A^T)$，$\mathrm{tr}(AB)=\mathrm{tr}(BA)$（这里，$A,B$ 不一定是方阵，行数列数互反即可），$\mathrm{tr}(AA^T)=\mathrm{tr}(A^TA)=||A||^2$（这里，$A$ 不一定是方阵，$||A||$ 是第一次习题课第 5 题中的矩阵范数）。用矩阵的迹来证明此题的话，就是 $\mathrm{tr}(AB-BA)=\mathrm{tr}(AB)-\mathrm{tr}(BA)=0$，而 $\mathrm{tr}(I_n)=n\neq 0$，所以满足等式的 A,B 不存在。

[4] 这里要用到作业题：分块上三角阵可逆当且仅当对角方块都可逆。

证法二：假设 $I+AB$ 不可逆，那么齐次线性方程组 $(I+AB)x=0$ 有非零解，取其中一个记为 $x_0\neq 0$. [5] 所以 $(I+BA)Bx_0=B(I+AB)x_0=0$. 于是 Bx_0 是齐次线性方程组 $(I+BA)x=0$ 的解. 若 $Bx_0=0$，则 $x_0=-ABx_0=0$，矛盾，于是 $Bx_0\neq 0$，即齐次线性方程组 $(I+BA)x=0$ 有非零解，因此 $I+BA$ 不可逆. 类似地，$I+BA$ 不可逆可以推出 $I+AB$ 不可逆，即二者等价. □

练习 2.5 证明 Sherman-Morrison-Woodbury 公式：对 n 阶可逆矩阵 A 和 $n\times p$ 矩阵 U,V, $A+UV^T$ 可逆当且仅当 $I+V^TA^{-1}U$ 可逆，且 $A+UV^T$ 可逆时，有 $(A+UV^T)^{-1}=A^{-1}-A^{-1}U(I+V^TA^{-1}U)^{-1}V^TA^{-1}$. 特别地，当 $p=1$ 时，$(A+uv^T)^{-1}=A^{-1}-\frac{1}{1+v^TA^{-1}u}A^{-1}uv^TA^{-1}$.

证. 证法一：考虑辅助矩阵 $H=\begin{bmatrix}A & U\\ -V^T & I_p\end{bmatrix}$. 简单计算有

$$\begin{bmatrix}I_n & 0\\ V^TA^{-1} & I_p\end{bmatrix}H=\begin{bmatrix}A & U\\ 0 & I_p+V^TA^{-1}U\end{bmatrix},\qquad \begin{bmatrix}I_n & -U\\ 0 & I_p\end{bmatrix}H=\begin{bmatrix}A+UV^T & 0\\ -V^T & I_p\end{bmatrix}.$$

于是

$$\begin{bmatrix}A+UV^T & 0\\ -V^T & I_p\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I_n & -U\\ 0 & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & 0\\ V^TA^{-1} & I_p\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}A & U\\ 0 & I_p+V^TA^{-1}U\end{bmatrix}.$$

利用分块矩阵性质，可知，$A+UV^T$ 可逆当且仅当 $I+V^TA^{-1}U$ 可逆. 再计算上式，有

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}(A+UV^T)^{-1} & 0\\ * & I_p\end{bmatrix}&=\begin{bmatrix}A+UV^T & 0\\ -V^T & I_p\end{bmatrix}^{-1}\\ &=\begin{bmatrix}A & U\\ 0 & I_p+V^TA^{-1}U\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}I_n & 0\\ V^TA^{-1} & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & -U\\ 0 & I_p\end{bmatrix}^{-1}\\ &=\begin{bmatrix}A^{-1} & -A^{-1}U(I+V^TA^{-1}U)^{-1}\\ 0 & (I+V^TA^{-1}U)^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & 0\\ V^TA^{-1} & I_p\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_n & U\\ 0 & I_p\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}A^{-1}-A^{-1}U(I+V^TA^{-1}U)^{-1}V^TA^{-1} & *\\ * & *\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

证法二：注意 A 可逆，因此 $A+UV^T=(I+UV^TA^{-1})A$ 可逆，当且仅当 $I+UV^TA^{-1}$ 可逆，根据练习 2.4，这又当且仅当 $I+V^TA^{-1}U$ 可逆. 简单计算，有

$$\begin{aligned}&[A^{-1}-A^{-1}U(I+V^TA^{-1}U)^{-1}V^TA^{-1}](A+UV^T)\\ &=I+A^{-1}UV^T-A^{-1}U(I+V^TA^{-1}U)^{-1}V^T-A^{-1}U(I+V^TA^{-1}U)^{-1}V^TA^{-1}UV^T\\ &=I+A^{-1}UV^T-A^{-1}U(I+V^TA^{-1}U)^{-1}[I+V^TA^{-1}U]V^T\\ &=I+A^{-1}UV^T-A^{-1}UV^T\\ &=I.\end{aligned}$$

由逆矩阵的唯一性即得结论. [6] □

[5] 这里要用到定理：方阵 M 可逆当且仅当 $Mx=0$ 只有零解。

[6] 其他解法：习题课 1 已证明如下结论：若 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $B\in M_{n\times m}(\mathbb{R})$，则 I_m+AB 可逆当且仅当 I_n+BA 可逆，且它们的逆矩阵可以互相表示

$$(I_m+AB)^{-1}=I_m-A(I_n+BA)^{-1}B,\qquad (I_n+BA)^{-1}=I_n-B(I_m+AB)^{-1}A.$$

插句题外话：这个公式的有用之处在于，当 m 很大，而 n 很小时，我们可以把判断 m 阶矩阵 I_m+AB 是否可逆的问题转化为判断一个 n 阶矩

练习 2.6 计算：$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & c_1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & c_2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & c_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{n-1} & a \end{bmatrix}^{-1}$.

解. 记 $c = [c_i]_{(n-1)\times 1}, b = [b_i]_{(n-1)\times 1}$，于是问题即是求解 $\begin{bmatrix} I & c \\ b^T & a \end{bmatrix}^{-1}$.

解法一：利用分块矩阵求逆公式，即得

$$\begin{bmatrix} I & c \\ b^T & a \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} I & -c \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & (a-b^Tc)^{-1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I & 0 \\ -b^T & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + \frac{1}{a-b^Tc}cb^T & -\frac{1}{a-b^Tc}c \\ -\frac{1}{a-b^Tc}b^T & \frac{1}{a-b^Tc} \end{bmatrix}.$$

[7]

解法二：$\begin{bmatrix} I & c \\ b^T & a \end{bmatrix} = I + \begin{bmatrix} 0 & c \\ 1 & a \end{bmatrix}\begin{bmatrix} b^T & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，然后利用 Sherman-Morrison-Woodbury 公式. □

练习 2.7 计算：

阵 $I_n + BA$ 是否可逆的问题（后者容易的多），并把求解这个 m 阶矩阵的逆矩阵的问题（当它可逆时）转化为求解一个低阶矩阵的逆矩阵的问题。本题中 A 可逆，故 $A+UV^T = A(I_n + A^{-1}UV^T)$ 可逆当且仅当 $I_n + A^{-1}UV^T$ 可逆；用上面的结论，后者等价于 $I_p + V^TA^{-1}U$ 可逆。当 $A+UV^T$ 或等价的 $I_n + A^{-1}UV^T$ 可逆时，上面的结论还告诉我们 $(A+UV^T)^{-1} = (A(I_n+A^{-1}UV^T))^{-1} = (I_n + A^{-1}UV^T)^{-1}A^{-1} = (I_n - A^{-1}U(I_p + V^TA^{-1}U)^{-1}V^T)A^{-1} = A^{-1} - A^{-1}U(I_p+V^TA^{-1}U)^{-1}V^TA^{-1}$.

[7]实在想推广，可以这样。设 A, B, C, D 分别是 $m\times m, m\times n, n\times m, n\times n$ 阶矩阵，其中 A 可逆，对 $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 作"分块矩阵的初等变换"有

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D - CA^{-1}B \end{pmatrix}.$$

等式左边的第一个矩阵可逆，其逆矩阵是 $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}$，故 M 可逆当且仅当"分块上三角阵" $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}$ 可逆，而由作业题知，后者可逆当且仅当 $A, D-CA^{-1}B$ 都可逆，已知 A 可逆，所以综上有 M 可逆当且仅当 $D-CA^{-1}B$ 可逆。因为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & 0 \\ CA^{-1} & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix},$$

故当 M 可逆时，我们有

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D-CA^{-1}B \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ 0 & (D-CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ -CA^{-1} & I_n \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}B(D-CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D-CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D-CA^{-1}B)^{-1}. \end{pmatrix} \end{aligned}$$

可以说，这是 2 阶矩阵的求逆公式

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

对分块阵的推广。以下 3 种 (2 阶的) 初等方阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \quad (a \in \mathbb{R}), \quad \begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (c \neq 0), \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

对应的 3 种分块初等方阵分别是

$$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix} \quad (B \in M_{n\times m}(\mathbb{R})), \quad \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix} \quad (P \text{ 是 } m \text{ 阶可逆阵}), \quad \begin{pmatrix} 0 & I_m \\ I_n & 0 \end{pmatrix}.$$

这些都是可逆阵，请试着写下它们的逆矩阵。

1. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-2 & n-1 \\ n-1 & n & 1 & \cdots & n-3 & n-2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & n & 1 \end{bmatrix}^{-1}$;

2. $\begin{bmatrix} a & a+h & a+2h & \cdots & a+(n-2)h & a+(n-1)h \\ a+(n-1)h & a & a+h & \cdots & a+(n-3)h & a+(n-2)h \\ a+(n-2)h & a+(n-1)h & a & \cdots & a+(n-4)h & a+(n-3)h \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a+h & a+2h & a+3h & \cdots & a+(n-1)h & a \end{bmatrix}^{-1}$.

解. 1. 记原矩阵为 S.

解法一：对 $\begin{bmatrix} S & I \end{bmatrix}$ 做初等行变换. 前 $n-1$ 行每行都减去下一行可以得到 $\begin{bmatrix} \cdots & 1 & 1-n & 1 & \cdots \end{bmatrix}$；然后前 $n-1$ 行相加放在第一行可以得到 $\begin{bmatrix} -1 & \cdots & -1 \end{bmatrix}$；然后第 2 到 $n-1$ 行与此行相加得到 $-ne_i^T$，之后是平凡的.

解法二：记向量 $\mathbf{1}_m = [1]_{m\times 1}$ 和矩阵 $J = \begin{bmatrix} e_n & e_1 & \cdots & e_{n-2} & e_{n-1} \end{bmatrix}$. 注意 S 的特殊形式，我们有 $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \end{bmatrix} S = \begin{bmatrix} n-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & n-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & n-1 & \cdots & -1 & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & n-1 \end{bmatrix}$，即 $(J-I)S = nI - \mathbf{1}_n\mathbf{1}_n^T$. 又有 $\mathbf{1}^T S = \frac{n(n+1)}{2}\mathbf{1}^T$. 于是 $I = \frac{1}{n}[(J-I)S + \mathbf{1}\mathbf{1}^T] = \frac{1}{n}[(J-I)S + \frac{2}{n(n+1)}\mathbf{1}\mathbf{1}^T S] = \frac{1}{n}[(J-I) + \frac{2}{n(n+1)}\mathbf{1}\mathbf{1}^T]S$. 于是猜测 $S^{-1} = \frac{1}{n}[(J-I) + \frac{2}{n(n+1)}\mathbf{1}\mathbf{1}^T]$，只需要再验证 $S\frac{1}{n}[(J-I) + \frac{2}{n(n+1)}\mathbf{1}\mathbf{1}^T] = I$，而这是容易的.

2. 若 $h=0$，则原矩阵为 $a\mathbf{1}\mathbf{1}^T$，不可逆. 考虑 $h\neq 0$ 的情形. 若 $a=h$，则原矩阵为 hS，于是 $(hS)^{-1} = \frac{1}{hn}[J-I+\frac{2}{n(n+1)}\mathbf{1}\mathbf{1}^T]$. 若 $a\neq h$，则原矩阵为 $hS+(a-h)\mathbf{1}\mathbf{1}^T$，利用 Sherman-Morrison-Woodbury 公式，有 $[hS+(a-h)\mathbf{1}\mathbf{1}^T]^{-1} = (hS)^{-1} - \frac{a-h}{1+(a-h)\mathbf{1}^T(hS)^{-1}\mathbf{1}}(hS)^{-1}\mathbf{1}\mathbf{1}^T(hS)^{-1} = \frac{1}{hn}[J-I+\frac{2}{n(n+1)}\mathbf{1}\mathbf{1}^T] - \frac{a-h}{1+(a-h)\frac{2}{h(n+1)}}\frac{4}{h^2n^2(n+1)^2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T = \frac{1}{hn}(J-I) + \frac{2}{[2a+h(n-1)]n^2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$，其中 $(hS)^{-1}\mathbf{1} = \frac{2}{hn(n+1)}\mathbf{1}$，$\mathbf{1}^T(hS)^{-1} = \frac{2}{hn(n+1)}\mathbf{1}^T$.

综上，当 $h=0$ 时，逆矩阵不存在；当 $h\neq 0$ 时，逆矩阵为 $\frac{1}{hn}(J-I) + \frac{2}{[2a+h(n-1)]n^2}\mathbf{1}\mathbf{1}^T$. □

练习 2.8 证明：任意可逆矩阵都是初等矩阵的乘积. [8]

证. 任意可逆矩阵 A 都可以通过初等行变换变成单位矩阵，也即存在 $P_1,\cdots,P_s$ 初等矩阵，使得 $P_1\cdots P_sA = I$. 所以我们知道 $A^{-1} = P_1\cdots P_s$，再根据逆的性质可知 $A = (A^{-1})^{-1} = P_s^{-1}\cdots P_1^{-1}$. 因为初等矩阵的逆矩阵也仍是初等矩阵，所以我们得证题目结论. □

练习 2.9 证明对于对换矩阵 $P_{ij}(i<j)$ 以下性质成立：

1. $\forall i<k<j$ 我们有

[8]课上证明过的定理

- $P_{ik}P_{ij} = P_{kj}P_{ik} = P_{ij}P_{kj}$;
- $P_{ij}P_{ik} = P_{kj}P_{ij} = P_{ik}P_{kj}$;
- $(P_{ik}P_{ij})^3 = I$.

2. 若 i, j, k, l 互不相等，则

- $P_{kl}P_{ij} = P_{ij}P_{kl}$;
- $(P_{kl}P_{ij})^2 = I$.

证. 对任意 $i < k < j$，$P_{ik}P_{ij} = P_{ik}P_{ij}I$ 所得矩阵相当于对单位矩阵做了两次行交换，注意 e_i^T 是单位矩阵的第 i 行，则有

$$\begin{pmatrix} i & k & j \\ e_i & e_k & e_j \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{ij}} \begin{pmatrix} i & k & j \\ e_j & e_k & e_i \end{pmatrix} \xrightarrow{P_{ik}} \begin{pmatrix} i & k & j \\ e_k & e_j & e_i \end{pmatrix}.$$

所以我们看到矩阵 $P_{ik}P_{ij}I$ 是将 e_k 放在第 i 行，e_i 放在第 j 行，e_j 放在第 k 行，剩下的其它行都和单位矩阵一样. 同样我们可以算出题目中其它的对换矩阵乘积并得出所有等式. □

练习 2.10 请找出一个矩阵 A 满足：存在矩阵 X 使得 $XA = I$，但不存在 Y 使得 $AY = I$. 看看这种矩阵的行数与列数应该满足什么条件.

解. 取 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，则有 $A^TA = I_2$.

我们接下来证明. 若有矩阵 Y 使得 $AY = I$，则 Y 必须是 2×3 阶矩阵. 记 $Y = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$，则 $AY = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq I$. 可以看出 A 的行数严格大于列数. [9] □

练习 2.11 令 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 为一个 2 阶实方阵，证明：

(1) $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = \mathbf{0}$（这即是 2 阶方阵情形下的 Hamilton-Cayley 定理）;

(2) 若 $A^2 = I_2$ 且 $A \neq \pm I_2$，则 $a + d = 0$ 且 $ad - bc = -1$;

(3) 若 $A^3 = I_2$ 且 $A \neq I_2$，则 $a + d = -1$ 且 $ad - bc = 1$;

(4) 若 $A^N = I_2, N \in \mathbb{N}, n \geq 1$，则 $(ad - bc)^N = 1$. [10]

[9] 若 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 有 r 个主元列（这里的 r 就是 A 的秩，注意 $r \leq \min(m, n)$），则 A 有左逆当且仅当 $r = n$（此时必有 $m \geq n$），A 有右逆当且仅当 $r = m$（此时必有 $m \leq n$）。综合起来有 A 有左逆而没有右逆当且仅当 $r = n < m$。注意，$m \geq n$ 是有左逆的必要条件但不充分，$m \leq n$ 是有右逆的必要条件但不充分。

[10] (3)(4) 属于体验型题目，学了更高级的知识之后很容易证明，目前只能生算，如果你算个半个小时还毫无头绪的话，我建议放弃。

(2) 的“高级证法”是这样的：$A^2 = I_2$ 而 $A \neq \pm I_2$ 等价于是说 $x^2 - 1$ 是 A 的化零多项式，而 $x + 1, x - 1$ 不是。这时由特征多项式和化零多项式的一般理论可以推知 A 的特征多项式和 A 的最小多项式都是 $x^2 - 1$。根据定义，A 的特征多项式是 $x^2 - \mathrm{tr}(A)x + \det(A) = x^2 - (a+d)x + ad - bc$，所以 $a + d = 0, ad - bc = -1$.

(3) 的“高级证法”是：从 $A^3 = I_2$ 知道 $x^3 - 1 = (x-1)(x^2+x+1)$ 是 A 的化零多项式，从 $A \neq I_2$ 知道 $x - 1$ 不是 A 的化零多项式，所以 A 的特征多项式和 A 的最小多项式都是 $x^2 + x + 1$，所以 $a + d = -1, ad - bc = 1$.

(4) 定义函数 $\det : M_2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}; A \mapsto \det(A) = ad - bc$. 先证明引理：det 是乘性函数，i.e. $\det(AB) = \det(A)\det(B), \forall A, B \in M_2(\mathbb{R})$.

证. 如果 A 是对角矩阵，即 $b=c=0$，则 $A^N=\begin{bmatrix} a^N & 0 \\ 0 & d^N \end{bmatrix}$，此时结论 (1),(2),(4) 显然成立，而 $A^3=I_2 \Rightarrow A=I_2$.

我们接下来假设 A 不是对角矩阵，即 b,c 不同时为零.

直接计算得 $A^2=\begin{bmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & d^2+bc \end{bmatrix}$ 这样可以得到 (1). 因为 b,c 不能同时为零，所以当 $A^2=I_2$ 时，只能是 $a+d=0, a^2+bc=-ad+bc=1$，即得证 (2).

证明结论 (3) 我们可以用两种方法.

方法一：直接计算得 $A^3=\begin{bmatrix} a^3+2abc+bcd & b(a^2+d^2+ad+bc) \\ c(a^2+d^2+bc+ad) & d^3+2dbc+abc \end{bmatrix}$，因为 b,c 不能同时为零，所以当 $A^3=I_2$ 时，只能是

$$\begin{cases} a^2+d^2+bc+ad=0 \\ a^3+2abc+bcd=a(a^2+bc)+bc(a+d)=1 \\ d^3+2dbc+abc=d(d^2+bc)+bc(a+d)=1 \end{cases}$$

约化上述方程组可得

$$\begin{cases} (a+d)^2+(bc-ad)=0 \\ a^3+2abc+bcd=a(-d^2-ad)+bc(a+d)=(a+d)(bc-ad)=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (a+d)^3=-1 \\ bc-ad=-(a+d)^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a+d=-1 \\ bc-ad=-(a+d)^2=-1 \end{cases}$$

即得证 (3).

方法二：根据 (1) 的结论可知 $A^2=(a+d)A+(bc-ad)I_2$，于是有 $A^3=AA^2=(a+d)A^2+(bc-ad)A=((a+d)^2+(bc-ad))A+(a+d)(bc-ad)I_2$. 所以由条件 $A^3=I_2$ 且 b,c 不全为零可知 $(a+d)^2+(bc-ad)=0, (a+d)(bc-ad)=1$，即得证 (3).

证明 (4) 之前我们先令 $A^n=f_nA+g_nI_2$，则根据结论 (1) 有 $A^{n+1}=AA^n=f_nA^2+g_nA=f_n((a+d)A+(bc-ad)I_2)+g_nA=f_{n+1}A+g_{n+1}I_2$，所以有

$$\begin{cases} f_{n+1}=(a+d)f_n+g_n \\ g_{n+1}=(bc-ad)f_n \end{cases} \tag{2.1}$$

易见 $f_1=1, g_1=0$. 计算

$$\begin{aligned} &(af_{n+1}+g_{n+1})(df_{n+1}+g_{n+1})-bcf_{n+1}^2 \\ =&(ad-bc)f_{n+1}^2+(a+d)f_{n+1}g_{n+1}+g_{n+1}^2 \\ \overset{(2.1)}{=}&(ad-bc)((a+d)f_n+g_n)^2+(a+d)(bc-ad)((a+d)f_n+g_n)f_n+(bc-ad)^2f_n^2 \\ =&(ad-bc)((ad-bc)f_n^2+(a+d)f_ng_n+g_n^2) \\ =&(ad-bc)((af_n+g_n)(df_n+g_n)-bcf_n^2) \end{aligned} \tag{2.2}$$

不妨设 $A=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$, 那么 $AB=\begin{pmatrix} a_1b_1+a_2b_3 & a_1b_2+a_2b_4 \\ a_3b_1+a_4b_3 & a_3b_2+a_4b_4 \end{pmatrix}$, 所以 $\det(AB)=(a_1b_1+a_2b_3)(a_3b_2+a_4b_4)-(a_1b_2+a_2b_4)(a_3b_1+a_4b_3)=\underline{a_1a_3b_1b_2}+a_1a_4b_1b_4+a_2a_3b_2b_3+\underline{a_2a_4b_3b_4}-\underline{a_1a_3b_1b_2}-a_1a_4b_2b_3-a_2a_3b_1b_4-\underline{a_2a_4b_3b_4}=(a_1a_4-a_2a_3)(b_1b_4-b_2b_3)=\det(A)\det(B)$. 进一步用数学归纳法可以证明 $\det(A_1\cdots A_k)=\det(A_1)\cdots\det(A_k)$, $\forall A_1,\ldots,A_k\in M_2(\mathbb{R})$. 回到原命题，因为 $A^N=I_2$, 所以 $\det(A^N)=\det(I_2)$. 由行列式的乘性推知 $\det(A^N)=(\det(A))^N=(ad-bc)^N$, 而 $\det(I_2)$ 显然等于 1, 故命题得证。

根据等式 (2.2) 和递归我们有

$$(af_{n+1}+g_{n+1})(df_{n+1}+g_{n+1})-bcf_{n+1}^2=(ad-bc)^n((af_1+g_1)(df_1+g_1)-bcf_1^2)=(ad-bc)^{n+1}.$$

若 $A^N=I_2$, 因为 b,c 不全为零, 所以有 $\begin{cases} f_N=0 \\ g_N=1 \end{cases} \Rightarrow 1=(af_N+g_N)(df_N+g_N)-bcf_N^2=(ad-bc)^N$, 得证结论 (4). □

练习 2.12 A 为 n 阶实方阵，证明以下结论：

1. 若对于任意的 n 维实列向量 α，都有 $(A\alpha)\cdot(A\alpha)=\alpha\cdot\alpha$，则 A 必须是正交矩阵.
2. 若对于任意两个 n 维实列向量 α,β，都有 $(A\alpha)\cdot\beta=\alpha\cdot(A\beta)$，则 A 必须是对称矩阵. [11]

证. 1. 根据点积定义可知

$$e_i\cdot e_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

将点积用矩阵乘法表示则有

$$e_i^T\cdot e_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

而另一方面令 $Ae_i=\varepsilon_i$，则有 $A=[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n]$. 由题设条件可知

$$\varepsilon_i^T\cdot\varepsilon_j=\begin{cases}0, & i\neq j\\ 1, & i=j\end{cases}$$

而 $A^TA=\begin{bmatrix}\varepsilon_1^T\\ \vdots\\ \varepsilon_n^T\end{bmatrix}[\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n]=\begin{bmatrix}\varepsilon_1^T\varepsilon_1 & \varepsilon_1^T\varepsilon_2 & \cdots & \varepsilon_1^T\varepsilon_n\\ \varepsilon_2^T\varepsilon_1 & \varepsilon_2^T\varepsilon_2 & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & \varepsilon_{n-1}^T\varepsilon_n\\ \varepsilon_n^T\varepsilon_1 & \cdots & \varepsilon_n^T\varepsilon_{n-1} & \varepsilon_n^T\varepsilon_n\end{bmatrix}=I_n$. 故 A 为正交矩阵.

2. 记 $A=\begin{bmatrix}a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}$，则通过直接计算可得 $a_{ij}=e_i\cdot(Ae_j)=e_j\cdot(Ae_i)=a_{ji}$，所以 A 是对称矩阵. □

[11] 此题已经在作业中进行了扩展讨论，两个列向量 α,β 的内积 $\alpha\cdot\beta$ 用矩阵运算表示的话就是 $\alpha^T\beta=\beta^T\alpha$.