练习（一）

注：答案是双刃剑，容易让人产生思维定式。仅仅作为参考，强烈建议自己思考自己动手。

1. 求解以下方程组的解集

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix}, \quad A=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

其中$x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$.

解. 注意到

$$A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_1+x_2 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x_1+x_2 \\ x_2+x_3 \\ x_1+x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

因为

$$A\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

所以求解原方程组等价于求解如下方程组

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

我们通过高斯消元法来求解上述方程组，

$$\begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & -1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 0 & \frac{-6}{7}-1 & \frac{-12}{7} \\ 0 & \frac{-8}{7}+3 & \frac{-16}{7}-1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 0 & -13 & -12 \\ 0 & 13 & -23 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 7 & 2 & 4 \\ 0 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & -35 \end{bmatrix}$$

通过上述高斯消元法可以看出有三个主元，因此原方程组只有零解。

□

2. 令

$$A=\begin{bmatrix}1&3&4&0&1\\2&0&1&1&1\\2&3&0&4&2\end{bmatrix}$$

求解以下方程组的解集

$$Ax=b,\quad b=\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix}$$

解. 我们利用高斯消元法来求解。定义以下增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccccc|c}1&3&4&0&1&1\\2&0&1&1&1&4\\2&3&0&4&2&3\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&3&4&0&1&1\\0&-6&-7&1&-1&2\\0&-3&-8&4&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&3&4&0&1&1\\0&-6&-7&1&-1&2\\0&0&\frac{7}{2}-8&-\frac{1}{2}+4&\frac{1}{2}&0\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&3&4&0&1&1\\0&-6&-7&1&-1&2\\0&0&-9&7&1&0\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&3&0&0+7\frac{4}{9}&1+\frac{4}{9}&1\\0&-6&0&1+7\frac{-7}{9}&-1+\frac{-7}{9}&2\\0&0&-9&7&1&0\end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccccc|c}1&3&0&\frac{28}{9}&\frac{13}{9}&1\\0&-6&0&\frac{-40}{9}&\frac{-16}{9}&2\\0&0&-9&7&1&0\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&\frac{28}{9}+\frac{-20}{9}&\frac{13}{9}+\frac{-8}{9}&2\\0&-6&0&\frac{-40}{9}&\frac{-16}{9}&2\\0&0&-9&7&1&0\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccccc|c}1&0&0&\frac{8}{9}&\frac{5}{9}&2\\0&1&0&\frac{20}{27}&\frac{8}{27}&-\frac{1}{3}\\0&0&1&-\frac{7}{9}&-\frac{1}{9}&0\end{array}\right]$$

由此我们得到A的行简化阶梯形矩阵。主元位置在*1*，*2*，*3*，因此自由变量是x_4, x_5，我们有

$$x_1+\frac{8}{9}x_4+\frac{5}{9}x_5=2,\quad x_2+\frac{20}{27}x_4+\frac{8}{27}x_5=\frac{-1}{3},\quad x_3-\frac{7}{9}x_4-\frac{1}{9}x_5=0$$

因此解的集合为

$$\{x : x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 - \frac{8}{9}x_4 - \frac{5}{9}x_5 \\ -\frac{1}{3} - \frac{20}{27}x_4 - \frac{8}{27}x_5 \\ \frac{7}{9}x_4 + \frac{1}{9}x_5 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix}, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \{x : x = \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} \\ -\frac{20}{27} \\ \frac{7}{9} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} \\ -\frac{8}{27} \\ \frac{1}{9} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \{x : x = x_4 \begin{bmatrix} -\frac{8}{9} \\ -\frac{20}{27} \\ \frac{7}{9} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + x_5 \begin{bmatrix} -\frac{5}{9} \\ -\frac{8}{27} \\ \frac{1}{9} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, x_4, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

□

3. 对任意$\lambda \in \mathbb{R}$, 令

$$A_\lambda = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

求解以下方程组的解集

$$A_\lambda x = b, \quad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

注： **对于带参数的线性方程问题我们仍然用高斯消元法来求解。此时我们将参数当作一个常数，但是注意在计算过程中避免除上零的情况。**

解. 定义以下增广矩阵

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1-\lambda & 1 & 1 & 4 \\ 1 & 1-\lambda & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -\lambda & -1 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1+\lambda^2 & 1-\lambda & 0 & 2-3\lambda \end{array}\right]$$

从上面的梯形矩阵，我们看出主元的位置依赖于$1-\lambda^2$和$1-\lambda$的值。
注意判断主元的时候不一定要完整化成“行简化阶梯形矩阵”。

- 若$\lambda=1$, 则行简化阶梯形矩阵变成如下形式

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1+\lambda^2 & 1-\lambda & 0 & 2-3\lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

通过判断最后一行，我们知道方程组无解。

- 若$\lambda=-1$, 则行简化阶梯形矩阵变成如下形式

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1+\lambda^2 & 1-\lambda & 0 & 2-3\lambda \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 5 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 4-5/2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 3-5/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5/2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5/2 \end{array}\right]$$

此时主元在*1*，*2*，*4*列，自由变量为x_3, x_5。 由上面得到的行简化阶梯形矩阵，我们得到

$$x_1 = \frac{3}{2} - 2x_3 - x_5, \quad x_2 = -\frac{1}{2} + x_3, \quad x_4 = \frac{5}{2}$$

因此当$\lambda=-1$时$A_{-1}x=b$的解集为

$$\{x : x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{2} - 2x_3 - x_5 \\ -\frac{1}{2} + x_3 \\ x_3 \\ \frac{5}{2} \\ x_5 \end{bmatrix}, x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{bmatrix} + \{x : x = x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

- 若$\lambda \neq 1, -1$, 则行简化阶梯形矩阵变成如下形式

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1+\lambda^2 & 1-\lambda & 0 & 2-3\lambda \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -\lambda & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1/(1+\lambda) & 0 & (2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & 1/(1+\lambda) & 1 & 1-(2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \\ 0 & -1 & 0 & 1/(1+\lambda) & 0 & 3+\lambda(2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1/(1+\lambda) & 0 & (2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/(1+\lambda) & 1 & 4+(\lambda-1)(2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \\ 0 & -1 & 0 & 1/(1+\lambda) & 0 & 3+\lambda(2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1/(1+\lambda) & 0 & (2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 2/(1+\lambda) & 1 & 4+(\lambda-1)(2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \\ 0 & 1 & 0 & -1/(1+\lambda) & 0 & -3-\lambda(2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \\ 0 & 0 & 1 & -1/(1+\lambda) & 0 & (2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \end{array}\right]$$

此时主元在*1*，*2*，*3*列，自由变量为x_4, x_5。由上面得到的行简化阶梯形矩阵，我们得到

$$x_1 = -\frac{2}{1+\lambda}x_4 - x_5 + 4 + (\lambda-1)(2-3\lambda)/(\lambda^2-1)$$

$$x_2 = \frac{1}{1+\lambda}x_4 - 3 - \lambda(2-3\lambda)/(\lambda^2-1)$$

$$x_3 = \frac{1}{1+\lambda}x_4 + (2-3\lambda)/(\lambda^2-1)$$

因此当$\lambda \neq 1, -1$时$A_\lambda x = b$的解集为

$$\begin{bmatrix} 4+(\lambda-1)(2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \\ -3-\lambda(2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \\ (2-3\lambda)/(\lambda^2-1) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \{x : x = x_5 \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + x_4 \begin{bmatrix} -\frac{2}{1+\lambda} \\ \frac{1}{1+\lambda} \\ \frac{1}{1+\lambda} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, x_3, x_5 \in \mathbb{R}\}$$

□

4. 求满足下面条件的矩阵A。如果矩阵A的逆存在的话，求它的逆。若不存在请说明理由。

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad A\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

解. 我们将上述条件写成矩阵形式则有

$$A\begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&1\\3&0&0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&1&4\\2&0&2\\3&3&4\end{bmatrix},\quad B:=\begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&1\\3&0&0\end{bmatrix}$$

若B可逆，则我们可以两天同乘B^{-1}从而求出A. 我们用增广矩阵及高斯消元法来求解矩阵的逆。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\2&0&1&0&1&0\\3&0&0&0&0&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-2&-1&-2&1&0\\0&-3&-3&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-2&-1&-2&1&0\\0&0&-3+3/2&0&-3/2&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-2&-1&-2&1&0\\0&0&1&0&1&-2/3\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&-2&0&-2&2&-2/3\\0&0&1&0&1&-2/3\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&1&-1&1/3\\0&0&1&0&1&-2/3\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&-1&2/3\\0&1&0&1&-1&1/3\\0&0&1&0&1&-2/3\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&0&1/3\\0&1&0&1&-1&1/3\\0&0&1&0&1&-2/3\end{array}\right]$$

因此B可逆，且逆为

$$\begin{bmatrix}0&0&1/3\\1&-1&1/3\\0&1&-2/3\end{bmatrix}$$

$$A=\begin{bmatrix}1&1&4\\2&0&2\\3&3&4\end{bmatrix}B^{-1}=\begin{bmatrix}1&1&4\\2&0&2\\3&3&4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0&1/3\\1&-1&1/3\\0&1&-2/3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1&3&-2\\0&2&-2/3\\3&1&2-8/3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&3&-2\\0&2&-2/3\\3&1&-2/3\end{bmatrix}.$$

类似地，我们用增广矩阵及高斯消元法来求解矩阵A的逆。

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\0&2&-2/3&0&1&0\\3&1&-2/3&0&0&1\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&3&-2&1&0&0\\0&2&-2/3&0&1&0\\0&-8&16/3&-3&0&1\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 8/3 & -3 & 4 & 1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2/3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9/8 & 3/2 & 3/8 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -3/4 & 2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -9/8 & 3/2 & 3/8 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -5/4 & 3 & 3/4 \\ 0 & 2 & 0 & -3/4 & 2 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & -9/8 & 3/2 & 3/8 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 3 & 0 & -5/4 & 3 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & -3/8 & 1 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -9/8 & 3/2 & 3/8 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -5/4+9/8 & 0 & 3/4-3/8 \\ 0 & 1 & 0 & -3/8 & 1 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & -9/8 & 3/2 & 3/8 \end{array}\right]$$

因此矩阵A的逆存在且为

$$\begin{bmatrix} -1/8 & 0 & 3/8 \\ -3/8 & 1 & 1/8 \\ -9/8 & 3/2 & 3/8 \end{bmatrix}$$

□

5. 试找到**所有的**2阶正交矩阵, 也就是求2阶正交矩阵的集合$X = \{Q : Q \in M_2(\mathbb{R}), Q^TQ = I_2\}$, 其中$M_2(\mathbb{R})$表示的是所有2阶矩阵的集合。

注：让我们回顾一下定义。如果一个n阶矩阵满足$Q^TQ = I_n$, 则我们称Q是一个n阶正交矩阵。

解. 令

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad \Longrightarrow A^T = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix}$$

$$A^TA = I_2, \quad \Longrightarrow \begin{cases} a^2 + c^2 = 1 \\ ab + cd = 0 \\ b^2 + d^2 = 1 \end{cases}$$

令

$$a = \cos\theta, \quad c = \sin\theta, \quad b = \cos\alpha, \quad d = \sin\alpha, \quad \theta, \alpha \in [0, 2\pi]$$

$$ab + cd = 0, \quad \Longrightarrow \cos\theta\cos\alpha + \sin\theta\sin\alpha = \cos(\alpha - \theta) = 0,$$

$$\Longrightarrow \alpha - \theta = \frac{\pi}{2}, \quad 或者\ \frac{3\pi}{2}$$

- 当$\alpha - \theta = \frac{\pi}{2}$时，我们有

$$b = \cos(\theta + \frac{\pi}{2}) = -\sin\theta, \quad d = \sin(\theta + \frac{\pi}{2}) = \cos\theta.$$

此时

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

此时A为旋转变换的表示矩阵。

- 当$\alpha - \theta = \frac{3\pi}{2}$时，我们有

$$b = \cos(\theta + \frac{3\pi}{2}) = \cos(\theta - \frac{\pi}{2}) = \sin\theta, \quad d = \sin(\theta + \frac{3\pi}{2}) = -\cos\theta.$$

此时

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$$

此时A为关于通过原点角度为$\theta/2$的直线的反射变换的表示矩阵。

综上所述2阶正交矩阵的集合为

$$\{A : A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}, \text{或者} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}, \theta \in [0, 2\pi]\}$$

$\square$