习题课七

2019 年 11 月 23 日

[记号] 设 $A = (a_{ij})$ 是 n 阶方阵, $(n \geq 2)$,$C = (c_{ij})$, 其中 c_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式。记 $A^* = C^T$, A^* 称为 A 的伴随矩阵.

[事实] 代数学基本定理：设 $f(t) = a_0 t^n + \cdots + a_n$ 是关于 t 的 n 次多项式，系数 a_i 为复数，$a_0 \neq 0$，则 $f(t)$ 恰好有 n 个复数根 (计重数).

习题 1. 设

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ -2 & 2 & -2 & -3 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

不直接计算 C_{ij}, 求解以下各题:

(1) $-2C_{11} + 2C_{21} + 3C_{31} + 4C_{41}$;

(2) $C_{13} + C_{23} + C_{33} + C_{43}$.

习题 2. 设

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 6 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

求 $S_1 = C_{12} + 2C_{22}$ 和 $S_2 = C_{32} + C_{42}$.

习题 3. 当 A 为可逆矩阵时，求:

(1) $(A^*)^{-1}$;

$(AB)(AB)^* = |AB| I = |A||B| I$

$A^{-1}(A^{-1})^* = |A^{-1}| I.$

$A BB^* A^* = A|B| I A^* = |A||B| I.$

$(A^{-1})^* = \frac{A}{|A|} I.$ $\frac{A}{|A|}$

(2) $(A^{-1})^*$;

(3) $(kA)^*$;

$AA^* = |A| I$

$(kA)(kA)^* = k^n|A| I.$

$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$

(4) $(A^*)^*$。

$kA k^{n-1}A^* = k^n|A| I.$

$|A||A^{-1}| = 1.$

$A^*(A^*)^* = |A^*| I = |A|^{n-1} I.$

习题 4. 设

$AA^* = |A|$

$A^* = |A|A^{-1}$

$$D(x) = \begin{vmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & a_{13}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & a_{23}(x) \\ a_{31}(x) & a_{32}(x) & a_{33}(x) \end{vmatrix}.$$

$|A|A^{-1}(A^*)^* = |A|^{n-1}$

$(A^*)^* = |A|^{n-2}A.$

求 $D'(x)$.

$A^* = A^{-1}|A|$

习题 5. 设 A 为可逆方阵，D 为方阵，证明：

$$\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} = |A||D - CA^{-1}B|.$$

$(A^*)^{-1} = A\frac{1}{|A|}.$

习题 6. 求如下推广的 n 阶范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-2} & x_1^n \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-2} & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-2} & x_n^n \end{vmatrix}.$$

习题 7. 设 A 是 n 阶实方阵，求证：存在充分小的 $t > 0$，使得 $A + tI_n$ 是可逆的 *(粗略地说，给定任何一个方阵，总可以做一个微扰，得到可逆矩阵)*.

习题 8. 设 A 是 n 阶实方阵，$\boldsymbol{x}$ 为 $\mathbb{R}^n$ 中的列向量，$\lambda \in \mathbb{R}$。若方程 $A\boldsymbol{x} = \lambda\boldsymbol{x}$ 有非零解，则称 λ 为 A 的特征值，$\boldsymbol{x}$ 为属于特征值 λ 的特征向量。求证：A 至多有 n 个不同的特征值。

习题 9. 设 A, B 是 n 阶方阵，A^* 为 A 的伴随矩阵。求证：$(AB)^* = B^*A^*$。

习题 10. 设 $A = (a_{ij})$ 是一个主对角线占优的 n 阶实方阵，即 $a_{ii} > \sum\limits_{1 \le j \le n, j \ne i} |a_{ij}|$，对于所有的 $1 \le i \le n$ 成立。求证：$|A| > 0$.

习题 11. 设 Q 是 n 阶正交矩阵，即 $Q^TQ = QQ^T = I_n$。

(1) 若 $|Q| < 0$，求证：$|Q + I_n| = 0$，因此存在非零向量 $\boldsymbol{v} \in \mathbb{R}^n$，使得 $Q\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{v}$.

(2) 若 $|Q| > 0$。试分析 $|Q - I_n| = 0$ 何时成立.

习题 12. 设 A 是一个 $m \times n$ 阶矩阵。取 A 的任意 k 行和任意 k 列构成一个 k 阶方阵，它的行列式称为 A 的一个 k 阶子式. 定义

$$r_{\det}(A) := \max\{k \mid A\text{有一个非零的 } k \text{ 阶子式}\}.$$

求证：$r_{\det}(A) = r(A)$.

习题 13. 设 A 是 n 阶方阵，根据 $r(A)$ 的取值，试分析 $r(A^*)$.