微积分 B(1)第一次习题课题目

（课内主要讨论前两道大题、带*的题目例外，其他题目作为课外练习）

一、集合的界与确界

1．证明：（1）函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在定义域内有下界，无上界；

（2）对 $\delta>0$，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ 在 $(-\infty,-\delta]\cup[\delta,+\infty)$ 上有界.

（思考：一个函数在某个区间上无界如何叙述？）

2．证明：$\sup\{\arctan x\}=\dfrac{\pi}{2}$．

3．设 A, B 均是非空有界实数集，定义 $A+B=\{x+y\mid x\in A, y\in B\}$．证明：

（1）$\inf(A+B)=\inf A+\inf B$；（2）$\sup(A+B)=\sup A+\sup B$．

4．设 A, B 均是由非负实数构成的有界数集，定义：$AB=\{xy\mid x\in A, y\in B\}$．证明：

（1）$\inf AB=\inf A\cdot\inf B$；（2）$\sup AB=\sup A\cdot\sup B$．

二、数列极限的定义

1．用极限定义证明

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$．

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$．

（3）*已知 $a>1$，$k>0$．证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^k}{a^n}=0$．

2．下列说法中，哪些与 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$ 等价．如果等价，请证明，如果不等价，请举出反例．

（1）对于无限多个正数 $\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*$，只要 $n\geqslant N$，就有 $|a_n-A|<\varepsilon$；

（2）$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*$，只要 $n\geqslant N$，就有 $|a_n-A|<\varepsilon$；

（3）$\forall\varepsilon\in(0,1),\ \exists N\in\mathbb{N}^*$，只要 $n>N$，就有 $|a_n-A|<\varepsilon$；

（4）$k>0,\ \forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*$，只要 $n>N$，就有 $|a_n-A|<k\varepsilon$；

（5）$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*$，只要 $n>N$，就有 $|a_n-A|<\varepsilon^{\frac{2}{3}}$；

（6）$\forall k\in\mathbb{N}^*,\ \exists N_k\in\mathbb{N}^*$，只要 $n>N_k$，就有 $|a_n-A|<\dfrac{1}{2^k}$；

（7）$\exists N\in\mathbb{N}^*$，只要 $n>N$，就有 $|a_n-A|<\dfrac{1}{n}$；

（8）$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*$，只要$n>N$，就有$|a_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{n}$；

（9）$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*$，只要$n>N$，就有$|a_n-A|<\sqrt{n}\varepsilon$.

3．用$\varepsilon-N$语言叙述："$\{a_n\}$不收敛于A". 并讨论下列哪些说法与"$\{a_n\}$不收敛于A"等价：

（1）$\exists\varepsilon_0>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*$，只要$n>N$，就有$|a_n-A|\geqslant\varepsilon_0$；

（2）$\forall\varepsilon>0,\ \exists N\in\mathbb{N}^*$，只要$n\geqslant N$，就有$|a_n-A|\geqslant\varepsilon$；

（3）$\exists\varepsilon_0>0$，使得$\{a_n\}$中除有限项外，都满足$|a_n-A|\geqslant\varepsilon_0$；

（4）$\exists\varepsilon_0>0$，使得$\{a_n\}$中有无穷多项满足$|a_n-A|\geqslant\varepsilon_0$.

4．证明：若单调数列具有收敛的子列，则此单调数列收敛.

三、函数及其性质

1.（1）设 $f(x)=\mathrm{e}^x$，且 $f(g(x))=1-x$，求函数 $g(x)$ 的定义域.

（2）设函数 $f(x)$ 的定义域为 $[0,1]$，求函数 $g(x)=\sqrt{1-x}\cdot f(\sin\pi x)+\sqrt{1+x}\cdot f(1+\cos\pi x)$ 的定义域.

2.（1）设 $f(x)=\dfrac{1}{2-x}(x\neq 2,且x\neq 3)$，求 $f(f(x))$， $f(f(f(x)))$.

（2）设 $f(x)=x+|x|$， $g(x)=\begin{cases}x, & x<0,\\ x^2, & x\geqslant 0,\end{cases}$ 求 $f(g(x))$， $g(f(x))$.

3.（1）已知函数 $f(x)$ 定义域为 $\mathbf{R}$. 如果对于任意 x 都有 $f(a+x)=f(b-x)$，那么 $f(x)$ 的图象有什么性质？

（2）已知函数 $f(x)$，请说明函数 $f(a+x)$ 的图象与函数 $f(b-x)$ 的图象关于哪条直线对称.

4．已知函数 $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$，且 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=a$ 与 $x=b$ 对称 $(a<b)$，证明：$f(x)$ 是以 $2(b-a)$ 为周期的周期函数.

（思考：一个函数不是周期函数如何叙述？）

5. 已知函数 $f(x)$ 满足：对任意的实数 x,y，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$. 当 $x>0$ 时，有 $f(x)<0$，并且 $f(-1)=2$.

（1）求证 $f(x)$ 为奇函数 ；

（2）$f(x)$ 在区间 $[-3,3]$ 上是否存在最值？如果存在，求出最值，如果不存在，请说明理由；

（3）设 $b>0$，解关于 x 的不等式：$\dfrac{1}{2}f(bx^2)-f(x)>\dfrac{1}{2}f(b^2x)-f(b)$.

6．设 $f(x)$ 在 $\left[a,b\right]$ 上是下凸函数，证明：$\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b} f(x)=\max\{f(a),f(b)\}$．

7.（1） 函数 $f(x)=\sqrt{x-1}+2\ (x\geqslant 1)$ 的反函数是____________．

（2）若点 $(4,3)$ 既在函数 $y=1+\sqrt{ax+b}$ 的图象上，又在它的反函数的图象上，求函数的解析式．

（3）若 $f(x-1)=x^2-2x+3\ (x\leqslant 1)$，则 $f^{-1}(4)=$____________．

（4）已知函数 $y=f(x)$ 存在反函数，那么与函数 $y=f(x)$ 的反函数图象关于原点对称的图象所对应的函数表达式为____________．

（5）函数 $f(x)=\dfrac{x-3}{2x-3}\ (x\neq\dfrac{3}{2})$，若 $y=f(x+1)$ 的图象是 C_1，它关于直线 $y=x$ 对称图象是 C_2，C_2 关于原点对称的图象为 C_3，则 C_3 对应的函数解析式是____________．

8．试写出一个从 $[0,1]$ 到 $(0,1)$ 的一一对应映射．

四、不等式

1．试证明 Cauchy 不等式：$a_i\ (i=1,2,\cdots n)$，$b_i\ (i=1,2,\cdots n)$ 为两组实数，求证：

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2),$$

并考虑取得等号的条件．

2．证明：设 $a_1,a_2,\cdots,a_n>0$，则 $\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots a_n^2}{n}}\geqslant\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$．

五、数学归纳法（第一数学归纳法、第二数学归纳法，归纳，猜想，证明）

1.（Bernoulli 不等式）证明对于任意的正整数 n，$(1+x)^n\geqslant 1+nx,\ \forall x\geqslant -1$．

2．斐波那契数列 $\{F_n\}$ 满足 $F_1=F_2=1$，$F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$，求证：

$$F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}[(\frac{1+\sqrt{5}}{2})^n-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})^n].$$