习题课 10

2019 年 12 月 16 日

练习 10.1 试证：

1. 如果 $A = [a_{ij}]$ 是 n 阶对称正定矩阵，那么 $\det(A) \leq \det(A_{n-1})a_{nn}$，其中 $\det(A_{n-1})$ 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式（也是 a_{nn} 关于 A 的余子式）。
2. 如果 $A = [a_{ij}]$ 是 n 阶对称正定矩阵，那么 $\det(A) \leq a_{11} \cdots a_{nn}$。
3. 如果 $T = \begin{bmatrix} \boldsymbol{t}_1 & \cdots & \boldsymbol{t}_n \end{bmatrix}$ 是 n 阶实可逆矩阵，那么 $|\det(T)| \leq \|\boldsymbol{t}_1\| \cdots \|\boldsymbol{t}_n\|$。
4. 上面结论称为 Hadamard 不等式。你还能找到另外的方法证明它吗？

练习 10.2 假设 A 是一个正定矩阵，且 $B = \begin{bmatrix} 2A & 2A \\ 2A & 5A \end{bmatrix}$。

1. 证明 B 也是正定的。
2. 假设 $A = L_A D_A U_A$ 是 A 的 LDU 分解。求 B 的 LDU 分解 $B = L_B D_B U_B$。
3. 假设已知 A 的所有特征值和对应的所有特征向量，求 B 的所有特征值和对应的所有特征向量。

练习 10.3 假设 $S \in \mathbb{M}_n$ 是一个正定矩阵，特征值 (按重数记）是 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$. 我们记 $Q_S(\mathbf{x}) := \mathbf{x}^T S \mathbf{x}$.

(i) 求矩阵 $\lambda_1 \mathbf{I}_n - S$ 的特征值。

(ii) 证明：$\lambda_1 \mathbf{I}_n - S$ 是半正定的。

(iii) 证明：$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}} \frac{Q_S(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} = \lambda_1$, 这里 $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$. 何时等号成立？

(iv) 假设 $\lambda_1 > \lambda_2$, 证明：$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \mathbf{x} \perp \mathbf{q}_1} \frac{Q_S(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2} = \lambda_2$, 这里 $\mathbf{q}_1$ 是属于 λ_1 的特征向量。

练习 10.4 设 A 为实方阵, 证明 $A^T A$ 与 AA^T 相似.

练习 10.5 设 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, 求 A 的奇异值分解

练习 10.6 求下列矩阵的奇异值分解 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

练习 10.7 设 2×3 矩阵 A 有如下奇异值分解 $U\Sigma V^T$, 其中 U,V 为正交矩阵:

$$A=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix}.$$

(a) 求 A 的零空间 $N(A)$ 的一组标准正交基。
(b) 写出方程 $Ax=u_1$ 的通解。
(c) 求方程 $Ax=u_1$ 的长度最短的解, 并证明。

练习 10.8 设 $A\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 如果 A 的 SVD 为 $A=U\begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}V^T$，定义其广义逆 $A^+=V\begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^{-1} & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix}U^T$。求证:

1. $(A^+)^+=A$
2. A^+A 是到 $C(A^T)$ 的投影矩阵
3. AA^+ 是到 $C(A)$ 的投影矩阵
4. $r(A)=r(A^+)=r(A^+A)=r(AA^+)$

练习 10.9 证明置换矩阵 $P=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是绕正向为 $(1,1,1)^T$ 的旋转轴 ℓ 做顺时针旋转 $2\pi/3$ 的变换。

练习 10.10 设 A 是一个 3 阶实矩阵，其作用在任一向量 $v=\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ 的结果 Av 是将 v 绕着轴 $x=y=z$ 旋转 180 度。求矩阵 A.

练习 10.11 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个映射, 满足: 对任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ 有 $\langle f(\alpha),f(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$. [1] 证明: f 是一个线性映射.

练习 10.12 设 V 为 n 维线性空间，设 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 为 V 的一组基底。任给 $v\in V$，设

$$v=x_1v_1+\cdots+x_nv_n=[v_1,\cdots,v_n]x,$$

称 $x=[x_1,\cdots,x_n]^T$ 是 v 在该基底下的坐标。定义坐标映射 $T:V\to\mathbb{R}^n$ 为

$$T(v)=x.$$

[1] $\langle\alpha,\beta\rangle$ 表示 α,β 的内积。

(1) 证明 T 是一个线性映射，且为双射。

(2) 证明其逆 $T^{-1}:\mathbb{R}^n \to V$ 也是线性映射。

我们称 T 是 V 与 $\mathbb{R}^n$ 之间的一个线性同构。

练习 10.13 在复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 $M_n(\mathbb{C})$ 内定义一个线性变换 σ 如下：

$$\sigma\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & a_{n1} \end{bmatrix},$$

(1) 求 σ 的特征多项式.
(2) 证明 σ 可对角化，即存在 $M_n(\mathbb{C})$ 某组基, σ 在这组基下的矩阵是对角阵.

练习 10.14 设 $\dim V = n, \dim W = m$。$T: V \to W$ 是线性映射，且 $r(T) = r$。证明可以选取 V 与 W 的基底，使得在此选取下 T 的矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m\times n}.$$

练习 10.15 在 $\mathbb{R}^3$ 中，设线性变换 T 关于基 $v_1 = (-1,1,1)$，$v_2 = (1,0,-1)$，$v_3 = (0,1,1)$ 的矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 求 T 关于基 $i = (1,0,0)$，$j = (0,1,0)$，$k = (0,0,1)$ 的矩阵；

(2) 设向量 $v = v_1 + 6v_2 - v_3$，$w = i - j + k$，求 $T(v)$ 和 $T(w)$ 关于基 v_1, v_2, v_3 的坐标。