公式总结

1、 常用连续时间信号

函数名称	时域表达式
指数信号	$f(t)=ke^{at}$，$a\in R$
复指数信号	$e^{j\omega_0 t}$
正弦信号	$f(t)=k\sin(\omega t+\theta)$
抽样信号	$Sa(t)=\dfrac{\sin t}{t}$
单位阶跃函数	$\varepsilon(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \frac{1}{2}, & t=0\ \text{（或者不定义）}\\ 1, & t>0\end{cases}$
符号函数	$\operatorname{sgn}(t)=\begin{cases}1, & t>0\\ 0, & t=0\\ -1, & t<0\end{cases}$
冲激信号	$\begin{cases}\delta(t)=0, & t\neq 0\\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\mathrm{d}t=1\end{cases}$
门函数	$g_\tau(t)=\varepsilon(t+\tau/2)-\varepsilon(t-\tau/2)$
单位斜坡函数 r（t）	$r(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ t, & t\geq 0\end{cases}$

2、 能量与功率的计算方法

物理量	连续	离散
能量	$E=\lim\limits_{T\to\infty}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\lvert f(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t$	$E=\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{k=-N}^{N}\lvert f(k)\rvert^2$
功率	$P=\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}\lvert f(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t$	$P=\lim\limits_{N\to\infty}\dfrac{1}{2N+1}\sum\limits_{k=-N}^{N}\lvert f(k)\rvert^2$

3、 冲激函数与冲激偶信号的计算

性质名称	内容
奇偶性质	$\delta(t)=\delta(-t)$
尺度变换	$\delta(at)=\delta(t)/\lvert a\rvert$ $\delta'(at)=\delta'(t)/\ (a\lvert a\rvert)$ $\delta[a(t-t_0)]=\delta(t-t_0)/\lvert a\rvert$
冲激函数与普通函数相乘	$f(t)\delta(t)=f(0)\delta(t)$ $f(t)\delta(t-t_0)=f(t_0)\delta(t-t_0)$
冲激偶函数与普通函数相乘	$f(t)\delta'(\mathrm{t})=f(0)\delta'(t)-f'(0)\delta(t)$ $f(t)\delta'(t-t_0)=f(t_0)\delta'(t-t_0)-f'(t_0)\delta(t-t_0)$
筛选性质	$\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t)\mathrm{d}t=f(0)$ $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta(t-t_0)\mathrm{d}t=f(t_0)$ $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t)\mathrm{d}t=-f'(0)$ $\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\delta'(t-t_0)\mathrm{d}t=-f'(t_0)$
冲激函数的复合公式	$\delta[f(t)]=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{\lvert f'(t_i)\rvert}\delta(t-t_i)$ 其中$t_i(i=1，2，…，n)$为$f(t)=0$的 n 个不相等实根。

4、 微分方程的齐次解

特征根	齐次解$y_h(t)$
单实根	$e^{\lambda t}$
r重实根	$(C_{r-1}t^{r-1}+C_{r-2}t^{r-2}+\cdots+C_1t+C_0)e^{\lambda t}$
一对共轭复根 $\lambda_{1,2}=\alpha\pm j\beta$	$e^{\alpha t}[Ccos(\beta t)+Dsin(\beta t)]$或$Acos(\beta t-\theta)$，其中$Ae^{j\theta}=C+Dj$
r重共轭复根	$[A_{r-1}t^{r-1}cos(\beta t+\theta_{r-1})+A_{r-2}t^{r-2}cos(\beta t+\theta_{r-2})+\cdots$ $+A_0cos(\beta t+\theta_0)]e^{\alpha t}$

5、 微分方程的特解

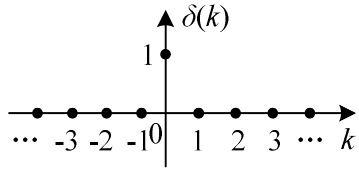
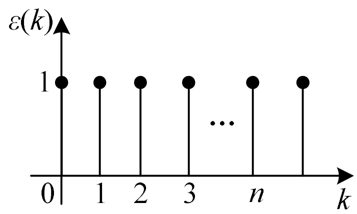
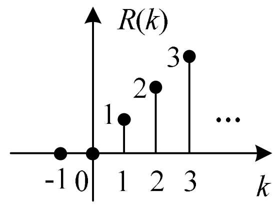
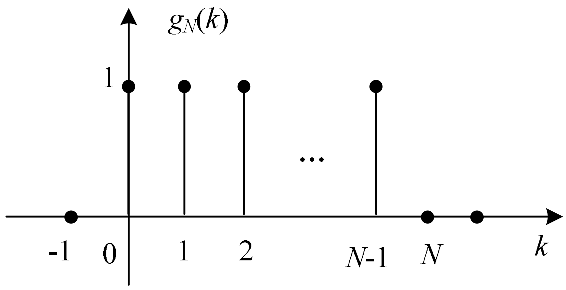
激励$f(t)$	特解$y_p(t)$
t^m	① $P_m t^m + P_{m-1}t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0$(所有的特征根均不等于 0)； ②$t^r[P_m t^m + P_{m-1}t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0]$(有 r 重等于 0 的特征根)
$e^{\alpha t}$	①$Pe^{\alpha t}$(α不等于特征根)； ②$(P_0 + P_1 t)e^{\alpha t}$($\alpha$等于特征单根)； ③$(P_r t^r + P_{r-1}t^{r-1} + \cdots + P_1 t + P_0)e^{\alpha t}$($\alpha$等于 r重特征根)
$cos(\beta t)$ 或$sin(\beta t)$	$Pcos(\beta t) + Qsin(\beta t)$(所有的特征根均不等于$\pm j\beta$)，或者 $Acos(\beta t - \theta)$，其中$Ae^{j\theta} = P + Qj$

6、 卷积积分的性质

性质名称	内容
代数运算	$x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$ $x(t) * [h_1(t) + h_2(t)] = x(t) * h_1(t) + x(t) * h_2(t)$ $x(t) * h_1(t) * h_2(t) = x(t) * [h_1(t) * h_2(t)]$
与冲激函数的卷积	$x(t - t_0) = x(t) * \delta(t - t_0)$ $f(t) * \delta(t) = f(t)$ $f(t) * \delta(t - t_1) = \delta(t - t_1) * f(t) = f(t - t_1)$ $\delta(t - t_1) * \delta(t - t_2) = \delta(t - t_1 - t_2)$ $f(t - t_1) * \delta(t - t_2) = f(t - t_2) * \delta(t - t_1) = f(t - t_1 - t_2)$
微积分性质	$[f_1(t) * f_2(t)]' = f_1'(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2'(t)$ $[f_1(t) * f_2(t)]^{(-1)} = f_1^{(-1)}(t) * f_2(t) = f_1(t) * f_2^{(-1)}(t)$ $f^{(n)}(t) * h(t) = f(t) * h(t) * \delta^{(n)}(t) = f(t) * h^{(n)}(t)$ $f_1(t) * f_2(t) = f_1^{(-1)}(t) * f_2'(t) = f_1'(t) * f_2^{(-1)}(t)$
与冲激偶函数的卷积	$f(t) * \delta'(t) = f'(t)$

	$f(t) * \delta'(t-t_0) = f'(t-t_0)$

7、 常用离散时间信号

函数名称	时域表达式	波形
单位序列	$\delta(k) = \begin{cases} 1, & k=0 \\ 0, & k \neq 0 \end{cases}$	
单位阶跃序列	$\varepsilon(k) = \begin{cases} 0, & k<0 \\ 1, & k \geq 0 \end{cases}$	
单位斜变序列	$R(k) = k\varepsilon(k)$	
矩形序列	$g_N(k) = \begin{cases} 1, & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0, & k<0, N \leq k \end{cases}$	

8、 差分方程的齐次解

特征根	齐次解$y_h(k)$
单实根λ_i	$C_i\lambda_i^k$
r 重实根λ_i	$(C_1k^{r-1} + C_2k^{r-2} + \cdots + C_{r-1}k + C_r)\lambda_i^k$
共轭复数根 $\lambda_{1,2} = \rho e^{\pm j\Omega}$	$\rho^k[C_1cos(k\Omega) + C_1sin(k\Omega)]$或$A\rho^kcos(k\Omega - \varphi)$

r 重共轭复数根 $\lambda_{1,2}=\rho e^{\pm j\Omega}$	$\rho^k[C_{r-1}cos(k\Omega-\varphi_{r-1})+C_{r-2}cos(k\Omega-\varphi_{r-2})+\cdots+C_1cos(k\Omega-\varphi_1)+C_0cos(k\Omega-\varphi_0)]$

9、　差分方程的特解

激励信号$e(k)$	特解$y_p(k)$
E(常数)	P(常数)
k^m	$P_mk^m+P_{m-1}k^{m-1}+\cdots+P_1k+P_0$(所有特征根均不为零) $k^r(P_mk^m+P_{m-1}k^{m-1}+\cdots+P_1k+P_0)$(有 r 个为零的特征根)
a^k	Pa^k (a 不等于待征根) $(P_1k+P_0)a^k$ (a 等于一个特征根) $(P_rk^r+P_{r-1}k^{r-1}+\cdots+P_1k+P_0)a^k$ (a 等于 r 重特征根)
$cos(k\Omega-\varphi_0)$	$P_1cos(k\Omega)+P_2sin(k\Omega)$或$Bcos(k\Omega-\theta)$
$a^kcos(k\Omega-\varphi_0)$	$a^k[P_1cos(k\Omega)+P_2sin(k\Omega)]$或$Ba^kcos(k\Omega-\theta)$

10、　卷积和的性质

代数运算	$f_1(k)*f_2(k)=f_2(k)*f_1(k)$ $f_1(k)*[f_2(k)+f_3(k)]=f_1(k)*f_2(k)+f_1(k)*f_3(k)$ $f_1(k)*[f_2(k)*f_3(k)]=[f_1(k)*f_2(k)]*f_3(k)$
与单位脉冲卷积和	$f(k)*\delta(k)=f(k)$ $f(k)*\delta(k-k_1)=f(k-k_1)$
移序性质	若$f_1(k)*f_2(k)=f(k)$ 则$f_1(k-k_1)*f_2(k-k_2)=f(k-k_1-k_2)$
与单位阶跃序列的卷积和	$f(k)*\varepsilon(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}f(i)$
差分	$\Delta[f_1(k)*f_2(k)]=\Delta f_1(k)*f_2(k)=f_1(k)*\Delta f_2(k)$

累和	$\sum_{m=-\infty}^{k}[f_1(m)*f_2(m)]=\left[\sum_{m=-\infty}^{k}f_1(m)\right]*f_2(k)$ $=f_1(k)*\left[\sum_{m=-\infty}^{k}f_2(m)\right]$
差分、累和	$f_1(k)*f_2(k)=\left[\sum_{m=-\infty}^{k}f_1(m)\right]*\nabla f_2(k)=\nabla f_1(k)*\left[\sum_{m=-\infty}^{k}f_2(m)\right]$

11、 三角形式与指数形式的傅里叶级数

要点	三角函数形式	指数形式
展开式	$f(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(n\Omega t)+b_n\sin(n\Omega t)$ $=\frac{A_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos(n\Omega t+\varphi_n)$	$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}F_n\,\mathrm{e}^{\mathrm{j}n\Omega t}$ $F_n=\lvert F_n\rvert\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}$
傅里叶系数	$a_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t(n=0,1,2,\quad\cdots)$ $b_n=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t(n=1,2,\quad\cdots)$	$F_n=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}n\Omega t}\,\mathrm{d}t$ $n=0,\pm1,\pm2,\ldots$
系数间关系	$a_n=A_n\cos\varphi_n=F_n+F_{-n}$ $b_n=-A_n\sin\varphi_n=j(F_n-F_{-n})$ $A_n=2\lvert F_n\rvert$ 其中a_n是关于n的偶函数，b_n是关于n的奇函数	$F_n=\lvert F_n\rvert\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}=\frac{1}{2}A_n\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_n}=\frac{1}{2}(a_n-\mathrm{j}b_n)$ $\lvert F_n\rvert=\frac{1}{2}A_n=\frac{1}{2}\sqrt{(a_n)^2+(b_n)^2}$ $\varphi_n=-\arctan\frac{b_n}{a_n}$ 其中F_n是关于n的偶函数，φ_n是关于n的奇函数

12、 傅里叶系数与实周期信号波形对称的关系

对称条件	所含分量	系数a_n	系数b_n
偶函数 $f(t)=f(-t)$	只有余弦	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}}f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$	0

奇函数 $f(t)=-f(-t)$	只有正弦	0	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$
偶谐函数 $f(t)=f(t\pm T/2)$	只有偶次谐波	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$ $n=0,2,4,\ldots$	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$ $n=0,2,4,\ldots$
$f(t)$ $=-f(t\pm T/2)$	只有奇次谐波	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\cos(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$ $n=1,3,5,\ldots$	$\frac{4}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} f(t)\sin(n\Omega t)\,\mathrm{d}t$ $n=1,3,5,\ldots$

13、 常用函数的傅里叶变换

序号	名称	时间函数	频谱函数
1	单边指数函数	$e^{-\alpha t}\varepsilon(t)(\alpha>0)$	$1/(\alpha+j\omega)$
2	双边指数函数	$e^{-\alpha\|t\|}(\alpha>0)$	$2\alpha/(\alpha^2+\omega^2)$
3	门函数	$g_\tau(t)$	$\tau Sa(\omega\tau/2)$
4	冲激函数	$\delta(t)$	1
5	冲激偶函数	$\delta'(t)$	$\mathrm{j}\omega$
6	符号函数	$\mathrm{sgn}(t)$	$2/\mathrm{j}\omega$
7	阶跃函数	$\varepsilon(t)$	$\pi\delta(\omega)+1/(\mathrm{j}\omega)$
8	余弦函数	$\cos(\omega_0 t)$	$\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$
9	正弦函数	$\sin(\omega_0 t)$	$\mathrm{j}\pi[\delta(\omega+\omega_0)-\delta(\omega-\omega_0)]$

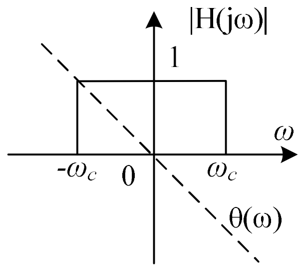
14、 傅里叶变换的性质

名称	时域$f(t)$	频域$F(\mathrm{j}\omega)$
定义	$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\mathrm{j}\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}\omega$	$F(\mathrm{j}\omega)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\,\mathrm{d}t$
线性性质	$af_1(t)+bf_2(t)$	$aF_1(\mathrm{j}\omega)+bF_2(\mathrm{j}\omega)$
奇偶性	$f(t)=f(-t)$	$F(\mathrm{j}\omega)=R(\omega)$，$X(\omega)=0$

(实函数)	$f(t)=-f(-t)$	$F(\mathrm{j}\omega)=jX(\omega)$，$R(\omega)=0$
	非奇非偶函数	$F(-\mathrm{j}\omega)=F^*(\mathrm{j}\omega)$ $\lvert F(\mathrm{j}\omega)\rvert=\lvert F(-\mathrm{j}\omega)\rvert$ $X(\omega)=-X(-\omega)$ $\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$ $R(\omega)=R(-\omega)$
奇偶性 (虚函数)	$f(t)=jx(t)$ $x(t)$为非奇非偶实函数	$F(-\mathrm{j}\omega)=-F^*(\mathrm{j}\omega)$ $\lvert F(\mathrm{j}\omega)\rvert=\lvert F(-\mathrm{j}\omega)\rvert$ $X(\omega)=X(-\omega)$ $\varphi(\omega)=-\varphi(-\omega)$ $R(\omega)=-R(-\omega)$
对称性	$F(jt)$	$2\pi f(-\omega)$
尺度变换	$f(at)(a\neq 0)$	$F(\mathrm{j}\omega/a)/\lvert a\rvert$
时移性质	$f(t\pm t_0)$	$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{j}\omega t_0}F(\mathrm{j}\omega)$
频移性质	$f(t)\mathrm{e}^{\mp \mathrm{j}\omega_0 t}$	$F[\mathrm{j}(\omega\pm\omega_0)]$
时域卷积定理	$f_1(t)*f_2(t)$	$F_1(\mathrm{j}\omega)F_2(\mathrm{j}\omega)$
频域卷积定理	$2\pi f_1(t)f_2(t)$	$F_1(\mathrm{j}\omega)*F_2(\mathrm{j}\omega)$
时域微分	$f^{(n)}(t)$	$(\mathrm{j}\omega)^{(n)}F(\mathrm{j}\omega)$
时域积分	$\int_{-\infty}^{t} f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\ \ [f(-\infty)=0]$	$\pi F(0)\delta(\omega)+[F(\mathrm{j}\omega)/\mathrm{j}\omega]$
频域微分	$(-jt)^n f(t)$	$F^{(n)}(\mathrm{j}\omega)$
频域积分	$\pi f(0)\delta(t)+[f(t)/(-jt)]$	$\int_{-\infty}^{\omega} F(\mathrm{j}\tau)\,\mathrm{d}\tau\ \ [F(-\mathrm{j}\infty)=0]$
能量定理	$E=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\lvert F(\mathrm{j}\omega)\rvert^2\,\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}\lvert f(t)\rvert^2\,\mathrm{d}t$	
功率定理	$P=\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\,\mathrm{d}t=\left(\frac{A_0}{2}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2}{A_n}^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\lvert F_n\rvert^2$	

15、 理想低通滤波器的特性

要点	内容

频率响应	$H(\mathrm{j}\omega)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_d}, \lvert\omega\rvert<\omega_C\\0, \quad \lvert\omega\rvert>\omega_C\end{cases}=\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t_d}g_{2\omega_C}(\omega)$
频率响应波形	
冲激响应	$\frac{\omega_c}{\pi}\mathrm{Sa}[\omega_c(t-t_d)]$
阶跃响应	$\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\int_0^{\omega_c(t-t_d)}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$

16、 拉普拉斯变换的定义

类别	正变换	反变换
单边	$F(s)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-st}\,dt$	$f(t)=\frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)\,e^{st}ds$
双边	$F(s)=\int_{0_-}^{\infty}f(t)\,e^{-st}dt$	$f(t)=\begin{cases}0, t<0\\ \frac{1}{2\pi j}\int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty}F(s)e^{st}ds, t>0\end{cases}$

17、 常用的拉氏变换

信号	拉氏变换	ROC
$\delta(t)$	1	全部s平面
$\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s}$	$Re(s)>0$
$e^{-at}\varepsilon(t)$	$\frac{1}{s+a}$	$Re(s)>-a$
$t^n\varepsilon(t)$	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$Re(s)>0$
$sin(\omega_0 t)\,\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{s^2+\omega_0^2}$	$Re(s)>0$
$cos(\omega_0 t)\,\varepsilon(t)$	$\frac{s}{s^2+\omega_0^2}$	$Re(s)>0$
$e^{-at}\,sin(\omega_0 t)\,\varepsilon(t)$	$\frac{\omega_0}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$Re(s)>-\alpha$

$e^{-at}\cos(\omega_0 t)\,\varepsilon(t)$	$\dfrac{s+a}{(s+a)^2+\omega_0^2}$	$Re(s) > -a$
$te^{-at}\varepsilon(t)$	$\dfrac{1}{(s+a)^2}$	$Re(s) > -a$
$t^n e^{-at}\varepsilon(t)$，$n \in N^+$	$\dfrac{n!}{(s+a)^{n+1}}$	$Re(s) > -a$

18、 单边拉氏变换主要性质

性质名称	内容
线性	$a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} a_1 F_1(s) + a_2 F_2(s)$，$\sigma > max(\sigma_1, \sigma_2)$
尺度变换	$f(at) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$，$a > 0$，$\sigma > a\sigma_0$
时移	$f(t-t_0)\varepsilon(t-t_0) \overset{LT}{\longleftrightarrow} e^{-st_0} F(s)$，$\sigma > \sigma_0$
复频移	$f(t)e^{s_0 t} \overset{LT}{\longleftrightarrow} F(s-s_0)$，$\sigma > \sigma_0 + Re(s_0)$
时域微分	$f'(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} sF(s) - f(0_-)$，$\sigma > \sigma_0$
时域积分	$f^{(-1)}(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s} f^{(-1)}(0_-)$
时域卷积	$f_1(t) * f_2(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} F_1(s) F_2(s)$，$\sigma > max(\sigma_1, \sigma_2)$
时域相乘	$f_1(t) \cdot f_2(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} F_1(\eta) F_2(s-\eta) d\eta$，$\sigma_1 < c < \sigma - \sigma_2$，$\sigma > \sigma_1 + \sigma_2$
s域微分	$-tf(t) \overset{LT}{\longleftrightarrow} F'(s)$，$\sigma > \sigma_0$
s域积分	$\frac{f(t)}{t} \overset{LT}{\longleftrightarrow} \int_s^{\infty} F(\eta)\, d\eta$，$\sigma > \sigma_0$
初值定理	$f(0_+) = \lim_{s\to+\infty} sF(s)$，$F(s)$为真分式
终值定理	$f(\infty) = \lim_{s\to 0} sF(s)$，$s = 0$在$sF(s)$的收敛域内

19、 拉氏反变换常用公式

情况分类	象函数	原函数
单极点	$F(s) = \sum_{i=1}^{n} \frac{K_i}{s - s_i}$	$f(t) = \sum_{i=1}^{n} K_i\, e^{s_i t} \varepsilon(t)$

共轭单极点	$F(s)=\dfrac{K_1}{s-\alpha-j\beta}+\dfrac{K_2}{s-\alpha+j\beta}$	$f(t)=2\mathrm{e}^{\alpha t}[A\cos(\beta t)-B\sin(\beta t)]\varepsilon(t)$
	$\dfrac{\beta}{s^2+\beta^2}$	$\sin(\beta t)\varepsilon(t)$
	$\dfrac{s}{s^2+\beta^2}$	$\cos(\beta t)\varepsilon(t)$
	$\dfrac{\beta}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\sin(\beta t)\varepsilon(t)$
	$\dfrac{s+\alpha}{(s+\alpha)^2+\beta^2}$	$\mathrm{e}^{-\alpha t}\cos(\beta t)\varepsilon(t)$
重极点	$F(s)=\dfrac{K_{11}}{(s-s_1)^r}+\dfrac{K_{12}}{(s-s_1)^{r-1}}+\cdots+\dfrac{K_{1r}}{(s-s_1)}$	$f(t)=\left[\sum_{i=1}^{r}\dfrac{K_{1i}}{(r-i)!}t^{r-i}\right]\mathrm{e}^{s_1 t}\varepsilon(t)$

20、常见序列的 z 变换

序号	$f(k)$	$F(z)$	ROC
1	$\delta(k)$	1	$\lvert z\rvert \geq 0$
2	$\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
3	$\varepsilon(k-1)$	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert > 1$
4	$k\varepsilon(k)$	$\dfrac{z}{(z-1)^2}$	$\lvert z\rvert > 1$
5	$k^2\varepsilon(k)$	$\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$	$\lvert z\rvert > 1$

6	$\frac{k(k-1)}{2}\varepsilon(k)$	$\frac{z}{(z-1)^3}$	$\|z\|>1$
7	$\frac{(k+1)k}{2}\varepsilon(k)$	$\frac{z^2}{(z-1)^3}$	$\|z\|>1$
8	$a^k\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
9	$a^{k-1}\varepsilon(k-1)$	$\frac{1}{z-a}$	$\|z\|>\|a\|$
10	$-a^k\varepsilon(-k-1)$	$\frac{z}{z-a}$	$\|z\|<\|a\|$
11	$ka^k\varepsilon(k)$	$\frac{az}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
12	$(k+1)a^k\varepsilon(k)$	$\frac{z^2}{(z-a)^2}$	$\|z\|>\|a\|$
13	$k^2a^k\varepsilon(k)$	$\frac{az(z+a)}{(z-a)^3}$	$\|z\|>\|a\|$
14	$e^{j\omega Tk}\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z-e^{j\omega T}}$	$\|z\|>1$
15	$\cos(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{z(z-\cos\beta)}{z^2-2z\cos\beta+1}$	$\|z\|>1$
16	$\sin(\beta k)\varepsilon(k)$	$\frac{z\sin\beta}{z^2-2z\sin\beta+1}$	$\|z\|>1$
17	$\cos\left(\frac{\pi}{2}k\right)\varepsilon(k)$	$\frac{z^2}{z^2+1}$	$\|z\|>1$

18	$\sin\left(\frac{\pi}{2}k\right)\varepsilon(k)$	$\frac{z}{z^2+1}$	$\|z\|>1$
19	$\frac{1}{(n-1)!}k(k-1)\cdots(k-n+2)a^{k-n+1}\varepsilon(k)$	$\frac{z}{(z-a)^n}$	$\|z\|>\|a\|$

21、z 变换的性质

性质	内容
线性性质	$af_1(k)+bf_2(k)\leftrightarrow aF_1(z)+bF_2(z)$
双边移位性质	$f(k\pm m)\leftrightarrow z^{\pm m}F(z)$，$\alpha<\|z\|<\beta$
单边移位性质	$f(k-m)$，$m>0$ $z^{-m}F(z)+\sum_{k=0}^{m-1}f(k-m)z^{-k},\|z\|>\alpha$
	$f(k+m)$，$m>0$ $z^{m}F(z)-\sum_{k=0}^{m-1}f(k)z^{m-k},\|z\|>\alpha$
z 域尺度变换	$Z[a^kf(k)]=F\left(\frac{z}{a}\right),(\alpha\|a\|<\|z\|<\beta\|a\|)$
卷积定理	$Z[f_1(k)*f_2(k)]=F_1(z)F_2(z),(R_1<\|z\|<R_2)$
z 域微分	$Z[kf(k)]=-z\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}F(z)$。
z 域积分	$\frac{f(k)}{k+m}\leftrightarrow z^m\int_z^\infty\frac{F(\eta)}{\eta^{m+1}}d\eta,\alpha<\|z\|<\beta$ $\frac{f(k)}{k}\leftrightarrow\int_z^\infty\frac{F(\eta)}{\eta}d\eta,\alpha<\|z\|<\beta$
k 域反转	$f(-k)\leftrightarrow F(z^{-1}),\frac{1}{\beta}<\|z\|<\frac{1}{\alpha}$
部分和	$g(k)=\sum_{i=-\infty}^{k}f(i)\leftrightarrow\frac{z}{z-1}F(z),\max(\alpha,1)<\|z\|<\beta$
初值定理	$\begin{cases}f(M)=\lim_{z\to\infty}z^MF(z)\\f(M+1)=\lim_{z\to\infty}[z^{M+1}F(z)-zf(M)]\\f(M+2)=\lim_{z\to\infty}[z^{M+2}F(z)-z^2f(M)-zf(M+1)]\end{cases}$

	$\begin{cases} f(0)=\lim\limits_{z\to\infty}F(z) \\ f(1)=\lim\limits_{z\to\infty}[zF(z)-zf(0)] \\ f(2)=\lim\limits_{z\to\infty}[z^2F(z)-z^2f(0)-zf(1)] \end{cases}$
终值定理	$f(\infty)=\lim\limits_{k\to\infty}f(k)=\lim\limits_{z\to 1}[(z-1)F(z)]$

22、逆 z 变换常用公式

情况分类	象函数	原函数
单极点	$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_0}{z}+\sum_{i=1}^{n}\frac{K_i}{z-p_i}$	$f(k)=K_0\delta(k)+\sum_{i=1}^{n}K_i(p_i)^k\varepsilon(k)$
共轭单极点	$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_1}{z-c-jd}+\frac{K_1{}^*}{z-c+jd}$	$f(k)=2\lvert K_1\rvert\alpha^k\cos(\beta k+\theta_1)\varepsilon(k)$
重极点	$\frac{F(z)}{z}=\frac{K_{11}}{(z-a)^r}+\frac{K_{12}}{(z-a)^{r-1}}+\cdots+\frac{K_{1r}}{z-a}$	$\frac{k(k-1)\cdots(k-m+1)}{m!}a^{k-m}\varepsilon(k)\leftrightarrow\frac{z}{(z-a)^{m+1}}$

【其他重要公式】

$$\frac{z}{(z-a)^2}\leftrightarrow ka^{k-1}\varepsilon(k)，\ \lvert z\rvert>\lvert a\rvert$$
$$\frac{z}{(z-a)^3}\leftrightarrow \frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(k)，\ \lvert z\rvert>\lvert a\rvert$$
$$\frac{z}{(z-a)^2}\leftrightarrow -ka^{k-1}\varepsilon(-k-1)，\ \lvert z\rvert<\lvert a\rvert$$
$$\frac{z}{(z-a)^3}\leftrightarrow -\frac{1}{2}k(k-1)a^{k-2}\varepsilon(-k-1)，\ \lvert z\rvert<\lvert a\rvert$$

23、连续系统函数的极点分布与 h（t）的关系

极点位置及阶次		函数特性
单极点	极点位于 s 平面的正实轴	$H(s)=K\frac{1}{s-a}\leftrightarrow h(t)=Ke^{at}\varepsilon(t)$
	极点位于 s 平面的坐标原点	$H(s)=K\frac{1}{s}\leftrightarrow h(t)=K\varepsilon(t)$
	极点位于 s 平面的负实轴	$H(s)=K\frac{1}{s+a}\leftrightarrow h(t)=Ke^{-at}\varepsilon(t)$
	$H(s)$的极点位于 s 平面的右半开面的共轭极点	$H(s)=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}\leftrightarrow h(t)=e^{at}\sin(\omega t)\varepsilon(t)$

	$H(s)$的极点位于 s 平面的虚轴	$H(s)=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}\leftrightarrow h(t)=\sin(\omega t)\varepsilon(t)$
	$H(s)$的极点是位于 s 平面的左半开面的共轭极点	$H(s)=\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}\leftrightarrow h(t)=e^{-at}\sin(\omega t)\varepsilon(t)$
重极点	位于坐标原点的二阶或三阶极点	$H(s)=\frac{1}{s^2}\leftrightarrow h(t)=t\varepsilon(t)$ $H(s)=\frac{1}{s^3}\leftrightarrow h(t)=\frac{t^2}{2}\varepsilon(t)$
	位于实轴上的二阶或三阶极点	$H(s)=\frac{1}{(s+a)^2}\leftrightarrow h(t)=te^{-at}\varepsilon(t)$, $H(s)=\frac{1}{(s+a)^3}\leftrightarrow h(t)=\frac{1}{2}t^2e^{-at}\varepsilon(t)$
	位于虚轴上的二阶共轭极点	$H(s)=\frac{2\omega s}{(s^2+\omega^2)^2}\leftrightarrow h(t)=t\sin(\omega t)\varepsilon(t)$