第 8 次习题课

一. 计算:

1. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & x & 1\\ x & 1 & y\\ 1 & y & 1\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$, 当 x,y 满足什么条件时，A 与 B 相似?

2. 设矩阵 $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ a & b & c\\ d & e & f\end{pmatrix}$, 且 $(1,1,1)^T,(1,0,-1)^T,(1,-1,0)^T$ 是 A 的特征向量，求 a,b,c,d,e,f.

3. 假设 $A\in M_3(\mathbb{R})$ 且 $A=A^T$, 若 $1,1,-2$ 是 A 的特征值，且 $(1,1,-1)^T$ 是对应 -2 的特征向量，求矩阵 A.

4. 判断下列矩阵哪些可以对角化，哪些不能对角化，并求相应的对角矩阵以及可逆矩阵。

   - $\begin{pmatrix}1 & 1 & -2\\ 4 & 0 & 4\\ 1 & -1 & 4\end{pmatrix}$
   - $\begin{pmatrix}4 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\\ -1 & -2 & 0\end{pmatrix}$
   - $\begin{pmatrix}-1 & -3 & 3 & -3\\ -3 & -1 & -3 & 3\\ 3 & -3 & -1 & -3\\ -3 & 3 & -3 & -1\end{pmatrix}$

二. 证明:

1. (1) 设 A 为 n 阶实方阵，且 $A^2=I_n$，证明 A 可对角化。

   (2) 找到所有满足 $A^2=I_2$ 的 2 阶实方阵。

2. 设 $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ 为二阶实方阵。设 $\lambda\neq 0$ 是其特征值，且 $x=(x_1,x_2)^T$ 是 λ 对应的特征向量。

   (1) 设 $x_1\neq 0$。令 $s=x_2/x_1$，求 s 应满足的方程。

   (2) 设 A 的每个分量都是正数，证明 A 在第一象限和第二象限分别有一个特征向量。证明其必有一正特征值，且可对角化。

3. 设 A 是 n 阶实方阵，且任意非零向量 $x\in\mathbb{R}^n$ 均为其特征向量，证明 $A=\lambda I_n$。

4. 设 A 为 3 阶实方阵，且有三个实特征值 $\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3$ 满足 $|\lambda_1|>|\lambda_2|>|\lambda_3|>0$. 设 u_i 为 λ_i 对应的特征向量。定义

$$V=span\{u_2,u_3\};\quad W=span\{u_3\}.$$

(1) 任给 $x \in \mathbb{R}^3 \setminus V$，证明以下极限存在：

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_1^{-n} A^n x$$

并求该极限。

(2) 任给 $y \in V \setminus W$，证明以下极限存在：

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_2^{-n} A^n y$$

并求该极限。

(3) 证明对任意非零向量 z,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\log \|A^n z\|}{n}$$

存在，且其只能在 $\{\log|\lambda_i| : i = 1, 2, 3\}$ 中取值.

5. 若 $B = diag\{B_1, \cdots, B_s\}$, 则 B 可对角化等价于 $B_i (1 \leq i \leq s)$ 可对角化.

6. 设 A, B 为 n 阶方阵，且均可对角化。证明 $AB = BA$ 当且仅当它们有 n 个公共的线性无关的特征向量。

7. 设 A, B 分别为 $m \times n$ 阶和 $n \times m$ 阶矩阵。

   (1) 证明若 $\lambda \neq 0$ 是 AB 的特征值，则 λ 也是 BA 的特征值。举例说明 $\lambda = 0$ 时，结论不一定对。

   (2) 证明 $I_m - AB$ 可逆当且仅当 $I_n - BA$ 可逆。