线性代数期末考前辅导

电子系无 68 班　何昊天

2019 年 12 月 26 日

主要内容

线性代数：研究线性空间及其上面的线性映射

前半学期内容：主要围绕向量空间 $\mathbb{R}^n$、矩阵以及线性方程组三个方面展开，注重它们之间的关系

后半学期内容：首先从四个子空间出发讨论它们的正交性引出线性代数基本定理，然后介绍了两类工具：行列式和特征值，最后将观点进一步抽象至线性映射层面，这些内容可能较为零碎，需要我们自己建立起关系

正交性

- 四大子空间：刻画正交补关系，引入线性代数基本定理
- 内积空间：公理化定义内积空间
- Gram-Schmidt 正交化：规范流程，配合公理化定义应用
- 正交矩阵与 QR 分解：正交化附带结果
- 投影与最小二乘法：低维几何问题抽象至一般化

行列式

- 基本性质：多种定义方式，与初等变换的异同
- 结论、定理与应用：稍作介绍，理解即可
- 伴随矩阵：主要性质与不可逆情形的处理

特征值与特征向量

- 基本性质：特征值与特征向量的定义与常用结论
- 特征多项式：特征多项式结构，迹、行列式与特征值的关系
- 相似矩阵与对角化：对角化的判定条件与应用思路

正定矩阵与二次型

- 正定矩阵：正定矩阵与半正定矩阵的等价定义
- 二次型：标准化，理解性内容
- 矩阵的合同：合同标准型与合同不变量

线性变换

- 基本性质：线性变换的定义与线性变换空间
- 线性变换的矩阵：观点的提升与对应
- 线性变换是后续课程里复线性空间与 Jordan 标准型等内容的基础，可能在这学期内容里线性变换占比重不大，但对以后的学习非常重要

四大子空间

设 A 是一个 $m \times n$ 矩阵且满足 $\mathrm{rank}(A) = r$，通过前半学期的学习，我们来到了矩阵 A 的四个基本子空间：

1. 列空间 $C(A) = \{y \in \mathbb{R}^m \mid \exists x \in \mathbb{R}^n, Ax = y\}$，维数 $\dim C(A) = r$
2. 零空间 $N(A) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$，维数 $\dim N(A) = n - r$
3. 行空间 $C(A^T) = \{y \in \mathbb{R}^n \mid \exists x \in \mathbb{R}^m, A^T x = y\}$，维数 $\dim C(A^T) = r$
4. 左零空间 $N(A^T) = \{x \in \mathbb{R}^m \mid A^T x = 0 (x^T A = 0)\}$，维数 $\dim N(A^T) = m - r$

子空间之间的关系

在这一章里，我们得到了四大子空间之间更精细的关系：

1. $C(A)$ 和 $N(A^T)$ 互为正交补
2. $C(A^T)$ 和 $N(A)$ 互为正交补

其中两个空间正交 $S \perp T$ 指 $\forall x \in S, y \in T$ 有 $x^T y = 0$，$\mathbb{R}^n$ 的一个子空间 S 的正交补为 $S^{\perp} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \forall y \in S, x^T y = 0\}$。

对于 $\mathbb{R}^n$ 的两个子空间 S, T，它们的并未必还是子空间，但我们可以做"交"与"和"两种运算来得到新的子空间：

1. $S \cap T = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x \in S, x \in T\}$
2. $S + T = \{x + y \mid x \in S, y \in T\}$

关于子空间的维数，有两个重要的数量关系：

1. $\dim S + \dim T = \dim(S \cap T) + \dim(S + T)$
2. $\dim S + \dim S^{\perp} = n$

内积空间

与公理化定义线性空间类似，我们可以公理化地定义线性空间上的内积，设 V 是一个线性空间，称一个二元函数 $<>: V \times V \to \mathbb{R}$ 是 V 上的内积，若它满足：

1. $\forall x, y \in V, < x, y >=< y, x >$
2. $\forall x, y, z \in V, < x + y, z >=< x, z > + < y, z >$
3. $\forall x, y \in V, c \in \mathbb{R}, < cx, y >= c < x, y >$
4. $\forall x \in V, < x, x >\geq 0$，等号成立当且仅当 $x = 0$

有了内积的概念，我们就可以继续公理化地定义范数、距离、夹角和正交，并可以验证很多之前对向量空间上通常内积满足的性质在公理化定义下仍然满足。

内积空间例子

Example

验证下面定义的空间都是内积空间：

1. 设 V 是 $[a,b]$ 区间上所有连续函数构成的实线性空间，对 $\forall f(x), g(x) \in V$ 定义内积 $< f(x), g(x) >= \int_a^b f(t)g(t)dt$
2. 设 V 是所有实系数多项式构成的实线性空间，对 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n, g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m$ 定义内积 $< f(x), g(x) >= a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_kb_k, k = \min(n, m)$
3. 设 V 是所有 n 阶实矩阵构成的实线性空间，对 $\forall A, B \in V$ 定义内积 $< A, B >= tr(AB^T)$，其中 $tr(A)$ 表示矩阵 A 的

Gram-Schmidt 正交化

如果内积空间 V 的一组基在所定义的内积下两两正交，则称这组基为正交基，如果其中每个基向量的长度都为 1，则称这组基为标准正交基。

设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 维内积空间 V 的一组基，Gram-Schmidt 正交化给出了从这组基出发构造出一组正交基的流程：

$$y_1 = x_1$$

$$y_2 = x_2 - \frac{< x_2, y_1 >}{||y_1||^2} y_1$$

$$y_3 = x_3 - \frac{< x_3, y_1 >}{||y_1||^2} y_1 - \frac{< x_3, y_2 >}{||y_2||^2} y_2$$

$$\cdots$$

$$y_n = x_n - \sum_{i=1}^{n-1} \frac{< x_n, y_i >}{||y_i||^2} y_i$$

Gram 矩阵

我们还可以定义一组线性无关向量的 Gram 矩阵：

$$G = \begin{bmatrix} <x_1, x_1> & <x_1, x_2> & \cdots & <x_1, x_n> \\ <x_2, x_1> & <x_2, x_2> & \cdots & <x_2, x_n> \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ <x_n, x_1> & <x_n, x_2> & \cdots & <x_n, x_n> \end{bmatrix}$$

结合后面的知识我们可以知道矩阵 G 是正定矩阵，如果我们对任意一组向量定义这样一个矩阵，则矩阵 G 是半正定的，且 G 正定当且仅当这组向量线性无关。

正交化例题

Example

设 V 是所有次数小于等于 2 的实系数多项式构成的实线性空间，对 $\forall f(x), g(x) \in V$ 定义内积 $< f(x), g(x) >= \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$，从基 $1, x, x^2$ 出发由 Gram-Schmidt 正交化得到一组标准正交基。

Example

设 Gram-Schmidt 正交化将线性无关的向量组 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 变成了正交的向量组 $v_1, v_2, \cdots, v_m$，证明两组向量的 Gram 矩阵行列式满足：

$$|G(u_1, u_2, \cdots, u_n)| = |G(v_1, v_2, \cdots, v_n)| = ||v_1||^2||v_2||^2 \cdots ||v_n||^2$$

正交矩阵与 QR 分解

设 A 是 n 阶实矩阵，若 $A^TA = AA^T = I_n$，则称 A 是 n 阶正交矩阵，典型的正交矩阵包括旋转矩阵和反射矩阵 $I - uu^T$，其中 u 是一个单位向量。

对可逆矩阵 A 做 QR 分解可以看作是对 Gram-Schmidt 正交化的一种应用：

$$\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} q_1 & q_2 & \cdots & q_n \end{bmatrix}$$

在上述过程中我们都对 A 做列变换，所有列变换矩阵都是上三角的，即得 $A = QR$，其中 Q 是正交阵，R 是上三角阵。

投影矩阵

投影问题可以从简单情形出发，逐步推广到一般的情形：

1. 计算向量 u 在向量 α 上的投影向量 p，不妨设 $u = p + e, p = t\alpha (t \in \mathbb{R})$，则有 $e \perp \alpha$，又因为 $e = u - p = u - t\alpha$，所以 $\alpha^T(u - t\alpha) = 0$，即 $t = \frac{\alpha^T u}{\alpha^T \alpha}$，所以 $p = \frac{\alpha^T u}{\alpha^T \alpha}\alpha$
2. 计算 $\mathbb{R}^3$ 中向量 u 在平面 π 上的投影 p，同理不妨设 $u = p + e$，则有 $e \perp \pi$，取平面上两个不共线的向量拼成矩阵 $A_{3\times 2}$，则存在 x 使得 $Ax = p$ 成立，又因为 $e = u - p = u - Ax$，所以 $A^T(u - Ax) = 0$，即 $A^TAx = A^Tu$，解之即得 x，若 A^TA 可逆，则有 $p = A(A^TA)^{-1}A^Tu$
3. 若继续向高维推广，最后都能得到形如 $A^TAx = A^Tu$ 的方程，若 A^TA 可逆则有投影矩阵 $P = A(A^TA)^{-1}A^T$

投影矩阵例题

Example

已知 $\alpha = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，P 是 $\mathbb{R}^3$ 中将向量投影到 α 所在直线的投影矩阵，求 P 的列空间和零空间。

行列式的定义

矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times n}$ 的行列式有三种常用的定义方法：

1. 用单形的体积公理化定义为满足某些性质的唯一函数
2. 利用代数余子式展开定义：设余子式 M_{ij} 表示 A 去掉第 i 行和第 j 列后剩余元素组成的行列式，代数余子式 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$，则有 $\forall 1 \le j \le n, |A| = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}$
3. 利用完全展开定义：$|A| = \sum_{(k_1,k_2,\cdots,k_n)\in S_n}(-1)^{\sigma(k_1,k_2,\cdots,k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}$，其中 S_n 表示 $1,2,\cdots,n$ 构成的排列全体，$\sigma(k_1,k_2,\cdots,k_n)$ 表示排列 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 的逆序对数量

行列式的性质

直接使用定义来计算行列式非常繁琐，更多时候需要借助行列式的性质：

1. 上三角行列式和下三角行列式的值等于对角线元素之积
2. 用常数 k 乘行列式的某一行或某一列，所得行列式的值为原行列式的 k 倍
3. 对换行列式的两行或两列，行列式值不改变
4. 若行列式两行或两列成比例，则该行列式的值为零
5. 若行列式某一行或某一列的元素可以写作 $a_{ij} = b_{ij} + c_{ij}$，则该行列式可以分解成两个行列式之和，这两个行列式的对应行或列分别为 b_{ij} 与 c_{ij}
6. 将行列式的某一行或某一列乘以常数 k 加到另一行或另一列上，行列式的值不变
7. 转置不改变行列式的值

行列式完全展开应用

Example

设 $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$，则 $f(x)$ 展开式中 x^3 项的系数是多少?

Example

设 n 阶方阵 $A(n \geq 2)$ 的所有元素都是 ±1，求证 $|A|$ 为偶数。

提取因子法

Example

计算行列式 $|A| = \begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$。

Example

计算行列式 $|A| = \begin{vmatrix} x & y & z & w \\ y & x & w & z \\ z & w & x & y \\ w & z & y & x \end{vmatrix}$。

Cramer 法则

Cramer 法则给出了含 n 个未知数、n 个方程的线性方程组的一种公式解：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

设 $|A|$ 表示方程组系数矩阵行列式，$|A_i|$ 表示将 $|A|$ 的第 i 列替换成方程组常数项构成的列得到的行列式，则当 $|A| \neq 0$ 时方程组有唯一解 $x_i = \frac{|A_i|}{|A|}$。

Vandermonde 行列式

Vandermonde 行列式是一种特殊的行列式，在线性代数一些定理的证明经常出现：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\le i<j\le n} (x_j - x_i)$$

这个等式可以用数学归纳法证明，Vandermonde 行列式应用的重点在于观察出它的形态。

行列式函数求导

如果行列式的值是一个可导函数，我们对它求导等于对每行或每列分别求导后再相加：

$$\frac{d}{dx}\begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22}(x) & \cdots & f_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) & \cdots & f_{1n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{d}{dx}f_{i1}(x) & \frac{d}{dx}f_{i2}(x) & \cdots & \frac{d}{dx}f_{in}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ f_{n1}(x) & f_{n2}(x) & \cdots & f_{nn}(x) \end{vmatrix}$$

Laplace 展开定理

Laplace 展开定理：在 n 阶行列式 D 中，任取 k 行 k 列，位于这些行列上的 k^2 个元素按原来的相对位置构成的行列式 M 称为 D 的 k 阶子式，D 中去掉这些行列后剩下的元素按原来的相对位置构成的行列式 N 称为 M 的余子式。如果选择的 k 行依次是 $i_1, i_2, \cdots, i_k$，选择的 k 列依次是 $j_1, j_2, \cdots, j_k$，则称
$A = (-1)^{i_1+i_2+\cdots+i_k+j_1+j_2+\cdots+j_k}N$ 为 M 的代数余子式。
如果在 D 中取定 k 个行或列，则由这些行或列中任选 k 个列或行构成的一切 k 阶子式与它们的代数余子式的乘积之和等于行列式 D，即：$D = \sum_{i=1}^{C_n^k} M_i A_i$。

分块矩阵行列式

一般情况下我们有 $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq |A||D| - |B||C|$，对分块矩阵行列式的计算使用下面两个结论将对我们很有帮助：

1. （第一降阶定理）设 A, B, C, D 为同阶方阵，若 A 可逆，则：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|$$

若 D 可逆，则：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |D||A - BD^{-1}C|$$

2. （第二降阶定理）设 A, D 可逆但不必同阶，则 $|A||D - CA^{-1}B| = |D||A - BD^{-1}C|$

行列式与几何

行列式可以用来计算有向体积，此外在解析几何中有两个推论：

1. 过两点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 的直线方程为 $\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$
2. 过不共线三点 $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3)$ 的平面方程为 $\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$

行列式例题

Example

设 a, b, c 为互异实数，证明 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} = 0$ 的充要条件为 $a+b+c=0$。

Example

设 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是 n 个不全为 0 的实数，求证：

$$\begin{vmatrix} 1+a_1^2 & a_1a_2 & \cdots & a_1a_n \\ a_2a_1 & 1+a_2^2 & \cdots & a_2a_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_na_1 & a_na_2 & \cdots & 1+a_n^2 \end{vmatrix} > 1$$

伴随矩阵

设 A 是 n 阶方阵，定义 A 的伴随矩阵

$$A^* = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

，其中 A_{ij} 表示 A 的代数余子式，

对伴随矩阵我们有如下性质：

1. $AA^* = A^*A = |A|I_n$，特别当 A 可逆时有 $A^{-1} = \frac{1}{|A|}A^*$
2. $(AB)^* = B^*A^*, (A^T)^* = (A^*)^T$，若 A 可逆还有 $(A^*)^{-1} = (A^{-1})^*$

伴随矩阵例题

Example

设 A 为 n 阶矩阵，证明 $|A^*| = |A|^{n-1}$。

Example

设 A 为 m 阶矩阵，B 为 n 阶矩阵，求矩阵 $C = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{bmatrix}$ 的伴随矩阵。

特征值与特征向量

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵，若 $\lambda \in \mathbb{F}$，x 是 $\mathbb{F}^n$ 上非零列向量，满足 $Ax = \lambda x$，则称 λ 是 A 的特征值，x 是从属于特征值 λ 的特征向量。在这个定义中需要注意几点：

(i) 特征值的取值和数域相关，n 阶实矩阵记重数也未必有 n 个特征值，但将它看成复数域上的矩阵则是成立的

(ii) 特征值可以是 0，但特征向量一定是非零向量

(iii) 从属于不同特征值的特征向量一定是线性无关的，而从属于同一个特征值的特征向量可能是无关也可能是相关的

特征值重要性质

Example

设 A 是 n 阶方阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值，$f(x)$ 是一个多项式，证明 $f(\lambda_1), f(\lambda_2), \cdots, f(\lambda_n)$ 是 $f(A)$ 的全部特征值。

Example

设 A 是 n 阶可逆方阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值，证明 $\lambda_1^{-1}, \lambda_2^{-1}, \cdots, \lambda_n^{-1}$ 是 A^{-1} 的全部特征值。

Example

设 A 是 n 阶方阵，$\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$ 是 A 的全部特征值，A^* 是 A 的伴随矩阵，证明 $\prod_{i\neq 1} \lambda_i, \prod_{i\neq 2} \lambda_i, \cdots, \prod_{i\neq n} \lambda_i$ 是 A^* 的全部特征值。

特征多项式

设 A 是数域 $\mathbb{F}$ 上的 n 阶矩阵，称多项式 $f(\lambda) = |\lambda I_n - A|$ 为 A 的特征多项式。
记 n 阶矩阵 A 的行列式为 $|A|$，迹为 $tr(A)$，则 A 的特征多项式有以下形式：

$$f(\lambda) = \lambda^n - tr(A)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n|A|$$

由于相似矩阵有相同的特征值和特征多项式，这个性质可以用来简单地证明相似矩阵有相同的行列式和迹，且行列式等于特征值之积、迹等于特征值之和：

i. $|A| = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \cdots \cdot \lambda_n$
ii. $tr(A) = \lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n$

Example

设 A 是 n 阶整数矩阵，证明方程 $Ax = \frac{1}{2}x$ 没有非零解。

相似矩阵与可对角化

设 A, B 是 n 阶方阵，若存在 n 阶可逆矩阵 P 使得 $P^{-1}AP = B$，则称 A 与 B 相似，如果矩阵 A 与一个对角矩阵 Λ 相似，则称 A 可对角化。

对于矩阵 A 的特征值 λ 的重数有两个不同的刻画：

1. 设 V_λ 表示方程 $(\lambda I - A)x = 0$ 的解空间，则称 $\dim V_\lambda$ 为 A 的几何重数
2. 设 $f(x)$ 为 A 的特征多项式，则 $f(x)$ 中 $x - \lambda$ 因子的次数称为 A 的代数重数，可以证明每个特征值的几何重数不大于代数重数

有如下几个方法判定矩阵 A 是否可对角化：

1. A 可对角化当且仅当 A 有 n 个线性无关的特征向量
2. 若 A 有 n 个不同的特征值，则 A 可对角化
3. A 可对角化当且仅当对任一特征值几何重数等于代数重数

实对称矩阵正交相似对角化

将一个可对角化的 n 阶矩阵进行对角化，等价于去求出该矩阵 n 个线性无关的特征向量，这里面最重要的是实对称矩阵，可以证明实对称矩阵 A 能进行正交相似对角化，其过程如下：

1. 计算 $|\lambda I - A|$ 得到 A 的特征多项式，令特征多项式等于 0 求出 A 的特征值 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_m$
2. 对每个 λ_i 解方程 $(\lambda_i I - A)x = 0$，得到基础解系 $\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \cdots, \xi_{i,k_i}$，由于矩阵 A 可对角化，应该有 $\sum_{i=1}^{m} k_i = n$，其中 n 为 A 的阶数
3. 对每个 λ_i，将基础解系 $\xi_{i,1}, \xi_{i,2}, \cdots, \xi_{i,k_i}$ 做 Gram-Schmidt 正交化并单位化，得到单位正交向量组 $q_{i,1}, q_{i,2}, \cdots, q_{i,k_i}$
4. 将所有特征值对应的单位正交向量组拼在一起得矩阵 Q，则 Q 是正交阵且 $Q^{-1}AQ = \Lambda$ 为对角阵，其中 Λ 对角线上为对应的特征值

对角化例题

Example

设 α, β 是两个正交非零列向量，求矩阵 $A = \alpha\beta^{T}$ 的特征值，并判断 A 是否可以相似对角化。

Example

设 n 阶矩阵 A 可对角化，证明矩阵 $\begin{bmatrix} A & A^2 \\ A^2 & A \end{bmatrix}$ 可对角化。

Example

设 A 是 m 阶矩阵，B 是 n 阶矩阵，C 是 $m \times n$ 矩阵，$M = \begin{bmatrix} A & C \\ 0 & B \end{bmatrix}$，证明若 M 可对角化，则 A, B 都可对角化。

正定矩阵

称实对称矩阵 A 是正定矩阵，有许多等价定义：

1. A 的所有特征值 $\lambda_i > 0$
2. $x^T A x > 0$ 对所有非零向量 x 成立
3. A 的所有顺序主子式为正（或 A 的所有主子式为正）
4. 存在列满秩矩阵 R 使得 $A = R^T R$

正定矩阵有如下性质：

1. 若 A, B 都是正定矩阵，则 $A + B$ 也是正定矩阵
2. 若 A 是正定矩阵，则存在矩阵 B，使得 $A = B^2$，对 A 做正交相似对角化得 $A = Q\Lambda Q^T$ 可知 $B = Q\sqrt{\Lambda}Q^T$
3. 若 A 是正定矩阵，则 A^2, A^{-1} 都是正定矩阵
4. 若 A 是正定矩阵，C 是可逆阵，则 $A^T C A$ 也是正定矩阵

半正定矩阵

仿照正定矩阵，可以类似定义实对称矩阵 A 是半正定矩阵，其等价定义如下：

1. A 的所有特征值 $\lambda_i \geq 0$
2. $x^T A x \geq 0$ 对所有非零向量 x 成立
3. A 的所有主子式非负（此处仅有顺序主子式非负是不够的）
4. 存在矩阵 R 使得 $A = R^T R$

Example

设 A 是可逆的实对称矩阵，B 是实反对称矩阵且 $AB = BA$，证明 $A + B$ 是可逆矩阵。

二次型

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = x^T A x$，其中 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实对称矩阵，$x = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}^T$，则称 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 是一个二次型。任何一个 n 元二次型都可以经过一个可逆线性变换 $x = Cy$ 化为标准型 $c_1 y_1^2 + c_2 y_2^2 + \cdots + c_n y_n^2$，记新的二次型为 $y^T B y$，则有 $B = C^T A C$，即我们可以通过将 A 进行正交相似对角化来讲一个二次型化为标准型。

Example

设 A 是 n 阶正定矩阵，计算函数 $f(x) = x^T A x + 2\beta^T x + c$ 的最小值。

矩阵的合同

设 A 是对称矩阵，若每对 A 进行一次初等行变换，就进行一次对称的初等列变换，则矩阵 A 仍然保持对称，我们称这样的变换为对 A 的合同变换：

1. 将 A 的第 i 行乘以非零常数 k，再将第 k 列乘以 k
2. 将 A 的第 i 行乘以常数 k 加到第 j 行，再将第 i 列乘以常数 k 加到第 j 列
3. 对换 A 的第 i 行和第 j 行，再对换第 i 列和第 j 列

经过合同变换得到的矩阵称为和原矩阵是合同的，如果矩阵 A 和 B 合同，则存在可逆矩阵 C 使得 $B = C^T AC$。

合同不变量

一个标准二次型 $f(x) = x^T Ax$ 中正系数项的个数称为正惯性系数，记作 $p(A)$，负系数项的个数称为负惯性系数，记作 $q(A)$，惯性系数满足 $p(A) + q(A) = r(A)$，由于所有二次型都能够通过合同变换变为合同标准型，且惯性定律保证了这种合同变换的唯一性，所以我们可以对任意变换定义正负惯性系数，这是一个合同变换中的不变量。

Example

设分块实对称矩阵 $M = \begin{bmatrix} A & C \\ C^T & B \end{bmatrix}$，其中 A, B 是可逆对称方阵，证明：

$$p(A) + p(B - C^T A^{-1} C) = p(B) + p(A - CB^{-1} C^T)$$

$$q(A) + q(B - C^T A^{-1} C) = q(B) + q(A - CB^{-1} C^T)$$

线性映射与线性变换

设 U, V 是数域 $\mathbb{F}$ 上的线性空间，线性映射 $\phi : \mathrm{U} \to \mathrm{V}$ 是满足如下条件的映射：

1. $\forall \alpha\beta \in \mathrm{U}, \phi(\alpha + \beta) = \phi(\alpha) + \phi(\beta)$
2. $\forall \alpha \in \mathrm{U}, \mathrm{k} \in \mathbb{F}, \phi(\mathrm{k}\alpha) = \mathrm{k}\phi(\alpha)$

对线性映射 ϕ，同样有单射和满射的概念，如果 ϕ 既是单射又是满射，则称 ϕ 是线性同构，从 V 到 V 自身的线性映射称为 V 上的线性变换。

Example

设 ϕ 是 n 维线性空间 U 上的线性变换，$\alpha \in \mathrm{U}$ 满足 $\phi^{\mathrm{m}-1}(\alpha) \neq 0$ 而 $\phi^{\mathrm{m}}(\alpha) = 0$，证明 $\alpha, \phi(\alpha), \phi^2(\alpha), \cdots, \phi^{\mathrm{m}-1}(\alpha)$ 线性无关。

线性映射空间

设 ϕ, ψ 都是从 U 到 V 的线性映射，我们可以定义线性映射的加法和数乘：

1. $\forall \alpha \in \mathrm{U}, (\phi + \psi)(\alpha) = \phi(\alpha) + \psi(\alpha)$
2. $\forall \alpha \in \mathrm{U}, \mathrm{k} \in \mathbb{F}, (\mathrm{k}\phi)(\alpha) = \mathrm{k}\phi(\alpha)$

在此定义下，可以验证所有从 U 到 V 的线性映射也构成一个线性空间，其中 U 上的线性变换全体按此定义构成的线性空间称为 U 的对偶空间。

线性映射的矩阵

设 ϕ 是从 n 维线性空间 U 到 m 维线性空间 V 的线性映射，分别取 U 的基为 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，V 的基为 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，令：

$$\begin{cases} \phi(e_1) = a_{11}\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \cdots + a_{1m}\alpha_m \\ \phi(e_2) = a_{21}\alpha_1 + a_{22}\alpha_2 + \cdots + a_{2m}\alpha_m \\ \cdots \\ \phi(e_n) = a_{n1}\alpha_1 + a_{n2}\alpha_2 + \cdots + a_{nm}\alpha_m \end{cases}$$

则称矩阵 $A = (a_{ij})_{n\times m}$ 是 ϕ 在给定基下的表示矩阵，两个线性映射的复合对应它们表示矩阵的乘法运算。
设 U 是 n 维线性空间，ϕ 是 U 上的一个线性变换，在一组基下的表示矩阵为 A，另一组基下的表示矩阵为 B，且从第一组基到第二组基的过渡矩阵为 P，则有 $B = P^{-1}AP$，换句话说线性变换在不同的基下的表示矩阵是相似的。

像空间与核空间

设 ϕ 是从 U 到 V 的线性映射，ϕ 的像构成 V 的子空间，记作 $\mathrm{Im}\phi$，其维数称为 ϕ 的秩，U 中在 ϕ 下映射为零向量的所有向量构成 U 的子空间，记作 $\mathrm{Ker}\phi$，其维数称为 ϕ 的零化度，若 A 是 ϕ 在任意一组基下的表示矩阵，有 ϕ 的秩等于 A 的秩。
关于像和核的维数，有维数公式 $\dim \mathrm{Im}\phi + \dim \mathrm{Ker}\phi = \dim \mathrm{U}$。

Example

设 A 是 n 阶方阵，证明 $r(A^n) = r(A^{n+1}) = r(A^{n+2}) = \cdots$。

总结

线性代数真是太有趣了！
欢迎大家下学期选修课程《高等线性代数选讲》！
希望我的工作能给大家这个冬日带来一些温暖 qwq
祝大家期末考试顺利！