微积分 B1 小班辅导讲义 (Old Version)

小班辅导讲师 何昊天

目录

1 数列的极限 **2**

1.1 数列极限概念 2

1.2 数列极限反例 3

1.3 数列极限计算 5

1.4 实数系基本定理 7

2 函数的极限与连续性 **8**

2.1 函数极限概念 8

2.2 函数极限计算 9

2.3 无穷小量与无穷大量 12

2.4 函数的连续性 12

2.5 函数的间断点 13

3 导数 **14**

3.1 导数的概念 14

3.2 导数的计算 15

4 导数的应用 **16**

4.1 微分中值定理 16

4.2 洛必达法则应用 18

4.3 泰勒展开 19

1 数列的极限

1.1 数列极限概念

定义：$\varepsilon - N$ 语言，需要理解每句话的含义，能够用定义证明极限等于一个值。

Problem 1.1.1 求证 $\lim_{n\to\infty} \frac{c^n}{n!} = 0 (c \in \mathbb{Z}^+)$。

Solution: $\frac{c^n}{n!} = \frac{c}{1}\frac{c}{2}\cdots\frac{c}{c}\frac{c}{c+1}\cdots\frac{c}{n} \leq \frac{c}{1}\frac{c}{2}\cdots\frac{c}{c}\frac{c}{n} = \frac{c^c}{(c-1)!n}$

想让 $|\frac{c^c}{(c-1)!n} - 0| = \frac{c^c}{(c-1)!n} < \varepsilon$，只需 $n > \frac{c^c}{(c-1)!\varepsilon}$，故取 $N = \lceil \frac{c^c}{(c-1)!\varepsilon} \rceil + 1$，代入定义即可。

Problem 1.1.2 求证 $\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} = 1$。

Solution: $|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1| = \frac{\sqrt{n^2+a^2}-n}{n} = \frac{a^2}{n(\sqrt{n^2+a^2}+n)} < \frac{a^2}{2n^2}$

想让 $|\frac{\sqrt{n^2+a^2}}{n} - 1| < \varepsilon$，只需 $\frac{a^2}{2n^2} < \varepsilon$，也即 $n > \frac{|a|}{2\varepsilon}$，故取 $N = \lceil \frac{|a|}{2\varepsilon} \rceil + 1$，代入定义即可。

Problem 1.1.3 求证 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$。

Solution: 当 $a = 1$ 时，结论显然成立。

当 $a > 1$ 时，记 $t = \sqrt[n]{a} - 1$，则 $t > 0$ 且 $a = (1+t)^n \geq 1 + nt = 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$，整理得 $\sqrt[n]{a} - 1 \leq \frac{a-1}{n}$。想让 $|\sqrt[n]{a} - 1| = \frac{a-1}{n} < \varepsilon$，只需 $n > \frac{a-1}{\varepsilon}$，故取 $N = \lceil \frac{a-1}{\varepsilon} \rceil + 1$，代入定义即可。

当 $a < 1$ 时，同理可证。

Problem 1.1.4 求证 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$。

Solution: 设 $\delta = \sqrt[n]{n} - 1$，则 $(1+\delta)^n = n$，由二项式定理得 $\frac{n(n-1)}{2}\delta^2 < n \Rightarrow \delta < \sqrt{\frac{2}{n-1}}$。

想让 $|\sqrt[n]{n} - 1| < \varepsilon$，只需 $\sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon$，即 $n > \frac{2}{\varepsilon^2} + 1$，故取 $N = \lceil \frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \rceil + 1$，代入定义即可。

Problem 1.1.5 已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，求证 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} = a$。

Solution: 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 得 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 > 0$，使得只要 $n > N_1$，就有 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$。

$|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} - a| \leq \frac{1}{n}(|a_1 - a| + |a_2 - a| + \ldots + |a_{N_1} - a| + |a_{N_1+1} - a| + \ldots + |a_n - a|)$，令 $c = |a_1 - a| + |a_2 - a| + \ldots + |a_{N_1} - a|$，那么 $|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} - a| < \frac{c}{n} + \frac{(n-N_1)\varepsilon}{2n}$。

由 $\lim_{n\to\infty} \frac{c}{n} = 0$ 得 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_2 > 0$，使得只要 $n > N_2$，就有 $\frac{c}{n} = |\frac{c}{n}| < \frac{\varepsilon}{2}$。

令 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则只要 $n > N$，就有 $|\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} - a| < \frac{c}{n} + \frac{(n-N_1)\varepsilon}{2n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$，所以 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n} = a$。

Problem 1.1.6 已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，求证 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2} = \frac{a}{2}$。

Solution: 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ 得 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists N_1 > 0$，使得只要 $n > N_1$，就有 $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$。

因为 $\frac{a}{2}=\frac{n^2a}{2n^2}=\frac{n(n+1)a}{2n^2}-\frac{a}{2n}=\frac{a+2a+\cdots+na}{n^2}-\frac{a}{2n}$，所以：

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right|\le\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}\right|+\frac{|a|}{2n}$$

$$\le\left|\frac{(a_1-a)+2(a_2-a)+\cdots+N_1(a_{N_1}-a)}{n^2}\right|+\left|\frac{(N_1+1)(a_{N_1+1}-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}\right|+\frac{|a|}{2n}$$

其中最右端第一项和第三项分子在极限过程中是定值，所以 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2>0$，使得只要 $n>N_2$，就能使它们的和小于 $\frac{\varepsilon}{2}$。

对于第二项有 $\left|\frac{(N_1+1)(a_{N_1+1}-a)+\cdots+n(a_n-a)}{n^2}\right|\le\frac{1}{n^2}\sum_{k=N_1+1}^{n}k|a_k-a|<\frac{1}{n^2}\cdot\frac{\varepsilon}{2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$。

令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则只要 $n>N$，就有：

$$\left|\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}-\frac{a}{2}\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}=\frac{a}{2}$。

Problem 1.1.7 *已知* $\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-2})=0$，*证明* $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{n}=1$。

Solution: 实际上只需证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$ 即可，注意到对任意 $n_0\le n$ 都有：

$$a_{2n}=a_{2n_0}+\sum_{i=n_0+1}^{n}(a_{2i}-a_{2i-2})$$

$$a_{2n+1}=a_{2n_0+1}+\sum_{i=n_0+1}^{n}(a_{2i+1}-a_{2i-1})$$

因此有 $\frac{|a_{2n}|}{2n}\le\frac{|a_{2n_0}|}{2n}+\frac{1}{2n}\sum_{i=n_0+1}^{n}|a_{2i}-a_{2i-2}|$。根据 $\lim_{n\to\infty}(a_n-a_{n-2})=0,\forall\varepsilon>0,\exists N_1>0$，使得只要 $n>N_1$，就有 $|a_{2n}-a_{2n-2}|<\frac{\varepsilon}{2}$。取 $n_0=N_1$，则有 $\frac{1}{2n}\sum_{i=n_0+1}^{n}|a_{2i}-a_{2i-2}|<\frac{n-n_0}{n}\cdot\frac{\varepsilon}{2}<\frac{\varepsilon}{2}$。

对于 $\frac{|a_{2n_0}|}{2n}$，显然 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N_2>0$，使得只要 $n>N_2$，就有 $\frac{|a_{2n_0}|}{2n}<\frac{\varepsilon}{2}$。令 $N=\max\{N_1,N_2\}$，则只要 $n>N$，就有 $\frac{|a_{2n}|}{2n}<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$，也即 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n}}{2n}=0$。

同理可证 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_{2n+1}}{2n+1}=0$，两者结合起来即得 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$，所以 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{n}=1$。

1.2 数列极限反例

下面给出了一些数列极限中的反例，它们大多都是一些正确结论的逆命题或否命题，通过了解这些例子可以帮我们更好地理解数列极限的概念和性质。

Problem 1.2.1 *存在发散数列* $\{a_n\}$ *使得* $\{|a_n|\}$ *收敛。*

Solution: 取 $a_n=(-1)^n$ 即可，但只要 $\{a_n\}$ 收敛，则必有 $\{|a_n|\}$ 收敛于前者极限的绝对值。

Problem 1.2.2 *存在一个收敛数列和一个发散数列，它们的积是收敛数列。*

Solution: 取 $a_n=\frac{1}{n},b_n=n$，则 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 即为所求。

Problem 1.2.3 存在一个收敛数列和一个发散数列，它们的积是发散数列。

Solution: 取 $a_n=\frac{1}{n}, b_n=n\sin\frac{n\pi}{2}$，则 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 即为所求。

Problem 1.2.4 存在两个发散数列，它们的积是收敛数列。

Solution: 取 $a_n=\frac{1+(-1)^n}{2}, b_n=\frac{1-(-1)^n}{2}$，则 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 即为所求。

这三个例子说明了发散数列和其它数列的乘积推不出任何敛散性，但我们知道两个收敛数列的乘积总是收敛的。

Problem 1.2.5 存在两个非负发散数列，它们的和是收敛数列。

Solution: 取这样两个数列即可：

$$1,0,1,0,1,0,\cdots$$
$$0,\frac{1}{2},0,\frac{2}{3},0,\frac{3}{4},\cdots$$

易知它们都是发散的，但它们的和收敛于 1。

Problem 1.2.6 存在一个发散数列 $\{a_n\}$，它的算术平均值数列 $\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\}$ 是收敛数列。

Solution: 取 $a_n=(-1)^n$ 即可，但只要 $\{a_n\}$ 收敛，则必有 $\left\{\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\right\}$ 收敛于前者极限值。

Problem 1.2.7 对任意正整数 k，都存在使得 $\lim_{n\to\infty}(a_{n+k}-a_n)=0$ 的发散数列 $\{a_n\}$。

Solution: 取 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，则 $\{a_n\}$ 发散，但显然有：

$$|a_{n+k}-a_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+k}\leq\frac{k}{n+1}\to 0(n\to\infty)$$

这个例子说明了，Cauchy 收敛准则的条件必须是“一致”的。

Problem 1.2.8 对任意严格递增的正整数数列 $\{b_n\}$，都存在使得 $\lim_{n\to\infty}(a_{b_n}-a_n)=0$ 的发散数列 $\{a_n\}$。

Solution: 显然 $\forall n,k>0$，都有 $b_{n+k}\geq b_n+k$，所以一定有 $\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$，下面分两种情况讨论：

(1) 若 b_n-n 有界，即存在 $M\geq 0$，使得 $\forall n>0$，都有 $b_n-n\leq M$，此时可取 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}$，则 $\{a_n\}$ 发散，但显然有：

$$|a_{b_n}-a_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{b(n)}\leq\frac{M}{n+1}\to 0(n\to\infty)$$

(2) 若 b_n-n 无界，那么存在最小的正整数 k 使得 $b_k>k$，此时取：

$$a_n=\begin{cases}1 & n=k,b_k,b_{b_k},\cdots\\ 0 & Otherwise\end{cases}$$

则 $\{a_n\}$ 中有一个全为 0 的子列和一个全为 1 的子列，所以 $\{a_n\}$ 发散，但显然有 $a_{b_n}-a_n=0$ 恒成立，故 $\lim_{n\to\infty}(a_{b_n}-a_n)=0$。

1.3 数列极限计算

常用的数列极限计算方法如下：

(1) 极限运算求解：直接用极限四则运算从已知极限求出结果

(2) 夹逼定理：用夹逼定理说明极限存在并直接得到结果

(3) 单调收敛定理：用单调收敛定理说明极限存在，然后计算极限

(4) Cauchy 收敛准则：用 Cauchy 收敛准则说明极限存在，然后计算极限

(5) Stolz 定理：数列中的“洛必达法则”，需要熟记两个版本的条件

Stolz 定理 1：设 $\{a_n\}$ 趋于零，$\{b_n\}$ 单调递减趋于零，则当 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}$ 存在或为 $+\infty$ 时有 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{b_n-b_{n+1}}$

Stolz 定理 2：设 $\{a_n\}$ 为任意数列，$\{b_n\}$ 单调递增趋于 $+\infty$，则当 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$ 存在或为 $+\infty$ 时有 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$

对于很多题目一个常见的思路是：先证明极限存在，再在等式两边取极限，最后解出极限值来。使用这个方法的时候，关键点是一定要说明极限是存在的。

Problem 1.3.1 证明 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$。

Solution: $1=\frac{1+1+\cdots+1}{n}\le\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}\le\frac{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=\sqrt[n]{n}$

易知 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，由夹逼定理 $\lim_{n\to\infty}\frac{1+\sqrt[n]{2}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$。

Problem 1.3.2 设 $a_1,a_2,\cdots,a_m$ 是 m 个大于 0 的数，证明 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$。

Solution: 设 $A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$，则有 $A<\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\le A\sqrt[n]{m}$。

易知 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$，由夹逼定理 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$。

Problem 1.3.3 计算 $\lim_{n\to\infty}\sin^2(\sqrt{n^2+n}\pi)$。

Solution: 根据 $\sin x$ 的周期性易知 $\lim_{n\to\infty}\sin^2(\sqrt{n^2+n}\pi)=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\sqrt{n^2+n}\pi-n\pi)=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\frac{n\pi}{\sqrt{n^2+n}+n})=\lim_{n\to\infty}\sin^2(\frac{\pi}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1})=\sin^2\frac{\pi}{2}=1$。

Problem 1.3.4 设 $a_n>0$，且 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，证明 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

Solution: 由 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$，$\exists N$，当 $n>N$ 时 $\frac{a_n}{a_{n+1}}>1$，即 $\{a_n\}$ 单调递增，又 $a_n>0$，所以 $\{a_n\}$ 单调递增有下界故收敛。设 $\lim_{n\to\infty}a_n=a$，由 $a_n=\frac{a_n}{a_{n+1}}a_{n+1}$，两边取极限得 $a=0$，即 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

Problem 1.3.5 设 $a_0=1, a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$，证明 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限。

Solution: 易知 $\frac{1}{2}\le a_n\le 1$，且对任意 n,k 有 $a_{n+1+k}-a_{n+1}=\frac{1}{1+a_{n+k}}-\frac{1}{1+a_n}=\frac{a_n-a_{n+k}}{(1+a_{n+k})(1+a_n)}$

所以 $|a_{n+1+k}-a_{n+1}|=\frac{|a_n-a_{n+k}|}{(1+a_{n+k})(1+a_n)}\le\frac{1}{(1+\frac{1}{2})^2}|a_n-a_{n+k}|=\frac{4}{9}|a_n-a_{n+k}|$

反复应用上述结论得 $|a_{n+1+k}-a_{n+1}|\le(\frac{4}{9})^{n+1}|a_0-a_k|\to 0(n\to\infty)$，故 $\{a_n\}$ 是 Cauchy 列所以收敛，在 $a_{n+1}=\frac{1}{1+a_n}$ 两端取极限得 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$。

Problem 1.3.6 给出 a_0, a_1，并设 $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}(n\ge 2)$，证明 $\{a_n\}$ 收敛并求其极限。

Solution: 由 $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ 得 $a_n-a_{n-1}=\frac{a_{n-2}-a_{n-1}}{2}$，反复运用此结论得 $a_n-a_{n-1}=\frac{a_1-a_0}{(-2)^{n-1}}$

将上式对 n 求和后得 $a_k-a_1=-\frac{a_1-a_0}{2}(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\cdots+\frac{1}{(-2)^{n-2}})=\frac{a_1-a_0}{3}(\frac{1}{(-2)^{n-1}}-1)$

所以 $a_n=\frac{2a_1+a_0}{3}+(-1)^{n-1}\frac{a_1-a_0}{3\cdot 2^{n-1}}$，直接计算得 $\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{2a_1+a_0}{3}$。

Problem 1.3.7 给出 $a_1>b_1>0$，并设 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}, b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$，证明 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛且极限相等。

Solution: 由题意知：

$$a_1>\frac{a_1+b_1}{2}=a_2>b_2=\sqrt{a_1b_1}>b_1$$
$$a_1>a_2>\frac{a_2+b_2}{2}=a_3>b_3=\sqrt{a_2b_2}>b_2>b_1$$

以此类推，由数学归纳法可得：

$$a_1>a_2>\cdots>a_n>\frac{a_n+b_n}{2}=a_{n+1}>b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}>b_n>\cdots>b_2>b_1$$

所以 $\{a_n\}$ 单调递减有下界 b_1，$\{b_n\}$ 单调递增有上界 a_1，则 $\{a_n\},\{b_n\}$ 均收敛。设 $\lim_{n\to\infty}a_n=A, \lim_{n\to\infty}b_n=B$，在 $a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$ 两边取极限即得 $A=B$。

Problem 1.3.8 给出三个数列 $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$，满足 $b_n=a_n-a_{n-1}, c_n=\frac{a_0+a_1+\cdots+a_n}{n+1}$，且 $\lim_{n\to\infty}nb_n=0, \lim_{n\to\infty}c_n=A$，证明 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$。

Solution: 实际上只需证明 $\lim_{n\to\infty}a_n-c_n=0$，计算得 $a_n-c_n=\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^n ib_i$，由 Stolz 定理得 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^n ib_i=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum_{i=1}^{n+1}ib_i-\sum_{i=1}^n ib_i}{(n+2)-(n+1)}=\lim_{n\to\infty}(n+1)b_{n+1}=0$，则 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$。

Problem 1.3.9 设数列 $\{a_n\}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}a_n\sum_{i=1}^n a_i^2=1$，求证 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$。

Solution: 设 $b_n=\sum_{i=1}^n a_i^2$，则 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$。由于 b_n 单调递增，若 a_n 极限不存在或 $\lim_{n\to\infty}a_n\neq 0$，则 b_n 趋于 $+\infty$，矛盾，所以有 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$。

由 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$，可得 $\lim_{n\to\infty}a_n^2b_n^2=1$。

由 $\lim_{n\to\infty}a_n=0, \lim_{n\to\infty}a_nb_n=1$，可得 $\lim_{n\to\infty}a_n^4b_n=0, \lim_{n\to\infty}a_n^6=0$，结合之前的结论有 $\lim_{n\to\infty}a_n^2b_n^2-2a_n^4b_n+a_n^6=1$，也即 $\lim_{n\to\infty}a_n^2b_{n-1}^2=\lim_{n\to\infty}a_n^2(b_n-a_n^2)^2=1$。

由于 b_n 单调递增，所以 $a_n^2 b_{n-1}^2 \leq a_n^2 b_n b_{n-1} \leq a_n^2 b_n^2$，由夹逼定理得 $\lim_{n\to\infty} a_n^2 b_n b_{n-1} = 1$。

三式相加得 $\lim_{n\to\infty} a_n^2(b_n^2 + b_n b_{n-1} + b_{n-1}^2) = 3$，由于 $a_n^2 = b_n - b_{n-1}$，结合立方差公式得 $\lim_{n\to\infty} b_n^3 - b_{n-1}^3 = 3$。

由 Stolz 定理得 $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n^3}{3n} = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n^3 - b_{n-1}^3}{(3n)-(3n-3)} = 1$，由 $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = 1$ 知 $\lim_{n\to\infty} a_n^3 b_n^3 = 1$，所以 $\lim_{n\to\infty} 3na_n^3 = 1$，则 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[3]{3n} a_n = 1$。

1.4 实数系基本定理

定理的叙述能够理解，证明过程简单了解即可，不用掌握复杂的证明和应用，更不需要去死记硬背证明过程。

简单总结几个定理如下：

(1) Weierstrass 聚点原理：有界无穷集必有聚点

(2) Heine-Borel 有限覆盖定理：有界闭集的任何开覆盖必有有限子覆盖

(3) Dedekind 分割原理：全体实数 $\mathbb{R}$ 的一个分割 (X, Y)，要么 X 有最大数、Y 无最小数，要么 X 无最大数、Y 有最小数

(4) Bolzano-Weierstrass 定理：有界数列必有收敛子列

(5) Cantor 区间套定理：设 $[a_n, b_n]$ 是一列闭区间，满足 $\forall n, [a_{n+1}, b_{n+1}] \subset [a_n, b_n]$ 且区间长度有极限 $\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0$，则存在唯一的数包含在所有闭区间中

上述定理中的 (1)(2)(3)(5)，连同 Cauchy 收敛准则、单调有界收敛原理和确界公理，并称为实数系七大定理，值得一提的是这七个定理是相互等价的。

2 函数的极限与连续性

2.1 函数极限概念

定义：$\varepsilon-\delta$ 语言，需要理解每句话的含义，用定义证明极限等于一个值的做法与数列极限类似，但函数极限在某些概念问题上显得更灵活。

Problem 2.1.1 判断下列哪些说法和 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 等价：

(1) $\forall\varepsilon\in(0,1),\exists\delta\in(0,1)$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-L|<\varepsilon$

(2) $\forall n\in\mathbb{N},\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-L|<\frac{1}{n}$

(3) $\forall\varepsilon>0,\exists n\in\mathbb{N}$，使得当 $0<|x-a|<\frac{1}{n}$ 时，有 $|f(x)-L|<\varepsilon$

(4) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $0<|f(x)-L|<\varepsilon$

(5) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-L|<\varepsilon$

(6) $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $|x-a|<\delta$ 时，有 $0<|f(x)-L|<\varepsilon$

Solution: (1)$\sim$(3) 显然是与 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 等价的。

(4) 是 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 的充分条件，但考虑 $f(x)\equiv L$ 的情况知不是必要条件。

(5) 是 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 的充分条件，但考虑 $f(x)=\frac{sinx}{x}$ 知不是必要条件。

对于 (6)，根本不存在一个函数满足这个条件，所以当然与 $\lim_{x\to a} f(x)=L$ 不等价。

Problem 2.1.2 设 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域上有定义，证明：

(1) $\lim_{x\to a} f(x)=0$ 当且仅当 $\lim_{x\to a}|f(x)|=0$。

(2) 若 $\lim_{x\to a} f(x)=L>0$，则 $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$。

Solution:

(1) 比较两个定义：

$\lim_{x\to a} f(x)=0$ 等价于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-0|<\varepsilon$

$\lim_{x\to a}|f(x)|=0$ 等价于 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $||f(x)|-0|<\varepsilon$

再由 $|f(x)-0|=||f(x)|-0|$ 知两者是等价的。

(2) $|\sqrt{f(x)}-\sqrt{L}|=\frac{|f(x)-L|}{\sqrt{f(x)}+\sqrt{L}}\leq\frac{|f(x)-L|}{\sqrt{L}}$

$\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$，使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时，有 $|f(x)-L|<\sqrt{L}\varepsilon$，则 $|\sqrt{f(x)}-\sqrt{L}|<\varepsilon$，所以 $\lim_{x\to a}\sqrt{f(x)}=\sqrt{L}$。

大多数证明极限值的题目实际上与数列极限无异，此处不再赘述。

Problem 2.1.3 设 $f(x), g(x)$ 在 a 的某个去心邻域上有定义，已知 $\lim_{x\to a} f(x)=0$ 且 $g(x)$ 有界，证明 $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$。

Solution: 由 $g(x)$ 有界，不妨设 $|g(x)|<M$，则 $0\le |f(x)g(x)|<M|f(x)|$。

由 $\lim_{x\to a} f(x)=0$ 知 $\lim_{x\to a}|f(x)|=0$，故由夹逼定理得 $\lim_{x\to a}|f(x)g(x)|=0$，所以 $\lim_{x\to a} f(x)g(x)=0$。

Problem 2.1.4 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格单调，且 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(b), x_n\in[a,b]$，求证 $\lim_{x\to\infty} x_n=b$。

Solution: 不妨设 $f(x)$ 递增，$\forall\varepsilon>0$，只需证明 $\exists N>0$，使得 $n>N$ 时有 $b-\varepsilon<x_n\le b$。

因为 $f(x)$ 严格单调递增，所以 $f(b-\varepsilon)<f(b)$，根据 $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(b)$，$\exists N>0$，使得 $n>N$ 时有 $f(x_n)>f(b-\varepsilon)$。再由 $f(x)$ 严格单调递增，当 $f(x_n)>f(b-\varepsilon)$ 时有 $x_n>b-\varepsilon$，故这个 N 正是我们需要的，所以 $\lim_{x\to\infty} x_n=b$。

2.2 函数极限计算

函数极限的计算方法种类繁多，其中很多方法属于纯粹的初等变形，技巧性比较高，故在学习时应该强化这方面的练习。

大致总结计算方法如下：

(1) 恒等变换：分子分母有理化、三角函数恒等变换、变量替换法

(2) 重要极限：$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 与 $\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

(3) 等价无穷小替换：$x\sim\sin x\sim\tan x$、$x\sim\ln(1+x)$、$a^x-1\sim x\ln a$ 和 $(1+\beta x)^\alpha-1\sim\alpha\beta x$，这几个需要熟记，其它的等价无穷小能记住更好，但记不住也可以借助泰勒展开推出来

(4) 洛必达法则：大家最熟练的法则之一，但使用时需要注意其局限性

函数极限的计算不是难点，但是是重中之重，它是后面很多内容和题目的基础。

Problem 2.2.1 计算 $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x$。

Solution: $\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2+x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+x}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x}}+1}=\frac{1}{2}$

Problem 2.2.2 计算 $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$。

Solution: $\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x(\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x})}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{2}=\frac{1}{2}$

Problem 2.2.3 计算 $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}$。

Solution: $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+2}-\sqrt{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}{(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})(\sqrt{x+2}-\sqrt{x})(\sqrt{x+2}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x+2}+\sqrt{x}}{2(\sqrt{x+1}+\sqrt{x})}=\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{2}{x}}+\sqrt{1}}{2(\sqrt{1+\frac{1}{x}}+\sqrt{1})}=\frac{1}{2}$

Problem 2.2.4 计算 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}$。

Solution: 做变量代换 $x=t^6$，则：

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^2-1}{t^3-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t+1}{t^2+t+1}=\frac{2}{3}$$

即 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{2}{3}$

Problem 2.2.5 计算 $\lim_{x\to -\infty}x^2+x\sqrt{x^2+2}$。

Solution: 做变量代换 $x=-u$，则：

$$\lim_{x\to -\infty}x^2+x\sqrt{x^2+2}=\lim_{u\to\infty}u(u-\sqrt{u^2+2})$$

$$=\lim_{u\to\infty}\frac{u(u-\sqrt{u^2+2})(u+\sqrt{u^2+2})}{u+\sqrt{u^2+2}}=\lim_{u\to\infty}\frac{-2}{1+\sqrt{1+\frac{2}{u}}}=-1$$

即 $\lim_{x\to -\infty}x^2+x\sqrt{x^2+2}=-1$

Problem 2.2.6 计算 $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin\pi x}{x-1}$。

Solution: $\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin\pi x}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\pi\sin\pi(x-1)}{-\pi(x-1)}=-\pi\lim_{x\to 1^+}\frac{\sin\pi(x-1)}{\pi(x-1)}=-\pi$

Problem 2.2.7 计算 $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}$。

Solution: $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$
$=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2\frac{x}{2}}{2(\frac{x}{2})^2}=\frac{1}{2}$

Problem 2.2.8 计算 $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x+3})^x$。

Solution: $\lim_{x\to\infty}(\frac{x+2}{x+3})^x=\lim_{x\to\infty}(1+\frac{-1}{x+3})^x=\lim_{x\to\infty}((1+\frac{-1}{x+3})^{-(x+3)})^{\frac{-x}{x+3}}$
$=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{-x}{x+3}}=e^{\lim_{x\to\infty}\frac{-x}{x+3}}=\frac{1}{e}$

Problem 2.2.9 计算 $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}$。

Solution: $\lim_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{3}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}((1-2x)^{\frac{1}{-2x}})^{\frac{-6x}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}e^{\frac{-6x}{\sin x}}=\frac{1}{e^6}$

Problem 2.2.10 计算 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n^n})^n$。

Solution: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n^n})^n=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1-\frac{1}{n^n}}{1-\frac{1}{n}})^n=\lim_{n\to\infty}((1+\frac{1}{n}\cdot\frac{1-\frac{1}{n^n}}{1-\frac{1}{n}})^{n\cdot\frac{1-\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n^n}}})^{\frac{1-\frac{1}{n^n}}{1-\frac{1}{n}}}$
$=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1-\frac{1}{n^n}}{1-\frac{1}{n}}}=e$

Problem 2.2.11 计算 $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}}$。

Solution: $\lim_{x\to 0^+} \frac{e^{x^3}-1}{1-\cos\sqrt{x-\sin x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^3}{\frac{1}{2}(\sqrt{x-\sin x})^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2x^3}{x-\sin x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{6x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{12x}{\sin x} = 12$

Problem 2.2.12 计算 $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{\sin x-\tan x}$。

Solution: $\lim_{x\to 0} \frac{e^{\sin x}-e^{\tan x}}{\sin x-\tan x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^{\tan x}(e^{\sin x-\tan x}-1)}{\sin x-\tan x} = \lim_{x\to 0} e^{\tan x} = 1$

Problem 2.2.13 计算 $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x}$。

Solution: $\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(\cot x)}{\ln x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{\cot x}(-\csc^2 x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{-x}{\sin x\cos x} = -1$

Problem 2.2.14 计算 $\lim_{x\to +\infty} x(\frac{\pi}{2}-\arctan x)$。

Solution: $\lim_{x\to +\infty} x(\frac{\pi}{2}-\arctan x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2}-\arctan x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{-\frac{1}{1+x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 1$

Problem 2.2.15 计算 $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}$。

Solution: $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x-x-1}{\ln x(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{\ln x+1-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{-\frac{1}{x^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}} = -\frac{1}{2}$

Problem 2.2.16 计算 $\lim_{x\to 0^+} x^x$。

Solution: 因为 $\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0$

所以 $\lim_{x\to 0^+} x^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x\ln x} = e^{\lim_{x\to 0^+} x\ln x} = e^0 = 1$。

Problem 2.2.17 计算 $\lim_{x\to +\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}}$。

Solution: $\lim_{x\to +\infty}(1+x^2)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} e^{\frac{1}{x}\ln(1+x^2)} = e^{\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(1+x^2)}{x}} = e^{\lim_{x\to +\infty} \frac{2x}{1+x^2}} = 1$

Problem 2.2.18 计算 $\lim_{x\to +\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x$。

Solution: 因为 $\lim_{x\to +\infty} x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x) = \lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to +\infty} \frac{\frac{\pi}{2\arctan x}\cdot\frac{2}{\pi(1+x^2)}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim_{x\to +\infty} \frac{x^2}{1+x^2}\cdot\frac{1}{\arctan x} = -\frac{2}{\pi}$

所以 $\lim_{x\to +\infty}(\frac{2}{\pi}\arctan x)^x = \lim_{x\to +\infty} e^{x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)} = e^{\lim_{x\to +\infty} x\ln(\frac{2}{\pi}\arctan x)} = e^{-\frac{2}{\pi}}$。

Problem 2.2.19 已知函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增，且 $\lim_{x\to +\infty} \frac{f(2x)}{f(x)} = 1$，求证 $\forall a>0$，$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$。

Solution: 分成三个步骤证明：

(1) 当 $1 \le a \le 2$ 时，由 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递增得 $1 = \frac{f(x)}{f(x)} \le \frac{f(ax)}{f(x)} \le \frac{f(2x)}{f(x)} \to 1(x \to +\infty)$，故由夹逼定理得 $\forall 1 \le a \le 2$，$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$。

(2) 当 $2 \le a \le 4$ 时，$\frac{2x}{x} \le \frac{f(ax)}{x} = \frac{f(2\cdot\frac{a}{2}x)}{f(\frac{a}{2}x)} \cdot \frac{f(\frac{a}{2}x)}{f(x)}$，由已知条件 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(2\cdot\frac{a}{2}x)}{f(\frac{a}{2}x)} = 1$，由上一步的证明 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(\frac{a}{2}x)}{f(x)} = 1$，故由夹逼定理得 $\forall 2 \le a \le 4$，$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$，反复进行这个步骤，则最终可得 $\forall a \ge 1$，$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$。

(3) 当 $0 < a < 1$ 时，$\frac{1}{a} > 1$，故 $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = \lim_{t\to+\infty} \frac{f(t)}{f(\frac{t}{a})} = 1$。

综上所述，$\forall a > 0$，$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 1$。

2.3 无穷小量与无穷大量

定义：极限语言和 $\varepsilon - \delta$ 语言都需要理解，并能够明白两种定义的等价性。特别需要注意的是，无穷大量的极限并不存在，“趋于 ∞”只是一个记号而已。

注意区分以下几个关系：

(1) 若 $f(x)$ 是 $g(x)$ 的高阶无穷小量，则 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的高阶无穷大量。

(2) 等价无穷小 (大) 量一定是同阶无穷小 (大) 量，但反之不正确，故我们使用等价无穷小替换时需要注意系数。

(3) 对无穷小量我们定义了阶数，对无穷大量我们没有定义类似概念。

2.4 函数的连续性

定义：极限语言和 $\varepsilon - \delta$ 语言都需要理解，并能够明白两种定义的等价性。

具体问题上，除了定义以外，还要熟悉连续函数的一些运算可以保持连续性，如四则运算、取绝对值、函数的复合、最大值最小值等。

三个重要定理：介值定理、反函数连续定理、闭区间最值定理，需要熟练掌握。

Problem 2.4.1 设 $f(x)$ 定义在 $\mathbb{R}$ 上，满足 $f(x+y) = f(x) + f(y)$，求证若 $f(x)$ 在 $x = 0$ 处连续，则 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

Solution: 由题意 $f(0) = f(0+0) = f(0) + f(0)$，故 $f(0) = 0$。

$\forall x_0 \in \mathbb{R}$，有 $f(x) = f(x_0 + x - x_0) = f(x_0) + f(x - x_0)$，由题意 $\lim_{x\to x_0} f(x - x_0) = f(0) = 0$，所以 $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) + \lim_{x\to x_0} f(x - x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x_0) = f(x_0)$，也即 $f(x)$ 在 x_0 处连续。

由 x_0 任意性，$f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续。

Problem 2.4.2 设函数 $f \in C[0,1]$，且其值域 $f([0,1]) \subset [0,1]$，求证 $\exists a \in [0,1]$，使得 $f(a) = a$。

Solution: 不妨设 $f(0) > 0, f(1) < 1$，否则 0 或 1 即为所求的 a。

定义 $F(x) = f(x) - x$，则 F 在 $[0,1]$ 上连续且 $F(0) = f(0) > 0$ 且 $F(1) = f(1) - 1 < 0$，由连续函数介值定理得 $\exists a \in [0,1]$ 使得 $F(a) = 0$，故 $f(a) = a$。

Problem 2.4.3 设函数 $f \in C[0, 2a]$，求证 $\exists x \in [0, a]$，使得 $f(x) = f(x + a)$。

Solution: 若 $f(a) = f(0)$，则结论显然成立，不妨设 $f(a) \neq f(0) = f(2a)$ 且 $f(a) > f(0)$。

定义 $F(x) = f(x) - f(x + a)$，则 F 在 $[0, a]$ 上连续且 $F(0) = f(0) - f(a) < 0$ 且 $F(a) = f(a) - f(2a) > 0$，由连续函数介值定理得 $\exists x \in [0, a]$ 使得 $F(x) = 0$，故 $f(x) = f(x + a)$。

Problem 2.4.4 设 $f \in C(\mathbb{R})$，且 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$ 存在，求证若 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可以取到正值，则必有正的最大值。

Solution: 由题意知，存在 $x_0 \in \mathbb{R}$，使得 $f(x_0) > 0$。

因为 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$，所以对 $\varepsilon = f(x_0)$，$\exists X > |x_0|$，使得 $|x| > X$ 时有 $|f(x)| < \varepsilon = f(x_0)$。

在区间 $[-X, X]$ 上，由闭区间最值定理，$\exists x_m \in [-X, X]$，使得 $f(x_m)$ 是 $[-X, X]$ 上的最大值，此时有 $f(x_m) \geq f(x_0) > 0$。

而 $\forall x \notin [-X, X]$，$f(x) < f(x_0) \leq f(x_m)$，故 $f(x_m)$ 为 f 在 $\mathbb{R}$ 上正的最大值。

Problem 2.4.5 设 $f(x) = a_n \cos nx + a_{n-1}\cos(n-1)x + \cdots + a_1 \cos x + a_0$，其中 $a_n > |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|$，求证 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上至少有 $2n$ 个零点。

Solution: $f(0) = a_n + a_{n-1} + \cdots + a_1 + a_0 \geq a_n - (|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) > 0$

$f(\frac{\pi}{n}) = a_n \cos\pi + a_{n-1}\cos\frac{(n-1)\pi}{n} + \cdots + a_1\cos\frac{\pi}{n} + a_0 \leq -a_n + (|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) < 0$

$f(\frac{2\pi}{n}) = a_n \cos 2\pi + a_{n-1}\cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + \cdots + a_1\cos\frac{2\pi}{n} + a_0 \leq a_n - (|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) > 0$

以此类推，直到 $f(\frac{(2n-1)\pi}{n}) < 0, f(2\pi) > 0$。

由连续函数介值定理，在区间 $(0, \frac{\pi}{n}), (\frac{\pi}{n}, \frac{2\pi}{n}), \cdots, (\frac{(2n-1)\pi}{n}, 2\pi)$ 内 $f(x)$ 至少各有一个零点，所以 $f(x)$ 在 $(0, 2\pi)$ 上至少有 $2n$ 个零点。

2.5 函数的间断点

不连续的点就称为间断点，间断点分为两大类，其中第一类又分为两种，需要熟知这三种间断点的定义、性质和判别方法。

三种间断点定义如下：

(1) 可去间断点：$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 存在但不等于 $f(x_0)$，则 x_0 为可去间断点，实际上以后我们经常忽略此类间断点并直接使用可去间断点处的极限值作函数值

(2) 跳跃间断点：$\lim_{x\to x_0} f(x)$ 不存在，其左右极限都存在但两者不相等，则 x_0 为跳跃间断点

(3) 第二类间断点：x_0 处左右极限至少有一个不存在，则 x_0 为第二类间断点

Problem 2.5.1 讨论 $f(x) = \begin{cases} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{2x^2} & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ \frac{1-\cos x}{x^2} & x < 0 \end{cases}$ 的连续性。

Solution: $f(x)$ 在各段内都是初等函数，故一定连续，只需考虑在 $x=0$ 处是否是间断点。

$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{2x^2} = \lim_{x\to0^+} \frac{\ln(1+\sin^2 x)}{\sin^2} \cdot \frac{\sin^2 x}{2x^2} = \frac{1}{2}$

$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$

故 $\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^-} f(x)$，所以 $x=0$ 是 $f(x)$ 的可去间断点。

Problem 2.5.2 讨论 $f(x) = \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1}$ 的连续性。

Solution: 可能的间断点都在各分母为 0 的点，即 $x=0$ 或 $x=1$ 处。

$\lim_{x\to0} f(x) = \lim_{x\to0} \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1} = \infty$

$\lim_{x\to1^-} f(x) = \lim_{x\to1^-} \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1} = -1$

$\lim_{x\to1^+} f(x) = \lim_{x\to1^+} \frac{1}{e^{\frac{x}{x-1}}-1} = 0$

故 $x=0$ 是 $f(x)$ 第二类间断点，$x=1$ 是 $f(x)$ 跳跃间断点。

3 导数

3.1 导数的概念

定义：$f(x)$ 在 x_0 处的导数被定义为极限 $\lim_{\Delta x\to0} \frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$ 的值。换言之，导数的计算就是极限的计算，导数的存在性和性质就是极限的存在性和性质，要认识好导数就必须先认识好其作为极限的一面。

另一方面，导数作为特殊的极限必然有其特殊性，同时也需要意识到导数特有的一些性质。

Problem 3.1.1 设 $f(x) = \begin{cases} x^2 sin\frac{1}{x} & x\neq0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$，试计算 $f'(x)$。

Solution: 当 $x\neq0$ 时，由链式法则即得 $f'(x) = 2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x}$。当 $x=0$ 时，用定义计算导数 $f'(0) = lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x} = \lim_{x\to0} = 0$。所以 $f(x) = \begin{cases} 2xsin\frac{1}{x} - cos\frac{1}{x} & x\neq0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$。

Problem 3.1.2 设 $f(x)$ 可导，$F(x) = f(x)(1+|sinx|)$ 在 $x=0$ 处可导，求证 $f(0)=0$。

Solution: 因为 $f(x), F(x)$ 都在 $x=0$ 处可导，故 $F(x)-f(x) = f(x)|sinx|$ 在 $x=0$ 处可导，记 $g(x) = f(x)|sinx|$，则 $g(0)=0$。

$g'_-(0) = \lim_{x\to0^-} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to0^-} \frac{-f(x)sinx}{x} = -f(0)$

$g'_+(0) = \lim_{x\to0^+} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to0^+} \frac{f(x)sinx}{x} = f(0)$

由 $g(x)$ 在 $x=0$ 处可导知 $g'_-(0) = g'_+(0)$，故 $-f(0) = f(0)$，所以 $f(0)=0$。

Problem 3.1.3 设 $f(x)$ 满足 $\lim_{x\to0} \frac{f(x)}{x} = 1$，且 $\forall x,y$ 都有 $f(x+y) = f(x)+f(y)+x^2y+xy^2$，试计算 $f'(x)$。

Solution: 直接将上式变形得 $\frac{f(x+y)-f(x)}{y} = \frac{f(y)}{y} + x^2 + xy$，两边令 $y\to0$ 即得 $f'(x) = 1+x^2$。

3.2 导数的计算

导数的计算以考察基本功为主，只要掌握了固定的方法套路，题目没有特别的难度。

几类导数的计算方法如下：

(1) 显函数求导：灵活运用链式法则即可。

(2) 隐函数求导：在等式两边进行微分，然后解出导数即可。如果要计算在一点处的导数，则需要按顺序计算出该点处各阶导数的值。

(3) 高阶导数：找规律递推，或者使用莱布尼兹公式 $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} u^{(k)}v^{(n-k)}$。

Problem 3.2.1 计算 $f(x) = \sqrt{x+\sqrt{x}}$ 的导数。

Solution: $f'(x) = \frac{(x+\sqrt{x})'}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{1+\frac{1}{2\sqrt{x}}}{2\sqrt{x+\sqrt{x}}} = \frac{2\sqrt{x}+1}{4\sqrt{x^2+x\sqrt{x}}}$

Problem 3.2.2 计算 $f(x) = arcsin(\sqrt{1-x^2})$ 的导数。

Solution: $f'(x) = \frac{(\sqrt{1-x^2})'}{\sqrt{1-(\sqrt{1-x^2})^2}} = \frac{1}{|x|}\frac{(1-x^2)'}{2\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{|x|\sqrt{1-x^2}}$

Problem 3.2.3 计算 $f(x) = ln\sqrt{\frac{1+cosx}{1-cosx}}$ 的导数。

Solution: $f'(x) = \frac{(\sqrt{\frac{1+cosx}{1-cosx}})'}{\sqrt{\frac{1+cosx}{1-cosx}}} = \frac{1}{\frac{1+cosx}{1-cosx}}\frac{(\frac{1+cosx}{1-cosx})'}{2\sqrt{\frac{1+cosx}{1-cosx}}} = \frac{-sinx(1-cosx)-sinx(1+cosx)}{2(1+cosx)(1-cosx)}$

Problem 3.2.4 计算 $f(x) = e^{x^2}sin(\frac{1}{x+1})$ 的导数。

Solution: $f'(x) = 2xe^{x^2}sin(\frac{1}{x+1}) - \frac{e^{x^2}}{(x+1)^2}cos(\frac{1}{x+1})$

Problem 3.2.5 隐函数 $y = y(x)$ 由 $e^{xy} + tan(xy) = y$ 确定，计算 $y'(0)$。

Solution: 在等式两边令 $x = 0$ 得 $y(0) = 1$。

两边微分得 $(e^{xy} + \frac{1}{cos^2(xy)})(y + x\frac{dy}{dx}) = \frac{dy}{dx}$，代入 $x = 0, y(0) = 1$ 得 $2 = \frac{dy}{dx}$，即 $y'(0) = 2$。

Problem 3.2.6 隐函数 $y = y(x)$ 由 $e^{x+y} - sin(x+y) = x^3$ 确定，计算 $\frac{dy}{dx}$ 和 $\frac{d^2y}{dx^2}$。

Solution: 两边微分得 $(e^{x+y} - cos(x+y))(1 + \frac{dy}{dx}) = 3x^2$，整理得 $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2}{e^{x+y}-cos(x+y)} - 1$。

两边再微分得 $(e^{x+y} + sin(x+y))(1 + \frac{dy}{dx})^2 + (e^{x+y} - cos(x+y))\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$，整理得 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{6x(e^{x+y}-cos(x+y))^2-9x^4(e^{x+y}+sin(x+y))}{(e^{x+y}-cos(x+y))^3}$。

Problem 3.2.7 已知 $f(x) = x^2sinx$，计算 $f^{(100)}(x)$。

Solution: 使用莱布尼兹公式，注意 x^2 的 $n \geq 3$ 阶导数均为 0，则有 $f^{(100)}(x) = x^2(sinx)^{(100)} + 100(x^2)'(sinx)^{(99)} + \frac{100\cdot 99}{2}(x^2)''(sinx)^{(98)} = x^2sin(x+\frac{100\pi}{2}) + 200xsin(x+\frac{99\pi}{2}) + 100\cdot 99sin(x+\frac{98\pi}{2}) = x^2sinx - 200xcosx - 9900sinx$。

Problem 3.2.8 已知 $f(x) = \frac{2x^3+1}{x^2-3x+2}$，计算 $f^{(n)}(x)$。

Solution: $f(x) = 2x + 6 + \frac{14x-11}{x^2-3x+2} = 2x + 6 + \frac{17}{x-2} - \frac{3}{x-1}$。

注意 $2x+6$ 的 $n \geq 2$ 阶导数均为 0，则有 $f^{(n)}(x) = (-1)^n n!(\frac{17}{(x-2)^{n+1}} - \frac{3}{(x-1)^{n+1}})$。

Problem 3.2.9 已知 $f(x) = e^x sinx$，计算 $f^{(n)}(x)$。

Solution: $f'(x) = e^x sinx + e^x sin(x + \frac{\pi}{2}) = \sqrt{2}e^x sin(x + \frac{\pi}{4})$

$f''(x) = \sqrt{2}e^x(sin(x + \frac{\pi}{4}) + sin(x + \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2})) = (\sqrt{2})^2 e^x sin(x + \frac{2\pi}{4})$

以此类推，重复上述过程得 $f^{(n)}(x) = (\sqrt{2})^n e^x sin(x + \frac{n\pi}{4})$。

Problem 3.2.10 已知 $f(x) = (arcsinx)^2$，计算 $f^{(n)}(0)$。

Solution: 设 $y = f(x)$，则 $y' = 2arcsinx\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (y')^2 = 4(arcsinx)^2\frac{1}{1-x^2} = \frac{4y}{1-x^2}$，整理得 $(1-x^2)(y')^2 = 4y$，两边再对 x 求导得 $(1-x^2)y'' - xy' = 2$。

由上述过程易得 $y(0) = 0, y'(0) = 0, y''(0) = 2$，再对等式两边求 x 的 n 阶导数，由莱布尼兹公式得 $(1-x^2)y^{(n+2)} - (2n+1)xy^{(n+1)} - n^2y^{(n)} = 0$，令 $x = 0$ 得 $y^{(n+2)}(0) = n^2y^{(n)}(0)$。

综上所述，$y^{(2m+1)}(0) = 0, y^{(2m+2)}(0) = 2[(2m)!!]^2, m = 1, 2, \cdots$。

4 导数的应用

4.1 微分中值定理

首先是对于三个中值定理的叙述要熟悉：

(1) 罗尔定理：设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 上可导，如果 $f(a) = f(b)$，则 $\exists\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = 0$。

(2) 拉格朗日中值定理：设 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 上可导，则 $\exists\xi \in (a,b)$，使得 $f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$。

(3) 柯西中值定理：设 f, g 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，开区间 (a,b) 上可导且在 (a,b) 上 $g'(x) \neq 0$，则 $\exists\xi \in (a,b)$，使得 $\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$。

在题目设置上，微分中值定理基本以证明题为主，题目类型变化较多，但核心都是巧妙构造函数并使用中值定理得到想要的点值。这部分题目难度较大，需要有良好的数学直觉才能找到诀窍，可以通过适当多做一些这类型的题目来进行提升。

Problem 4.1.1 设 $f(x), g(x) \in C[a,b] \cup C^2(a,b)$，满足 $f(a) = g(a)$、$f(b) = g(b)$ 且在 (a,b) 内有相等的最大值，证明 $\exists c \in (a,b)$ 使得 $f''(c) = g''(c)$。

Solution: 令 $F(x) = f(x) - g(x)$，则 $F(a) = F(b) = 0$。

设 f, g 的最大值 M 分别在 $\alpha \in (a,b), \beta \in (a,b)$ 处取到。若 $\alpha = \beta$，令 $\eta = \alpha = \beta$，则 $F(\eta) = 0$，若 $\alpha \neq \beta$，则 $F(\alpha) = M - g(\alpha) \geq 0, F(\beta) = f(\beta) - M \leq 0$，由连续函数介值定理知 $\exists \eta$，使得 $F(\eta) = 0$。

综上所述，一定存在 $\eta \in (a,b)$，使得 $F(a) = F(\eta) = F(b)$。由罗尔定理，$\exists \xi_1 \in (a,\eta), \xi_2 \in (\eta, b)$，使得 $F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0$。

再由罗尔定理，$\exists c \in (\xi_1, \xi_2) \subset (a,b)$，使得 $F''(c) = 0$，即 $f''(c) = g''(c)$。

Problem 4.1.2 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上满足 $0 < f(x) < 1$，$f(x)$ 可微且 $f'(x) \neq 1$，证明 $\exists! c \in (0,1)$ 使得 $f(c) = c$。

Solution: 先证存在性，设 $F(x) = f(x) - x$，则 $F(0) = f(0) > 0, F(1) = f(1) - 1 < 0$，由连续函数介值定理知 $\exists c \in (0,1)$，使得 $f(c) = c$。

再证唯一性，若存在 $c_1, c_2 \in (0,1)$ 使得 $f(c_1) = c_1, f(c_2) = c_2$，由拉格朗日中值定理知 $\exists \xi \in (0,1)$，使得 $c_1 - c_2 = f(c_1) - f(c_2) = f'(\xi)(c_1 - c_2)$。但 $f'(x) \neq 1$，故 $c_1 = c_2$。

Problem 4.1.3 设 $f(x)$ 在 $[0,c]$ 上，$f'(x)$ 在 $[0,c]$ 上单调递减且 $f(0) = 0$，证明对于 $0 \leq a \leq b \leq a + b \leq c$，必有 $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$。

Solution: 在 $(0,a), (b, a+b)$ 上分别使用拉格朗日中值定理得 $\exists \xi_1 \in (0,a), \xi_2 \in (b, a+b)$，使得 $f(a) - f(0) = f'(\xi_1)a, f(a+b) - f(b) = f'(\xi_2)a$。

由 $f'(x)$ 单调递减得 $f'(\xi_2) \leq f'(\xi_1)$，故 $f(a+b) - f(b) \leq f(a) - f(0) = f(a)$，即 $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$。

Problem 4.1.4 设 $f(x) \in C^2[0,a]$，且 $|f''(x)| \leq M$。若 $f(x)$ 在 $(0,a)$ 内取得最大值，证明 $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$。

Solution: 设 $f(x)$ 在 $c \in (0,a)$ 取得最大值，则由费马引理得 $f'(c) = 0$。

在 $(0,c), (c,a)$ 上分别对 $f'(x)$ 使用拉格朗日中值定理得 $\exists \xi_1 \in (0,c), \xi_2 \in (c,a)$，使得 $f'(c) - f'(0) = f''(\xi_1)c, f'(a) - f'(c) = f''(\xi_2)(a-c)$。

由 $f'(c) = 0$ 和 $|f''(x)| \leq M$ 得 $|f'(0)| \leq Mc, |f'(a)| \leq M(a-c)$，两个不等式相加得 $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$。

Problem 4.1.5 设 $f(x) \in C[0,1] \cup C^1(0,1)$，且 $f(1) = 0$，证明 $\exists c \in (0,1)$，使得 $f(c) + cf'(c) = 0$。

Solution: 设 $F(x) = xf(x)$，则 $F(0) = F(1) = 0$。

由罗尔定理得 $\exists c \in (0,1)$，使得 $F'(c) = 0$，即 $f(c) + cf'(c) = 0$。

Problem 4.1.6 设 $f(x), g(x) \in C[a,b] \cup C^2(a,b)$，满足 $f(a) = g(a) = f(b) = g(b) = 0$ 且 $g''(x) \neq 0$，证明：

(1) $\forall x \in (a,b)$，$g(x) \neq 0$。

(2) $\exists c \in (a,b)$，$\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}$。

Solution:

(1) 反证法，假设 $\exists c \in (a,b)$ 使得 $g(c) = 0$，则 $g(a) = g(c) = g(b) = 0$。由罗尔定理，$\exists \xi_1 \in (a,c), \xi_2 \in (c,b)$，使得 $g'(\xi_1) = g'(\xi_2) = 0$，再由罗尔定理，$\exists \eta \in (\xi_1, \xi_2)$，使得 $g''(\eta) = 0$，与题设矛盾。所以 $\forall x \in (a,b)$，$g(x) \neq 0$。

(2) 设 $F(x) = f(x)g'(x) - f'(x)g(x)$，则 $F(a) = F(b) = 0$。由罗尔定理，$\exists c \in (a,b)$，使得 $F'(c) = 0$，即 $F'(c) = f(c)g''(c) - f''(c)g(c) = 0$，整理得 $\frac{f(c)}{g(c)} = \frac{f''(c)}{g''(c)}$。

需要注意的是，如果这道题去掉第 (1) 问，第 (2) 问也需要说明 $g(x) \neq 0$。

Problem 4.1.7 设 $f(x) \in C[0,+\infty) \cup C^1(0,+\infty)$，满足 $f(0) = 0$ 且 $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$，证明 $\exists c \in (0,+\infty)$ 使得 $f'(c) = 0$。

Solution: 若 $f(x)$ 恒为 0，结论显然成立。否则 $\exists a \in (0,+\infty)$ 使得 $f(a) \neq 0$，不妨设 $f(a) > 0$。

因为 $f(0) = 0, f(a) > 0$，由连续函数介值定理，$\exists a_0 \in (0,a)$ 使得 $f(a_0) = fracf(a)2$。

由极限定义，$\exists b \in (a,+\infty)$，使得 $f(b) < \frac{f(a)}{2}$，再由连续函数介值定理，$\exists b_0 \in (a,+\infty)$ 使得 $f(b_0) = \frac{f(a)}{2}$。

注意到 $f(a_0) = f(b_0) = \frac{f(a)}{2}$，由罗尔定理，$\exists c \in (a_0, b_0)$，使得 $f'(c) = 0$。

4.2 洛必达法则应用

用洛必达法则计算具体的极限方法已经介绍过了，这里主要提一些有关洛必达法则进行抽象计算的例子，这些题目需要对洛必达法则的整体把握更好，难度也更大。

Problem 4.2.1 设 $f(x)$ 在 $x = 0$ 的某个邻域内可导，满足 $f(0) = 1$ 且 $f'(0) = 2$，试计算极限 $\lim_{n\to\infty}(nsin\frac{1}{n})^{\frac{n}{1-f(\frac{1}{n})}}$。

Solution: 考虑极限 $\lim_{x\to0}(\frac{1}{x}sinx)^{\frac{1}{x(1-f(x))}} = \lim_{x\to0}(1+\frac{sinx-x}{x})^{\frac{x}{sinx-x}\frac{sinx-x}{x^2(1-f(x))}}$。

由 $x - sinx \sim \frac{x^3}{6}$ 知 $\lim_{x\to0}\frac{sinx-x}{x} = 0$，故 $\lim_{x\to0}(1+\frac{sinx-x}{x})^{\frac{x}{sinx-x}} = e$。

而 $\lim_{x\to0}\frac{sinx-x}{x^2(1-f(x))} = \lim_{x\to0}\frac{sinx-x}{x^3}\frac{x}{1-f(x)} = -\frac{1}{6}\lim_{x\to0}\frac{x}{f(0)-f(x)} = \frac{1}{6f'(0)} = \frac{1}{12}$。

综上所述，原极限值为 $e^{\frac{1}{12}}$。

Problem 4.2.2 设 $f(x)$ 满足 $\lim_{x\to0}\frac{sin6x+xf(x)}{x^3} = 0$，计算 $\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2}$。

Solution: $\lim_{x\to0}\frac{sin6x+xf(x)}{x^3} = \lim_{x\to0}\frac{sin6x-6x+6x+xf(x)}{x^3} = -36 + \lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2} = 0$，所以 $\lim_{x\to0}\frac{6+f(x)}{x^2} = 36$。

Problem 4.2.3 设 $f(x)\in C^1(\mathbb{R})$，满足 $\lim_{x\to+\infty}f'(x)=e$ 且 $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x-c}{x+c})^x=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-f(x-1)]$，计算 c 的值。

Solution: $\lim_{x\to+\infty}(\frac{x-c}{x+c})^x=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2c}{x-c})^x=\lim_{x\to+\infty}(1+\frac{2c}{x-c})^{\frac{x-c}{2c}\frac{2cx}{x-c}}=e^{2c}$。

由拉格朗日中值定理，$\forall x\in\mathbb{R},\exists\xi\in(x-1,x)$，使得 $f'(\xi)=f(x)-f(x-1)$，即 $\lim_{x\to+\infty}[f(x)-f(x-1)]=\lim_{x\to+\infty}f'(\xi)=e$。

综上所述，$e^{2c}=e$，故 $c=\frac{1}{2}$。

4.3 泰勒展开

首先带两类余项的泰勒展开公式必须要熟记：

(1) Peano 余项：$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n)$

(2) Lagrange 余项：$f(x)=\sum_{k=0}^n\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$

可以看出，Lagrange 余项要比 Peano 余项更加精细，因此使用起来也更强有力一些，但在微积分课程中更多时候是使用 Peano 余项就足够了。

这部分重难点在如何得到泰勒多项式上，但不要忘记一定要带余项，否则等式是不成立的。

Problem 4.3.1 隐函数 $y=y(x)$ 由 $x^3+y^3+xy-1=0$ 确定，计算 $y(x)$ 的 2 阶 *Maclaurin* 展开（带 *Peano* 余项）。

Solution: 将 $x=0$ 代入 $x^3+y^3+xy-1=0$ 得 $y(0)=1$。

方程两边求导得 $3x^2+3y^2y'+y+xy'=0$，代入 $x=0,y(0)=1$ 得 $y'(0)=-\frac{1}{3}$。

方程两边再求导得 $6x+6y(y')^2+3y^2y''+2y'+xy''=0$，代入 $x=0,y(0)=1,y'(0)=-\frac{1}{3}$ 得 $y''(0)=0$。

所以 $y(x)$ 的 2 阶 Maclaurin 展开为 $y(x)=1-\frac{x}{3}+o(x^2)$。

Problem 4.3.2 隐函数 $y=y(x)$ 由 $x+y+xy^n=0$ 确定，满足 $f(0)=0$，计算 $y(x)$ 的 n 阶 *Maclaurin* 展开（带 *Peano* 余项）。

Solution: $y=-x-xy^n=-x+o(x)(x\to0)$，故 $y^n=(-x+o(x))^n=(-1)^nx^n+o(x^n)$。

代入隐函数方程得 $y(x)=-x+(-1)^{n+1}x^{n+1}+o(x^{n+1})(x\to0)$。