

习题课材料 (四)

注: 带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时, 请量力为之.

记号: 如不加说明, 我们只考虑实矩阵. 对于矩阵 A , 它的四个基本子空间是列空间 $C(A)$, 零空间 $N(A)$, 行空间 $C(A^T)$ 和 A^T 的零空间 $N(A^T)$.

习题 1. 给定 $V, W \subset \mathbb{R}^n$. 若 $\dim V + \dim W > n$, 则存在 $x \neq 0$ 且 $x \in V \cap W$.

习题 2. A 是 10 阶方阵, $A^2 = 0$. 则 $\text{rank}(A) \leq 5$.

习题 3. 设 $(1, 0, 0, 0, 0)^T, (0, 1, 1, 0, 0)^T$ 和 $(0, 1, 1, 1, 0)^T$ 构成了 $N(A)$ 的一组基, 而 A 为五阶方阵, 求 $\text{rref}(A)$.

习题 4. 1. 设 A 是一个 $m \times n$ 的实矩阵, 证明 $N(A^T A) = N(A)$.

2. A 如上. 证明 $C(A^T A) = C(A^T)$.

3. 证明 $A^T A$ 可逆当且仅当 A 为列满秩矩阵.

习题 5. 设 V 为向量空间, a_1, \dots, a_n 为 V 中线性无关的向量, 证明当且仅当 n 为奇数时, $a_1 + a_2, a_2 + a_3, \dots, a_{n-1} + a_n, a_n + a_1$ 时线性无关.

习题 6. (Steinitz 替换定理) a_1, \dots, a_r 线性无关, 可用 b_1, \dots, b_s 线性表示, 则

1. $r \leq s$;

2. 可以选择 b_1, \dots, b_s 中的 r 个向量换成 a_1, \dots, a_r , 得到的新的向量组与 b_1, \dots, b_s 线性等价.

习题 7. 设 A 是 n 阶方阵且 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ 为 \mathbb{R} 上一多项式, 则定义 $f(A) = a_0I_n + a_1A + \dots + a_nA^n$. 已知多项式 f 满足 $f(0) = 0$, 证明对任意方阵 A , $\text{rank} f(A) \leq \text{rank}(A)$.

习题 8. 证明: $\text{rank} \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = \text{rank}(A)$ 是 $Ax = b$ 有解的充分不必要条件.

习题 9 (♡). 设 A 是可逆实反对称矩阵, $b \in \mathbb{R}^n$. 证明下列等式成立。

1. $\text{rank}(A + bb^T) = n$ 。

2. $\text{rank} \begin{bmatrix} A & b \\ b^T & 0 \end{bmatrix} = n$ 。