强化练习三（不是作业）

1. 若$m \times n$的矩阵A列满秩，试证 向子空间$R(A)$的正交投影矩阵为$A(A^TA)^{-1}A^T$.

证明. 对任何$b \in \mathbb{R}^m$, $x \in \mathbb{R}^m$是极小值问题$\inf_{x\in\mathbb{R}^m} |Ax - b|$的解，当且仅当$x$是线性方程组$A^TAx = A^Tb$的解。*(讲义第85页)*。

因为A列满秩，所以A^TA可逆，因此$x = (A^TA)^{-1}A^Tb$. 此时b在$R(A)$上的投影为

$$P_{R(A)}(b) = Ax = A(A^TA)^{-1}A^Tb$$

由于b是任意的所以向子空间$R(A)$的正交投影矩阵为$A(A^TA)^{-1}A^T$.

□

2. 判断并说明理由：(i) $\mathbb{R}^5$中两个三维子空间可能正交。(ii) $\mathbb{R}^5$中两个二维子空间不可能正交。

证明. *(i)* 不可能。若$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$都是三维子空间且$\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$相互正交，则$\mathcal{M}_2 \subset (\mathcal{M}_1)^\perp$. 因为$dim((\mathcal{M}_1)^\perp) = 5 - 3 = 2$，所以矛盾。

(ii) 可能。例如$\mathcal{M}_1 = span(e_1, e_2), \mathcal{M}_2 = span(e_3, e_4)$，则$\mathcal{M}_1$和$\mathcal{M}_2$均为二维子空间且相互正交。

□

3. 若$\{a_1, \cdots, a_n\}, \{b_1, \cdots, b_n\}$是$\mathbb{R}^n$的两组标准正交基，试证明存在正交矩阵$Q$使得$Qa_i = b_i, \quad 1 \le i \le n$.

证明. 令

$$Q_1 = [a_1, \cdots, a_n], \quad Q_2 = [b_1, \cdots, b_n], Q = Q_2Q_1^{-1}.$$

则Q_1, Q_2均为正交矩阵，因此Q也为正交矩阵。且

$$QQ_1 = Q_2, \quad \Longrightarrow [b_1, \cdots, b_n] = Q[a_1, \cdots, a_n] = [Qa_1, \cdots, Qa_n],$$
$$\Longrightarrow \forall i \in \{1, \cdots, n\} Qa_i = b_i.$$

□

4. 给定如下矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

试求

(i) 投影到$R(A)$的投影矩阵

(ii) 投影到$R(B^T)$的投影矩阵

(iii) 求最小二乘问题$B^Tx = e_1$的解，其中$e_1 \in \mathbb{R}^4$是第一个分量为1其余分量为0的向量。

解. *(i)* 注意到

$$\begin{bmatrix}3\\5\\5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix}$$

所以

$$R(A) = span(\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix})$$

接下来我们用*Gram-Schmidt*正交化过程来找$R(A)$的一组标准正交基。经过正交化，我们有

$$\tilde{u}_1 := \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_2 = \begin{bmatrix}2\\3\\2\end{bmatrix} - \frac{2+6+6}{14}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

经过标准化，我们有

$$w_1 := \frac{\tilde{u}_1}{|\tilde{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{14}}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}, \quad w_2 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix}$$

因此我们可以得到投影矩阵

$$P = QQ^T = \begin{bmatrix}1/\sqrt{14} & 1/\sqrt{3}\\ 2/\sqrt{14} & 1/\sqrt{3}\\ 3/\sqrt{14} & -1/\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\sqrt{14} & 2/\sqrt{14} & 3/\sqrt{14}\\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}1/14+1/3 & 2/14+1/3 & 3/14-1/3\\ 2/14+1/3 & 4/14+1/3 & 6/14-1/3\\ 3/14-1/3 & 6/14-1/3 & 9/14+1/3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}17/42 & 10/21 & -5/42\\ 10/21 & 13/21 & 2/21\\ -5/42 & 2/21 & 41/42\end{bmatrix}$$

(ii) 注意到$rank(B) = 3$，因此$dim(R(B^T)) = rank(B^T) = rank(B) = 3$. 一般我们找投影矩阵是先找子空间的一组标准正交基$\{w_1, w_2, w_3\}$. 这样投影矩阵就是

$$P = QQ^T, \quad Q = [w_1, w_2, w_3], \quad \Longrightarrow QQ^T = w_1w_1^T + w_2w_2^T + w_3w_3^T.$$

这儿我们有个小技巧。如果我们将子空间的标准正交基$\{w_1, w_2, w_3\}$扩充至全空间的标准正交基$\{w_1, w_2, w_3, w_4\}$，则

$$w_1 w_1^T + w_2 w_2^T + w_3 w_3^T + w_4 w_4^T = I_4, \quad \Longrightarrow P = I_4 - w_4 w_4^T.$$

接下来我们只用找$R(B^T)^\perp = N(B)$的基就可以了。我们用高斯消元法来求解

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

因此

$$N(B) = span(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix})$$

因此

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(iii) 因为B^T列满秩，所以最小二乘问题$B^T x = e_1$的解为

$$x = \left((B^T)^T B^T\right)^{-1} (B^T)^T e_1 = (BB^T)^{-1} B e_1$$

经过计算可得

$$BB^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

所以我们可以通过高斯消元法来求解BB^T的逆

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 3 & -2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & 1 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 5/3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 2/3 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 0 & 1 & 1/3 & -1/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

因此

$$(BB^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 5/3 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow x = (BB^T)^{-1}Be_1 = \begin{bmatrix} 2/3 & 0 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 1/3 & -1/3 & 5/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

□

5. 给定如下矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

试给出一个A的QR分解以及简化QR分解。

解. 我们先找出$R(A)$的一组标准正交基. 令

$$\tilde{u}_1 := \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{u}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

将上述正交向量组标准化后即可得到一组$R(A)$的标准正交基。

$$w_1 := \frac{\tilde{u}_1}{|\tilde{u}_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w_2 := \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

因此A的简化QR分解为

$$\Longrightarrow A = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{6}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} w_1 & w_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{2}/2 \\ 0 & \sqrt{6}/2 \end{bmatrix}.$$

接下来我们将$\{w_1, w_2\}$扩张成全空间的一组标准正交基。我们找$R(A)$的正交补$(R(A))^{\perp} = N(A^T)$的一组标准正交基即可。

$$x \in N(A^T), \quad \Longleftrightarrow x \in N(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}) \quad \Longleftrightarrow x \in span(\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix})$$

因此

$$w_3 := \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

因此A的一个QR分解为

$$A = \begin{bmatrix}w_1 & w_2 & w_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2}/2\\ 0 & \sqrt{6}/2\\ 0 & 0\end{bmatrix}.$$

$\square$

6. 设平面上四个点$(x_i, y_i), i \in \{1,2,3,4\}$, 分别是$(0,0),(1,8),(3,8),(4,20)$, 试用最小二乘法求一个抛物线$y = ax^2 + bx + c$,使得以下值达到最小，

$$\sum_{i=1}^{4} |y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)|^2.$$

解. 注意到

$$\inf_{a,b,c\in\mathbb{R}} \sum_{i=1}^{4} |y_i - (ax_i^2 + bx_i + c)|^2 = \inf_{\beta\in\mathbb{R}^3} |Y - A\beta|^2,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\1 & 1 & 1\\1 & 3 & 9\\1 & 4 & 16\end{bmatrix}, \quad Y := \begin{bmatrix}0\\8\\8\\20\end{bmatrix}$$

注意到A是4阶范德蒙矩阵的子矩阵，因此A列满秩， 也就是说$rank(A) = 3$. 我们先找全空间中向量向$R(A)$投影的投影矩阵。 我们先找$R(A)$的正交补，也就是$N(A^T)$的一组基。

$$x \in N(A^T), \quad \Longleftrightarrow x \in N(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 3 & 4\\0 & 1 & 9 & 16\end{bmatrix}) \quad \Longleftrightarrow x \in N(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 3 & 4\\0 & 0 & 6 & 12\end{bmatrix})$$

$$\Longleftrightarrow x \in N(\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & 1 & 3 & 4\\0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}) \quad \Longleftrightarrow x \in N(\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & -1\\0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix})$$

$$\Longleftrightarrow x \in N(\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 1\\0 & 1 & 0 & -2\\0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}), \quad \Longleftrightarrow x \in span(\begin{bmatrix}-1\\2\\-2\\1\end{bmatrix})$$

因此投影矩阵为

$$P=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1/\sqrt{10}\\2/\sqrt{10}\\-2/\sqrt{10}\\1/\sqrt{10}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1/\sqrt{10}&2/\sqrt{10}&-2/\sqrt{10}&1/\sqrt{10}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}9/10&1/5&-1/5&1/10\\1/5&3/5&2/5&-1/5\\-1/5&2/5&3/5&1/5\\1/10&-1/5&1/5&9/10\end{bmatrix}$$

因此最小二乘问题$\inf_{\beta\in\mathbb{R}^3}|Y-A\beta|^2$的解是以下线性方程组的解

$$A\beta=PY=\begin{bmatrix}9/10&1/5&-1/5&1/10\\1/5&3/5&2/5&-1/5\\-1/5&2/5&3/5&1/5\\1/10&-1/5&1/5&9/10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\8\\8\\20\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\4\\12\\18\end{bmatrix}$$

不同于第四题第三小问的解法，接下来我们尝试用高斯消元法来求解上面方程组的解， 方便大家对比。

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\1&1&1&4\\1&3&9&12\\1&4&16&18\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&1&2\\0&3&9&10\\0&4&16&16\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&1&2\\0&0&6&4\\0&0&12&8\end{array}\right]$$

$$\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&1&2\\0&0&1&2/3\\0&0&0&0\end{array}\right]\longrightarrow\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&4/3\\0&0&1&2/3\\0&0&0&0\end{array}\right]$$

因此抛物线为

$$y=2x^2/3+4x/3+2.$$

□