

glm::perspective()

1. 视锥体参数

- 垂直视野角(fovy): 定义视锥体的垂直开口角度;
- 宽高比(aspect): 视口的宽高比 (宽度/高度) ;
- 近平面(n) 和 远平面(f): 定义视锥体的深度范围;

近平面的高度和宽度由以下公式确定：

$$h = 2n \cdot \tan\left(\frac{\text{fovy}}{2}\right), w = \text{aspect} \cdot h$$

2. 投影变换目标

将视锥体映射到 NDC 立方体 $[-1, 1]^3$, 通过下面的步骤:

- 缩放 x 和 y: 根据宽高比和视野角度去调整坐标的范围
- 处理深度 z: 将 z 从 $[-n, -f]$ 映射到 $[-1, 1]$ 或者 $[0, 1]$
- 透视除法: 通过齐次坐标的 w 分量完成非线性的映射

3. 矩阵推导

x 和 y 分量的缩放

根据相似三角形，投影后坐标需满足：

$$x' = \frac{x \cdot n}{-z \cdot \frac{w}{2}}, y' = \frac{y \cdot n}{-z \cdot \frac{h}{2}}$$

引入缩放因子，使 x 和 y 范围映射到 $[-1, 1]$:

$$\text{scale}_x = \frac{1}{\text{aspect} \cdot \tan\left(\frac{\text{fovy}}{2}\right)}, \text{scale}_y = \frac{1}{\tan\left(\frac{\text{fovy}}{2}\right)}$$

对应矩阵前两行：

$$\begin{bmatrix} \text{scale}_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{scale}_y & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

z 分量

将 z 从 $[-n, -f]$ 映射到 $[-1, 1]$, 设变换后的 z 为:

$$z' = \frac{A \cdot z + B}{-z}$$

通过边界条件 $z = -n \rightarrow z' = -1$ 和 $z = -f \rightarrow z' = 1$, 可以计算得到:

$$A = -\frac{f+n}{f-n}, B = -\frac{2fn}{f-n}$$

w 分量的处理

设置 w 分量为 $-z$ 确保透视除法正确:

$$w' = -z \Rightarrow [0, 0, -1, 0]$$

4. 最终矩阵

组合所有分量，得到透视投影矩阵：

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\text{aspect} \cdot \tan\left(\frac{\text{fovy}}{2}\right)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\tan\left(\frac{\text{fovy}}{2}\right)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{f+n}{f-n} & -\frac{2fn}{f-n} \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$