习题课 10

2019 年 12 月 16 日

练习 10.1 试证：

1. 如果 $A=[a_{ij}]$ 是 n 阶对称正定矩阵，那么 $\det(A)\le\det(A_{n-1})a_{nn}$，其中 $\det(A_{n-1})$ 是 A 的 $n-1$ 阶顺序主子式（也是 a_{nn} 关于 A 的余子式）。
2. 如果 $A=[a_{ij}]$ 是 n 阶对称正定矩阵，那么 $\det(A)\le a_{11}\cdots a_{nn}$。
3. 如果 $T=\begin{bmatrix}\boldsymbol{t}_1 & \cdots & \boldsymbol{t}_n\end{bmatrix}$ 是 n 阶实可逆矩阵，那么 $|\det(T)|\le\|\boldsymbol{t}_1\|\cdots\|\boldsymbol{t}_n\|$。
4. 上面结论称为 Hadamard 不等式。你还能找到另外的方法证明它吗？

证. 1. 考虑 A 的 LDL^T 分解：

$$A=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{21}^T\\ A_{21} & a_{nn}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}L_{11} & \\ L_{21} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}D_{11} & \\ & d_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}L_{11} & \\ L_{21} & 1\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}L_{11}D_{11}L_{11}^T & L_{11}D_{11}L_{21}\\ L_{21}D_{11}L_{11}^T & L_{21}D_{11}L_{21}^T+d_{nn}\end{bmatrix}.$$

因此，$A_{n-1}=A_{11}=L_{11}D_{11}L_{11}^T, a_{nn}=d_{nn}+L_{21}D_{11}L_{21}^T$。由 A 正定知，A_{11} 正定，D_{11} 正定，$L_{21}D_{11}L_{21}^T\ge 0$。从而 $a_{nn}\ge d_{nn}$。我们知道 $\det(A_{n-1})=\det(A_{11})=\det(D_{11})$，于是 $\det(A)=\det(L)\det(D)\det(L^T)=\det(D)=\det(D_{11})d_{nn}\le\det(A_{n-1})a_{nn}$。

2. 对阶数 n 归纳，立得。
3. 由 T 可逆，T^TT 对称正定，因此 $\det(T)^2=\det(T^TT)=(T^TT)_{11}\cdots(T^TT)_{nn}=\|\boldsymbol{t}_1\|^2\cdots\|\boldsymbol{t}_n\|^2$。
4. 对 T 做 QR 分解 $T=QR$，其中 $R=\begin{bmatrix}\boldsymbol{r}_1 & \cdots & \boldsymbol{r}_n\end{bmatrix}$。则 $|\det(T)|=\det(R)=r_{11}\cdots r_{nn}$。注意 $\boldsymbol{t}_i=Q\boldsymbol{r}_i$，因此 $\|\boldsymbol{t}_i\|=\|\boldsymbol{r}_i\|=\sqrt{r_{1i}^2+\cdots+r_{ii}^2}\ge r_{ii}$。由此即得结论。 □

练习 10.2 假设 A 是一个正定矩阵，且 $B=\begin{bmatrix}2A & 2A\\ 2A & 5A\end{bmatrix}$。

1. 证明 B 也是正定的。
2. 假设 $A=L_AD_AU_A$ 是 A 的 LDU 分解。求 B 的 LDU 分解 $B=L_BD_BU_B$。
3. 假设已知 A 的所有特征值和对应的所有特征向量，求 B 的所有特征值和对应的所有特征向量。

证. 考虑 u^TBu。假设 $u=\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}$，这里 x 和 y 都有相同的坐标数。那么 $u^TBu=2x^TAx+4x^TAy+5y^TAy$。我们配方得到 $2(x+y)^TA(x+y)+y^TAy$。根据 A 的正定性，这个式子必须是正的，除非 $x+y=y=0$。换言之，我们有 $u^TBu\ge 0$，而等号成立当且仅当 $u=0$。因此 B 正定。

假设 $A=L_AD_AU_A$。那么 $L_B=\begin{bmatrix}L_A & 0\\ L_A & L_A\end{bmatrix}$，$D_B=\begin{bmatrix}2D_A & 0\\ 0 & 2D_A\end{bmatrix}$，$U_B=\begin{bmatrix}U_A & U_A\\ 0 & U_A\end{bmatrix}$。

最后，如果 $Av=\lambda v$，那么 $\begin{bmatrix}2v\\ -v\end{bmatrix}$ 是 B 对于特征值 λ 的特征向量，而 $\begin{bmatrix}v\\ 2v\end{bmatrix}$ 则是 B 对于特征值 6λ 的特征向量。换言之，如果我们有分解 $A=QDQ^{-1}$，那么对应的我们有分解 $B=Q_BD_BQ_B^{-1}$，这里 $Q_B=\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix}2Q & Q\\ -Q & 2Q\end{bmatrix}$，$D_B=\begin{bmatrix}D & 0\\ 0 & 6D\end{bmatrix}$。 □

练习 10.3 假设 $S\in\mathbb{M}_n$ 是一个正定矩阵，特征值 (按重数记）是 $\lambda_1\ge\lambda_2\ge\cdots\ge\lambda_n$. 我们记 $Q_S(\mathbf{x}):=\mathbf{x}^TS\mathbf{x}$.

(i) 求矩阵 $\lambda_1\mathbf{I}_n-S$ 的特征值。

(ii) 证明：$\lambda_1\mathbf{I}_n-S$ 是半正定的。

(iii) 证明：$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\}}\frac{Q_S(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}=\lambda_1$, 这里 $\|\mathbf{x}\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2$. 何时等号成立？

(iv) 假设 $\lambda_1>\lambda_2$, 证明：$\max_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{0\},\mathbf{x}\perp\mathbf{q}_1}\frac{Q_S(\mathbf{x})}{\|\mathbf{x}\|^2}=\lambda_2$, 这里 $\mathbf{q}_1$ 是属于 λ_1 的特征向量。

证. (i) 显然，$\lambda_1\mathbf{I}_n-S$ 仍是实对称矩阵，并且如果 $\lambda\in\mathbb{R}$ 和向量 $\mathbf{x}$ 满足 $S\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}$, 则 $(\lambda_1\mathbf{I}_n-S)\mathbf{x}=(\lambda_1-\lambda)\mathbf{x}$. 因此 $\lambda_1\mathbf{I}_n-S$ 的特征值是 $\lambda_1-\lambda_i$, $i=1,\cdots,n$.

(ii) 根据 (i), $\lambda_1\mathbf{I}_n-S$ 的所有特征值都是非负的，因此该矩阵是半正定的。

(iii) 根据 (ii), 对所有的 $\mathbf{x}=(x_1,\cdots,x_n)^T\in\mathbb{R}^n$, 都有

$$\mathbf{x}^T(\lambda_1\mathbf{I}_n-S)\mathbf{x}\ge 0,\qquad \text{也就是}\qquad Q_S(\mathbf{x})\le\lambda_1\|\mathbf{x}\|^2.$$

因此，对所有的非零向量，我们有 $Q_S(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|^2\le\lambda_1$, 两边在 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ 上取极大值，得到

$$\sup_{\mathbf{x}\in\mathbb{R}R^n\setminus\{\mathbf{0}\}}Q_S(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|^2\le\lambda_1.$$

另一方面，对于 $\mathbf{x}=\mathbf{q}_1$, 其中 $\mathbf{q}_1$ 是属于 λ_1 的特征向量，有 $Q_S(\mathbf{x})/\|\mathbf{x}\|^2=\lambda_1$.

(iv) 根据 Spectral Theorem, 存在正交矩阵 C, 它的列向量 $\mathbf{q}_1,\cdots,\mathbf{q}_n$ 是 S 的分别属于 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 的特征向量，并且 $C^TSC=\mathrm{diag}(\lambda_1,\cdots,\lambda_n)$, 记该对角阵为 Λ. 对任意的 $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n$, 我们有

$$Q_S(\mathbf{x})=\mathbf{x}^T(C\Lambda C^T)\mathbf{x}=\mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y},$$

其中 $\mathbf{y}=C^T\mathbf{x}$. 如果 $\mathbf{x}\perp\mathbf{q}_1$, 则 $\mathbf{y}$ 的第一个分量 $y_1=\mathbf{q}_1^T\mathbf{x}=0$. 因此

$$Q_S(\mathbf{x})=\mathbf{y}^T\Lambda\mathbf{y}=\lambda_2y_2^2+\lambda_3y_3^2+\cdots+\lambda_ny_n^2\le\lambda_2(y_2^2+\cdots+y_n^2)=\lambda_2\|\mathbf{y}\|^2=\lambda_2\|\mathbf{x}\|^2.$$

第二个不等式是由于 $\lambda_2\ge\lambda_j$, $j\le 2$, 而最后一个等式是由于 C^T 为正交矩阵。重复 (iii) 的证明的最后一部分，(iv) 得证。 □

练习 10.4 设 A 为实方阵, 证明 A^TA 与 AA^T 相似.

证. $A=U\Sigma V^T$. $A^TA=V\Sigma^2V^T$, $AA^T=U\Sigma^2U^T$. 于是 $V^TA^TAV=\Sigma^2=U^TAA^TU$, 因此 $A^TA=(UV^T)^{-1}(AA^T)(UV^T)$. □

练习 10.5 设 $A=\begin{bmatrix}1&0\\1&1\\0&1\end{bmatrix}$, 求 A 的奇异值分解

证. $\triangle=A^TA$ 的特征值为 $\lambda_1=3,\lambda_2=1,\lambda_3=0$。

解方程 $(\lambda_1 I-\triangle)x=0$ 得单位向量 $v_1=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$.

解方程 $(\lambda_2 I-\triangle)x=0$ 得单位向量 $v_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$.

解方程 $(\lambda_3 I-\triangle)x=0$ 得单位向量 $v_3=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$.

令 $u_1=\frac{Av_1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$,$u_2=Av_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ 则

$$A=U\varSigma V=P=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{3}&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}&-\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{2}{\sqrt{6}}&0&-\frac{1}{\sqrt{3}}\\\frac{1}{\sqrt{6}}&\frac{1}{\sqrt{2}}&\frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}^T.$$

□

练习 10.6 求下列矩阵的奇异值分解 $A=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}$.

证. 我们首先计算

$$AA^T=\begin{bmatrix}2&0\\0&2\end{bmatrix},\quad A^TA=\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&0&1\\1&0&1&0\\0&1&0&1\end{bmatrix}.$$

易看出，AA^T 的特征值为 $\lambda_1=\lambda_2=2$ (从而 A^TA 的特征值为 2 和 0, 代数重数均为 2), 因此 A 的奇异值为 $\sigma_1=\sigma_2=\sqrt{2}$。

接着求 AA^T 的一组标准正交的特征向量 $u_1=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$, $u_2=\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}$. (这里实际上可以取 $\mathbb{R}^2$ 的任意一组标准正交基，而该种取法最为简单) 。我们令

$$U=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

接下来我们求解 V。利用公式可求得

$$v_1=\frac{1}{\sigma_1}A^Tu_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\0\end{bmatrix}$$

及

$$v_2 = \frac{1}{\sigma_2} A^T u_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

此外，我们还需要 v_3 和 v_4(无法再使用同样的公式)。然而，我们知道 v_1, v_2, v_3, v_4 应该为 $\mathbb{R}^4$ 的一组标准正交基, 从而可以取

$$v_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

于是我们得到

$$V = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

易验证，$A = U\Sigma V^T$, 其中 $\Sigma = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

注意: 我们也可以通过先将 $A^T A$ 对角化来得到 V, 但在计算特征向量时需要格外仔细。 □

练习 10.7 设 2×3 矩阵 A 有如下奇异值分解 $U\Sigma V^T$, 其中 U, V 为正交矩阵:

$$A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1^T \\ v_2^T \\ v_3^T \end{pmatrix}.$$

(a) 求 A 的零空间 $N(A)$ 的一组标准正交基。

(b) 写出方程 $Ax = u_1$ 的通解。

(c) 求方程 $Ax = u_1$ 的长度最短的解, 并证明。

证. (a) v_2, v_3 是 $N(A)$ 的一组标准正交基。

(b) $Ax = u_1$ 的通解是 $\frac{1}{4}v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$ （c_2, c_3 是任意数）。

(c) $Ax = u_1$ 的长度最短的解是 $\frac{1}{4}v_1$, 因 $v_2 \perp v_1$, $v_3 \perp v_1$. □

练习 10.8 设 $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$. 如果 A 的 SVD 为 $A = U \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} V^T$，定义其广义逆 $A^+ = V \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & \sigma_r^{-1} & \\ & & & \mathbf{0} \end{bmatrix} U^T$。求证:

1. $(A^+)^+ = A$

2. A^+A 是到 $C(A^T)$ 的投影矩阵

3. AA^+ 是到 $C(A)$ 的投影矩阵

4. $r(A) = r(A^+) = r(A^+A) = r(AA^+)$

证. 设 $A = U\Sigma V^T$ 为奇异值分解, 其中 $\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \\ & & \end{bmatrix} \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \sigma_1 \geq \cdots \geq \sigma_r > 0$ 且 U, V 为正交矩阵

1. 由 $A^+ = V\Sigma^+U^T$, 其中
$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} \sigma_1^{-1} & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r^{-1} \\ & & \end{bmatrix} \in M_{n\times m}(\mathbb{R})$$
故 $(A^+)^+ = U\Sigma V^T = A$.

2. $A^+A = (V\Sigma^+U^T)(U\Sigma V^T) = V \begin{bmatrix} I_r & \\ & 0 \end{bmatrix} V^T = \sum_{i=1}^r v_i v_i^T$ 其中 $v_i, i = 1, 2, \cdots, r$ 为 V 的前 r 列, 是 $C(A^T)$ 的一组单位正交基, 故 A^+A 为到 $C(A^T)$ 的投影矩阵.

3. $AA^+ = (U\Sigma V^T)(V\Sigma^+U^T) = U \begin{bmatrix} I_r & \\ & 0 \end{bmatrix} U^T = \sum_{i=1}^r u_i u_i^T$ 其中 $u_i, i = 1, 2, \cdots, r$ 为 U 的前 r 列, 是 $C(A)$ 的一组单位正交基, 故 AA^+ 为到 $C(A)$ 的投影矩阵.

4. 由 $A^+ = V\Sigma^+U^T$, 故 $r(A^+) = r(\Sigma^+) = r = r(A)$. 由前两问可得 $r(A) = r(A^+A) = r(AA^+)$.

□

练习 10.9 证明置换矩阵 $P = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ 是绕正向为 $(1,1,1)^T$ 的旋转轴 ℓ 做顺时针旋转 $2\pi/3$ 的变换。

证. P 的特征多项式为 $f(\lambda) = \lambda^3 + 1$，所以其有特征根 $1, \omega, \omega^2$，这里 $\omega = e^{2\pi i/3}$。直接计算知 $Pu = u, Pz = \omega z$, 这里
$$u = (1,1,1)/\sqrt{3}, \quad z = (1, \omega^2, \omega).$$
设 $z = \hat{v} + i\hat{w}$，其中 $\hat{v}, \hat{w}$ 分别为 z 的实部和虚部。记 $\theta = 2\pi/3$. 由 $Pz = \omega z$，分开实部与虚部得
$$Pv_1 = \cos\theta\hat{v} - \sin\theta\hat{w}; \quad Pv_2 = \sin\theta\hat{v} + \cos\theta\hat{w}.$$
令 $v = \hat{v}/\|\hat{v}\|, w = \hat{w}/\|\hat{w}\|$，则
$$v = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}; \quad w = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

易见，$\{u,v,w\}$ 构成 $\mathbb{R}^3$ 的标准正交基，且成右手系。而 $\{v,w\}$ 构成以 u 为法向的二维子空间 V 的标准正交基。注意到

$$P[v,w]=[v,w]\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}=[v,w]R_{-\theta}.$$

结合 $Pu=u$，以及 $u\perp V$，我们得到要证的结论。 □

练习 10.10 设 A 是一个 3 阶实矩阵，其作用在任一向量 $v=\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}$ 的结果 Av 是将 v 绕着轴 $x=y=z$ 旋转 180 度。求矩阵 A.

证. v 到 $x=y=z$ 的投影是 $\frac{(a,b,c)\cdot(1,1,1)}{(1,1,1)\cdot(1,1,1)}(1,1,1)=\frac{a+b+c}{3}(1,1,1)$, 记为 v_1, 则

$$Av=v_1-(v-v_1)=2v_1-v=\frac{2a+2b+2c}{3}(1,1,1)-(a,b,c),$$

所以 $A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$. □

练习 10.11 设 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ 是一个映射, 满足: 对任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n$ 有 $\langle f(\alpha),f(\beta)\rangle=\langle\alpha,\beta\rangle$. [1] 证明: f 是一个线性映射.

证. 我们只需要证: 对任意的 $\alpha,\beta\in\mathbb{R}^n, a\in\mathbb{R}$, 我们有

$$f(a\alpha)=af(\alpha);\quad f(\alpha+\beta)=f(\alpha)+f(\beta).$$

首先

$$\begin{aligned}\langle f(a\alpha)-af(\alpha),f(a\alpha)-af(\alpha)\rangle &=\langle f(a\alpha),f(a\alpha)\rangle-2\langle f(a\alpha),af(\alpha)\rangle+\langle af(\alpha),af(\alpha)\rangle\\ &=\langle a\alpha,a\alpha\rangle-2a\langle a\alpha,\alpha\rangle+a^2\langle\alpha,\alpha\rangle\\ &=0\end{aligned}$$

其次

$$\begin{aligned}&\langle f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta),f(\alpha+\beta)-f(\alpha)-f(\beta)\rangle\\ &=\langle f(\alpha+\beta),f(\alpha+\beta)\rangle-2\langle f(\alpha+\beta),f(\alpha)\rangle-2\langle f(\alpha+\beta),f(\beta)\rangle+\langle f(\alpha),(f\alpha)\rangle+\langle f(\beta),f(\beta)\rangle+2\langle f(\alpha),f(\beta)\rangle\\ &=\langle\alpha+\beta,\alpha+\beta\rangle-2\langle\alpha+\beta,\alpha\rangle-2\langle\alpha+\beta,\beta\rangle+\langle\alpha,\alpha\rangle+\langle\beta,\beta\rangle+2\langle\alpha,\beta\rangle\\ &=0\end{aligned}$$

□

练习 10.12 设 V 为 n 维线性空间，设 $\{v_1,\cdots,v_n\}$ 为 V 的一组基底。任给 $v\in V$，设

$$v=x_1v_1+\cdots+x_nv_n=[v_1,\cdots,v_n]x,$$

称 $x=[x_1,\cdots,x_n]^T$ 是 v 在该基底下的坐标。定义坐标映射 $T:V\to\mathbb{R}^n$ 为

$$T(v)=x.$$

[1] $\langle\alpha,\beta\rangle$ 表示 α,β 的内积。

(1) 证明 T 是一个线性映射，且为双射。

(2) 证明其逆 $T^{-1}:\mathbb{R}^n \to V$ 也是线性映射。

我们称 T 是 V 与 $\mathbb{R}^n$ 之间的一个线性同构。

证. (1) 设 v, w 的坐标分别为 x, y，则 $\lambda v, \mu w$ 的坐标为 $\lambda x, \mu y$。从而

$$\lambda v + \mu w = [v_1, \cdots, v_n](\lambda x) + [v_1, \cdots, v_n](\mu y) = [v_1, \cdots, v_n](\lambda x + \mu y)$$

此即 $T(\lambda v + \mu w) = \lambda T(v) + \mu T(w)$，所以 T 为线性映射。

定义 $S:\mathbb{R}^n \to V$ 如下：

$$S(x) = x_1 v_1 + \cdots x_n v_n.$$

则直接验证得，$T \circ S = Id_{\mathbb{R}^n}$，$S \circ T = Id_V$，从而 T 是双射。

(2) 由上面证明知 $T^{-1} = S$，由 (1) 类似的推理知，其为线性映射。 □

练习 10.13 在复数域 $\mathbb{C}$ 上的线性空间 $M_n(\mathbb{C})$ 内定义一个线性变换 σ 如下：

$$\sigma \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn-1} & a_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} & a_{11} \\ a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} & a_{21} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} & a_{n1} \end{bmatrix},$$

(1) 求 σ 的特征多项式.
(2) 证明 σ 可对角化，即存在 $M_n(\mathbb{C})$ 某组基, σ 在这组基下的矩阵是对角阵.

证. (1) 取 $M_n(\mathbb{C})$ 的基为 $E_{11}, E_{12}, \cdots, E_{1n}, \cdots, E_{n1}, E_{n2}, \cdots, E_{nn}$，$\sigma$ 在这组基下的矩阵为

$$A = \mathrm{diag}(\mathrm{A_1}, \mathrm{A_2}, \cdots, \mathrm{A_n}),$$

其中

$$A_1 = A_2 = \cdots = A_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}.$$

于是 σ 的特征多项式为 $f_A(x) = (x^n - 1)^n$.

(2) 由（1）知道 σ 的矩阵 A 为准对角阵，所以只要每个对角块相似于对角阵就有 A 相似于对角阵. 矩阵 A 的对角块都相同，且 A_1 的特征多项式为 $f_{A_1}(x) = x^n - 1$，显然 $f_{A_1}(x)$ 没有重根，所以 A_1 有 n 个不同的特征值，故 A_1 可以相似对角化. □

练习 10.14 设 $\dim V = n, \dim W = m$。$T: V \to W$ 是线性映射，且 $r(T) = r$。证明可以选取 V 与 W 的基底，使得在此选取下 T 的矩阵表示为

$$A = \begin{pmatrix} I_r & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix}_{m \times n}.$$

证. 由维数公式知 $\dim\ker(T) = n - r$。取 $\ker(T)$ 的一组基 $\{v_{r+1}, \cdots, v_n\}$，并将其扩充为 V 的一组基 $\{v_1, \cdots, v_n\}$。设 $w_i = T(v_i)$，$i = 1, \cdots, r$，我们来证明 $\{w_1, \cdots, w_r\}$ 线性无关。设 $t_1, \cdots, t_r \in \mathbb{R}$ 使得

$$t_1 w_1 + \cdots + t_r w_r = \vec{0}.$$

由线性性，其等价于

$$T(t_1 v_1 + \cdots + t_r v_r) = 0.$$

所以 $t_1 v_1 + \cdots + t_r v_r \in \ker(T)$。从而存在 $t_{r+1}, \cdots, t_n$ 使得

$$t_1 v_1 + \cdots + t_r v_r = t_{r+1} v_{r+1} + \cdots + t_n v_n.$$

但 $\{v_1, \cdots, v_n\}$ 是一组基，所以 $t_1 = \cdots = t_n = 0$.

现将 $\{w_1, \cdots, w_r\}$ 扩充成 W 的一组基 $\{w_1, \cdots, w_m\}$。则直接计算知，在此基底选取之下，T 的矩阵表示恰为 A。 □

练习 10.15 在 $\mathbb{R}^3$ 中，设线性变换 T 关于基 $v_1 = (-1, 1, 1)$，$v_2 = (1, 0, -1)$，$v_3 = (0, 1, 1)$ 的矩阵是 $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

(1) 求 T 关于基 $i = (1, 0, 0)$，$j = (0, 1, 0)$，$k = (0, 0, 1)$ 的矩阵；

(2) 设向量 $v = v_1 + 6v_2 - v_3$，$w = i - j + k$，求 $T(v)$ 和 $T(w)$ 关于基 v_1, v_2, v_3 的坐标。

证. 令 $V = [v_1\ v_2\ v_3]$，则 $TV = VA$。

(1) T 关于基 i, j, k 的矩阵为

$$TVV^{-1} = VAV^{-1} = VA \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

(2) 记 $v = Vc = V[1\ 6\ -1]^T$，$T(v) = TVc = VAc$，$T(w) = VAV^{-1}w$，所以他们关于基 v_1, v_2, v_3 的坐标分别是 $Ac = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ 10 \end{bmatrix}$，$AV^{-1}w = \begin{bmatrix} -1 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$.

□