沈阳师范大学

硕士学位论文

一类在1<,2>范数下线性规划问题的反问题

姓名：刘洋

申请学位级别：硕士

专业：管理科学与工程

指导教师：唐恒永

20090318

一类在 l_2 范数下的线性规划问题的反问题

摘　要

反组合优化问题研究的是给定问题的一个可行解，修改目标函数中权参数变量使给定的可行解成为问题在新的权参数变量下的一个最优解，并且使总的修改费用最少．反组合优化问题不仅有很重要的理论研究价值，而且有很重要的实际应用价值，因此引起越来越多的人关注此类问题.

在 l_2 范数下线性规划问题的反问题是指给定问题的一个可行解，修改目标函数中的费用参数变量，使给定的可行解成为问题的一个最优解，并且在 l_2 范数下使修改的费用总和最小.

本文讨论的是一类在 l_2 范数下线性规划问题的反问题．该问题主要是通过求解原问题的对偶问题，并使它们的解满足互补松弛条件，得到反问题的费用约束条件，从而在 l_2 范数下求出反问题的最优解，并且应用一个二次规划的解法求解该反问题．该问题的解法是费用约束条件的等式右侧为零的一种特殊情况．根据二次规划的解法求解出反问题的最优解.

本文通过对线性规划问题的反问题的学习与研究，给出一类在 l_2 范数下线性规划问题的反问题的一般模型，并把它应用于求解反最短路问题，反最小截问题以及反指派问题.

关键词：反问题，l_2 范数，线性规划，二次规划

The Inverse Linear programming Problem Under The l_2 Norm

Abstract: Inverse combinatorial optimization problem is given a feasible solution of the problem, modify the objective function parameters in the right variables to make a given feasible solution into question the right parameters in the new variables under an optimal solution and bring the total cost of a minimum of modifications. Inverse optimization problem not only has very important theoretical research values, but also has very important practical application of values. More and more people are concerned about these issues.

Inverse liner problem under the l_2 norm refers to a given problem which is a feasible solution of the problem, modify the objective function in the variable cost parameters so that a given feasible solution is to become an optimal solution of the problem and the sum of the cost of modifications is the smallest.

This article discusses a class which is under the l_2 norm of the inverse linear problem of the planning problem. The main problem is to solve the dual of the original problem and satisfy the complementary slackness conditions in order to get the cost onstraints of the inverse problem.We derive the optimal solution of inverse problems under the l_2 norm and apply a quadratic programming method for solving the inverse problem. The solutions of the cost constraints are of the right side of the equation of a special case of zero. According to the method we solve quadratic programming problem of the inverse liner problem .

In this paper, we study and research the the inverse linear programming problem and give a general modelclass of the linear programming problem under the l_2 norm. We applie it to the most anti-short-circuit problem solving, anti-minimum cut-off problem as well as the anti-assignment problem.

Keywords: Inverse problem; Linear programming; l_2 norm; Quadratic programming

第一章 引 言

近几年，组合优化问题的反问题有很重要的理论研究价值和实际应用价值 [1], 它越来越广泛的应用于物流管理，油气管线铺设和通讯网络设计，交通管理以及地震预测等实际应用领域，倍受有关专家的关注．本文将对线性规划问题的反问题进行介绍和讨论.

一、 线性规划问题的反问题

设 P 表示一个组合最优化问题， S 表示问题 P 的一个可行解集， c 表示费用， x_0 表示一个可行解，即 $x_0 \in S$. 线性规划问题的反问题是指给定问题的一个可行解，修改目标函数中的费用参数变量 c 为 d, 使给定的可行解 x_0 成为问题 P 的一个最优解，并且使修改的总费用 $\|d-c\|_p$ 最少．这里 $\|.\|$ 表示向量 (赋权) 范数．线性规化问题的反问题通常考虑以下几种范数：

(1) l_1 范数： $\|a\|_{1,c^+,c^-} = \sum_{i=1}^n (c_i^+ max\{0,a_i\} + c_i^- max\{0,-a_i\}$

(2) l_∞ 范数： $\|a\|_{\infty,c^+,c^-} = max_{i=1,2,\ldots n}(c_i^+ max\{0,a_i\} + c_i^- max\{0,-a_i\}$

(3) l_2 范数： $\|a\|_{1,c} = \sum_{i=1}^n c_i|a_i|^2$

首先考虑 $Ahuja$ 和 $Orlin$[1,5] 中给出的一类线性规划问题的反问题．他们给出的线性规划问题为：

$$\begin{aligned} \min \quad & \sum_{j\in J} c_j x_j \\ \text{s.t} \quad & \sum_{j\in J} a_{ij} x_j \geq b_i \qquad \forall i \in I \\ & x_j \geq l_j \qquad \forall j \in J \\ & -x_j \geq -u_j \qquad \forall j \in J \end{aligned} \tag{1}$$

J 表示变量 x 的集合， I 表示受限制的变量 x 的集合． l_j 和 u_j 分别表示变量 x_j 的取值范围的下界和上界.

该问题的反问题是修改费用参数变量 c 为 d, 使给定可行解在费用参数变量 d 下成为原问题的一个最优解，并且使目标函数 $\|d-c\|_p$ 的值最小．文献 $[2,6]$ 分别在 l_1 范数和 l_∞ 范数下讨论问题 (1) 的反问题.

为了求解问题 (1), 首先考虑它的对偶问题：

$$\max \quad \sum_{i\in I} b_{ij}\pi_i + \sum_{j\in J} l_j\delta_j - \sum_{j\in J} u_j\phi_j$$

$$\text{s.t} \quad \sum_{i\in I} a_{ij}\pi_i + \delta_j - \phi_j = c_j \quad \forall j \in J \tag{2}$$

对于任意 $i \in I$, 都有 $\pi_i \geq 0$; 任意 $j \in J$, 都有 $\delta_j \geq 0$; 任意 $j \in J$, 都有 $\phi_j \geq 0$.

给定问题 (1) 的一个可行解 x_j^0, 其对偶问题的一个可行解 (π_i,δ_j,ϕ_j), 修改费用参数变量 c 为 d, 使它们分别成为原问题和对偶问题的最优解必须满足对偶互补松弛条件. 于是得到问题 (1) 的反问题的费用约束条件为:

$$\begin{array}{ll} \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i + \delta_j = d_j & j \in L \\ \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i - \phi_j = d_j & j \in U \\ \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i = d_j & j \in F \end{array} \tag{3}$$

对于任意的 $i \in I$, 都有 $\pi_i \geq 0$; 任意 $j \in L$, 都有 $\delta_j \geq 0$; 任意 $j \in U$, 都有 $\phi_j \geq 0$, 其中 $L = \{j \in J : x_j^0 = l_j\}, U = \{j \in J : x_j^0 = u_j\}, F = \{j \in J : l_j < x_j^0 < u_j\}, B = \{i \in I : \sum_{j\in J} a_{ij}x_j = b_i\}$.

根据文献 [2] 指出线性规划问题的反问题在 l_1 范数, l_∞ 范数下得到如下结论:

(1) 如果原问题是线性规划问题，那么它的反问题在 l_1 范数, l_∞ 范数下也是线性规划问题.

(2) 如果原问题是最短路问题，指派问题或最小截问题，那么它们的反问题在 l_1 范数, l_∞ 范数下可以由本身问题解决.

(3) 如果原问题是最小费用流问题，那么它的反问题在 l_1 范数和单位权下可以转化为单位最小费用流问题解决.

(4) 如果原问题是最小费用流问题，那么它的反问题在 l_∞ 范数下可以转化为单位圈问题解决.

二、选题背景及研究意义

根据文献 [3] 指出，反组合优化问题最早由 $Bitran$ 等人于 1981 年提出的，文献 [4] 首次研究反组合优化问题. 他们在文章中研究了反最短路问题. 随后有许多学者着手研究反组合优化问题. 例如：文献 [5] 研究派问题和反最小费用流问题，例如：文献 [6, 7] 研究了反最小截问题，文献 [8] 研究了反最短路问题，文献 [9] 研究了反最大流问题. 文献 [10, 11, 12, 13] 研究了最小支撑和瓶颈最小支撑树的反问题. 网络组合优化问题分别在 l_1 范数, l_∞ 范数以及 l_2 范数下研究线性规划问题的反问题.

反优化问题研究有一定的实际应用价值. 例如，在交通管理中，要缩短车辆通过某道路所需要的时间经常是通过加宽道路来实现的. 但往往只是在道路的某几处比较

狭窄 (而不是道路处处都需要加宽) , 而且这些地方道路两旁都有一些建筑或住户，要加宽道路必须对这些建筑和住户进行拆迁安置，此时改造此道路的费用主要是拆迁安置费，而不是加宽道路的工程费用，该费用可以看成是个固定值，而不是与道路的长度成正比．要求在满足一定条件下，总的费用的改变尽可能少．反优化问题在地球物理学的地震预测也有重要应用．为达此目的，在一个地质区域中设立许多观测站，用节点对应于观测点，节点间的邻接关系用弧来表示，从而形成了一个网络，一条弧的权是指地震波在相应的观测点间的传播时间．虽然可以给出它们的大致估计，但其无法确切得到．注意到在一般情况下，地震波是沿着最短路传播的．这样通过观察，可得到地震发生时不同的观测点处地震波的到达时间．因此问题是如何利用到达时间的数据，来改进对不同观测点间的传播时间的估计．这恰是反最短路问题.

三、 本文的组织

本文主要讨论在 l_2 范数下线性规划问题的反问题。对于这类线性规划问题的反问题，给定一个可行解，修改目标函数中的费用参数变量，使给定的可行解成为问题的一个最优解，并且在 l_2 范数下使修改的费用总和最小．根据文献 [14] 同时给出了一个二次规划的解法，并应用于求解反最小截问题、反最短路问题以及反指派问题.

第一章 引言：介绍线性规划问题的反问题，简述了反组合优化问题的研究背景，发展现状和重要的理论研究价值以及实际应用价值.

第二章 给出在 l_2 范数下线性规划问题的反问题的一般模型，根据二次规划的解法，得到模型的一般解.

第三章 把 l_2 范数下线性规划问题的反问题的一般解应用于求解反最小截问题，并给出数值图形和例子.

第四章 把 l_2 范数下线性规划问题的反问题的一般解应用于求解反最短路问题，并给出数值图形和例子.

第五章 把 l_2 范数下线性规划问题的反问题的一般解应用于求解反指派问题，并给出数值图形和例子.

结论 对本文做简单的总结，介绍将来要完成的工作.

第二章 在 l_2 范数下线性规划问题的反问题的一般模型

一、 在 l_2 范数下线性规划问题的反问题简述

问题描述：设 P 表示一个组合最优化问题， S 表示问题 P 的一个可行解集， c 表示费用， x_0 表示一个可行解即 $x_0 \in S$. 线性规划问题的反问题是指给定问题的一个可行解，尽可能少的修改目标函数中的费用参数变量 c 为 d, 使给定的可行解 x_0 成为问题 P 的一个最优解，并且使目标函数 $\sum\limits_{j\in J}(c_j - d_j)^2$ 最小.

二、 在 l_2 范数下线性规划问题的反问题的一般模型

在 l_2 范数下线性规划问题的反问题描述为：

$$\min \quad \sum_{j\in J}(d_j - c_j)^2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t} \quad & \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i + \delta_j = d_j \qquad && j \in L \\
& \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i - \phi_j = d_j && j \in U \\
& \sum_{i\in B} a_{ij}\pi_i \qquad = d_j && j \in F
\end{aligned} \tag{4}$$

对于任意的 $i \in I$, 都有 $\pi_i \geq 0$; 任意 $j \in L$, 都有 $\delta_j \geq 0$; 任意 $j \in U$, 都有 $\phi_j \geq 0$, 其中 $L = \{j \in J : x_j^0 = l_j\}, U = \{j \in J : x_j^0 = u_j\}, F = \{j \in J : l_j < x_j^0 < u_j\}, B = \{i \in I : \sum\limits_{j\in J} a_{ij}x_j = b_i\}$.

定理： L_2 范数下线性规划问题的反问题 (4) 的最优解 d_j 为：

$$d_j = \begin{cases} \frac{c_j}{(\sum a_{ij})^2+2} + c_j & j \in L \\ \frac{c_j}{(\sum a_{ij})^2+2} + c_j & j \in U \\ \frac{(\sum a_{ij})^2 c_j}{(\sum a_{ij})^2+1} & j \in F \end{cases} \tag{5}$$

证明： 已知二次规划问题：

$$\min \quad \frac{1}{2}(x-a)^\top (x-a)$$

$$\text{s.t} \qquad Ax = b \tag{6}$$

根据文献 [7] 问题 (6) 的解以及相应的 $Lagrange$ 乘子分别为：

$$\begin{aligned} x^* &= a + A^\top (AA^\top)^{-1}(b - Aa) \\ \lambda^* &= A^\top (AA^\top)^{-1}(b - Aa) \end{aligned} \tag{7}$$

问题 (4) 是问题 (6) 中 $a = c_j, b = 0$ 的一种情况．由表达式 (6) 可以求解问题 (4) 的最优解为：

$$\begin{cases} \pi_i = \frac{\sum a_{ij}c_j}{(\sum a_{ij})^2+2}; & \delta_j = \frac{c_j}{(\sum a_{ij})^2+2}; \quad \phi_j = 0; \quad d_j = \frac{c_j}{(\sum a_{ij})^2+2} + c_j \quad j \in L \\ \pi_i = \frac{\sum a_{ij}c_j}{(\sum a_{ij})^2+2}; & \delta_j = \frac{c_j}{(\sum a_{ij})^2+2}; \quad \phi_j = 0; \quad d_j = \frac{c_j}{(\sum a_{ij})^2+2} + c_j \quad j \in U \\ \pi_i = \frac{\sum a_{ij}c_j}{\sum a_{ij}}; & \delta_j = 0; \quad \phi_j = 0; \quad d_j = \frac{(\sum a_{ij}^2)c_j}{\sum a_{ij}^2+1} \quad j \in F \end{cases}$$

所以,反问题的最优解为 (5). □

三、 本章小结

本章主要给出了如何 l_2 范数下线性规划问题的反问题的一般模型，并通过利用二次规划问题的解法的给出该模型的一般解.

第三章　反最小截问题

一、 引言

本章主要讨论在 l_2 范数下反最小 $s-t$ 截问题. 文献 [9,14,15] 讨论了反最小截问题，文献 [2,9] 指出反最小截问题在 l_1 范数和 l_∞ 范数下可以通过求解最大流的算法求解反最小截问题. 文献 [2,9] 指出求解带权的反最小截问题可以转化为求解最小费用流问题. 文献 [16,17,18] 研究了最大流与最小截问题以及相关算法. 目前，求解最小截问题和最大流问题的最好的时间复杂性是由 $Goldberg$ 和 $Tarjan$[1986] 得到的为：$O(nm\log(n^2/m))$. 最大流问题的最坏的时间复杂性是由 $Goldberg$ 和 Rao[1997] 得到的为： $O(minn^{2/3}, m^{1/2}, m\log(n^2/m)\log U)$. 其中， $U = \max u_{ij} : (i,j) \in A$.

许多实际的问题都包含了流量. 例如，交通系统中的车辆流，信息系统中的信息流，水利系统和供水系统的水流，电路中的电流等等. 在铁路运输中，全国的所有铁路线和车站形成了一个铁路网，每条线路上单位时间的货运量是有限的. 那么，从沈阳到武汉单位时间内最多能运送多少货物 (旅客)? 这个是网络最大流问题.

二、 基本定义

给定有向图 $G=(N,A,U)$, 点集 N 被分割为两个非空集合 S 和 $\overline{S}$, 使得 $s\in S$, $t\in\overline{S}$, 把弧集 $(S,\overline{S})$ 称为是 (分离 s 和 t) 的截集.

给定一截集 $(S,\overline{S})$, 把截集 $(S,\overline{S})$ 中所有弧的容量之和称为这个截集的容量，记为 $U[S,\overline{S}]$. 即 $U[S,\overline{S}] = \sum\limits_{(i,j)\in(S,\overline{S})} u_{ij}$.

把截 $(S,\overline{S})$ 中所有满足 $(S,\overline{S}) = \{(i,j)\in A : i\in S, j\in\overline{S}\}$ 的弧称为前弧.

把截 $(\overline{S},S)$ 中所有满足 $(\overline{S},S) = \{(i,j)\in A : j\in S, i\in\overline{S}\}$ 的弧称为后弧.

最大流 – 最小截定理：在一个网络 $D(V,A,C)$ 中，从初始点到收点的最大流的流量等于最小截的容量.

最小截问题是在 G 中的所有截集中寻找容量最小的一个. 给定一个截 $(S^0,\overline{S}^0)$ 和变量 y_{ij}, 则：

$$y_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j)\in(S^0,\overline{S}^0) \\ 0 & (i,j)\notin(S^0,\overline{S}^0) \end{cases}$$

三、 求解反最小截问题

把所有从 s 到 t 的路径称为 $C(G)$. 最小截问题可描述为下列线性规划问题：

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} u_{ij}y_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad \sum_{(i,j)\in P} y_{ij} \geq 1 & \qquad P\in C(G) \\ 0 \leq y_{ij} \leq 1 & \qquad (i,j)\in A \end{aligned} \tag{8}$$

在有向图中，删除截 $(S,\overline{S})$ 中的所有的后弧，这样的网络记为 $G'=(N,A')$. 在 G' 中，所有从 s 到 t 的路径称为 $C(G')$. 于是问题 (8) 的形式转变为：

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} u_{ij}y_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad \sum_{(i,j)\in (P)} y_{ij} \geq 1 & \qquad P\in C(G') \\ 0 \leq y_{ij} \leq 1 & \qquad (i,j)\in (A') \end{aligned} \tag{9}$$

问题 (9) 是问题 (1) 中下界 $l_j=0$, 上界 $u_j=1$ 时的一种情况. 问题 (9) 的反最小截问题可描述为：给定一个已知截，修改弧的容量 u_{ij} 为 u'_{ij}, 使给定的截成为最小截，目标函数 $\sum(u'_{ij}-u_{ij})^2$ 的值最小.

设 $(S^*,\overline{S}^*)$ 为网络 $C(G')$ 中的最小截，$(\pi_{ij},\delta_{ij},\phi_{ij})$ 为问题 (9) 的对偶问题的一个可行解. 根据 (4) 得出 (9) 在 L_2 范数下的反问题可以描述为：

$$\min \quad \sum_{j\in J}(u'_{ij}-u_{ij})^2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad \pi_{ij}+\lambda_{ij}=u'_{ij} & \qquad j\in L' \\ \pi_{ij}-\phi_j=u'_{ij} & \qquad j\in U' \end{aligned} \tag{10}$$

对于任意 i, 都有 $\pi_{ij}\geq 0$; 任意 $j\in L'$, 都有 $\delta_{ij}\geq 0$; 任意 $j\in U'$, 都有 $\phi_{ij}\geq 0$, 其中 $L'=\{j\in J:y_{ij}=0\},U'=\{j\in J:y_{ij}=1\}$.

推论 1: 根据 (5) 问题 (10) 的最优解为：

$$\begin{cases} \pi_i=\frac{1}{3}u_{ij}; \quad \delta_j=\frac{1}{3}u_{ij}; \quad \phi_j=0; \quad d_j=\frac{2}{3}u_{ij} \qquad j\in L' \\ \pi_i=\frac{1}{3}u_{ij}; \quad \delta_j=\frac{1}{3}u_{ij}; \quad \phi_j=0; \quad d_j=\frac{2}{3}u_{ij} \qquad j\in U' \end{cases}$$

根据推论 1, 反最小截问题的最优解为 u'_{ij} 即：

$$u'_{ij}=\begin{cases}\frac{2}{3}u_{ij} & j\in L'\\ \frac{2}{3}u_{ij} & j\in U'\\ u_{ij}\end{cases}$$

令 x^*_{ij} 表示经过弧 (i,j) 的所有流量的总和. 由于截 $(S^*,\overline{S}^*)$ 为有向图 $C(G')$ 中的最小截，根据最大流最小截定理，截 $(S^*,\overline{S}^*)$ 中弧的容量满足 $u_{ij}=x^*_{ij}$. 所以截 $(S^*,\overline{S}^*)$ 中弧的容量没有发生改变. 综上, 给定截 $(S^0,\overline{S}^0)$ 成为最小截只需减少弧 $(i,j)\in(S^0,\overline{S}^0)\backslash(S^*,\overline{S}^*)$ 的容量，其它弧的容量不发生改变. 问题 (10) 的弧的容量转变为：

$$u'_{ij}=\begin{cases}\frac{2}{3}u_{ij} & (i,j)\in(S^0,\overline{S}^0)\backslash(S^*,\overline{S}^*)\\ u_{ij} & (i,j)\notin(S^0,\overline{S}^0)\backslash(S^*,\overline{S}^*)\end{cases}$$

$(S^*\backslash S^0)=\{(i,j)\in A:(i,j)\in S^*,(i,j)\notin S^0\}, S^0\backslash S^*=\{(i,j)\in A:(i,j)\in S^0,(i,j)\notin S^*\}$. 由于在有向图 $C(G')$ 中没有后弧，所以截 $(S^0,\overline{S}^0)$ 成为有向图 G 中的最小截.

四、 算例

例：求解图 3.1 的反最小截问题. 给定图 3.1 的一个已知 $s-t$ 截 $[S^0,\overline{S^0}]$, 其中 $S^0=\{1,2,3,4\}$.

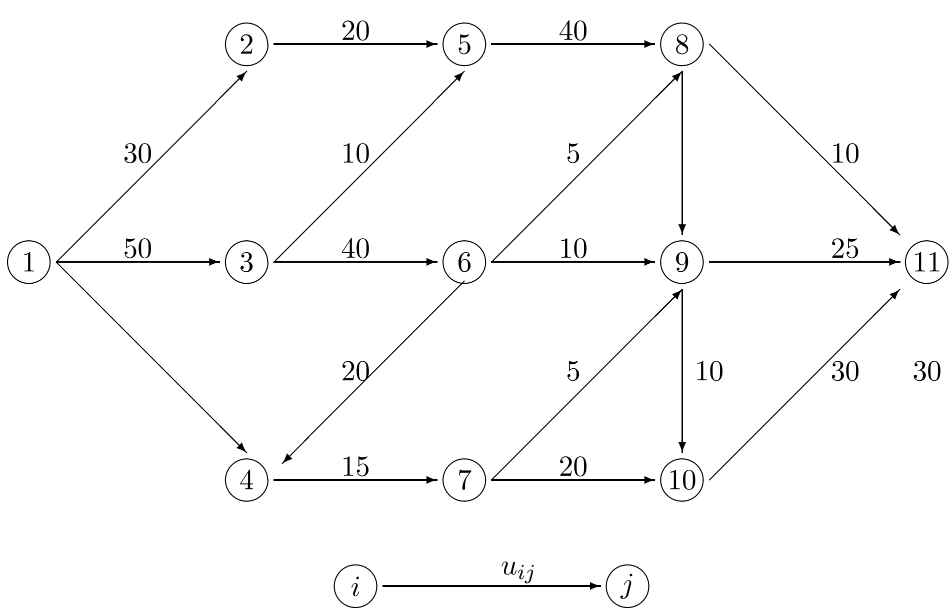

图 3.1

解：删去图 3.1 中的一条后弧 $(6,4)$, 根据最大流和最小截定理计算删除后弧以

后的图 3.2 的最小截.

已知给定截为 $S^0=\{1,2,3,4\},(S^0,\overline{S^0})=\{(2,5),(3,5),(3,6),(4,7)\}$.

图 3.2 的最小截为 $S^*=\{1,2,3,4,6,7\}$.

$(S^*,\overline{S^*})=\{(2,5),(3,5),(6,8),(6,9),(7,9),(7,10)\}$.

$(S^*,\overline{S^*})\setminus(S^0,\overline{S^0})=\{(6,8),(6,9),(7,9),(7,10)\}$.

$(S^0,\overline{S^0})\setminus(S^*,\overline{S^*})=\{(3,6),(4,7)\}$.

根据问题 (10) 的解法，弧 $(3,6)$ 由 40 变成 80/3, 弧 $(4,7)$ 由 10 变成 20/3. 所以，截 $(S^0,\overline{S^0})$ 成为最小截.

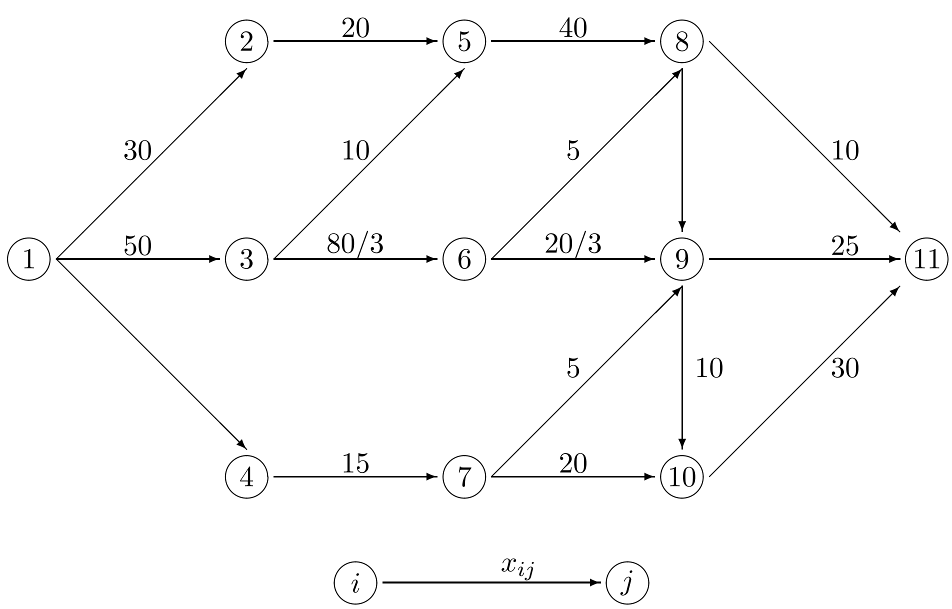

图 3.2

五、 本章小结

本章介绍的 l_2 范数下的反最小截问题，根据的相关结论，给出反最小截问题的模型和算法，求解 l_2 范数下的反最小截问题，并给出具体数值例子.

第四章　反最短路问题

一、　引言

本章主要讨论在 l_2 范数下反最短路问题．文献 [4] 首次研究反优化问题．他们在该文章中研究了反最短路问题．，随后有许多学者着手反优化问题的研究．文献 [23] 研究了赋权反最短路问题．文献 [28, 29]$Burton$ 和 $Toint$ 研究了在 l_2 范数下多个发点和多个收点的反最短路问题，并且利用非线性规划的算法解决该类问题．文献 [21, 22, 23] 研究了各种各样类型的反最短路问题，并指出该类问题可以转化为最小费用流问题来解决．文献 [28, 29, 30, 31] 介绍了最短路以及相关问题．本章主要讨论在 l_2 范数下，单个发点和单个收点的反最短路问题．

二、　基本定义

本节讨论在 l_2 范数下的单个起点和单个收点的反最短路问题，文献 [2, 6] 指出该问题的反问题在 l_2 范数下可由解决最短路问题来实现．　$Zhang$ 和 Liu 在文献 [19] 中指出反最短路问题可以转化为反最小费用流问题来解决．给定有向图 $G = (N, A)$, 其中 N 表示点集， A 表示弧集．又给定 s 和 t 为两个特定的顶点．对每一个弧 $(i, j) \in A$ 有相应的费用 c_{ij}. 所谓 $s - t$ 最短路问题就是在所有从 s 到 t 的路中，求一条费用最少的路．给定一条从 s 到 t 的路 p^0 和变量 x_{ij} 是相应路 p^0 的流，则：

$$x_{ij} = \begin{cases} 1 & (i,j) \in p^0 \\ 0 & (i,j) \notin p^0 \end{cases}$$

三、　求解反最短路问题

最短路问题可描述为下列线性规划问题：

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$\begin{aligned} \text{s.t} \quad & \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = 1 && i = s \\ & \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = 0 && i \notin \{s, t\} \\ & \sum_{j:(i,j)\in A} x_{ij} - \sum_{j:(j,i)\in A} x_{ji} = 0 && i = t \\ & 0 \le x_{ij} \le 1 && (i,j) \in A. \end{aligned} \tag{11}$$

问题 (11) 是问题 (1) 中下界 $l_j=0$, 上界 $u_j=1$ 时的一种情况．设在有向图 G 中不含有任何负的费用圈，(11) 是最短路问题的一个有效的关系表达式．反最短路问题是修改费用变量 c_{ij} 为 d_{ij}, 使给定的路成为一条最短路，目标函数 $\sum(d_{ij}-c_{ij})^2$ 的值最小．设路 p^* 是有向图 G 中的一条 $s-t$ 最短路，(π_{ij},π'_{ij},π''_{ij},δ_{ij},ϕ_{ij}) 为问题 (11) 的对偶问题的一个可行解．根据 (4) 得出 (11) 在 l_2 范数下的反问题可以描述为：

$$\min \quad \sum_{j\in J}(d_{ij}-c_{ij})^2$$

$$\begin{aligned}
\text{s.t}\quad & \pi_{ij}+\pi'_{ij}+\pi''_{ij}+\delta_{ij}=d_{ij} && j\in L' \\
& -\pi_{ij}-\pi'_{ij}-\pi''_{ij}=0 && j\in L' \\
& \pi_{ij}+\pi'_{ij}+\pi''_{ij}-\phi_{ij}=d_{ij} && j\in U' \\
& -\pi_{ij}-\pi'_{ij}-\pi''_{ij}=0 && j\in U'
\end{aligned} \tag{12}$$

对于任意 i, 都有 $\pi_{ij}\geq 0$,$\pi'_{ij}\geq 0$,$\pi''_{ij}\geq 0$; 任意 $j\in L'$, 都有 $\delta_{ij}\geq 0$; 任意 $j\in U'$, 都有 $\phi_{ij}\geq 0$, 其中 $L'=\{j\in J: x_{ij}=0\}$,$U'=\{j\in J: x_{ij}=1\}$.

推论 2: 根据 (5) 问题 (12) 的最优解为：

$$\begin{cases}
\pi_{ij}=0; \quad \pi'_{ij}=0; \quad \pi''_{ij}=0; \quad \delta_{ij}=\frac{1}{2}c_{ij}; \quad \phi_{ij}=0; \quad d_{ij}=\frac{1}{2}c_{ij}. \quad j\in L' \\
\pi_{ij}=0; \quad \pi'_{ij}=0; \quad \pi''_{ij}=0; \quad \delta_{ij}=0; \quad \phi_{ij}=-\frac{1}{2}c_{ij}; \quad d_{ij}=\frac{1}{2}c_{ij}. \quad j\in U'
\end{cases}$$

根据推论 2, 反最短路问题的最优解为 d_{ij} 即：

$$d_{ij}=\begin{cases}
\frac{1}{2}c_{ij} & j\in L' \\
\frac{1}{2}c_{ij} & j\in U' \\
c_{ij}
\end{cases}$$

为了使给定的路 p^0 成为一条最短路，对于弧 $(i,j)\in p^0\backslash p^*$ 用上述式子表示相应的费用，其它弧的费用保持不变．利用这种变化，路 p^0 成为有向图 G 中的一条从 s 到 t 的最短路．费用 d_{ij} 转变为：

$$d_{ij}=\begin{cases}
\frac{1}{2}c_{ij} & (i,j)\in p^0\backslash p^* \\
c_{ij} & (i,j)\notin p^0\backslash p^*
\end{cases}$$

$p^*\backslash p^0$=$\{(i,j)\in A:(i,j)\in p^*,(i,j)\notin p^0\}$, $p^0\backslash p^*$=$\{(i,j)\in A:(i,j)\in p^0,(i,j)\notin p^*\}$

四、 算例

例：给定图 4.1 的一条已知 $s-t$ 路 $p^0=\{1,2,5,8,11,12\}$, 求解图 4.1 中反最短路问题. 其中点 1 表示发点，点 12 表示收点.

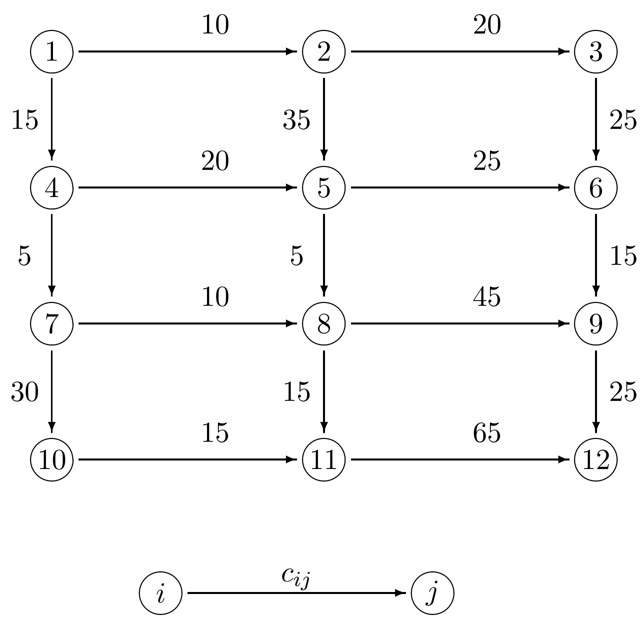

图 4.1

解: 根据题意知，1 是发点，12 是收点. 给定一条已知 $s-t$ 路 $p^0=\{1,2,5,8,11,12\}$.

图 4.1 的最短路 $p^*=\{1,2,3,6,9,12\}$.

$(p^0\setminus p^*)=\{(2,5),(5,8),(8,11),(11,12)\}$.

由表达式 (12) 可知，弧 $(2,5)$ 的费用由 35 变为 17.5, 弧 $(5,8)$ 的费用由 5 变为 2.5, 弧 $(8,11)$ 的费用由 15 变为 7.5, 弧 $(11,12)$ 的费用由 65 变为 32.5, 弧 $(1,2)$ 的费用保持不变. 已知路 $s-t$ 路 $p^0=\{1,2,5,8,11,12\}$ 成为一条最短路. 如图 4.2.

根据上述算法可以知道，反最短路问题可以由求解最短路的方法解决. 如果网络图中弧的费用为正数的时候，文献 [25] 根据 $Dijkstra$ 算法得出最短路的时间复杂性为 $O(m+n\log^n)$. 如果网络图中弧的费用存在负数的时候，根据文献 [26, 27] 可以知道最短路的时间复杂性为 $O(nm)$ 或是 $O(\sqrt{n}m\log^C)$. 其中， $C=max\{c_{ij}:(i,j)\in A\}$.

反最短路问题有很重要的实际应用价值. 例如，在一个地质区域中设立许多观测站，用节点对应于观测点，节点间的邻接关系用弧来表示，从而形成了一个网络，一条弧的权是指地震波在相应的观测点间的传播时间. 虽然可以给出它们的大致估计，但其无法确切得到. 注意到在一般情况下，地震波是沿着最短路传播的. 这样通过观察，可得到地震发生时不同的观测点处地震波的到达时间. 因此问题是如何利用到达

时间的数据，来改进对不同观测点间的传播时间的估计．这恰是反最短路问题.

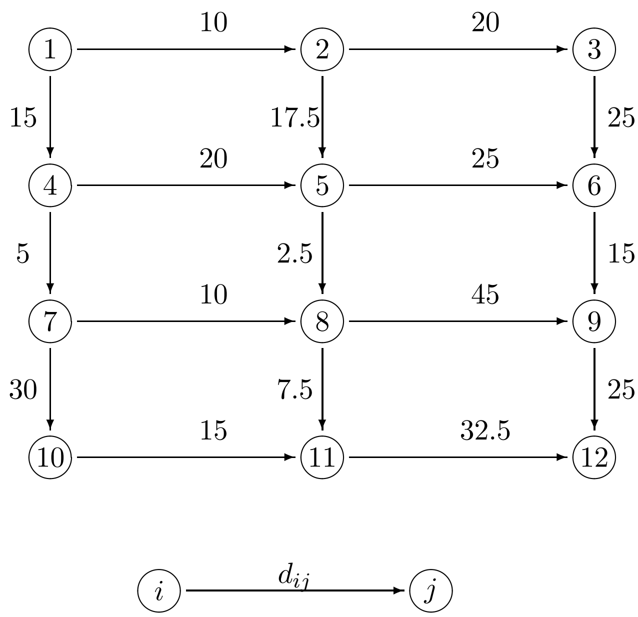

图 4.2

五、 本章小结

本章介绍的 l_2 范数下的反最短路问题，根据的相关结论，给出反最短路问题的模型和算法，求解 l_2 范数下的反最短路问题，并给出具体数值例子．最短路有许多的实际应用，他经常作为一个子例应用于求解其它网络设计与网络流问题.

第五章 反指派问题

一、引言

本章主要讨论在 l_2 范数下反最指派问题. 文献 [32] 给出几个关于指派问题的算法. 目前，指派问题的最好时间复杂性是 $O(nm+n^2\log^n)$. 文献 [33] 给出指派问题的最坏的时间复杂性是 $O(\sqrt{n}m\log^C)$. 其中， $C=max\{c_{ij}:(i,j)\in A\}$. 本章主要讨论在 l_2 范数下的反指派问题.

指派问题有很多的实际应用. 例如用于人员分配问题：某公司准备分派 n 个职工 $v_1,v_2.....v_n$, 做 n 件工作 $u_1,u_2.....u_n$, 已知这些职工每个人逗胜任一件或几件工作. 能不能每一个职工都能指派去做一件胜任的工作；或若不能所有的职工都能指派去做一件胜任的工作，那么最多有多少职工可以去做胜任的工作？这就是一个指派问题的实例.

二、 基本定义

本章主要讨论在 L_2 范数下的反指派问题，$Zhang$ 和 Liu 在文献 [24] 中指出反指派问题可以转化为指派问题解决. 在有向图 $G=(N_1\bigcup N_2,A)$ 中，$|N_1|=|N_2|,A\subseteq(N_1\times N_2)$. 每一个弧 (i,j) 有相应的费用参数变量 c_{ij}. 给定一个指派 M^0 和变量 x_{ij}, 则：

$$x_{ij}=\begin{cases}1 & (i,j)\in M^0\\ 0 & (i,j)\notin M^0\end{cases}$$

三、 求解反指派路问题

指派问题可描述为下列线性问题：

$$\min \quad \sum_{(i,j)\in A} c_{ij}x_{ij}$$

$$\begin{aligned}\text{s.t}\quad \sum_{\{j:(i,j)\in A\}} x_{ij} &= 1 && i\in N_1\\ -\sum_{\{i:(i,j)\in A\}} x_{ij} &= -1 && i\in N_2\\ 0\le x_{ij} &\le 1 && (i,j)\in A\end{aligned} \tag{13}$$

问题 (13) 是问题 (1) 中下界 $l_j=0$, 上界 $u_j=1$ 时的一种情况. 问题 (13) 的每一个解 x_{ij} 都确定一个指派，每一个指派对应着问题 (13) 的一个可行解. 反指派问题是指：给定二部图 G 中的一个指派，修改弧的费用 c_{ij} 为 d_{ij}, 使给定指派在费用 d_{ij} 下成为最优的指派，目标函数 $\sum(d_{ij}-c_{ij})^2$ 的值最小. 设二部图 G 中的最优的指派为 M^*,(π_{ij},π'_{ij},λ_{ij},ϕ_{ij}) 为问题 (13) 的对偶问题的一个可行解. 根据 (4) 得出 (13) 在 L_2 范数下的反问题可以描述为：

$$\min \quad \sum_{j\in J}(d_{ij}-c_{ij})^2$$

$$\begin{aligned} \text{s.t}\ \ & \pi_{ij}-\pi'_{ij}+\delta_{ij}=d_{ij} \qquad && j\in L' \\ & \pi_{ij}-\pi'_{ij}-\phi_{ij}=d_{ij} \qquad && j\in U' \end{aligned} \tag{14}$$

对于任意 i, 都有 $\pi_{ij}\geq 0$,$\pi'_{ij}\geq 0$; 任意 $j\in L'$, 都有 $\delta_{ij}\geq 0$; 任意 $j\in U'$, 都有 $\phi_{ij}\geq 0$, 其中 $L'=\{j\in J: x_{ij}=0\}$,$U'=\{j\in J: x_{ij}=1\}$.

推论 3: 根据 (5) 问题 (14) 的最优解为：

$$\begin{cases} \pi_{ij}=\frac{1}{4}c_{ij};\ \ \pi'_{ij}=-\frac{1}{4}c_{ij}; \quad \delta_{ij}=\frac{1}{4}c_{ij};\ \ \phi_{ij}=0; \quad d_{ij}=\frac{3}{4}c_{ij} \quad j\in L' \\ \pi_{ij}=\frac{1}{4}c_{ij};\ \ \pi'_{ij}=-\frac{1}{4}c_{ij}; \quad \delta_{ij}=0;\ \ \phi_{ij}=-\frac{1}{4}c_{ij}; \quad d_{ij}=\frac{3}{4}c_{ij} \quad j\in U' \end{cases}$$

根据推论 3, 反指派问题的最优解为 d_{ij} 即：

$$d_{ij}=\begin{cases} \frac{1}{2}c_{ij} & j\in L' \\ \frac{1}{2}c_{ij} & j\in U' \\ c_{ij} & \end{cases}$$

综上，若使给定的指派 M^0 成为最优的指派，只需减少所有弧 $(i,j)\in M^0\backslash M^*$ 的费用，其它弧的费用保持不变. 通过上述变化，指派 M^0 成为最优的指派，费用 d_{ij} 转变为：

$$d_{ij}=\begin{cases} \frac{3}{4}c_{ij} & (i,j)\in M^0\backslash M^* \\ c_{ij} & (i,j)\notin M^0\backslash M^* \end{cases}$$

$M^*\backslash M^0$=$\{(i,j)\in A:(i,j)\in M^*,(i,j)\notin M^0\}$, $M^0\backslash M^*$=$\{(i,j)\in A:(i,j)\in M^0,(i,j)\notin M^*\}$.

四、 算例

例：给定图 5.1 中的一个已知指派 $M^0=\{(1,6),(2,7),(3,8),(4,9),(5,10)\}$, 求解图 5.1 中反指派问题.

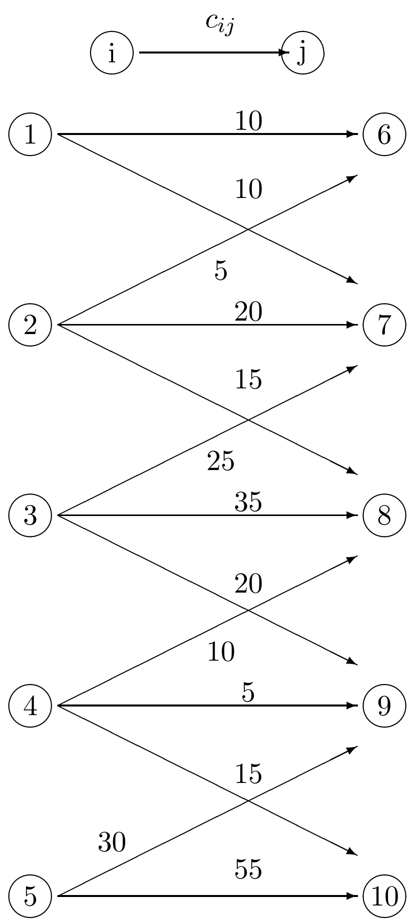

图 5.1

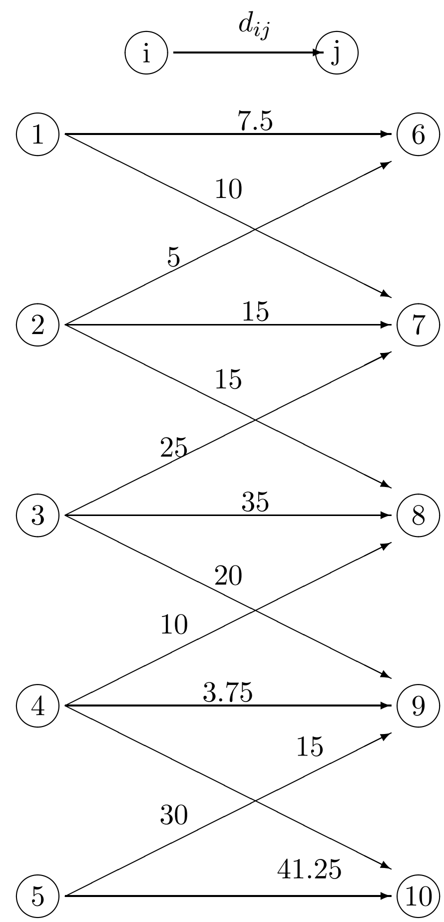

图 5.2

解：已知图 5.1 给定的指派为 $M^0=\{(1,6),(2,7),(3,8),(4,9),(5,10)\}$, 根据计算得知图 5.1 的最优指派为 $M^*=\{(1,7),(2,6),(3,8),(4,10),(5,9)\}$

$M^0\setminus M^*=\{(1,6),(2,7),(4,9),(5,10)\}$.

由表达式 (13) 可知，弧 $(1,6)$ 的费用由 10 变为 7.5, 弧 $(2,7)$ 的费用由 20 变为 15, 弧 $(4,9)$ 的费用由 5 变为 3.75, 弧 $(5,10)$ 的费用由 55 变为 41.25, 弧 $(3,8)$ 的费用保持不变. 已知指派 M^0 成为问题的一个最优指派. 如图 5.2

五、 本章小结

本章介绍的 l_2 范数下的反指派问题，根据的相关结论，给出反指派问题的模型和算法，求解 l_2 范数下的反指派问题，并给出具体数值例子. 指派问题也有许多的实际应用.

结 论

线性规划问题的反问题是反组合最优化问题中的重要组成部分．由于它有很重要的理论价值和实际应用价值倍受研究者的关注．本文介绍了一类在 l_2 范数下线性规划问题的反问题．在 l_2 范数下线性规划问题的反问题是指给定问题的一个可行解，修改目标函数中的费用参数变量，使给定的可行解成为问题的一个最优解，并且在 l_2 范数下使修改的费用总和最小．本文主要是通过求解原问题的对偶问题，并使它们的解满足互补松弛条件，得到反问题的费用约束条件，从而在 l_2 范数下求出反问题的最优解，并且应用一个二次规划的解法求解该反问题．该问题的解法是费用约束条件的等式右侧为零的一种特殊情况．根据二次规划的解法求解出反问题的最优解.

本文通过对线性规划问题的学习，给出在 l_2 范数下线性规划问题的反问题的一般模型，并把它应用于求解反最短路问题，反最小截问题，反指派问题．同时给出数值例子进一步验证算法的有效性，也有助于实际应用.

人们还研究在 l_1 范数，l_∞ 范数下线性规划问题的反问题以及在 Hamming 距离下其它反网络优化问题，并有广泛的应用．本文给出的是在 l_2 范数下线性规划问题的反问题一般模型和算法只是线性规划问题的反问题中十分微小的一部分，但基础算法的完善必有利于此问题的后续研究． $Hamming$ 距离下加权的线性规划问题将是今后主要研究的内容.

参考文献：

[1] Heuburger C.,Inverse combinatorial optimization,a survey on problems,methods and results [J]. Comb Optim.,2004,8:329-361.

[2] Ahuja R.K.,Orlin J.B.,Inverse optimization [J].Operations Reseach,2001,49:771-783.

[3] Sokkalingam P T ,A huja R K,O rlin J B. So lving inverse spanning t ree p roblem s th rough netwo rk flow techniques[J]. Operat ions Research,[J]. 1999, 47(2) : 291-298.

[4] Burton D, To int Ph L. ,O n the use of an inverse sho rtest path s p roblem [J]. Mathematical Programming, 1992, 53: 45-61.

[5] Zhang,J.,Z.Liu.,Calculating some inverse linear programming problem. Journal of Computational and Applied Mathematics [J]. 1996,72: 261-273.

[6] Ahuja R.K., Orlin J.B., Inverse optimization, Part 2: Network flow problems, [J]. Working Paper. Sloan School of Management. MIT. Cambridge. MA, 1998b.

[7] Zhang, J.,M. C. Cai., Inverse problem of minimum cuts [J]. Mathematical Methods of Operations Research ,1998,47, No. 1.

[8] Xu, S.,J. Zhang., An inverse problem of the weighted shortest path problem [J]. Japanese Journal of Industrial and Applied Mathematics,1995, 12:47-59.

[9] Longcheng Liu, Jiangzhong Zhang,Inverse maximum flow problems under the weighted Hamming distance [J].J Comb Optim,1996,12:395-408.

[10] Guan Xiucui.,Zhang jiangzhong,Inverse constrainted bottleneck problems under weighted l_∞ norm,[J].Comb.Optim,2006,13:3243-3254.

[11]He Y.,Zhang B.,Yao E.,Weighted inverse minimum spanning tree problems under Hamming distannce [J]. J Comb Optim,2005,9:91-100.

[12]Zhang B., Zhang J.and He Y., Constrained inverse minimum spanning tree problems under the bottle-type Hamming distannce [J].Journal of Global optimization,2006,34:467-474.

[13]Yang X.G.,Zhang J.Z.,Some inverse min-max network problems under weighted l_∞ and l_1 norms with bound constraints on changges [J]. Comb.Optim.,2007, 13:123-135.

[14] Ahuja R.K.,Orlin J.B.,Inverse optimization [J].Working Paper.Sloan School of Management, MIT. Cambridge. MA, 2001.

[15] Xu S, Zhang J., A n inverse problem of thew eigh ted sho rtest path problem [J]. Japan J IndustAppl Math, 1995, 12: 47-59.

[16] Jungnickel D.,Graphs,Networks and Algorithms [J].Springer,Berlin,1999.

[17] King V.,Rao S.and Tarjan R.E., faster deterministic maximum flow algorithm [J]. Journal of Algorithms,1994,17:447-474.

[18] J.,Orlin J.B.,A faster algorithm for finding the minimum cut in a directed graph,[J].Journal of

Algorithms,1994,17:409-423.

[19] Burton, D., and Ph. L. Toint., On an instance of the inverse shortest paths problem [J]. Mathematical Programming,1992, 53: 45-61.

[20] Burton, D., Ph. L. Toint., On the use of an inverse shortest paths algorithm for recovering linearly correlated costs [J]. Mathematical Programming,1994, 63: 1-22.

[21] Cai, M.,X. Yang. , Inverse shortest path problems [J]. Technical Report, Institute of Systems Sciences, Academia Sinica, Beijing, China,1994.

[22] Xu, S.,J. Zhang., An inverse problem of the weighted shortest path problem [J]. Japanese Journal of Industrial and Applied Mathematics ,1995,12:47-59.

[23] Zhang, J., Z. Ma,C. Yang., A column generation method for inverse shortest path problems [J]. ZOR-Mathematical Methods for Operations Research ,1995,41: 347-358.

[24] Goldberg A.V.,Scaling algorithms for the shortest paths problem [J].SIAM Journal on Computing,1995,24:494-504.

[25] 唐策善，李龙澍，黄刘生，数据结构，高等教育出版社，北京， 1995.

[26] B.and Vygen J.,Combinatorial Optimization [J].Theory and Algorithms,2000, Springer-Verlag,Berlin.

[27] 唐恒永，赵大宇，赵玉芳，最优化理论与算法，辽宁大学出版社，沈阳， 1997.

[28] Zhang J.,Liu Z.,Calculating some inverse linear programming problem [J]. Comput.Appl.Math., 1996, 72:261-273.

[29] Denzau G., J.Behrens, Inversion of seismic data using tomographical reconstruction techniques for investigations of laterally inhomogeneous media [J]. Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society ,1984.79: 305-315.

[30] Ahuja, R. K., T. L. Magnanti,J. B. Orlin., Network Flows: Theory, Algorithms, and Applications[J]. Prentice Hall, NJ,1993.

[31] Sotskov, Y. N., V. K. Leontev, E. N. Gordeev., Some concepts of stability analysis in combinatorial optimization,[J]. Discrete Applied Mathematics ,1995,58:169-190.

[32] Goldfarb, D., Efficient dual simplex algorithms for the assignment problem [J]. Mathematical Programming ,1985,33:187-203.

[33] Gabow, H. N., and R. E. Tarjan, Faster scaling algorithms for network problems [J]. SIAM Journal on Computing,. 1989, 18:1013-1036.

个人简历

刘洋，女， 1983 年 7 月出生，辽宁省鞍山市人． 2001 年 -2005 年于沈阳师范大学数学与系统科学学院学院攻读学士学位， 2005 年 6 月获得学士学位； 2006 年 -2009 年就读于沈阳师范大学数学与系统科学学院管理科学与工程专业，攻读硕士学位.

学术论文

刘洋，唐恒永． $Hamming$ 距离下反瓶颈最小支撑树的反问题 [J]. 牡丹江师范学院学报 (自然科学版),2009.1

致 谢

本文的工作是在我的导师唐恒永教授的精心指导和悉心教诲下完成的．从论文的选题到开始撰写，从论文修改到停笔定稿，都凝聚了导师无数的心血和汗水．导师渊博的学术知识，敏锐的学术思想，开阔的学术视野和勇于探索的精神让我深受鼓舞；平易近人的处事风格和严谨求实的学术作风更让我受益匪浅．正是在唐恒永教授的言传身教下，我才能够顺利地完成研究生的学业．与导师相处只有短短的三年，但这三年的收获却将使我受益终身．只言片语难以表达我此时此刻的心情，借此篇论文来表达学生对他最崇高的敬意和深深的感谢．无论将来继续学习还是工作，我都会牢记导师的教诲，用百倍的努力、饱满的精神和最大的热情投入到事业中去．

感谢导师对我的教导和爱护，本论文的起步、开展和深入，每一步都凝聚着唐老师的心血．唐老师对论文的精辟分析，使我受益非浅；是唐老师在运筹学领域的真知灼见使我少走了很多弯路，是唐老师对反优化问题方面的研究给了我论文的研究方向，唐老师不仅给了我研究方向的最初启蒙，在论文的最初写作中为我指点迷津，还在写论文的过程中为我提供了大量的资料，在毕业论文的完成上给予了我很大的帮助，同时，唐老师在学术和生活上都给予了我精心的指导和热情的帮助．唐老师的渊博学识和科学治学方法值得我倾心学习和仰慕．

感谢沈阳师范大学数学与系统科学学院提供的良好的学习环境和学术氛围，尤其是学术讨论使我领略到各位老师和同学的精辟见解和敏捷的思维方式．感谢数学与系统科学学院的赵传立、徐兆棣、罗成新、李晓毅老师，我的成长离不开各位老师的教导和帮助．他们带给我潜移默化的学术影响．耳濡目染，他们做学问的态度，时刻鞭策着我前进

感谢 06 级全体研究生，你们在三年的学习和生活中给我的诸多关心和照顾，你们的广博的知识让我受益匪浅．感谢数学与系统科学学院办公室的老师们在日常生活和学习上对我的关心和帮助，在我即将离开沈阳师范大学之际，向他们表示深深地谢意和最美好的祝福．

最后，我要感谢所有曾经给予我关心和鼓励的老师、同学、家人和朋友，谢谢他们对我的的支持与帮助．