线性代数期中小班辅导讲义

小班辅导讲师 何昊天

2020 年秋季学期

目录

1 向量空间

1.1 线性映射

Problem 1.1 设有映射 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ 和 $g,h:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$，满足 $f(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix})=\begin{bmatrix}g(x,y,z)\\h(x,y,z)\end{bmatrix}$，证明 f 是线性映射当且仅当 g,h 都是线性映射。

Solution: 先来证明若 f 是线性映射则 g,h 都是线性映射，f 是线性映射说明两点：

$$f(\begin{bmatrix}x+x'\\y+y'\\z+z'\end{bmatrix})=f(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix})+f(\begin{bmatrix}x'\\y'\\z'\end{bmatrix})\Rightarrow\begin{bmatrix}g(x+x',y+y',z+z')\\h(x+x',y+y',z+z')\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}g(x,y,z)\\h(x,y,z)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}g(x',y',z')\\h(x',y',z')\end{bmatrix}$$

$$f(\begin{bmatrix}kx\\ky\\kz\end{bmatrix})=kf(\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix})\Rightarrow\begin{bmatrix}g(kx,ky,kz)\\h(kx,ky,kz)\end{bmatrix}=k\begin{bmatrix}g(x,y,z)\\h(x,y,z)\end{bmatrix}$$

对比 $\Rightarrow$ 右侧的两个等式得各个分量，这就是 g,h 为线性映射的定义，所以我们就证明了 g,h 都是线性映射。

反之若 g,h 都是线性映射，我们可以将上面的 $\Rightarrow$ 换成 $\Leftarrow$，那么 $\Leftarrow$ 左侧就是 f 为线性映射的定义，命题的另一半也就得证，此处不再赘述。

1.2 向量组

Problem 1.2 设 $a_1=\begin{bmatrix}1\\0\\2\\3\end{bmatrix},a_2=\begin{bmatrix}1\\1\\3\\5\end{bmatrix},a_3=\begin{bmatrix}1\\-1\\k+2\\1\end{bmatrix},a_4=\begin{bmatrix}1\\2\\4\\k+l\end{bmatrix},b=\begin{bmatrix}1\\1\\l+3\\5\end{bmatrix}$，计算：

(i) 当 k,l 取何值时，b 不能由 a_1,a_2,a_3,a_4 线性表示

(ii) 当 k,l 取何值时，b 能由 a_1,a_2,a_3,a_4 唯一线性表示

Solution: 令 $A=\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3&a_4\end{bmatrix}$，讨论线性方程组 $Ax=b$ 解的情况即可得到结论：

$$\begin{bmatrix}A&b\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\2&3&k+2&4&l+3\\3&5&1&k+8&5\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&-1&2&1\\0&0&k+1&0&l\\0&0&0&k+1&0\end{bmatrix}$$

可以看出，当 $k=-1,l\neq0$ 时线性方程组无解，此时 b 不能由 a_1,a_2,a_3,a_4 线性表示，当 $k\neq-1$ 时线性方程组有唯一解，此时 b 能由 a_1,a_2,a_3,a_4 唯一线性表示。

Problem 1.3 设 $a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, a_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 4 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$，证明 $\{b_1, b_2, b_3\}$ 可由 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 线性表示，但 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 不能由 $\{b_1, b_2, b_3\}$ 线性表示。

Solution: 令 $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix}$，消元为阶梯形矩阵如下：

$$\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 & 1 & -2 & 4 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 1 & -2 & 4 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 & 4 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

矩阵消元成阶梯形矩阵后，主元所在的列就可以生成原矩阵的列空间，增广矩阵 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 的主元都出现在 A 所在的列，因此只用 A 的列就可以表示 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 的列，也即 $\{b_1, b_2, b_3\}$ 可由 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 线性表示，但增广矩阵 $\begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix}$ 的主元也出现在了 A 所在的列，因此只用 B 的列不足以表示 $\begin{bmatrix} B & A \end{bmatrix}$ 的列，也即 $\{a_1, a_2, a_3\}$ 不能由 $\{b_1, b_2, b_3\}$ 线性表示。

Problem 1.4 设 $a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$，证明 $\{a_1, a_2\}$ 和 $\{b_1, b_2, b_3\}$ 是等价的。

Solution: 令 $A = \begin{bmatrix} a_1^T \\ a_2^T \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} b_1^T \\ b_2^T \\ b_3^T \end{bmatrix}$，消元为行简化阶梯形矩阵如下：

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

从消元结果可以直接看出，两个矩阵的行向量组是等价的，也即它们的行向量组 $\{a_1, a_2\}$ 和 $\{b_1, b_2, b_3\}$ 是等价的。

Problem 1.5 设有向量组 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$，试问：

(i) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 线性相关，a_1 能否被 $a_2, \cdots, a_n$ 线性表示？

(ii) 若有不全为 0 的系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得 $c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n+c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_nb_n = 0$，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是否各自线性相关？

(iii) 若 $c_1a_1+c_2a_2+\cdots+c_na_n+c_1b_1+c_2b_2+\cdots+c_nb_n = 0$ 当且仅当 $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$，则 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 是否各自线性无关？

(iv) 若 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 和 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 各自线性相关，是否有不全为 0 的系数 $c_1, c_2, \cdots, c_n$ 使得 $c_1a_1 + c_2a_2 + \cdots + c_na_n = 0$ 和 $c_1b_1 + c_2b_2 + \cdots + c_nb_n = 0$ 都成立？

Solution:

(i) 不一定，比如有反例 $n = 2, a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$。

(ii) 不一定，比如有反例 $n = 2, a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}$，取 $c_1 = c_2 = 1$ 就有 $c_1a_1 + c_2a_2 + c_1b_1 + c_2b_2 = 0$。

(iii) 不一定，比如有反例 $n = 2, a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

(iv) 不一定，比如有反例 $n = 2, a_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$。

Problem 1.6 设 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 与 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中两个含有 s 个向量的向量组，假设对于任意一组数 $c_1, c_2, \cdots, c_s$，都有：

$$\sum_{i=1}^{s} c_ia_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} c_ib_i = 0$$

证明：$a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 的一个极大线性无关组当且仅当 $b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_r}$ 是 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 的一个极大线性无关组。

Solution: 由于 a, b 是完全对称的，所以只用证明充要条件的一个部分，另一个部分是同理的，我们来证明若 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$ 是 $a_1, a_2, \cdots, a_s$ 的一个极大线性无关组，则 $b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_r}$ 是 $b_1, b_2, \cdots, b_s$ 的一个极大线性无关组。

考虑极大线性无关组的定义，即 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}$ 线性无关，且任取 $a_t \in \{a_j\}_{j=1}^{s} \setminus \{a_{i_k}\}_{k=1}^{r}$，都有 $a_{i_1}, a_{i_2}, \cdots, a_{i_r}, a_t$ 线性相关。

假设 $b_{i_1}, b_{i_2}, \cdots, b_{i_r}$ 线性相关，则存在不全为 0 的系数 $c_{i_1}, c_{i_2}, \cdots, c_{i_r}$ 使得 $\sum_{k=1}^{r} c_{i_r}b_{i_r} = 0$，对 $1 \le p \le s, p \ne i_1, i_2, \cdots, i_r$，令 $c_p = 0$，则可得 $\sum_{i=1}^{s} c_ib_i = 0$，利用 $\sum_{i=1}^{s} c_ia_i = 0 \Leftrightarrow \sum_{i=1}^{s} c_ib_i =$

0，由于所有的 $c_p=0$，所以就有不全为 0 的系数 $c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_r}$ 使得 $\sum_{k=1}^{r}c_{i_r}a_{i_r}=0$，这与 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r}$ 线性无关矛盾，所以只能是 $b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_r}$ 线性无关。

假设 $\exists b_t\in\{b_j\}_{j=1}^{s}\setminus\{b_{i_k}\}_{k=1}^{r}$，使得 $b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_r},b_t$ 线性无关，考虑 $a_{i_1},a_{i_2},\cdots,a_{i_r},a_t$，根据极大性它们是线性相关的，则存在不全为 0 的系数 $c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_r},c_t$ 使得 $\sum_{k=1}^{r}c_{i_r}a_{i_r}+c_ta_t=0$，对 $1\le p\le s,p\ne i_1,i_2,\cdots,i_r,t$，令 $c_p=0$，则可得 $\sum_{i=1}^{s}c_ia_i=0$，利用 $\sum_{i=1}^{s}c_ia_i=0\Leftrightarrow\sum_{i=1}^{s}c_ib_i=0$，由于所有的 $c_p=0$，所以就有不全为 0 的系数 $c_{i_1},c_{i_2},\cdots,c_{i_r},c_t$ 使得 $\sum_{k=1}^{r}c_{i_r}b_{i_r}+c_tb_t=0$，这与 $b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_r},b_t$ 线性无关矛盾，所以只能是 $b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_r},b_t$ 线性相关，这就证明了 $b_{i_1},b_{i_2},\cdots,b_{i_r}$ 是一个极大线性无关组。

1.3 基与维数

Problem 1.7 设 a_1,a_2,a_3,a_4 是空间 $\mathcal{M}$ 的一组基，证明 $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4$ 也是 $\mathcal{M}$ 的基。

Solution: 给定向量组成为一组基的条件是它们线性无关且能表示出空间中的任意一个向量，设有线性组合 $c_1(a_1+a_2)+c_2(a_2+a_3)+c_3(a_3+a_4)+c_4a_4=0$，则 $c_1a_1+(c_1+c_2)a_2+(c_2+c_3)a_3+(c_3+c_4)a_4=0$，因为 a_1,a_2,a_3,a_4 是一组基从而线性无关，所以有 $c_1=c_1+c_2=c_2+c_3=c_3+c_4=0\Rightarrow c_1=c_2=c_3=c_4=0$，则 $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4$ 也是线性无关的。

$\forall b\in\mathcal{M}$，因为 a_1,a_2,a_3,a_4 是基，所以存在 d_1,d_2,d_3,d_4 使得 $d_1a_1+d_2a_2+d_3a_3+d_4a_4=b$，那么也有 $d_1(a_1+a_2)+(d_2-d_1)(a_2+a_3)+(d_3-d_2+d_1)(a_3+a_4)+(d_4-d_3+d_2-d_1)a_4=b$，也即 $\mathcal{M}$ 中的向量也可以用 $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4$ 来表示，这就证明了 $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4$ 是 $\mathcal{M}$ 的基。

此外，这个问题也可以从 a_1,a_2,a_3,a_4 和 $a_1+a_2,a_2+a_3,a_3+a_4,a_4$ 等价的角度来证明，此处不再赘述。

Problem 1.8 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是 $\mathcal{M}$ 中一组线性无关的向量，令 $b\in\mathcal{M}$ 是任意向量，证明 $\dim\operatorname{span}(a_1+b,a_2+b,\cdots,a_n+b)\ge n-1$。

Solution: 我们只需证明 $a_1+b,a_2+b,\cdots,a_n+b$ 的秩不小于 $n-1$，也即证明该向量组可以表示出一个秩不小于 $n-1$ 的向量组。

考虑 $a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_n-a_1$，显然该向量组是线性无关的（否则有一组系数对该向量组做线性组合后结果会等于 0，但对这组向量做线性组合也就是在对 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 做线性组合，这就与后者线性无关矛盾了），因此它的秩就是 $n-1$，由于 $a_i-a_1=(a_i+b)-(a_1+b)$，所以 $a_1+b,a_2+b,\cdots,a_n+b$ 可以线性表示出 $a_2-a_1,a_3-a_1,\cdots,a_n-a_1$ 来，这就证明了原命题。

2 矩阵

2.1 矩阵的基本运算

Problem 2.1 计算下列矩阵的 n 次幂：

(i) $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$

(ii) $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}$

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

Solution:

(i) 分别考虑两个矩阵对应的线性变换，$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ 乘一个平面向量是将这个向量逆时针旋转了 θ，因此作用 n 次就是逆时针旋转了 $n\theta$，所以 $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos n\theta & -\sin n\theta \\ \sin n\theta & \cos n\theta \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$ 乘一个平面向量是将这个向量对直线 $y\cos\theta - x\sin\theta = 0$ 做反射，注意到反射偶数次向量保持不变，因此对所有的偶数 n 有 $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}^n = I_2$，对所有的奇数 n 有 $\begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{bmatrix}$。

(ii) 设 $J = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，做拆分 $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix} = aI_3 + bJ$，这里考虑用二项式定理做计算，首先矩阵的二项式定理 $(A+B)^n = \sum_{i=0}^n C_n^i A^i B^{n-i}$ 成立当且仅当 A, B 可交换，这里 J 肯定和单位阵 I_3 是交换的，其次由于 J 是一个幂零矩阵，其满足 $J^3 = 0$，展开后得 $\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{bmatrix}^n = (aI_3 + bJ)^n = a^n I_3^n + na^{n-1}bI_3^{n-1}J + \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 I_3^{n-2}J^2 = \begin{bmatrix} a^n & na^{n-1}b & \frac{n(n-1)}{2}a^{n-2}b^2 \\ 0 & a^n & na^{n-1}b \\ 0 & 0 & a^n \end{bmatrix}$。

(iii) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ 是一个秩为 1 的矩阵，这类矩阵的特点是可以写成两个向量的乘积，取 $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$，就有 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} = ab^T$，则 $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^n = (ab^T)^n = a(b^Ta)\cdots(b^Ta)b^T = (b^Ta)^{n-1}ab^T = \begin{bmatrix} 3^{n-1} & 3^{n-1} & -3^{n-1} \\ 3^{n-1} & 3^{n-1} & -3^{n-1} \\ -3^{n-1} & -3^{n-1} & 3^{n-1} \end{bmatrix}$。

Problem 2.2 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，计算所有满足 $AB = BA$ 的矩阵 B。

Solution: 考虑使用待定系数法，设 $B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{bmatrix}$，但直接代入进行计算涉及的条件太多（这等价于解一个 9 个未知数的线性方程组），我们将 A 拆分为 $I_3 + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$，由于 B 和单位阵 I_3 一定交换，所以只需验证 $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} B = B \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} b_{31} & b_{32} & b_{33} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & 0 & b_{21} \\ 0 & 0 & b_{31} \end{bmatrix}$，也即 $b_{31} = b_{32} = b_{21} = 0, b_{11} = b_{33}$，所有满足条件的矩阵 B 为 $\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & b_{11} \end{bmatrix}, b_{11}, b_{12}, b_{13}, b_{22}, b_{23} \in \mathbb{R}$。

Problem 2.3 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$，计算所有满足 $AB = BA$ 的矩阵 B。

Solution: 这里换一个角度考虑，令 $A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，则 $A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & A_{11} \end{bmatrix}$，设 $B = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ B_{21} & B_{22} \end{bmatrix}$，根据 $AB = BA$ 有 $A_{11}B_{ij} = B_{ij} = A_{11}$ 应对所有的 $i, j = 1, 2$ 成立，对每个 B_{ij} 可仿照上一题进行

拆分讨论，最终得到所有满足条件的矩阵 B 为 $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 & a_2 & b_2 \\ 0 & a_1 & 0 & a_2 \\ a_3 & b_3 & a_4 & b_4 \\ 0 & a_3 & 0 & a_4 \end{bmatrix}$, $a_1, a_2, a_3, a_4, b_1, b_2, b_3, b_4 \in \mathbb{R}$。

2.2 矩阵的逆

Problem 2.4 设 $A = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_n \\ a_1 & \ddots & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & a_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$，其中 $a_i \neq 0, i = 1, 2, \cdots, n$，计算 A^{-1}。

Solution: 令 $A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & & \\ & \ddots & \\ & & a_{n-1} \end{bmatrix}$，则 $A = \begin{bmatrix} 0 & a_n \\ A_1 & 0 \end{bmatrix}$，现在利用分块矩阵的性质不难求得 $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & A_1^{-1} \\ \frac{1}{a_n} & 0 \end{bmatrix}$，且 A_1 的逆也很容易写出，展开即得 A^{-1}，此处不再赘述。

2.3 矩阵的初等变换

Problem 2.5 证明任意一个秩为 r 的矩阵都可以写成 r 个秩为 1 的矩阵之和，但不能写成少于 r 个秩为 1 的矩阵之和。

Solution: 设 $r(A) = r$，对于矩阵 A，我们知道存在可逆矩阵 P 使得 PA 是一个行简化阶梯形矩阵，继续对 PA 做列变换，用每个主元将同一行主元后面的元素消成 0，再将所有主元换到最前面，因为做列变换等价于左乘初等矩阵，而可逆矩阵等价于有限个初等矩阵的乘积，这就是在说存在一个可逆矩阵 Q 使得 $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$。

现在考虑 $A = P^{-1} \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} Q^{-1}$，将 I_r 的每一列单独拿出来得到 r 个矩阵，这些矩阵的秩当然都为 1，由于 P, Q 都可逆，与可逆矩阵相乘不改变矩阵的秩，这就将 A 分解成了 r 个秩为 1 的矩阵之和了。

这个问题还有两个启发，一方面是我们知道 $r(A+B) \leq r(A) + r(B)$，而这题相当于给出了等号成立的一个构造，另一方面是 $PAQ = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 这个形式，在很多涉及秩的问题中如果感觉行简化阶梯形矩阵说起问题来比较含混，那么可以继续做列变换得到这个形式，这样就能将问题的来龙去脉阐释得更清楚。

2.4 矩阵的秩

Problem 2.6 证明下述结论:

(i) $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$

(ii) $r(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}) = r(A) + r(B), r(\begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}) \ge r(A) + r(B)$

(iii) $r(A+B) \le r(\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}) \le r(A) + r(B)$

Solution:

(i) 固定 A,则 AB 是在对 A 的列向量组做一些线性组合,所以线性组合后的向量组的秩不会超过 A 的列秩,也就不会超过 $r(A)$,固定 B,则 AB 是在对 B 的行向量做一些线性组合,所以线性组合后的向量组的秩不会超过 B 的行秩,也就不会超过 $r(B)$,所以有 $r(AB) \le \min(r(A), r(B))$。

(ii) 这两个结论可以直接用行简化阶梯形矩阵说明,但我认为使用上一题的结论可能更清晰:存在可逆矩阵 P_A, P_B, Q_A, Q_B 满足 $P_A A Q_A = \begin{bmatrix} I_{r(A)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, P_B B Q_B = \begin{bmatrix} I_{r(B)} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,显然分块对角矩阵 $\begin{bmatrix} P_A & 0 \\ 0 & P_B \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} Q_A & 0 \\ 0 & Q_B \end{bmatrix}$ 也是可逆的,则 $r(\begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} I_{r(A)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{r(B)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix})$,显然后者的秩就是 $r(A) + r(B)$,另一方面 $r(\begin{bmatrix} A & X \\ 0 & B \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} I_{r(A)} & 0 & X'_{11} & X'_{12} \\ 0 & 0 & X'_{21} & X'_{22} \\ 0 & 0 & I_{r(B)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix})$,显然后者的秩不小于 $r(A) + r(B)$,由此原命题得证。

(iii) $r(A) + r(B)$ 比前两个矩阵的秩都大这件事很容易用列向量组的语言去说明,但列向量的表述下前两个矩阵之间的秩大小比较就有点困难了,这里借助前两小问的结论,只需注意到 $\begin{bmatrix} I & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix} A & B \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ I \end{bmatrix} = A + B$ 即可。

Problem 2.7 设 A 为 n 阶方阵,证明 $A^2 = I$ 当且仅当 $r(A+I) + r(A-I) = n$。

Solution: 先来看左推右,$A^2 = I \Rightarrow (A+I)(A-I) = 0$,这意味着 $C(A-I) \subseteq N(A+I) \Rightarrow \dim C(A-I) \le \dim N(A+I) \Rightarrow r(A-I) \le n - r(A+I) \Rightarrow r(A+I) + r(A-I) \le n$,再借助上一题的结论有 $r(A+I) + r(A-I) = r(A+I) + r(I-A) \ge r(A+I+I-A) = r(2I) = n$,所以 $r(A+I) + r(A-I) = n$。

再来看右推左，这里借助分块对角矩阵做一个构造 $r(\begin{bmatrix} A+I & 0 \\ 0 & I-A \end{bmatrix}) = r(A+I)+r(A-I) = n$，对这个分块矩阵做消元：

$$\begin{bmatrix} A+I & 0 \\ 0 & I-A \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A+I & A+I \\ 0 & I-A \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} A+I & A+I \\ A+I & 2I \end{bmatrix}$$
$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 0 & A-I \\ A+I & 2I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I-A^2) & A-I \\ 0 & 2I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I-A^2) & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix}$$

由此 $r(\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(I-A^2) & 0 \\ 0 & 2I \end{bmatrix}) = n$，但若 $I - A^2 \neq 0$ 则显然有矛盾，所以必有 $A^2 = I$。

Problem 2.8 设 A 为 n 阶方阵，满足 $r(A) = r(A^2)$，证明 $\forall k, r(A) = r(A^k)$。

Solution: 考虑用数学归纳法，设 $r(A) = r(A^l)$ 对任意 $l < k$ 成立，初始条件题目已经给出，首先显然有 $r(A^k) = r(A \cdot A^{k-1}) \leq r(A^{k-1})$，故只需证 $r(A^k) \geq r(A^{k-1})$。

考虑 $r(A^{k-1}) + r(A^{k-1}) = r(\begin{bmatrix} A^{k-1} & 0 \\ 0 & A^{k-1} \end{bmatrix}) \leq r(\begin{bmatrix} A^{k-1} & 0 \\ A^{k-2} & A^{k-1} \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} A^{k-1} & -A^k \\ A^{k-2} & 0 \end{bmatrix}) = r(\begin{bmatrix} 0 & -A^k \\ A^{k-2} & 0 \end{bmatrix}) = r(A^k) + r(A^{k-2})$，再利用 $r(A^{k-2}) = r(A^{k-1}) = r(A)$ 即得 $r(A^k) \geq r(A^{k-1})$，所以原命题得证。

Problem 2.9 设 A, B 为 n 阶方阵，满足 $r(A)$=$r(BA)$，证明 $r(A^2) = r(BA^2)$。

Solution: 这里转变一下思路，从线性方程组和子空间维数的角度去考虑秩，$r(A) = r(BA) \Rightarrow n - r(A) = n - r(BA) \Rightarrow \dim N(A) = \dim N(BA)$，又因为线性方程组 $Ax = 0$ 的解都是 $BAx = 0$ 的解，也即 $N(A) \subseteq N(BA)$，所以 $N(A) = N(BA)$，换句话说线性方程组 $Ax = 0$ 和 $BAx = 0$ 是同解的。

显然线性方程组 $A^2x = 0$ 的解都是 $BA^2x = 0$ 的解，另一方面 $\forall x_0, BA^2x_0 = 0$，有 $BA(Ax_0) = 0$，由于 $Ax = 0$ 和 $BAx = 0$ 同解，则有 $A(Ax_0) = 0 \Rightarrow A^2x_0 = 0$，所以 $A^2x = 0$ 和 $BA^2x = 0$ 也是同解的，那么 $N(A^2) = N(BA^2) \Rightarrow n - r(A^2) = n - r(BA^2) \Rightarrow r(A^2) = r(BA^2)$。

Problem 2.10 设 A 是 $n \times m$ 阶矩阵，证明 $r(A^TA) = r(A)$。

Solution: 显然线性方程组 $Ax = 0$ 的解都是 $A^TAx = 0$ 的解，另一方面 $\forall x_0, A^TAx_0 = 0$，有 $x_0^TA^TAx_0 = 0 \Rightarrow \|Ax_0\| = 0$，一个向量的模长是 0 只能是这个向量为 0，所以 $Ax_0 = 0$，也即 $Ax = 0$ 和 $A^TAx = 0$ 是同解的，那么 $N(A^TA) = N(A) \Rightarrow n - r(A^TA) = n - r(A) \Rightarrow r(A^TA) = r(A)$。

3 线性方程组

3.1 线性方程组的基本性质

Problem 3.1 设有两个线性方程组 $Ax=b$ 和 $\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} y = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，证明第一个方程组有解的充要条件是第二个方程组无解。

Solution: 从秩的角度来考虑这个问题：一个方程组有解当且仅当系数矩阵的秩和增广矩阵的秩相等，注意到 $r(\begin{bmatrix} A^T & 0 \\ b^T & 1 \end{bmatrix}) = r(A)+1$ 是一定的，而 $r(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix})$ 要么等于 $r(A)$，要么等于 $r(A)+1$，如果 $r(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix}) = r(A)$，则第二个方程组无解，此时也有 b^T 能被 A^T 的行所表示，那么 $b \in C(A) \Rightarrow Ax=b$ 是有解的，反之如果 $r(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix}) = r(A)+1$，则第二个方程组有解，此时 b^T 不能被 A^T 的行表示，那么 $b \notin C(A) \Rightarrow Ax=b$ 无解，所以第一个方程组有解当且仅当第二个方程组无解。

3.2 线性方程组的解集

Problem 3.2 求一个齐次线性方程组，使它的基础解系为 $a_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, a_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$。

Solution: 设所求方程组为 $Bx=0$，不妨设我们求出的 B 是行满秩的，则 B 应有 2 行 4 列，令 $A = \begin{bmatrix} a_2 & a_1 \end{bmatrix}$，则有 $BA=0$，取转置得 $A^TB^T=0$，考虑线性方程组 $A^Ty=0$，消元得：

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 3 & 0 & -3 & -6 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

求得一个基础解系为 $b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$，不难验证可以取 $B^T = \begin{bmatrix} b_1 & b_2 \end{bmatrix}$，所以所求齐次线性方程组为 $\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_4 = 0 \end{cases}$。

深入解释一下这个问题，首先由 $BA=0$ 可得 $C(A) \subseteq N(B)$，由于这里 A 的列就是 $Bx=0$ 的基础解系，因此实际上是有 $C(A)=N(B)$，同理后面 $A^TB^T=0$ 给出 $C(B^T)=N(A^T)$，我们注意到 $N(B)$ 和 $C(B^T)$ 之间的关系，这两个空间是互为补空间的（更进一步的，其实是正交补），考

虑解线性方程组 $Bx=0$ 的过程，我们可以说这个过程实际上就是在从 $C(B^T)$ 来计算 $N(B)$，但两个空间互为补空间，它们是没有地位高低区别的，这个题目是想通过 $N(B)$ 来计算 $C(B^T)$，使用的方法当然也是去解方程组，更进一步的，任何去计算一个空间的补空间的问题，都是一个解方程组的问题，只需要把该空间的一组基排成一个矩阵的行，那么该方程组的基础解系就是这个空间补空间的一组基了。

Problem 3.3 设 $r(A_{m\times 4})=3$，a_1,a_2,a_3 是非齐次线性方程组 $Ax=b$ 的 3 个解向量，且 $a_1=\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}, a_2+a_3=\begin{bmatrix}1\\2\\3\\4\end{bmatrix}$，求 $Ax=b$ 的通解。

Solution: 要计算一个线性方程组的通解，就是要计算系数矩阵零空间的一组基并找到一个特解，这里已经有特解 $x_p=a_1$ 了，利用维数关系有 $\dim N(A)=1$，因此 $N(A)=\operatorname{span}(\xi)$，其实我们也并不关心 ξ 是多少，因为 $\forall k\neq 0$，会有 $N(A)=\operatorname{span}(k\xi)$，我们要找的就是任意一个 $k\xi$。

利用方程组解的结构，有 $a_2=k_2\xi+a_1, a_3=k_3\xi+a_1$，那么 $2a_1-(a_2+a_3)=\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}$ 就是一个 $k\xi$，所以 $Ax=b$ 的通解为 $\left\{\lambda\begin{bmatrix}3\\4\\5\\6\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\3\\4\\5\end{bmatrix}\middle|\lambda\in\mathbb{R}\right\}$。