清华大学学习发展中心 线性代数期中考试讲座

主讲人：闫浩

微信：13910166116

学习通 APP 邀请码：94759246

调查问卷：

一、矩阵运算

1.设$\alpha=(1,\quad 2,\quad 3,\quad 4)$，$\beta=\left(1,\quad \frac{1}{2},\quad \frac{1}{3},\quad \frac{1}{4}\right)$，$A=\alpha^T\beta$，则 $A^n=$

2.设 $A=\begin{pmatrix} a_1b_1 & a_1b_2 & a_1b_3 \\ a_2b_1 & a_2b_2 & a_2b_3 \\ a_3b_1 & a_3b_2 & a_3b_3 \end{pmatrix}$，求 A^n .

3.已知$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$，则$A^n=$____.

4. 设 β 是三维列向量，β^r 是 β 的转置，若 $\beta\beta^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 4 \end{bmatrix}$，$\beta^T\beta=$（ ）。

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

5. 设 A,B 为 n 阶方阵, 满足 $A^2=A, B^2=B, (A-B)^2=A+B$ 证明: $AB=BA=0$

6. 设 A,B 为 n 阶方阵，满足 $A^2=B^2=E$, 证明：$(AB)^2=E \Leftrightarrow AB=BA$

二: 可逆矩阵

1. 设$A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $B=P^{-1}AP$，其中P为3阶可逆矩阵，则$B^{2004}-2A^2=$_____.

2.设矩阵 A 满足 $A^3=0$，则（　　）。

A. $(E-A)$ 可逆，$(E+A)$ 不可逆。　　B. $(E-A)$ 可逆，$(E+A)$ 可逆。

C. $(E-A)$ 不可逆，$(E+A)$ 不可逆。　D. $(E-A)$ 不可逆，$(E+A)$ 可逆。

3.设 A, B, C, E 都是 n 阶阵,满足 $ABC=E$.则

A. $BCA=E$　　B. $ACB=E$　　C. $BAC=E$　　D. $CBA=E$

4.　已知 $A,B,A+B$ 都可逆，求 $\left(A^{-1}+B^{-1}\right)^{-1}$

5.　3 阶矩阵 A 满足 $A^2-A-2E=0$，其中 E 是 3 阶单位矩阵．若 A 的第 1 行是 $(-1\quad 0\quad 0)$，则 $\left(A+2E\right)^{-1}$ 的第 1 行是(　　).

A．(1 0 0)*　　B．(-1 0 0)　C．(-1 0 -1)　　D．(1 0 1)

5.求逆矩阵：$\begin{pmatrix} 1 & b & b^2 & \cdots & b^{n-1} \\ 0 & 1 & b & \cdots & b^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$

三:初等变换,初等矩阵,矩阵分块,矩阵方程

1.　3 阶矩阵 A 的三个行向量元素之和都为 3，并且，$\alpha_1=(-1,2,-1)^T$ 和 $\alpha_2=(0,-1,1)^T$ 都是 AX=0 的解，求 A

2.设 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix} a_{14} & a_{13} & a_{12} & a_{11} \\ a_{24} & a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{34} & a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{44} & a_{43} & a_{42} & a_{41} \end{pmatrix}$，

$$E_1=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{pmatrix},\quad E_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&1&0\\0&1&0&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}$$，若 A 可逆，则 $B^{-1}=$

(A) $A^{-1}E_1E_2$；(B) $E_1A^{-1}E_2$；(C) $E_1E_2A^{-1}$；(D) $E_2A^{-1}E_1$.

3.设 A 是 3 阶方阵，将 A 的第 1 列与第二列交换得 B,再把 B 的第 2 列加到第 3 列得 C，则满足 AQ=C 的可逆矩阵 Q 为

(A) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&1&1\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

4.设 A 为 3 阶矩阵，将 A 的第 2 行加到第 1 行得 B，再将 B 的第 1 列的 -1 倍加到第 2 列得 C，记 $P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则

（A）$C=P^{-1}AP.$　　　　（B）$C=PAP^{-1}.$

（C）$C=P^{T}AP.$　　　　（D）$C=PAP^{T}.$

四:矩阵的秩

1.设 $A=\begin{pmatrix}1&2&2&3\\2&4&t&6\\3&6&6&9\end{pmatrix}$，$t$ 为何值时，$r(A)=2$.

2.已知 $A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&-2&-3\\2&t&6\end{pmatrix}$，$B$ 是 3 阶非零矩阵，且满足 $AB=0$，则

(A) $t=4$ 时，B 的秩必为 1 .　　　　(B) $t=4$ 时，B 的秩必为 2 .

(C) $t\neq 4$ 时，B 的秩必为 1 .　　　　(D) $t\neq 4$ 时，B 的秩必为 2 .

3. AB　=0, A,B 是两个非零矩阵,则

(A) A 的列向量组线性相关.B 的行向量组线性相关.
(B) A 的列向量组线性相关.B 的列向量组线性相关.
(C) A 的行向量组线性相关.B 的行向量组线性相关.
(D) A 的行向量组线性相关.B 的列向量组线性相关.

4．设 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\3&4&-1\\2&4&5\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}-1&2&3\\2&-4&-6\\-3&6&9\end{pmatrix}$, 则 $r(AB-B)=$（　）。 (C)

A.3　　B.. 2　　C.1　　D. 0

四 向量组

1. 下列向量组中线性相关性的向量组是（ ）

A. $\alpha_1=(1\quad 0\quad 0)^T, \alpha_2=(0\quad 1\quad 2)^T, \alpha_3=(0\quad 3\quad 4)^T$.

B. $\beta_1=(1\quad 0\quad 0\quad a)^T, \beta_2=(0\quad 1\quad 2\quad b)^T, \beta_3=(0\quad 3\quad 4\quad 0)^T$.

C. $\beta_1=(1\quad 0\quad 0\quad a)^T\ \beta_2=(0\quad 1\quad 2\quad b)^T\ \beta_3=(0\quad 3\quad 4\quad 0)^T\ \beta_4=(4\quad 1\quad -1\quad 0)^T$

D. $(1\quad 0\quad 1)^T$, $(1\quad 0\quad 2)^T$, $(3\quad 1\quad 2)^T$, $(2\quad 1\quad 1)^T$ （D）

2. 设 α_1,α_2，α_3 是 3 维向量，令 $\beta_1=\alpha_1+2\alpha_2+3\alpha_3$，$\beta_2=-\alpha_1+\alpha_2$，$\beta_3=5\alpha_1+2\alpha_2+7\alpha_3$，则

(A) β_1,β_2,β_3 必线性无关.　(B) β_1,β_2,β_3 必线性相关.

(C) 仅当 α_1,α_2 线性无关时，β_1,β_2,β_3 线性无关.

(D) 仅当 α_1,α_2 线性相关时，β_1,β_2,β_3 线性相关.

3.设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 均为 n 维列向量，A 是 $m\times n$ 矩阵，下列选项正确的是

（A）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关

（B）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性相关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关

（C）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性相关

（D）若 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性无关，则 $A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$ 线性无关

4. 若向量组 α,β,γ 线性无关, 而向量组 $\alpha+2\beta, 2\beta+k\gamma, 3\gamma+\alpha$ 线性相关, 则 $k=$（　）.

A. 3　　B. 2　　C. -2　　D. -3

5. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关，下列向量组无关的是（　）

A. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$　　B. $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

C. $\alpha_1+2\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$　D. $\alpha_1-\alpha_2,\alpha_2-\alpha_3,\alpha_3-\alpha_1$

6. 已知向量组α,β,γ线性无关，则$k\neq 1$是向量组$\alpha+k\beta,\beta+k\gamma,\alpha-\gamma$线性无关的（　）.

A. 充分必要条件　　B. 充分条件，但非必要条件

C. 必要条件，但非充分条件　　D. 既非充分条件也非必要条件

7. 设向量$\alpha_1=(1,2,0)^T$，$\alpha_2=(2,3,1)^T$，$\alpha_3=(0,1,-1)^T$，$\beta=(3,5,k)^T$．若β可由$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示，则$k=$（C　）.

A. -2　B. -1　C. 1　D. 2

8. 设任意两个n维向量组$\alpha_1,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\cdots,\beta_m$.

若存在两组不全为零的数$\lambda_1,\cdots,\lambda_m$和$k_1,\cdots,k_m$，使

$(\lambda_1+k_1)\alpha_1+\cdots+(\lambda_m+k_m)\alpha_m+(\lambda_1-k_1)\beta_1+\cdots(\lambda_m-k_m)\beta_m=0$，则

(A) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\cdots,\beta_m$都线性相关

(B) $\alpha_1,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\cdots,\beta_m$都线性无关

(C) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$，线性无关

(D) $\alpha_1+\beta_1,\cdots,\alpha_m+\beta_m,\alpha_1-\beta_1,\cdots,\alpha_m-\beta_m$，线性相关

9. 设向量组$S=\{\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\}$线性无关，下列向量组中与$S$等价的有（　）个.

①$\alpha_1-\alpha_3,\alpha_2-\alpha_3$　②$\alpha_1,\alpha_1+\alpha_2,\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3$

③$\alpha_1-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_1,3\alpha_3$　④$\alpha_1-\alpha_3,\alpha_1+\alpha_3,2\alpha_2,3\alpha_3$

A. 1　B. 2　C. 3　D. 4

10. 设向量组$\alpha_1=\{1,1,-1,0\}^T,\alpha_2=\{0,1,1,1\}^T,\alpha_3=\{2,3,-1,1\}^T,\alpha_4=\{2,2,-2,0\}^T$，向量组的一个极大线性无关组是（　）.

A. α_1　B. α_1，α_4

C. α_1，α_2　D. α_1，α_2，α_3

11. 若向量组$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\0\\1\\1\end{pmatrix}$，$\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\-1\\t\\2\end{pmatrix}$，$\alpha_3=\begin{pmatrix}0\\2\\-2\\-4\end{pmatrix}$，$\alpha_4=\begin{pmatrix}2\\1\\3t-2\\0\end{pmatrix}$的秩为$2$，则$t=$（　）.

A．1　　　B．0　　　C．-1　　　D．-2

12. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 是一个 n 维向量组，且 $\alpha=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4$，$\beta_i=\alpha-\alpha_i\ (i=1,2,3,4)$，则（　）.

A．$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)=r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

B．$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)>r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

C．$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)<r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$

D．不能确定$r(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$与$r(\beta_1,\beta_2,\beta_3,\beta_4)$的关系

13. 设n维向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\ (s<n)$线性无关, 则$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性无关的充分必要条件是

(A) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$可由$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$线性表出.

(B) $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$可由$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性表出.

(C) $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$与$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s$等价.

(D) 矩阵$A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\right)$与矩阵$B=\left(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s\right)$等价.

五、方程组习题

1．当$a=$（　）时，方程组$\begin{cases}x_1+ax_2+x_3=0\\x_1+x_2+2x_3=0\\x_1+x_2+3x_3=0\end{cases}$有非零解.

A．1　　　B．0　　　C．6　　　D．-6

2. A为$m\times n$的非零矩阵，方程组$Ax=0$只有零解的充分必要条件是（　）.

A．A的列向量组线性无关　　　B．A的列向量组线性相关

C．A的行向量组线性无关　　　D．A的行向量组线性相关

3. 若线性方程组$\begin{bmatrix}1&1&a\\1&-1&2\\-1&a&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$有无穷多解，则$a=$（C）.

A．1 或 4　　　B．1 或-4　　　C．-1 或 4　　　D．-1 或-4

4. 设$\xi_1=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}$，$\xi_2=\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$是齐次线性方程组$AX=0$的一个基础解系，则系数矩阵可能是（　）.

A. $\begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\4 & -2 & -2\end{pmatrix}$　B. $\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\0 & 1 & 1\end{pmatrix}$　C. $\begin{pmatrix}-1 & 0 & 2\\0 & 1 & -1\\4 & -2 & -2\end{pmatrix}$　D. 以上都不正确

5. 已知α_1，α_2，α_3，是齐次方程组$Ax=0$的基础解系，那么基础解系还可以是（）.

$(A)k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+k_3\alpha_3$;　$(B)\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$;

$(C)\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_2-\alpha_3$;　$(C)\alpha_1$，$\alpha_1-\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3-\alpha_2$.

6. 设$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & \alpha\\0 & 1 & -1\\1 & \alpha^2 & -1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}-1 & -1 & \alpha\end{pmatrix}^T$，则当$\alpha=$（ D ）时方程组$AX=b$无解.

A. -2　B. -1　C. 1　D. 2

7. 设β_1，β_2是线性方程组$Ax=b$的两个不同的解，α_1，α_2是方程组导出组$Ax=0$的基础解系，则方程组$Ax=b$的通解是（　）.

A. $\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$　B. $\frac{1}{2}(\beta_1-\beta_2)+k(\alpha_1+\alpha_2)$

C. $\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)+k_1\alpha_1+k_2(\beta_1-\beta_2)$　D. $\frac{1}{2}(\beta_1+\beta_2)+k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$

其中k,k_1,k_2是任意常数.

答：D.

8. 设A是5×4矩阵，b是4维列向量，$r(A)=3$，X_1,X_2,X_3是方程组$AX=b$的三个解向量，且满足$X_1+X_2=(1,2,-1,0)^T, X_1+X_3=(0,1,2,-3)^T$，则方程组$AX=b$的通解为（　）.（其中$k_1,k_2$为任意常数）

A. $k_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$　　B. $k_1\begin{pmatrix}1\\1\\-3\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\1\\-\frac{1}{2}\\0\end{pmatrix}$　　C. $k_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}0\\1\\2\\-3\end{pmatrix}$　D. 以上结果均不正确

答：B.

9. 已知 $A=(a_{ij})$ 为3阶矩阵，$A^TA=E$（A^T 是 A 的转置矩阵，E 是单位矩阵）. 若 $a_{11}=-1$，$b=(1,0,0)^T$，则方程组 $AX=b$ 的解 $X=$（　　）.

A. $(-1,1,0)^T$　　B. $(-1,0,1)^T$　　C. $(-1,-1,0)^T$　　D. $(-1,0,0)^T$

10. λ 为（　）时，$\begin{cases}\lambda x_1+x_2+x_3=\lambda-3\\x_1+\lambda x_2+x_3=-2\\x_1+x_2+\lambda x_3=-2\end{cases}$ 方程组有无穷多解.

A. -2　　B. 1　　C. 2　　D. 3　　(B)

11. $A\in M_{mn}$, $AX=0$ 是 $AX=b$ 对应的齐次方程组.则

A. 若 $AX=0$ 只有零解,则 $AX=b$ 有唯一解.
B. 若 $AX=0$有非零解,则 $AX=b$ 有无穷多解.
C. 若 $AX=b$ 有无穷多解,则 $AX=0$ 有非零解.
D. 若 $AX=b$ 无解,则 $AX=0$ 只有零解.

12.设线性方程组$Ax=b$有n个未知量，m个方程，且$r(A)=r$，则此方程组（）.

(A) $r=m$时，有解；　　(B) $r=n$时，有惟一解；

(C) $m=n$时，有惟一解；　　(D) $r<n$时，有无穷多解.

13. 设 $A=\begin{pmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{pmatrix}$,且可逆，则方程组$\begin{cases}a_1x_1+a_2x_2=a_3\\b_1x_1+b_2x_2=b_3\\c_1x_1+c_2x_2=c_3\end{cases}$

A.有唯一解.　B.有无穷多解.　C.无解　D.不能确定　（C）