习题课 1 与简要解答

2019 年 10 月 21 日

1, 设 $\triangle ABC$ 是平面中的三角形，三边 BC, AC, AB 上的垂线分别记为 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3. 用点积证明 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 交于一点 H.

提示：将 $\triangle ABC$ 放在直角坐标系中，P 为平面上的任意一点，则点 $P \in \ell_1$ 当且仅当 P, A, B, C 四点的坐标满足什么关系？类似的 $P \in \ell_2$ 或 $P \in \ell_3$ 当且仅当 P, A, B, C 四点的坐标满足什么关系？

证明. 固定平面中任意一点 P. 用 P, A, B, C 表示这些点的坐标。那么 $P \in \ell_1$ 当且仅当 $PA \perp BC$, 用点积表示就是

$$(P - A) \cdot (B - C) = 0,$$

用点积的性质展开就是

$$P \cdot B - P \cdot C \quad = \quad A \cdot B - A \cdot C. \tag{1}$$

同理 $P \in \ell_2$ 和 $P \in \ell_3$ 等价于

$$P \cdot C - P \cdot A \quad = \quad B \cdot C - B \cdot A, \tag{2}$$

$$P \cdot A - P \cdot B \quad = \quad C \cdot A - C \cdot B. \tag{3}$$

由点积的交换性可以看出 (1) 式 +(2) 式 $\Rightarrow$ (3) 式，即 ℓ_1 与 ℓ_2 的交点在 ℓ_3 上。故 ℓ_1, ℓ_2, ℓ_3 交于一点。 □

2, 平面中至多可以找到 3 个向量使得它们的两两内积为负数。$\mathbb{R}^n$ 中至多可以找到多少个向量使得它们的两两内积为负数呢?

解答：$\mathbb{R}^n$ 中至多可以找到 $n+1$ 个向量使得它们的两两内积小于零。设 $\alpha_1, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}^n$ 满足 $\alpha_i \cdot \alpha_j < 0$, $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant m$. 记向量 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}$ 到以 α_m 为法向量的超平面

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \alpha_m \cdot x = 0\}$$

的垂直投影为 $\alpha_1', \ldots, \alpha_{m-1}'$. 由 Strang 习题 PS1.2 12 知

$$\alpha_i = \alpha_i' + \frac{\alpha_i \cdot \alpha_m}{\alpha_m \cdot \alpha_m} \alpha_m$$

$(i = 1, \ldots, m-1)$. 因为 $\alpha_i' \cdot \alpha_m = 0$, 所以我们有下面的等式

$$\alpha_i \cdot \alpha_j = \alpha_i' \cdot \alpha_j' + \frac{\alpha_i \cdot \alpha_m}{\alpha_m \cdot \alpha_m} \frac{\alpha_j \cdot \alpha_m}{\alpha_m \cdot \alpha_m} \alpha_m \cdot \alpha_m$$

$(1 \leqslant i < j \leqslant m-1)$. 结合假设条件 $\alpha_i \cdot \alpha_j < 0$, $\alpha_i \cdot \alpha_m < 0$, $\alpha_j \cdot \alpha_m < 0$，我们得出结论 $\alpha_i' \cdot \alpha_j' < 0$, $\forall 1 \leqslant i < j \leqslant n-1$, 也就是说 $\alpha_1', \ldots, \alpha_{m-1}'$ 是超平面 H 中两两内积 < 0 的 $m-1$ 个向量。我们可以一开始就对 n 做数学归纳法，假设 $\mathbb{R}^{n-1}$ 中至多有 n 个向量两两内积为负数。因为超平面 H 等距同构于 $\mathbb{R}^{n-1}$, [1] 我们知道 H 中至多有 n 个向量两两内积为负，所以 $m-1 \leqslant n$, 即 $m \leqslant n+1$.

下面的构造说明，$\mathbb{R}^n$ 中可以找到 $n+1$ 个两两内积为负的向量。记 T 为 $\mathbb{R}^n$ 中以原点 $O = (0, \ldots, 0)$, $e_1 = (1, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 1)$ 为顶点的 $n+1$ 面多面体，T 的中心是 $C = (\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{n+1})$. 从 C 到各顶点的向量分别是 $(-\frac{1}{n+1}, \ldots, -\frac{1}{n+1})$, $(\frac{n}{n+1}, -\frac{1}{n+1}, \ldots, -\frac{1}{n+1})$, $(-\frac{1}{n+1}, \frac{n}{n+1}, \ldots, -\frac{1}{n+1})$, $\ldots$, $(-\frac{1}{n+1}, -\frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{n}{n+1})$. 容易验证这 $n+1$ 个向量的两两内积小于 0.

3, 四维立方体有多少个顶点？多少条棱？多少个 2 维的面？多少个 3 维的面？若以上数字分别记为 k_0, k_1, k_2, k_3，则 $k_0 - k_1 + k_2 - k_3$ 等于多少？n 维立方体的 $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ 分别是多少？$k_0 - k_1 + k_2 - \ldots + (-1)^{n-1} k_{n-1}$ 又是多少？

解答：四维立方体 $[0,1]^4$ 有 16 个顶点，32 条棱，24 个 2 维的面，8 个 3 维的面，故

$$k_0 - k_1 + k_2 - k_3 = 16 - 32 + 24 - 8 = 0.$$

n 维立方体 $[0,1]^n$ 有 2^n 个顶点，$C_n^1 2^{n-1} = n2^{n-1}$ 条棱，$C_n^2 2^{n-2}$ 个 2 维面，$\ldots$, $C_n^k 2^{n-k}$ 个 k 维面，$\ldots$, $C_n^{n-1} 2$ 个 $n-1$ 维面，故

$$\begin{aligned} k_0 - k_1 + \ldots + (-1)^{n-1} k_{n-1} &= 2^n - C_n^1 2^{n-1} + C_n^2 2^{n-2} - \cdots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} 2 \\ &= (2 + (-1))^n - (-1)^n = 1 + (-1)^{n-1}. \end{aligned}$$

4, 证明：若 n 阶方阵 A 的各列元素之和为 1，则对任意的 $\beta \in \mathbb{R}^n$, 向量 $A\beta$ 的 n 个分量之和等于 β 的 n 个分量之和。若 n 阶方阵 A, B 的各列元素之和均为 1, 则 AB 的各列元素之和也均为 1.

提示：构造一个行向量 e 使得 e 与 A 相乘等价于取 A 的各列元素之和。

证明. 令 $e = (1 \ \ldots \ 1)$. 显然 A 的各列元素之和为 1 等价于 $eA = e$. 对任意的 $\beta \in \mathbb{R}^n$, $A\beta$ 的各分量之和可以表示为 $e(A\beta)$. 由矩阵乘法的结合律知，$e(A\beta) = (eA)\beta = e\beta$, 后者即 β 的各分量之和。若 $eA = e$, $eB = e$, 则显然 $e(AB) = (eA)B = eB = e$, 命题的后半部分也得证。 $\square$

[1] 这是按学生的现有知识不严谨的地方，但直观上可以理解。

5, 定义 $m\times n$ 阶实矩阵 $A=(a_{ij})$ 的范数为

$$||A||=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2}.$$

证明:

1. $||A||\geqslant 0$，且 $||A||=0$ 当且仅当 $A=0$,
2. $||cA||=|c|\ ||A||$,
3. $||A+B||\leqslant ||A||+||B||$,
4. $||AB||\leqslant ||A||\ ||B||$.

证明范数

$$||A||_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|.$$

也满足性质 1-4.

提示：$||\cdot||$ 定义的范数与 $\mathbb{R}^{mn}$ 中向量的范数有何不同? 要证明 4，可以先证明 B 是一个列向量 β 的情形，此时 $A\beta$ 的各分量是 A 的行向量与 β 的点积；证明一般的情形时，可将 $B=(\beta_1\dots\beta_k)$ 按列分块后用不等式 $||A\beta||\leqslant ||A||\ ||\beta||$. 证明 $||\cdot||_\infty$ 满足性质 4 时，可以先证明 A 是一个行向量 α 的情形，即 $||\alpha B||_\infty\leqslant ||\alpha||_\infty||B||_\infty$；证明一般情形时，可对 A 按行分块。

证明. 若将 $M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 中的 $m\times n$ 阶矩阵看成 $\mathbb{R}^{mn}$ 中 mn 维向量的话，矩阵范数 $||A||$ 就等价于 $\mathbb{R}^{mn}$ 中的标准范数，从而性质 1-3 成立。关于性质 4，先证 $B=\beta=(x_1\ \dots\ x_n)^t$ 是列向量的情形。记 A 的各行依次为 $\alpha_1,\dots,\alpha_m$. 由矩阵乘法的定义知，$A\beta=(\alpha_1\cdot\beta\ \dots\ \alpha_m\cdot\beta)^t$, 其中 $\cdot$ 表示点积，故

$$||A\beta||^2=\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i\cdot\beta)^2\leqslant\sum_{i=1}^{m}||\alpha_i||^2||\beta||^2=(\sum_{i=1}^{m}||\alpha_i||^2)||\beta||^2=||A||^2||\beta||^2,$$

取平方根得 $||A\beta||\leqslant ||A||||\beta||$. 我们在上面用到了 Cauchy-Schwarz 不等式 $(\alpha_i\cdot\beta)^2\leqslant||\alpha_i||^2||\beta||^2$. 接下来我们证明一般的情形。设 $B\in M_{n\times k}(\mathbb{R})$, 并记 B 的各列分别为 $\beta_1,\dots,\beta_k$, 则 $AB=A(\beta_1\ \dots\ \beta_k)=(A\beta_1\dots A\beta_k)$，所以

$$||AB||^2=\sum_{j=1}^{k}||A\beta_j||^2\leqslant\sum_{j=1}^{k}||A||^2||\beta_j||^2=||A||^2\sum_{j=1}^{k}||\beta_j||^2=||A||^2||B||^2,$$

取了平方根后就是 $||AB||\leqslant ||A||\ ||B||$.

矩阵范数 $||A||_\infty$ 满足的性质 1-3 略。4 的话，先证 $A=\alpha=(a_1\dots a_n)$ 是行向量的情形，此时 $||\alpha||_\infty=\sum_{i=1}^{n}|a_i|$,

$$||\alpha B||_\infty=\sum_{j=1}^{k}|\sum_{i=1}^{n}a_ib_{ij}|\leqslant\sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{n}|a_i||b_{ij}|=\sum_{i=1}^{n}|a_i|\sum_{j=1}^{k}|b_{ij}|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|a_i|(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{k}|b_{ij}|)=||\alpha||_\infty||B||_\infty.$$

对一般的情形，记 A 的各行分别是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$, 则 AB 的各行分别是 $\alpha_1 B,\ldots,\alpha_m B$。由上面证明的特殊情况知，$||\alpha_i B||_\infty \leqslant ||\alpha_i||_\infty ||B||_\infty$, 所以

$$||AB||_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant} ||\alpha_i B||_\infty \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant m} (||\alpha_i||_\infty ||B||_\infty) = (\max_{1\leqslant i\leqslant m} ||\alpha_i||_\infty)||B||_\infty = ||A||_\infty ||B||_\infty.$$

□

6, 设 $A\in M_m(\mathbb{R})$, $B\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$, $C\in M_n(\mathbb{R})$, 证明若 A,C 可逆，则分块矩阵 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 也可逆，并求其逆矩阵。

用以上结论证明, 对角线元素全非零的上三角阵 U 可逆, 其逆矩阵 U^{-1} 也是上三角阵, 且 U^{-1} 的对角线元素是 U 的对角线元素的倒数。

证明. 我们猜测 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 的逆矩阵形如 $\begin{pmatrix} A^{-1} & X \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}$ 其中 $X\in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ 待定。由分块矩阵的乘法运算知

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{-1} & X \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & AX+BC^{-1} \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

类似有

$$\begin{pmatrix} A^{-1} & X \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_m & A^{-1}B+XC \\ 0 & I_n \end{pmatrix}.$$

容易看出 $X=-A^{-1}BC^{-1}$ 是唯一的使得上面两个等式的右边都等于 I_{m+n} 的解。所以 $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$ 可逆且

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BC^{-1} \\ 0 & C^{-1} \end{pmatrix}.$$

对 U 的阶数做数学归纳法, 假设结论对 $n-1$ 阶的上三角阵成立。若 $U=\begin{pmatrix} u_1 & \star & \ldots & \star \\ 0 & u_2 & \ldots & \star \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & u_n \end{pmatrix}$ 是 n 阶上三角阵且对角线元素 $u_1,u_2,\ldots,u_n$ 全不为 0, 我们把 U 分块 $U=\begin{pmatrix} u_1 & \alpha \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$, 其中 U_1 是对角线元素为 $u_2,\ldots,u_n$ 的上三角阵。因为 $u_2,\ldots,u_n$ 全不为 0, 由归纳假设知 U_1 可逆且 $U_1^{-1}=\begin{pmatrix} u_2^{-1} & \ldots & \star \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ldots & u_n^{-1} \end{pmatrix}$. 所以 $\begin{pmatrix} u_1 & \alpha \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}$ 可逆，且 $\begin{pmatrix} u_1 & \alpha \\ 0 & U_1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} u_1^{-1} & -u_1^{-1}\alpha U_1^{-1} \\ 0 & U_1^{-1} \end{pmatrix}$, 后者显然是对角线元素依次为 $u_1^{-1},u_2^{-1},\ldots,u_n^{-1}$ 的上三角阵。 □

7, 对于一个线段 AB，我们可以这样描述这个线段上的点：对于任何一个线段上的点 P，我们有 $P = sA + tB$，这里 $s + t = 1$ 并且 s 和 t 都是非负的实数。很容易验证，对于固定的 P，这里的系数 s 和 t 都存在并且唯一。事实上，我们也可以这样看这个式子 $P = sA + tB$：这个式子是说，线段上的任意一点都可以看成是 A 和 B 的加权平均。

1. 对于一个三角形 ABC，证明三角形内部的任何点 P 都有 $P = rA + sB + tC$，这里 $r + s + t = 1$ 并且这三个系数都是非负的实数，并且每个 P 都对应着唯一的 (r, s, t) 系数组。(换句话说，三角形内部的每一个点都可以看成是三个顶点的加权平均值。)
2. 对于空间中的正四面体 $ABCD$，猜测一个由以上推广的类似结论。
3. 对于平面上的四边形 $ABCD$ 内部的任意一个点 P，是否能够找到非负系数使得 $P = sA + tB + xC + yD$，这里 $s + t + x + y = 1$？这样的系数组是否唯一？

证明. 1. 证法一：延长线段 AP 交 BC 于点 D。现在由于 D 在线段 BC 上，我们有 $D = xB + (1 - x)C$，这里 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 且 x 取值唯一。而由于 P 在线段 AD 上，我们有 $P = yA + (1 - y)D$，这里 $0 \leqslant y \leqslant 1$ 且 y 取值唯一。所以我们有 $P = yA + (1 - y)xB + (1 - y)(1 - x)C$。令 $r = y, s = (1 - y)x, t = (1 - y)(1 - x)$。余下的要求可以轻松验证，略去。

证法二：把三角形 ABC 放在 $\mathbb{R}^3$ 中任意一个不过原点 O 的平面上。将 OA, OB, OC 作为基来画坐标系，那么整个三角形都在 $x + y + z = 1$ 的这个平面上。那么三角形内部每一个点 P 都有唯一座标 (r, s, t)，座标均非负，$r + s + t = 1$，且 $P = rA + sB + tC$。余下的要求可以轻松验证，略去。[2]

证法三：假设三角形 ABC 在平面座标系内，座标为 $(A_x, A_y), (B_x, B_y), (C_x, C_y)$。假设 $P = (P_x, P_y)$ 在三角形内，那么我们试图解方程组

$$\begin{pmatrix} A_x & B_x & C_x \\ A_y & B_y & C_y \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ s \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_x \\ P_y \\ 1 \end{pmatrix}.$$

如果矩阵不可逆，那么通过生算可以发现 A, B, C 共线，显然不成立。因此矩阵可逆，该系统存在解并且唯一。余下的要求可以轻松验证，略去。[3]

[2]题目本身的叙述需要完善，表达式 $rA + sB + tC$ 中的 A, B, C 表示这三点的坐标，或者向量 OA, OB, OC，但需要指出这个三角形一开始是放在平面还是空间直角坐标系中。如果用证法一就没关系，但证法二的中心思想是把问题转化为 $\mathbb{R}^3$ 中以 $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ 为顶点的三角形 ABC 的问题，即这个“标准”的三角形中任意一点的坐标是和为 1 的 3 个非负实数。如果题目表述一开始是在某个平面直角坐标系中，那表达式 $P = rA + sB + tC$ 中的 P, A, B, C 指的应该是向量 OP, OA, OB, OC，其中 O 是这个平面直角坐标系的原点，为什么可以把这个平面中的点的坐标问题转化为空间中的点的坐标问题不是一件显然的事情。就算一开始三角形是放在某个空间直角坐标系中，初始的坐标和基 OA, OB, OC 下的坐标也是不一样的，为什么可以把问题转化为新的坐标系中的问题，也是需要说明的。

[3]关于这个系数矩阵为什么可逆的问题：以后我们会证明一个方阵可逆当且仅当它的列向量组线性无关；而 $\mathbb{R}^3$ 中的 3 个

2. 推广的命题：对于正四面体 $ABCD$ 内部的任意一个点 P，都存在唯一的系数 $0 \leqslant s,t,x,y \leqslant 1$ 使得 $s+t+x+y=1$ 且 $P=sA+tB+xC+yD$。

3. 不妨假设 AC 是一个四边形内部的对角线。那么点 P 要么在三角形 ABC 内，要么在三角形 ADC 内，因此这样的非负系数存在。系数显然不唯一，随便找一个反例即可。

□

8, 我们想解一个线性方程组 $Ax=b$。这里 b 是 $\mathbb{R}^m$ 里给定的向量，x 是 $\mathbb{R}^n$ 里我们想要求解的未知向量，而 A 是 $m\times n$ 阶的矩阵，也可以看成是一个函数 $\mathscr{A}:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$。我们的目标是要证明 A 的列向量线性无关，当且仅当定义域 [4] 中任何向量都是 A 的行向量的线性组合，当且仅当 $\mathscr{A}$ 是一个单射函数。(我们这里只证明一部分。)

1. 假设 A 一共有三列，第一列的 4 倍加上第二列的 3 倍减去第三列的 2 倍等于零向量。求证 $Ax=b$ 当且仅当对于任意的 $k\in\mathbb{R}$，$A(x+k\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix})=b$。

2. 假设 $A=\begin{pmatrix}w_1^T\\ \vdots\\ w_m^T\end{pmatrix}$，这里 $w_1^T,...,w_m^T$ 代表行向量。那么可以看出实际上 $w_1,...,w_m$ 是 A 的定义域里的向量。假设定义域内的任何向量都是 $w_1,...,w_m$ 的线性组合，并且 $Ax=0$，求证 x 和定义域内的所有向量都垂直。

证明. 1. 注意 $A\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}$ 的含义就是 A 的第一列的 4 倍加上第二列的 3 倍减去第三列的 2 倍，而这是 0 向量，因此 $A\begin{pmatrix}4\\3\\-2\end{pmatrix}=0$。

2. 假设 $A=\begin{pmatrix}w_1^T\\ \vdots\\ w_m^T\end{pmatrix}$，那么 Ax 的座标就是 x 和各种行向量 w_i 的点积。如果 $Ax=0$，那么 x 和各种 w_i 的点积均为 0，因此 x 和所有行向量垂直，因此 x 和所有行向量的线性组合垂直。

向量线性无关当且仅当它们不共面；这里 $(A_x,A_y,1)$ 表示的是 $\mathbb{R}^3$ 中 x,y 坐标与 A 点同，z 坐标为 1 的点，如果把 ABC 所在的 xy-平面理解为 xyz-坐标系中的 xy-坐标平面的话，那么 $\hat{A}(A_x,A_y,1)$ 就是把点 $A(A_x,A_y,0)$ 向上移 1 后得到的点，$\hat{B}(B_x,B_y,1)$ 和 $\hat{C}(C_x,C_y,1)$ 类似，直观上不难观察到 A,B,C 三点不共线当且仅当向量 $O\hat{A},O\hat{B},O\hat{C}$ 不共面。

[4]指线性变换 $\mathscr{A}$ 的定义域 $\mathbb{R}^n$

由于定义域内的所有向量都是这些行向量的线性组合，因此 x 和定义域内的所有行向量垂直。[5]

□

9, 我们知道，假设 $i \neq j$，那么我们从单位矩阵 I 出发，把 (i,j) 项改成 1，就得到了矩阵 E_{ij}。而从单位矩阵 I 出发，把 (i,i) 项和 (j,j) 项改成零，而把 (i,j) 项和 (j,i) 项改成 1，就得到了矩阵 P_{ij}。对于任意两个矩阵 A, B，我们定义 $[A,B] = AB - BA$。

1. 假设 i,j,k 两两不同，计算 $[E_{ij}, E_{jk}]$，$[E_{ij}, P_{jk}]$ 以及 $[P_{ij}, P_{jk}]$。（除生算外，也可以直接考虑作为行操作或列操作，两个矩阵的顺序调换后，到底差别在哪里。）
2. 假设 $i \neq j$，并且我们有对角阵 $D = diag(d_1, ..., d_n)$，计算 $[E_{ij}, E_{ji}]$，$[E_{ij}, D]$ 和 $[P_{ij}, D]$。（除生算外，也可以直接考虑作为行操作或列操作，两个矩阵的顺序调换后，到底差别在哪里。）

证明. 生算的话没有任何难度，这里只提供理解性计算。

1. 计算 $[E_{ij}, E_{jk}]$。比如理解成行操作，那么 $E_{ij}E_{jk}$ 先把第 k 行加到第 j 行，再把第 j 行加到第 i 行。注意，第二步时的第 j 行已经含有第 k 行了，因此第 k 行最终被加到了第 i 行上。然而，$E_{jk}E_{ij}$ 先把第 j 行加到第 i 行，再把第 k 行加到第 j 行。注意这里面的第 k 行并没有机会到达第 i 行。这一点是二者的唯一差别。因此这两个的差的第 (i,k) 项是 1，其它项都是 0。
2. 计算 $[E_{ij}, P_{jk}]$。对于 $E_{ij}P_{jk}$，操作完的话第 i 行是原第 i 行加原第 k 行，第 j 行是原第 k 行，而第 k 行是原第 j 行。反过来，$P_{jk}E_{ij}$，操作完的话第 i 行是原第 i 行加原第 j 行，第 j 行是原第 k 行，而第 k 行是原第 j 行。对比区别，一个中的第 i 行被加了原第 k 行，而另一个中的第 i 行被加了原第 j 行。因此这两个的差的 (i,j) 项是-1，(i,k) 项是 1，其它项都是 0。
3. 计算 $[P_{ij}, P_{jk}]$。对于 $P_{ij}P_{jk}$，操作完的话第 i 行是原第 k 行，第 j 行是原第 i 行，而第 k 行是原第 j 行。对于 $P_{jk}P_{ij}$，操作完的话第 i 行是原第 j 行，第 j 行是原第 k 行，而第 k 行是原第 i 行。因此这两个的差的 $(i,j),(j,k),(k,i)$ 项是-1，$(i,k),(k,j),(j,i)$ 项是 1，其它项都是 0。
4. 计算 $[E_{ij}, E_{ji}]$。对于 $E_{ij}E_{ji}$，操作完的话第 j 行是原两行的和，第 i 行则比原两行的和还要多了一个原第 i 行。对于 $E_{ji}E_{ij}$，操作完的话第 i 行是原两行的和，第 j 行则比原两行的和还要多了一个原第 j 行。因此这两个的差的 (i,i) 项是 1，(j,j) 项是-1，其它项都是 0。
5. 计算 $[E_{ij}, D]$。对于 $E_{ij}D$，操作完的话第 i 行是原第 i 行的 d_i 倍加上原第 j 行的 d_j 倍，其它任意第 k 行都只是被乘了 d_k 而已。对于 DE_{ij}，操作完的话第 i 行是原第 i 行的 d_i 倍加

[5] 什么样的向量 $x \in \mathbb{R}^n$ 会和 $\mathbb{R}^n$ 中的所有向量垂直？（垂直指内积为 0.）8.2 证明的是，如果 A 的行向量组可以线性表出 $\mathbb{R}^n$ 中所有向量的话，那么齐次线性方程组 $Ax = 0$ 只有零解。

上原第 j 行的 d_i 倍，其它任意第 k 行都只是被乘了 d_k 而已。因此这两个的差的 (i,j) 项是 d_j-d_i，其它项是 0。

6. 计算 $[P_{ij},D]$。对于 $P_{ij}D$，操作完的话第 i 行是原第 j 行的 d_j 倍，第 j 行是原第 i 行的 d_i 倍，而其它任意第 k 行都只是被乘了 d_k 而已。对于 DP_{ij}，操作完的话第 i 行是原第 j 行的 d_i 倍，第 j 行是原第 i 行的 d_j 倍，而其它任意第 k 行都只是被乘了 d_k 而已。因此这两个的差的 (i,j) 项是 d_j-d_i，(j,i) 项是 d_i-d_j，其它项是 0。

□

10, 我们定义这样一个 n 阶方阵 T：它的对角项是 $1,2,2,...,2$，而紧挨着对角线的项都是 -1。比如说，如果 $n=3$，那么 $T=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$。求 T^{-1}。(提示：可以计算一下 $n=1,2,3$ 时的情况来寻找灵感。另外，T 经过哪些行操作可以变成 I？那么怎么能从 I 变成 T^{-1}？)

证明. 从 T 变成 I，可以先把第一行加到第二行上，再把第二行加到第三行上，以此类推。这样刷下去，全部做完之后，得到对角项都是 1，紧贴着对角项上面的项都是-1 的矩阵。然后再把最后一行加到倒数第二行，再把倒数第二行加到倒数第三行，以此类推。刷上去之后得到单位矩阵 I。所以如果我们把同样的步骤直接应用在 I 上，就会得到 T^{-1}。

从 I 出发，往下刷一遍，得到一个下三角阵，下三角项都是 1。再往上刷一遍，就得到了这样的矩阵：

$$\begin{pmatrix} n & n-1 & n-2 & ... & 1 \\ n-1 & n-1 & n-2 & ... & 1 \\ n-2 & n-2 & n-2 & ... & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

对于快的班级的学生，可以意识到这个本质就是 LU 分解，再对 L 和 U 分别取逆。 □

11, 求证：对于任何 $m\times n$ 的矩阵 A 和 $n\times m$ 的矩阵 B, I_m+AB 可逆当且仅当 I_n+BA 可逆。这里 I_m 是 m 阶单位矩阵, I_n 是 n 阶单位矩阵。(提示：一种巧方法是巧妙利用 $A(I_n+BA)=(I_m+AB)A$，用一个的逆凑出另一个的逆。另一种方法是考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} I_m & A \\ B & I_n \end{pmatrix}$，并用行列操作使其分块对角化。等学了特征值或者矩阵级数，这里还有其他方法。)

证明. 证法一：注意 $A(I_n+BA)=(I_m+AB)A$。假设 C 是 I_n+BA 的逆，那么等式右乘 C，得到 $(I_m+AB)AC=A$。再右乘 B，得到 $(I_m+AB)ACB=AB$。现在用 $I_m+AB=I_m+AB$ 减去前面这个等式，得到 $(I_m+AB)(I_m-ACB)=I_m$。因此 I_m+AB 的逆是 $I_m-A(I_n+BA)^{-1}B$。所以这两个一旦一个可逆，可以直接求出另一个的逆。

证法二：考虑分块矩阵 $\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}$。用左上角的 I_m 来消掉它下面和右边的块，得到 $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n+BA \end{pmatrix}$. [6] 而用右下角的 I_n 来消掉它上面和左边的块，得到 $\begin{pmatrix} I_m+AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$。由于我们的行操作和列操作都是由可逆矩阵来实现的，因此不会改变矩阵可逆与否，所以 $\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n+BA \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} I_m+AB & 0 \\ 0 & I_n \end{pmatrix}$ 三个矩阵要么同时可逆，要么同时不可逆。[7]

证法三：（超出目前课程范围）从特征值的角度，可以看到 AB 和 BA 具有（除了 0 之外）相同的特征值。因此 I_m+AB 和 I_n+BA 具有（除了 1 之外）相同的特征值。由于矩阵可逆当且仅当 0 不是特征值，两个矩阵必须同时可逆。（一个本质上一样的证明是利用行列式等式 $\det(I_m+AB)=\det(I_n+BA)$。） □

[8]

12, 如果一个 n 阶方阵 A 的 (i,j) 项在 $i+j>n+1$ 的时候都是 0，那么我们说这个矩阵 A 是西北矩阵。反过来，如果一个 n 阶方阵 A 的 (i,j) 项在 $i+j<n+1$ 的时候都是 0，那么我们说这个矩阵 A 是东南矩阵。

1. 假设 A 是可逆西北矩阵。那么 A^T, A^2, A^{-1} 中哪些必然是西北矩阵？哪些必然是东南矩阵？哪些有可能都不是？证明或给出反例。

---

[6] $\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & A \\ -B & I_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_m & -A \\ 0 & I_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} I_m & 0 \\ 0 & I_n+BA \end{pmatrix}$.

[7] 作业布置过：分块对角阵 $\mathrm{diag}(M,N)$ 可逆当且仅当 M,N 都可逆 (diag=diagonal)。所以 $\mathrm{diag}(I_m,I_n+BA)$ 可逆当且仅当 I_n+BA 可逆，$\mathrm{diag}(I_m+AB,I_n)$ 可逆当且仅当 I_m+AB 可逆，这样证明才完整。

[8] 可以用以下的办法来记忆公式。当 A, B 中的元素绝对值足够小的时候，矩阵级数

$$\sum_{i=0}^{\infty}(-AB)^i=I_m-AB+ABAB-ABABAB+...$$

收敛（可与几何级数作对比），且极限是 $(I_m+AB)^{-1}$. 上面的级数可重新写成

$$I_m-A(I_n)B+A(BA)B-A(BABA)B+...=I_m-A(I_n-BA+BABA+...)B.$$

当 A,B 的元素足够小时，括号中的矩阵级数

$$I_n-BA+BABA-BABABA+...$$

也收敛，且极限是 $(I_n+BA)^{-1}$. 所以，起码当 A,B 的元素足够小时，我们有 $(I_m+AB)^{-1}=I_m-A(I_n+BA)^{-1}B$，类似可证 $(I_n+BA)^{-1}=I_n-B(I_m+AB)^{-1}A$.

2. 假设 A 是西北矩阵，B 是东南矩阵，那么 AB 必然是什么样的矩阵？要求证明。

证明. 1. 显然 A^T 是西北矩阵，证略。取 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$，发现 A^2 既不西北也不东南。最后，假设我们把 A 的行的顺序完全反过来。这等于是左乘一个矩阵 P，得到了下三角阵 PA。因此 $(PA)^{-1} = A^{-1}P^{-1}$ 也是一个下三角阵。从这个下三角阵出发，想要得到 A^{-1}，我们必须右乘一个 P，也就是说现在要把列的顺序全反过来。因此我们得到一个东南矩阵。(这里 P 的反对角项都是 1，其它项都是 0。)

2. AB 必须是上三角阵。还是取一样的 P (并且注意，$P = P^{-1}$)，那么 PA 是下三角阵，BP 也是下三角阵，所以 $PABP$ 是个下三角阵。现在想要得到 AB，需要把行顺序和列顺序再颠倒一次，得到了一个上三角阵。

□