

微积分 B(1)第五次习题课题目

说明：带“★”题目不在课堂讨论，作为课后练习。

1. 设 $f(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2-1}}, & |x| < 1, \\ ax^4 - bx^2 + c, & |x| \geq 1, \end{cases}$ 试讨论 a, b, c 满足什么条件时，函数 $f(x)$ 处可导。

2. 设函数 $f(x) = \begin{cases} x^\alpha \cos \frac{1}{x}, & x > 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处右连续但右导数不存在，求 α 的取值范围。

3. 设函数 $f(x), g(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义，且对任意的 x, h 有

$$f(x+h) = f(x)g(h) + f(h)g(x)$$

成立。若 $f(0) = g'(0) = 0, g(0) = f'(0) = 1$ ，求 $f'(x)$ 。

4. 已知 $f(x) = \begin{cases} x^4 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$ 求 $f''(0)$ 。

5. 设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内有定义，且对任意的 x ，极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} n[f(x + \frac{1}{n}) - f(x)]$ (n 是整数)

都存在。这样的函数是否可导，为什么？

6. 导数运算

(1) 已知 $f(x) = |\ln |x||$ ，求 $f'(x)$ 。

(2) 已知 $y = y(x)$ 由方程 $\sin y + e^x - xy^2 = 0$ 确定，求 y' 。

(3) 设函数 $y = y(x)$ 由方程 $x^{y^2} + y^2 \ln x + 4 = 0$ 确定，求 y' 。

(4) 已知函数 $f(x)$ 满足 $f'(x) = \arctan \sqrt{x}$ 。设 $y = f(\frac{x+1}{x-1})$ ，求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=2}$ 。

(5) 设函数 $g(y)$ 是 $f(x)$ 的反函数，若 $f'(x), f''(x)$ 存在且 $f'(x) \neq 0$ ，求 $g''(y)$ 。

7. ★ 设 n 为正整数，证明 $(x^{n-1}e^x)^{(n)} = \frac{(-1)^n}{x^{n+1}}e^x$ 。（注意高阶导数的概念）

8. ★ 设 n 为正整数， $f_n(x) = x^n \ln x$ ，求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f_n^{(n)}(\frac{1}{n})}{n!}$ 。

9. 求下列极限

(1) 已知函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导， $f(0)=0, f'(0)=2$ ，且当 $x \neq 0$ 时 $f(x) \neq 0$ ，求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 - 2f(x))^{\frac{1}{\sin x}}.$$

(2) 已知 $f'(0)$ 存在， $f(0)=0$ ，求极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1 - \cos x)}{\tan(5x^2)}$ 。

(3) 设曲线 $y = f(x)$ 在原点处与曲线 $y = \sin x$ 相切, 求极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^{\frac{1}{2}} \sqrt{f\left(\frac{2}{x}\right)}$.

(4) 已知 $f'(a)$ 存在, $f(a) \neq 0$, 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right)^n$.

10. 设 $f(0) = 0$. 证明: 函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处可导的充要条件是: 存在在 $x = 0$ 处连续的函数 $g(x)$, 使得 $f(x) = xg(x)$.

11. 设函数 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内有定义, 且在 $x_0 \in (a, b)$ 处可导. 数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 满足条件:

$$a < x_n < x_0 < y_n < b, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = x_0.$$

试求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(y_n) - f(x_n)}{y_n - x_n}$.

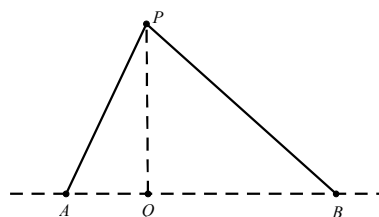
12. 设函数 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续.

(1) 如果极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(-x)}{x}$ 存在, 那么 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是否可导, 为什么?

(2) ★如果极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x}$ 存在, 那么 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处是否可导, 为什么?

13. 设抛物线 $y = x^2$ 上有三个点处的法线交于一点. 证明这三个点的横坐标之和等于零.

14. 如图, 长度为 39 米的绳子通过一个定滑轮 P 将 A, B 两辆小车连接在一起. 滑轮到地面的垂足是 Q , $|PQ| = 12$



(米). 在某个时刻 t_0 , 小车 A 在距离 Q 点 5 米处, 以 2 米/秒的速度远离 Q 点, 求此时小车 B 的速度.