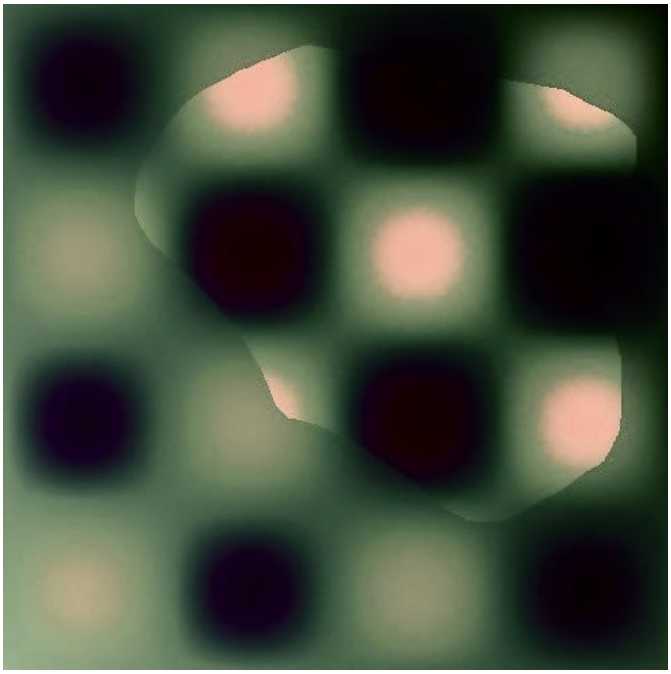

Rapport du projet d'homogénéisation

Jincheng KE

Une présentation détaillée du projet
avec des informations supplémentaires

Novembre 2023

Chapitre 1

Résolution numérique de problèmes elliptiques avec divers conditions aux limites

1.1 Conditions de type Neumann

Formulation variationnelle

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$, A un tenseur qui est uniformément borné

$$\exists C > 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \quad \forall i,j \quad |A_{ij}(x,y)| \leq C$$

et satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme

$$\exists c > 0 \quad \forall (x,y) \in \Omega \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^2 \quad A(x,y)\xi \cdot \xi \geq c|\xi|^2$$

et $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec coefficients variables et condition aux limites de Neumann : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} u - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) &= f \quad \text{dans } \Omega \\ A(x,y)\nabla u \cdot n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Nous avons la formulation variationnelle du problème suivante : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que pour tout $v \in H^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega uv - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u)v \; d\Omega &= \int_\Omega fv \; d\Omega \quad \text{dans } \Omega \\ A(x,y)\nabla u \cdot n &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

D'après la formule de Green et la condition au bord, on a

$$\int_\Omega uv \; d\Omega + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v \; d\Omega = \int_\Omega fv \; d\Omega \quad \text{dans } \Omega$$

Posons `a` la forme bilinéaire et `l` la forme linéaire suivantes :

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega uv \; d\Omega + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v \; d\Omega \\ l(v) &= \int_\Omega fv \; d\Omega \end{aligned}$$

— `l` est bien continue

$$|l(v)| \leq \|f\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathtt{H}^1(\Omega)}$$

— $\mathtt{a}$ est bien continue

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)}\|v\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} + C\|\nabla u\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)}\|\nabla v\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \leq (1+C)\|u\|_{\mathtt{H}^1(\Omega)}\|v\|_{\mathtt{H}^1(\Omega)}$$

— $\mathtt{a}$ est bien coercive

$$a(u,u) \geq \|u\|^2_{\mathtt{L}^2(\Omega)} + c\|\nabla u\|^2_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \geq \mathtt{Min}\,(1,c)\,\|u\|^2_{\mathtt{H}^1(\Omega)}$$

Donc le théorème de Lax-Milgram peut s'appliquer, et le problème est bien posé. ■

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P_1 associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_l)_{l=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(S_i)_{i=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_i)_{i=1,N}$ la base de V_h définie par $w_i(S_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i,j \leq N$.

Formulation variationnelle discrète et solution approchée

On a

$$u_h = \sum_{i=1}^{N} u_h(S_i)\omega_i$$

Alors on a pour tout j = 1,N

$$a(u_h, \omega_j) = l(\omega_j)$$

Par linéarité, on a

$$\sum_{i=1}^{N} u_h(S_i)a(\omega_i,\omega_j) = l(\omega_j)$$

$$\sum_{i=1}^{N} u_h(S_i)\left[\int_\Omega \omega_i\omega_j\ d\Omega + \int_\Omega A(x,y)\nabla\omega_i\nabla\omega_j\ d\Omega\right] = \int_\Omega f\omega_j\ d\Omega$$

On obtient un système linéaire équivalent :

$$(\mathbb{M}+\mathbb{K})\,\mathtt{U} = \mathtt{L}$$

avec

$$\mathbb{M}_{i,j} = \int_\Omega \omega_i\omega_j\ d\Omega$$

$$\mathbb{K}_{i,j} = \int_\Omega A(x,y)\nabla\omega_i\nabla\omega_j\ d\Omega$$

$$\mathtt{L}_j = \int_\Omega f\omega_j\ d\Omega$$

et

$$\mathtt{U}_i = u_h(S_i)$$

Calcul des Matrices élémentaire, cas constant

On considère maintenant le cas où A = 1.
Pour chaque triangle $\mathcal{T}_l$, et pour i,j = 1,2,3

$$\mathbb{M}^{\mathtt{el}}_{i,j} = \int_{\mathcal{T}_l} \omega_i\omega_j\ d\Omega$$

Pour calculer $\int_{\mathcal{T}_l} F\ d\Omega$, on va utiliser les formules de quadrature. On a ici, F = $\omega_i\omega_j$, et comme les bases sont de P_1, donc F est de P_2, on utilise donc la formule de quadrature P_2 suivante :

$$\int_{\mathcal{T}_l} F\ d\Omega = \frac{aire(\mathcal{T}_l)}{3}\left(F\left(\frac{S_1+S_2}{2}\right) + F\left(\frac{S_1+S_2}{2}\right) + F\left(\frac{S_1+S_2}{2}\right)\right)$$

Donc on a

$$\mathbb{M}^{\mathtt{el}} = \frac{aire(\mathcal{T}_l)}{12} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Dans notre code, on a $D = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}$ où $x_{ij} = x_i - x_j$ et $|D| = 2 \cdot aire(\mathcal{T}_l)$, donc on a aussi

$$\mathbb{M}^{\mathtt{el}} = \frac{|D|}{24} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour la matrice de rigidité élémentaire, comme A = 1, On a

$$\mathbb{K}^{\mathtt{el}}_{i,j} = \int_{\mathcal{T}_l} \nabla\omega_i \nabla\omega_j \; d\Omega$$

En utilisant les formules barycentriques, on a

$$\mathbb{K}^{\mathtt{el}}_{i,j} = \int_{\mathcal{T}_l} \lambda_i \lambda_j \; d\Omega$$

Et dans notre code, on a

$$\mathbb{N} = \begin{pmatrix} \mathtt{N}_1 \\ \mathtt{N}_2 \\ \mathtt{N}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_{23} & x_{32} \\ y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{pmatrix}$$

On a donc

$$\mathbb{K}^{\mathtt{el}} = \frac{1}{2 \cdot |D|} \mathbb{N} \cdot \mathbb{N}^\top$$

Assemblage des matrices

cf. code **principal_neumann.m**

Calcul du second membre

En approchant la donnée f par son interpolation $\pi_h f$ dans la base $(\omega_I)_{I=1,N}$ On a

$$\mathbb{L}_j = \int_\Omega \pi_h f \omega_j d\Omega = \int_\Omega \sum_{i=1}^{N} f(S_i)\omega_i\omega_j d\Omega = (\mathbb{M} \cdot \mathtt{F})_j$$

où

$$\mathtt{F}_i = f(S_i)$$

Validation

On pose

$$u_{\mathtt{ext}}(x, y) = \cos(\pi x) \cdot \cos(2\pi y)$$

et `A` est l'identité. On a alors

$$f(x, y) = (1 + 5\pi^2) \cdot \cos(\pi x) \cdot \cos(2\pi y)$$

Les images suivantes nous présentent la comparaison entre la solution exacte et la solution approximative lorsque $h = 2^{-4}$.

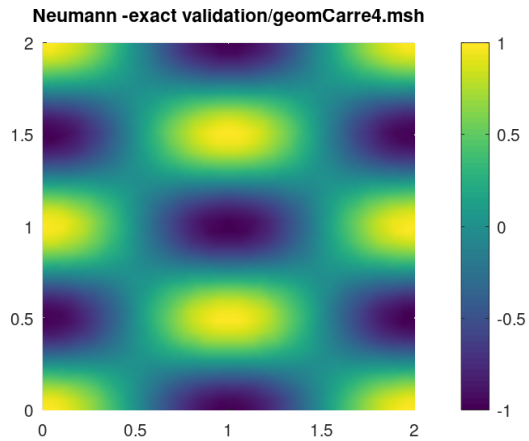

FIGURE 1.1 – Solution Exacte

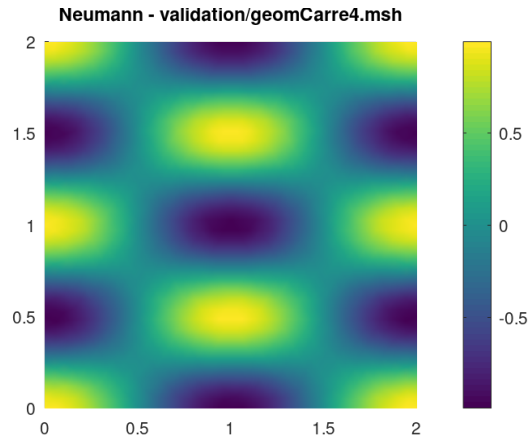

FIGURE 1.2 – Solution Approximative

```
erreur L2 = 0.333852 et erreur H1 = 1.118410
validation/geomCarre3.msh
erreur L2 = 0.053335 et erreur H1 = 0.339211
validation/geomCarre4.msh
erreur L2 = 0.011650 et erreur H1 = 0.098146
validation/geomCarre5.msh
erreur L2 = 0.002940 et erreur H1 = 0.025609
Ordre de convergence pour L2: 1.986655
Ordre de convergence pour H1: 1.938304
```

FIGURE 1.3 – Résultat Terminal

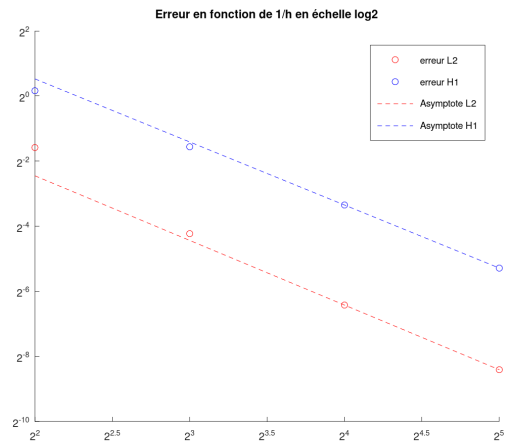

FIGURE 1.4 – erreur vs 1/h

Les images nous précédentes la vitesse des convergences en L^2 et en H^1. On observe que pour les deux types de convergence, ils ont même vitesse d'ordre 2.

1.1.1 Calcul des Matrices élémentaires cas variable

On considère maintenant le cas général $A = A(x, y)$. En effet les intégrales

$$\int_T A(M)\nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M)\, d\Omega$$

ne peuvent pas toujours être calculées exactement. Nous allons approcher ces intégrales à l'aide de formules de quadratures dites à N points : pour F une fonction continue par morceaux de T

$$\int_T F\, d\Omega \approx \sum_{q=1}^{N} \omega_l^q F(M_l^q)$$

où M_l^q sont des points de quadrature dans T_l et ω_l^q les poids positifs associés aux points de quadrature. On utilise ici la formule de quadrature à 4 points de Gauss-Lobatto qui est d'ordre 3 et qui est définie sur le triangle de référence $\hat{T}$ par

Pour chaque triangle T_l, nous utilise la transformation géométrique F_l qui envoie le triangle de référence $\hat{T}$ dans T. En effectuant le changement de variable $M = F_l(\hat{M})$ l'intégrale sur T devient

$$\int_{T_l} A(M)\nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M)\, d\Omega = \int_{\hat{T}} A(F_l(\hat{M}))[dF_l(\hat{M})^T]^{-1}\nabla \hat{w}_I(\hat{M}) \cdot [dF_l(\hat{M})^T]^{-1}\nabla \hat{w}_J(\hat{M})\, |det\ dF_l(\hat{M})|\, d\hat{\Omega}$$

$\hat{M}_q$	$\hat{\omega}_q$
(1/3, 1/3)	-9/32
(1/5, 1/5)	25/96
(1/5, 3/5)	25/96
(3/5, 1/5)	25/96

TABLE 1.1 – Points de quadrature et poids

où $dF(\hat{M})$ est la matrice jacobienne en $\hat{M}$.
On a

$$F_l(\mathtt{S}) = \mathbb{P}_l \cdot \mathtt{S} + \mathtt{Q}_l$$

avec

$$\mathbb{P}_l = \begin{pmatrix} x_{21} & x_{31} \\ y_{21} & y_{31} \end{pmatrix}$$

et

$$\mathtt{Q}_l = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

De plus, on a

$$\mathbb{P}_l^{-1} = \frac{1}{D} \cdot \begin{pmatrix} y_{31} & x_{13} \\ y_{12} & x_{21} \end{pmatrix}$$

Donc on peut calculer $\mathbb{K}^{\mathtt{el}}$ cf. code **quadrature.m**, **matK_elem.m** et **matK_elem_dynamique.m**.

Validation

Maintenant on est dans le cas où

$$A(x, y) = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y) + 2$$

, on a donc

$$\begin{aligned} f(x, y) = {} & 4\pi^2 \cos(\pi x) \cos(2\pi y) \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \\ & + 2\pi^2 \cos(2\pi x) \cos(2\pi y) \sin(\pi x) \sin(2\pi y) \\ & + 5\pi^2 (\sin(2\pi x) \sin(2\pi y) + 2) \cos(\pi x) \cos(2\pi y) \\ & + \cos(\pi x) \cos(2\pi y) \end{aligned}$$

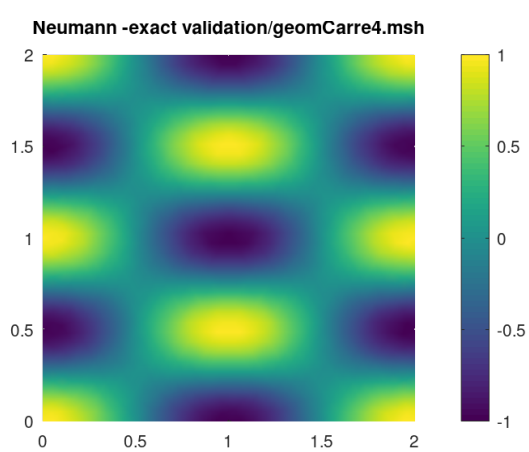

FIGURE 1.5 – Solution Exacte

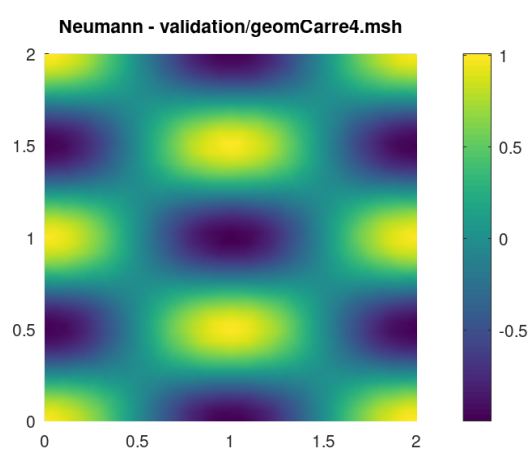

FIGURE 1.6 – Solution Approximative

```
erreur L2 = 0.483593 et erreur H1 = 1.725387
validation/geomCarre3.msh
erreur L2 = 0.101262 et erreur H1 = 0.569357
validation/geomCarre4.msh
erreur L2 = 0.013350 et erreur H1 = 0.165515
validation/geomCarre5.msh
erreur L2 = 0.003490 et erreur H1 = 0.043116
Ordre de convergence pour L2: 1.935513
Ordre de convergence pour H1: 1.940669
```

FIGURE 1.7 – Résultat Terminal

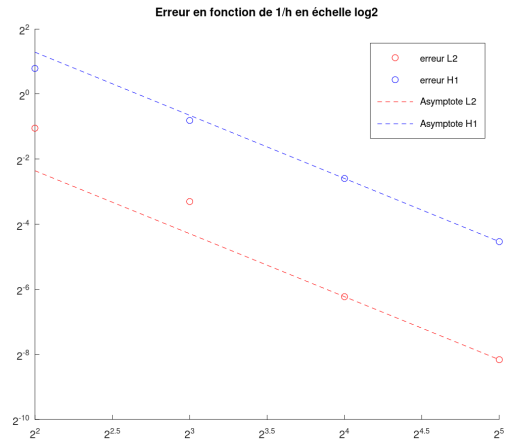

FIGURE 1.8 – erreur vs 1/h

Les images précédentes nous présentent la solution exacte et la solution approximative lorsque $h = 2^{-4}$. De plus elles nous présentent aussi la vitesse des convergences en L^2 et en H^1. On observe que pour les deux types de convergence, ils ont même vitesse d'ordre 2.

Maintenant on fixe le même `f`, et regarde les comportements de la solution lorsque

$$A_n(x, y) = A(nx, ny)$$

avec des valeurs de `n` différentes. Les résultats sont suivantes :

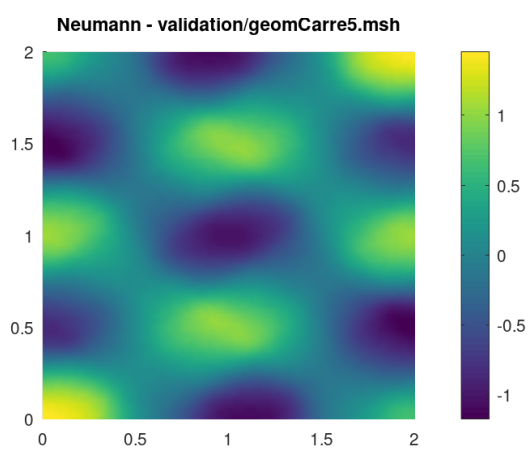

FIGURE 1.9 – n = 2

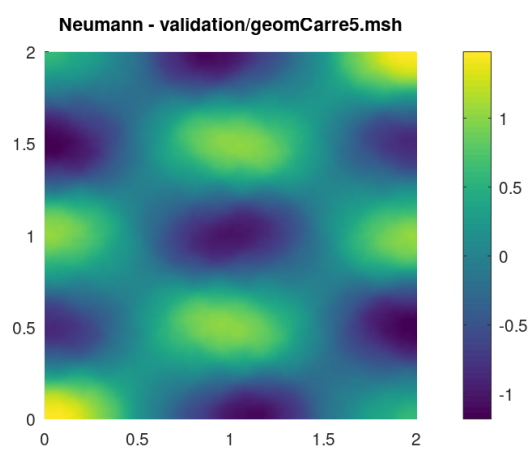

FIGURE 1.10 – n = 4

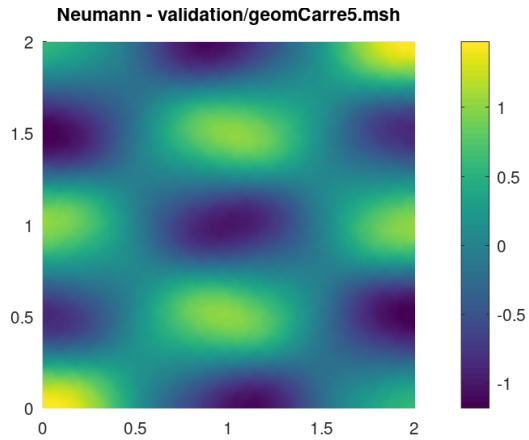

FIGURE 1.11 – n = 8

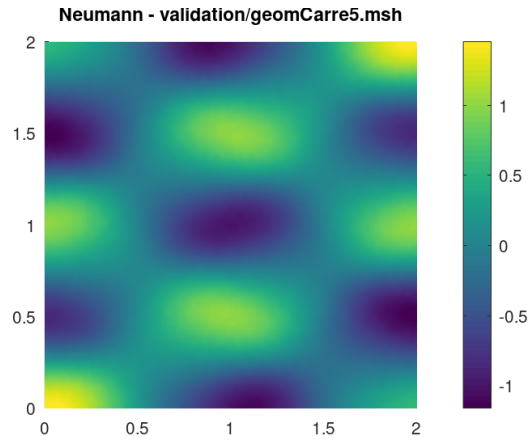

FIGURE 1.12 – n = 16

Les images précédentes sont les résultats avec $n = 2, 4, 8, 16$. En comparaison de l'image 1.5 i.e. $n = 1$, on a avec `n` qui devient plus grand, il y aura des oscillation d'amplitude plus grande.

1.2 Conditions de type Dirichlet

Formulation variationnelle

On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec coefficients variables et condition aux limites de Dirichlet : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} u - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) &= f \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Nous avons la formulation variationnelle du problème suivante : Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ telle que pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \int_\Omega uv - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u)v \; d\Omega &= \int_\Omega fv \; d\Omega \quad \text{dans } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{aligned}$$

D'après la formule de Green et la condition au bord, on a

$$\int_\Omega uv \; d\Omega + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v \; d\Omega = \int_\Omega fv \; d\Omega \quad \text{dans } \Omega$$

On trouve que la formule variationnelle est la même de celle de neumann, mais avec espace différent. (H_0^1 au lieu de H^1)

Posons `a` la forme bilinéaire et `l` la forme linéaire suivantes :

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega uv \; d\Omega + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v \; d\Omega \\ l(v) &= \int_\Omega fv \; d\Omega \end{aligned}$$

— `l` est bien continue

$$|l(v)| \leq \|f\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathtt{H}^1(\Omega)}$$

— `a` est bien continue

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} + C\|\nabla u\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \leq (1+C)\|u\|_{\mathtt{H}^1(\Omega)} \|v\|_{\mathtt{H}^1(\Omega)}$$

— `a` est bien coercive

$$a(u,u) \geq \|u\|^2_{\mathtt{L}^2(\Omega)} + c\|\nabla u\|^2_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \geq \mathtt{Min}\,(1,c)\, \|u\|^2_{\mathtt{H}^1(\Omega)}$$

Comme H_0^1 muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert, le théorème de Lax-Milgram peut donc s'appliquer, et le problème est bien posé. ■

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P_1 associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_l)_{l=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(S_i)_{i=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_i)_{i=1,N}$ la base de V_h définie par $w_i(S_j) = \delta_{ij}$ pour $1 \leq i, j \leq N$.

Formulation variationnelle discrète et solution approchée

Maintenant, on a **Refneu**(M) = 0 (resp. 1) ssi M est un nœud à l'interieur (resp. de la frontière) .
$V_h^0 = \mathbf{Vect}(\omega_i$, tel que $\mathbf{Refneu}(M_i) = 0)$.
$N_0 = \mathbf{dim}(V_h^0)$.
On a

$$u_h = \sum_{i=1,\mathbf{Refneu}(M_i)=0} u_h(S_i)\omega_i$$

Alors on a pour tout $\mathbf{Refneu}(M_j) = 0$,

$$a(u_h, \omega_j) = l(\omega_j)$$

Par linéarité, on a

$$\sum_{i=1,\mathbf{Refneu}(M_i)=0} u_h(S_i)a(\omega_i, \omega_j) = l(\omega_j)$$

$$\sum_{i=1,\mathbf{Refneu}(M_i)=0} \left[\int_\Omega \omega_i\omega_j \ d\Omega + \int_\Omega A(x,y)\nabla\omega_i\nabla\omega_j \ d\Omega\right] = \int_\Omega f\omega_j \ d\Omega$$

On obtient un système linéaire équivalent :

$$\mathbb{A}^0 \cdot \mathtt{U}^0 = \left(\mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0\right)\mathtt{U}^0 = \mathtt{L}^0$$

avec pour $\mathbf{Refneu}(M_j) = \mathbf{Refneu}(M_i) = 0$,

$$\mathbb{M}^0_{i,j} = \int_\Omega \omega_i\omega_j \ d\Omega$$

$$\mathbb{K}^0_{i,j} = \int_\Omega A(x,y)\nabla\omega_i\nabla\omega_j \ d\Omega$$

$$\mathtt{L}^0_j = \int_\Omega f\omega_j \ d\Omega$$

et

$$\mathtt{U}^0_i = u_h(S_i)$$

De plus, on intoduit une matrice de projection $\mathbb{P}$ qui envoie V_h dans V_h^0, alors il suiffit d'écrire

$$\mathbb{A}^0 = \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^\top$$

et

$$\mathtt{L}^0 = \mathbb{P} \cdot \mathtt{L}$$

Finalement, on obtient

$$\mathtt{U} = \mathbb{P}^\top \cdot \mathtt{U}^0$$

cf. code **principal_dirichlet.m** ■

Validation

Maintenant on pose

$$u_{\texttt{ext}}(x,y) = \sin(2\pi x)\cdot\sin(2\pi y)$$

et `A` est l'identité. On a donc

$$f(x,y) = (1+8\pi^2)\cdot\sin(2\pi x)\cdot\sin(2\pi y)$$

.

Les images des résultats sont suivantes :

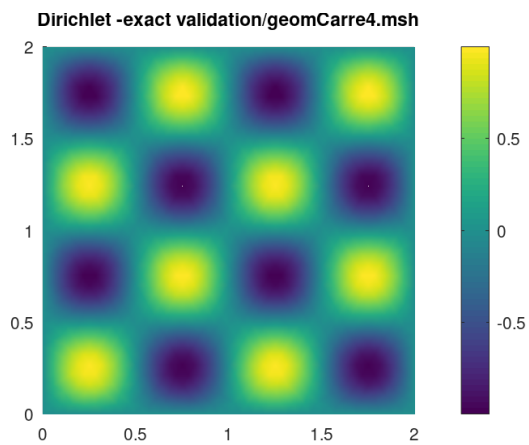

FIGURE 1.13 – Solution Exacte

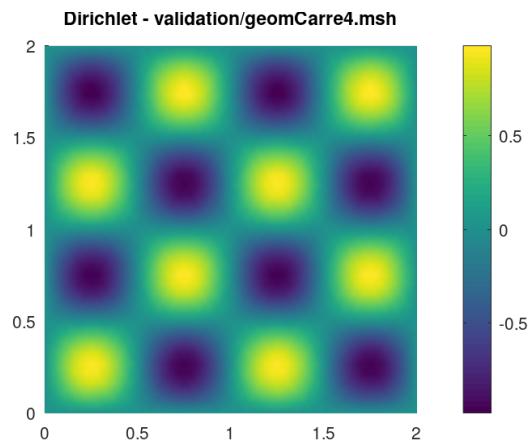

FIGURE 1.14 – Solution Approximative

```
erreur L2 = 0.180060 et erreur H1 = 1.855235
validation/geomCarre3.msh
erreur L2 = 0.067417 et erreur H1 = 0.650598
validation/geomCarre4.msh
erreur L2 = 0.018452 et erreur H1 = 0.180005
validation/geomCarre5.msh
erreur L2 = 0.004710 et erreur H1 = 0.044255
Ordre de convergence pour L2: 1.969899
Ordre de convergence pour H1: 2.024107
```

FIGURE 1.15 – Résultat Terminal

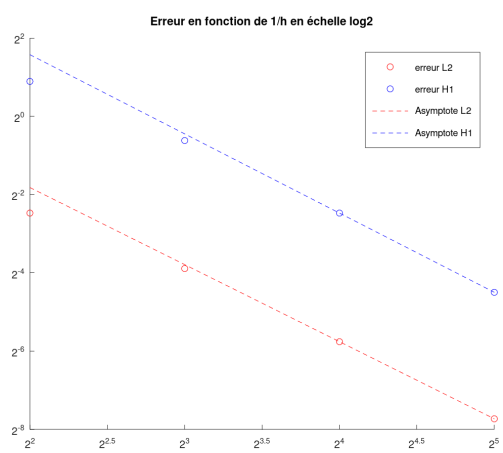

FIGURE 1.16 – erreur vs 1/h

Les images précédentes nous présentent la solution exacte et la solution approximative lorsque $h = 2^{-4}$. De plus elles nous présentent aussi la vitesse des convergences en L^2 et en H^1. On observe que pour les deux types de convergence, ils ont même vitesse d'ordre 2.

1.3 Conditions périodiques

Soit $\Omega = [0,L]^2$ un carré de taille L on s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites périodique et coefficients variables : Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u|_{x=0} = u|_{x=L} \quad \text{et} \quad u|_{y=0} = u|_{y=L} \\ A(x,y)\nabla u \cdot e_x|_{x=0} = A(x,y)\nabla u \cdot e_x|_{x=L} \quad \text{et} \quad A(x,y)\nabla u \cdot e_y|_{y=0} = A(x,y)\nabla u \cdot e_y|_{y=L} \end{cases} \tag{1.1}$$

Formulation variationnelle

Nous avons la formulation variationnelle du problème suivante : Trouver $u \in H^1_{\#}(\Omega)$ telle que pour tout $v \in H^1_{\#}(\Omega)$,

$$\int_\Omega uv - \nabla \cdot (A(x,y)\nabla u)v \; d\Omega = \int_\Omega fv \; d\Omega \quad \text{dans } \Omega$$

D'après la formule de Green et la condition aux limites périodique , on a

$$\int_\Omega uv \; d\Omega + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v \; d\Omega = \int_\Omega fv \; d\Omega \quad \text{dans } \Omega$$

Posons `a` la forme bilinéaire et `l` la forme linéaire suivantes :

$$\begin{aligned} a(u,v) &= \int_\Omega uv \; d\Omega + \int_\Omega A(x,y)\nabla u \nabla v \; d\Omega \\ l(v) &= \int_\Omega fv \; d\Omega \end{aligned}$$

— `l` est bien continue

$$|l(v)| \leq \|f\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \leq \|f\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathtt{H}^1(\Omega)}$$

— `a` est bien continue

$$|a(u,v)| \leq \|u\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \|v\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} + C\|\nabla u\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \|\nabla v\|_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \leq (1+C)\|u\|_{\mathtt{H}^1(\Omega)} \|v\|_{\mathtt{H}^1(\Omega)}$$

— `a` est bien coercive

$$a(u,u) \geq \|u\|^2_{\mathtt{L}^2(\Omega)} + c\|\nabla u\|^2_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \geq min(1,c)\|u\|^2_{\mathtt{H}^1(\Omega)}$$

Comme $H^1_{\#}$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert, le théorème de Lax-Milgram peut donc s'appliquer, et le problème est bien posé. ■

Solution approchée

En étendant la technique pour les conditions de dirichlet aux conditions périodiaues, on peut construire la matrice de projecteur $\mathbb{P}$ qui envoie V_h dans $V_h^{\#}$

On aura

$$\mathbb{A}^{\#} = \mathbb{P}\mathbb{A}\mathbb{P}^\top$$

et

$$\mathtt{L}^{\#} = \mathbb{P} \cdot \mathtt{L}$$

Finalement, on obtient

$$\mathtt{U} = \mathbb{P}^\top \cdot \mathtt{U}^{\#}$$

Pour construire $\mathbb{P}$, il faut connaître la structure de stockage des sommets. On a trouvé que les 4 premiers sommets sont sur le coin, tournant dans le sens antihoraire à partir de l'origine. En suite, parmi les sommes restes, on a le même sens de rotation. Finalement on peut donc construire la matrice $\mathbb{P}$ cf. code **principal_periodique.m**

Validation

Maintenant on pose

$$u_{\texttt{ext}}(x, y) = \cos(\pi x) \cdot \cos(2\pi y)$$

et `A` est l'identité. On a donc

$$f(x, y) = (1 + 5\pi^2) \cdot \cos(\pi x) \cdot \cos(2\pi y)$$

.

Les images des résultats sont suivantes :

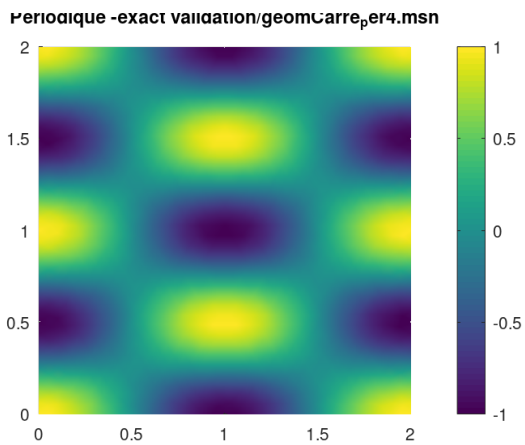

FIGURE 1.17 – Solution Exacte

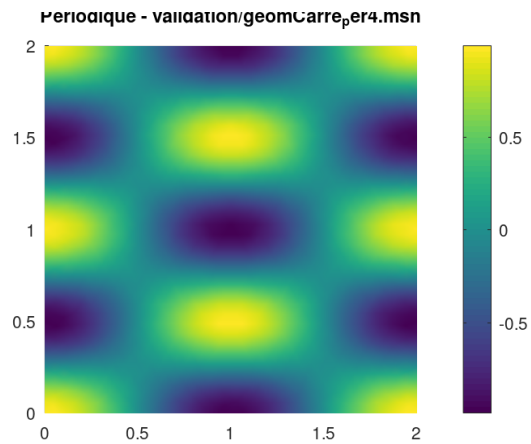

FIGURE 1.18 – Solution Approximative

```
erreur L2 = 0.320643 et erreur H1 = 1.107956
validation/geomCarre_per3.msh
warning: matrix singular to machine precision
warning: called from
    principal_periodique at line 131 column 5

erreur L2 = 0.053098 et erreur H1 = 0.338622
validation/geomCarre_per4.msh
warning: matrix singular to machine precision
warning: called from
    principal_periodique at line 131 column 5

erreur L2 = 0.011591 et erreur H1 = 0.098174
validation/geomCarre_per5.msh
warning: matrix singular to machine precision
warning: called from
    principal_periodique at line 131 column 5

erreur L2 = 0.002943 et erreur H1 = 0.026143
Ordre de convergence pour L2: 1.977481
Ordre de convergence pour H1: 1.908933
```

FIGURE 1.19 – Résultat Terminal

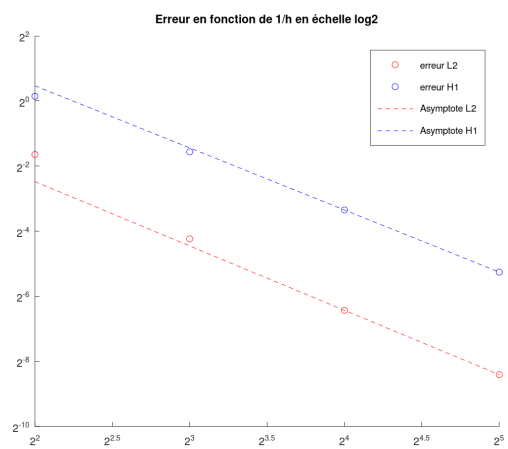

FIGURE 1.20 – erreur vs 1/h

Les images précédentes nous présentent la solution exacte et la solution approximative lorsque $h = 2^{-4}$. De plus elles nous présentent aussi la vitesse des convergences en L^2 et en H^1. On observe que pour les deux types de convergence, ils ont même vitesse d'ordre 2.

Chapitre 2

Homogénéisation

2.1 Solution exacte

Implémentation

cf. code **principal_dirichlet_cellule.m**

Validation

Maintenant on pose

$$u_{\texttt{ext}}(x,y) = \sin(\pi x)\cdot\sin(\pi y)$$

On va faire des expériences parmi les 5 cas suivantes :

(0) On suppose que

$$A(x,y) = \texttt{I}_2.$$

$$\text{Alors, on peut obtenir } f(x,y) = 2\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

(1) On suppose que

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$\text{Alors, on peut obtenir } f(x,y) = 3\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y).$$

(2) On suppose que

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 2+\sin(2\pi x) & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\text{Alors, on peut obtenir } f(x,y) = &-2\pi^2\cos(2\pi x)\cos(\pi x)\sin(\pi y)\\ &+\pi^2(\sin(2\pi x)+2)\sin(\pi x)\sin(\pi y)+4\pi^2\sin(\pi x)\sin(\pi y).\end{aligned}$$

(3) On suppose que

$$A(x,y) = \begin{pmatrix} 2+\sin(2\pi x) & 0 \\ 0 & 4+\sin(2\pi x) \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\text{Alors, on peut obtenir } f(x,y) = &-2\pi^2\cos(2\pi x)\cos(\pi x)\sin(\pi y)\\ &+\pi^2(\sin(2\pi x)+4)\sin(\pi x)\sin(\pi y)+\pi^2(\sin(2\pi x)+2)\sin(\pi x)\sin(\pi y).\end{aligned}$$

(4) On suppose que

$$A(x,y) = (2+\sin(2\pi x))(4+\sin(2\pi y))\cdot\texttt{I}_2.$$

$$\begin{aligned}\text{Alors, on peut obtenir } f(x,y) = &-2\pi^2(sin(2\pi x)+2)\cos(2\pi y)\cos(\pi y)\sin(\pi x)\\ &-2\pi^2(sin(2\pi y)+4)\cos(2\pi x)\cos(\pi x)\sin(\pi y)\\ &+2\pi^2(sin(2\pi x)+2)(sin(2\pi y)+4)\sin(\pi x)\sin(\pi y).\end{aligned}$$

Les images des résultats sont suivantes :

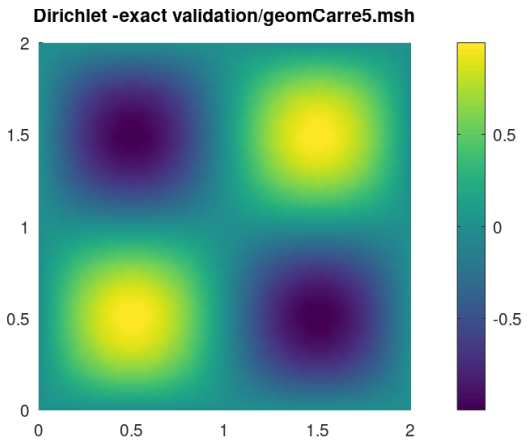

FIGURE 2.1 – Solution Exacte

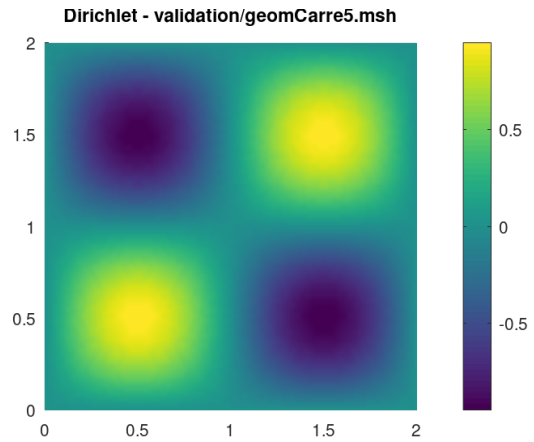

FIGURE 2.2 – Solution Approximative cas 0

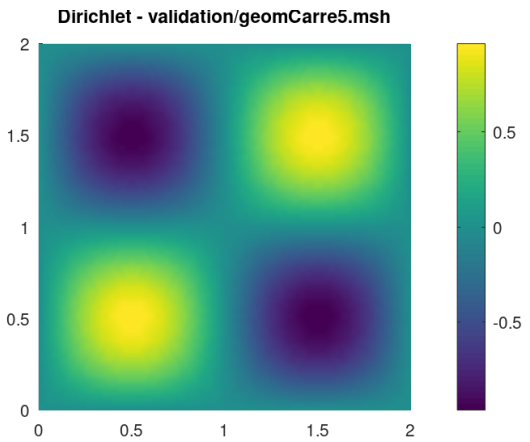

FIGURE 2.3 – Solution Approximative cas 1

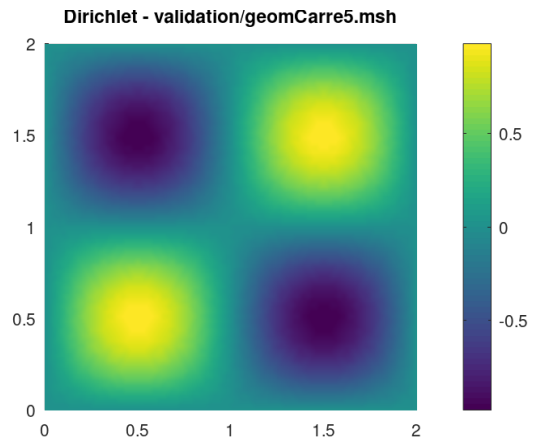

FIGURE 2.4 – Solution Approximative cas 2

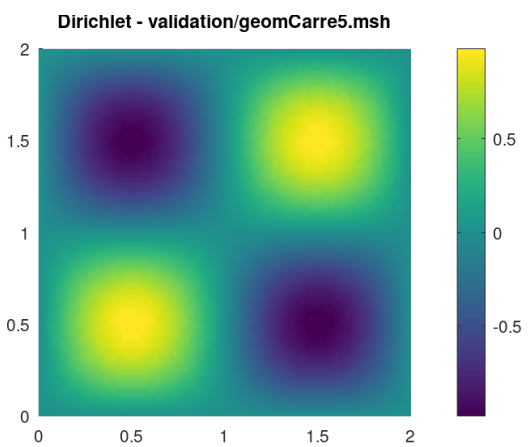

FIGURE 2.5 – Solution Approximative cas 3

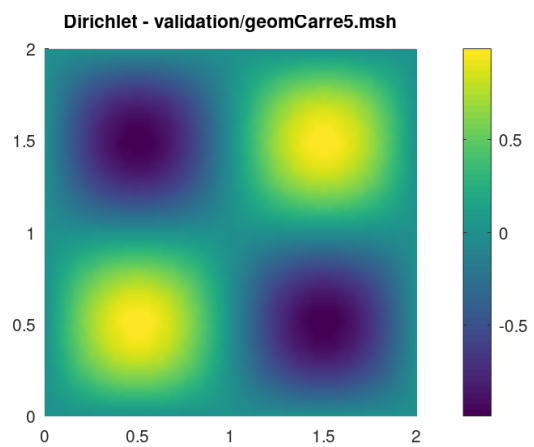

FIGURE 2.6 – Solution Approximative cas 4

Les images précédentes nous présentent la solution exacte et la solution approximative parmi les 5 cas différents lorsque $h = 2^{-5}$.

2.2 Solution du problème homogénéisé

Problèmes de cellule

Pour $i \in \{1,2\}$ trouver $w_i \in V$ telle que

$$\forall \varphi \in V, \quad \int_Y (A(y)\nabla_y w_i(y)\nabla_y \varphi(y))\, dy = -\int_Y (A(y)e_i \nabla_y \varphi(y))\, dy \tag{2.1}$$

où $Y = (0,1)^2$, $y = (y_1, y_2)$ et $V = \{\psi \in H^1(Y) : \int_Y \psi(y)\, dy = 0\}$.

Posons `a` la forme bilinéaire et `l` la forme linéaire suivantes :

$$a(u,v) = \int_Y A(y)\nabla u \nabla v \; dy$$
$$l(v) = -\int_Y (A(y)e_i \nabla v))\, dy$$

— `l` est bien continue

$$|l(v)| \leq C\|\nabla v\|_{\mathtt{L}^2(Y)} \leq C\|v\|_{\mathtt{H}^1(Y)}$$

— `a` est bien continue

$$|a(u,v)| \leq C\|\nabla u\|_{\mathtt{L}^2(Y)}\|\nabla v\|_{\mathtt{L}^2(Y)} \leq C\|u\|_{\mathtt{H}^1(Y)}\|v\|_{\mathtt{H}^1(Y)}$$

— `a` est bien coercive

$$a(u,u) \geq c\|\nabla u\|^2_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \geq c \cdot C_{\mathtt{P.C}}\|u\|^2_{\mathtt{H}^1(\Omega)}$$

car on peut appliquer l'inégalité de Poincaré de la version moyenne nulle.

Comme V muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert, le théorème de Lax-Milgram peut s'appliquer, et le problème est bien posé.

Soit $\eta > 0$ Pour $i \in \{1,2\}$ trouver $w_i^\eta \in H^1_\#(Y)$ telle que pour tout $\varphi \in H^1_\#(Y)$,

$$\int_Y (A(y)\nabla_y w_i^\eta(y)\nabla_y \varphi(y))\, dy + \eta \int_Y w_i^\eta(y)\varphi(y)\, dy = -\int_Y (A(y)e_i \nabla_y \varphi(y))\, dy \tag{2.2}$$

Posons `a` la forme bilinéaire et `l` la forme linéaire suivantes :

$$a(u,v) = \eta \int_Y uv \; dy + \int_Y A(y)\nabla u \nabla v \; dy$$
$$l(v) = -\int_Y (A(y)e_i \nabla v))\, dy$$

— `l` est bien continue

$$|l(v)| \leq C\|\nabla v\|_{\mathtt{L}^2(Y)} \leq C\|v\|_{\mathtt{H}^1(Y)}$$

— `a` est bien continue

$$|a(u,v)| \leq \eta\|u\|_{\mathtt{L}^2(Y)}\|v\|_{\mathtt{L}^2(Y)} + C\|\nabla u\|_{\mathtt{L}^2(Y)}\|\nabla v\|_{\mathtt{L}^2(Y)} \leq (C+\eta)\|u\|_{\mathtt{H}^1(Y)}\|v\|_{\mathtt{H}^1(Y)}$$

— `a` est bien coercive

$$a(u,u) \geq \eta\|u\|^2_{\mathtt{L}^2(Y)} + c\|\nabla u\|^2_{\mathtt{L}^2(\Omega)} \geq \mathtt{Min}\,(c,\eta)\,\|u\|^2_{\mathtt{H}^1(\Omega)}$$

Comme $H^1_\#$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ est un espace de Hilbert, le théorème de Lax-Milgram peut donc s'appliquer, et le problème est bien posé.

De plus, quand η petit, la constante de coercivité devrait aussi petite.

En particulier, si on prends

$$\phi(y) = 1$$

qui est bien un élément de $H^1_\#$, on a alors

$$\eta \int_Y w_i^\eta dy = 0$$

Donc $w_i^\eta \in V$. Donc $(w_i - w_i^\eta) \in V$. On a donc

$$\int_Y (A(y)\nabla w_i \nabla(w_i - w_i^\eta))\, dy = -\int_Y (A(y)e_i \nabla(w_i - w_i^\eta))\, dy \tag{2.3}$$

De plus comme $V \subset H^1_\#$, on a alors

$$\int_Y (A(y)\nabla w_i^\eta \nabla(w_i - w_i^\eta))\, dy + \eta \int_Y w_i^\eta(y)(w_i - w_i^\eta)\, dy = -\int_Y (A(y)e_i \nabla(w_i - w_i^\eta))\, dy \tag{2.4}$$

D'après les équations 2.3 et 2.4, on a

$$\int_Y (A(y)\nabla(w_i - w_i^\eta)\nabla(w_i - w_i^\eta)) = \eta \int_Y w_i^\eta(y)(w_i - w_i^\eta)\, dy \to 0 \text{ as } \eta \to 0^+$$

Par coercivité de `a` dans V, on aura

$$\limsup_{\eta \to 0^+} \|w_i - w_i^\eta\|_{H^1} \leq 0$$

■

Solution approchée

Implémentation cf. code **principal_periodique_cellule.m**

Validation

Les images des résultats sont suivantes :

```
cas 0
warning: matrix singular to machine precision
warning: called from
    principal_periodique_cellule at line 144 c

Aeff =

   1.0000e+00   1.6563e-15
  -1.1302e-14   1.0000e+00

erreur L2 = 0.000000 et erreur H1 = 0.000000
```

FIGURE 2.7 – Résultat Terminal cas 0

```
cas 1
warning: matrix singular to machine precision
warning: called from
    principal_periodique_cellule at line 144 c

Aeff =

   1.0000e+00  -3.8069e-14
  -3.9731e-14   2.0000e+00

erreur L2 = 0.000000 et erreur H1 = 0.000000
```

FIGURE 2.8 – Résultat Terminal cas 1

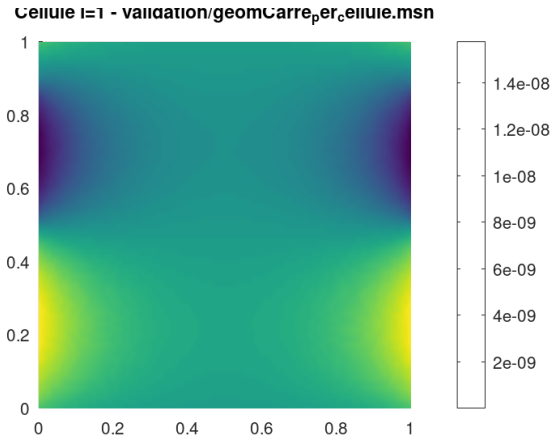

FIGURE 2.9 – ω_1 cas 0

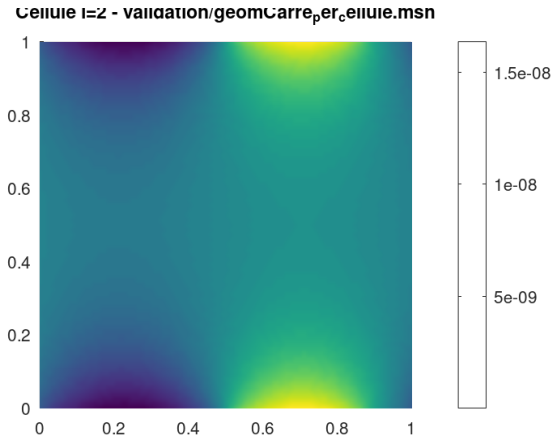

FIGURE 2.10 – ω_2 cas 0

Les images des résultats sont suivantes :

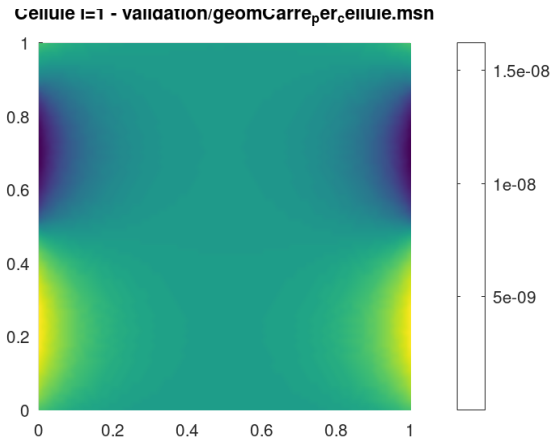

FIGURE 2.11 – ω_1 cas 1

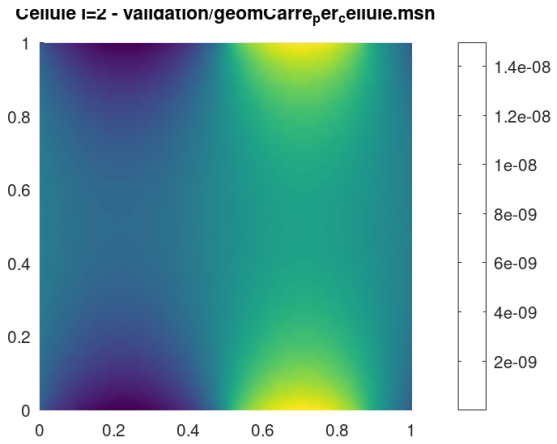

FIGURE 2.12 – ω_2 cas 1

Les images précédentes nous présente les ω_i pour les deux premiers cas où les valeur exacte de ω_i sont toutes 0. Et on trouve que parmi les deux cas différents, l'erreur L2 et l'erreur H1 sont assez petites qui peuvent être négligées.

Calcul du tenseur homogénéisé et deuxième validation

L'implémentation cf. code **principal_periodique_cellule.m**
Les images suivantes sont des résultats pour le cas 1 jusqu'au cas 4.

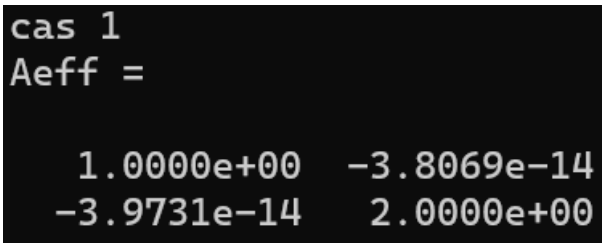

FIGURE 2.13 – Résultat Terminal cas 1

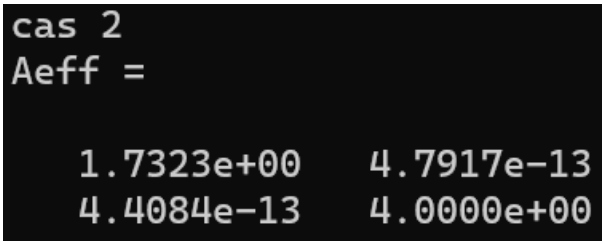

FIGURE 2.14 – Résultat Terminal cas 2

```
cas 3
Aeff =

   1.7323e+00   8.0943e-13
   7.8969e-13   4.0000e+00
```

FIGURE 2.15 – Résultat Terminal cas 1

```
cas 4
Aeff =

   6.9289e+00  -5.0410e-08
  -5.0410e-08   7.7461e+00
```

FIGURE 2.16 – Résultat Terminal cas 2

Les images précédentes présentent les tenseurs approximative pour les cas 1,2,3,4. On a observé que les valeurs approximative des tenseurs est cohérent avec les valeurs exactes qui est suivante :

(1)

$$A^{\mathtt{eff}}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

(2)

$$A^{\mathtt{eff}}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(3)

$$A^{\mathtt{eff}}(x,y) = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

(4)

$$A^{\mathtt{eff}}(x,y) = \begin{pmatrix} 4\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 2\sqrt{15} \end{pmatrix}.$$

Avec $\sqrt{3} \approx 1.732$, $4\sqrt{3} \approx 6.928$ et $2\sqrt{15} \approx 7.746$,

Calcul de la solution du probléme homogénéisé

L'implémentation cf. code **principal_dirichlet_cellule_homo.m**
Les images suivantes présentent le résultat pour l'expérience pour le cas 5, avec

$$u_0^{\mathtt{ext}}(x,y) = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y)$$

et sur le maillage de h = 2^{-5}.

```
Calcul du tenseur homogénéisé
warning: matrix singular to machine precision
warning: called from
    principal_dirichlet_cellule_homo at line

Aeff =

   6.9289e+00  -5.0410e-08
  -5.0410e-08   7.7461e+00

fin du calcul du tenseur homogénéisé
Calcul de la solution homogénéisée
validation/geomCarre5.msh
fin du calcul de la solution homogénéisée
erreur L2 = 0.004698 et erreur H1 = 0.119167
```

FIGURE 2.17 – Résultat Terminal

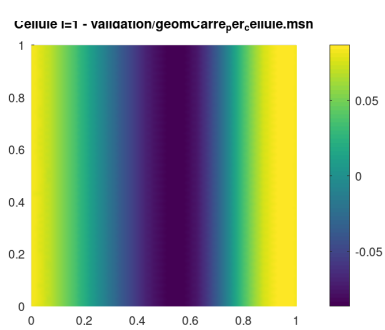

FIGURE 2.18 – ω_1

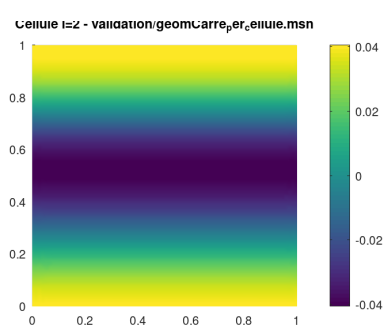

FIGURE 2.19 – ω_2

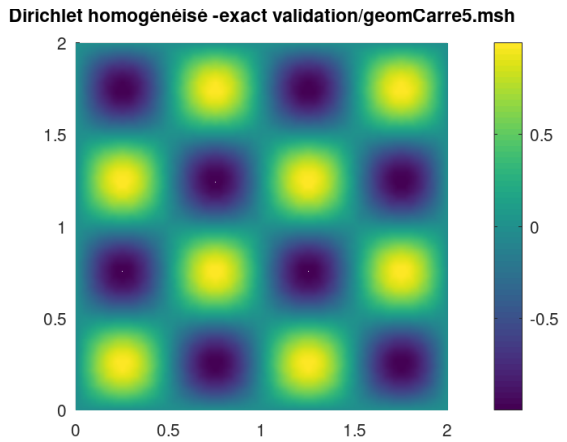

FIGURE 2.20 – Solution Homogénéisée Exacte

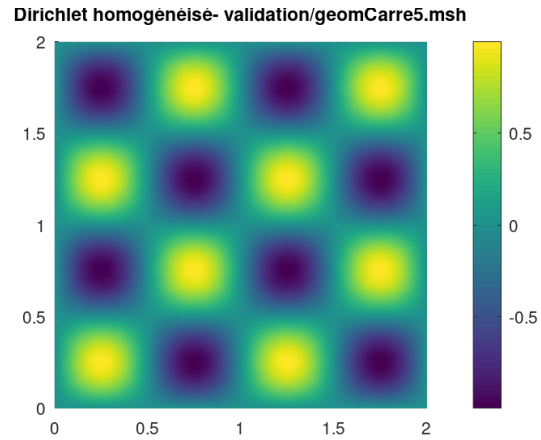

FIGURE 2.21 – Solution Homogénéisée Approximative

D'après les images précédentes, on a l'approximation de la solution du problème homogénéisé est cohérente avec la solution exacte, l'erreur de L^2 et celle de H^1 sont petite.

Comparaison de la solution exacte et la solution du problème homogénéisé

Maintenant, on va étudier le comportement de la solution u_ϵ quand ϵ se varie, et la comparer avec la solution u_0. Supposons toujours que

$$u_0^{\texttt{ext}}(x, y) = \sin(2\pi x) \cdot \sin(2\pi y)$$

Le maillage utilisé cette fois est asseez fin avec h $= 2^{-6}$. Les images suivant présentent le résultat pour l'expérience pour le cas 5.

```
Aeff =

   6.9289e+00  -5.0410e-08
  -5.0410e-08   7.7461e+00

fin du calcul du tenseur homogénéisé
Calcul de la solution homogénéisée
validation/geomCarre6.msh
fin du calcul de la solution homogénéisée
erreur L2 = 0.001180 et erreur H1 = 0.031261
```

FIGURE 2.22 – Résultat Terminal

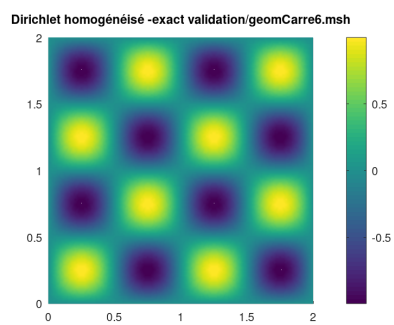

FIGURE 2.23 – Exacte $u_0^{\texttt{ext}}$

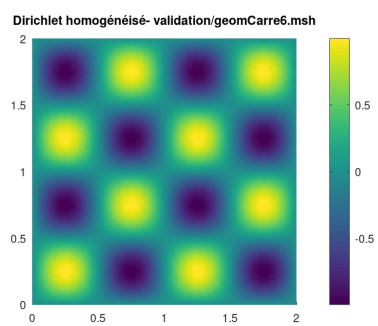

FIGURE 2.24 – Approximative u_0

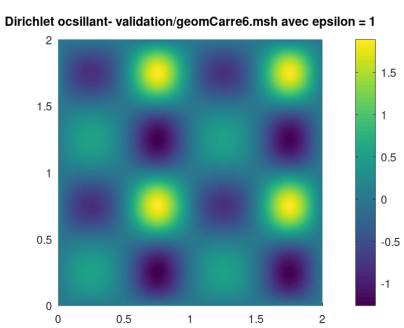

FIGURE 2.25 – $\epsilon = 1$

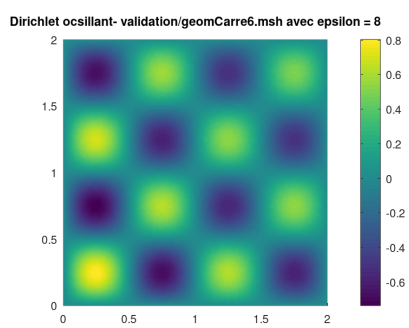

FIGURE 2.26 – $\epsilon = 8$

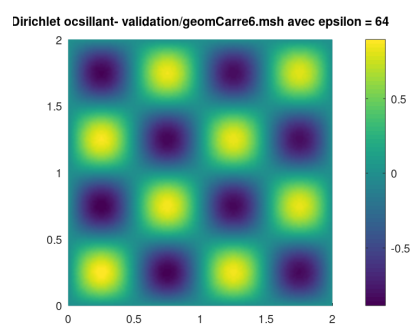

FIGURE 2.27 – $\epsilon = 8^2$

```
Calcul de la solution ocsillante
epsilon = 1
fin du calcul de la solution ocsillante
erreur L2 = 0.462256 et erreur H1 = 3.981207
epsilon = 8
fin du calcul de la solution ocsillante
erreur L2 = 0.397223 et erreur H1 = 3.551856
epsilon = 64
fin du calcul de la solution ocsillante
erreur L2 = 0.147656 et erreur H1 = 1.320585
epsilon = 512
fin du calcul de la solution ocsillante
erreur L2 = 0.091050 et erreur H1 = 0.814621
epsilon = 4096
fin du calcul de la solution ocsillante
erreur L2 = 0.083685 et erreur H1 = 0.748742
epsilon = 32768
fin du calcul de la solution ocsillante
erreur L2 = 0.082764 et erreur H1 = 0.740500
epsilon = 262144
fin du calcul de la solution ocsillante
erreur L2 = 0.082649 et erreur H1 = 0.739470
epsilon = 2097152
fin du calcul de la solution ocsillante
erreur L2 = 0.082634 et erreur H1 = 0.739341
epsilon = 16777216
fin du calcul de la solution ocsillante
erreur L2 = 0.082632 et erreur H1 = 0.739325
epsilon = 134217728
fin du calcul de la solution ocsillante
erreur L2 = 0.082632 et erreur H1 = 0.739323
epsilon = 1073741824
fin du calcul de la solution ocsillante
erreur L2 = 0.082632 et erreur H1 = 0.739323
Ordre de convergence pour L2: 0.000000
Ordre de convergence pour H1: 0.000000
```

FIGURE 2.28 – Résultat Terminal

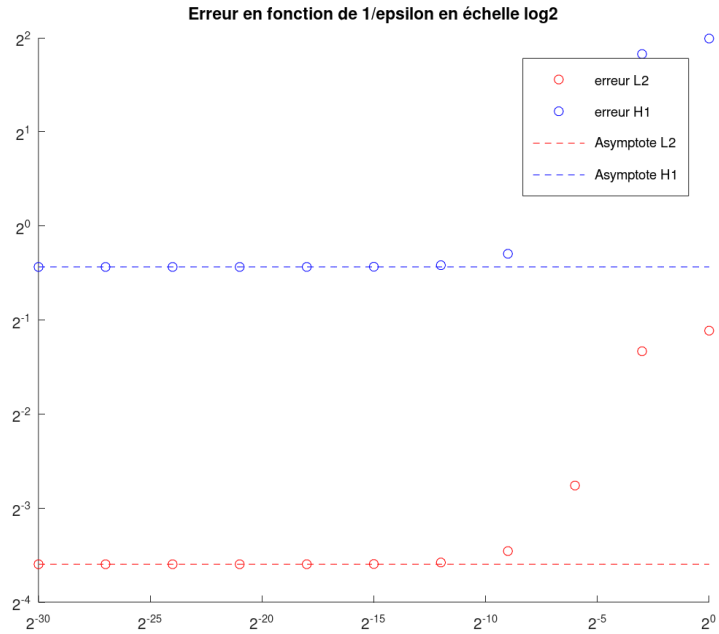

FIGURE 2.29 – erreur vs $1/\epsilon$

D'après les figures précédentes, on a quand `h` est petit, la solution u_0 est très proche de $u_0^{\texttt{ext}}$, l'erreur L^2 et l'erreur H^1 sont toutes assez négligeables.

En suite, pour le comportement de u_ϵ, on a quand ϵ est grand, il y a une grande différence entre u_ϵ est u_0. On peut voir que l'amplitude de u_ϵ est beaucoup plus grande que celle de u_0. Avec ϵ qui devient de plus en plus petit, on a que son amplitude devient aussi plus petit, et u_ϵ devient aussi visuellement de plus en plus proche de u_0, et les valeurs de erreur de sens L^2 nous confortent dans cette observation. Au début, l'erreur de L^2 descente quand ϵ devient plus petit. Cette tendance à la baisse se poursuit jusqu'à $\epsilon < 8^{-4} = 2^{-12}$,Après ce point, l'erreur de L^2 se stabilise à environ 0.08 qui est assez petit et négligeable. Ce phénomène de l'arrêt de décroissance de l'erreur est dû au fait que l'on atteint la limite de cette maillages. Car d'après Théorème d'échantillonnage, on ne peut pas distinguer les ondes de longeur d'onde inférieur à 2`h`. Et pour l'erreur de H^1, il y a également le phénomène de l'arrêt de décroissance de l'erreur. Malheureusement, l'erreur de H^1 reste systématiquement à un niveau relativement élevé qui n'est pas négligeable.

Annexe A

Annexe

A.1 Résultats Neumann

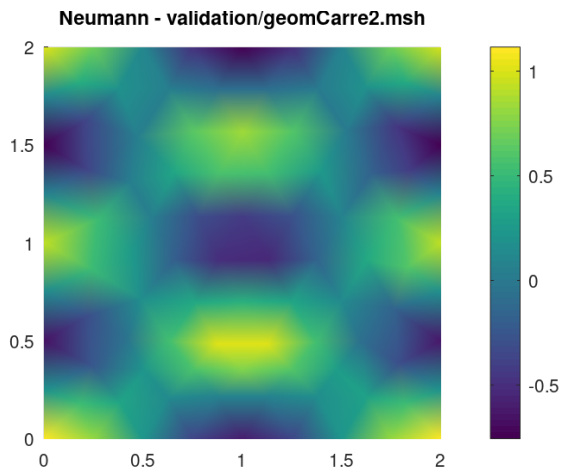

FIGURE A.1 – Neumann avec h = 2^{-2}

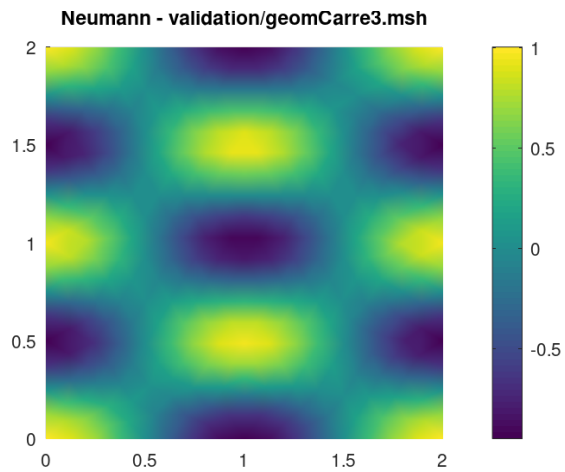

FIGURE A.2 – Neumann avec h = 2^{-3}

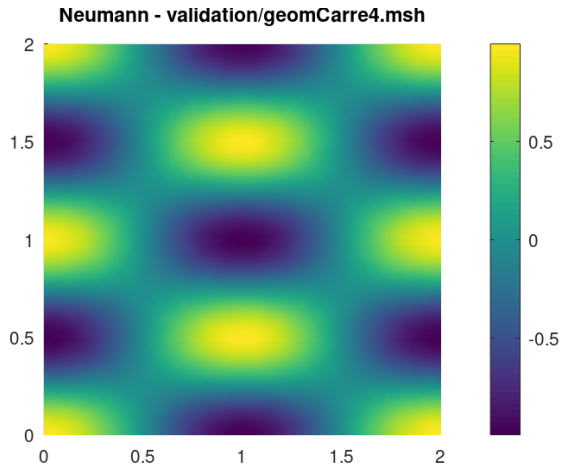

FIGURE A.3 – Neumann avec h = 2^{-4}

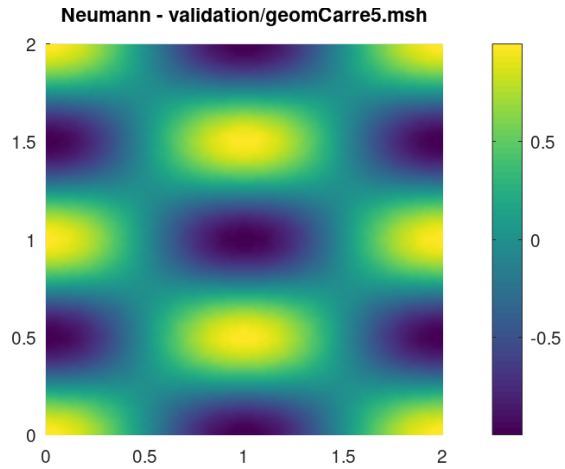

FIGURE A.4 – Neumann avec h = 2^{-5}

A.2 Résultats Dirichlet

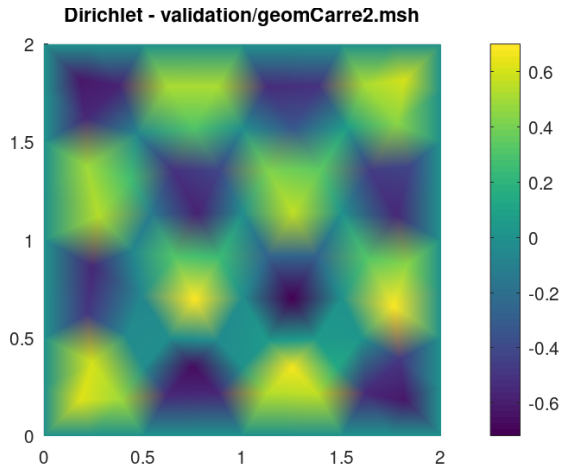

FIGURE A.5 – Dirichlet avec h = 2^{-2}

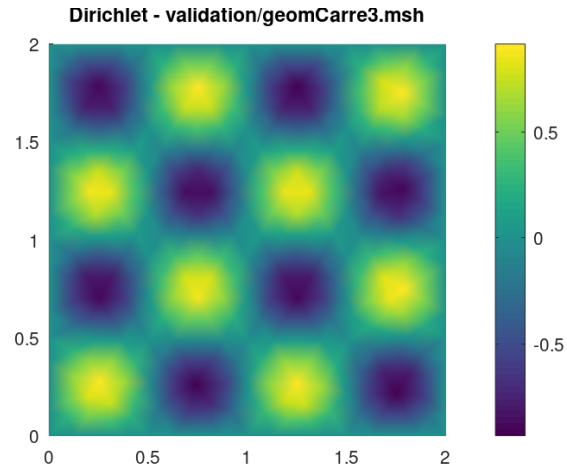

FIGURE A.6 – Dirichlet avec h = 2^{-3}

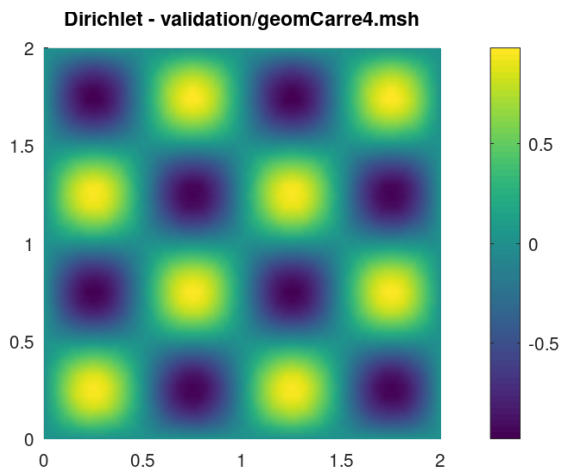

FIGURE A.7 – Dirichlet avec h = 2^{-4}

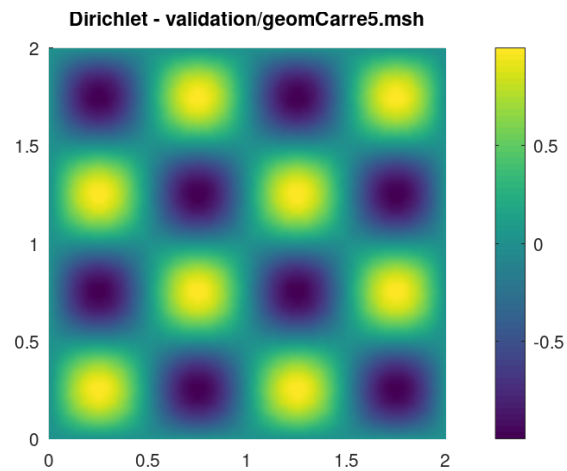

FIGURE A.8 – Dirichlet avec h = 2^{-5}

A.3 Résultats Correcteurs

```
cas 0
Aeff =

   1.0000e+00   1.6563e-15
  -1.1302e-14   1.0000e+00
```

FIGURE A.9 – Résultat cas 0

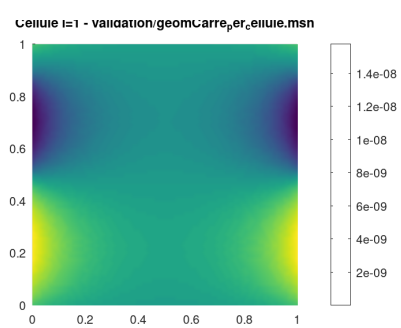

FIGURE A.10 – ω_1

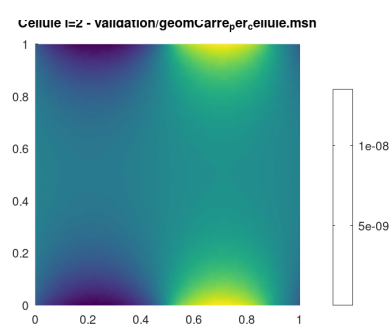

FIGURE A.11 – ω_2

```
cas 1
Aeff =

   1.0000e+00  -3.8069e-14
  -3.9731e-14   2.0000e+00
```

FIGURE A.12 – Résultat cas 1

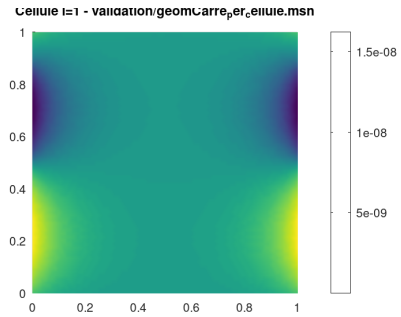

FIGURE A.13 – ω_1

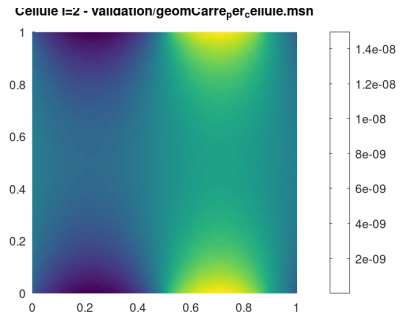

FIGURE A.14 – ω_2

```
cas 2
Aeff =

   1.7323e+00   4.7917e-13
   4.4084e-13   4.0000e+00
```

FIGURE A.15 – Résultat cas 2

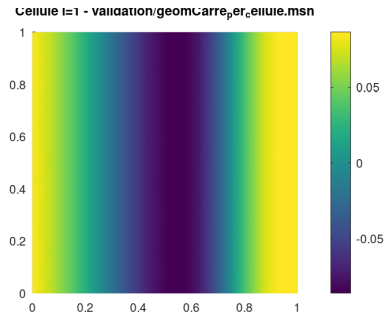

FIGURE A.16 – ω_1

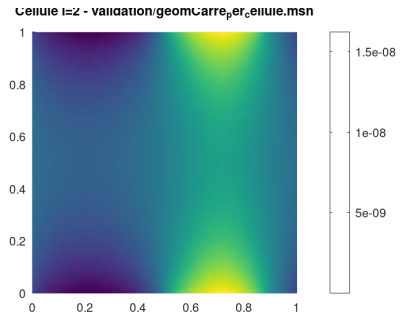

FIGURE A.17 – ω_2

```
cas 3
Aeff =

   1.7323e+00   8.0943e-13
   7.8969e-13   4.0000e+00
```

FIGURE A.18 – Résultat cas 3

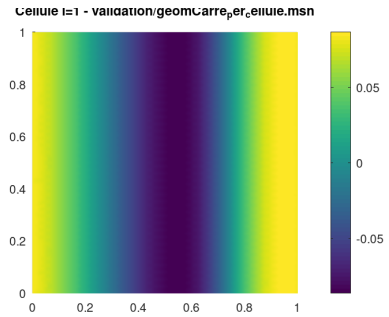

FIGURE A.19 – ω_1

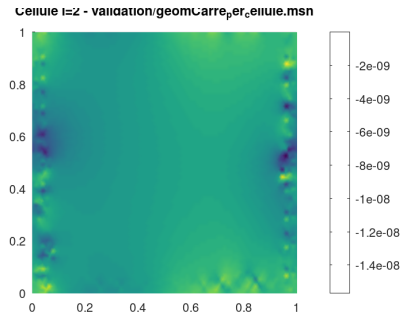

FIGURE A.20 – ω_2

```
cas 0
Aeff =

   1.0000e+00   1.6563e-15
  -1.1302e-14   1.0000e+00
```

FIGURE A.21 – Résultat cas 4

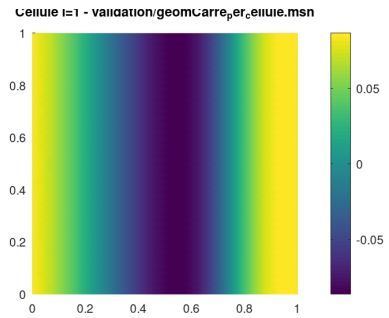

FIGURE A.22 – ω_1

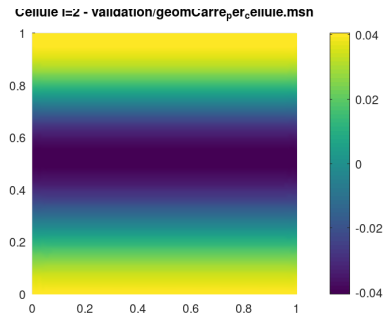

FIGURE A.23 – ω_2

A.4 Résultats Homogénéisation

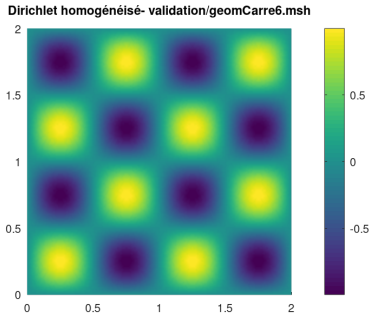

FIGURE A.24 – u_0

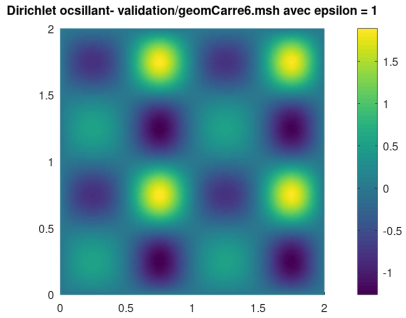

FIGURE A.25 – $\epsilon = 1$

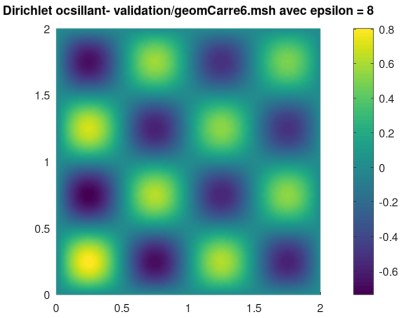

FIGURE A.26 – $\epsilon = 2^3$

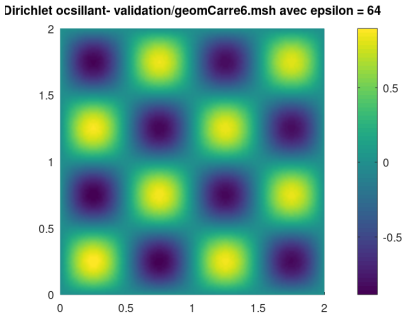

FIGURE A.27 – $\epsilon = 2^6$

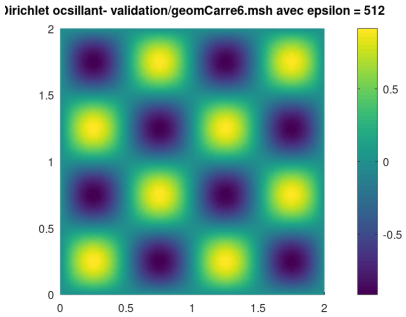

FIGURE A.28 – $\epsilon = 2^9$

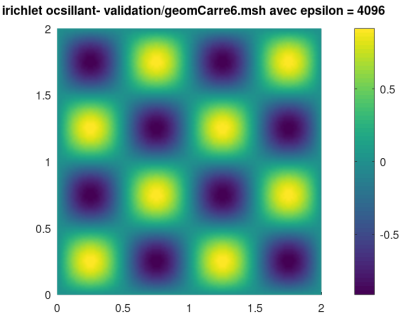

FIGURE A.29 – $\epsilon = 2^{12}$

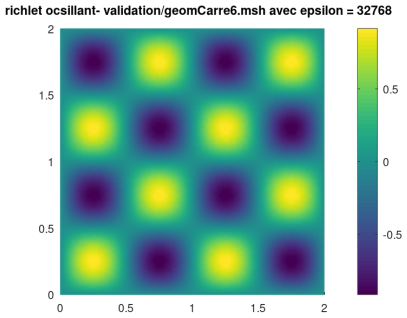

FIGURE A.30 – $\epsilon = 2^{15}$

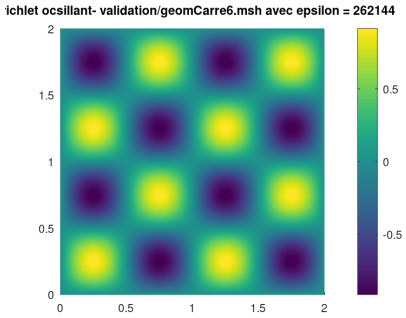

FIGURE A.31 – $\epsilon = 2^{18}$

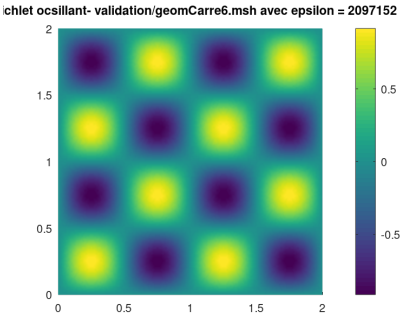

FIGURE A.32 – $\epsilon = 2^{21}$

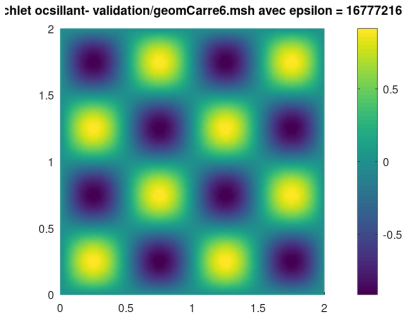

FIGURE A.33 – $\epsilon = 2^{24}$

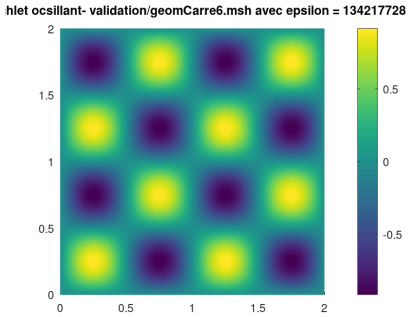

FIGURE A.34 – $\epsilon = 2^{27}$

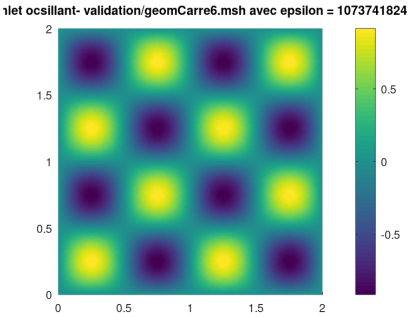

FIGURE A.35 – $\epsilon = 2^{30}$