习题课九(题目)

一 设$A=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ 1 & -4\end{pmatrix}$.

(1) 求A的特征值和特征向量。

(2) 求$\det(e^{At})$.

(3) 对微分方程$\frac{du}{dt}=Au$, 给出非零初始向量$u(0)$, 使得$t\to\infty$时, $u(t)\to\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$.

二 设A是一个实对称阵满足$A\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\4\\-6\end{pmatrix}$和$A\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-4\\6\end{pmatrix}$.

(1) A是否可逆？解释原因.

(2) 给出满足上述性质的矩阵A的例子，并且A的特征值之和为0.

三 设S是$\mathbb{R}^7$的一个4维子空间，P是S上的投影矩阵.

(a) 求出P的7个特征值.

(b) 求出P的全部特征向量.

(c) 考虑一阶齐次微分方程组$\frac{du}{dt}=-Pu$, 满足$u(0)=u_0\in\mathbb{R}^7$. 假设$u=u(t)$是解函数，求极限向量$u(\infty)=\lim_{t\to\infty}u(t)$.

四 构造一个三阶实对称矩阵，使得其特征值为$1,1,-1$, 属于特征值1的线性无关的特征向量有$\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\end{pmatrix}^T$和$\begin{pmatrix}2 & 2 & 1\end{pmatrix}^T$.

五 设$A=(a_{ij})$是n阶实对称矩阵, 其特征值是$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$.

(1) 证明对于任意n维列向量$\alpha\in\mathbb{R}^n$, 均有

$$\lambda_1\alpha^T\alpha\le\alpha^TA\alpha\le\lambda_n\alpha^T\alpha.$$

(2) 展示$\lambda_1\le a_{11}\le\lambda_n$.

(3) 假设$A=(a_{ij})$是一个2阶实对称阵. 求a_{12}可能的最大值和最小值.

六 设A,B是n阶实对称矩阵, 其特征值分别是$\lambda_1\le\lambda_2\le\cdots\le\lambda_n$和$\mu_1\le\mu_2\le\cdots\le\mu_n$. 求证：$A+B$的特征值全部落在区间$[\lambda_1+\mu_1,\lambda_n+\mu_n]$.

七 若$A=(a_{ij})$是n阶实方阵，且A的秩小于n，则A的伴随矩阵的特征值包含至少$n-1$个0, 若存在非零特征值，则它是$\sum_{i=1}^n C_{ii}$.

八 设A是一个n阶反对称矩阵, 即$A^T=-A$且A是实矩阵. 证明：

(1) I_n+A可逆且$(I_n-A)(I_n+A)^{-1}$是正交阵.

(2) 假设$n=3$，则存在正交阵Q和向量$b\in\mathbb{R}$，使得$Q^TAQ=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&b\\0&-b&0\end{pmatrix}$.