习题课 4

2019 年 11 月 5 日

习题 1. 设 A, B 为 n 阶实方阵，证明 AB 可逆当且仅当 A 和 B 均可逆。

证明. 若 A, B 可逆，直接验证 AB 的逆为 $B^{-1}A^{-1.}$ 下面证明若 AB 可逆则 A 和 B 均可逆。

证明一：由 AB 可逆，对任意 $b \in \mathbb{R}^n$, $ABX = b$ 有解 X_0。所以，方程 $AX = b$ 有解 BX_0. A 可逆。

$(AB)^{-1}A$ 为 B 的左逆，所以 B 也可逆。

证明二：如果 AB 可逆，则 $rank(AB) = n$. 因此，$n \geq rank(A), rank(B) \geq rank(AB) = n$, $rank(A) = rank(B) = n$. 所以 A, B 可逆。

注记： 也可利用行列式证明。 □

习题 2. *(1)* $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$，$v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$，$v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix}$ 是否线性相关？

(2) $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, v_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ \pi \end{bmatrix}$ 是否线性相关？求 $Span(v_1, v_2, v_3)$ 一组基。

解：(1) 注意 $v_1 + v_2 = v_3$，它们线性相关。

(2) 将三个向量放在一起构成 3×3 矩阵 A，由于行线性相关，列也线性相关。利用 A 的行约化梯形式找出线性无关的向量组。

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & \pi \end{bmatrix}$$

$$R = rref(A) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2\pi - 9 \\ 0 & 1 & -\pi + 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

所以，v_1, v_2 线性无关，v_2, v_3 线性无关，v_1, v_3 线性无关。

习题 3. *(1)* 证明如果 $n > m$, $\mathbb{R}^m$ 中任意 n 个向量线性相关。

(2) 如果 $\dim V = m$, $n > m$, 则 V 中任意 n 个向量线性相关。

(3) 设 W 为 V 的子空间，则 $\dim W \leq \dim V$.

证明. (1) 将 n 个向量放在一起构成矩阵 A, $\dim N(A) = n - rank(A) \geq n - m \geq 1$, 所以 A 的列线性相关。

(2) 取 $v_1, \ldots, v_m$ 为 V 的一组基，设 $w_1, \ldots, w_n$ 为 V 中任意 n 个向量。则

$$[w_1, \ldots, w_n] = [v_1, \ldots, v_m]A,$$

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$。由于 $n > m$, $AX = 0$ 有非零解 $[c_1, \ldots, c_n]^T$. 因此，

$$[w_1, \ldots, w_n] \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = [v_1, \ldots, v_m]A \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{bmatrix} = 0.$$

因此，$w_1, \ldots, w_n$ 线性相关。

(3) 反证法。如果 W 的维数大于 $\dim V$, 则 W 中有多于 m 个线性无关向量，这些向量在 V 中也线性无关，与 (2) 矛盾。 $\square$

习题 4. 设 $\{v_1, \ldots, v_n\}$ 为 V 的一组基,A 为方阵。令

$$[w_1, \ldots, w_n] := [v_1, \ldots, v_n]A.$$

$\{w_1, \ldots, w_n\}$ 为 V 的基当且仅当 A 可逆。

简要解答： 证明 $\{w_1, \ldots, w_n\}$ 构成基需证明它们线性无关且张成 V.

习题 5. 令 S 为 n 阶对称矩阵全体，A 为 n 阶反对称矩阵全体。

(1) 证明 S, A 为 $M_{n\times n}(\mathbb{R})$ 的子空间。

(2) 求 S, A 以及 $S\cap A$ 的维数。

(3) 证明任意方阵可写成一个对称矩阵与一个反对称矩阵的和。

解：（1）验证加法、数乘封闭。

（2）$\dim S = n(n+1)/2$, $\dim A = n(n-1)/2$, $S\cap A = \{0\}$.

（3）

$$\dim(S+A) + \dim S\cap A = \dim S + \dim A$$

得到 $\dim(S+A) = n(n+1)/2 + n(n-1)/2 = n^2 = \dim M_{n\times n}(\mathbb{R})$. 所以，$S+A = M_{n\times n}(\mathbb{R})$, 即一个方阵可以写成一个对称阵和反对称矩阵的和。

习题 6. *(1)* 设 A 为 $m\times n$ 阶实方阵, 证明 $N(A^TA) = N(A)$.

(2) 证明 $C(A^TA) = C(A^T)$.

(3) 证明 A^TA 可逆当且仅当 A 是列满秩矩阵。

(4) 设 A 为 $m\times n$ 阶复方阵，上述命题是否一定成立？

解：(1) 容易验证 $N(A)\subset N(A^TA)$. 反之，设 $X\in N(A^TA)$,

$$A^TAX = 0$$

左乘 X^T, $X^TA^TAX = 0$, 即

$$||AX||^2 = 0.$$

我们得到 $AX = 0$.

(2) 首先有包含关系 $C(A^TA) = \mathrm{Im}(A^TA)\subset \mathrm{Im}(A^T) = C(A^T)$, (或者将 A^TA 的列写成 A^T 列的线性组合)。其次，计算维数

$$\dim C(A^TA) = n - \dim N(A^TA) = n - \dim N(A) = rank(A) = rank(A^T) = \dim C(A^T).$$

所以 $C(A^TA) = C(A^T)$.

(3) A^TA 可逆当且仅当 $n = \dim C(A^TA)$, 当且仅当 $rank(A) = \dim C(A^T) = n$, 即 A 列满秩。

(4) 考虑 $A = \begin{bmatrix} \sqrt{-1} \\ 1 \end{bmatrix}$. $A^TA = 0$.

注记： 在复矩阵情形，应该考虑 $\overline{A}^T A$.

习题 7. *(1)* 设 (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上三个点，且 x_1, x_2, x_3 互不相同。证明存在次数为 2 的多项式函数 $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, $a_i \in \mathbb{R}$ 满足

$$p(x_i) = y_i, \ \forall 1 \le i \le 3.$$

(2) 设 (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$, (x_{n+1}, y_{n+1}) 为平面 $\mathbb{R}^2$ 上 $n+1$ 个点，且 $\{x_i, \ 1 \le i \le n\}$ 互不相同。证明存在次数为 n 的多项式函数 $p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$ 满足

$$p(x_i) = y_i, \ \forall 1 \le i \le n+1.$$

证明. (1) $p(x_i) = y_i$, $\forall 1 \le i \le 3$ 给出方程组

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 = y_2 \\ a_0 + a_1 x_3 + a_2 x_3^2 = y_3 \end{aligned}$$

所以，a_0, a_1, a_2 满足方程

$$\begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

令 $A = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \\ 1 & x_3 & x_3^2 \end{bmatrix}$, A^T 为习题课 3 题目（2）解答中出现的范德蒙矩阵。由于 x_1, x_2, x_3 互不相同，A^T 可逆，所以 A 也可逆。$[a_0, a_1, a_2]^T$ 有唯一解。

（2）利用 n 阶范德蒙矩阵。 □

注记： 我们事实上证明了满足条件的多项式是唯一的。拉格朗日写下了这个

多项式，这便是拉格朗日插值公式：

$$p(x)=\sum_{i=1}^{n+1}(y_i\prod_{1\le j\le n+1,\ j\ne i}\frac{x-x_j}{x_i-x_j})$$

习题 8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关。证明：当且仅当 n 为奇数时，向量组

$$\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\ \alpha_n+\alpha_1$$

也线性无关。

证明. 考虑

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+k_{n-1}(\alpha_{n-1}+\alpha_n)+k_n(\alpha_n+\alpha_1)=\mathbf{0}. \quad (1)$$

也即

$$(k_1+k_n)\alpha_1+(k_1+k_2)\alpha_2+(k_2+k_3)\alpha_3+\cdots+(k_{n-1}+k_n)\alpha_n=\mathbf{0}.$$

由题设，有 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关，于是

$$\begin{cases} k_1+k_n=0, \\ k_1+k_2=0, \\ k_2+k_3=0, \\ \cdots \\ k_{n-1}+k_n=0, \end{cases} \quad (2)$$

各式相加，可得

$$k_1+k_2+\cdots+k_n=0.$$

- 当 n 为奇数时，由上式及方程组 (2) 中的偶数行可得 $k_n=0$。再带入 (2)，可依次解得

  $$k_1=k_2=\cdots=k_n=0$$

  即 (1) 只有零解，从而 $\alpha_1+\alpha_2,\ \alpha_2+\alpha_3,\ \cdots,\alpha_{n-1}+\alpha_n,\ \alpha_n+\alpha_1$ 线性无关。

- 当 n 为偶数时，方程组 (2) 有非零解

$$k_1 = 1, k_2 = -1, k_3 = 1, k_4 = -1, \cdots, k_{n-1} = 1, k_n = -1$$

从而 (1) 有非零解，则 $\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_2 + \alpha_3, \cdots, \alpha_{n-1} + \alpha_n, \alpha_n + \alpha_1$ 线性相关。

□

习题 9. 设 V 是线性空间，且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in V$，证明：

（*1*）若 V 中每个向量都可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出，且有一个向量的表出方法是唯一的，则 $dim\, V = n$ 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 就是 V 的一组基。

（*2*）若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，且 V 中任何 $n+1$ 个向量都线性相关，则 $dim\, V = n$ 且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 就是 V 的一组基。

简要解答：（1）需要证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关。反证法，若它们线性相关，则不可能有某个向量可由它们“唯一”线性表出。（2）任取 $\beta \in V$，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta$ 线性相关，而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关，则 β 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性表出。

习题 10. 考虑两个线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n = b_1, \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n = b_2, \\ \cdots \\ a_{m1}y_1 + a_{m2}y_2 + \cdots + a_{mn}y_n = b_m, \end{cases} \tag{3}$$

和

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + \cdots + a_{m1}x_m = 0, \\ \cdots \\ a_{1n}x_1 + a_{2n}x_2 + \cdots + a_{mn}x_m = 0, \\ b_1x_1 + b_2x_2 + \cdots + b_mx_m = 1, \end{cases} \tag{4}$$

求证：*(3)* 有解 $\Longleftrightarrow$*(4)* 无解。

证明. 记 $A=(a_{i,j})\in\mathbb{M}_{m\times n}$，$\beta=(b_i)\in\mathbb{R}_m$ 及 $\tilde{A}=[A,\beta]$。则 (3) 的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$A\text{ 及 }\tilde{A},$$

而 (4) 的系数矩阵和增广矩阵分别为

$$\tilde{A}^T\text{ 及 }B:=\begin{bmatrix}A^T & \mathbf{0}\\ \beta^T & 1\end{bmatrix}$$

由 B 的结构易看出：$rank(A)=rank(A^T)=rank(B)-1$。由非齐次线性方程组有解的条件，有：

$$(3)\text{ 有解}\iff rank(A)=rank(\tilde{A})$$

$$(4)\text{ 无解}\iff rank(\tilde{A})\neq rank(B)$$

只需证明：$rank(A)=rank(\tilde{A})\iff rank(\tilde{A})\neq rank(B)$。

"$\Longrightarrow$"：若 $rank(A)=rank(\tilde{A})$，则

$$rank(\tilde{A})=rank(B)-1\neq rank(B).$$

"$\Longleftarrow$"：若 $rank(\tilde{A})\neq rank(B)$，则从 B 的结构可以看出 $rank(\tilde{A})=rank(B)-1$。从而

$$rank(\tilde{A})=rank(B)-1=rank(A).$$

□

习题 11. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 为 s 个线性无关的 n 维列向量。证明：存在齐次线性方程组 $B\mathbf{x}=\mathbf{0}$，使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 为 $N(B)$ 的一组基。

证明. 记 $A=\begin{bmatrix}\alpha_1^T\\ \alpha_2^T\\ \cdots\\ \alpha_s^T\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_{s\times n}$。因为 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 线性无关，所以 $dim\,C(A^T)=$

s，从而 $rank(A)=s$。考虑齐次线性方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$，有

$$dim\,N(A)=n-rank(A)=n-s.$$

设 $N(A)$ 一组基为

$$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}\in\mathbb{R}^n.$$

再记 $B=\begin{bmatrix}\beta_1^T\\ \beta_2^T\\ \cdots\\ \beta_{n-s}^T\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_{(n-s)\times n}$，则 $rank(B)=n-s$ 且

$$dim\,N(B)=n-rank(B)=n-(n-s)=s.$$

由 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}\in N(A)$，有 $AB^T=A[\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_{n-s}]=O$，从而 $BA^T=O$,则 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s\in N(B)$。由这些向量的线性无关性及 $dim\,N(B)=s$，得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 为 $N(B)$ 一组基。 □

习题 12. 设 $A=(a_{i,j})\in M_{s\times n}(\mathbb{R})$。证明：方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解的充要条件是向量 $\beta:=[b_1,b_2\cdots,b_n]^T$ 可由向量组 $\alpha_i=[a_{i,1},a_{i,2},\cdots,a_{i,n}]^T$, $i=1,2,\cdots,s$ 线性表出。

证明. “$\Longrightarrow$”：若方程组 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，则 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 与 $\begin{bmatrix}A\\ \beta^T\end{bmatrix}\mathbf{x}=\mathbf{0}$ 同解。从而 $N(A)=N(\begin{bmatrix}A\\ \beta^T\end{bmatrix})$。所以

$$dimC(A^T)=n-dimN(A)=n-dimN(\begin{bmatrix}A\\ \beta^T\end{bmatrix})=dimC(\begin{bmatrix}A\\ \beta^T\end{bmatrix}^T).$$

从而 β 可由 A 的行向量组 α_i, $i=1,2,\cdots,s$ 线性表出。

“$\Longleftarrow$”：设 $\beta^T=k_1\alpha_1^T+k_2\alpha_2^T+\cdots+k_s\alpha_s^T=[k_1,k_2,\cdots,k_s]A$。设 $\mathbf{x}$ 满足 $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$，则

$$\beta^T\mathbf{x}=[k_1,k_2,\cdots,k_s]A\mathbf{x}=\mathbf{0}$$

□

习题 13. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 与 $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 是两组 n 维向量。证明：若这两个向量组都线性无关，则线性空间 $span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)\cap span(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$ 的维数等于齐次线性方程组 $x_1\alpha_1+\cdots+x_s\alpha_s+y_1\beta_1+\cdots+y_t\beta_t=\mathbf{0}$ 的解空间（即系数矩阵的 *nullspace*）的维数。

证明. 记 $S_1=span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s)$，$S_2=span(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)$ 以及

$$A=[\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t].$$

注意到:

$$S_1+S_2=span(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t)=C(A).$$

由题设，有 $dim\,S_1=s$，$dim\,S_2=t$。由习题课 3（或书本 3.4 节的 43 题）中的维数公式，有

$$dim\,S_1\cap S_2=dim(S_1)+dim(S_2)-dim(S_1+S_2)=s+t-dimC(A).$$

我们又知道 $dimN(A)=s+t-rank(A)=s+t-dimC(A)$, 于是

$$dim\,S_1\cap S_2=dimN(A).$$

□

习题 14. 设 $W_1=span(\alpha_1,\alpha_2)$，$W_2=span(\beta_1,\beta_2)$，其中

$$\alpha_1=[1,2,1,0]^T,\qquad \alpha_2=[-1,1,1,1]^T,$$

$$\beta_1=[2,-1,0,1]^T\qquad \beta_2=[1,-1,3,7]^T.$$

求 W_1+W_2 与 $W_1\cap W_2$ 的基与维数。

解:（1）$W_1+W_2=span(\alpha_1,\alpha_2)+span(\beta_1,\beta_2)=span(\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2)$。从而 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2$ 的极大线性无关组为 W_1+W_2 的一组基。求极大线性无关组的算法可参见习题课 3 的 11 题。将 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\beta_1,\beta_2]$ 进行初等行变换

得到 rref:

$$R=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

主元所在的列：1，2，3 列，从而 $\alpha_1,\alpha_2,\beta_1$ 为 W_1+W_2 的一组基，而 $dim(W_1+W_2)=3$。

（2）设 $\alpha\in W_1\cap W_2$，则 $\alpha\in W_1$ 且 $\alpha\in W_2$。设

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=-y_1\beta_1-y_2\beta_2.$$

为了得到 x_1,x_2,y_1,y_2 之间的关系，我们解线性方程组

$$x_1\alpha_1+x_2\alpha_2+y_1\beta_1+y_2\beta_2=\mathbf{0}.$$

同 (1) 中的步骤，将 A 化为 R，前三个变量为主元，取最后一个变量 y_2 为自由变量，解得：

$$x_1=y_2,\quad x_2=-4y_2,\quad y_1=-3y_2,\quad \forall y_2\in\mathbb{R}$$

从而

$$\alpha=x_1\alpha_1+x_2\alpha_2=y_2\alpha_1-4y_2\alpha_2=y_2[5,-2,-3,-4]^T$$

（或者 $\alpha=-y_1\beta_1-y_2\beta_2=3y_2\beta_1-y_2\beta_2=y_2[5,-2,-3,-4]^T$）
于是 $[5,-2,-3,-4]^T$ 为 $W_1\cap W_2$ 一组基，维数为 1。