

Rapport du projet de la Méthode de base réduite pour la résolution d'EDPs dépendantes de paramètre

Jincheng KE

Une présentation du projet sur les résultats obtenus.

Mars 2024

Mise en forme du problème paramétrique

Solution numérique des différents paramètres

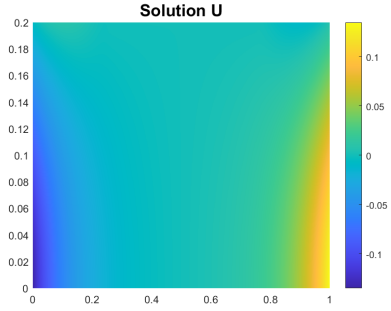


FIGURE 1 – $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 1$

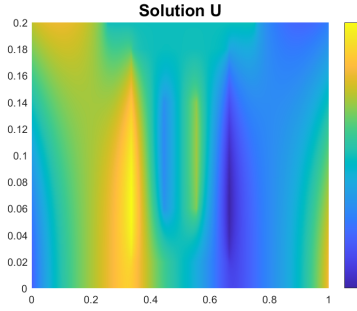


FIGURE 2 – $\kappa_1 = 0.1, \kappa_2 = 1$

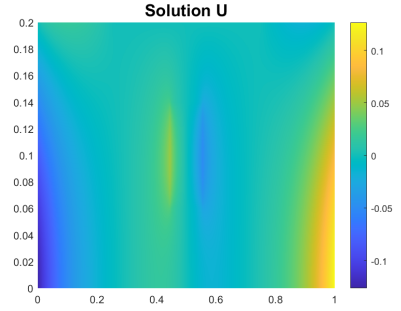


FIGURE 3 – $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 0.1$

La décomposition affine

On a la matrice \mathbf{A} peut être décomposée par

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \kappa_1 \mathbf{A}_1 + \kappa_2 \mathbf{A}_2$$

avec

$$\mathbf{A}_q = \mathbf{K} \cdot \mathbb{1}_{\{\text{RefTriangles}=q\}}, \forall q = 0, 1, 2$$

Et comme on a

$$\mathbf{L} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{G}_1 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{G}_2 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{G}_4 + \mathbf{S}_5 \cdot \mathbf{G}_5 - \mathbf{A} \cdot \Phi_r$$

Il y a que la matrice \mathbf{A} qui dépend du paramètre κ , on peut donc décomposer le vecteur \mathbf{L} en décomposant la matrice \mathbf{A} , on obtient la formule suivante :

$$\mathbf{L} = \mathbf{L}_0 + \kappa_1 \mathbf{L}_1 + \kappa_2 \mathbf{L}_2$$

avec

$$\mathbf{L}_0 = \mathbf{M} \cdot \mathbf{F} + \mathbf{S}_1 \cdot \mathbf{G}_1 + \mathbf{S}_2 \cdot \mathbf{G}_2 + \mathbf{S}_4 \cdot \mathbf{G}_4 + \mathbf{S}_5 \cdot \mathbf{G}_5 - \mathbf{A}_0 \cdot \Phi_r$$

et

$$\mathbf{L}_q = -\mathbf{A}_q \cdot \Phi_r, \forall q = 1, 2$$

cf. code `FE_assemblages.m`

Validation numérique

Pour vérifier la décomposition affine pour la matrice \mathbf{A} et pour le vecteur \mathbf{L} , on compare l'erreur absolue et l'erreur relative entre la solution de référence \mathbf{U}_{ref} de l'équation $\mathbf{A}_{\text{ref}} \cdot \mathbf{U}_{\text{ref}} = \mathbf{L}_{\text{ref}}$ et la solution \mathbf{U} de l'équation avec la composition affine $(\mathbf{A}_0 + \kappa_1 \mathbf{A}_1 + \kappa_2 \mathbf{A}_2) \cdot \mathbf{U} = \mathbf{L}_0 + \kappa_1 \mathbf{L}_1 + \kappa_2 \mathbf{L}_2$. Pour $\kappa = (0.1, 1)$, l'erreur absolue est environ $4.658e - 14$, l'erreur relative est environ $1.123e - 14$. Pour $\kappa = (1, 0.1)$, l'erreur absolue est environ $1.408e - 14$, l'erreur relative est environ $5.171e - 15$.

L'erreur est assez petite pour pouvoir valider cet algorithme de la décomposition affine.

Réduction par l'approche POD

Construction d'une base réduite par POD

L'implémentation cf. MAIN_RBPOD.m

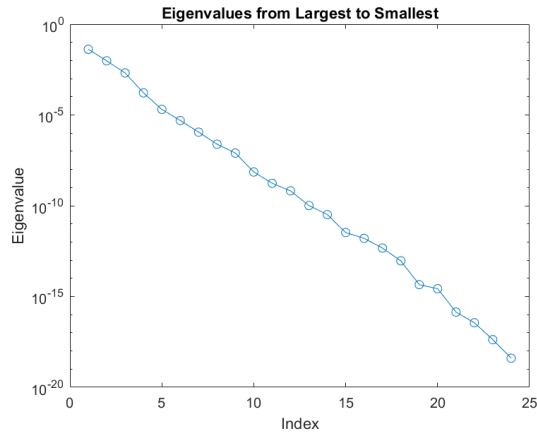


FIGURE 4 – type cartésien avec $n_1 = n_2 = 5$

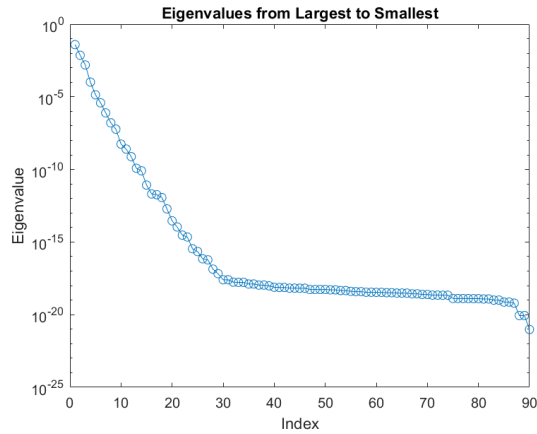


FIGURE 5 – type cartésien avec $n_1 = n_2 = 12$

Pour le plan d'expérience cartésien avec $n_1 = n_2 = 5$, on a observé que la vitesse de la décroissance des valeurs propres est uniforme et rapide, il y a toujours une tendance décroissante avec la même vitesse. De plus, la plus petite valeur propre est environ $1e-19$. Comme il y a une tendance décroissante avec la même vitesse, et la plus petite valeur propre ici est déjà assez petit, il semble que le problème est réductible. Mais si on veut une précision plus précise, il semble que c'est mieux de prendre plus d'échantillons.

Pour le plan d'expérience cartésien avec $n_1 = n_2 = 12$, on a observé que la tendance de la vitesse de la décroissance uniforme et rapide se poursuit jusqu'à $n = 30$. Quand $n \geq 30$, la vitesse devient vraiment petite, les valeurs propres se stabilisent, et au final, la plus petite valeur propre est environ $1e-20$. Comme les valeurs propres se stabilisent quand $n \geq 30$, il semble que le nombre de RB de POD ne permettra plus d'améliorer la précision quand il est grand.

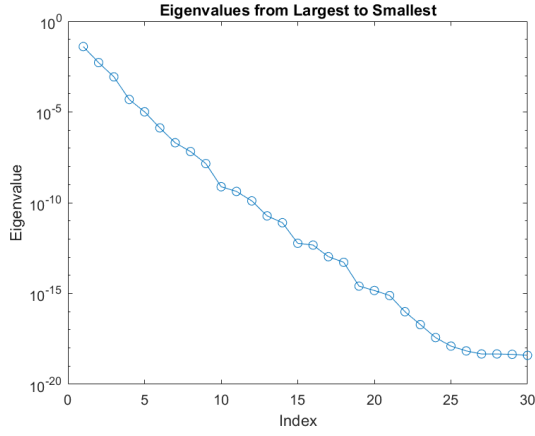


FIGURE 6 – type 'random' avec $n = 35$

Pour le plan d'expérience aléatoire avec $n = 35$, on a observé que globalement, il y a la même tendance de la décroissance rapide des valeurs propres avec le cas de l'expérience cartésien en prenant $n_1 = n_2 = 5$. La plus petit valeur propre est aussi environ $1e-19$. Mais localement, on peut voir que la vitesse de décroissance se varie. Cette variation de la vitesse locale est produite par la sensibilité à l'échantillonnage.

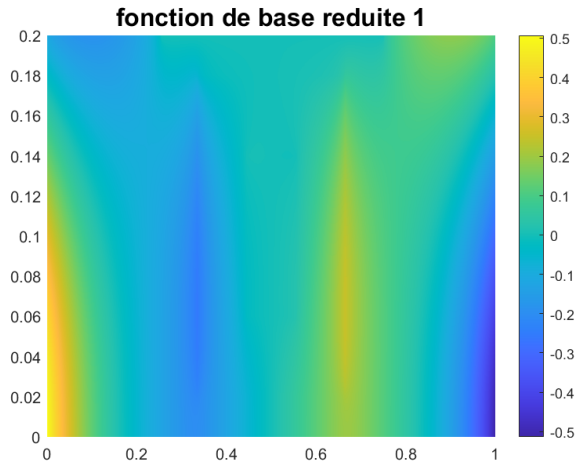


FIGURE 7 – $n_1 = n_2 = 12$ base 1

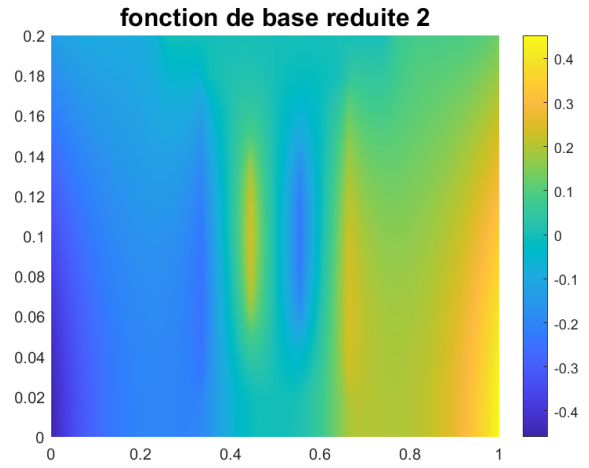


FIGURE 8 – $n_1 = n_2 = 12$ base 2

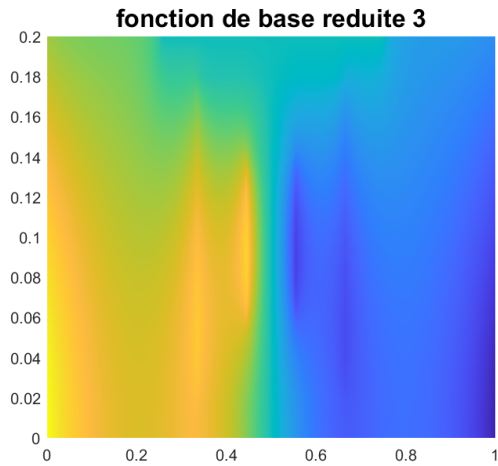


FIGURE 9 – $n_1 = n_2 = 12$ base 3

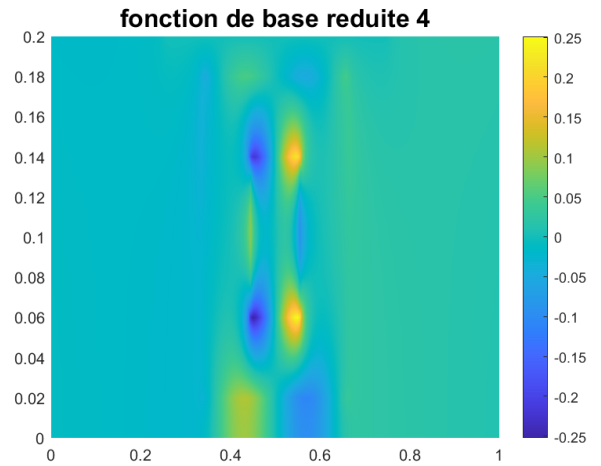
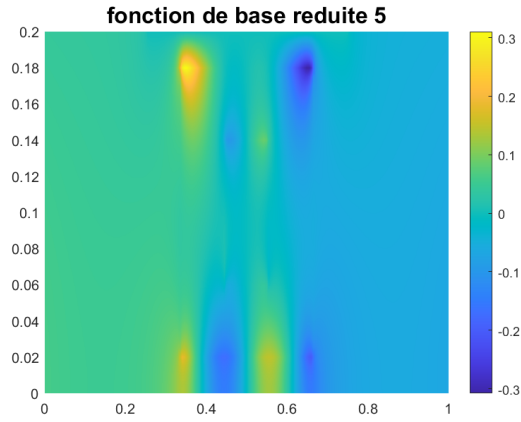


FIGURE 10 – $n_1 = n_2 = 12$ base 4



Les images FIGURE 7, 8, 9, 10 et 11 sont les 5 premières RB de POD pour le plan d'expérience cartésien avec $n_1 = n_2 = 12$.
L'implémentation cf. `MAIN_RBPOD.m`

FIGURE 11 – $n_1 = n_2 = 12$ base 5

Solveur base reduite

La décompostition affine

On a

$$\mathbf{A}^{\text{rb}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$$

et

$$\mathbf{L}^{\text{rb}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{L}$$

En utilisant la décomposition affine de \mathbf{A} et \mathbf{L} , on aura la décomposition suivante :

$$\mathbf{A}^{\text{rb}} = \mathbf{A}_0^{\text{rb}} + \kappa_1 \mathbf{A}_1^{\text{rb}} + \kappa_2 \mathbf{A}_2^{\text{rb}}$$

$$\mathbf{L}^{\text{rb}} = \mathbf{L}_0^{\text{rb}} + \kappa_1 \mathbf{L}_1^{\text{rb}} + \kappa_2 \mathbf{L}_2^{\text{rb}}$$

avec

$$\mathbf{A}_q^{\text{rb}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{A}_q \cdot \mathbf{P}$$

$$\mathbf{L}_q^{\text{rb}} = \mathbf{P}^T \cdot \mathbf{L}_q, \forall q = 0, 1, 2$$

L'implémentation cf. `RB_reduced_decomp.m`

Complexité

Pour `RB_solve.m`, comme on a déjà décomposé affinement, alors toutes les opérations sont sur la matrice de taille $N \times N$ ($N \approx 30$) et le vecteur de taille N , donc la complexité est $\mathcal{O}(N^3)$.

Validation numérique

L'implémentation cf. `MAIN_RBSOLVER.m`

On va tracer les erreurs d'approximation base réduite maximales (max error) et moyennes (mean error) en fonction de N avec $N = 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32$ et on va tracer également erreurs de l'approximation RB optimale (error2).

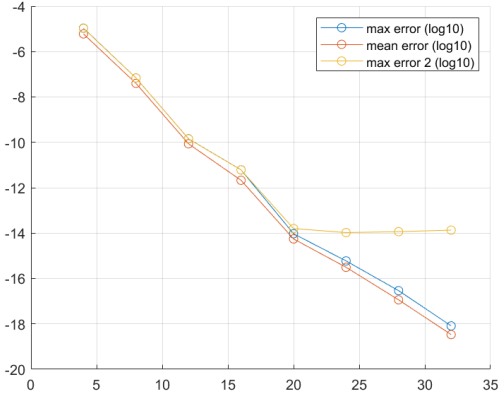


FIGURE 12 – type cartésien avec $n_1 = n_2 = 12$

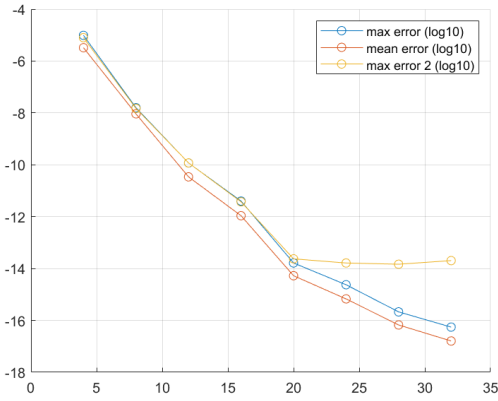


FIGURE 13 – type 'random' avec $n = 35$

Pour le plan d'expérience cartésien avec $n_1 = n_2 = 12$, on a observé que avec le nombre de RB qui devient de plus en plus grand, l'erreur maximale et l'erreur moyenne devient aussi de plus en plus petit, et comme la courbe est une ligne à l'échelle de semi-log, on a la vitesse de convergence est exponentielle. Pourtant, pour l'erreur de l'approximation RB optimale, elle décroît aussi vite que l'erreur maximale / moyenne au début, mais jusqu'à $n = 20$. Quand $n \geq 20$, elle se stabilise à valeur de environ $10e-14$. Cela implique on a atteint à la limite de cette échantillonnage. Cette valeur est la norme de projection de \mathbf{U} dans l'espace $\mathbf{V}_{\text{NTrain}}^\perp$ (NTrain = 144 ici).

Pour le plan d'expérience aléatoire avec $n = 35$, on a observé que avec le nombre de RB qui devient de plus en plus grand, l'erreur maximale et l'erreur moyenne devient aussi de plus en plus petit, et comme la courbe est une ligne à l'échelle de semi-log, on a la vitesse de convergence est exponentielle. Pourtant, pour l'erreur de l'approximation RB optimale, elle décroît aussi vite que l'erreur maximale / moyenne au début, mais jusqu'à $n = 20$. Quand $n \geq 20$, elle se stabilise à valeur de environ $10e-14$. On peut expliquer ce phénomène avec la même raison pour le plan d'expérience cartésien.