第四章 非线性方程数值解法

4.1 基本问题

本章主要讨论单变量非线性方程

$$f(x)=0, \tag{1.1}$$

的求根问题，这里 $x\in R$， $f(x)\in C[a,b]$. 若 $f(x)$ 为多项式时，根据代数基本定理可知，n 次方程在复数域有且只有 n 个根（含复根，m 重根为 m 个根），$n=1$，2 时方程的根是大家熟悉的，$n=3$，4 时虽有求根公式但比较复杂，可在数学手册中查到，但已不适合数值计算，而 $n\geq 5$ 时就不能用公式表示方程的根，从而近似求解方程就成为必需了，其中数值解法是近似方法中的重要方法之一. 除了多项式求根之外，更多的是超越方程求根问题. 例如，在天体力学中，有如下 Kepler（开普勒）方程：

$$x-t-\varepsilon\sin x=0,\quad 0<\varepsilon<1,$$

其中 t 表示时间，x 表示弧度，行星运动的轨道 x 是 t 的函数，对于固定的时间 t，通过上面的方程可解出惟一解 x（运动轨道位置），但 x 却不能由上述方程精确解出，通常也是用数值方法求其近似解.

对方程（1.1）求根大致分三个步骤：

（1）根的存在性：方程是否有根？如果有根，有几个根？

（2）根的隔离：把有根区间分为较小的子区间，每个子区间或者有一个根，或者没有根，这样可以将有根区间的任意一点都可以看成该根的一个近似值.

（3）根的精确化：对根的某个近似值设法逐步精确化，使其满足一定的精度要求.

本章具体研究求解单变量非线性方程 $f(x)=0$ 的各种数值解法：二分法、单点迭代法、多点迭代法，以及各种迭代法的局部收敛性和收敛阶等问题.

4.2 二分法

二分法是一个把含根区间不断缩短，使含根区间中点成为一个满足误差要求的近似解的方法.

设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)f(b)<0$，由连续函数根的存在定理，在 $[a,b]$ 区间上一定有实根，称 $[a,b]$ 是方程的有根区间，这里假设 $[a,b]$ 区间内只有一个根 x^*. 取 $[a,b]$ 中点 $x_0=(a+b)/2$，若点 x_0 不是 $f(x)$ 的零点，则进行根的搜索，即检查 $f(x_0)$ 与 $f(a)$ 是否同号，如果确系同号，说明所求的根 x^* 在 x_0 的右侧，这时令 $a_1=x_0$， $b_1=b$；

否则 x^* 必在 x_0 的左侧，这时令 $a_1 = a$， $b_1 = x_0$．不管出现哪一种情况，新的有根区间 $[a_1, b_1]$ 的长度仅为 $[a, b]$ 的一半．

对压缩了的有根区间 $[a_1, b_1]$ 又可施行同样的方法，即用中点 $x_1 = (a_1 + b_1)/2$ 将区间 $[a_1, b_1]$ 再分为两半，然后通过根的搜索判定所求的根在 x_1 的那一侧，从而又确定一个新的有根区间 $[a_2, b_2]$，其长度是 $[a_1, b_1]$ 的一半．

如此反复下去，即可得出一系列有根区间

$$[a,b] \supset [a_1,b_1] \supset [a_2,b_2] \supset \cdots \supset [a_k,b_k] \supset \cdots \quad \text{（如图 4—1），}$$

其中每个区间都是前一个区间的一半，因此 $[a_k, b_k]$ 的长度

$$b_k - a_k = \frac{b-a}{2^k}.$$

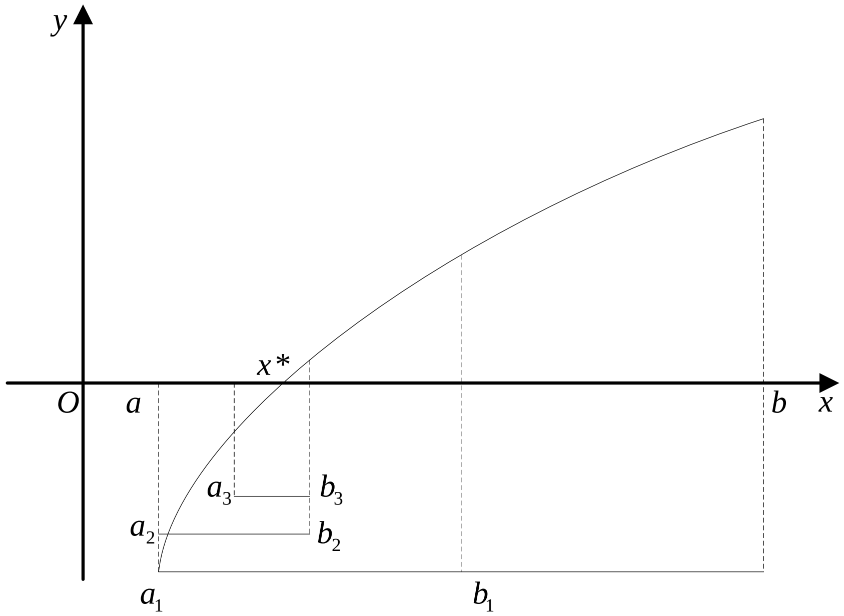


图 4—1

当 $k \to \infty$ 时趋于零，就是说，如果二分过程无限地进行下去，这些区间最终必收缩于一点 x^*，该点显然就是所求的根．每次二分之后，设有根区间 $[a_k, b_k]$ 的中点

$$x_k = \frac{a_k + b_k}{2},$$

作为根的近似值，则在二分过程中可以获得一个近似根的序列

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_k, \cdots,$$

该序列必以根 x^* 为极限．

在实际计算时，我们不可能完成这个无限过程，其实也没有这种必要，因为数值分析的结果允许带有一定的误差．由于

$$\left|x^* - x_k\right| \le \frac{b_k - a_k}{2} = \frac{b-a}{2^{k+1}},$$

对给定的小数 $\varepsilon > 0$，要使

$$\left|x^* - x_k\right| < \varepsilon,$$

只需令

$$\frac{b-a}{2^{k+1}} < \varepsilon,$$

即

$$2^{k+1} > \frac{b-a}{\varepsilon},$$

所以

$$k = \left[(\ln(b-a) - \ln\varepsilon)/\ln 2\right]. \tag{2.1}$$

其中，$[\ \ ]$表示取整数．

利用式（2.1），对给定的精度 ε，可预先确定出二分的次数 k．

例 1　求方程

$$f(x) = x^6 - x - 1 = 0,$$

在区间$[1, 2]$内的一个实根，取允许误差 $\varepsilon = 0.03$．

解　首先计算迭代次数 $k = \left[(\ln(2-1) - \ln 0.03)/\ln 2\right] = 5$，所以只需迭代 5 次就可以满足要求．

表 4—1　计算结果

k：对分次数	a	b	$c = \frac{1}{2}(a_k + b_k)$	区间长度	$f(c)$
0	1	2	1.5000	0.5000	8.8906
1	1	1.5	1.2500	0.2500	1.5647
2	1	1.2500	1.1250	0.1250	-0.0977
3	1.1250	1.2500	1.1875	0.0625	0.6167
4	1.1250	1.1875	1.1562	0.0312	0.233
5	1.1250	1.1562	1.1406	0.0156	0.0616

二分法的优点是计算过程简单，收敛性可保证，对函数 $f(x)$ 的要求低，只要连续，在两个端点异号；它的缺点是收敛速度慢，故一般不单独将其用于求根，只用其为根求得一个较好的近似值；另外二分法不能求偶数重根，也不能求复根和虚根．

4.3 迭代法

4.3.1 不动点迭代法

求方程 $f(x)=0$ 的主要方法是迭代法．它的基本思想是通过构造一个递推关系式，即迭代格式，计算出一个根的近似值序列，并希望该序列能收敛于方程 $f(x)=0$ 的根．

将方程 $f(x)=0$ 改写成等价的形式

$$x=\varphi(x), \tag{3.1}$$

若要求 x^* 满足 $f(x^*)=0$，则 $x^*=\varphi(x^*)$；反之亦然．称 x^* 为函数 $\varphi(x)$ 的一个**不动点**．求 $f(x)$ 的零点就等价于求 $\varphi(x)$ 的不动点．选择一个初始值 x_0，将它代入（3.1）右端，即可求得

$$x_1=\varphi(x_0),$$

可以反复迭代计算

$$x_{k+1}=\varphi(x_k), \qquad (k=0,1,\cdots), \tag{3.2}$$

$\varphi(x)$ 称为迭代函数．如果对任何 $x_0\in[a,b]$，由（3.2）得到的序列 $\{x_k\}$ 有极限

$$\lim_{k\to\infty} x_k = x^*.$$

则称迭代方程（3.2）收敛，且 $x^*=\varphi(x^*)$ 为 $\varphi(x)$ 的不动点，故称（3.2）为**不动点迭代法**.

上述迭代法是一种逐次逼近法，其基本思想是将隐式方程（3.1）归结为一组显式的计算公式（3.2），就是说，迭代过程实质上是一个逐步显式化的过程.

不动点迭代法（3.2）的几何意义可作如下解释：

求 $x=\varphi(x)$ 的不动点，在几何上是求直线 $y=x$ 和 $y=\varphi(x)$ 的交点 $x*$．如图 4—2 所示从点 $P_k(x_k,\varphi(x_k))$ 出发，沿平行于 x 轴方向前进交 $y=x$ 与点 $(\varphi(x_k),\varphi(x_k))$，从该点沿 y 轴方向前进交 $y=\varphi(x)$ 于点 $P_{k+1}(\varphi(x_k),\varphi(\varphi(x_k)))$，点 P_{k+1} 的横坐标就是 $\varphi(x_k)=x_{k+1}$.

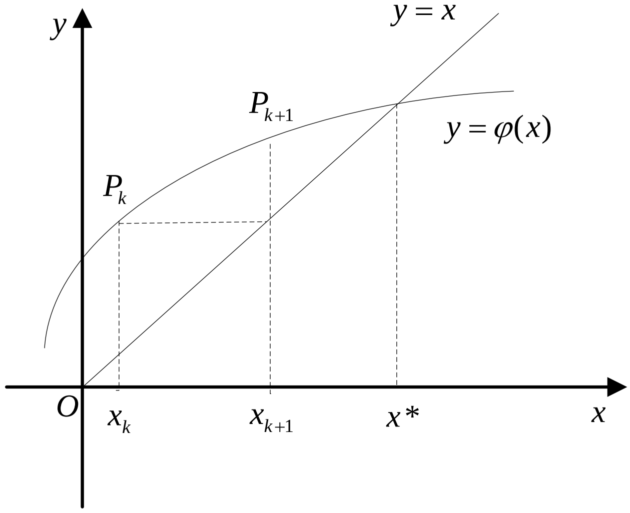


图 4—2

不动点迭代公式（3.2）是仅需一个初值 x_0 的迭代法，称为**单点迭代法**，其中 $\varphi(x)$ 称为迭代函数．相应的，若迭代格式为

$$x_{k+1}=\varphi(x_k,x_{k-1},\cdots,x_{k-n+1}),\quad (k=0,1,\cdots) \tag{3.3}$$

称为**多点迭代法**.

例 2　求方程

$$f(x)=x^3-x-1=0, \tag{3.4}$$

在 $x_0=1.5$ 附近的根 x^*.

解　设将方程（3.4）改写成下列形式　$x=\sqrt[3]{x+1}$.

据此建立迭代公式　$x_{k+1}=\sqrt[3]{x_k+1}$，$(k=0,1,2,\cdots)$.

表 4-2 记录了各步迭代的结果．我们看到如果仅仅取六位数字，那么结果 x_7 与 x_8 完全相同，这时我们可以认为 x_7 实际上已满足方程（3.4），即为所求的根.

表 4-2 计算结果

k	x_k	k	x_k
0	1.5		
1	1.35721	5	1.32476
2	1.33086	6	1.32473
3	1.32588	7	1.32472
4	1.32494	8	1.32472

应当指出，迭代法的效果并不总能令人满意的．譬如，设依方程（3.4）的另一种等价形式　$x=x^3-1$，建立迭代公式

$$x_{k+1}=x_k^3-1.$$

迭代初值仍取 $x_0=1.5$，

则有 $x_1=2.375$，$x_2=12.39$.

继续迭代下去已经没有必要，因为结果显然会越来越大，不可能趋于某个极限．这种不收敛的迭代过程称作是发散的．一个发散的迭代过程，纵使进行了千百次的迭代，其结果也是毫无价值的．

例 2 表明原方程化为（3. 1）的形式不同，有的收敛，有的发散，只有收敛的迭代过程（3. 2）才有意义．为此用迭代法解方程 $x=\varphi(x)$ 要解决的问题主要有：

(1) 迭代函数 $\varphi(x)$ 的构造；

(2) 由迭代格式(3.2)产生的序列{ x_k }的收敛性；

(3) { x_k }的收敛速度和误差估计．

4. 3. 2 不动点的存在性与迭代法的收敛性

首先考察 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上不动点的存在唯一性．

定理 1 设 $\varphi(x)\in C[a,b]$ 满足以下两个条件：

1^0 对任意 $x\in[a,b]$ 有 $a\le\varphi(x)\le b$.

2^0 存在正常数 $L<1$，使对任意 $x,y\in[a,b]$ 都有

$$\left|\varphi(x)-\varphi(y)\right|\le L\left|x-y\right| . \tag{3. 5}$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点 x^* .

证明 先证存在性．做函数 $g(x)=x-\varphi(x)$，显然 $g(x)\in C[a,b]$，且满足 $g(a)=a-\varphi(a)\le 0$, $g(b)=b-\varphi(b)\ge 0$，由连续函数性质可知存在 $x^*\in[a,b]$ 使 $g(x^*)=0$，即 $x^*=\varphi(x^*)$， x^* 即为 $\varphi(x)$ 的不动点．

再证唯一性．设 x_1^* 及 $x_2^*\in[a,b]$ 都是 $\varphi(x)$ 的不动点，则由式（3.5）得

$$\left|x_1^*-x_2^*\right|=\left|\varphi(x_1^*)-\varphi(x_2^*)\right|\le L\left|x_1^*-x_2^*\right|<\left|x_1^*-x_2^*\right| .$$

引出矛盾．故 $\varphi(x)$ 的不动点只能是唯一的．

最后说明迭代序列的收敛性：

$$\left|x^*-x_{k+1}\right|=\left|\varphi(x^*)-\varphi(x_k)\right|\le L\left|x^*-x_k\right|\le L^2\left|x^*-x_{k-1}\right|\le\cdots\le L^{k+1}\left|x^*-x_0\right| ,$$

所以

$$\lim_{k\to+\infty}\left|x^*-x_{k+1}\right|=0 ,$$

即

$$\lim_{k\to+\infty} x_k = x*,$$

证毕.

实际计算中，定理 1 中的条件 2^0 可以用更强、更便于应用的条件来代替.

推论 1　设 $\varphi(x)\in C[a,b]$ 满足以下两个条件：

1^0　　对任意 $x\in[a,b]$ 有 $a\le\varphi(x)\le b$.

2^0　　$\max\limits_{a\le x\le b}|\varphi'(x)|\le L<1$.

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在唯一的不动点 x^*.

定理 2　设 $\varphi(x)\in C[a,b]$ 满足定理 1 中的两个条件，则对任意 $x_0\in[a,b]$，由（3. 2）得到的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛到 $\varphi(x)$ 的不动点 x^*，并有误差估计

$$\left|x_k-x^*\right|\le\frac{1}{1-L}\left|x_{k+1}-x_k\right|, \tag{3.6}$$

$$\left|x_k-x^*\right|\le\frac{L^k}{1-L}\left|x_1-x_0\right|, \tag{3.7}$$

证明　设 $x^*\in[a,b]$ 是 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 上的唯一不动点，由条件定理 1 中的条件 1^0，可知 $\{x_k\}\in[a,b]$，

$$\left|x_{k+1}-x^*\right|=\left|\varphi(x_k)-\varphi(x^*)\right|\le L\left|x_k-x^*\right|.$$

另一方面

$$\begin{aligned}\left|x_k-x^*\right| &\le \left|x_k-x_{k+1}\right|+\left|x_{k+1}-x^*\right| \\ &\le \left|x_k-x_{k+1}\right|+L\left|x_k-x^*\right|,\end{aligned}$$

得

$$\left|x_k-x^*\right|\le\frac{1}{1-L}\left|x_{k+1}-x_k\right|\le\frac{L}{1-L}\left|x_k-x_{k-1}\right|\le\cdots\le\frac{L^k}{1-L}\left|x_1-x_0\right|.$$

证毕.

由式（3.7）可知，若 L 已知，则对预先给定的精度可估计出迭代次数．但实际计算中，由于 L 不易求得，这个方法较难应用．由式（3.6）可知，只要相邻两次迭代值之差的绝对值充分小，就能保证近似值 x_k 充分精确．所以若事先给出精度 ε，当 $\left|x_{k+1}-x_k\right|<\varepsilon$ 时，就可结束迭代过程，取 x_{k+1} 为根的近似值．但注意，当 $L\approx1$ 时，这个方法就不可靠了.

在例 2 中，当 $\varphi(x)=\sqrt[3]{x+1}$ 时，$\varphi'(x)=\frac{1}{3}(x+1)^{-2/3}$，在区间 $[2,3]$ 中，$\varphi'(x)\le\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^{1/3}<1$，故推论 1 中的条件 2^0 成立．又因 $1\le\sqrt[3]{2}\le\varphi(x)\le\sqrt[3]{3}\le 2$，故推论 1 中条件 1^0 也成立．所以迭代法是收敛的，而当 $\varphi(x)=x^3-1$ 时，$\varphi'(x)=3x^2$ 在区间 $[1,2]$ 中 $|\varphi'(x)|>1$ 不满足定理条件．

4.3.3 局部收敛性及收敛速度

对于方程（1.1）构造迭代公式 $x=\varphi(x)$，若对 $\forall x_0\in[a,b]$，构造的迭代序列 $\{x_k\}$ 都收敛，这种收敛称为**全局收敛**．由于非线性方程的复杂性，能满足全局收敛的情形并不多，迭代序列 $\{x_k\}$ 通常只在不动点 x^* 的邻近考察其收敛性，即局部收敛性．

定义 1 设 $\varphi(x)$ 有不动点 x^*，如果存在 x^* 的某个邻域 $R:|x-x^*|\le\delta$，对任意 $x_0\in R$，迭代（3.2）产生的序列 $\{x_k\}\in R$，且收敛到 x^*，则称迭代法（3. 2）**局部收敛**．

定理 3 设 x^* 为 $\varphi(x)$ 的不动点，$\varphi'(x)$ 在 x^* 的某个邻域连续，且 $|\varphi'(x^*)|<1$，则迭代法（3.2）局部收敛．

证明 由连续函数的性质，存在 x^* 的某个邻域 $R:|x-x^*|\le\delta$，使对于任意 $x\in R$ 成立

$$|\varphi'(x)|\le L<1.$$

此外，对于任意 $x\in R$，总有 $\varphi(x)\in R$，这是因为

$$|\varphi(x)-x^*|=|\varphi(x)-\varphi(x^*)|\le L|x-x^*|\le|x-x^*|.$$

于是依据推论 1 可以断定迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 对于任意初值 $x_0\in R$ 均收敛．证毕．

本章重点讨论迭代的局部收敛性．

一种迭代法要具有实用价值，不但需要迭代收敛，还要求迭代有较快的收敛速度．因此，要讨论迭代在接近收敛时误差下降的速度，下面给出收敛阶的概念．

定义 2 设迭代过程 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 收敛于方程 $x=\varphi(x)$ 的根 $x*$，如果迭代误差 $e_k=x_k-x*$，当 $k\to\infty$ 时成立下列渐近关系式

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}\to C\ne 0,$$

则称该迭代方程是 p 阶收敛的，C 称为**渐近误差常数**.

收敛阶描述了迭代接近收敛时迭代误差下降的速度，即迭代收敛速度．一般来说，p 越大，收敛速度越快．特别的，$p=1$ 时称**线性收敛**，$p>1$ 称**超线性收敛**，$p=2$ 时称**平方收敛**.

定义中，$C\neq 0$ 是为了保证收敛阶 p 的惟一性．若 $p=1$，则只有 $C<1$ 时迭代才收敛；若 $p>1$，则 C 不要求小于 1.

定理 4　如果迭代函数 $\varphi(x)$ 在不动点 x^* 的邻近有充分多阶连续导数，则迭代格式(3.2)关于 x^* 是 p 阶收敛的充分必要条件是

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p-1)}(x^*)=0,\quad \varphi^{(p)}(x^*)\neq 0. \tag{3.8}$$

证明　先证充分性：

将 $\varphi(x_k)$ 在不动点 x^* 处做泰勒展开，利用条件（3.8），则有

$$\varphi(x_k)=\varphi(x^*)+\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p,\quad \xi \text{ 在 } x_k \text{ 与 } x^* \text{ 之间}.$$

注意到 $\varphi(x_k)=x_{k+1}$，$\varphi(x^*)=x^*$，由上式得

$$x_{k+1}=x^*+\frac{\varphi^{(p)}(\xi)}{p!}(x_k-x^*)^p,$$

从而，当 $k\to\infty$ 时，

$$\frac{|e_{k+1}|}{|e_k|^p}=\frac{|x_{k+1}-x^*|}{|x_k-x^*|^p}\to\frac{|\varphi^{(p)}(x^*)|}{p!}\neq 0, \tag{3.9}$$

由此可得迭代格式（3.2）是 p 阶收敛的.

再证必要性：

用反证法．已知迭代格式（3.2）是 p 阶收敛的，假设式（3.8）不成立，那么必有最小正整数 $p_0\neq p$，使得

$$\varphi'(x^*)=\varphi''(x^*)=\cdots=\varphi^{(p_0-1)}(x^*)=0,\quad \varphi^{(p_0)}(x^*)\neq 0.$$

而由已证明的充分性知迭代格式（3.2）是 p_0 阶的，于是产生矛盾，故式（3.8）成立，证毕.

由定理 4 可看出，不动点迭代格式（3.2）的收敛阶一定是正整数.

例 3　用不同方法求方程 $x^2-3=0$ 的根 $x^*=\sqrt{3}$.

解　这里 $f(x)=x^2-3$ 可改写为各种不同的等价形式 $x=\varphi(x)$，其不动点为

$x^* = \sqrt{3}$. 由此构造不同的迭代法：

（1）令 $\varphi(x) = x - \frac{1}{4}(x^2 - 3)$，

则迭代格式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{1}{4}(x_k^2 - 3),$$

计算

$$\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{2}x, \qquad \varphi'(\sqrt{3}) = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2} \approx 0.134 < 1.$$

由定理 4，迭代格式 $x_{k+1} = x_k - \frac{1}{4}(x_k^2 - 3)$ 为线性收敛.

（2）令 $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{3}{x}\right)$，

则迭代格式为

$$x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{3}{x_k}\right),$$

计算

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{x^2}\right), \qquad \varphi'(\sqrt{3}) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{3}{\left(\sqrt{3}\right)^2}\right) = 0,$$

$$\varphi''(x) = \frac{3}{x^3}, \quad \varphi''\left(\sqrt{3}\right) \neq 0.$$

由定理 4，迭代格式 $x_{k+1} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{3}{x_k}\right)$ 为平方收敛.

取 $x_0 = 2$ 对上述 2 种迭代法，计算三步所得的结果如下表 4-3.

表 4-3　计算结果

k	x_k	迭代法 1	迭代法 2
0	x_0	2	2
1	x_1	1.75	1.75
2	x_2	1.73475	1.732143
3	x_3	1.732361	1.732051
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

注意 $\sqrt{3}$=1.7320508⋯，从计算结果看到迭代法（2）比（1）收敛快.

定理 4 告诉我们，迭代方程的收敛速度依赖于迭代函数 $\varphi(x)$ 的选取．如果当 $x \in [a,b]$ 时 $\varphi'(x) \neq 0$，则该迭代过程只可能是线性收敛.

4. 4 Newton 迭代法

4. 4. 1 Newton 迭代公式

Newton（牛顿）法是一种常见的单点迭代法，其思想是将非线性方程 $f(x)=0$ 逐步归结为某种线性方程来求解.

考虑非线性方程

$$f(x)=0,$$

假定 $f(x)$ 二次连续可导，x_k 为其近似解（假定 $f'(x_k)\neq 0$），将函数在点 x_k 展开，有

$$f(x)=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)+R(x),$$

其中 $R(x)=\dfrac{1}{2}f''(\xi)(x-x_k)^2$（$\xi$ 在 x 与 x_k 之间）．略去余项 $R(x)$，可得

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k),$$

x_{k+1}

于是方程 $f(x)=0$ 可近似表示为

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0.$$

$\frac{f(x_k)}{f'(x_k)} + x = x_k$

这是个线性方程，记其根为 x_{k+1}，则 x_{k+1} 计算公式为

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad (k=0,1,\cdots), \tag{4.1}$$

这就是 Newton 迭代法.

Newton 迭代法是一种特殊的单点迭代法，相当于取迭代函数

$$\varphi(x)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}\quad (f'(x)\neq 0). \tag{4.2}$$

Newton 迭代法的几何意义是明显的，如图 4—3 所示．方程 $f(x)=0$ 的根 x^* 是曲线 $y=f(x)$ 与直线 $y=0$ 的交点的横坐标．Newton 迭代法是取过 $(x_k, f(x_k))$ 点的切线方程

$$y=f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)$$

与 $y=0$ 的交点的横坐标

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},$$

作为根的新的近似值．此即由式（4.1）得到的 $f(x)=0$ 根的第 $k+1$ 次近似值．继续取过点 $(x_{k+1},f(x_{k+1}))$ 作切线与 x 轴的相交点，又可得 x_{k+2}，…．由此可见，只有初值充分接近根 x^*，这个序列就会很快收敛于 x^*．因此，由上述几何意义，Newton 迭代法又称为**切线法**．

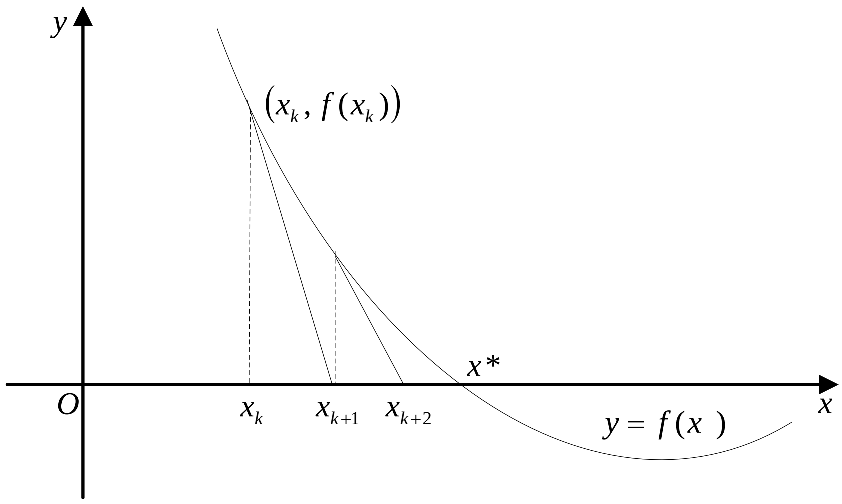


图 4—3 Newton 迭代法的几何意义

4.4.2 Newton 迭代法收敛定理

定理 5 如果 $f(x)$ 在解 x^* 附近连续可导，且 $f'(x^*)\neq 0$，则存在 $\delta>0$，只要 $|x_0-x^*|\le\delta$，Newton 迭代法产生的迭代序列超线性收敛于 x^*，即

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{x_k-x^*}=0.$$

证明 只需证明由（4.2）所给迭代函数 $\varphi(x)$ 满足 $\varphi'(x^*)=0$ 即可，注意 $f(x^*)=0$，

$$\varphi(x)-\varphi(x^*)=x-\frac{f(x)}{f'(x)}-\left[x^*-\frac{f(x^*)}{f'(x^*)}\right]$$

$$=(x-x^*)-\frac{f(x)-f(x^*)}{f'(x)}$$

$$=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{f'(x)}(x-x^*)$$

其中ξ介于x与x^*之间，所以

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x^*)}{x-x^*}=\frac{f'(x)-f'(\xi)}{f'(x)},$$

两边令$x\to x^*$，由$f'(x)\to f'(x^*)\neq 0$，$f'(\xi)\to f'(x^*)$，得$\varphi'(x^*)=0$，证毕.

Newton 迭代法在一般情况下是二阶收敛的.

定理 6 如果$f(x)$在解x^*附近二次连续可导，且$f'(x^*)\neq 0$，则存在$\delta>0$，只要$|x_0-x^*|\le\delta$，Newton 迭代法产生的至少迭代序列二阶收敛于x^*，且

$$\lim_{k\to\infty}\frac{x_{k+1}-x^*}{(x_k-x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}. \tag{4.3}$$

证明 由定理 5 知，Newton 迭代法局部超线性收敛.

$$x_{k+1}-x^*=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}-x^*$$

$$=\frac{(x_k-x^*)f'(x_k)-f(x_k)+f(x^*)}{f'(x_k)}.$$

由 Taylor 展开

$$f(x^*)=f(x_k)+f'(x_k)(x^*-x_k)+\frac{f''(\eta_k)}{2!}(x^*-x_k)^2,$$

得

$$x_{k+1}-x^*=\frac{f''(\eta_k)}{2f'(x_k)}(x_k-x^*)^2,$$

其中η_k介于x_k与x^*之间．两边对k取极限得式（4.3）．当$f''(x^*)=0$时，Newton 迭代法是超二阶收敛的．证毕.

定理 5 和定理 6 说明 Newton 迭代法是局部收敛的方法．因此，它是否收敛，与初值的选取有关．当初值x_0充分接近根x^*时，一般可保证迭代收敛.

例 4 设$a>0$为实数，试建立求$\frac{1}{a}$的 Newton 迭代格式，要求在迭代函数中不含除法

$\cancel{x_{k+1} = \frac{1}{x_k} + x_k - a}$

运算．并证明：当初值 x_0 满足 $0 < x_0 < \dfrac{2}{a}$ 时，此格式是收敛的．

解 作函数 $f(x) = \dfrac{1}{x} - a$，则 $f(x) = 0$ 的根即为 $\dfrac{1}{a}$．由式（4.1）得 Newton 迭代格式

$$x_{k+1} = x_k(2 - ax_k),$$

$\dfrac{ax^2 - x}{1} = \dfrac{\frac{1}{x} - a}{-\frac{1}{x^2}}$

$\cancel{r_k = x_k - \frac{1}{a}}$

记

$$r_k = 1 - ax_k,$$

若 $x_k \to \frac{1}{a}$ 则 $r_k \to 0$

$\cancel{\Rightarrow r_{k+1} = x_{k+1} - \frac{1}{a} = x_k + \frac{1}{x_k} - \frac{2}{a}}$

它表征了迭代误差．而

$$r_{k+1} = 1 - ax_{k+1} = 1 - ax_k(2 - ax_k)$$

$$= (1 - ax_k)^2 = r_k^2,$$

求递推

所以

$$r_k = r_0^{2^k}.$$

于是，当初值 x_0 满足 $0 < x_0 < \dfrac{2}{a}$ 时，对 $r_0 = 1 - ax_0$ 有

$$|r_0| < 1,$$

所以

$$\lim_{k\to\infty} r_k = \lim_{k\to\infty} r_0^{2^k} = 0,$$

即

$$\lim_{k\to\infty} x_k = \frac{1}{a},$$

从而迭代收敛．

定理 5 和定理 6 都要求满足 $|x_0 - x^*| \le \delta$，在应用中对初值要求高，初值选择较困难．下面的定理在一定条件下放宽了对初值的要求．

定理 7 设 $f(x)$ 在有根区间 $[a, b]$ 上二阶导数存在，且满足：

（1）$f(a)f(b) < 0$；

（2）$f'(x) \neq 0$，$x \in [a, b]$；

（3）$f''(x)$ 不变号，$x \in [a, b]$；

（4）初值 $x_0 \in [a, b]$ 且使 $f''(x_0)f(x_0) > 0$．

则 Newton 迭代法产生的迭代序列 $\{x_k\}$ 收敛于 $f(x) = 0$ 在 $[a, b]$ 内的惟一根．

本定理证明从略，只给出其几何解释．图 4—4 的四种情况都满足定理条件．

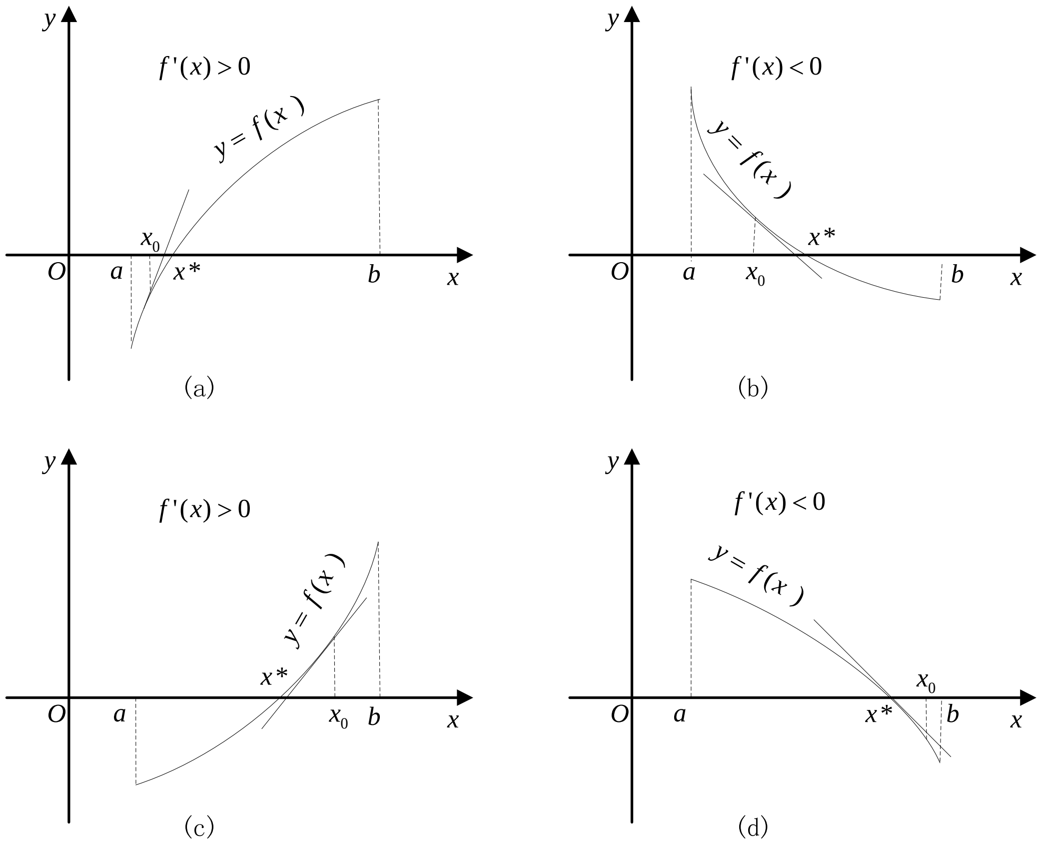


图 4—4 定理 7 的几何解释

在定理 7 中，条件 1 保证方程在 (a,b) 中有根，条件 2 保证函数 $f(x)$ 单调，条件 3 保证曲线 $y=f(x)$ 在 (a,b) 内的凹凸性不变，从而方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 上有惟一根，条件 4 保证当 $x\in[a,b]$ 时，Newton 迭代函数 $\varphi(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}\in[a,b]$. 从 Newton 迭代法的几何解释可以断定，迭代序列是收敛的.

例 5 用 Newton 迭代法求解方程

$$x-\cos x=0,\quad x\in[0,1].$$

解 $f(x)=x-\cos x$，$f(0)<0$，$f(1)>0$，在 $[0,1]$ 上，$f'(x)=1+\sin x>0$，$f''(x)=\cos x>0$，由定理 7，只要 $x_0\in[0,1]$，$f(x_0)>0$，Newton 迭代法产生的迭代序列收敛到 $f(x)=0$ 在 $[0,1]$ 内的惟一根 x^*.

取初值 $x_0=1$，计算结果如下表 4—4

表 **4—4** 计算结果

k	x_k	$f(x_k)$	$f'(x_k)$
0	1	0.459697694	1.841470984
1	0.75036867	0.018923073	1.681904952
2	0.73911289	0.000046454	1.673632544
3	0.739085133	0	

4.5 多点迭代法

在单点迭代法中，在计算新的迭代值 x_{k+1} 时，仅用到了 x_k 点的信息，而函数 $f(x)$ 及导数 $f'(x)$ 在点 x_{k-1}， x_{k-2}，⋯，这些点上的信息并没有被充分利用．因此，考虑充分利用这些有价值的信息，来减少计算量，提高迭代收敛速度．

若迭代格式为

$$x_{k+1}=\varphi(x_k,x_{k-1},\cdots,x_{k-n+1})\text{，}(k=0,1,\cdots)\text{，} \tag{5.1}$$

称式（5.1）为**多点迭代法**.

最简单的多点迭代法是弦截法和抛物线法.

用牛顿法求方程（1.1）的根，每步除计算 $f(x_k)$ 外还要算 $f'(x_k)$，当函数 $f(x)$ 比较复杂时，计算 $f'(x)$ 往往较困难，为此可以利用已求函数值 $f(x_k), f(x_{k-1})\cdots$ 来回避导数值 $f'(x_k)$ 的计算．这类方法是建立在插值原理基础上的，下面介绍上述两种常用方法.

4.5.1 弦截法

设 x_k,x_{k-1} 是 $f(x)=0$ 的近似根,我们利用 $f(x_k),f(x_{k-1})$ 构造一次插值多项式 $p_1(x)$，并用 $p_1(x)$=0 的根作为 $f(x)=0$ 的新的近似根 x_{k+1}.

由于

$$p_1(x)=f(x_k)+\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}(x-x_k)\text{，} \tag{5. 2}$$

因此有

$$x_{k+1}=x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k)\quad\text{，}\quad k=1,2,\cdots\text{，} \tag{5. 3}$$

进一步改写为

$$x_{k+1}=\frac{f(x_k)}{f(x_k)-f(x_{k-1})}x_{k-1}-\frac{f(x_{k-1})}{f(x_{k-1})-f(x_k)}x_k\text{，} \tag{5.4}$$

这个方法称为**弦截法**，也叫**割线法**．其几何意义是，过点$\left(x_{k-1}, f(x_{k-1})\right)$和$\left(x_k, f(x_k)\right)$作直线，直线方程为

$$\frac{y-f(x_k)}{x-x_k}=\frac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}},$$

用此直线代替曲线 $f(x)$，且以此直线与 x 轴交点的横坐标

$$x_k-\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}f(x_k),$$

作为根 x^* 的近似．如图 4—5 所示．

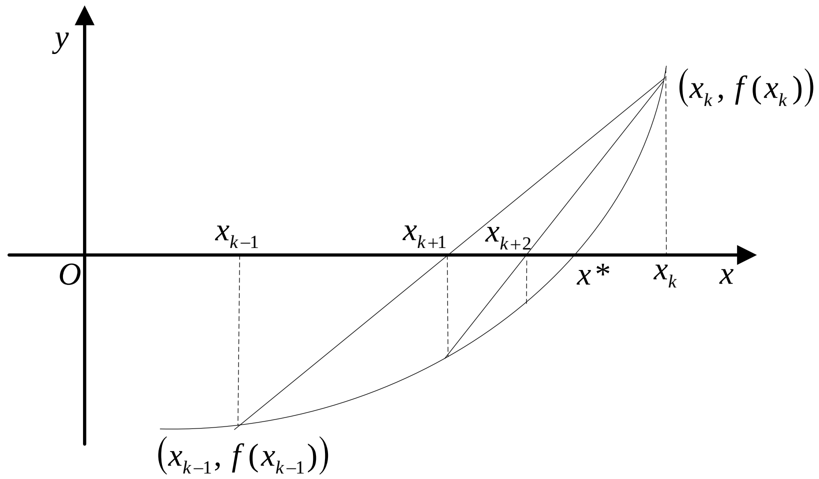


图 4—5　弦截法几何意义

弦截法迭代公式（5.3）可以看作 Newton 公式

$$x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

中的导数 $f'(x_k)$ 用差商 $\dfrac{f(x_k)-f(x_{k-1})}{x_k-x_{k-1}}$ 取代的结果，但两者有着本质的区别．Newton 法在计算 x_{k+1} 是只用到前一步的值 x_k，而弦截法（5. 3），在求 x_{k+1} 时要用到前两步的结果 x_k、x_{k-1}，因此使用这两种方法必须先给出两个初始值 x_0、x_1．

例 6　用弦截法解方程

$$f(x)=x^3-3x^2-x-9=0,$$

在 $(-2,-1.5)$ 内的根．

解 取初值 $x_0=-2$， $x_1=-1$，计算结果如下表 4—5

表 4—5 计算结果

k	x_k	$f(x_k)$
0	-2	-9
1	-1	6
2	-1.4	1.77600
3	-1.499	0.389743
4	-1.526841	-0.026330
5	-1.525079	0.000348
6	-1.525102	0.000000

下面给出弦截法局部收敛性和收敛速度的结论.

定理 8 假设 $f(x)$ 在根 x^* 的邻域 $\Delta:\left|x-x^*\right|\le\delta$ 内具有二阶连续导数，且对任意 $x\in\Delta$ 有 $f'(x)\ne 0$，又初值 x_0， $x_1\in\Delta$，那么当邻域 Δ 充分小时，弦截法（5.3）将按阶 $p=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\approx 1.618$ 收敛到根 x^*．这里 p 是方程 $\lambda^2-\lambda-1=0$ 的正根.

4.5.2 抛物线法

设已知方程 $f(x)=0$ 的三个近似根 x_k， x_{k-1}， x_{k-2}，我们以这三点为结点构造二次插值多项式 $p_2(x)$，并适当选取 $p_2(x)$ 的一个零点 x_{k+1} 作为新的近似根，这样确定的迭代过程称抛物线法．在几何图形上，这种方法的思想是用抛物线 $y=p_2(x)$ 与 x 轴的交点 x_{k+1} 作为求根 x^* 的近似位置.

现在推导抛物线法的计算公式．插值多项式

$$p_2(x)=f(x_k)+f[x_k,x_{k-1}](x-x_k)+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x-x_k)(x-x_{k-1}),$$

有两个零点

$$x_{k+1}=x_k-\frac{2f(x_k)}{\omega\pm\sqrt{\omega^2-4f(x_k)f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}]}},\qquad（5.5）$$

式中

$$\omega=f[x_k,x_{k-1}]+f[x_k,x_{k-1},x_{k-2}](x_k-x_{k-1}).$$

为了从(5.5)式定出一个值 x_{k+1}，我们需要讨论根式前正负号的取舍问题．在 x_k，x_{k-1}，x_{k-2} 三个正负根中，自然假定 x_k 更接近所求的根 x^*，这时，为了保证精度，我们

选式（5.5）中较接近 x_k 的一个值作为新的近似根 x_{k+1}. 为此，只要取根式前的符号与 ω 的符号相同.

抛物线法也是超线性收敛的，其收敛的阶 $p=1.840$（是方程 $\lambda^3-\lambda^2-\lambda-1=0$ 的根），其收敛速度比弦截法更接近于牛顿法.

从（5.5）看到，即使 x_{k-2},x_{k-1},x_k 均为实数，x_{k+1} 也可以是复数，所以抛物线法适用于求多项式的实根和复根.

4.6 数值实验及程序

4.6.1 二分法实验

二分法是计算机上的一种常用算法，下面列出计算步骤：

步骤 1　准备　计算 $f(x)$ 在有根区间 $[a,b]$ 端点处的值 $f(a)$，$f(b)$.

步骤 2　准备　计算 $f(x)$ 在区间中点 $\frac{a+b}{2}$ 即是值 $f(\frac{a+b}{2})$.

步骤 3　判断　若 $f(\frac{a+b}{2})=0$，则 $\frac{a+b}{2}$ 即是根，计算过程结束，否则检验.

若 $f(\frac{a+b}{2})f(a)<0$，则以 $\frac{a+b}{2}$ 代替 b，否则以 $\frac{a+b}{2}$ 代替 a. 反复执行步骤 2 和步骤 3，直到区间 $[a,b]$ 长度小于允许误差 ε，此时中点 $\frac{a+b}{2}$ 即为所求近似根.

matlab 程序如下：（Dichotomy.m）

```
% 二分法求解方程 f_name(x)=0 在区间[a,b]的解
% eps 为误差限，区间端点 a 和 b 由键盘输入，
% 函数 f_name 在区间[a,b]连续，且 f_name(a)*f_name(b)<0
% 逐次将有根区间长度缩半，当区间长度小于 eps 时，区间中点为近似解
function [x,it]= Dichotomy(f_name,eps)
if nargin<2
    eps=1e-3;   % 默认误差限
end

it=0;

% 输入两端点
a=input('\n 输入左端点 a=：');
b=input('输入右端点 b=：');
fa=feval(f_name,a);
fb=feval(f_name,b);
```

```
while fa*fb>0      % 两端点函数值同号，重新输入
    fprintf('\n 两端点函数值同号，请重新输\n');
    a=input('输入左端点 a=：');
    b=input('输入右端点 b=：');
    fa=feval(f_name,a);
    fb=feval(f_name,b);
end

% 二分法计算方程的根
while b-a>=eps
    it=it+1;     % 循环次数
    xm=(b+a)/2;  % 计算中点
    fxm=feval(f_name,xm); % 中点的函数值
    if fxm*fa>0
        a=xm;
        fa=fxm;
    else
       b=xm;
       fb=fxm;
    end
end
x=(b+a)/2;
fprintf('\n 二分次数：%d\n',it);
fprintf('方程的近似解：%f\n',x);
```

```
matlab 程序（f3.m）
function y=f3(x)
y=x^3-x-1;
```

例 7 计算方程 $f(x)=x^3-x-1=0$ 在区间 $[1.0,1.5]$ 内的一个实根.

解 计算过程如下：

输入：

```
      [x,it]= Dichotomy('f3');
```

输出：

```
      输入左端点 a=：1
      输入右端点 b=：1.5

二分次数：9，方程的近似解：1.324707
```

4.6.2 Newton 法实验

Newton 迭代法公式为

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \quad (k = 0, 1, \cdots).$$

Newton 法求解方程的根，不但要知道函数 $f(x)$，还要知道其导数 $f'(x)$ 的情况；另外，牛顿迭代法计算过程中，初始点 x_0 的选取非常关键，只有在根 x^* 附近的初始点才能保证迭代收敛，若 x_0 给的不合适可能不收敛．因此，考虑画出函数 $y = f(x)$ 的图形，然后适当选取初始点 x_0．

matlab 程序如下：（Newton.m）

```
% 牛顿法求解方程 f_name(x)=0 在区间[a,b]的解
% eps 为误差限，区间端点 a 和 b 由键盘输入，
% 函数 f_name(x)在区间[a,b]连续，fd_name(x)为函数 f_name(x)的导函数
% fd_name(x)不为 0;
% 逐次迭代，当相邻两次计算出的点之间距离小于 eps 时，迭代结束.
function [x,it]= Newton(f_name,fd_name,eps)
if nargin<3
    eps=1e-3;   % 默认误差限
end
it=1;
a=input('\n 输入左端点 a=: '); % 输入两端点
b=input('输入右端点 b=: ');  t=a:eps:b;  y=feval(f_name,t);
plot(t,y); % 绘制函数图像，寻找初始点
leap=input('\n 是否重新输入区间端点——YES（输入非 0），NO（输入 0）: ');
while leap~=0
    fprintf('\n 请重新输入\n');
    a=input('输入左端点 a=: ');   b=input('输入右端点 b=: ');
    t=a:eps:b;   y=feval(f_name,t);  plot(t,y);
    leap=input('\n 是否重新输入区间端点——Y（输入非 0），N（输入 0）: ');
end
% 牛顿迭代法计算方程的根
x0=input('输入起始点:x0=');
x1=x0-feval(f_name,x0)/feval(fd_name,x0);
while abs(x1-x0)>=eps
    it=it+1;     % 循环次数
    x0=x1;    x1=x0-feval(f_name,x0)/feval(fd_name,x0);
end
x=x1;fprintf('\n 迭代次数: %d\n',it);fprintf('方程的近似解: %f\n',x);
```

matlab 程序：（f4.m）

```
function y=f4(x)y=x.*exp(x)-1;
```

```
matlab 程序：（f5.m）
function y=f5(x)  % 函数 f4 的导函数
y=(x+1).*exp(x);
```

例 8 利用 Newton 法计算方程 $xe^x - 1 = 0$ 的实根.

解 计算过程如下：

输入：

```
    [x,it]= Newton('f4','f5');
```

输出：

```
     输入左端点 a=: -1
     输入右端点 b=: 1
是否重新输入区间端点——YES（输入非 0），NO（输入 0）：0
输入起始点:
       x0=0.5
迭代次数：3
方程的近似解：0.567143
```

4.6.3 弦截法实验

弦截法的迭代公式为

$$x_{k+1} = x_k + \frac{f(x_k)}{f(x_k) - f(x_{k-1})}(x_k - x_{k-1}).$$

与 Newton 法相比，弦截法在迭代过程中不需要计算 $f'(x)$. 弦截法属于多点迭代法，要给出两个初始值 x_0 和 x_1.

```
matlab 程序如下：（Xian_J.m）
% 弦解法求解方程 f_name(x)=0 在区间[a,b]的解
% eps 为误差限，区间端点 a 和 b 由键盘输入，
% 函数 f_name(x)在区间[a,b]连续
% 逐次迭代，当计算的函数值小于 eps 时，迭代结束.
function [x,it]= Xian_J(f_name,eps)
if nargin<2
   eps=1e-5;   % 默认误差限
end

it=0;

% 输入两端点
a=input('\n 输入左端点 a=: ');
b=input('输入右端点 b=: ');
t=a:eps:b;
```

```
y=feval(f_name,t);
plot(t,y); % 绘制函数图像，寻找初始点
leap=input('\n 是否重新输入区间端点——YES（输入非 0），NO（输入 0）：');

while leap~=0
    fprintf('\n 请重新输入\n');
    a=input('输入左端点 a=：');
    b=input('输入右端点 b=：');
    t=a:eps:b;
    y=feval(f_name,t);
    plot(t,y);
    leap=input('\n 是否重新输入区间端点——Y（输入非 0），N（输入 0）：');
end

% 弦解法迭代法计算方程的根
x0=input('输入第一个起始点:x0=');
x1=input('输入第二个起始点:x1=');
f0=feval(f_name,x0); f1=feval(f_name,x1);
while abs(f1)>=eps
    it=it+1;     % 循环次数
    x2=x1-f1/(f1-f0)*(x1-x0); % 弦解法迭代公式
    x0=x1;x1=x2;    f0=feval(f_name,x0);    f1=feval(f_name,x1);
end
x=x1;
fprintf('\n 迭代次数：%d\n',it);  fprintf('方程的近似解：%f\n',x);
```

例 9　利用弦截法计算方程 $xe^x - 1 = 0$ 的实根.

解　计算过程如下：

输入：

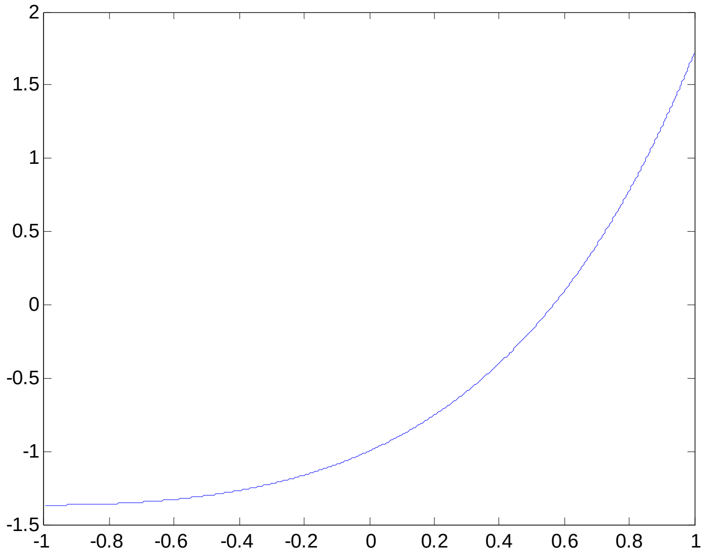
```
     [x,it]= Xian_J('f4');
```

输出：

输入左端点 a=：-1

表 4-2 记录了各步迭代的结果．我们看到如果仅仅取六位数字，那么结果 x_7 与 x_8 完全相同，这时我们可以认为 x_7 实际上已满足方程（3.4），即为所求的根.

应当指出，迭代法的效果并不总能令人满意的．譬如，设依方程（3.4）的另一种等价形式 $x = x^3 - 1$，



是否重新输入区间端点——YES（输入非 0），NO（输入 0）：0
输入第一个起始点:x0=0.5
输入第二个起始点:x1=0.6

迭代次数：3
方程的近似解：0.567143.

习　题　四

1．用二分法求方程 $x^4-2x^3-4x^2+4x+4=0$ 在区间 $[0,2]$ 内的根，使误差不超过 10^{-2}.

2．若将方程 $x^3-x^2-1=0$ 写成下列几种迭代函数形式，求不动点附近的一个根，并建立相应的迭代公式.

（1） $x=\varphi_1(x)=\sqrt[3]{1+x^2}$；

（2） $x=\varphi_2(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$；

（3） $x=\varphi_3(x)=\sqrt{\dfrac{1}{x-1}}$.

试判断由它们构成的迭代法在 $x_0=1.5$ 附近的收敛性.

3．给定函数 $f(x)$，设对一切 x，$f'(x)$ 存在且 $0<m\le f'(x)\le M$，证明对于范围 $0<\lambda<\dfrac{2}{M}$ 内的任意定数 λ，迭代过程 $x_{k+1}=x_k-\lambda f(x)$ 均收敛于 $f(x)=0$ 的根 x^*.

4．设 $\varphi(x)=x+c(x^2-3)$，应如何选取 c，才能使迭代 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 具有局部收敛性？c

取何值时，这个迭代收敛最快？

5．设 $f(x)=0$ 有单根 x^*， $x=\varphi(x)$ 是 $f(x)=0$ 的等价方程， $\varphi(x)$ 可表示为

$$\varphi(x)=x-m(x)/f(x),$$

证明：当 $m(x^*)\neq\dfrac{1}{f'(x^*)}$ 时，迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 是一阶收敛的；当 $m(x^*)=\dfrac{1}{f'(x^*)}$ 时，迭代公式 $x_{k+1}=\varphi(x_k)$ 至少是二阶收敛的.

6．用下列方法求 $f(x)=x^2+2xe^{-x}+e^{-2x}=0$ 的根，初值 $x_0=0$.

（1）用 Newton 迭代法；

（2） $x_{k+1}=x_k-2f(x_k)/f'(x_k)$， $(k=0,1,\cdots)$；

7．用 Newton 迭代法求方程 $x^x=10$ 的一个实根，精度要求 $\varepsilon_k=|x_k-x_{k-1}|\leq 10^{-6}$.

8．常数 A 的 m 次根可由对方程 $x^m-A=0$ 或 $1-\dfrac{A}{x^m}=0$ 用 Newton 迭代法求得，验证它们相应的 Newton 迭代格式分别为

$$x_{k+1}=\frac{1}{m}\left[(m-1)x_k+\frac{A}{x_k^{m-1}}\right],$$

$$x_{k+1}=\frac{1}{m}\left[(m+1)x_k-\frac{x_k^{m+1}}{A}\right].$$

9．设 x^* 为 $f(x)$ 的 m 重零点，若将 Newton 迭代法修改为

$$x_{k+1}=x_k-m\frac{f(x_k)}{f'(x_k)},\quad (k=0,1,\cdots),$$

证明：此迭代格式具有 2 阶收敛速度.

10．应用牛顿法于方程 $f(x)=1-\dfrac{a}{x^2}=0$，导出求 $\sqrt{a}$ 的迭代公式，并用此公式求 $\sqrt{115}$ 的值.

11．用弦截法求方程

$$f(x)=x^3-3x-1=0,$$

在 $x_0=2$ 附近的实根，要求 $|x_k-x_{k-1}|\leq 10^{-3}|x_{k+1}|$ 或 $|f(x_k)|\leq 10^{-3}$.

12．证明迭代公式

$$x_{k+1}=\frac{x_k\left(x_k^2+3a\right)}{3x_k^2+a},$$

是计算$\sqrt{a}$的三阶方法．假定初值x_0充分靠近根x^*，求$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{a}-x_{k+1}\right)\Big/\left(\sqrt{a}-x_k\right)^3$．