习题课 4

2019 年 11 月 5 日

习题 1. 设 A, B 为 n 阶实方阵，证明 AB 可逆当且仅当 A 和 B 均可逆。

习题 2. *(1)* $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ 是否线性相关？

(2) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ \pi \end{bmatrix}$ 是否线性相关？求 $Span(v_1, v_2, v_3)$ 一组基。

习题 3. *(1)* 证明如果 $n > m$, $\mathbb{R}^m$ 中任意 n 个向量线性相关。

(2) 如果 $\dim V = m$, $n > m$, 则 V 中任意 n 个向量线性相关。

(3) 设 W 为 V 的子空间，则 $\dim W \leq \dim V$.

习题 4. 设 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 为 V 的一组基,A 为方阵。令

$$[w_1, \ldots, w_n] := [v_1, \ldots, v_n]A.$$

$\{w_1, \ldots, w_n\}$ 为 V 的基当且仅当 A 可逆。

习题 5. 令 S 为 n 阶对称矩阵全体，A 为 n 阶反对称矩阵全体。

(1) 证明 S, A 为 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的子空间。

(2) 求 S, A 以及 $S \cap A$ 的维数。

(3) 证明任意方阵可写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

习题 6. *(1)* 设 A 为 $m \times n$ 阶实方阵, 证明 $N(A^TA) = N(A)$.

(2) 证明 $C(A^TA) = C(A^T)$.

(3) 证明 A^TA 可逆当且仅当 A 是列满秩矩阵。

(4) 设 A 为 $m \times n$ 阶复方阵，上述命题是否一定成立？

习题 7. *(1)* 设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上三个点，且 x_1, x_2, x_3 互不相同。证明存在次数为 2 的多项式函数 $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, $a_i \in \mathbb{R}$ 满足

$$p(x_i) = y_i, \ \forall 1 \le i \le 3.$$

(2) 设 $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots, (x_{n+1}, y_{n+1})$ 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上 n 个点，且 $\{x_i, \ 1 \le i \le n\}$ 互不相同。证明存在次数为 n 的多项式函数 $p(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ 满足

$$p(x_i) = y_i, \ \forall 1 \le i \le n+1.$$

习题 8. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。证明：当且仅当 n 为奇数时，向量组

$$\alpha_1 + \alpha_2, \, \alpha_2 + \alpha_3, \, \cdots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, \, \alpha_n + \alpha_1$$

也线性无关。

习题 9. 设 V 是线性空间，且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$，证明：

（*1*）若 V 中每个向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出，且有一个向量的表出方法是唯一的，则 $dim\, V = n$ 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 就是 V 的一组基。

（*2*）若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，且 V 中任何 $n+1$ 个向量都线性相关，则 $dim\, V = n$ 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 就是 V 的一组基。

习题 10. 考虑两个线性方程组

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}y_1+a_{12}y_2+\cdots+a_{1n}y_n=b_1, \\ a_{21}y_1+a_{22}y_2+\cdots+a_{2n}y_n=b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}y_1+a_{m2}y_2+\cdots+a_{mn}y_n=b_m, \end{array}\right. \tag{1}$$

和

$$\left\{\begin{array}{c} a_{11}x_1+a_{21}x_2+\cdots+a_{m1}x_m=0, \\ \cdots \\ a_{1n}x_1+a_{2n}x_2+\cdots+a_{mn}x_m=0, \\ b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_mx_m=1, \end{array}\right. \tag{2}$$

求证：*(1)* 有解 $\Longleftrightarrow$*(2)* 无解。

习题 11. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 为 s 个线性无关的 n 维列向量。证明：存在齐次线性方程组 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 为 $N(B)$ 的一组基。

习题 12. 设 $A=(a_{i,j})\in M_{s\times n}(\mathbb{R})$。证明：方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解的充要条件是向量 $\beta:=[b_1,b_2\cdots,b_n]^T$ 可由向量组 $\alpha_i=[a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,n}]^T$, $i=1,2,\cdots,s$ 线性表出。

习题 13. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是两组 n 维向量。证明：若这两个向量组都线性无关，则线性空间 $span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\cap span(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$ 的维数等于齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s+y_1\beta_1+\cdots+y_t\beta_t=\mathbf{0}$ 的解空间（即系数矩阵的 *nullspace*）的维数。

习题 14. 设 $W_1=span(\alpha_1,\alpha_2)$，$W_2=span(\beta_1,\beta_2)$，其中

$$\alpha_1=[1,2,1,0]^T, \qquad \alpha_2=[-1,1,1,1]^T,$$

$$\beta_1=[2,-1,0,1]^T \qquad \beta_2=[1,-1,3,7]^T.$$

求 W_1+W_2 与 $W_1\cap W_2$ 的基与维数。