习题课材料（三）

注: 带♡号的习题有一定的难度、较为耗时, 请量力为之.

记号: 如不加说明，我们只考虑实矩阵。对于矩阵A, 它的四个基本子空间是列空间$C(A)$, 零空间$N(A)$, 行空间$C(A^T)$和A^T的零空间$N(A^T)$。

习题1. 假设V是一个线性空间，n是一个正整数，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$是$V$中一组线性无关的向量，$\beta \in V$。证明：扩充后的向量组$\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta$线性相关当且仅当$\beta$是$\alpha_1, \ldots, \alpha_n$的一个线性组合。

习题2. 对正整数n, 记n阶实方阵的全体为$\mathbb{M}_n$。

1. 验证$\mathbb{M}_n$配上矩阵加法和矩阵与实数的数乘，构成了一个$\mathbb{R}$上的线性空间。
2. 对于下列$\mathbb{M}_n$的各子集，分别判断它们是否构成一个线性子空间。
   (a) $\{A \in \mathbb{M}_n : A = -A^T\}$.
   (b) $\{A \in \mathbb{M}_n : \mathrm{tr}(A) = 0\}$, 其中$\mathrm{tr}(A) := \sum_{i=1}^n a_{ii}$ 称为A的迹。
   (c) $\{A \in \mathbb{M}_n : A$与B可交换$\}$，其中B是给定的一个n阶方阵。
   (d) $\{A \in \mathbb{M}_n : Ax = b$有解$\}$，其中$b$是给定的$\mathbb{R}^n$中的一个向量。
   (e) $\{A \in \mathbb{M}_n : b \in N(A)$且$b \in N(A^T)\}$, 其中$b$是给定的$\mathbb{R}^n$中的一个向量。

习题3. 记闭区间$[-\pi, \pi]$上的实值连续函数的全体为$\mathscr{C}([-\pi, \pi])$, 定义函数的加法，以及函数与实数的数乘如下：

$$(f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad (kf)(x) := k(f(x)), \qquad \text{其中 } f, g \in \mathscr{C}([-\pi, \pi]), k \in \mathbb{R}.$$

1. 验证$\mathscr{C}([-\pi, \pi])$配上上述运算构成了一个$\mathbb{R}$上的线性空间。
2. (♡) 对于任意正整数n, 验证$\mathscr{C}([-\pi, \pi])$中的向量组

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \ldots, \sin(nx), \cos(nx)$$

线性无关。

习题4. $R=\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$是秩为$r$的$m\times n$矩阵。

1. 求R的各子块的大小。

2. 如果$r=m$，求一个B使得$RB=I$。

3. 如果$r=n$，求一个C使得$CR=I$。

4. 在上述两小问中，求所有满足条件的B,C。

5. *(♡)* 求$\mathrm{rref}(R^T)$。

6. *(♡)* 求$\mathrm{rref}(R^TR)$。

习题5. A是3×4矩阵，$s=(2,3,1,0)^T$是$Ax=0$的唯一特殊解（*special solution*）。

1. 求$\mathrm{rank}(A)$并找出$Ax=0$的全部解。

2. 求$\mathrm{rref}(A)$。

3. $Ax=b$对任意b都有解吗？

习题6. $Ax=b$和$Cx=b$，对任意b都有相同的解集。$A=C$成立吗？

习题7. 假设$x_1,\ldots,x_p$是$Ax=b$的解，且b非零。证明：$k_1x_1+\cdots+k_px_p$也是解当且仅当$k_1+\cdots+k_p=1$。

习题8. $B=\begin{bmatrix} 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \\ 1&0&1&0&1&0&1&0 \\ 0&1&0&1&0&1&0&1 \end{bmatrix}, C=\begin{bmatrix} r&n&b&q&k&b&n&r \\ p&p&p&p&p&p&p&p \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&0&0&0 \\ p&p&p&p&p&p&p&p \\ r&n&b&q&k&b&n&r \end{bmatrix}$。求二者的四个子空间的基。这里，$r,n,b,q,k,p$为各不相同的实数。

习题9. $A=\begin{bmatrix} I & F \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, B=\begin{bmatrix} I & G \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$都是$m\times n$矩阵，且具有相同的四个子空间。证明$F=G$。

思考题：设A,B为同型矩阵，且$N(A)=N(B)$. 试说明$\mathrm{rref}(A)=\mathrm{rref}(B)$.