习题课材料（三）简要解答

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、较为耗时, 请量力为之.

记号: 如不加说明，我们只考虑实矩阵。对于矩阵 A, 它的四个基本子空间是列空间 $C(A)$, 零空间 $N(A)$, 行空间 $C(A^T)$ 和 A^T 的零空间 $N(A^T)$。

习题 1. 假设 V 是一个线性空间，n 是一个正整数，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 是 V 中一组线性无关的向量，$\beta \in V$。证明：扩充后的向量组 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$ 线性相关当且仅当 β 是 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 的一个线性组合。

解答. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta$ 线性无关 $\Leftrightarrow \exists$ 不全为 0 的 $a_1, a_2 \ldots a_n, b$ 使 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i\alpha_i + b\beta = 0$, 由于 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ 线性无关, 故 $b \neq 0$, 从而 $\Leftrightarrow \exists \beta = -\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{a_i}{b}\alpha_i$ □

习题 2. 对正整数 n, 记 n 阶实方阵的全体为 $\mathbb{M}_n$。

1. 验证 $\mathbb{M}_n$ 配上矩阵加法和矩阵与实数的数乘，构成了一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。
2. 对于下列 $\mathbb{M}_n$ 的各子集，分别判断它们是否构成一个线性子空间。
   (a) $\{A \in \mathbb{M}_n : A = -A^T\}$.
   (b) $\{A \in \mathbb{M}_n : \mathrm{tr}(A) = 0\}$, 其中 $\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ 称为 A 的迹。
   (c) $\{A \in \mathbb{M}_n : A$ 与 B 可交换$\}$，其中 B 是给定的一个 n 阶方阵。
   (d) $\{A \in \mathbb{M}_n : Ax = b$ 有解$\}$，其中 b 是给定的 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量。
   (e) $\{A \in \mathbb{M}_n : b \in N(A)$ 且 $b \in N(A^T)\}$, 其中 b 是给定的 $\mathbb{R}^n$ 中的一个向量。

答案. 2(a) 是；2(b) 是；2(c) 是；2(d) 当 b 为零向量时，答案为是，否则为否; 2(e) 是。 □

习题 3. 记闭区间 $[-\pi, \pi]$ 上的实值连续函数的全体为 $\mathcal{C}([-\pi, \pi])$, 定义函数的加法，以及函数与实数的数乘如下：

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (kf)(x) := k(f(x)), \qquad \text{其中 } f, g \in \mathcal{C}([-\pi, \pi]),\ k \in \mathbb{R}.$$

1. 验证 $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ 配上上述运算构成了一个 $\mathbb{R}$ 上的线性空间。

2. *(♡)* 对于任意正整数 n, 验证 $\mathcal{C}([-\pi,\pi])$ 中的向量组

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin(nx), \cos(nx)$$

线性无关。

解答. 仅给出第二问的解答。在这个具体的场景下，我们需要借助一些微积分中的工具和理论。下面解答中假设我们对微分和极限已经比较熟悉。

给定正整数 n, 假设这些向量被系数 $a_1, \ldots, a_n, b_0, b_1, \ldots, b_n$ 组合为零向量（零值函数），即

$$(a_1 \sin x + \cdots + a_n \sin nx) + (b_0 + b_1 \cos x + \cdots b_n \cos nx) = 0, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

根据函数的奇偶性，必然有

$$(a_1 \sin x + \cdots + a_n \sin nx) = (b_0 + b_1 \cos x + \cdots b_n \cos nx) = 0, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

所以我们仅需分别证明向量组 $\sin x, \ldots, \sin nx$ 无关，向量组 $1, \cos x, \ldots, \cos nx$ 线性无关。我们仅对后一组向量进行证明。根据三角函数的微分性质，对关于 $\cos$ 的等式微分 M 次，其中 M 为 4 的正整数倍，得到

$$b_1 \cos x + b_2 2^M \cos 2x + b_3 3^M \cos 3x + \cdots + b_{n-1}(n-1)^M \cos(n-1)x = -b_n n^M \cos nx, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

两边同除以 n^M, 并令 $x = 0$, 得到

$$b_1 (\frac{1}{n})^M + b_2 (\frac{2}{n})^M + \cdots + b_{n-1} (\frac{n-1}{n})^M = -b_n, \qquad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

注意到上式对所有的 M（4 的倍数）成立，而 n 和 $b_1, \ldots, b_n$ 都是固定的数。令 $M = 4m$, 令 $m \to \infty$, 我们得到 $b_n = 0$。

重复上述步骤（可以写成标准的数学归纳证明），我们可以得到 $b_i = 0$, 对所有的 $i = 1, \ldots, n$，从而完成证明。 □

说明：如果我们对积分比较熟悉，也可以通过积分来证明 $\cos$ 向量组的线性无关性。例如，

为了证明 $b_n = 0$, 只需将等式两端同乘 $\cos nx$, 然后在 $[-\pi, \pi]$ 上积分，利用三角函数乘积和积分的显式计算结果可得。

习题 4. $R = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 是秩为 r 的 $m \times n$ 矩阵。

1. 求 R 的各子块的大小。
2. 如果 $r = m$，求一个 B 使得 $RB = I$。
3. 如果 $r = n$，求一个 C 使得 $CR = I$。
4. 在上述两小问中，求所有满足条件的 B, C。
5. (♡) 求 $\mathrm{rref}(R^T)$。
6. (♡) 求 $\mathrm{rref}(R^T R)$。

解答. 第一问：I 是 $r \times r$ 阶矩阵，F 是 $r \times (n-r)$ 阶矩阵. 这是由于 I 的所有行线性无关，因此 $[I, F]$ 的所有行线性无关，即 I 的阶数即为行秩，而行秩 = 列秩 = 秩。

第 4 问解答：仅求所有的 B. 此时 $R = [I \quad F]$, 而 $RB = I$ 中的 I 必然是 m 阶矩阵。B 必然是 $n \times m$ 阶矩阵，将 B 分为 $m \times m$ 和 $(n-m) \times m$ 的块，也就是将其写作 $B = \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}$, 计算

$$RB = \begin{bmatrix} I & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix} = B_1 + FB_2 = I.$$

因此，我们仅需任取 $(n-m) \times m$ 阶矩阵 B_2, 然后令 $B = \begin{bmatrix} I - FB_2 \\ B_2 \end{bmatrix}$ 即可。

第 5 问：计算得到 $R^T = \begin{bmatrix} I & 0 \\ F^T & 0 \end{bmatrix}$. 对矩阵进行分块初等行变换 “第一块行左乘 $-F^T$ 加到第二块行”, 可得

$$\mathrm{rref}(R^T) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

类似的，第 6 问答案为：

$$\mathrm{rref}(R^T R) = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

□

习题 5. A 是 3×4 矩阵，$s=(2,3,1,0)^T$ 是 $Ax=0$ 的唯一特殊解（*special solution*）。

1. 求 $\operatorname{rank}(A)$ 并找出 $Ax=0$ 的全部解。
2. 求 $\operatorname{rref}(A)$。
3. $Ax=b$ 对任意 b 都有解吗？

解答. 第一问：$\operatorname{rank}(A)=3.Ax=0$ 只有一个特殊解，即只有 s_3 一个自由变量，则 A 化为阶梯形矩阵后一定有三个主元，从而 $\operatorname{rank}(A)=3$。所有解 $\{ks:k\in\mathbb{R}\}$

第二问：$rref(A)=\begin{bmatrix}1&0&a_1&0\\0&1&a_2&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}2\\3\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, 可以求得 $a_1=-2,a_2=-3.$

第三问：对 $[A,b]$ 做消去将其化为阶梯形矩阵，可以发现对于每一个 b 都可以求得相应的 x. □

习题 6. $Ax=b$ 和 $Cx=b$，对任意 b 都有相同的解集。$A=C$ 成立吗？

解答. $Ax=b$ 和 $Cx=b$ 有相同解集 ” $\Leftrightarrow$ ”$(A-C)x=0$ 与 $Ax=b$ 的解集相同，由于这对任意 b 成立，从而可以取遍 $\mathbb{R}^n$ 中的所有 x, 即对 $\forall x\in\mathbb{R}^n$, 都有 $(A-C)x=0$，从而 $A-C$ 为零矩阵。 □

习题 7. 假设 $x_1,\dots,x_p$ 是 $Ax=b$ 的解，且 b 非零。证明：$k_1x_1+\cdots+k_px_p$ 也是解当且仅当 $k_1+\cdots+k_p=1$。

习题 8. $B=\begin{bmatrix}1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\\1&0&1&0&1&0&1&0\\0&1&0&1&0&1&0&1\end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix}r&n&b&q&k&b&n&r\\p&p&p&p&p&p&p&p\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&0&0&0\\p&p&p&p&p&p&p&p\\r&n&b&q&k&b&n&r\end{bmatrix}$。求二者的四个子空间的基。这里，$r,n,b,q,k,p$ 为各不相同的实数。

解答. $C(B) = span\{(1,0,1,0,1,0,1,0)^T, (0,1,0,1,0,1,0,1)^T\} = C(B^T)$

$N(B) = N(B^T) = span\{(-1,0,1,0,0,0,0,0)^T, (0,-1,0,1,0,0,0,0)^T, (-1,0,0,0,1,0,0,0)^T, (0,-1,0,0,0,1,0,0)^T, (-1,0,0,0,0,0,1,0)^T, (0,-1,0,0,0,0,0,1)^T\}$

$C(C) = span\{(1,0,0,0,0,0,0,1)^T, (0,1,0,0,0,0,1,0)^T\}$

$C(C^T) = span\{(r,n,b,q,k,b,n,r)^T, (1,1,1,1,1,1,1,1)^T\}$ □

习题 9. $A = \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ 都是 $m \times n$ 矩阵, 且具有相同的四个子空间。证明 $F = G$。

提示. 首先 A, B 的秩相同，所以两个 I 的大小相同，F 和 G 大小相同。不妨设 I 为 $r \times r$ 的，而 F, G 是 $r \times (n-r)$ 的。论断：对于任意的 $b \in \mathbb{R}^r$, 有 $Fx = b$ 当且仅当 $Gx = b$. 确实，$Fx = b$ 等价于

$$A \begin{bmatrix} -b \\ x \end{bmatrix} = 0, \qquad (\text{因为} \begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -b \\ x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Fx - b \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}).$$

因此 A 和 B 有共同的零空间意味着前面的论断成立。根据习题 6, 可得 $F = G$.

该证明也可以这样理解: 通过分块矩阵的计算，得到

$$N(A) = \left\{ \begin{bmatrix} -Fy \\ y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R}^{n-r} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

类似的,

$$N(B) = \left\{ \begin{bmatrix} -Gy \\ y \end{bmatrix} : y \in \mathbb{R}^{n-r} \right\} \subseteq \mathbb{R}^n.$$

从 $N(A) = N(B)$ 得到，对于任意的 $y \in \mathbb{R}^{n-r}$, 我们有 $z = \begin{bmatrix} -Gy \\ y \end{bmatrix} \in N(B) = N(A)$，故 $Az = 0$. 计算验证这意味着 $(F - G)y = 0$. 由于 y 任意，得到 $F = G$. □

思考题：设 A, B 为同型矩阵，且 $N(A) = N(B)$. 试证明 $\mathrm{rref}(A) = \mathrm{rref}(B)$.

提示. $N(A) = N(B)$, 则 $Ax = 0$ 与 $Bx = 0$ 有相同特解（从而 A 的主元列与 B 的主元列

相同），则对 A 和 B 作相同的列变换可以得到 $R_1 = \begin{pmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$,$R_2 = \begin{pmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, 且 A, B 中的单位阵阶数相同。接下来由习题九（用到条件 $N(R_1) = N(R_2)$）得到 $F = G$, 从而 $rref(A) = rref(B)$ $\square$