Exercise 5

习题1. 求$b=(1,1,1)$ 到向量$(1,0,0)$ 和向量$(1,1,0)$确定的平面上的投影p.

习题2. 一名同学在射击时，m次成绩分别是$n_1,n_2,\cdots,n_m$环，在最小二乘意义下可认可的成绩是多少环？

习题3. 称方程组$Ax=b$长度最短的最小二乘解为最优最小二乘解。设$\hat{x}$为$Ax=b$的最小二乘解. 证明：$\hat{x}$ 为最优最小二乘解当且仅当$\hat{x}\in C(A^T)$.

习题4. 设V为R^m的子空间，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$为$V$的一组基，且它们两两正交. 设$b\in R^m$，$b$到$V$ 上的投影为p，b到α_i所在的直线上的投影为p_i $(1\leq i\leq r)$. 证明: $p=p_1+p_2+\cdots+p_r$.

习题5. 已知方程组$Ax=b$，其中A不是列满秩. 证明$Ax=b$的最小二乘解也是正规方程$A^TA\hat{x}=A^Tb$ 的解.

习题6. 已知平面上四点$(-1,2),(0,3),(1,2),(2,3)$，求最小二乘拟合直线。

习题7. 一个m 阶矩阵P为投影矩阵当且仅当P对称，且$P^2=P$.

习题8. 设n维向量$\alpha_1,...,\alpha_s$线性无关，而$\alpha_1,...,\alpha_s,\beta$线性相关，则$\beta$可由$\alpha_1,..,\alpha_s$线性表出，且表示法唯一.

习题9. 已知：$A\in M_{n\times m}$, $B\in M_{m\times n}$且$n<m$，$AB=I$，求证：B的列向量组线性无关.

习题10. $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$n$个线性无关的向量，$\alpha_{n+1}=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_n\alpha_n$，且$k_i(i=1,2,\cdots,n)$全不为零. 求证：$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n,\alpha_{n+1}$中任意$n$个向量均线性无关.

习题11. 证明$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$（其中$\alpha_1\neq 0$）线性相关的充要条件是至少有一个$\alpha_i(1<i\leq m)$可被$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{i-1}$线性表出，且表出系数惟一.

习题12. *(a)* 求将$\mathbf{R}^3$中任意向量b投影到沿向量$a=(2,1,3)$方向的投影矩阵P.

(b) 求P的列空间和零空间，并分别给出它们的一组基.

习题13. *(a)* $p = A\hat{x}$是列空间$C(A)$中距给定向量b最近的向量. 若A的列向量组线性无关，给出$\hat{x}$ 的表达式. 描述与误差向量$e = b - A\hat{x}$正交的所有向量. 若A的列向量组线性相关情况如何？

(b) 设$A = QR$，其中Q的列向量组为单位正交向量组，R为可逆上三角阵. 用Q, R和b表示$\hat{x}$和p.

(c) 若q_1和q_2为$\mathbf{R}^5$中单位正交向量，给出任意向量b到由q_1和q_2张成的平面的投影p.

习题14. 设P_1是到沿方向$(1,1,0)$的直线的投影矩阵，P_2是到沿方向$(0,0,1)$的直线的投影矩阵.

(a) 求$P = P_2P_1$.

(b) $P = P_2P_1$是投影矩阵吗？解释理由.

(c) 求P的四个基本子空间.

习题15. 考虑矩阵$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$.

(a) 求A的列空间$C(A)$的一组单位正交基.

(b) 求非零向量v使之正交于$C(A)$.

(c) 向量v是否属于A的某个基本子空间，试解释.

(d) 求3×2的矩阵Q,满足$Q^TQ = I$且Q的列空间与A的列空间相同.

习题16. 设$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(a) 求向量b到A的列空间的投影.

(b) 分别给出A的四个基本子空间的一组正交基.

(c）用最小二乘法求解$Ax = b$.

习题17. $\mathbf{R}^n$中任意一组非零正交向量组必线性无关.

习题18. 设$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$为向量空间$\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基,且$(\beta_1, \cdots, \beta_n) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)Q$，其中$Q$为$n$阶方阵. 证明：$\beta_1, \cdots, \beta_n$也为$\mathbf{R}^n$ 的一组标准正交基的充要条件是Q为正交矩阵(即$Q^TQ = I$).

习题19. *(**Bessel不等式**)* 设V是$\mathbf{R}^m$的n维子空间, $q_1, \cdots, q_n$是V的一组正交基, b为$\mathbf{R}^m$中任意向量. 则

$$\Sigma_{j=1}^{n} \frac{|b \cdot q_j|^2}{||q_j||^2} \le ||b||^2.$$

等号成立的充要条件是$b \in V$.