第三章—单纯形方法题解

1. 用单纯形方法解下列线性规划问题：

(1) $\min\ -9x_1-16x_2$

s. t. $x_1+4x_2+x_3=80$,

$2x_1+3x_2+x_4=90$,

$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.$

(2) $\max\ x_1+3x_2$

s. t. $2x_1+3x_2+x_3=6$,

$-x_1+x_2+x_4=1$,

$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.$

(3) $\max\ -x_1+3x_2+x_3$

s. t. $3x_1-x_2+2x_3\leqslant 7$,

$-2x_1+4x_2\leqslant 12$,

$-4x_1+3x_2+8x_3\leqslant 10$,

$x_1,\ x_2,\ x_3\geqslant 0.$

(4) $\min\ 3x_1-5x_2-2x_3-x_4$

s. t. $x_1+x_2+x_3\leqslant 4$,

$4x_1-x_2+x_3+2x_4\leqslant 6$,

$-x_1+x_2+2x_3+3x_4\leqslant 12$,

$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.$

(5) $\min\ -3x_1-x_2$

s. t. $3x_1+3x_2+x_3=30$,

$4x_1-4x_2+x_4=16$,

$2x_1-x_2\leqslant 12$,

$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.$

解 （1）用单纯形方法求解过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	1	4	1	0	80
x_4	2	3	0	1	90
	9	16	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_2	$\frac{1}{4}$	1	$\frac{1}{4}$	0	20
x_4	$\frac{5}{4}$	0	$-\frac{3}{4}$	1	30
	5	0	-4	0	-320
x_2	0	1	$\frac{2}{5}$	$-\frac{1}{5}$	14
x_1	1	0	$-\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	24
	0	0	-1	-4	-440

最优解$\bar{x}=(24,14,0,0)$，最优值 $f_{\min}=-440$.

（2）用单纯形方法求解过程如下：

(2) 用单纯形方法求解过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	3	1	0	6
x_4	-1	1	0	1	1
	-1	-3	0	0	0
x_3	5	0	1	-3	3
x_2	-1	1	0	1	1
	-4	0	0	3	3
x_1	1	0	$\frac{1}{5}$	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_2	0	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{8}{5}$
	0	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{27}{5}$

最优解$\bar{x}=\left(\frac{3}{5},\frac{8}{5},0,0\right)$，最优值 $f_{\max}=\frac{27}{5}$.

(3) 引入松弛变量 x_4, x_5, x_6，化成标准形式：

$$
\begin{aligned}
\max \quad & -x_1+3x_2+x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 3x_1-x_2+2x_3+x_4=7, \\
& -2x_1+4x_2+x_5=12, \\
& -4x_1+3x_2+8x_3+x_6=10, \\
& x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,6.
\end{aligned}
$$

用单纯形方法求解过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	3	-1	2	1	0	0	7
x_5	-2	④	0	0	1	0	12
x_6	-4	3	8	0	0	1	10
	1	-3	-1	0	0	0	0

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\frac{5}{2}$	0	2	1	$\frac{1}{4}$	0	10
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
x_6	$-\frac{5}{2}$	0	⑧	0	$-\frac{3}{4}$	1	1
	$-\frac{1}{2}$	0	-1	0	$\frac{3}{4}$	0	9

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	$\frac{25}{8}$	0	0	1	$\frac{7}{16}$	$-\frac{1}{4}$	$\frac{39}{4}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{4}$	0	3
x_3	$-\frac{5}{16}$	0	1	0	$-\frac{3}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{8}$
	$-\frac{13}{16}$	0	0	0	$\frac{21}{32}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{73}{8}$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_1	1	0	0	$\frac{8}{25}$	$\frac{7}{50}$	$-\frac{2}{25}$	$\frac{78}{25}$
x_2	0	1	0	$\frac{4}{25}$	$\frac{8}{25}$	$-\frac{1}{25}$	$\frac{114}{25}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{10}$	$-\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{10}$
	0	0	0	$\frac{13}{50}$	$\frac{77}{100}$	$\frac{3}{50}$	$\frac{583}{50}$

最优解$\bar{x}=\left(\frac{78}{25},\frac{114}{25},\frac{11}{10},0,0,0\right)$，最优值 $f_{\max}=\frac{583}{50}$。

（4）引入松弛变量 x_5,x_6,x_7，化成标准形式：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & 3x_1-5x_2-2x_3-x_4\\
\text{s. t.}\quad & x_1+x_2+x_3+x_5=4,\\
& 4x_1-x_2+x_3+2x_4+x_6=6,\\
& -x_1+x_2+2x_3+3x_4+x_7=12,\\
& x_j\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,7.
\end{aligned}
$$

用单纯形方法求解过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	①	1	0	1	0	0	4
x_6	4	-1	1	2	0	1	0	6
x_7	-1	1	2	3	0	0	1	12
	-3	5	2	1	0	0	0	0

x_2	1	1	1	0	1	0	0	4
x_6	5	0	2	2	1	1	0	10
x_7	-2	0	1	3	-1	0	1	8
	-8	0	-3	1	-5	0	0	-20
x_2	1	1	1	0	1	0	0	4
x_6	$\frac{19}{3}$	0	$\frac{4}{3}$	0	$\frac{5}{3}$	1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{14}{3}$
x_4	$-\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1	$-\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
	$-\frac{22}{3}$	0	$-\frac{10}{3}$	0	$-\frac{14}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{68}{3}$

最优解$\bar{x}=(0,4,0,\frac{8}{3},0,\frac{14}{3},0)$，最优值 $f_{\min}=-\frac{68}{3}$.

(5) 引入松弛变量 x_3，化成标准形式：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & -3x_1-x_2 \\
\text{s. t.} \quad & 3x_1+3x_2+x_3 = 30, \\
& 4x_1-4x_2 \qquad +x_4 = 16, \\
& 2x_1-x_2 \qquad\qquad +x_5 = 12, \\
& x_j \geqslant 0, j=1,2,\cdots,5.
\end{aligned}
$$

用单纯形方法求解过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	3	3	1	0	0	30
x_4	4	-4	0	1	0	16
x_5	2	-1	0	0	1	12
	3	1	0	0	0	0
x_3	0	6	1	$-\frac{3}{4}$	0	18
x_1	1	-1	0	$\frac{1}{4}$	0	4
x_5	0	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	4
	0	4	0	$-\frac{3}{4}$	0	-12

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_2	0	1	$\frac{1}{6}$	$-\frac{3}{24}$	0	3
x_1	1	0	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{24}$	0	7
x_5	0	0	$-\frac{1}{6}$	$\frac{3}{8}$	1	1
	0	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{4}$	0	-24

最优解$\bar{x}=(7,3,0,0,1)$，最优值 $f_{\min}=-24$.

2. 求解下列线性规划问题：

(1) $\min\ 4x_1+6x_2+18x_3$

s. t. $x_1 \qquad +3x_3\geqslant 3,$

$x_2+2x_3\geqslant 5,$

$x_1,x_2,x_3\geqslant 0.$

(2) $\max\ 2x_1+x_2$

s. t. $x_1+\ x_2\leqslant 5,$

$x_1-\ x_2\geqslant 0,$

$6x_1+2x_2\leqslant 21,$

$x_1,x_2\geqslant 0.$

(3) $\max\ 3x_1-5x_2$

s. t. $-x_1+2x_2+4x_3\leqslant 4,$

$x_1+\ x_2+2x_3\leqslant 5,$

$-x_1+2x_2+\ x_3\geqslant 1,$

$x_1,x_2,x_3\geqslant 0.$

(4) $\min\ x_1-3x_2+x_3$

s. t. $2x_1-\ x_2+x_3=8,$

$2x_1+\ x_2 \qquad \geqslant 2,$

$x_1+2x_2 \qquad \leqslant 10,$

$x_1,x_2,x_3\geqslant 0.$

(5) $\max\ -3x_1+2x_2-x_3$

s. t. $2x_1+\ x_2-x_3\leqslant 5,$

$4x_1+3x_2+x_3\geqslant 3,$

$-x_1+\ x_2+x_3=2,$

$x_1,x_2,x_3\geqslant 0.$

(6) $\min\ 2x_1-3x_2+4x_3$

s. t. $x_1+\ x_2+x_3\leqslant 9,$

$-x_1+2x_2-x_3\geqslant 5,$

$2x_1-\ x_2 \qquad \leqslant 7,$

$x_1,x_2,x_3\geqslant 0.$

(7) $\min\ 3x_1-2x_2+x_3$

s. t. $2x_1-3x_2+x_3=1,$

$2x_1+3x_2 \qquad \geqslant 8,$

$x_1,x_2,x_3\geqslant 0.$

(8) $\min\ 2x_1-3x_2$

s. t. $2x_1-x_2-x_3\geqslant 3,$

$x_1-x_2+x_3\geqslant 2,$

$x_1,x_2,x_3\geqslant 0.$

(9) $\min\ 2x_1+x_2-x_3-x_4$

s. t. $x_1-x_2+2x_3-x_4=2,$

$2x_1+x_2-3x_3+x_4=6,$

$x_1+x_2+\ x_3+x_4=7,$

$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.$

(10) $\max\ 3x_1-\ x_2-3x_3+x_4$

s. t. $x_1+2x_2-\ x_3+\ x_4=0,$

$x_1-\ x_2+2x_3-\ x_4=6,$

$2x_1-2x_2+3x_3+3x_4=9,$

$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.$

解 (1) 引入松弛变量 x_4,x_5,x_6，化为标准形式：

$$\begin{aligned}
\min\quad & 4x_1+6x_2+18x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1 \qquad +3x_3-x_4 \qquad =3, \\
& x_2+2x_3 \qquad -x_5=5, \\
& x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,5.
\end{aligned}$$

用单纯形方法求解过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_1	1	0	3	-1	0	3
x_2	0	1	2	0	-1	5
	0	0	6	-4	-6	42
x_3	$\frac{1}{3}$	0	1	$-\frac{1}{3}$	0	1
x_2	$-\frac{2}{3}$	1	0	$\frac{2}{3}$	-1	3
	-2	0	0	-2	-6	36

最优解$\bar{x}=(0,3,1,0,0)$，最优值 $f_{\min}=36$.

(2) 引入松弛变量 x_3, x_4, x_5，化成标准形式：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 2x_1+x_2 \\
\text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3=5, \\
& x_1-x_2-x_4=0, \\
& 6x_1+2x_2+x_5=21, \\
& x_j \geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,5.
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	
x_3	1	1	1	0	0	0	5
y	①	-1	0	-1	0	1	0
x_5	6	2	0	0	1	0	21
	1	-1	0	-1	0	0	0
x_3	0	2	1	1	0	-1	5
x_1	1	-1	0	-1	0	1	0
x_5	0	8	0	6	1	-6	21
	0	0	0	0	0	-1	0

得到原线性规划的一个基本可行解. 由此出发求最优解，过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	②	1	1	0	5
x_1	1	-1	0	-1	0	0
x_5	0	8	0	6	1	21
	0	-3	0	-2	0	0
x_2	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_1	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{5}{2}$
x_5	0	0	-4	②	1	1
	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{15}{2}$
x_2	0	1	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{4}$	$\frac{9}{4}$
x_1	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{11}{4}$
x_4	0	0	-2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{31}{4}$

最优解$\bar{x}=\left(\frac{11}{4},\frac{9}{4},0,\frac{1}{2},0\right)$，最优值 $f_{\max}=\frac{31}{4}$.

(3) 引入松弛变量 x_4, x_5, x_6，化成标准形式：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & 3x_1-5x_2 \\
\text{s.t.}\quad & -x_1+2x_2+4x_3+x_4=4, \\
& x_1+x_2+2x_3+x_5=5, \\
& -x_1+2x_2+x_3-x_6=1, \\
& x_j \geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,6.
\end{aligned}
$$

用两阶段法求解，为此引入人工变量 y，解下列线性规划：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y \\
\text{s.t.} \quad & -x_1+2x_2+4x_3+x_4 = 4, \\
& x_1+x_2+2x_3+x_5 = 5, \\
& -x_1+2x_2+x_3-x_6+y = 1, \\
& x_j \geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,6,\quad y \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	
x_4	-1	2	4	1	0	0	0	4
x_5	1	1	2	0	1	0	0	5
y	-1	2	1	0	0	-1	1	1
	-1	2	1	0	0	-1	0	1
x_4	0	0	3	1	0	1	-1	3
x_5	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	0	0	0	0	0	0	-1	0

得到原线性规划的一个基本可行解 $x=\left(0,\frac{1}{2},0,3,\frac{9}{2},0\right)$.

由此出发求最优解，过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	
x_4	0	0	3	1	0	1	3
x_5	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{9}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{5}{2}$
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
x_5	$\frac{3}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	1	0	3
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	0	$-\frac{1}{6}$	0	$-\frac{2}{3}$	0
	$-\frac{1}{2}$	0	0	$\frac{5}{6}$	0	$\frac{10}{3}$	0
x_3	0	0	1	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	1
x_1	1	0	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	0	2
x_2	0	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
	0	0	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{10}{3}$	1

最优解 $\bar{x}=(2,1,1,0,0)$，最优值 $f_{\max}=1$.

(4) 引入松弛变量 x_4, x_5，化为标准形式：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & x_1 - 3x_2 + x_3 \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\
& 2x_1 + x_2 - x_4 = 2, \\
& x_1 + 2x_2 + x_5 = 10, \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 5.
\end{aligned}
$$

用两阶段法求解.

引入人工变量 y，解下列线性规划：

$$
\begin{aligned}
\min \quad & y \\
\text{s.t.} \quad & 2x_1 - x_2 + x_3 = 8, \\
& 2x_1 + x_2 - x_4 + y = 2, \\
& x_1 + 2x_2 + x_5 = 10, \\
& x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 2, \cdots, 5, \quad y \geqslant 0.
\end{aligned}
$$

求解过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y	
x_3	2	-1	1	0	0	0	8
y	2	1	0	-1	0	1	2
x_5	1	2	0	0	1	0	10
	2	1	0	-1	0	0	2
x_3	0	-2	1	1	0	-1	6
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1
x_5	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	9
	0	0	0	0	0	-1	0

得原线性规划的一个基本可行解 $\boldsymbol{x} = (1, 0, 6, 0, 9)$.

从求得的基本可行解出发，求最优解. 求解过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	0	-2	1	1	0	6
x_1	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	1
x_5	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	1	9
	0	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	7

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_3	4	0	1	-1	0	10
x_2	2	1	0	-1	0	2
x_5	-3	0	0	2	1	6
	-3	0	0	2	0	4
x_3	$\frac{5}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	13
x_2	$\frac{1}{2}$	1	0	0	$\frac{1}{2}$	5
x_4	$-\frac{3}{2}$	0	0	1	$\frac{1}{2}$	3
	0	0	0	0	-1	-2

最优解$\bar{x}=(0,5,13,3,0)$,最优值$f_{\min}=-2$.

(5) 引入松弛变量x_4,x_5,化成标准形式:

$$\begin{aligned}\max\quad & -3x_1+2x_2-x_3\\ \text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2-x_3+x_4=5,\\ & 4x_1+3x_2+x_3-x_5=3,\\ & -x_1+x_2+x_3=2,\\ & x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,5.\end{aligned}$$

先引入人工变量y_1,y_2,解下列线性规划:

$$\begin{aligned}\min\quad & y_1+y_2\\ \text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2-x_3+x_4=5,\\ & 4x_1+3x_2+x_3-x_5+y_1=3,\\ & -x_1+x_2+x_3+y_2=2,\\ & x_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,5,y_1,y_2\geqslant 0.\end{aligned}$$

求解过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
x_4	2	1	-1	1	0	0	0	5
y_1	4	3	1	0	-1	1	0	3
y_2	-1	1	1	0	0	0	1	2
	3	4	2	0	-1	0	0	5
x_4	$\frac{2}{3}$	0	$-\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	0	4
x_2	$\frac{4}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	1
y_2	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1	1
	$-\frac{7}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	0	1

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
x_4	-4	0	0	1	1	-1	2	6
x_2	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	$-\frac{7}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$
	0	0	0	0	0	0	-1	0

得到一个基本可行解$x=\left(0,\frac{1}{2},\frac{3}{2},6,0\right)$.

从求得的基本可行解出发求最优解,过程如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
x_4	-4	0	0	1	1	6
x_2	$\frac{5}{2}$	1	0	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_3	$-\frac{7}{2}$	0	1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$
	$\frac{23}{2}$	0	0	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$

x_4	3	0	−2	1	0	3
x_2	−1	1	1	0	0	2
x_5	−7	0	2	0	1	3
	1	0	3	0	0	4

最优解$\bar{x}=(0,2,0,3,3)$，最优值 $f_{\max}=4$.

(6) 引入松弛变量 x_4,x_5,x_6，化成标准形式：

$$\begin{aligned}
\min\quad & 2x_1-3x_2+4x_3 \\
\text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3+x_4=9, \\
& -x_1+2x_2-x_3-x_5=5, \\
& 2x_1-x_2+x_6=7, \\
& x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,6.
\end{aligned}$$

用大 M 法求解.

引入人工变量 y，取大正数 M，解下列线性规划：

$$\begin{aligned}
\min\quad & 2x_1-3x_2+4x_3+My \\
\text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3+x_4=9, \\
& -x_1+2x_2-x_3-x_5+y=5, \\
& 2x_1-x_2+x_6=7, \\
& x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,6,\quad y\geqslant 0.
\end{aligned}$$

求解过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	y	
x_4	1	1	1	1	0	0	0	9
y	−1	2	−1	0	−1	0	1	5
x_6	2	−1	0	0	0	1	0	7
	$-M-2$	$2M+3$	$-M-4$	0	$-M$	0	0	$5M$
x_4	$\frac{3}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{13}{2}$
x_2	$-\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$
x_6	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{19}{2}$
	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$	0	$\frac{3}{2}$	0	$-M-\frac{3}{2}$	$-\frac{15}{2}$
x_5	3	0	3	2	1	0	−1	13
x_2	1	1	1	1	0	0	0	9
x_6	3	0	1	1	0	1	0	16
	−5	0	−7	−3	0	0	$-M$	−27

最优解$\bar{x}=(0,9,0,0,13,16)$，最优值 $f_{\min}=-27$.

(7) 引入松弛变量 x_4，化成标准形式：

$$\begin{aligned}
\min\quad & 3x_1-2x_2+x_3 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1-3x_2+x_3=1, \\
& 2x_1+3x_2-x_4=8, \\
& x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.
\end{aligned}$$

用大 M 法求解.

引进人工变量 y，取大正数 M，解下列线性规划：

$$\begin{aligned}
\min\quad & 3x_1 - 2x_2 + x_3 + My \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 1, \\
& 2x_1 + 3x_2 - x_4 + y = 8, \\
& x_j \geqslant 0,\quad j = 1,2,3,4,\quad y \geqslant 0.
\end{aligned}$$

求解过程如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	
x_3	2	-3	1	0	0	1
y	2	3	0	-1	1	8
	$2M-1$	$3M-1$	0	$-M$	0	$8M+1$

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	
x_3	4	0	1	-1	1	9
x_2	$\frac{2}{3}$	1	0	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{8}{3}$
	$-\frac{1}{3}$	0	0	$-\frac{1}{3}$	$-M+\frac{1}{3}$	$\frac{11}{3}$

最优解 $\bar{x} = \left(0, \frac{8}{3}, 9, 0\right)$，最优值 $f_{\min} = \frac{11}{3}$.

(8) 引入松弛变量 x_4, x_5，化成标准形式：

$$\begin{aligned}
\min\quad & 2x_1 - 3x_2 \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 = 3, \\
& x_1 - x_2 + x_3 - x_5 = 2, \\
& x_j \geqslant 0,\quad j = 1,2,\cdots,5.
\end{aligned}$$

用大 M 法求解，引进人工变量 y_1, y_2，取大正数 M，解下列线性规划：

$$\begin{aligned}
\min\quad & 2x_1 - 3x_2 + M(y_1 + y_2) \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + y_1 = 3, \\
& x_1 - x_2 + x_3 - x_5 + y_2 = 2, \\
& x_j \geqslant 0,\quad j = 1,2,\cdots,5, y_1, y_2 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	y_1	y_2	
y_1	2	-1	-1	-1	0	1	0	3
y_2	1	-1	1	0	-1	0	1	2
	$3M-2$	$-2M+3$	0	$-M$	$-M$	0	0	$5M$
x_1	1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
y_2	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
	0	$-\frac{1}{2}M+2$	$\frac{3}{2}M-1$	$\frac{1}{2}M-1$	$-M$	$-\frac{3}{2}M+1$	0	$\frac{1}{2}M+3$
x_1	1	$-\frac{2}{3}$	0	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$
x_3	0	$-\frac{1}{3}$	1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$
	0	$\frac{5}{3}$	0	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{2}{3}-M$	$\frac{2}{3}-M$	$\frac{10}{3}$

现行基本可行解下，对应 x_2 的判别数大于 0，约束系数第 2 列无正元，人工变量均为非基变量，取值为 0，因此不存在有限最优解.

(9) 用修正单纯形法求解．初始基本可行解未知，用两阶段法．

$$
\begin{aligned}
\min\quad & y_1+y_2+y_3\\
\text{s. t.}\quad & x_1-x_2+2x_3-x_4+y_1 =2,\\
& 2x_1+x_2-3x_3+x_4+y_2 =6,\\
& x_1+x_2+x_3+x_4+y_3 =7,\\
& x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4;\quad y_j\geqslant 0, j=1,2,3.
\end{aligned}
$$

记约束系数矩阵、约束右端和费用系数向量如下：

$$
\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \boldsymbol{p}_3\ \boldsymbol{p}_4\ \boldsymbol{p}_5\ \boldsymbol{p}_6\ \boldsymbol{p}_7]=\begin{bmatrix}1&-1&2&-1&1&0&0\\2&1&-3&1&0&1&0\\1&1&1&1&0&0&1\end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\\7\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7)=(0,0,0,0,1,1,1).
$$

取初始可行基

$$
\boldsymbol{B}=[\boldsymbol{p}_5\ \boldsymbol{p}_6\ \boldsymbol{p}_7]=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix},
$$

约束右端向量

$$
\bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\6\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\6\\7\end{bmatrix},
$$

基变量费用系数向量 $\boldsymbol{c}_B=(c_5,c_6,c_7)=(1,1,1)$，单纯形乘子 $\boldsymbol{w}=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}=(1,1,1)$，目标函数值 $f=\boldsymbol{c}_B\bar{\boldsymbol{b}}=15$．构造初表：

	1	1	1	15
y_1	1	0	0	2
y_2	0	1	0	6
y_3	0	0	1	7

第 1 次迭代：

计算现行基下对应各变量的判别数：

$$
\begin{aligned}
& z_1-c_1=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_1-c_1=4,\quad z_2-c_2=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_2-c_2=1,\\
& z_3-c_3=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_3-c_3=0,\quad z_4-c_4=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_4-c_4=1,\\
& z_5-c_5=z_6-c_6=z_7-c_7=0,
\end{aligned}
$$

$$
z_1-c_1=\max_j\{z_j-c_j\}=4,\text{因此 } x_1 \text{ 进基}.
$$

主列

$$
\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_1=\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}.
$$

作主元消去运算：

					x_1
	1	1	1	15	4
y_1	1	0	0	2	①
y_2	0	1	0	6	2
y_3	0	0	1	7	1

	-3	1	1	7
x_1	1	0	0	2
y_2	-2	1	0	2
y_3	-1	0	1	5

第 2 次迭代：

由上表知，单纯形乘子 $w=(-3,1,1)$，计算现行基下对应各变量的判别数：

$$z_2-c_2=wp_2-c_2=5,\quad z_3-c_3=wp_3-c_3=-8,$$
$$z_4-c_4=wp_4-c_4=5,\quad z_5-c_5=wp_5-c_5=-4,$$
$$z_1-c_1=z_6-c_6=z_7-c_7=0,\quad z_2-c_2=\max_j\{z_j-c_j\}=5.$$

计算主列

$$B^{-1}p_2=\begin{bmatrix}1&0&0\\-2&1&0\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\\2\end{bmatrix}.$$

作主元消去运算：

					x_2
	-3	1	1	7	5
x_1	1	0	0	2	-1
y_2	-2	1	0	2	③
y_3	-1	0	1	5	2

	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$
x_2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$
y_3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$

第 3 次迭代：

由前表知，单纯形乘子 $w=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right)$，计算现行基下对应各变量的判别数：

$$z_3-c_3=wp_3-c_3=\frac{11}{3},\quad z_4-c_4=wp_4-c_4=0,$$
$$z_5-c_5=wp_5-c_5=-\frac{2}{3},\quad z_6-c_6=wp_6-c_6=-\frac{5}{3},$$
$$z_1-c_1=z_2-c_2=z_7-c_7=0,\quad z_3-c_3=\max_j\{z_j-c_j\}=\frac{11}{3}.$$

第 3 次迭代：

由前表知，单纯形乘子 $w=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},1\right)$，计算现行基下对应各变量的判别数：

$$z_3-c_3=wp_3-c_3=\frac{11}{3},\quad z_4-c_4=wp_4-c_4=0,$$

$$z_5-c_5=wp_5-c_5=-\frac{2}{3},\quad z_6-c_6=wp_6-c_6=-\frac{5}{3},$$

$$z_1-c_1=z_2-c_2=z_7-c_7=0,\quad z_3-c_3=\max_j\{z_j-c_j\}=\frac{11}{3}.$$

计算主列：

$$B^{-1}p_3=\begin{bmatrix}\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\ -3\\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{3}\\ -\frac{7}{3}\\ \frac{11}{3}\end{bmatrix}.$$

作主元消去运算：

					x_3
	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{3}$
x_1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{8}{3}$	$-\frac{1}{3}$
x_2	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$-\frac{7}{3}$
y_3	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1	$\frac{11}{3}$	$\frac{11}{3}$

	0	0	0	0
x_1	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	3
x_2	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{7}{11}$	3
x_3	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1

显然，$\forall j$，有 $z_j-c_j\leqslant 0$，一阶段已达最优．下面进行第 2 阶段．从求得的基本可行解

$$x=(3,3,1,0)^T$$

出发，求线性规划的最优解．记 $(c_1,c_2,c_3,c_4)=(2,1,-1,-1)$．

第 1 次迭代：

基变量为 x_1,x_2,x_3．先计算单纯形乘子：

$$w=c_BB^{-1}=(2,1,-1)\begin{bmatrix}\frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11}\\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{7}{11}\\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}=\left(\frac{2}{11},\frac{7}{11},\frac{6}{11}\right).$$

目标函数值 $f=c_Bx_B=8$．现行基下对应各变量的判别数：$z_1-c_1=z_2-c_2=z_3-c_3=0$，$z_4-c_4=wp_4-c_4=2$．计算主列：

$$B^{-1}p_4=\begin{bmatrix}\frac{4}{11} & \frac{3}{11} & \frac{1}{11}\\ -\frac{5}{11} & -\frac{1}{11} & \frac{7}{11}\\ \frac{1}{11} & -\frac{2}{11} & \frac{3}{11}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

作主元消去运算：

					x_4
	$\frac{2}{11}$	$\frac{7}{11}$	$\frac{6}{11}$	8	2
x_1	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	3	0
x_2	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{7}{11}$	3	1
x_3	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1	0

	$\frac{12}{11}$	$\frac{9}{11}$	$-\frac{8}{11}$	2
x_1	$\frac{4}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$	3
x_4	$-\frac{5}{11}$	$-\frac{1}{11}$	$\frac{7}{11}$	3
x_3	$\frac{1}{11}$	$-\frac{2}{11}$	$\frac{3}{11}$	1

第 2 次迭代：

计算对应各变量的判别数. 因为只有 1 个非基变量 x_2，只需计算对应 x_2 的判别数.

$$z_2-c_2=wp_2-c_2=-2<0,$$

已经达到最优. 最优解 $\bar{x}=(3,0,1,3)$，最优值 $f_{\min}=2$.

(10) 用修正单纯形法求解.

初始基本可行解未知，下面用大 M 法. 引入人工变量 y_1,y_2,y_3，取一个大正数 M，解下列线性规划：

$$\begin{aligned}\max\quad & 3x_1-x_2-3x_3+x_4-M(y_1+y_2+y_3)\\ \text{s.t.}\quad & x_1+2x_2-x_3+x_4+y_1=0,\\ & x_1-x_2+2x_3-x_4+y_2=6,\\ & 2x_1-2x_2+3x_3+3x_4+y_3=9,\\ & x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4,\quad y_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3.\end{aligned}$$

记约束系数矩阵、右端向量及目标系数向量如下：

$$A=[p_1\ p_2\ p_3\ p_4\ p_5\ p_6\ p_7]=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 2 & -2 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$b=[0,6,9]^{\mathrm{T}},\quad c=(c_1,c_2,c_3,c_4,c_5,c_6,c_7)=(3,-1,-3,1,-M,-M,-M).$$

取初始基：

$$B=[p_5\ p_6\ p_7]=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

单纯形乘子 $w=c_BB^{-1}=[-M,-M,-M]$，目标函数值 $f=c_BB^{-1}b=-15M$。构造初表：

	$-M$	$-M$	$-M$	$-15M$
y_1	1	0	0	0
y_2	0	1	0	6
y_3	0	0	1	9

第 1 次迭代：

计算现行基下对应各变量的判别数：

$$z_1-c_1=wp_1-c_1=-4M-3,\quad z_2-c_2=wp_2-c_2=M+1,$$

$$z_3-c_3=wp_3-c_3=-4M+3,\quad z_4-c_4=wp_4-c_4=-3M-1,$$

$$z_5-c_5=z_6-c_6=z_7-c_7=0,\quad z_1-c_1=\min_j\{z_j-c_j\}=-4M-3.$$

计算主列：

$$B^{-1}p_1=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

作主元消去运算：

	$-M$	$-M$	$-M$	$-15M$	x_1: $-4M-3$
y_1	1	0	0	0	1
y_2	0	1	0	6	1
y_3	0	0	1	9	2

	$3M+3$	$-M$	$-M$	$-15M$
x_1	1	0	0	0
y_2	-1	1	0	6
y_3	-2	0	1	9

第 2 次迭代：

计算现行基下对应各变量的判别数：

$$z_2-c_2=wp_2-c_2=9M+7,\quad z_3-c_3=wp_3-c_3=-8M,$$

$$z_4-c_4=wp_4-c_4=M+2,\quad z_5-c_5=wp_5-c_5=4M+3,$$

$$z_1-c_1=z_6-c_6=z_7-c_7=0,\quad z_3-c_3=\min_j\{z_j-c_j\}=-8M.$$

计算主列：

$$B^{-1}p_3=\begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&0\\-2&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\3\\5\end{bmatrix}.$$

作主元消去运算：

	$3M+3$	$-M$	$-M$	$-15M$	x_3: $-8M$
x_1	1	0	0	0	-1
y_2	-1	1	0	6	3
y_3	-2	0	1	9	5

	$-\frac{1}{5}M+3$	$-M$	$\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{5}M$
x_1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$
y_2	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_3	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$

第 3 次迭代：

计算现行基下对应各变量的判别数：

$$z_2-c_2=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_2-c_2=-\frac{3}{5}M+7,\quad z_4-c_4=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_4-c_4=\frac{13}{5}M+2,$$

$$z_5-c_5=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_5-c_5=\frac{4}{5}M+3,\quad z_7-c_7=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_7-c_7=\frac{8}{5}M,$$

$$z_1-c_1=z_3-c_3=z_6-c_6=0.$$

计算主列：

$$\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_2=\begin{bmatrix}\frac{3}{5} & 0 & \frac{1}{5}\\ \frac{1}{5} & 1 & -\frac{3}{5}\\ -\frac{2}{5} & 0 & \frac{1}{5}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\-1\\-2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{4}{5}\\ \frac{3}{5}\\ -\frac{6}{5}\end{bmatrix}.$$

作主元消去运算：

					x_2
	$-\frac{1}{5}M+3$	$-M$	$\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{5}M$	$-\frac{3}{5}M+7$
x_1	$\frac{3}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	$\frac{4}{5}$
y_2	$\frac{1}{5}$	1	$-\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{5}$
x_3	$-\frac{2}{5}$	0	$\frac{1}{5}$	$\frac{9}{5}$	$-\frac{6}{5}$

	$\frac{2}{3}$	$-\frac{35}{3}$	7	-7
x_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{4}{3}$	1	1
x_2	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$	-1	1
x_3	0	2	-1	3

第 4 次迭代：

$$z_4-c_4=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_4-c_4=\frac{97}{3},\quad z_5-c_5=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_5-c_5=M+\frac{2}{3},$$

$$z_6-c_6=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_6-c_6=M-\frac{35}{3},\quad z_7-c_7=\boldsymbol{w}\boldsymbol{p}_7-c_7=M+7.$$

判别数均非负，已达到最优解. 最优解和最优值分别是$\bar{x}=(1,1,3,0)$和 $f_{\max}=-7$.

3. 证明用单纯形方法求解线性规划问题时，在主元消去前后对应同一变量的判别数有下列关系：

$$(z_j-c_j)'=(z_j-c_j)-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k-c_k),$$

其中$(z_j-c_j)'$是主元消去后的判别数，其余是主元消去前的数据，y_{rk}为主元.

证　约束矩阵记作 $A=[p_1\ p_2\ \cdots\ p_n]$，主元消去前后的基分别记作 B 和B，基变量的费用系数向量分别记作 c_B 和 c_B，同时记 $B^{-1}p_j=y_j$ 及$B^{-1}p_j=y_j$. 主元消去前后，单纯形方法中第 i 行 j 列元素分别记为 y_{ij} 和y_{ij}，主元记作 y_{rk}，则有下列关系：

$$\begin{cases} y_{ij}=y_{ij}-\dfrac{y_{ik}}{y_{rk}}y_{rj}, & i\neq r,\\ y_{rj}=\dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}. \end{cases}$$

因此，主元消去前后的判别数 z_j-c_j 与$(z_j-c_j)'$必有下列关系：

$$\begin{aligned}(z_j-c_j)'&=c_B B^{-1}p_j-c_j\\ &=c_B y_j-c_j\\ &=\sum_{i\neq r}c_{B_i}\left(y_{ij}-\frac{y_{ik}}{y_{rk}}y_{rj}\right)+c_k\frac{y_{rj}}{y_{rk}}-c_j\\ &=(z_j-c_j)-c_{B_r}y_{rj}-\sum_{i\neq r}c_{B_i}\frac{y_{ik}}{y_{rk}}y_{rj}+c_k\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\\ &=(z_j-c_j)-c_{B_r}y_{rj}-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\sum_{i\neq r}c_{B_i}y_{ik}+c_k\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\\ &=(z_j-c_j)-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\sum_{i=1}^{m}c_{B_i}y_{ik}+c_k\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\end{aligned}$$

证　约束矩阵记作 $A=[p_1\ p_2\ \cdots\ p_n]$，主元消去前后的基分别记作 B 和B，基变量的费用系数向量分别记作 c_B 和 c_B，同时记 $B^{-1}p_j=y_j$ 及$B^{-1}p_j=y_j$. 主元消去前后，单纯形方法中第 i 行 j 列元素分别记为 y_{ij} 和y_{ij}，主元记作 y_{rk}，则有下列关系：

$$\begin{cases} y_{ij}=y_{ij}-\dfrac{y_{ik}}{y_{rk}}y_{rj}, & i\neq r,\\ y_{rj}=\dfrac{y_{rj}}{y_{rk}}. \end{cases}$$

因此，主元消去前后的判别数 z_j-c_j 与$(z_j-c_j)'$必有下列关系：

$$\begin{aligned}(z_j-c_j)'&=c_B B^{-1}p_j-c_j\\ &=c_B y_j-c_j\\ &=\sum_{i\neq r}c_{B_i}\left(y_{ij}-\frac{y_{ik}}{y_{rk}}y_{rj}\right)+c_k\frac{y_{rj}}{y_{rk}}-c_j\\ &=(z_j-c_j)-c_{B_r}y_{rj}-\sum_{i\neq r}c_{B_i}\frac{y_{ik}}{y_{rk}}y_{rj}+c_k\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\\ &=(z_j-c_j)-c_{B_r}y_{rj}-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\sum_{i\neq r}c_{B_i}y_{ik}+c_k\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\\ &=(z_j-c_j)-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\sum_{i=1}^{m}c_{B_i}y_{ik}+c_k\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\\ &=(z_j-c_j)-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}\left(\sum_{i=1}^{m}c_{B_i}y_{ik}-c_k\right)\\ &=(z_j-c_j)-\frac{y_{rj}}{y_{rk}}(z_k-c_k).\end{aligned}$$

4. 假设一个线性规划问题存在有限的最小值 f_0. 现在用单纯形方法求它的最优解(最小值点), 设在第 k 次迭代得到一个退化的基本可行解, 且只有一个基变量为零($x_j=0$), 此时目标函数值 $f_k>f_0$, 试证这个退化的基本可行解在以后各次迭代中不会重新出现.

证 设现行基本可行解中, 基变量 $x_{B_r}=x_j=0$, 其他基变量均取正值. 目标函数值为 f_k. 若下次迭代中, x_p 进基, x_j 离基, 则迭代后对应非基变量 x_j 的判别数为负数, 后续迭代中 x_j 不进基. 若下次迭代中, x_p 进基, x_j 仍为基变量, 则 x_p 进基后的取值 $x_p=\min\limits_k\left\{\dfrac{\bar{b}_i}{y_{ik}}\,\middle|\,y_{ik}>0, i\neq r\right\}>0$, 新的基本可行解处, 目标函数值 $f=f_k-(z_p-c_p)x_p<f_k$, 由于单纯形方法得到的函数值序列单调减小, 因此原退化的基本可行解不会重复出现.

5. 假设给定一个线性规划问题及其一个基本可行解. 在此线性规划中, 变量之和的上界为 σ, 在已知的基本可行解处, 目标函数值为 f, 最大判别数是 z_k-c_k, 又设目标函数值的允许误差为 ε, 用 f_0 表示未知的目标函数的最小值. 证明: 若

$$z_k-c_k\leqslant \varepsilon/\sigma,$$

则

$$f-f_0\leqslant\varepsilon.$$

证 考虑线性规划:

$$\begin{aligned}\min\quad & f\overset{\text{def}}{=\!=}\boldsymbol{cx}\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\\ & \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

在已知基本可行解 x 处的目标函数值 f 与最小值 f_0 有如下关系:

$$f_0=f-\sum_{j\in R}(z_j-c_j)x_j,$$

其中 R 是非基变量的下标集. z_j-c_j 是对应非基变量 x_j 的判别数. 显然有

$$f-f_0=\sum_{j\in R}(z_j-c_j)x_j\leqslant\sum_{j\in R}(z_k-c_k)x_j\leqslant\frac{\varepsilon}{\sigma}\sum_{j\in R}x_j\leqslant\frac{\varepsilon}{\sigma}\cdot\sigma=\varepsilon.$$

6. 假设用单纯形方法解线性规划问题

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{cx}\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{b},\\ & \boldsymbol{x}\geqslant\boldsymbol{0}.\end{aligned}$$

在某次迭代中对应变量 x_j 的判别数 $z_j-c_j>0$, 且单纯形表中相应的列 $\boldsymbol{y}_j=\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{p}_j\leqslant\boldsymbol{0}$. 证明

$$\boldsymbol{d}=\begin{bmatrix}-\boldsymbol{y}_j\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}$$

是可行域的极方向. 其中分量 1 对应 x_j.

证 不妨设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵, 并记作

$$\boldsymbol{A}=[\boldsymbol{p}_1\ \boldsymbol{p}_2\ \cdots\ \boldsymbol{p}_m\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n]=[\boldsymbol{B}\ \boldsymbol{p}_{m+1}\ \cdots\ \boldsymbol{p}_n].$$

由于

$$Ad=[B\ p_{m+1}\ \cdots\ p_j\ \cdots\ p_n]\begin{bmatrix}-B^{-1}p_j\\0\\\vdots\\1\\\vdots\\0\end{bmatrix}=-p_j+p_j=\mathbf{0},$$

且 $d\geqslant\mathbf{0}$，因此 d 是可行域的方向.

下面证明 d 是极方向. 设 d 可表示成可行域的两个方向 $d^{(1)}$ 和 $d^{(2)}$ 的正线性组合，即

$$d=\lambda d^{(1)}+\mu d^{(2)},\tag{1}$$

其中 $\lambda,\mu>0$，$d^{(1)}\geqslant\mathbf{0}$，$d^{(2)}\geqslant\mathbf{0}$，比较(1)式两端的各分量，易知 $d^{(1)}$ 和 $d^{(2)}$ 有下列形式：

$$d^{(1)}=\begin{bmatrix}d_B^{(1)}\\0\\\vdots\\a_j\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad d^{(2)}=\begin{bmatrix}d_B^{(2)}\\0\\\vdots\\b_j\\\vdots\\0\end{bmatrix},\quad a_j,b_j>0.$$

由于 $d^{(1)}$ 是可行域的方向，因此 $Ad^{(1)}=\mathbf{0}$，$d^{(1)}\geqslant\mathbf{0}$，即

$$Bd_B^{(1)}+a_jp_j=\mathbf{0}.\tag{2}$$

同理，由 $Ad^{(2)}=\mathbf{0}$，知

$$Bd_B^{(2)}+b_jp_j=\mathbf{0}.\tag{3}$$

由(2)式及(3)式得到

$$\frac{1}{a_j}Bd_B^{(1)}=\frac{1}{b_j}Bd_B^{(2)}.$$

两端左乘 B^{-1}，则有

$$d_B^{(2)}=\frac{b_j}{a_j}d_B^{(1)}.$$

代入方向 $d^{(2)}$，从而得到

$$d^{(2)}=\frac{b_j}{a_j}d^{(1)},\quad \text{其中 } a_j,b_j>0,$$

即 $d^{(1)}$，$d^{(2)}$ 是同向非零向量，因此方向 d 不能表示成两个不同方向的正线性组合，d 是可行域的极方向.

7. 用关于变量有界情形的单纯形方法解下列问题：

(1) $\min\ 3x_1-x_2$

s.t. $x_1+x_2\leqslant 9$，

$0\leqslant x_j\leqslant 6$，$j=1,2$.

(2) $\max\ -x_1-3x_3$

s.t. $2x_1-2x_2+x_3=6$，

$x_1+2x_2+x_3+x_4=10$，

$0\leqslant x_1\leqslant 4$，

$0\leqslant x_2\leqslant 4$，

$0\leqslant x_3\leqslant 4$，

$0\leqslant x_4\leqslant 12$.

(3) $\min\ x_1+2x_2+3x_3-x_4$

s.t. $x_1-x_2+x_3-2x_4\leqslant 6$，

$2x_1+x_2-x_3\geqslant 2$，

$-x_1+x_2-x_3+x_4\leqslant 8$，

$0\leqslant x_1\leqslant 3$，

$1\leqslant x_2\leqslant 4$，

(4) $\max\ 4x_1+6x_2$

s.t. $2x_1+x_2\leqslant 4$，

$3x_1-x_2\leqslant 9$，

$0\leqslant x_1\leqslant 4$，

$0\leqslant x_2\leqslant 3$.

$0 \leqslant x_3 \leqslant 10$,

$2 \leqslant x_4 \leqslant 5$.

解 (1) 引进松弛变量 x_3，写成下列形式：

$$\begin{aligned} \min \quad & 3x_1 - x_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 + x_2 + x_3 = 9, \\ & 0 \leqslant x_i \leqslant 6, \quad i = 1,2, \quad x_3 \geqslant 0. \end{aligned}$$

取初始基本可行解：

$$x_B = x_3 = 9, \quad x_{N_1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \text{目标函数值 } f_0 = 0.$$

单纯形表如下：

	x_1	x_2	x_3	
x_3	1	1	1	9
	−3	1	0	0
	l	l		

取下界的非基变量下标集 $R_1 = \{1,2\}$，取上界的非基变量下标集 $R_2 = \varnothing$，已用符号 l 标注在表下.

选择 x_2 作为进基变量，令 $x_2 = 0 + \Delta_2 = \Delta_2$，计算 Δ_2：

$$\beta_1 = \frac{9-0}{1} = 9, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 6 - 0 = 6,$$

令 $\Delta_2 = \min\{9, \infty, 6\} = 6$，因此，$x_2 = 6$，取值上界，仍为非基变量，基变量是 x_3，取值改变：

$$x_B = x_3 = b - y_2\Delta_2 = 9 - 6 = 3, \quad f = f_0 - (z_2 - c_2)x_2 = 0 - 1 \times 6 = -6.$$

修改单纯形表如下：

	x_1	x_2	x_3	
x_3	1	1	1	9
	−3	1	0	0
	l	l		

取下界的非基变量下标集 $R_1 = \{1,2\}$，取上界的非基变量下标集 $R_2 = \varnothing$，已用符号 l 标注在表下.

选择 x_2 作为进基变量，令 $x_2 = 0 + \Delta_2 = \Delta_2$，计算 Δ_2：

$$\beta_1 = \frac{9-0}{1} = 9, \quad \beta_2 = \infty, \quad \beta_3 = 6 - 0 = 6,$$

令 $\Delta_2 = \min\{9, \infty, 6\} = 6$，因此，$x_2 = 6$，取值上界，仍为非基变量，基变量是 x_3，取值改变：

$$x_B = x_3 = b - y_2\Delta_2 = 9 - 6 = 3, \quad f = f_0 - (z_2 - c_2)x_2 = 0 - 1 \times 6 = -6.$$

修改单纯形表如下：

	x_1	x_2	x_3	
x_3	1	1	1	3
	−3	1	0	−6
	l	u		

已经达到最优，最优解 $\bar{x} = (0,6,3)$，最优值 $f_{\min} = -6$.

(2) 用两阶段法求解,先求一个基本可行解,为此解下列线性规划:

$$
\begin{aligned}
\min\quad & y \\
\text{s.t.}\quad & 2x_1-2x_2+x_3+y=6, \\
& x_1+2x_2+x_3+x_4=10, \\
& 0\leqslant x_1\leqslant 4, \\
& 0\leqslant x_2\leqslant 4, \\
& 0\leqslant x_3\leqslant 4, \\
& 0\leqslant x_4\leqslant 12, \\
& y\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

取初始基本可行解:

$$
x_B=\begin{bmatrix} y \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix},\quad x_{N_1}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.
$$

单纯形表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	
y	2	-2	1	0	1	6
x_4	1	2	1	1	0	10
	2	-2	1	0	0	6
	l	l	l			

选择变量 x_1,令 $x_1=0+\Delta_1=\Delta_1$,下面计算增量 Δ_1:

$$
\beta_1=\min\left\{\frac{6-0}{2},\frac{10-0}{1}\right\}=3,\quad \beta_2=\infty,\quad \beta_3=4.
$$

令 $\Delta_1=\min\{3,\infty,4\}=3$,因此 $x_1=3$. 未达 x_1 的上界,作为进基变量.

$$
\begin{bmatrix} y \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 6 \\ 10 \end{bmatrix}-3\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 7 \end{bmatrix},\quad f=f_0-(z_1-c_1)x_1=6-2\times 3=0.
$$

y 离基,修改单纯形表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	y	
x_1	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	3
x_4	0	3	$\frac{1}{2}$	1	$-\frac{1}{2}$	7
	0	0	0	0	-1	0
		l	l		l	

一阶段问题已经达到最优,修改单纯形表,进行第二阶段:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	-1	$\frac{1}{2}$	0	3
x_4	0	3	$\frac{1}{2}$	1	7
	0	1	$\frac{5}{2}$	0	-3
		l	l		

已经达到最优，最优解$\bar{x}=(3,0,0,7)$，最优值 $f_{\max}=-3$.

(3) 用两阶段法求解. 先解下列线性规划，求一个基本可行解：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & y \\
\text{s.t.}\quad & x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5=6, \\
& 2x_1+x_2-x_3-x_6+y=2, \\
& -x_1+x_2-x_3+x_4+x_7=8, \\
& 0\leqslant x_1\leqslant 3, \\
& 1\leqslant x_2\leqslant 4, \\
& 0\leqslant x_3\leqslant 10, \\
& 2\leqslant x_4\leqslant 5, \\
& x_5,x_6,x_7,y\geqslant 0.
\end{aligned}
$$

取初始基本可行解：

$$
x_{N_1}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_6\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\0\\2\\0\end{bmatrix},\quad x_B=\begin{bmatrix}x_5\\y\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\1\\5\end{bmatrix},\quad f=1.
$$

单纯形表如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y	
x_5	1	−1	1	−2	1	0	0	0	11
y	2	1	−1	0	0	−1	0	1	1
x_7	−1	1	−1	1	0	0	1	0	5
	2	1	−1	0	0	−1	0	0	1
	l	l	l	l		l			

选择变量 x_1，令 $x_1=\Delta_1$，计算 Δ_1 的取值：

$$
\beta_1=\min\left\{\frac{11-0}{1},\frac{1-0}{2}\right\}=\frac{1}{2},\quad \beta_2=\infty,\quad \beta_3=3-0=3.
$$

令 $\Delta_1=\min\left\{\frac{1}{2},\infty,3\right\}=\frac{1}{2}$. 修改右端列，取 $x_1=\frac{1}{2}$，原来基变量的取值为

$$
\begin{bmatrix}x_5\\y\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11\\1\\5\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{21}{2}\\0\\\frac{11}{2}\end{bmatrix},
$$

y 离基，x_1 进基，新基下目标值 $f=f_0-(z_1-c_1)\Delta_1=1-2\times\frac{1}{2}=0$. 修改后单纯形表如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	y	
x_5	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	−2	1	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{21}{2}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
x_7	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{11}{2}$
	0	0	0	0	0	0	0	−1	0
		l	l	l		l		l	

得到原来线性规划的一个基本可行解.

下面进行第二阶段,从求得的基本可行解出发,求最优解.为此,先修改上面单纯形表.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{21}{2}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_7	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{11}{2}$
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
		l	l	l		l		

选择变量 x_4,令 $x_4=2+\Delta_4$,下面求 Δ_4:

$$\beta_1=\frac{11}{2}-0=\frac{11}{2},\quad \beta_2=\infty,\quad \beta_3=5-2=3.$$

令 $\Delta_4=\min\left\{\frac{11}{2},\infty,3\right\}=3$,$x_4$取上界值.

$$\begin{bmatrix}x_5\\x_1\\x_7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{21}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{11}{2}\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}-2\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{33}{2}\\\frac{1}{2}\\\frac{5}{2}\end{bmatrix},\quad f=f_0-(z_4-c_4)\Delta_4=\frac{1}{2}-1\times3=-\frac{5}{2}.$$

修改单纯形表右端列,得下表:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	0	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{2}$	-2	1	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{33}{2}$
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_7	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	1	$\frac{5}{2}$
	0	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{7}{2}$	1	0	$-\frac{1}{2}$	0	$-\frac{5}{2}$
		l	l	u		l		

求得最优解 $\bar{x}=\left(\frac{1}{2},1,0,5,\frac{33}{2},0,\frac{5}{2}\right)$,最优值 $f_{\min}=-\frac{5}{2}$.

(4) 引入松弛变量 x_3, x_4,化成

$$\begin{aligned}\max\quad & 4x_1+6x_2\\ \text{s.t.}\quad & 2x_1+x_2+x_3=4,\\ & 3x_1-x_2+x_4=9,\\ & 0\leqslant x_1\leqslant 4,\\ & 0\leqslant x_2\leqslant 3,\\ & x_3,x_4\geqslant 0.\end{aligned}$$

$$x_B=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\9\end{bmatrix},\quad x_{N_1}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.$$

目标函数值 $f_0=0$.列表如下:

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	1	1	0	4
x_4	3	-1	0	1	9
	-4	-6	0	0	0
	l	l			

选择 x_2，令 $x_2=0+\Delta_2$. 下面求 Δ_2：

$$\beta_1=\frac{4-0}{1}=4,\quad \beta_2=\infty,\quad \beta_3=3-0=3,\quad \Delta_2=\min\{4,\infty,3\}=3.$$

非基变量 x_2 改为取值上界，令 $x_2=3$. 仍取 x_3,x_4 作为基变量. 修改右端列：

$$\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\9\end{bmatrix}-3\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\12\end{bmatrix},\quad f=f_0-(z_2-c_2)\Delta_2=18.$$

得下列单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_3	2	1	1	0	1
x_4	3	-1	0	1	12
	-4	-6	0	0	18
	l	u			

还未达到最优.

选择变量 x_1，令 $x_1=0+\Delta_1$ 计算 Δ_1：

$$\beta_1=\min\left\{\frac{1-0}{2},\frac{12-0}{3}\right\}=\frac{1}{2},\quad \beta_2=\infty,\quad \beta_3=4-0=4.$$

令 $\Delta_1=\min\left\{\frac{1}{2},\infty,4\right\}=\frac{1}{2}$. 取

$$x_1=\frac{1}{2},\quad \begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\12\end{bmatrix}-\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\frac{21}{2}\end{bmatrix},\quad f=f_0-(z_1-c_1)\Delta_1=18-(-4)\times\frac{1}{2}=20.$$

x_1 进基，x_3 离基取下界. 经迭代得到新单纯形表：

	x_1	x_2	x_3	x_4	
x_1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$
x_4	0	$-\frac{5}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1	$\frac{21}{2}$
	0	-4	2	0	20
		u	l		

已经达到最优，最优解 $\bar{x}=\left(\frac{1}{2},3,0,\frac{21}{2}\right)$，最优值 $f_{\max}=20$.

8. 用分解算法解下列线性规划问题：

(1)
$$\begin{aligned}\max\quad & x_1+3x_2-x_3+x_4\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 8,\\ & x_1+x_2\leqslant 6,\\ & x_3+2x_4\leqslant 10,\\ & -x_3+x_4\leqslant 4,\\ & x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.\end{aligned}$$

(2)
$$\begin{aligned}\max\quad & 5x_1-2x_3+x_4\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_3+x_4\leqslant 30,\\ & x_1+x_2\leqslant 12,\\ & 2x_1-x_2\leqslant 9,\\ & -x_3+x_4\leqslant 2,\\ & x_3+2x_4\leqslant 10,\\ & x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.\end{aligned}$$

(3) $\max\ x_1+2x_2+x_3$

s. t. $x_1+x_2+x_3\leqslant 12$,

$-x_1+x_2\leqslant 2$,

$-x_1+2x_2\leqslant 8$,

$x_3\leqslant 3$,

$x_1,x_2,x_3\geqslant 0$.

(4) $\min\ -2x_1+4x_2-x_3+x_4$

s. t. $x_1+2x_2+4x_3+x_4\leqslant 20$,

$-x_1+x_2\leqslant 3$,

$x_1\leqslant 4$,

$x_3-5x_4\leqslant 5$,

$-x_3+2x_4\leqslant 2$,

$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4$.

(5) $\min\ -x_1-8x_2-5x_3-6x_4$

s. t. $x_1+4x_2+5x_3+2x_4\leqslant 7$,

$2x_1+3x_2\leqslant 6$,

$5x_1+x_2\leqslant 5$,

$3x_3+4x_4\geqslant 12$,

$x_3\leqslant 4$,

$x_4\leqslant 3$,

$x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4$.

解 (1) 把线性规划写为下列形式：

$$\begin{aligned}\max\quad & \boldsymbol{cx}\\ \text{s. t.}\quad & \boldsymbol{Ax}\leqslant \boldsymbol{b},\\ & \boldsymbol{x}\in S,\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,x_3,x_4)^{\mathrm T}$，$\boldsymbol{c}=(1,3,-1,1)$，$\boldsymbol{A}=(1,1,1,1)$，$\boldsymbol{b}=8$，

$$S=\left\{\boldsymbol{x}\ \middle|\ \begin{array}{l}x_1+x_2\leqslant 6\\ x_3+2x_4\leqslant 10\\ -x_3+x_4\leqslant 4\\ x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4\end{array}\right\}.$$

引入松弛变量 $\boldsymbol{v}\geqslant\boldsymbol{0}$. 设集合 S 有 t 个极点，有 l 个极方向，则每个 $\boldsymbol{x}\in S$ 可表示为

$$\boldsymbol{x}=\sum_{j=1}^{t}\lambda_j\boldsymbol{x}^{(j)}+\sum_{j=1}^{l}\mu_j\boldsymbol{d}^{(j)},$$

$$\sum_{j=1}^{t}\lambda_j=1,$$

$$\lambda_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,t,$$
$$\mu_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,l.$$

主规划为

$$\begin{aligned}\max\quad & \sum_{j=1}^{t}(\boldsymbol{cx}^{(j)})\lambda_j+\sum_{j=1}^{l}(\boldsymbol{cd}^{(j)})\mu_j\\ \text{s. t.}\quad & \sum_{j=1}^{t}(\boldsymbol{Ax}^{(j)})\lambda_j+\sum_{j=1}^{l}(\boldsymbol{Ad}^{(j)})\mu_j+\boldsymbol{v}=\boldsymbol{b},\\ & \sum_{j=1}^{t}\lambda_j=1,\\ & \lambda_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,t,\\ & \mu_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,l,\quad \boldsymbol{v}\geqslant 0.\end{aligned}$$

下面用修正单纯形法解主规划.

取集 S 一个极点 $x^{(1)}=(0,0,0,0)^T$，将其对应的变量 λ_1 和松弛变量 v 作为初始基变量，初始基

$$B=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\quad B^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}.$$

在主规划中，基变量的目标系数 $c_B=(0,cx^{(1)})=(0,0)$。在基 B 下，单纯形乘子 $(w,\alpha)=c_BB^{-1}=(0,0)$，约束右端 $\bar{b}=\begin{bmatrix}8\\1\end{bmatrix}$，目标函数值 $f=c_B\bar{b}=0$。修正单纯形法中，初表如下：

	0	0	0
v	1	0	8
λ_1	0	1	1

第 1 次迭代：

解子规划，求最小判别数：

$$\begin{aligned}\min\quad & (wA-c)x+\alpha\\ \text{s.t.}\quad & x\in S.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\min\quad & -x_1-3x_2+x_3-x_4\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2\leqslant 6\\ & x_3+2x_4\leqslant 10,\\ & -x_3+x_4\leqslant 4,\\ & x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3,4.\end{aligned}$$

化为标准形式：

$$\begin{aligned}\min\quad & -x_1-3x_2+x_3-x_4\\ \text{s.t.}\quad & x_1+x_2+x_5=6,\\ & x_3+2x_4+x_6=10,\\ & -x_3+x_4+x_7=4,\\ & x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,7.\end{aligned}$$

用单纯形法求解如下：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_5	1	1	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	1	2	0	1	0	10
x_7	0	0	−1	1	0	0	1	4
	1	3	−1	1	0	0	0	0
x_2	1	1	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	1	2	0	1	0	10
x_7	0	0	−1	1	0	0	1	4
	−2	0	−1	1	−3	0	0	−18
x_2	1	1	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	3	0	0	1	−2	2
x_4	0	0	−1	1	0	0	1	4
	−2	0	0	0	−3	0	−1	−22

主规划的最小判别数 $z_2-c_2=-22$，集合 S 的一个极点 $\boldsymbol{x}^{(2)}=(0,6,0,4)^{\mathrm{T}}$，计算主列：

$$\boldsymbol{y}_2=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(2)}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix}.$$

作主元消去运算：

				λ_2
	0	0	0	-22
v	1	0	8	10
λ_1	0	1	1	1

	$\frac{11}{5}$	0	$\frac{88}{5}$
λ_2	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{4}{5}$
λ_1	$-\frac{1}{10}$	1	$\frac{1}{5}$

第 2 次迭代：

先解子规划，求最小判别数：

由第 1 次迭代结果知，在新基下单纯形乘子 $w=\frac{11}{5}$，$\alpha=0$，$w\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c}=\left(\frac{6}{5},-\frac{4}{5},\frac{16}{5},\frac{6}{5}\right)$。

$$\begin{aligned}\min\quad&(w\boldsymbol{A}-\boldsymbol{c})\boldsymbol{x}+\alpha\\ \text{s. t.}\quad&\boldsymbol{x}\in S.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\min\quad&\frac{6}{5}x_1-\frac{4}{5}x_2+\frac{16}{5}x_3+\frac{6}{5}x_4\\ \text{s. t.}\quad&\boldsymbol{x}\in S.\end{aligned}$$

修改第 1 次迭代中子规划最优表最后一行，然后用单纯形法求子规划最优解：

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	1	1	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	3	0	0	1	-2	2
x_4	0	0	-1	1	0	0	1	4
	-2	0	$-\frac{22}{5}$	0	$-\frac{4}{5}$	0	$\frac{6}{5}$	0
x_2	1	1	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	1	2	0	1	0	10
x_7	0	0	-1	1	0	0	1	4
	-2	0	$-\frac{16}{5}$	$-\frac{6}{5}$	$-\frac{4}{5}$	0	0	$-\frac{24}{5}$

得到集合 S 的一个极点 $\boldsymbol{x}^{(3)}=(0,6,0,0)$，现行主规划最小判别数 $z_3-c_3=-\frac{24}{5}$，λ_3 进基.

$$\boldsymbol{y}_3=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}^{(3)}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&0\\-\frac{1}{10}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}\end{bmatrix}.$$

得到集合 S 的一个极点 $x^{(3)}=(0,6,0,0)$,现行主规划最小判别数 $z_3-c_3=-\frac{24}{5}$,λ_3 进基.

$$y_3=B^{-1}\begin{bmatrix}Ax^{(3)}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{10}&0\\-\frac{1}{10}&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{5}\\\frac{2}{5}\end{bmatrix}.$$

作主元消去运算:

				λ_3
	$\frac{11}{5}$	0	$\frac{88}{5}$	$-\frac{24}{5}$
λ_2	$\frac{1}{10}$	0	$\frac{4}{5}$	$\frac{3}{5}$
λ_1	$-\frac{1}{10}$	1	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$

	1	12	20
λ_2	$\frac{1}{4}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$
λ_3	$-\frac{1}{4}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$

第 3 次迭代:

解子规划求最小判别数:

$$wA-c=1\cdot(1,1,1,1)-(1,3,-1,1)=(0,-2,2,0).$$

$$\begin{aligned}&\min\quad (wA-c)x+\alpha\\&\text{s.t.}\quad x\in S.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\min\quad -2x_2+2x_3+12\\&\text{s.t.}\quad x\in S.\end{aligned}$$

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	
x_2	1	1	0	0	1	0	0	6
x_6	0	0	1	2	0	1	0	10
x_7	0	0	-1	1	0	0	1	4
	-2	0	-2	0	-2	0	0	0

子规划的最小值为 0,即主规划在现行基下最小判别数为 0,因此达到最优. 最优解是

$$\bar{x}=\lambda_2x^{(2)}+\lambda_3x^{(3)}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\6\\0\\4\end{bmatrix}+\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\6\\0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\6\\0\\2\end{bmatrix}.$$

最优值 $f_{\max}=20$.

(2) 第一个约束记作 $A_1x_1+A_2x_2\leqslant b$,其中 $A_1=(1,1)$,$A_2=(1,1)$,$b=30$. 相应地,记 $c=(c_1,c_2)$,$c_1=(5,0)$,$c_2=(-2,1)$,$S_1=\left\{x_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}\middle|\begin{matrix}x_1+x_2\leqslant12\\2x_1-x_2\leqslant9\\x_1,x_2\geqslant0\end{matrix}\right\}$,$S_2=\left\{x_2=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}\middle|\begin{matrix}-x_3+x_4\leqslant2\\x_3+2x_4\leqslant10\\x_3,x_4\geqslant0\end{matrix}\right\}$.

线性规划记为:

$$\begin{aligned}&\max\quad c_1x_1+c_2x_2\\&\text{s.t.}\quad A_1x_1+A_2x_2\leqslant b,\\&\qquad x_1\in S_1,\\&\qquad x_2\in S_2.\end{aligned}$$

由于 S_1,S_2 均是有界集,不存在方向,设 S_1 的极点为 $x_1^{(j)}$,$j=1,2,\cdots,t_1$,S_2 的极点为 $x_2^{(j)}$,

$j=1,2,\cdots,t_2$，引入松弛变量 $v\geqslant 0$.

主规划如下：

$$
\begin{aligned}
\max\quad & \sum_{j=1}^{t_1}(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x}_1^{(j)})\lambda_{1j}+\sum_{j=1}^{t_2}(\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}_2^{(j)})\lambda_{2j} \\
\text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{t_1}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1^{(j)})\lambda_{1j}+\sum_{j=1}^{t_2}(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2^{(j)})\lambda_{2j}+v=b, \\
& \sum_{j=1}^{t_1}\lambda_{1j} \qquad\qquad\qquad =1, \\
& \qquad\qquad \sum_{j=1}^{t_2}\lambda_{2j} \qquad =1, \\
& \lambda_{1j}\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,t_1, \\
& \lambda_{2j}\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,t_2.
\end{aligned}
$$

分别取 S_1 和 S_2 的极点

$$
\boldsymbol{x}^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}.
$$

初始基变量 $v,\lambda_{11},\lambda_{21}$，初始基矩阵 $\boldsymbol{B}$ 为三阶单位矩阵. 单纯形乘子和约束右端向量分别是

$$
(\boldsymbol{w},\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{c}_B\boldsymbol{B}^{-1}=(0,0,0)\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=(0,0,0),\quad \bar{\boldsymbol{b}}=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}b\\1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}30\\1\\1\end{bmatrix}.
$$

用修正单纯形方法解主规划，初表如下：

	0	0	0	0
v	1	0	0	30
λ_{11}	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	1	1

第 1 次迭代：

为确定进基变量，分别求解下列两个子规划. 先解第一个子规划：

$$
\begin{aligned}
\min\quad & (\boldsymbol{w}\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{x}_1+\alpha_1 \\
\text{s.t.}\quad & \boldsymbol{x}_1\in S_1.
\end{aligned}\tag{1}
$$

即

$$
\begin{aligned}
\min\quad & -5x_1 \\
\text{s.t.}\quad & x_1+x_2\leqslant 12, \\
& 2x_1-x_2\leqslant 9,
\end{aligned}
$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0.$$

子规划的最优解和最优值分别是 $\boldsymbol{x}_1^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}, Z_{1,\min}=-35.$

再解第二个子规划：

$$\begin{aligned} \min \quad & (\boldsymbol{w}\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{c}_2)\boldsymbol{x}_2+\alpha_2 \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}_2 \in S_2. \end{aligned} \tag{2}$$

即

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_3-x_4 \\ \text{s.t.} \quad & -x_3+x_4 \leqslant 2, \\ & x_3+2x_4 \leqslant 10, \\ & x_3, x_4 \geqslant 0. \end{aligned}$$

子规划最优解和最优值分别是 $\boldsymbol{x}_2^{(2)}=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}, Z_{2,\min}=-2.$

对应 λ_{12}的判别数 $z_{12}-c_{12}=-35$，最小，因此 λ_{12} 作为进基变量. 主列是

$$\boldsymbol{y}_1^{(2)}=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1^{(2)}\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}12\\1\\0\end{bmatrix}.$$

下面作主元消去运算：

					λ_{12}
	0	0	0	0	−35
v	1	0	0	30	12
λ_{11}	0	1	0	1	1
λ_{21}	0	0	1	1	0

	0	35	0	35
v	1	−12	0	18
λ_{12}	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	1	1

第 2 次迭代：

先解子规划确定进基变量.

解子规划(1)：

$$\begin{aligned} \min \quad & -5x_1+35 \\ \text{s.t.} \quad & x_1+x_2 \leqslant 12, \\ & 2x_1-x_2 \leqslant 9, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解和最优值分别是 $\boldsymbol{x}_1^{(3)}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\5\end{bmatrix}, Z_{1,\min}=0.$

解子规划(2)：

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_3 - x_4 \\ \text{s.t.} \quad & -x_3 + x_4 \leqslant 2, \\ & x_3 + 2x_4 \leqslant 10, \\ & x_3, x_4 \geqslant 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解和最优值分别是 $x_2^{(3)} = \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$，$Z_{2,\min} = -2$.

λ_{23}进基，计算主列：

$$y_2^{(3)} = B^{-1} \begin{bmatrix} A_2 x_2^{(3)} \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -12 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

					λ_{23}
	0	35	0	35	-2
v	1	-12	0	18	2
λ_{12}	0	1	0	1	0
λ_{21}	0	0	1	1	1

	0	35	2	37
v	1	-12	-2	16
λ_{12}	0	1	0	1
λ_{23}	0	0	1	1

第 3 次迭代：

子规划(1)计算结果同前.

子规划(2)，即

$$\begin{aligned} \min \quad & 2x_3 - x_4 + 2 \\ \text{s.t.} \quad & -x_3 + x_4 \leqslant 2, \\ & x_3 + 2x_4 \leqslant 10, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

子规划(2)的最优值 $Z_{3,\min} = 0$.

经两次迭代，在现行基下，对应各变量的判别数均大于或等于 0，因此达到最优. 最优解

$$\bar{x} = \begin{bmatrix} \lambda_{12} x_1^{(2)} \\ \lambda_{23} x_2^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad f_{\max} = 37.$$

(3) 将线性规划记为

$$\begin{aligned}\max\quad & cx\\ \text{s. t.}\quad & Ax \leqslant 12,\\ & x \in S,\end{aligned}$$

其中 $x=(x_1,x_2,x_3)^T$，$c=(1,2,1)$，$A=(1,1,1)$，

$$S=\left\{x\left|\begin{aligned} -x_1+x_2 &\leqslant 2\\ -x_1+2x_2 &\leqslant 8\\ x_3 &\leqslant 3\\ x_1,x_2,x_3 &\geqslant 0\end{aligned}\right.\right\}.$$

设 S 有 t 个极点 $x^{(j)}$，$j=1,2,\cdots,t$，有 l 个极方向 $d^{(j)}$，$j=1,2,\cdots,l$。引入松弛变量 $v\geqslant 0$。主规划如下：

$$\begin{aligned}\max\quad & \sum_{j=1}^{t}(cx^{(j)})\lambda_j+\sum_{j=1}^{l}(cd^{(j)})\mu_j\\ \text{s. t.}\quad & \sum_{j=1}^{t}(Ax^{(j)})\lambda_j+\sum_{j=1}^{l}(Ad^{(j)})\mu_j+v=12,\\ & \sum_{j=1}^{t}\lambda_j=1,\\ & \lambda_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,t,\\ & \mu_j\geqslant 0,\quad j=1,2,\cdots,l,\quad v\geqslant 0.\end{aligned}$$

下面用修正单纯形方法解主规划：

取集合 S 的一个极点 $x^{(1)}=(0,0,0)^T$，初始基变量为 v 和 λ_1，初始基 B 是二阶单位矩阵。单纯形乘子 $(w,\alpha)=c_BB^{-1}=(0,0)$，约束右端 $b=\begin{bmatrix}12\\1\end{bmatrix}$ 现行基本可行解下的目标函数值 $f=0$。初表为

	0	0	0
v	1	0	12
λ_1	0	1	1

第 1 次迭代：

解子规划，求最小判别数：

$$\begin{aligned}\min\quad & (wA-c)x+\alpha\\ \text{s. t.}\quad & x\in S,\end{aligned}$$

其中 $wA-c=(-1,-2,-1)$，上式即

$$\begin{aligned}\min\quad & -x_1-2x_2-x_3\\ \text{s. t.}\quad & -x_1+x_2\leqslant 2,\\ & -x_1+2x_2\leqslant 8,\\ & x_3\leqslant 3,\\ & x_j\geqslant 0,\quad j=1,2,3.\end{aligned}$$

用单纯形方法求解，求得集合 S 的一个极方向，$d^{(1)}=(2,1,0)^T$。

主规划中，对应 μ_1 的判别数 $(wA-c)d^{(1)}=-4$，μ_1 进基，主列

$$y_1=B^{-1}\begin{bmatrix}Ad^{(1)}\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\\0\end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下：

第 2 次迭代:

先解子规划,求判别数:

$$wA-c=\frac{4}{3}(1,1,1)-(1,2,1)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right).$$

子规划为

$$\begin{aligned}\min\quad & \frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3\\ \text{s. t.}\quad & -x_1+x_2\leqslant 2,\\ & -x_1+2x_2\leqslant 8,\\ & x_3\leqslant 3,\\ & x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{aligned}$$

用单纯形方法求得子规划最优解 $x^{(2)}=(4,6,0)^T$,最小值 $z=-\frac{8}{3}$. λ_2 为进基变量,主列

$$y_2=B^{-1}\begin{bmatrix}Ax^{(2)}\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}10\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{10}{3}\\1\end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下:

				λ_2
	$\frac{4}{3}$	0	16	$-\frac{8}{3}$
μ_1	$\frac{1}{3}$	0	4	$\frac{10}{3}$
λ_1	0	1	1	1

	$\frac{4}{3}$	$\frac{8}{3}$	$\frac{56}{3}$
μ_1	$\frac{1}{3}$	$-\frac{10}{3}$	$\frac{2}{3}$
λ_2	0	1	1

第 3 次迭代:

$wA-c=\frac{4}{3}(1,1,1)-(1,2,1)=\left(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$, $w=\frac{4}{3}$, $\alpha=\frac{8}{3}$. 子规划如下:

$$\begin{aligned}\min\quad & \frac{1}{3}x_1-\frac{2}{3}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{8}{3}\\ \text{s. t.}\quad & -x_1+x_2\leqslant 2,\\ & -x_1+2x_2\leqslant 8,\\ & x_3\leqslant 3,\\ & x_1,x_2,x_3\geqslant 0.\end{aligned}$$

子规划最优解 $x^{(3)}=(4,6,0)^T$,最优值 $z=0$. 结果表明,主规划已达最优解. 原问题的最优解为

$$\bar{x}=\lambda_2x^{(2)}+\mu_1d^{(1)}=1\cdot\begin{bmatrix}4\\6\\0\end{bmatrix}+\frac{2}{3}\cdot\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{16}{3}\\\frac{20}{3}\\0\end{bmatrix},$$

最优值 $f_{\max}=\frac{56}{3}$.

(4) 将线性规划写成下列形式：

$$\begin{aligned}\min\quad & \boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}_2\\ \text{s. t.}\quad & \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2\leqslant 20,\\ & \boldsymbol{x}_1\in S_1,\\ & \boldsymbol{x}_2\in S_2,\end{aligned}$$

其中，$\boldsymbol{x}_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{x}_2=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{c}_1=(-2,4)$，$\boldsymbol{c}_2=(-1,1)$，$\boldsymbol{A}_1=(1,2)$，$\boldsymbol{A}_2=(4,1)$。

$$S_1=\left\{\boldsymbol{x}_1\left|\begin{aligned}-x_1+x_2&\leqslant 3\\ x_1\qquad&\leqslant 4\\ x_1,x_2&\geqslant 0\end{aligned}\right.\right\},\quad S_2=\left\{\boldsymbol{x}_2\left|\begin{aligned}x_3-5x_4&\leqslant 5\\ -x_3+2x_4&\leqslant 2\\ x_3,x_4&\geqslant 0\end{aligned}\right.\right\}.$$

S_1 是有界集，设有 t_1 个极点 $\boldsymbol{x}_1^{(1)},\boldsymbol{x}_1^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}_1^{(t_1)}$。$S_2$ 是无界集，设有 t_2 个极点，有 l 个极方向。引入松弛变量 v。主规划如下：

$$\begin{aligned}\min\quad & \sum_{j=1}^{t_1}(\boldsymbol{c}_1\boldsymbol{x}_1^{(j)})\lambda_{1j}+\sum_{j=1}^{t_2}(\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{x}_2^{(j)})\lambda_{2j}+\sum_{j=1}^{l}(\boldsymbol{c}_2\boldsymbol{d}^{(j)})\mu_j\\ \text{s. t.}\quad & \sum_{j=1}^{t_1}(\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{x}_1^{(j)})\lambda_{1j}+\sum_{j=1}^{t_2}(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2^{(j)})\lambda_{2j}+\sum_{j=1}^{l}(\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{d}^{(j)})\mu_j+v=20,\\ & \sum_{j=1}^{t_1}\lambda_{1j}=1,\\ & \lambda_{1j}\geqslant 0,j=1,2,\cdots,t_1,\\ & \lambda_{2j}\geqslant 0,j=1,2,\cdots,t_2,\\ & \mu_j\geqslant 0,j=1,2,\cdots,l,v\geqslant 0.\end{aligned}$$

取 S_1 的极点 $\boldsymbol{x}_1^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，$S_2$ 的极点 $\boldsymbol{x}_2^{(1)}=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$。初始基变量取 $v,\lambda_{11},\lambda_{21}$。初始基 $\boldsymbol{B}$ 是三阶单位矩阵，单纯形乘子 $(w,\alpha_1,\alpha_2)=(0,0,0)$，目标值 $z=0$，初始单纯形表如下：

	0	0	0	0
v	1	0	0	20
λ_{11}	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	1	1

第 1 次迭代：

解下列子规划：

$$\begin{aligned}\max\quad & (w\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{x}_1+\alpha_1\\ \text{s. t.}\quad & \boldsymbol{x}_1\in \boldsymbol{S}_1.\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\max\quad & 2x_1-4x_2\\ \text{s. t.}\quad & -x_1+x_2\leqslant 3,\\ & x_1\qquad\leqslant 4,\\ & x_1,x_2\geqslant 0.\end{aligned}$$

子规划的最优解 $\boldsymbol{x}_1^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}$，最优值 $z_1=8$，即主规划中对应 λ_{12} 的判别数是 8。λ_{12} 进

基，主列

$$y_{12}=B^{-1}\begin{bmatrix}A_1x_1^{(2)}\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\1\\0\end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下：

					λ_{12}
	0	0	0	0	8
v	1	0	0	20	4
λ_{11}	0	1	0	1	1
λ_{21}	0	0	1	1	0

	0	−8	0	−8
v	1	−4	0	16
λ_{12}	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	1	1

第 2 次迭代：

解下列子规划：

$$\begin{aligned}\max\quad & (wA_1-c_1)x_1+\alpha_1\\ \text{s.t.}\quad & x_1\in S_1,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\max\quad & 2x_1-4x_2-8\\ \text{s.t.}\quad & -x_1+x_2\leqslant 3,\\ & x_1\leqslant 4,\\ & x_1,x_2\geqslant 0.\end{aligned}$$

子规划的最优解同第 1 次迭代，最优值 $z_1=0$. 现行解下，对应 λ_{1j} 的判别数均小于或等于 0.

再解子规划：

$$\begin{aligned}\max\quad & (wA_2-c_2)x_2+\alpha_2\\ \text{s.t.}\quad & x_2\in S_2,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\max\quad & x_3-x_4\\ \text{s.t.}\quad & x_3-5x_4\leqslant 5,\\ & -x_3+2x_4\leqslant 2,\\ & x_3,x_4\geqslant 0.\end{aligned}$$

用单纯形方法解子规划，可知无界. S_2 的一个极方向 $d^{(1)}=\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}$. 在主规划中，对应于 μ_1 的判别数 $(wA_2-c_2)d^{(1)}=(1,-1)\begin{bmatrix}5\\1\end{bmatrix}=4$，$\mu_1$ 进基，主列

$$y = B^{-1}\begin{bmatrix} A_2 d^{(1)} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 21 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下：

					μ_1
	0	-8	0	-8	4
v	1	-4	0	16	21
λ_{12}	0	1	0	1	0
λ_{21}	0	0	1	1	0

	$-\frac{4}{21}$	$-\frac{152}{21}$	0	$-\frac{232}{21}$
μ_1	$\frac{1}{21}$	$-\frac{4}{21}$	0	$\frac{16}{21}$
λ_{12}	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	1	1

第 3 次迭代：

解子规则

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_1 - c_1)x_1 + \alpha_1 \\ \text{s.t.} \quad & x_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{38}{21}x_1 - \frac{92}{21}x_2 - \frac{152}{21} \\ \text{s.t.} \quad & -x_1 + x_2 \leqslant 3, \\ & x_1 \leqslant 4, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解 $x_1^{(3)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix} = x_1^{(2)}$，最优值 $z_1 = 0$.

再解子规划：

$$\begin{aligned} \max \quad & (wA_2 - c_2)x_2 + \alpha_2 \\ \text{s.t.} \quad & x_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & \frac{5}{21}x_3 - \frac{25}{21}x_4 \\ \text{s.t.} \quad & x_3 - 5x_4 \leqslant 5, \\ & -x_3 + 2x_4 \leqslant 2, \\ & x_3, x_4 \geqslant 0. \end{aligned}$$

子规划最优解 $\boldsymbol{x}_2^{(2)}=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}$，最优值 $z_2=\frac{25}{21}$.

主规划中，对应 λ_{22} 的判别数为$\frac{25}{21}$，主列

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2^{(2)}\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{21} & -\frac{4}{21} & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}20\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{20}{21}\\0\\1\end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下：

					λ_{22}
	$-\frac{4}{21}$	$-\frac{152}{21}$	0	$-\frac{232}{21}$	$\frac{25}{21}$
μ_1	$\frac{1}{21}$	$-\frac{4}{21}$	0	$\frac{16}{21}$	$\frac{20}{21}$
λ_{12}	0	1	0	1	0
λ_{21}	0	0	1	1	1

	$-\frac{1}{4}$	-7	0	-12
λ_{22}	$\frac{1}{20}$	$-\frac{4}{20}$	0	$\frac{16}{20}$
λ_{12}	0	1	0	1
λ_{21}	$-\frac{1}{20}$	$\frac{4}{20}$	1	$\frac{4}{20}$

第 4 次迭代：

解子规划：

$$\begin{aligned}&\max \quad (\boldsymbol{w}\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{x}_1+\boldsymbol{\alpha}_1\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{x}_1\in S_1,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\max \quad & \frac{7}{4}x_1-\frac{9}{2}x_2-7\\ \text{s.t.}\quad & -x_1+x_2\leqslant 3,\\ & x_1\leqslant 4,\\ & x_1,x_2\geqslant 0.\end{aligned}$$

子规划最优解 $x_1^{(4)}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\end{bmatrix}=x_1^{(2)}$，最优值 $z_1=0$.

解子规划：

$$\begin{aligned}&\max \quad (\boldsymbol{w}\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{c}_2)\boldsymbol{x}_2+\boldsymbol{\alpha}_2\\&\text{s.t.}\quad \boldsymbol{x}_2\in S_2,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\max \quad & -\frac{5}{4}x_4\\ \text{s.t.}\quad & x_3-5x_4\leqslant 5,\\ & -x_3+2x_4\leqslant 2,\\ & x_3,x_4\geqslant 0.\end{aligned}$$

子规划最优解 $x_2^{(3)}=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5\\0\end{bmatrix}=x_2^{(2)}$，最优值 $z_2=0$。

主规划对应各变量的判别数均小于或等于 0，因此达到最优。主规划的最优解是 $\lambda_{12}=1$，$\lambda_{21}=\frac{4}{20}$，$\lambda_{22}=\frac{16}{20}$，其余变量均为非基变量，取值为 0。

原来问题最优解

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_{12}x_1^{(2)}\\ \lambda_{21}x_2^{(1)}+\lambda_{22}x_2^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\0\\4\\0\end{bmatrix},\quad \text{最优值 } f_{\min}=-12.$$

（5）线性规划写成下列形式：

$$\begin{aligned}\min\quad & c_1x_1+c_2x_2\\ \text{s.t.}\quad & A_1x_1+A_2x_2\leqslant b\\ & x_1\in S_1,\\ & x_2\in S_2,\end{aligned}$$

其中 $x_1=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}$，$x_2=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}$，$c_1=[-1,-8]$，$c_2=[-5,-6]$，$A_1=[1,4]$，$A_2=[5,2]$，$b=7$，

$$S_1=\left\{x_1\left|\begin{aligned}2x_1+3x_2&\leqslant 6\\5x_1+x_2&\leqslant 5\\x_1,x_2&\geqslant 0\end{aligned}\right.\right\},\quad S_2=\left\{x_2\left|\begin{aligned}3x_3+4x_4&\geqslant 12\\x_3\qquad&\leqslant 4\\x_4&\leqslant 3\\x_3,x_4&\geqslant 0\end{aligned}\right.\right\}.$$

S_1 和 S_2 均为有界集。设 S_1 有 t_1 个极点：$x_1^{(1)},x_1^{(2)},\cdots,x_1^{(t_1)}$，$S_2$ 有 t_2 个极点：$x_2^{(1)},x_2^{(2)},\cdots,x_2^{(t_2)}$. 主规划写成

$x_2^{(t_2)}$. 主规划写成

$$\begin{aligned}\min\quad & \sum_{j=1}^{t_1}(c_1x_1^{(j)})\lambda_{1j}+\sum_{j=1}^{t_2}(c_2x_2^{(j)})\lambda_{2j}\\ \text{s.t.}\quad & \sum_{j=1}^{t_1}(A_1x_1^{(j)})\lambda_{1j}+\sum_{j=1}^{t_2}(A_2x_2^{(j)})\lambda_{2j}+v=b,\\ & \sum_{j=1}^{t_1}\lambda_{1j}=1,\\ & \sum_{j=1}^{t_2}\lambda_{2j}=1,\\ & \lambda_{1j}\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,t_1,\\ & \lambda_{2j}\geqslant 0,\ j=1,2,\cdots,t_2,\ v\geqslant 0.\end{aligned}$$

下面用修正单纯形方法解主规划。

先给定初始基。取 S_1 的一个极点 $x_1^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，$S_2$ 的一个极点 $x_2^{(1)}=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$，初始基变量为 $v,\lambda_{11},\lambda_{21}$。构造初表：

	0	0	0	0
v	1	0	0	7
λ_{11}	0	1	0	1
λ_{21}	0	0	1	1

第 1 次迭代：

解子规划：

$$\begin{aligned} \max \quad & (w\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{x}_1 + \alpha_1 \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & x_1 + 8x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ & 5x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

子规划最优解 $\boldsymbol{x}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$，最优值 $z_1 = 16$. 可知主规划中对应 λ_{12} 的判别数为 16，λ_{12} 进基，主列

$$\boldsymbol{y} = \boldsymbol{B}^{-1} \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_1 \boldsymbol{x}_1^{(2)} \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下：

					λ_{12}
	0	0	0	0	16
v	1	0	0	7	8
λ_{11}	0	1	0	1	1
λ_{21}	0	0	1	1	0

	-2	0	0	-14
λ_{12}	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{7}{8}$
λ_{11}	$-\frac{1}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$
λ_{21}	0	0	1	1

第 2 次迭代：

解子规划

$$\begin{aligned} \max \quad & (w\boldsymbol{A}_1 - \boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{x}_1 + \alpha_1 \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}_1 \in S_1, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned} \max \quad & -x_1 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 3x_2 \leqslant 6, \\ & 5x_1 + x_2 \leqslant 5, \\ & x_1, x_2 \geqslant 0. \end{aligned}$$

子规划的最优解 $\boldsymbol{x}_1^{(2)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \boldsymbol{x}_1^{(1)}$，最优值 $z_1 = 0$. 即主规划中对应 λ_{1j} 的最大判别数为 0.

再解子规划

$$\begin{aligned} \max \quad & (w\boldsymbol{A}_2 - \boldsymbol{c}_2)\boldsymbol{x}_2 + \alpha_2 \\ \text{s.t.} \quad & \boldsymbol{x}_2 \in S_2, \end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\max\quad & -x_1\\ \text{s.t.}\quad & 2x_1+3x_2\leqslant 6,\\ & 5x_1\ +x_2\leqslant 5,\\ & x_1,x_2\geqslant 0.\end{aligned}$$

子规划的最优解 $\boldsymbol{x}_1^{(2)}=\begin{bmatrix}0\\2\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}_1^{(1)}$，最优值 $z_1=0$，即主规划中对应 λ_{1j} 的最大判别数为 0。

再解子规划

$$\begin{aligned}\max\quad & (\boldsymbol{w}\boldsymbol{A}_2-\boldsymbol{c}_2)\boldsymbol{x}_2+\alpha_2\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{x}_2\in S_2,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\max\quad & -5x_3+2x_4\\ \text{s.t.}\quad & 3x_3+4x_4\geqslant 12,\\ & x_3\qquad\ \leqslant 4,\\ & \qquad x_4\leqslant 3,\\ & x_3,x_4\geqslant 0.\end{aligned}$$

用两阶段法求得子规划最优解 $\boldsymbol{x}_2^{(2)}=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}$，最优值 $z_2=6$，即主规划中对应 λ_{22} 的判别数为 6，λ_{22} 进基，主列为

$$\boldsymbol{y}=\boldsymbol{B}^{-1}\begin{bmatrix}\boldsymbol{A}_2\boldsymbol{x}_2^{(2)}\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{8}&0&0\\-\frac{1}{8}&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{3}{4}\\-\frac{3}{4}\\1\end{bmatrix}.$$

用表格形式计算如下：

					λ_{22}
	-2	0	0	-14	6
λ_{12}	$\frac{1}{8}$	0	0	$\frac{7}{8}$	$\frac{3}{4}$
λ_{11}	$-\frac{1}{8}$	1	0	$\frac{1}{8}$	$-\frac{3}{4}$
λ_{21}	0	0	1	1	1

	-2	0	-6	-20
λ_{12}	$\frac{1}{8}$	0	$-\frac{3}{4}$	$\frac{1}{8}$
λ_{11}	$-\frac{1}{8}$	1	$\frac{3}{4}$	$\frac{7}{8}$
λ_{22}	0	0	1	1

第 3 次迭代：

解子规划：

$$\begin{aligned}\max\quad & (\boldsymbol{w}\boldsymbol{A}_1-\boldsymbol{c}_1)\boldsymbol{x}_1+\alpha_1\\ \text{s.t.}\quad & \boldsymbol{x}_1\in S_1,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}\max\quad & -5x_3+2x_4-6\\ \text{s. t.}\quad & 3x_3+4x_4\geqslant 12,\\ & x_3\leqslant 4,\\ & x_4\leqslant 3,\\ & x_3,x_4\geqslant 0.\end{aligned}$$

子规划的最优解 $\boldsymbol{x}_2^{(3)}=\begin{bmatrix}x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\3\end{bmatrix}=\boldsymbol{x}_2^{(2)}$，最优值 $z_2=0$.

主规划已达到最优，最优解是：$\lambda_{11}=\dfrac{7}{8}$，$\lambda_{12}=\dfrac{1}{8}$，$\lambda_{22}=1$，其余变量均为非基变量，取值为 0.

原来问题最优解：

$$\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{x}_1\\\boldsymbol{x}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda_{11}\boldsymbol{x}_1^{(1)}+\lambda_{12}\boldsymbol{x}_1^{(2)}\\\lambda_{22}\boldsymbol{x}_2^{(2)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\\dfrac{1}{4}\\0\\3\end{bmatrix},$$

最优值 $f_{\min}=-20$.