习题课6

November 14, 2019

1. 下列命题是否正确。
   (a) 若$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^n = I$, $n \in \mathbb{N}$, 则$(ad-bc)^n = 1$.
   (b) 行列式值为〇当且仅当某两行（或两列）的元素对应成比例或者有〇行（或〇列）。
   (c) 若$\det A = 0$，则A有一个列向量是其余列向量的线性组合。
   (d) 对方阵进行消元，不改变其行列式值。
   (e) $\det(cA_n) = c\det A_n$。
   (f) $\det(-A) = -\det A$。
   (g) 若A可逆且$\det(A+AB) = 0$，则$\det(I+B) = 0$。
   (h) 若$\det A_n = 1$，则$A_n = I_n$。
   (i) 若同阶方阵A和B满足$\det A = \det B \neq 0$，则$A^{-1} = B^{-1}$。
   (j) 若$A = XBX^{-1}$，则$\det A = \det B$。
   (k) 若$A = \mathrm{diag}(2, a, b) = X^{-1}\mathrm{diag}(1, 1, c)X$，则$\det A = 2$。
   (l) 若$A_1, A_2, \ldots, A_{2019}$是2019个2018阶方阵，则关于$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_{2019})$的方程
   $$\det\left(x_1A_1 + x_2A_2 + \cdots + x_{2019}A_{2019}\right) = 0$$
   只有零解。

2. 设$A, B \in M_n(\mathbb{R})$且$AB = BA$. 令
$$C = \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}$$
证明
$$r(A) + r(B) \geq r(AB) + r(C)$$
($r(A)$表示矩阵A的秩)

3. 设$A \in M_{m\times n}(\mathbb{R}), \mathbf{b} \in \mathbb{R}$. 考虑两个线性方程组:
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (1)$$
$$\begin{bmatrix} A^T \\ \mathbf{b}^T \end{bmatrix}\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (2)$$
求证: (1)有解当且仅当(2)无解.

4. 设

$$B=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{bmatrix};C=\begin{bmatrix}1&&&\\&2&&\\&&3&\\&&&0\end{bmatrix};D=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&-1&1\\0&0&1&1\end{bmatrix}$$

分别给出关于矩阵$A=BCD$的四个基本子空间的一组基

5. 计算行列式

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-2&n-1&n\\2&3&4&\cdots&n-1&n&n\\3&4&5&\cdots&n&n&n\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots&\vdots\\n-1&n&n&n&n&n&n\\n&n&n&n&n&n&n\end{vmatrix}$$

6. 计算行列式

$$\det A=\begin{vmatrix}1&2&3&\cdots&n-1&n\\n&1&2&\cdots&n-2&n-1\\n-1&n&1&\cdots&n-3&n-2\\\vdots&\vdots&\vdots&&\vdots&\vdots\\2&3&4&\cdots&n&1\end{vmatrix}$$

7. 设n阶方阵A的第i行第j列的元素为$\min(i,j)$, 求$\det A$.

8. 设n阶方阵A的第i行第j列的元素为$\max(i,j)$, 求$\det A$.