第 14 周习题课参考答案

注：带 ♡ 号的习题有一定的难度、比较耗时，请量力为之.

一 设 $S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$. 求正交矩阵 Q 对角化 S.

解：(1) 求 S 的特征值.

$|\lambda I - S| = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -2 \\ 0 & \lambda+1 & 2 \\ -2 & 2 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-3)(\lambda+3) = 0,$

得到 S 的特征值为 $\lambda_1 = 0$，$\lambda_2 = 3$，$\lambda_3 = -3$.

(2) 求对应的特征向量.

对于 $\lambda_1 = 0$, 求解 $(0I - A)x = 0$. 特殊解 $\eta_1 = (-2, -2, 1)$, 单位化得到 $\xi_1 = (-\frac{2}{3}, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3})$.

对于 $\lambda_2 = 3$, 求解 $(3I - A)x = 0$. 特殊解 $\eta_2 = (-1, -\frac{1}{2}, 1)$, 单位化得到 $\xi_2 = (\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$.

对于 $\lambda_1 = -3$, 求解 $(-3I - A)x = 0$. 特殊解 $\eta_3 = (-\frac{1}{2}, 1, 1)$, 单位化得到 $\xi_3 = (-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$.

令 $Q = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$. 则 $Q^{-1}SQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

二 设 $M = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

(1) 证明 M 的特征值为纯虚数，且 $|\lambda| = 1$.

(2) 通过 M 的 Trace 确定 M 的所有特征值.

证明：(1) $M^TM=I$，M 为正交矩阵. 设 λ 为 M 的复特征值，ξ 为对应的复特征向量, 则

$\xi^T\xi=\xi^TM^TM\xi=\lambda^2\xi^T\xi$，故 $|\lambda|=1$. 又由于 $M^T=-M$，即 M 反对称，则

$$\overline{\xi}^TM\xi=\lambda\overline{\xi}^T\xi=(\overline{\xi}^TM\xi)^T=\xi^TM^T\overline{\xi}=-\xi^TM\overline{\xi}=-\xi^T\overline{M\xi}=-\xi^T\overline{\lambda\xi}^T=-\overline{\lambda}\overline{\xi}^T\xi.$$

因此 $\overline{\lambda}=-\lambda$，即 λ 为纯虚数.

(2) 由 (1)M 的特征值为纯虚数，且模为 1，故 M 的特征值只能为 i，$-i$. 又由于 $Tr(M)=0$，故 M 的 4 个特征值为 i，i，$-i$，$-i$。

三 设 $S=\begin{pmatrix} s & -4 & -4 \\ -4 & s & -4 \\ -4 & -4 & s \end{pmatrix}$. 当 s 取何值时 S 正定.

解：S 正定，当且仅当 S 的顺序主子式都大于 0.

四 设 A 是一个实对称阵满足 $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$ 和 $A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(1) A 是否可逆？解释原因.

(2) 给出满足上述性质的矩阵 A 的例子，并且 A 的特征值之和为 0.

解：(1) 因为 $A\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}+A\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, 所以 A 不可逆.

(2) 因为 $A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$($A$ 的第一列), $A\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix}$($A$ 的第二列) 且 A 是实对称阵, A 形如 $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & 4 & -6 \\ -3 & -6 & x \end{pmatrix}$. 因为特征值之和 $=1+4+x=0$, 则 $x=-5$.

五 设 S 是 $\mathbb{R}^7$ 的一个 4 维子空间，P 是 S 上的投影矩阵.

(a) 求出 P 的 7 个特征值.

(b) 求出 P 的全部特征向量.

解：(a) 根据定义, P 有两个特征子空间：S 为 $\lambda = 1$ 对应的特征子空间，$S^{\perp}$ 为 $\lambda = 0$ 对应的特征子空间，因此 P 可对角化，从而每个特征值的代数重数等于几何重数，所以，P 的 7 个特征值是 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 和 $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$.

(b) 关于 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ 的特征向量是 S 中非零向量. 关于 $\lambda_5 = \lambda_6 = \lambda_7 = 0$ 的特征向量是 $S^{\perp}$ 中的非零向量.

六 构造一个三阶实对称矩阵，使得其特征值为 $1, 1, -1$, 属于特征值 1 的线性无关的特征向量有 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$ 和 $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}^T$.

解：令 $\lambda_3 = -1$ 的一个特征向量是 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. 则应用不同特征值的特征向量的正交性，我们有

$$a + b + c = 0, 2a + 2b + c = 0.$$

解得 $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$. 令 $P_t = \begin{pmatrix} 1 & 2 & t \\ 1 & 2 & -t \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. 若 $t \neq 0$, 则 P_t 可逆且 $P_t^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{1}{2t} & -\frac{1}{2t} & 0 \end{pmatrix}$. 我们得到

$$A = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

七 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实对称矩阵, 其特征值是 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$.

(1) 证明对于任意 n 维列向量 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, 均有

$$\lambda_1 \alpha^T \alpha \le \alpha^T A \alpha \le \lambda_n \alpha^T \alpha.$$

(2) 展示 $\lambda_1 \le a_{11} \le \lambda_n$.

解答:

(1)

证明. 存在正交阵 Q,

$$Q^T A Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

对于任意 n 维列向量 $\alpha = (a_1, a_2, \cdots, a_n)^T$, 令 $\beta = Q\alpha$, 则有

$$\beta^T A \beta = \alpha^T Q^T A Q \alpha = \lambda_1 a_1^2 + \lambda_2 a_2^2 + \cdots + \lambda_n a_n^2 \le \lambda_n a_1^2 + \lambda_n a_2^2 + \cdots + \lambda_n a_n^2$$

$$\le \lambda_n \alpha^T \alpha = \lambda_n \beta^T \beta.$$

因为 Q 是可逆矩阵, β 可以取任意 n 维列向量. 同理可证不等式 $\lambda_1 \alpha^T \alpha \le \alpha^T A \alpha$. $\square$

(2)

证明. 令 $\alpha = e_1 = (1, 0, \cdots, 0)^T$. 则 $e_1^T A e_1 = a_{11}$. 由 (1), 不等式成立. $\square$

八 设 A, B 是 n 阶实对称矩阵, 其特征值分别是 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_n$ 和 $\mu_1 \le \mu_2 \le \cdots \le \mu_n$. 求证：$A + B$ 的特征值全部落在区间 $[\lambda_1 + \mu_1, \lambda_n + \mu_n]$.

证明：应用习题五，任意 $\alpha \in \mathbb{R}^n$, $\alpha^T A \alpha \le \lambda_n \alpha^T \alpha, \alpha^T B \alpha \le \mu_n \alpha^T \alpha$. 因为 $A + B$ 也是实对称阵，特征值均是实数. 假设 $\eta \in \mathbb{R}$ 是一个特征值, 相应的特征向量是 β, 则 $\beta^T (A + B) \beta = \eta \beta^t \beta$. 另一方面,

$$\beta^T (A + B) \beta = \beta^T A \beta + \beta^T B \beta \le \lambda_n \beta^T \beta + \mu_n \beta^T \beta = (\lambda_n + \mu_n) \beta^T \beta.$$

因为 $\beta^T\beta > 0$, 我们得到 $\eta \le \lambda_n + \mu_n$. 同理可证明 $\eta \ge \lambda_1 + \mu_1$.

九 [♡] 若 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶实方阵，且 A 的秩小于 n，则 A 的伴随矩阵的特征值包含至少 $n-1$ 个 0, 若存在非零特征值，则它是 $\sum_{i=1}^n C_{ii}$.

证明：设 C 是 A 的代数余子式矩阵，C^T 是 A 的伴随矩阵. 因为 $AC^T = 0$ 且 A 不可逆, 所以 C^T 的秩等于 1(如果 A 的秩等于 $n-1$) 或 0(如果 A 的秩小于 $n-1$, 则 A 的任意 $n-1$ 阶子矩阵均不可逆). 假设 $C^T \ne 0$, 即 C^T 的秩等于 1, 则存在 $u, v \ne 0 \in \mathbb{R}^n$, 使得 $C^T = uv^T$. 我们有

$$\det(\lambda I_n - C^T) = \lambda^{n-1}(\lambda - v^T u).$$

如果 $v^T u = 0$, 则 C^T 只有特征值 0(n 重根). 如果 $v^T u \ne 0$, 则 C^T 的全部特征值是 $\lambda_1 = \cdots = \lambda_{n-1} = 0, \lambda_n = v^T u$. 进一步，

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = tr(C^T) = C_{11} + C_{22} + \cdots + C_{nn}.$$

其中 C_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式.

十 [♡] 设 A 是一个 n 阶反对称矩阵, 即 $A^T = -A$ 且 A 是实矩阵. 证明：

(1) $I_n + A$ 可逆且 $(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$ 是正交阵.

(2) 假设 $n = 3$，则存在正交阵 Q 和向量 $b \in \mathbb{R}$，使得 $Q^T A Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b \\ 0 & -b & 0 \end{pmatrix}$.

证明：(1) 设 $x \in \mathbb{R}^n$ 满足 $(I_n + A)x = 0$. 我们得到 $Ax = -x$. 因此 $x^T Ax = -x^T x$. 但是

$$x^T Ax = (x^T Ax)^T = x^T A^T x = -x^T Ax,$$

即 $x^T Ax = 0$. 所以 $x^T x = 0$, 从而 $(I_n + A)x = 0$ 只有零解, 即 $I_n + A$ 可逆. 令 $Q = (I_n - A)(I_n + A)^{-1}$：

$$Q^T Q = (I_n + A^T)^{-1}(I_n - A^T)(I_n - A)(I_n + A)^{-1} = (I_n - A)^{-1}(I_n + A)(I_n - A)(I_n + A)^{-1}$$

$$= (I_n - A)^{-1}(I_n - A)(I_n + A)(I_n + A)^{-1} = I_n.$$

(2) 因为 $|A| = |A^T| = |-A| = (-1)^3|A|$, $|A| = 0$, 所以 A 不可逆. 存在 $\alpha_1 \in \mathbb{R}^3$ 满足 $A\alpha = 0$ 和 $\|\alpha\| = 1$. 向量 α_1 可以扩充成 $\mathbb{R}^3$ 的一组标准正交基 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. 由定义, $Q = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ 是一个正交阵满足

$$AQ = (0, A\alpha_2, A\alpha_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_4 \\ 0 & c_2 & c_5 \\ 0 & c_3 & c_6 \end{pmatrix}$$

其中 $A\alpha_2 = c_1\alpha_1 + c_2\alpha_2 + c_3\alpha_3, A\alpha_3 = c_4\alpha_1 + c_5\alpha_2 + c_6\alpha_3$. 这等价于说 $Q^TAQ = \begin{pmatrix} 0 & c_1 & c_4 \\ 0 & c_2 & c_5 \\ 0 & c_3 & c_6 \end{pmatrix}$. 因为 Q^TAQ 是一个反对称阵, $c_1 = c_4 = c_2 = c_6 = 0, c_3 = -c_5$.