清华大学本科生考试试题专用纸

考试课程　微积分 B（1）　（期末考试）　A 卷　2012 年 1 月 6 日 8：00-10：00

班级____________　姓名______________　学号________________

一、填空题（每题 4 分，共 40 分）　**直接将答案填写在横线上，写在其他地方无效！**

1．$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\mathrm{e}^x+1}{1-\sqrt{1+x^2}}=$____________________.

2. $\displaystyle\int\frac{x+1}{x^2-3x+2}\mathrm{d}x=$______________________$+C$.

3．数列$\left\{\dfrac{(n+1)^3}{(n-1)^2}\right\}(n=2,3,\cdots)$的最小项的项数为$n=$____________________.

4．设 $f(x)=x^2\mathrm{e}^x$，则 $f^{(10)}(x)=$____________________.

5．设数列$\{a_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$．又$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k\,(n=1,2,\cdots)$无界，则幂级数

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$ 的收敛域是____________________.

6．若 $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x-a}{x+a}\right)^x=\displaystyle\int_a^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$，则 $a=$____________________.

7．$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}+\cdots+\dfrac{1}{n+n}\right)=$____________________.

8. 函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le\pi,\\ -1, & -\pi<x<0\end{cases}$ 的以 2π 为周期的 Fourier 级数是____________________.

9. 当且仅当参数 p,q 满足____________________时，数项级数$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n^p\ln^q n}$收敛.

10. 函数项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在区间 I 一致收敛于 $S(x)$ 的 ε-N 定义是指：

____.

二、解答题（第 11-15 题每题 10 分，第 16 题 15 分，共 65 分）

11．已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处具有一阶导数，且满足条件 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{f(x)}{x}+\dfrac{\mathrm{e}^{x^2}\sin x}{x^2}\right)=1$.

求 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的带皮亚诺型余项的一阶泰勒公式.

12．求幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{n+1}x^n$ 的收敛域及和函数.

13．证明 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\sin^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$，并计算定积分 $I=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}\dfrac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\mathrm{d}x$.

14．已知曲线段 L: $y=\ln x$ （$1\leqslant x\leqslant\sqrt{3}$），有界区域 D 由 L 与 x 轴及直线 $x=\sqrt{3}$ 围成.

（Ⅰ）求 D 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积；

（Ⅱ）求曲线段 L 的长.

15．已知函数 $f(x)$ 在区间 $[0,\ a]$ $(a>0)$ 上可导，且点 $(0,0),(a,a)$ 在曲线 $y=f(x)$ 上.

证明：（Ⅰ）存在 $\xi\in(0,\ a)$，使得 $f(\xi)=\dfrac{a}{2}$；

（Ⅱ）存在 $\eta_1,\eta_2\in(0,\ a)$，使得 $\dfrac{1}{f'(\eta_1)}+\dfrac{1}{f'(\eta_2)}=2$.

16．已知函数 $f(x)=\ln\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x}$， $x_1=1$， $x_{n+1}=f(x_n)\,(n=1,2,\cdots)$.

（Ⅰ）求 $f(x)$ 的单调区间；

（Ⅱ）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

（Ⅲ）证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛.