练习题

一、填空题

1．已知 $f(x)=x^x$，则 $f'(1)=$ ____________.

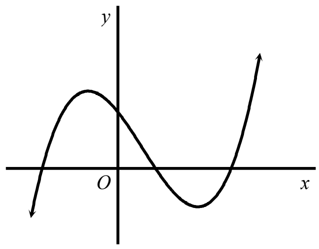
答案：1

解：$\ln f(x)=x\ln x$，

$\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\ln x+1$，$f'(x)=x^x(\ln x+1)$。

$f'(1)=1$

2．设函数 $f(x)$ 的导函数 $y=f'(x)$ 的图形如右图所示，则函数 $f(x)$ 的极值点个数为____________，曲线 $y=f(x)$ 的拐点个数为 ____________.



答案：3，2

3．设函数 $f(x)=\mathrm{e}^{\cos x}-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f'''(0)=24$，则 $a=$____________.

答案：4

解：因为 $\mathrm{e}^{\cos x}$ 是偶函数，所以 $\mathrm{e}^{\cos x}$ 的 3 阶导数是奇函数，故在 $x=0$ 处的 3 阶导数等于 0．又因为

$$-\frac{x}{1+ax^2}=-x(1-ax^2+o(x^2))=-x+ax^3+o(x^3)\text{，}$$

所以 $a=\dfrac{f'''(0)}{3!}=\dfrac{24}{6}=4$．

4．当 $x\to0^+$ 时，$\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$ 与 ax^b 是等价无穷小量，则 $ab=$____________.

答案：2

解法 1：记 $f(x)=\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\,\mathrm{d}t$，则

$$f'(x)=2x\sin x\text{，}\quad f''(x)=2\sin x+2x\cos x\text{，}\quad f'''(x)=4\cos x-2x\sin x\text{，}$$

所以 $f(x)=f(0)+f'(0)x+\dfrac{1}{2}f''(0)x^2+\dfrac{1}{6}f'''(0)x^3+o(x^3)=\dfrac{2}{3}x^3+o(x^3)$。

由题设可知$a=\dfrac{2}{3}$, $b=3$，所以$ab=2$。

解法 2：由于$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t}{ax^b}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x\sin x}{abx^{b-1}}=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{2x^2}{abx^{b-1}}$，且$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\int_0^{x^2}\sin\sqrt{t}\mathrm{d}t}{ax^b}=1$，

所以$ab=2$。

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})=$____________.

答案：$\sin 1-\cos 1$

解：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(\sin\dfrac{1}{n}+2\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+n\sin\dfrac{n}{n})$

$=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}(\dfrac{1}{n}\sin\dfrac{1}{n}+\dfrac{2}{n}\sin\dfrac{2}{n}+\cdots+\dfrac{n}{n}\sin\dfrac{n}{n})=\int_0^1 x\sin x\mathrm{d}x$

$=-x\cos x\big|_0^1+\int_0^1\cos x\mathrm{d}x=\sin 1-\cos 1$。

6. 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{\alpha}\ln(1+\dfrac{1}{n})$条件收敛，则$\alpha$的取值范围是____________.

答案：$[0,1)$

解：$(-1)^n n^{\alpha}\ln(1+\dfrac{1}{n})\sim\dfrac{(-1)^n}{n^{1-\alpha}}$。

当$1-\alpha\leqslant 0$时，级数通项不是无穷小量，级数发散；

当$1-\alpha>1$时，级数绝对收敛；

当$0<1-\alpha\leqslant 1$，即$0\leqslant\alpha<1$时，$(-1)^n n^{\alpha}\ln(1+\dfrac{1}{n})=\dfrac{(-1)^n}{n^{1-\alpha}}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{2n^{2-\alpha}}+o(\dfrac{1}{n^{2-\alpha}})$，级数条件收敛。

7. 曲线$y=\dfrac{x^4+x^2+1}{x(1+x^2)}$的斜渐近线方程为____________.

答案：$y=x$

解：因为$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{y}{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+x^2+1}{x^2(1+x^2)}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}(\dfrac{x^4+x^2+1}{x(1+x^2)}-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x(1+x^2)}=0$，所以$y=x$是曲线$y=\dfrac{x^4+x^2+1}{x(1+x^2)}$的斜渐近线。

8. 设函数$y=y(x)$由方程$\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-x}+xy=0$确定，则$\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=$____________,

$\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0} =$ ____________.

答案：-1， 2

解：由 $\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-x}+xy=0$ 两端关于 x 求导，得

$$\mathrm{e}^y y'+\mathrm{e}^{-x}+y+xy'=0\text{，}$$

再关于 x 求导，得

$$\mathrm{e}^y(y')^2+\mathrm{e}^y y''-\mathrm{e}^{-x}+2y'+xy''=0\text{。}$$

由 $\mathrm{e}^y-\mathrm{e}^{-x}+xy=0$ 知 $y(0)=0$。

由 $\mathrm{e}^y y'+\mathrm{e}^{-x}+y+xy'=0$ 知 $\left.\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}=-1$。

由 $\mathrm{e}^y(y')^2+\mathrm{e}^y y''-\mathrm{e}^{-x}+2y'+xy''=0$ 知 $\left.\dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=0}=2$。

9．设 $f(x)$ 是以 2 为周期的周期函数，且 $f(x)=x\ (-1\leqslant x<1)$，则 $f(x)$ 以 2 为周期的傅里叶级数为____________，级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}$ 的和等于____________.

答案：$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$，$\dfrac{1}{2}$

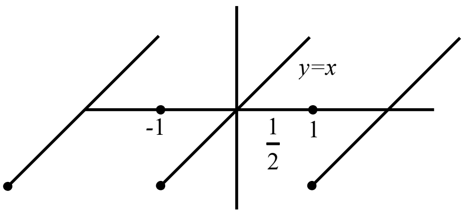
解：$\displaystyle f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\pi x+b_n\sin n\pi x)$。

因为 $f(x)$ 是奇函数，所以 $a_n=0$。

$$b_n=2\int_0^1 x\sin n\pi x\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}x\cos n\pi x\Big|_0^1+\frac{2}{n\pi}\int_0^1\cos n\pi x\mathrm{d}x=-\frac{2}{n\pi}\cos n\pi=\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\text{，}$$

所以 $\displaystyle f(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin n\pi x$。

$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(-1)^{n+1}}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2}=f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}$。



10． $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+x-\frac{1}{x})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=$____________.

答案：$\dfrac{3}{2}\mathrm{e}^{\frac{5}{2}}$

解：$\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{2}(1+x-\frac{1}{x})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2}[1+x(1-\frac{1}{x^2})]\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x=\int_{\frac{1}{2}}^{2}\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x+\int_{\frac{1}{2}}^{2}x(1-\frac{1}{x^2})\mathrm{e}^{x+\frac{1}{x}}\mathrm{d}x$

$$=\int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}}dx + xe^{x+\frac{1}{x}}\Big|_{\frac{1}{2}}^{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{2} e^{x+\frac{1}{x}}dx = \frac{3}{2}e^{\frac{5}{2}}。$$

二、解答题

11．设非零实数a,b满足：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{1-\cos x}+\frac{a}{x^2})=b$，求$a,b$的值.

解法 1：因为$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{1-\cos x}+\frac{a}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+a-a\cos x}{x^2(1-\cos x)}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+a-a\cos x}{x^4}$，且$\cos x=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+o(x^4)$，所以

$$b=\lim_{x\to 0}(\frac{1}{1-\cos x}+\frac{a}{x^2})=2\lim_{x\to 0}\frac{x^2+a-a\cos x}{x^4}=2\lim_{x\to 0}\frac{(1+\frac{a}{2})x^2-\frac{a}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}.$$

依题设知$1+\frac{a}{2}=0$，即$a=-2$．于是

$$b=2\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{-2}{24}x^4+o(x^4)}{x^4}=\frac{1}{6}.$$

解法 2：$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{1-\cos x}+\frac{a}{x^2})=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+a-a\cos x}{x^2(1-\cos x)}=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{x^2+a-a\cos x}{x^4}$.

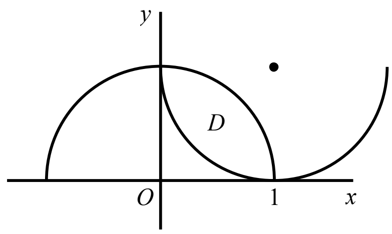
因为

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2+a-a\cos x}{x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{2x+a\sin x}{4x^3}=\lim_{x\to 0}\frac{2+a\cos x}{12x^2},$$

所以当$a\neq -2$时，$\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{1-\cos x}+\frac{a}{x^2})=\infty$，与题设矛盾.

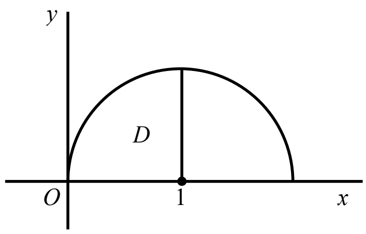
于是$a=-2$，$b=\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{1-\cos x}+\frac{a}{x^2})=2\lim\limits_{x\to 0}\frac{2-2\cos x}{12x^2}=\frac{1}{6}$.

12. 设 D 是由圆弧 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与 $y=1-\sqrt{2x-x^2}$ 围成的平面区域，求 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积和表面积.



解：设 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 V，表面积为 S，则

$$V=\frac{2}{3}\pi-\int_0^1\pi[1-\sqrt{2x-x^2}]^2\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{2\pi}{3}-\pi\int_0^1(1+2x-x^2-2\sqrt{2x-x^2})\mathrm{d}x$$
$$=-\pi+\pi\int_0^1 2\sqrt{2x-x^2}\,\mathrm{d}x=-\pi+2\pi\int_0^1\sqrt{1-(x-1)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{\pi^2}{2}-\pi .$$



$$S=2\pi+\int_0^1 2\pi(1-\sqrt{2x-x^2})\sqrt{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2x-x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x$$
$$=2\pi+\int_0^1 2\pi(1-\sqrt{2x-x^2})\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x$$
$$=2\pi\int_0^1\frac{1}{\sqrt{2x-x^2}}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-(x-1)^2}}\,\mathrm{d}(x-1)$$
$$=2\pi\arcsin(x-1)\Big|_0^1=\pi^2 .$$

解法 2：D 的面积为 $2(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2})=\frac{\pi}{2}-1$，$D$ 的形心为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，所以 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的体积为 $(\frac{\pi}{2}-1)\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{\pi^2}{2}-\pi$.

D 的边界线的形心为 $(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，弧长均为 π，所以 D 绕 x 轴旋转一周所得旋转体的表面积为 $\pi\cdot 2\pi\cdot\frac{1}{2}=\pi^2$.

13．求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n-1}$ 的收敛域及和函数.

解：因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\frac{n+1}{n+2}x^n}{\frac{n}{n+1}x^{n-1}}\right|=|x|$，所以当 $|x|<1$ 时，幂级数绝对收敛；当 $|x|>1$ 时，幂级数发散. 当 $x=\pm1$ 时，因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n-1}$ 的通项极限不为零，所以幂级数发散.

综上可知，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n-1}$ 的收敛域为 $(-1,1)$.

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n-1}=\sum_{n=1}^{\infty}(1-\frac{1}{n+1})x^{n-1}$.

记 $S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$，则

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n}=\frac{x}{1-x}\text{，}\quad x\in(-1,1)\text{，}$$

所以 $S(x)=S(0)+\int_0^x\frac{t}{1-t}\mathrm{d}t=-x-\ln(1-x)$.

又 $\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$，所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n-1}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & x=0,\\ \frac{1}{1-x}+\frac{x+\ln(1-x)}{x^2}, & 0<|x|<1.\end{cases}$$

14．已知 $f(t)=\int_0^{\pi}|t-\sin x|\,\mathrm{d}x$，求 $f'(t)$ 的表达式，并求 $f(t)$ 的最小值.

解：当 $t\leqslant 0$ 时，

$$f(t)=\int_0^{\pi}(\sin x-t)\mathrm{d}x=2-\pi t\text{，}\quad f'(t)=-\pi\ .$$

当 $t\geqslant 1$ 时，

$$f(t)=\int_0^{\pi}(t-\sin x)\mathrm{d}x=\pi t-2\text{，}\quad f'(t)=\pi\ .$$

当 $0<t<1$ 时，

$$f(t)=2\int_0^{\arcsin t}(t-\sin x)\mathrm{d}x+2\int_{\arcsin t}^{\frac{\pi}{2}}(\sin x-t)\mathrm{d}x=4\sqrt{1-t^2}+4t\arcsin t-\pi t-2\text{，}$$

$$f'(t)=4\arcsin t-\pi\ .$$

因为 $f(t)$ 在区间 $(-\infty,0]$ 上单调递减，在区间 $[0,+\infty)$ 上单调递增，所以 $f(t)$ 的最小值在区间 $[0,1]$ 上取得.

当 $t\in[0,1]$ 时，令 $f'(t)=0$ 得 $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

又 $f''(\frac{\sqrt{2}}{2})>0$，所以 $f(t)$ 的最小值为 $f(\frac{\sqrt{2}}{2})=2(\sqrt{2}-1)$.

15．设函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(-1)=f(1)$， $0\leqslant f''(x)\leqslant 1$.

（1）求证 $|f'(x)|\leqslant\frac{1}{4}(x^2+2|x|+1)$；

（2）求证 $|f(1)-f(0)|\leqslant\frac{7}{12}$.

解：（1）因为 $f(-1)=f(1)$，且

$$f(-1)=f(x)+f'(x)(-1-x)+\frac{f''(\xi)}{2}(-1-x)^2,$$

$$f(1)=f(x)+f'(x)(1-x)+\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2,$$

所以 $2f'(x)=\frac{f''(\xi)}{2}(1+x)^2-\frac{f''(\eta)}{2}(1-x)^2$，于是

$$|f'(x)|=\frac{1}{4}\left|f''(\xi)(1+x)^2-f''(\eta)(1-x)^2\right|$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\max\{f''(\xi)(1+x)^2,f''(\eta)(1-x)^2\}$$

$$\leqslant\frac{1}{4}\max\{(1+x)^2,(1-x)^2\}$$

$$=\frac{1}{4}(x^2+2|x|+1).$$

（2）解法1：$|f(1)-f(0)|=\left|\int_0^1 f'(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_0^1(x^2+2x+1)\mathrm{d}x=\frac{7}{12}$.

解法 2：$f(-1)=f(0)-f'(0)+\frac{f''(\xi)}{2}$，

$f(1)=f(0)+f'(0)+\frac{f''(\eta)}{2}$，

因为 $f(-1)=f(1)$，所以

$$2(f(1)-f(0))=\frac{f''(\xi)}{2}+\frac{f''(\eta)}{2},$$

于是 $\left|f(1)-f(0)\right|=\frac{1}{4}\left|f''(\xi)+f''(\eta)\right|\leqslant\frac{1}{2}<\frac{7}{12}$.

16. 设函数 $f_n(x)\ (n=1,2,\cdots)$ 在区间 (a,b) 内连续，$\left|f_n(x)\right|\leqslant c_n$，且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛．设 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+f_k(x))$，证明函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续．

解：因为 $\left|f_n(x)\right|\leqslant c_n$ 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}c_n$ 收敛，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，不妨设 $\left|f_n(x)\right|<1$．记 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+f_k(x))$，$S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=0$，所以当 n 充分大时，

$$\left|\ln(1+f_n(x))\right|=\left|f_n(x)+o(f_n(x))\right|<2\left|f_n(x)\right|\leqslant 2c_n.$$

于是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln(1+f_n(x))$ 在区间 (a,b) 内一致收敛，从而 $S(x)$ 在区间 (a,b) 内连续．

又因为 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}(1+f_k(x))=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln(1+f_k(x))}=\lim\limits_{n\to\infty}\mathrm{e}^{S_n(x)}=\mathrm{e}^{S(x)}$，

所以 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续．