# 数处重点公式总结

序列的卷积：$x(n) * h(n) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)\, h(n-m)$

## 线性卷积的性质

交换律：  $x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$

结合律：  $x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)$

分配律：  $x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$

模拟频率与数字频率间的关系：$\omega = \Omega T$

叠加定理：$T[a_1x_1(n)] + T[a_2x_2(n)] \ = a_1y_1(n) + a_2y_2(n)$

时不变特性：$T[x(n-n_0)] = y(n-n_0)$

Z 变换：$X(z) = ZT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)z^{-n}$

逆 Z 变换：$x(n) = \mathrm{IZT}[X(z)]=\frac{1}{2\pi j}\oint_c X(z)z^{n-1}\,\mathrm{d}z$

## Z 变换的性质

线性：$ZT[ax(n) + by(n)] = aX(z) + bY(z)$

移位：$ZT[x(n-m)] = z^{-m}X(z)$

尺度变换：  $ZT[a^n x(n)] = X\left(\frac{z}{a}\right)$

微分：$ZT[nx(n)] = -z \cdot \frac{d}{dz}X(z)$

共轭：$ZT[x^*(n)] = X^*(z^*)$

翻褶：$ZT[x(-n)] = X\left(\frac{1}{z}\right)$

离散时间傅里叶变换（DTFT）：$X(e^{j\omega}) = DTFT[x(n)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)e^{-j\omega n}$

离散时间逆傅里叶变换（IDTFT）：$x(n) = \mathrm{IDTFT}\left[X\left(e^{j\omega}\right)\right] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X\left(e^{j\omega}\right) \cdot e^{j\omega n} d\omega$

## 离散时间傅里叶变换的性质

线性：$ax(n) \pm by(n) \Leftrightarrow aX\left(e^{j\omega}\right) \pm bY\left(e^{j\omega}\right)$

时移：$x(n-m) \Leftrightarrow e^{-j\omega m}X\left(e^{j\omega}\right)$

频移：$e^{j\omega_0 n}x(n) \Leftrightarrow X\left(e^{j(\omega-\omega_0)}\right)$

时域卷积：$x(n)*h(n) \Leftrightarrow X\left(e^{j\omega}\right)H\left(e^{j\omega}\right)$

频域卷积：$x(n)\cdot h(n) \Leftrightarrow \frac{1}{2\pi}X\left(e^{j\omega}\right)*H\left(e^{j\omega}\right)$

帕塞瓦尔定理：$\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|X(e^{j\omega})|^2\,d\omega$

周期序列离散傅里叶级数（DFS）：$\tilde{X}(k)=DFS[\tilde{x}(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}\tilde{x}(n)e^{-j\frac{2\pi}{N}kn}$

IDFS：$\tilde{x}(n)=IDFS[\tilde{X}(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}\tilde{X}(k)e^{j\frac{2\pi}{N}kn}$

离散傅里叶变换（DFT）：$X(k)=DFT[x(n)]=\sum_{n=0}^{N-1}x(n)W_N^{nk}$

离散傅里叶逆变换（IDFT）：$x(n)=IDFT[X(k)]=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}X(k)W_N^{-nk}$

## 离散傅里叶变换的性质

线性：$DFT[ax_1(n)+bx_2(m)]=aX_1(k)+bX_2(k)$

时域圆周移位：$X_m(k)=DFT[x((n+m))_N R_N(n)] \quad =W_N^{-mk}X(k)$

频域圆周移位：　$IDFT[X((k+l))_N R_N(k)]=W_N^{nl}x(n)=e^{-j\frac{2\pi}{N}nl}x(n)$

圆周卷积：$y(n)=\left[\sum_{m=0}^{N-1}x_1(m)x_2\left((n-m)\right)_N\right]R_N(n)=x_1(n)Ⓝx_2(n)$

DFT 形式的帕帕塞瓦尔定理：$\sum_{n=0}^{N-1}|x(n)|^2=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1}|X(k)|^2$

FFT 中复数乘法运算次数：$C_M=\frac{N}{2}\bullet \mathrm{M}=\frac{N}{2}\log_2 N$

FFT 中复数加法次数为：$C_A=N\bullet \mathrm{M}=\mathrm{N}\log_2 N$　　（$\mathrm{N}=2^{\mathrm{M}}$，共有 M 级蝶形）

FIR 系统频率采样结构：$H(z)=(1-z^{-N})\frac{l}{N}\sum_{k=0}^{N-I}\frac{H(k)}{1-W_N^{-k}z^{-1}}$

脉冲响应不变法：$H_a(s)=\sum_{k=1}^{N}\frac{A_k}{s-s_k}$ ，$H(z)=\sum_{k=1}^{N}\frac{TA_k}{1-e^{s_kT}Z^{-1}}$

脉冲响应不变法边界频率转换关系

$$\Omega_p=\frac{\omega_p}{T}\ ,\quad \Omega_s=\frac{\omega_s}{T}$$

双线性变换法边界频率转换关系

$$\Omega_p = \frac{2}{T} tan\left(\frac{\omega_p}{2}\right) \quad , \quad \Omega_s = \frac{2}{T} tan\left(\frac{\omega_s}{2}\right)$$

模拟低通—数字低通双线性变换：$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$ ，$\Omega = \frac{2}{T} tan\left(\frac{\omega}{2}\right)$

模拟低通—数字高通双线性变换：$s = \frac{T}{2} \cdot \frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$ ，$\Omega = \frac{2}{T} cot\left(\frac{\omega}{2}\right)$

模拟低通—数字带通双线性变换：$s = \frac{1-2\mathrm{co}\quad {}_0 z^{-1}+z^{-2}}{1-z^{-2}}$ ，$\Omega = \frac{\cos\omega_0-\cos\omega}{\sin\omega}$

$\cos\omega_0 = \frac{\sin(\omega_1+\omega_2)}{\sin\omega_1+\sin\omega_2}$ ，$\Omega_c = \frac{cos\quad {}_0-\cos\omega_2}{sin\omega_2}$

模拟低通—数字带阻双线性变换：$s = \frac{1-z^{-2}}{1-2\cos\omega_0 z^{-1}+z^{-2}}$ ，$\Omega = \frac{\cos\omega_0-\cos\omega\sin\omega}{\cos\omega-\cos\omega_0}$

$\cos\omega_0 = \frac{\sin(\omega_1+\omega_2)}{\sin\omega_1+\sin\omega_2}$ ，$\Omega_c = \frac{sin\omega_1}{cos\omega_1-cos\omega_0}$

理想低通滤波器的单位脉冲响应：

$$h_d(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} H_d\left(e^{j\omega}\right)e^{j\omega n}\,d\omega = \begin{cases} \dfrac{sin[\omega_n(n-\alpha)]}{\pi(n-\alpha)} & n \neq \alpha \\ \dfrac{\omega_n}{\pi} & n = \alpha \end{cases}$$

频率采样法的频率采样值：

$$H_\mathrm{d}(k) = H(k)e^{j\theta(k)} = H(k)e^{-j\left(\frac{N-1}{2}\right)\left(\frac{2\pi}{N}\right)k},\ \ \theta(k) = -\frac{N-1}{2}\cdot\frac{2\pi}{N}k = -\frac{N-1}{N}\pi k$$