微积分 B(1)第四次习题课参考答案

教学目的：本周的题目只练习与连续函数的性质有关的内容．在学习的过程中应掌握函数在一点连续与间断的定义、间断点的类型，连续函数的几条基本性质及其应用；一致连续性是比较难理解的概念，应注意体会一致连续与连续的区别和联系．

说明：带★的题目不在课堂讨论，留作课后练习．

一、连续函数及其性质

1．设函数 $f(x)=\begin{cases}1, & x\leqslant -1,\\ 0, & x=0,\\ 2, & x\geqslant 1,\\ ax^2+bx+c, & 0<|x|<1,\end{cases}$ 若 $f(x)\in C(-\infty,+\infty)$，求 a,b,c 的值．

解：由 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=\lim\limits_{x\to-1^+}(ax^2+bx+c)=a-b+c$，及 $f(-1)=1$ 得 $a-b+c=1$．

由 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=\lim\limits_{x\to0}(ax^2+bx+c)=c$，及 $f(0)=0$ 得 $c=0$．

由 $\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\lim\limits_{x\to1^-}(ax^2+bx+c)=a+b+c$，及 $f(1)=2$ 得 $a+b+c=2$．

解得 $a=\dfrac{3}{2},b=\dfrac{1}{2},c=0$．

2．研究下列函数在定义域内的连续性，指出间断点及其类别．

（1） $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$， $x\in(0,2\pi)$；

（2） $f(x)=\dfrac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$；

（3） $f(x)=[|\cos x|]$；

（4） $f(x)=\dfrac{[\sqrt{x}]\ln(1+x)}{1+\sin x}$；

（5） $f(x)=\begin{cases}\lim\limits_{t\to x}\left(\dfrac{x-1}{t-1}\right)^{\frac{t}{x-t}}, & x\neq1,\\ 0, & x=1.\end{cases}$

注 （3）（4）中的$[\bullet]$是取整函数．

解：（1）对初等函数，找间断点就是找没定义的孤立点．

在 $(0,2\pi)$ 内，$\tan(x-\dfrac{\pi}{4})$ 没定义的点为 $\dfrac{3\pi}{4},\dfrac{7\pi}{4}$， $\tan(x-\dfrac{\pi}{4})$ 等于零的点为 $\dfrac{\pi}{4},\dfrac{5\pi}{4}$，所以函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 在 $(0,2\pi)$ 内的间断点有 4 个．其中，$x=\dfrac{3\pi}{4}$, $x=\dfrac{7\pi}{4}$ 是第一类间断点（可去型），$x=\dfrac{\pi}{4}$, $x=\dfrac{5\pi}{4}$ 为第二类间断点．说明如下：

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{3\pi}{4}}(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}=(1+\frac{3\pi}{4})^0=1$，所以 $x=\frac{3\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 的可去间断点．$x=\frac{7\pi}{4}$ 是第一类间断点的理由类似．

因为 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}^+}(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}=+\infty$，所以 $x=\frac{\pi}{4}$ 是函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{x}{\tan(x-\frac{\pi}{4})}}$ 的第二类间断点．$x=\frac{5\pi}{4}$ 是第二类间断点的理由类似．

（2）函数 $f(x)=\frac{x(x-1)}{|x|(x^2-1)}$ 的间断点为 $x=0,\ x=\pm1$．

因为 $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=1$，$\lim\limits_{x\to0^-}f(x)=-1$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点（跳跃型）．

因为 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=\frac{1}{2}$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=\frac{1}{2}$，所以 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点（可去型）．

因为 $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to-1^-}f(x)=+\infty$，所以 $x=-1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点．

（3）$f(x)=[|\cos x|]$

当 $x=k\pi$ 时，$|\cos x|=1$，$f(x)=[|\cos x|]=1$；

当 $x\neq k\pi$ 时，$|\cos x|<1$，$f(x)=[|\cos x|]=0$．

因此 $x=k\pi$ 是间断点．

因为 $\lim\limits_{x\to k\pi}[|\cos x|]=\lim\limits_{x\to k\pi}0=0\neq1=f(k\pi)$，所以 $x=k\pi$ 均为第一类间断点（可去型）．

（4）$f(x)=\frac{[\sqrt{x}]\ln(1+x)}{1+\sin x}$ 的定义域是 $\{x\,|\,x\geqslant0,x\neq2k\pi-\frac{\pi}{2},k\in\mathbf{Z}^+\}$，$x_0=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的间断点．

由于 $\lim\limits_{x\to2k\pi-\frac{\pi}{2}}f(x)=\lim\limits_{x\to2k\pi-\frac{\pi}{2}}\frac{[\sqrt{x}]\ln(1+x)}{1+\sin x}=\infty$，所以 $x_0=2k\pi-\frac{\pi}{2}$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点．

当 $x=n^2,n\in\mathbf{Z}^+$ 时，$\lim\limits_{x\to n^2+}f(x)=\lim\limits_{x\to n^2+}\frac{n\ln(1+x)}{1+\sin x}=\frac{n\ln(1+n^2)}{1+\sin n^2}=f(n^2)$，

$$\lim_{x\to n^2-}f(x)=\lim_{x\to n^2-}\frac{(n-1)\ln(1+x)}{1+\sin x}=\frac{(n-1)\ln(1+n^2)}{1+\sin n^2}\neq f(n^2),$$

所以 $x=n^2,n\in\mathbf{Z}^+$ 为 $f(x)$ 的第一类间断点（跳跃型）．

（5）当 $x\neq1$ 时，$\lim\limits_{t\to x}(\frac{x-1}{t-1})^{\frac{t}{x-t}}=\lim\limits_{t\to x}\left[(1+\frac{x-t}{t-1})^{\frac{t-1}{x-t}}\right]^{\frac{x-t}{t-1}\cdot\frac{t}{x-t}}=\mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}$，

所以
$$f(x)=\begin{cases}0, & x=1,\\ \mathrm{e}^{\frac{x}{x-1}}, & x\neq1.\end{cases}$$

由于 $\lim\limits_{x\to1^+}f(x)=+\infty$，$\lim\limits_{x\to1^-}f(x)=0$，所以函数 $f(x)$ 在 $x=1$ 处间断，且 $x=1$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点.

3．★试举出定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$．要求：$f(x)$ 仅在 $0,1,2$ 三点处连续，其余的点都是 $f(x)$ 的第二类间断点.

解：（答案不唯一）令 $f(x)=x(x-1)(x-2)D(x)$，其中 $D(x)=\begin{cases}1, & x\in\mathbf{Q},\\ 0, & x\notin\mathbf{Q}.\end{cases}$

在点 $x=0$ 附近，易见 $(x-1)(x-2)D(x)$ 有界，故有

$$\lim_{x\to0}f(x)=0=f(0),$$

即 $f(x)$ 在 $x=0$ 点连续．类似可证 $f(x)$ 在 $x=1$ 和 $x=2$ 点连续.

另一方面，$\forall x_0\in\mathbf{R}\setminus\{0,1,2\}$，取有理点列 $\{x_n\}$，$x_n\to x_0^+\ (n\to\infty)$，有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=x_0(x_0-1)(x_0-2)\quad(\neq0);$$

取无理点列 $\{x_n'\}$，$x_n'\to x_0^+\ (n\to\infty)$，有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=0.$$

所以 $f(x)$ 在点 x_0 不存在右极限，故 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

注 函数 $f(x)=\begin{cases}x(x-1)(x-2), & x\in\mathbf{Q},\\ -x(x-1)(x-2), & x\notin\mathbf{Q}\end{cases}$ 也满足要求.

4．利用零点存在定理，证明：

（1）若 $f(x)$ 是以 2π 为周期的连续函数，则在任何一个周期内都存在 $\xi\in\mathbf{R}$，使得

$$f(\xi+\pi)=f(\xi).$$

（2）已知函数 f 在圆周上有定义，并且连续．证明：存在一条直径，使得它的两个端点 A,B 满足 $f(A)=f(B)$.

证明：(1)（连续函数的零点存在定理，周期函数的概念）

设一个周期区间是 $[a,a+2\pi]$.

令 $F(x)=f(x+\pi)-f(x)$，则 $F(x)$ 连续，且

$$F(a)=f(a+\pi)-f(a),$$

$$F(a+\pi)=f(a+2\pi)-f(a+\pi)=f(a)-f(a+\pi),$$

所以 $F(a)\cdot F(a+\pi)\leqslant0$.

当等号成立时，取$\xi = a$；

当等号不成立时，由连续函数的零点存在定理，存在$\xi \in (a, a+\pi) \subset \mathbf{R}$，使得

$$F(\xi) = 0\text{，即}\ f(\xi+\pi) = f(\xi).$$

（2）（连续函数的零点存在定理，周期函数的概念）

以圆心为极点、某条半径作极轴建立极坐标系，于是圆周上的点可以由极角θ决定．f便是θ的连续函数，且以2π为周期．

至此，问题变成证明存在θ_0，使得$f(\theta_0) = f(\theta_0+\pi)$．以下做法同第（1）题．

5．证明：设$f(x) \in C(-\infty, +\infty)$，且存在唯一的$x_0 \in \mathbf{R}$使得$f(f(x_0)) = x_0$，则存在唯一的$\xi \in (-\infty, +\infty)$，使得$f(\xi) = \xi$．

证明　（连续函数的零点存在定理）

（1）先证存在性．

证法 1：令$F(x) = f(x) - x$，则$F(x)$连续，且

$$F(x_0) = f(x_0) - x_0,$$

$$F(f(x_0)) = f(f(x_0)) - f(x_0) = x_0 - f(x_0),$$

所以$F(x_0) \cdot F(f(x_0)) \leqslant 0$．

当等号成立时，取$\xi = x_0$；

当等号不成立时，由连续函数的零点存在定理，存在介于x_0与$f(x_0)$之间的点ξ，使得

$$F(\xi) = 0\text{，即}\ f(\xi) = \xi.$$

证法 2：反证法．假设对任意的$x \in (-\infty, +\infty)$，都有$f(x) \neq x$，由连续函数的零点存在定理，要么恒为$f(x) > x$，要么恒为$f(x) < x$．不妨设$f(x) > x$，则

$$f(f(x_0)) > f(x_0) > x_0.$$

这与条件$f(f(x_0)) = x_0$矛盾，故存在$\xi \in (-\infty, +\infty)$，使得$f(\xi) = \xi$．

（2）再证唯一性．

若存在不同的$\xi, \eta \in (-\infty, +\infty)$，使得$f(\xi) = \xi$，$f(\eta) = \eta$，则

$$f(f(\xi)) = f(\xi) = \xi,\quad f(f(\eta)) = f(\eta) = \eta,$$

这与函数$f(f(x))$的不动点唯一矛盾．唯一性得证．

注：事实上，没有连续条件，本题也可以证明 x_0 就是 $f(x)$ 的唯一不动点．证明如下：

由 $f(f(x_0))=x_0$ 得 $f(f(f(x_0)))=f(x_0)$，又因为满足 $f(f(x_0))=x_0$ 的点 x_0 唯一，所以 $f(x_0)=x_0$．即 x_0 就是 $f(x)$ 的不动点。唯一性证明同上．

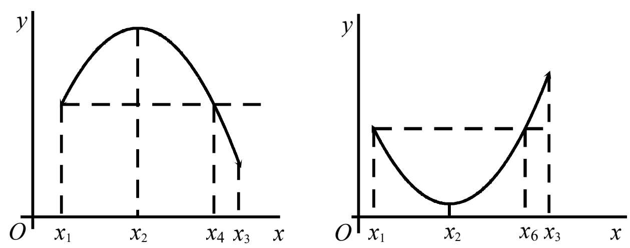
6．证明：若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，并且存在反函数，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调．

证明：（连续函数的介值定理，函数概念）反证法．假设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上没有单调性，则总存在

$$x_1<x_2<x_3,$$

使得

$$f(x_2)>f(x_1),\, f(x_2)>f(x_3) \quad \text{或者} \quad f(x_2)<f(x_1),\, f(x_2)<f(x_3)\text{，且 } f(x_1)\neq f(x_3).$$



当 $f(x_2)>f(x_1), f(x_2)>f(x_3)$ 时，若 $f(x_2)>f(x_1)>f(x_3)$，则存在 $x_4\in(x_2,x_3)$，使得 $f(x_4)=f(x_1)$（如图）；若 $f(x_2)>f(x_3)>f(x_1)$，则存在 $x_5\in(x_1,x_2)$，使得 $f(x_5)=f(x_3)$．

当 $f(x_2)<f(x_1), f(x_2)<f(x_3)$ 时，若 $f(x_2)<f(x_1)<f(x_3)$，则存在 $x_6\in(x_2,x_3)$，使得 $f(x_6)=f(x_1)$（如图）；若 $f(x_2)<f(x_3)<f(x_1)$，则存在 $x_7\in(x_1,x_2)$，使得 $f(x_7)=f(x_3)$．

以上情形均与 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在反函数矛盾．

综上可知，函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调．

7．设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且对 $\forall x\in[a,b]$，总存在 $y\in[a,b]$ 使得 $|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x)|$．求证：至少存在一点 $\eta\in[a,b]$，使得 $f(\eta)=0$．

证法 1：（闭区间上连续函数的最值存在性，反证法）反证法．如果函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上没有零点，则函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上也没有零点， 所以 $|f(x)|>0$．

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，所以函数 $|f(x)|$ 在 $[a,b]$ 上连续．根据闭区间上连续函数的性质，存在点 $\xi\in[a,b]$ 使得 $|f(\xi)|=\min\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f(x)|\}>0$．

由题设条件知，在$[a,b]$内存在$y\in[a,b]$，使得

$$|f(y)|\leqslant\frac{1}{2}|f(\xi)|<|f(\xi)|.$$

这与$|f(\xi)|$是最小值矛盾，所以函数$f(x)$在$[a,b]$上至少存在一个零点.

证法 2：（Bolzano 定理，极限保号性，连续概念）直接法．取$x_0\in[a,b]$，$f(x_0)\neq 0$．根据题设条件，存在$x_1\in[a,b]$，使得

$$|f(x_1)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x_0)|\text{（假设}f(x_1)\neq 0\text{）；}$$

类似地，存在$x_2\in[a,b]$，使得

$$|f(x_2)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x_1)|\text{（假设}f(x_2)\neq 0\text{）．}$$

依次下去，存在$\{x_n\}\subset[a,b]$，满足

$$|f(x_n)|\leqslant\frac{1}{2}|f(x_{n-1})|\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{2^n}|f(x_0)|\text{（假设}f(x_n)\neq 0\text{），}$$

易知 $\lim\limits_{n\to\infty}|f(x_n)|=0$.

因为数列$\{x_n\}$有界，所以存在收敛子列$\{x_{n_k}\}$，记$\eta=\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}$，则$\eta\in[a,b]$.

因为函数$f(x)$在η处连续，所以$f(\eta)=f(\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k})=\lim\limits_{k\to\infty}f(x_{n_k})=0$.

8．设$f(x)\in C[a,+\infty)$且有界，若$f(a)<\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$，则当$\alpha$满足

$$f(a)<\alpha<\sup_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$$

时，都存在$\xi\in[a,+\infty)$，使得$\alpha=f(\xi)$.

证明：（确界概念，连续函数的介值定理）当α满足$f(a)<\alpha<\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}$时，取$\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup\limits_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}-\alpha)$，则$\exists b\in(a,+\infty)$，使得

$$f(b)>\sup_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}-\varepsilon=\frac{1}{2}(\sup_{x\in[a,+\infty)}\{f(x)\}+\alpha)>\alpha>f(a).$$

由于$f(x)\in C[a,b]$，根据介值定理，$\exists\xi\in(a,b)\subset(a,+\infty)$，使得$f(\xi)=\alpha$.

9．设$f(x)$，$g(x)$均在区间$[a,b]$上连续．证明：

（1）$|f(x)|$，$\max\{f(x),g(x)\}$，$\min\{f(x),g(x)\}$均在区间$[a,b]$上连续；

（2）★ $M(x)=\max\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$，$m(x)=\min\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{f(\xi)\}$均在区间$[a,b]$上连续.

证明：(1)（连续概念，连续函数的运算）$\forall x_0\in[a,b]$，由于 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 以及

$$0\leqslant\left||f(x)|-|f(x_0)|\right|\leqslant|f(x)-f(x_0)|,$$

可以得到 $\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|f(x_0)|$.

因此函数 $|f(x)|$ 在 x_0 处连续(当 $x_0=a$ 或者 $x_0=b$ 时上述的极限和连续均表示单侧极限与单侧连续).

注意到

$$\max\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}+\frac{|f(x)-g(x)|}{2},$$
$$\min\{f(x),g(x)\}=\frac{f(x)+g(x)}{2}-\frac{|f(x)-g(x)|}{2},$$

及连续函数的和、差、绝对值函数的连续性，知 $\max\{f(x),g(x)\},\min\{f(x),g(x)\}\in C[a,b]$.

(2) ★任给 $x_0\in[a,b]$，不妨设 $a<x_0<b$，对任意的 Δx.

当 $\Delta x>0$ 时，设 ξ 是 $f(x)$ 在区间 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上的最大值点.

因为 $M(x_0)\geqslant f(x_0)$，且 $M(x_0+\Delta x)=f(\xi)$，所以

$$0\leqslant M(x_0+\Delta x)-M(x_0)\leqslant f(\xi)-f(x_0).$$

又因为函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，所以易知 $M(x)$ 在 x_0 处右连续.

当 $\Delta x<0$，设 η 是 $f(x)$ 在区间 $[x_0+\Delta x,x_0]$ 上的最大值点.

因为 $M(x_0+\Delta x)\geqslant f(x_0+\Delta x)$，且 $M(x_0)=f(\eta)$，所以

$$0\leqslant M(x_0)-M(x_0+\Delta x)\leqslant f(\eta)-f(x_0+\Delta x).$$

又因为函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续，所以易知 $M(x)$ 在 x_0 处左连续.

综上可知，函数 $M(x)$ 在 x_0 处连续.

Remark：以下为 $m(x)$ 的证明，过程类似，可以不再重复。

任给 $x_0\in[a,b]$， 只需证明 $m(x)=\min\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}f(\xi)$ 在 $x=x_0$ 处连续.

先考察 $\Delta x>0$ 的情形. 由于 $m(x_0)=\min\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x_0}f(\xi)$，

① （连续概念，连续函数的保号性）如果 $f(x_0)>m(x_0)$，即 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 的最小值在 $[a,x_0)$

内取到.

由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，当 Δx 很小时，在 $[x_0,x_0+\Delta x]$ 上，均有 $f(x)>m(x_0)$．因此在 $[a,x_0+\Delta x]$ 上，最小值仍为 $m(x_0)$，即 $m(x_0+\Delta x)=m(x_0)$．所以有

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} m(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0^+} m(x_0)=m(x_0)\,.$$

② 如果 $f(x_0)=m(x_0)$，即 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 的最小值在 x_0 处取到．那么

$$m(x_0+\Delta x)=\min_{a\leqslant\xi\leqslant x_0+\Delta x} f(\xi)=f(\eta(\Delta x))\,,$$

其中 $\eta(\Delta x)\in[x_0,x_0+\Delta x]$，当 $\Delta x\to 0^+$ 时， $\eta(\Delta x)\to x_0$，因此有

$$\lim_{\Delta x\to 0^+} m(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0^+} f(\eta(\Delta x))=f(x_0)=m(x_0)\,.$$

下面考察 $\Delta x<0$ 的情形.

① 如果 $f(x_0)>m(x_0)$，即 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 的最小值在 $[a,x_0)$ 内取到．由于 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$，当 $|\Delta x|$ 充分小时，区间 $[x_0+\Delta x,x_0]$ 不包含取得最小值的点，因此 $m(x_0+\Delta x)=m(x_0)$．所以有

$$\lim_{\Delta x\to 0^-} m(x_0+\Delta x)=\lim_{\Delta x\to 0^-} m(x_0)=m(x_0)\,.$$

② 如果 $f(x_0)=m(x_0)$，即 $f(x)$ 在 $[a,x_0]$ 的最小值在 x_0 处取到．那么

$$f(x_0)=m(x_0)\leqslant m(x_0+\Delta x)\leqslant f(x_0+\Delta x)\,,$$

由夹逼定理

$$\lim_{\Delta x\to 0^-} m(x_0+\Delta x)=f(x_0)=m(x_0)\,.$$

综上可知，$\forall x_0\in[a,b]$，都有 $\lim\limits_{\Delta x\to 0} m(x_0+\Delta x)=m(x_0)$．这就证明了

$$m(x)=\min_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)\in C[a,b]\,.$$

注意到 $M(x)=\max\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)=-\min\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x}\{-f(\xi)\}$，于是 $M(x)=\max\limits_{a\leqslant\xi\leqslant x} f(\xi)\in C[a,b]$.

10．★研究函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{p}{q+1}, & x=\dfrac{p}{q},\text{其中}p,q\text{ 互质},\ q\geqslant 1,\\ |x|, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$ 在有理点与无理点的连续性.

解：（连续的概念，函数极限与数列极限的关系）

设 x_0 为有理数且 $x_0 \neq 0$，即 $x_0 = \dfrac{p}{q},\ q \geqslant 1$．根据条件 $f(x_0) = \dfrac{p}{q+1}$．

取一列趋于 x_0 的有理数列 $x_k = \dfrac{p_k}{q_k}$，由于任何收敛到 x_0 的有理数列 $\dfrac{p_k}{q_k}$ 都有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{q_k} = 0 \text{，（见课堂例题）}$$

所以

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{p_k}{q_k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{p_k}{q_k}}{1+\frac{1}{q_k}} = x_0 = \frac{p}{q}.$$

又因为 $f(x_0) = \dfrac{p}{q+1}$，所以 $\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) \neq f(x_0)$．

因此函数 $f(x)$ 在 x_0 处不连续，即 $f(x)$ 在不为零的有理点处都是间断的．

再设 x_0 为无理数，$x_k = \dfrac{p_k}{q_k}$ 是任一趋于 x_0 的有理数列，$\{y_k\}$ 是任一趋于 x_0 的无理数列．因为

$$\lim_{k\to\infty} f(x_k) = \lim_{k\to\infty}\frac{p_k}{q_k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{p_k}{q_k}}{1+\frac{1}{q_k}} = x_0 = \begin{cases} f(x_0), & x_0 > 0, \\ -f(x_0), & x_0 < 0, \end{cases}$$

$$\lim_{k\to\infty} f(y_k) = \lim_{k\to\infty}|y_k| = |x_0| = f(x_0),$$

所以，当 $x_0 > 0$ 时，$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = f(x_0)$，$\lim\limits_{k\to\infty} f(y_k) = f(x_0)$．从而 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$，即函数 $f(x)$ 在 x_0 处连续．

当 $x_0 < 0$ 时，$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_k) = -f(x_0) \neq f(x_0)$．从而函数 $f(x)$ 在 x_0 处不连续．

类似地，可以得到函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续．

二、一致连续性

1．有人断言：“如果函数 $f(x)$ 在 $a \in \mathbf{R}$ 的一个邻域中有定义并在 a 处连续，则 $f(x)$ 在 a 的一个邻域内是一致连续的”．他给出如下证明：

“因为 $f(x)$ 在 $a \in \mathbf{R}$ 处连续，所以对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得只要 $x \in (a-\delta, a+\delta)$，就有

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

因此对任意 $x, y \in (a-\delta, a+\delta)$（此时 $|x-y| < 2\delta$），都有

$$|f(x)-f(y)|\leqslant|f(x)-f(a)|+|f(a)-f(y)|<2\varepsilon .$$

所以 $f(x)$ 在 $(a-\delta,a+\delta)$ 中是一致连续的．”

请问：这个断言和证明正确吗？

解：（连续与一致连续的关系，一致连续的概念）此人的断言不正确．他的证明中偷换了概念，证明过程中 a 的邻域 $(a-\delta,a+\delta)$ 与 ε 的取值有关，这与一直连续概念中的范围含义不同．

2．证明：函数 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续．

证明：（一致连续的概念，闭区间上连续与一致连续的等价性）对 $\forall x',x''\in[1,+\infty)$, 有

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\sin\sqrt{x'}-\sin\sqrt{x''}\right|=2\left|\sin\frac{\sqrt{x'}-\sqrt{x''}}{2}\right|\left|\cos\frac{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}{2}\right|$$

$$\leqslant\left|\sqrt{x'}-\sqrt{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{\sqrt{x'}+\sqrt{x''}}\leqslant\frac{1}{2}|x'-x''| ,$$

从而 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上一致连续．

又 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 连续，从而在 $[0,1]$ 上一致连续．

综上可知，函数 $f(x)=\sin\sqrt{x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续．

注：请说明 $\sin\sqrt{x}$ 在 $[0,1]$ 和 $[1,+\infty)$ 上一致连续，就能保证在 $[0,+\infty)$ 上一致连续的理由．

3．证明：函数 $f(x)=\sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续．

证明：（一致连续的概念）取 $x_k=\sqrt{2k\pi}$ ， $\overline{x}_k=\sqrt{2k\pi+\frac{\pi}{2}}$ ．因为

$$\lim_{k\to\infty}(\overline{x}_k-x_k)=\lim_{k\to\infty}\left(\sqrt{2k\pi+\frac{\pi}{2}}-\sqrt{2k\pi}\right)=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{2k\pi+\frac{\pi}{2}}+\sqrt{2k\pi}}=0 ,$$

所以对任意的 $\delta>0$，总存在正整数 k_0 ，使得 $\left|\overline{x}_{k_0}-x_{k_0}\right|<\delta$ ，但

$$\left|f(\overline{x}_{k_0})-f(x_{k_0})\right|=1 .$$

故函数 $f(x)=\sin x^2$ 在 $[0,+\infty)$ 上不一致连续．

注：或取 $x_k=\sqrt{k\pi}$ ， $\overline{x}_k=\sqrt{k\pi+\frac{\pi}{2}}$ ．

4．设 $f(x)\in C[0,+\infty)$ ， $g(x)\in C[0,+\infty)$ ，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$ ．证明：函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$

上一致连续当且仅当函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证法 1：（极限概念，一致连续的概念）先设 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续.

对任意的 $\varepsilon>0$， 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$，所以存在 $N>0$，对任意的 $x>N$，都有

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，所以 $\exists\delta_1>0$，对 $\forall x,t\in[0,+\infty)$，当 $|x-t|<\delta_1$ 时，有

$$|g(x)-g(t)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

因为 $f(x)$ 在 $[0,N+1]$ 上连续，所以一致连续，故 $\exists\delta_2>0$，对 $\forall x,t\in[0,N+1]$，当 $|x-t|<\delta_2$ 时，有

$$|f(x)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

令 $\delta=\min(\delta_1,\delta_2\ 1)$， $\forall x<t$，若 $0<t-x<\delta$，则只有两种可能：

（1） $t\leqslant N+1$，从而 $x<N+1$，因为 $0<t-x<\delta_2$，所以

$$|f(x)-f(t)|<\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon;$$

（2） $t>N+1$，从而 $x>N$，所以

$$|f(x)-g(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\ |f(t)-g(t)|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

又因为 $0<t-x<\delta_1$，所以 $|g(x)-g(t)|<\frac{\varepsilon}{3}$，从而

$$|f(x)-f(t)|\leqslant|f(x)-g(x)|+|f(t)-g(t)|+|g(x)-g(t)|$$

$$<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}<\varepsilon.$$

综上所述，可知函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

再设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续. 因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]=0$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}[g(x)-f(x)]=0$. 由上面的论述可知，函数 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

证法 2：（一致连续的运算性质）因为 $f(x)-g(x)\in C[0,+\infty)$，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-g(x)]$ 存在，所以函数 $f(x)-g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

当 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续时，因为

$$f(x)=[f(x)-g(x)]+g(x),$$

且 $f(x)-g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，所以 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续．

当 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续时，因为

$$g(x)=f(x)-[f(x)-g(x)],$$

且 $f(x)-g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续，所以 $g(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 一致连续．

5．证明：函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续的充要条件是：对区间 I 上的任何两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$．并证明：函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续．

证明：（一致连续的概念，数列极限的概念，反证法）“$\Rightarrow$”．　设函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续，即 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\forall x,y\in I$，只要 $|x-y|<\delta$，就有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$．

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，对上述 $\delta>0$，存在正整数 N，对 $\forall n>N$，都有 $|x_n-y_n|<\delta$，从而有

$$|f(x_n)-f(y_n)|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=0$．

“$\Leftarrow$”．　反证法．

假设 $f(x)$ 在 I 上不一致连续，即存在 $\varepsilon_0>0$，对 $\forall\delta>0$，总存在 $x,y\in I$，满足

$$|x-y|<\delta，但|f(x)-f(y)|\geqslant\varepsilon_0.$$

取 $\delta=1$，存在 $x_1,y_1\in I$，满足 $|x_1-y_1|<1$，但有 $|f(x_1)-f(y_1)|\geqslant\varepsilon_0$．

取 $\delta=\dfrac{1}{2}$，存在 $x_2,y_2\in I$，满足 $|x_2-y_2|<\dfrac{1}{2}$，但有 $|f(x_2)-f(y_2)|\geqslant\varepsilon_0$．

……

取 $\delta=\dfrac{1}{n}$，存在 $x_n,y_n\in I$，满足 $|x_n-y_n|<\dfrac{1}{n}$，但有 $|f(x_n)-f(y_n)|\geqslant\varepsilon_0$．

……

从而在区间 I 上得到两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$，但

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]\neq 0.$$

这与已知条件矛盾．故函数 $f(x)$ 在区间 I 上一致连续．

根据上述一致连续的充分必要条件，函数 $f(x)$ 在区间 I 非一致连续的充要条件是：在区间 I 上存在两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$，当 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=0$ 时，有 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]\neq 0$.

下面证明函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

对正整数 n，取 $x_n=\ln(n+1)$， $y_n=\ln n$. 则

$$\lim_{n\to\infty}(x_n-y_n)=\lim_{n\to\infty}[\ln(n+1)-\ln n]=\lim_{n\to\infty}\ln(1+\frac{1}{n})=0,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}[f(x_n)-f(y_n)]=\lim\limits_{n\to\infty}[\mathrm{e}^{\ln(n+1)}-\mathrm{e}^{\ln n}]=1\neq 0$，所以函数 $f(x)=\mathrm{e}^x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续.

6．设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ $(a>0)$ 上有定义，且存在 $L>0$ 使得对任意的 $x,y\in[a,+\infty)$ 都有 $|f(x)-f(y)|\leqslant L|x-y|$. 证明：

（1） $\dfrac{f(x)}{x}$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有界；

（2） $\dfrac{f(x)}{x}$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上一直连续.

解：（1）因为

$$|f(x)|\leqslant|f(x)-f(a)|+|f(a)|\leqslant L|x-a|+|f(a)|,$$

所以当 $x\in[a,+\infty)$ $(a>0)$ 时，有

$$\frac{|f(x)|}{x}\leqslant L\frac{|x-a|}{x}+\frac{|f(a)|}{x}<L+\frac{|f(a)|}{a}=M .$$

故 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上有界.

（2）对任意的 $x,y\in[a,+\infty)$，

$$\left|\frac{f(x)}{x}-\frac{f(y)}{y}\right|=\left|\frac{yf(x)-xf(y)}{xy}\right|$$

$$=\left|\frac{yf(x)-xf(x)+xf(x)-xf(y)}{xy}\right|$$

$$\leqslant\left|\frac{f(x)}{x}\right|\left|\frac{y-x}{y}\right|+\left|\frac{f(x)-f(y)}{y}\right|$$

$$\leqslant\frac{M+L}{a}|x-y| .$$

所以 $\dfrac{f(x)}{x}$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上一直连续.