微积分 B(1)第三次习题课

参考解答

教学目的：本次习题课的主要目的是了解Stolz（施笃兹）定理，掌握无穷大量与函数极限的概念、性质，掌握利用等价无穷小代换求极限的方法.

Stolz 定理提供了一种求数列极限的方法，这与后面学习的求函数极限的洛必达法则有相似之处，应注意使用的条件；无穷大量与函数极限部分，学习时应注重基本定义、基本方法；等价无穷小代换时应注意什么条件下(尤其是加减时)可以使用无穷小代换，代换的依据.

建议：重点讨论的题目应包括：第二大题、第三大题的 1,3—8,13（本题反应的现象是什么？）. 带★的题目不在课堂讨论.

一、施笃兹（Stolz）定理

1.★Stolz 定理： 已知数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$. 设$\{b_n\}$单调增加，且$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，若$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{b_n}=A$.（不要求证明. 施笃兹定理也称作是离散的洛必达法则，是数列极限求值的一种重要方法）

证法 1：令$c_n=\dfrac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}-A$，则

$$\lim_{n\to\infty}c_n=0,$$

即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n>N$时，有$|c_n|<\varepsilon$.

由于

$$a_n=a_{n-1}+(c_n+A)(b_n-b_{n-1})$$

$$=a_{n-2}+(c_{n-1}+A)(b_{n-1}-b_{n-2})+(c_n+A)(b_n-b_{n-1})$$

$$=\cdots$$

$$=a_N+(c_{N+1}+A)(b_{N+1}-b_N)+\cdots+(c_{n-1}+A)(b_{n-1}-b_{n-2})+(c_n+A)(b_n-b_{n-1})$$

$$=a_N+c_{N+1}(b_{N+1}-b_N)+\cdots+c_{n-1}(b_{n-1}-b_{n-2})+c_n(b_n-b_{n-1})+A(b_n-b_N),$$

所以

$$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|\leqslant\left|\frac{a_N-Ab_N}{b_n}\right|+\frac{|c_{N+1}||b_{N+1}-b_N|+\cdots+|c_{n-1}||b_{n-1}-b_{n-2}|+|c_n||b_n-b_{n-1}|}{|b_n|}$$

$$<\left|\frac{a_N-Ab_N}{b_n}\right|+\varepsilon\left|\frac{b_n-b_N}{b_n}\right| \text{（因为}\{b_n\}\text{单增）}$$

$$\leqslant\left|\frac{a_N-Ab_N}{b_n}\right|+\varepsilon\ .$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_N-Ab_N}{b_n}=0$，故对于上述$\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，当$n>N_1$时，有$\left|\frac{a_N-Ab_N}{b_n}\right|<\varepsilon$.

取$N_2=\max\{N,N_1\}$，则当$n>N_2$时，有$\left|\frac{a_n}{b_n}-A\right|<2\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

证法 2： $\forall\varepsilon>0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=A$，所以 $\exists N>0$ 当$n>N$时，有

$$\left|\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}-A\right|<\varepsilon\ ,$$

即

$$A-\varepsilon<\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}<A+\varepsilon\ .$$

因为数列$\{b_n\}$单调递增，即$b_{n+1}-b_n>0$，所以当$n>N$时，有

$$(A-\varepsilon)(b_{N+2}-b_{N+1})<a_{N+2}-a_{N+1}<(A+\varepsilon)(b_{N+2}-b_{N+1})\ ,$$

$$(A-\varepsilon)(b_{N+3}-b_{N+2})<a_{N+3}-a_{N+2}<(A+\varepsilon)(b_{N+3}-b_{N+2})\ ,$$

$$\vdots$$

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{n-1})<a_n-a_{n-1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{n-1})\ .$$

以上各式相加，得

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{N+1})<a_n-a_{N+1}<(A+\varepsilon)(b_n-b_{N+1})\ ,$$

即

$$(A-\varepsilon)(b_n-b_{N+1})+a_{N+1}<a_n<(A+\varepsilon)(b_n-b_{N+1})+a_{N+1}\ .$$

同除以b_n（不妨设$b_n>0$），则

$$(A-\varepsilon)(1-\frac{b_{N+1}}{b_n})+\frac{a_{N+1}}{b_n}<\frac{a_n}{b_n}<(A+\varepsilon)(1-\frac{b_{N+1}}{b_n})+\frac{a_{N+1}}{b_n}\ ,$$

即

$$(A-\varepsilon)(-\frac{b_{N+1}}{b_n})+\frac{a_{N+1}}{b_n}-\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-A<(A+\varepsilon)(-\frac{b_{N+1}}{b_n})+\frac{a_{N+1}}{b_n}+\varepsilon .$$

因为 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=+\infty$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_{N+1}}{b_n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{N+1}}{b_n}=0$.

所以，对于上述$\varepsilon>0$，$\exists N_1>0$，当$n>N_1$时 ，有

$$-\varepsilon<(A-\varepsilon)(-\frac{b_{N+1}}{b_n})<\varepsilon ;\ -\varepsilon<\frac{a_{N+1}}{b_n}<\varepsilon .$$

取$M=\max\{N,N_1\}$，则当$n>M$时，有

$$-3\varepsilon<\frac{a_n}{b_n}-A<3\varepsilon .$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=A$.

2．利用 Stolz 定理求下列极限

（1）已知$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$.

解：令$u_n=a_1+2a_2+\cdots+na_n$，$v_n=n^2$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)a_{n+1}}{(n+1)^2-n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n+1}a_{n+1}=\frac{a}{2},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}.$$

（2）求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}}$，其中$m$为自然数.

解：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^m+2^m+\cdots+n^m}{n^{m+1}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^m}{(n+1)^{m+1}-n^{m+1}}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^m}{(m+1)n^m+\frac{(m+1)m}{2}n^{m-1}+\cdots+1}=\frac{1}{m+1}.$$

（3）求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\ln(1+\frac{1}{n})}\cdot\frac{n}{n+1}=1$.

（4）求$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}{\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}+1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}}=2$.

（5）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}$.

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n+1}}{(n+1)\sqrt{n+1}-n\sqrt{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}}{(n+1)^3-n^3}[(n+1)\sqrt{n+1}+n\sqrt{n}]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2+n\sqrt{n^2+n}}{3n^2+3n+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(1+\frac{1}{n})^2+\sqrt{1+\frac{1}{n}}}{3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}=\frac{2}{3}.$$

（6）求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\dfrac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$.

解：令 $a_n=\left(\dfrac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\dfrac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}$，则

$$\ln a_n=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\ln\frac{2}{2^2-1}+2\ln\frac{2^2}{2^3-1}+\cdots+2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}\right),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\ln a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{2}{2^2-1}+2\ln\frac{2^2}{2^3-1}+\cdots+2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n-2}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}}{2^{n-1}-2^{n-2}}=\lim_{n\to\infty}\ln\frac{2^{n-1}}{2^n-1}=\ln\frac{1}{2}.$$

从而 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2}{2^2-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-1}}}\left(\dfrac{2^2}{2^3-1}\right)^{\frac{1}{2^{n-2}}}\cdots\left(\dfrac{2^{n-1}}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{2}}=\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\dfrac{1}{2}$.

二、无穷大量

1．已知 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，求证：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty$.

证明：由于 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，所以 $\forall M>0$，$\exists N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，$a_n>4M$.

此时

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}+\cdots+a_n}{n}>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{4(n-N_1)}{n}M\ .$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n-N_1}{n}=1$，所以 $\exists N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}>-M \text{ 且 } \frac{n-N_1}{n}>\frac{1}{2}.$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}>\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{N_1}}{n}+\frac{(n-N_1)}{n}4M>-M+\frac{1}{2}\times 4M=M\ .$$

即 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty$.

2．已知数列 $\{a_n\}$ 单调，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

证明：不妨设 $\{a_n\}$ 单调递增.

若 $\{a_n\}$ 无上界，那么 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=+\infty\ ,$$

这与条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=A$ 矛盾．所以 $\{a_n\}$ 有上界.

又因为 $\{a_n\}$ 单调递增，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在，此时有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=\lim_{n\to\infty}a_n\ .$$

综上可知，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$.

Remark：若数列 $\{a_n\}$ 没有单调性，该题中的结论是否还成立？如 $\{(-1)^n\}$.

3．证明：数列 $\{a_n\}$ 没有收敛子列的充分必要条件为 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$.

证明：$\Leftarrow$) 反证法.

假设 $\{a_n\}$ 有收敛子列，记为 $\{a_{n_k}\}$．因为 $\{a_{n_k}\}$ 有界，所以 $\exists M_0>0$，对 $\forall k\in\mathbf{N}$，都有 $|a_{n_k}|\leqslant M_0$.

因此对于 M_0，任给 $N\in\mathbf{N}$，都存在子列中的项 $n_k>N$，满足 $|a_{n_k}|\leqslant M$.

所以 $\{a_n\}$ 不是无穷大量．这与条件 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$ 矛盾.

Remark：也可以直接证明：任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 都是无穷大量.

$\Rightarrow$) 反证法.

设$\{a_n\}$不是无穷大量，则$\exists M_0>0$，对$\forall N\in\mathbf{N}$，都$\exists n_N>N$，使得$|a_{n_N}|\leqslant M_0$.

对于$N=1$，存在$n_1>1$，使得$|a_{n_1}|\leqslant M_0$；

对于$N=n_1$，存在$n_2>n_1$，使得$|a_{n_2}|\leqslant M_0$；

$$\cdots\cdots\cdots$$

对于$N=n_k$，存在$n_{k+1}>n_k$，使得$|a_{n_{k+1}}|\leqslant M_0$.

由此得到$\{a_n\}$的一个有界子列$\{a_{n_k}\}$.

因为$\{a_{n_k}\}$有界，所以有收敛子列，此收敛子列也是$\{a_n\}$的收敛子列．这与条件“数列$\{a_n\}$没有收敛子列”矛盾.

三、函数极限

1．用函数极限的定义证明

（1）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}=2$.

证明： 不妨设$|x|>3$，则

$$|x^2-3|>|x|,$$

所以$\left|\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}-2\right|=\left|\dfrac{7}{x^2-3}\right|<\dfrac{7}{|x|}$.

$\forall\varepsilon>0$，欲使$\left|\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}-2\right|<\varepsilon$，只要使$\dfrac{7}{|x|}<\varepsilon$，即$|x|>\dfrac{7}{\varepsilon}$.

取$X=\max\left\{3,\dfrac{7}{\varepsilon}\right\}$，则当$|x|>X$时，有

$$\left|\frac{2x^2+1}{x^2-3}-2\right|<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2+1}{x^2-3}=2$.

（2）$\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1})=0$.

证明：利用正弦函数的和差化积公式及三角函数的性质，得

$$\left|\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right|=\left|2\cos\frac{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}{2}\sin\frac{\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}}{2}\right|$$

$$<\sqrt{x^2+2}-\sqrt{x^2+1}=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}+\sqrt{x^2+1}}<\frac{1}{|x|}.$$

$\forall\varepsilon>0$，取 $X=\dfrac{1}{\varepsilon}$，则当 $|x|>X$ 时，有

$$\left|\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right|<\frac{1}{|x|}<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\sqrt{x^2+2}-\sin\sqrt{x^2+1}\right)=0$.

2．设 $a>1$，$k>0$．利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$，求证：$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$.

证明：不妨设 $x>1$，则有

$$0\leqslant\frac{x^k}{a^x}\leqslant\frac{([x]+1)^k}{a^{[x]}}=a\frac{([x]+1)^k}{a^{[x]+1}}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$ 及夹逼定理知 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^k}{a^x}=0$.

3．求解下列各题

（1）已知极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=0$，求 a 与 b 的值.

解：已知

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-ax-b)=\lim_{x\to+\infty}\frac{[\sqrt{x^2-x+1}-ax-b][\sqrt{x^2-x+1}+ax+b]}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{(1-a^2)x^2-(1+2ab)x+(1-b^2)}{\sqrt{x^2-x+1}+ax+b}=0$$

成立，从而

$$1-a^2=0，\ 1+2ab=0.$$

解得 $a=\pm1$，$b=\mp\dfrac{1}{2}$.

由于

当 $a=-1$，$b=\dfrac{1}{2}$ 时，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}+x-\dfrac{1}{2})$ 不存在；

当 $a=1$，$b=-\dfrac{1}{2}$ 时，

$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x+1}-x+\frac{1}{2})=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{3}{4}}{\sqrt{x^2-x+1}+x-\frac{1}{2}}=0,$$

于是$a=1,b=-\frac{1}{2}$.

（2）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}$ （$q\neq 0$）.

解：当$p>0$，$q>0$时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p}=\frac{q}{p};$$

当$q<0$，$p\leqslant 0$时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\frac{|p|-p}{|q|-q}=\frac{p}{q};$$

当$q>0$，$p<0$时，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\infty$；

当$q>0$，$p=0$时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2}(\sqrt{x^2+q^2}+q)}{x^2}=\infty;$$

当$q<0$，$p>0$时，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+p^2}-p}{\sqrt{x^2+q^2}-q}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{x^2+q^2}+q}{\sqrt{x^2+p^2}+p}=\frac{|q|+q}{2p}=0.$$

（3）讨论极限$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)$是否存在，其中$[x]$表示不超过$x$的最大整数.

解：在点$x_0=1$的左右两侧附近，当$x>1$时有

$$0<\frac{1}{x}<1,$$

所以$\left[\frac{1}{x}\right]=0$. 于是有$\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{1}{x}=1$.

当$x<1$（限定$x>0$）时，有$1\leqslant\left[\frac{1}{x}\right]\leqslant\frac{1}{x}$，故由夹逼定理得$\lim\limits_{x\to 1^-}\left[\frac{1}{x}\right]=1$.

从而有$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)=0$.

因为 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)\neq\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)$，所以$\lim\limits_{x\to 1}\left(\frac{1}{x}-\left[\frac{1}{x}\right]\right)$不存在.

（4）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right)$；

解:

因为 $$\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+1}{\mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}+\mathrm{e}^{\frac{3}{x}}}+\frac{\sin x}{x}\right)=0+1=1，$$

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=\lim_{x\to 0^+}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}-\frac{\sin x}{x}\right)=2-1=1，$$

所以 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right)=1.$$

4．求下列极限

（1）求 $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}$.

解： $\lim\limits_{x\to 0}(1+\sin x)^{\frac{1}{2x}}=\lim\limits_{x\to 0}[(1+\sin x)^{\frac{1}{\sin x}}]^{\frac{\sin x}{2x}}=\sqrt{\mathrm{e}}$.

（2）求 $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x})^{x}$.

解法 1：

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{x}&=\lim_{x\to\infty}[(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x})^{2}]^{\frac{x}{2}}\\&=\lim_{x\to\infty}(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{x}{2}}\\&=\lim_{x\to\infty}[(1+\sin\frac{2}{x})^{\frac{1}{\sin\frac{2}{x}}}]^{\frac{\sin\frac{2}{x}}{\frac{2}{x}}}=\mathrm{e}.\end{aligned}$$

解法 2：

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1\right)\right]^{\frac{1}{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}}\right\}^{\frac{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}}.$$

因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}-1}{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}[\dfrac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}-\dfrac{\frac{1}{2x^2}}{\frac{1}{x}}]=1$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sin\frac{1}{x}+\cos\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}\ .$$

（3） 求 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$.

解： $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}\overset{t=x^2}{=}\lim\limits_{t\to+\infty}\left(\dfrac{t-1}{t+1}\right)^{t}=\lim\limits_{t\to+\infty}\left[\left(1-\dfrac{2}{t+1}\right)^{\frac{t+1}{-2}}\right]^{\frac{-2t}{t+1}}=\mathrm{e}^{-2}$.

（4）求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}$.

解：

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x^2-x+1)}{\ln(x^{10}+x+1)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln[x^2(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})]}{\ln[x^{10}(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})]}=\lim_{x\to\infty}\frac{2\ln|x|+\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{10\ln|x|+\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2+\dfrac{\ln(1-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})}{\ln|x|}}{10+\dfrac{\ln(1+\frac{1}{x^9}+\frac{1}{x^{10}})}{\ln|x|}}=\frac{1}{5}\ .$$

5．求下列极限

（1） $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}\ (a,b,c>0)$；

（2） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^{x}\ (a>0,b>0)$；

（3） $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a_1^{\frac{1}{x}}+a_2^{\frac{1}{x}}+\cdots+a_n^{\frac{1}{x}}}{n}\right)^{x}\ (a_k>0)$；

（4） $\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}$ ；

（5） $\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)$ ；

（6） $\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}})$；

（7） $\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{[4x]}{1+x}$． $[\cdot]$是取整函数.

解：（1）设 $A=\max\{a,b,c\}$.

由 $\dfrac{A}{3^{\frac{1}{x}}}\leqslant(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}\leqslant A$， 及 $\lim\limits_{x\to+\infty}3^{\frac{1}{x}}=1$， 可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\dfrac{a^x+b^x+c^x}{3})^{\frac{1}{x}}=A$.

（2）$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x=\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\left(1+\dfrac{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}-2}{2}\right)^{\frac{2}{a^{\frac{1}{x}}+b^{\frac{1}{x}}-2}}\right]^{\frac{1}{2}\cdot\frac{a^{\frac{1}{x}}-1+b^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)}=\sqrt{ab}$.

（3）方法与（2）类似，结果为$\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$.

（4）$\lim\limits_{x\to0^+}\sqrt[x]{\cos\sqrt{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}(1+\cos\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to0^+}\left[(1+\cos\sqrt{x}-1)^{\frac{1}{\cos\sqrt{x}-1}}\right]^{\frac{\cos\sqrt{x}-1}{x}}=\mathrm{e}^{\frac{-1}{2}}$.

（5）$\lim\limits_{x\to+\infty}x(\dfrac{\pi}{2}-\arctan x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x\operatorname{arccot}x=\lim\limits_{x\to+\infty}x\arctan\dfrac{1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}x\cdot\dfrac{1}{x}=1$.

（6）$\lim\limits_{x\to+\infty}x^2(3^{\frac{1}{x}}-3^{\frac{1}{x+1}})=\lim\limits_{x\to+\infty}x^2\cdot3^{\frac{1}{x+1}}(3^{\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}}-1)$

$$=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot3^{\frac{1}{x+1}}(\mathrm{e}^{\frac{1}{x(x+1)}\ln3}-1)=\lim_{x\to+\infty}x^2\cdot3^{\frac{1}{x+1}}\cdot\frac{1}{x(x+1)}\ln3=\ln3 .$$

（7）$\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{[4x]}{1+x}=\lim\limits_{x\to1^-}\dfrac{3}{1+x}=\dfrac{3}{2}$.

6．已知$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{1-\cos x}-1}{\tan(x^k\pi)}=a\neq0$，求$k$与$a$的值.

解：因为$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{e}^{1-\cos x}-1}{\tan(x^k\pi)}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^k\pi}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{2}x^2}{x^k\pi}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1}{2x^{k-2}\pi}=a\neq0$，

所以$k=2$， $a=\dfrac{1}{2\pi}$.

7．求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\dfrac{x}{2^n}$

解：当$x=0$时，原式$=1$．当$x\neq0$时，有

$$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^n}\cdot\frac{\sin\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdot\cdots\cdot\cos\frac{x}{2^{n-1}}\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\cdots=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}} .$$

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\dfrac{\sin x}{x}$.

综上可知，$\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}=\begin{cases}1, & x=0,\\ \dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0.\end{cases}$

Remark：注意到对于每一个 x, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x}{2^n}=0$，所以当 n 充分大时，有 $|\dfrac{x}{2^n}|<\pi$. 因此当 $x\neq 0$ 时，$\sin\dfrac{x}{2^n}\neq 0$，表达式同乘同除 $\sin\dfrac{x}{2^n}$ 没有问题．函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\cos\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{4}\cdots\cdots\cos\dfrac{x}{2^n}$ 在任一点连续．

8．证明：若 $f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，且 $|f(x)|\leqslant|\sin x|$，则

$$\left|a_1+2a_2+\cdots+na_n\right|\leqslant 1.$$

证明：（重要极限，极限保序性）

当 $\sin x\neq 0$ 时，有 $\dfrac{|f(x)|}{|\sin x|}\leqslant 1$，即

$$\left|\frac{a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx}{\sin x}\right|\leqslant 1.$$

在不等式两端令 $x\to 0$，得

$$\left|a_1+2a_2+...+na_n\right|\leqslant 1.$$

9．★求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}(\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4})\sqrt{x^2+1}$.

解：先化简 $\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4}$.

由于 $\tan(\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4})=\dfrac{\frac{x+1}{x}-1}{1+\frac{x+1}{x}}=\dfrac{1}{2x+1}$，并且

$$\arctan\frac{x+1}{x}-\frac{\pi}{4}\in(0,\frac{\pi}{4}),$$

所以 $\arctan\dfrac{x+1}{x}-\dfrac{\pi}{4}=\arctan\dfrac{1}{2x+1}$.

从而

$$\lim_{x\to+\infty}(\arctan\frac{x+1}{x}-\frac{\pi}{4})\sqrt{x^2+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\arctan\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{2x+1}}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}=\frac{1}{2}.$$

10．★证明：在 $x \to +\infty$ 时，$\dfrac{e^x}{x}$ 是无穷大量.

证：对任意正数 x，存在自然数 $n(x)$，使得 $n(x) \leqslant x \leqslant n(x)+1$． 从而

$$e^x \geqslant 2^{n(x)} = 1 + C_{n(x)}^1 + C_{n(x)}^2 + \ldots + C_{n(x)}^{n(x)}$$

$$\geqslant \frac{1}{2}n(x)(n(x)-1) \geqslant \frac{1}{2}(x-1)(x-2)，\quad \forall x \geqslant 2 .$$

因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(x-1)(x-2)}{x} = +\infty$，所以 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x} = +\infty$.

11．★证明：在 $x \to +\infty$ 时，$\dfrac{x}{\ln x}$ 是无穷大量，并求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}}$

证：由于 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{\ln x} \overset{y=\ln x}{=} \lim\limits_{y\to+\infty}\dfrac{e^y}{y} = +\infty$，所以在 $x \to +\infty$ 时，$\dfrac{x}{\ln x}$ 是无穷大量.

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to+\infty} e^{\frac{\ln x}{x}} = e^0 = 1 .$$

12．★设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是周期函数.

（1）若 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x), \lim\limits_{x\to\infty} g(x)$ 存在且值相等，则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 有什么关系？ 证明你的结论.

（2）若 $\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-g(x)] = 0$，且 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的周期之比 $\tau = \dfrac{T_f}{T_g} \in \mathbf{Q}$，则函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 又有什么关系？

（1）答：$f(x) \equiv g(x) \equiv C$.

证明：设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} g(x) = C$，并设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的周期分别是 a 与 b，则 $\forall x$，

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x+na) = C，$$

$$g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x) = \lim_{n\to\infty} g(x+nb) = C .$$

所以 $f(x) \equiv g(x) \equiv C$.

（2）答：$f(x) \equiv g(x)$，但不一定为常数.

证明：由于周期之比 τ 是有理数，易知 $f(x)-g(x)$ 仍然为周期函数.

因此由（1）知 $f(x)-g(x) \equiv 0$. 即 $f(x) \equiv g(x)$.

13．设 $f_1(x) = \begin{cases} x, & 1 \leqslant x \leqslant 2, \\ \dfrac{1}{x}, & x > 2, \end{cases}$ $\quad f_n(x) = \begin{cases} 1, & 1 \leqslant x \leqslant n, \\ x^n, & n < x \leqslant n+1, \\ \dfrac{1}{x}, & x > n+1 \end{cases}$ $(n = 2,3,\cdots)$.

（1）对任意固定的n，求$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)$；

（2）求$F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$在$[1,+\infty)$上的表达式；

（3）求$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$.

解：（1）对任意固定的n，$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$.

（2）（求$F(x)$在$[1,+\infty)$上的表达式，也就是求$F(x)$在任意点的值）

对任意的$x\in[1,+\infty)$，

当$x\in[1,2]$时，$f_1(x)=x, f_2(x)=1, f_3(x)=1,\cdots$，这时

$$F(x)=\lim_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)=x;$$

当$x\in(2,+\infty)$时，总存在正整数n_0使得$n_0+1<x\leqslant n_0+2$，这时

$$f_1(x)=\frac{1}{x}, f_2(x)=\frac{1}{x},\cdots, f_{n_0}(x)=\frac{1}{x},$$

$$f_{n_0+1}(x)=x^{n_0+1},$$

$$f_{n_0+2}(x)=f_{n_0+3}(x)=\cdots=1,$$

所以 $F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)=x$.

综上可知，$F(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_1(x)f_2(x)\cdots f_n(x)$在$[1,+\infty)$上的表达式为$F(x)=x$.

（3）$\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=+\infty$.