微积分 B(1)第三次习题课

题目

建议：重点讨论的题目应包括：第二大题、第三大题的 1, 3—8, 13（本题反应的现象是什么？）. 带★的题目难度较大，不在课堂讨论.

一、施笃兹（Stolz）定理

1. ★Stolz 定理：已知数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$. 设 $\{b_n\}$ 单调增加，且 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = +\infty$，若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n} = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n} = A$.

（**说明：证明不作要求**. 施笃兹定理也称作是离散的洛必达法则，是数列极限求值的一种重要方法）

2．利用 Stolz 定理求下列极限

（1）已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$.

（2）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}}$，其中 m 为自然数.

（3）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

（4）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

（5）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

（6）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\dfrac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

二、无穷大量

1．已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = +\infty$.

2．已知数列 $\{a_n\}$ 单调，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = A$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$.

Remark：思考题：若数列 $\{a_n\}$ 没有单调性，该题中的结论是否还成立？

3．证明：数列 $\{a_n\}$ 没有收敛子列的充分必要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$.

三、函数极限

1．用函数极限的定义证明

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}=2$．（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1})=0$．

2． 设 $a>1$，$k>0$．利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$．

3．求解下列各题

（1）已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，求 a 与 b 的值.

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ （$q\neq0$）.

（3）讨论极限 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{1}{x}-\left[\dfrac{1}{x}\right]\right)$ 是否存在，其中 $[x]$ 表示不超过 x 的最大整数.

（4）求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$.

4．求下列极限

（1）求 $\lim\limits_{x\to0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$．（2）求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^x$.

（3）求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$．（4）求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$．

5．求下列极限

（1）$\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}\ (a,b,c>0)$；（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x\ (a>0,b>0)$；

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^x\ (a_k>0)$；（4）$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$；

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$；（6）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}})$；

（7）$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{[4x]}{1+x}$．$[\cdot]$ 是取整函数.

6．已知 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{1-\cos x}-1}{\tan(x^k\pi)}=a\neq0$，求 k 与 a 的值.

7．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$．

8．证明：若 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，则

$\left|a_1+2a_2+\cdots+na_n\right|\leqslant 1$．

9．★求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4})\sqrt{x^2+1}$．

10．★证明：在 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$ 是无穷大量.

11．★证明：在 $x\to+\infty$ 时，$\dfrac{x}{\ln x}$ 是无穷大量，并求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}$

12．★设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是周期函数.

（1）若 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x),\lim\limits_{x\to\infty}g(x)$ 存在且值相等，则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有什么关系？ 证明你的结论.

（2）若 $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-g(x))=0$，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的周期之比 $\tau=\dfrac{T_f}{T_g}\in\mathbf{Q}$，则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 又有什么关系？

13．设 $f_1(x)=\begin{cases}x, & 1\leqslant x\leqslant 2,\\ \dfrac{1}{x}, & x>2,\end{cases}$ $f_n(x)=\begin{cases}1, & 1\leqslant x\leqslant n,\\ x^n, & n<x\leqslant n+1,\\ \dfrac{1}{x}, & x>n+1\end{cases}$ $(n=2,3,\cdots)$．

（1）对任意固定的 n，求 $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)$；

（2）求 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty}f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$ 在 $[1,+\infty)$ 上的表达式；

（3）求 $\lim\limits_{x\to+\infty}F(x)$．