# 目录

CONTENTS

# 第1章 CHAPTER 1

## 引言题解

**1.** 用定义验证下列各集合是凸集：

(1) $S=\{(x_1,x_2)\mid x_1+2x_2\geqslant 1, x_1-x_2\geqslant 1\}$；　　(2) $S=\{(x_1,x_2)\mid x_2\geqslant |x_1|\}$；

(3) $S=\{(x_1,x_2)\mid x_1^2+x_2^2\leqslant 10\}$.

**证**　(1) 对集合 $S$ 中任意两点 $x^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\end{bmatrix}$, $x^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\end{bmatrix}$及每个数 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}=\begin{bmatrix}\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}\\ \lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}\end{bmatrix}.$$

由题设，有

$$\begin{aligned}&[\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}]+2[\lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}]\\=&\lambda(x_1^{(1)}+2x_2^{(1)})+(1-\lambda)(x_1^{(2)}+2x_2^{(2)})\geqslant\lambda+(1-\lambda)=1,\\&[\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}]-[\lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}]\\=&\lambda(x_1^{(1)}-x_2^{(1)})+(1-\lambda)(x_1^{(2)}-x_2^{(2)})\geqslant\lambda+(1-\lambda)=1,\end{aligned}$$

因此，$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in S$，故 $S$ 是凸集.

(2) 对集合 $S$ 中任意两点 $x^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\end{bmatrix}$和 $x^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\end{bmatrix}$及每个数 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}=\begin{bmatrix}\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}\\ \lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}\end{bmatrix}.$$

由题设，有

$$\lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}\geqslant\lambda\,|x_1^{(1)}|+(1-\lambda)\,|x_1^{(2)}|\geqslant|\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}|,$$

因此 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in S$，故 $S$ 是凸集.

(3) 对集合 $S$ 中任意两点 $x^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\end{bmatrix}$和 $x^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\end{bmatrix}$及每个数 $\lambda\in[0,1]$，有

$$\lambda \boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}=\begin{bmatrix}\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}\\ \lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}\end{bmatrix}.$$

由题设，有

$$\begin{aligned}&[\lambda x_1^{(1)}+(1-\lambda)x_1^{(2)}]^2+[\lambda x_2^{(1)}+(1-\lambda)x_2^{(2)}]^2\\ =&\lambda^2 x_1^{(1)2}+2\lambda(1-\lambda)x_1^{(1)}x_1^{(2)}+(1-\lambda)^2x_1^{(2)2}+\lambda^2x_2^{(1)2}+2\lambda(1-\lambda)x_2^{(1)}x_2^{(2)}\\ &+(1-\lambda)^2x_2^{(2)2}=\lambda^2[x_1^{(1)2}+x_2^{(1)2}]+(1-\lambda)^2[x_1^{(2)2}+x_2^{(2)2}]+\lambda(1-\lambda)[2x_1^{(1)}x_1^{(2)}\\ &+2x_2^{(1)}x_2^{(2)}]\leqslant 10\lambda^2+10(1-\lambda)^2+\lambda(1-\lambda)[x_1^{(1)2}+x_1^{(2)2}+x_2^{(1)2}+x_2^{(2)2}]\\ \leqslant& 10\lambda^2+10(1-\lambda)^2+20\lambda(1-\lambda)=10,\end{aligned}$$

因此 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}\in S$，故 $S$ 是凸集.

**2.** 设 $C\subset\mathbb{R}^p$ 是一个凸集，$p$ 是正整数. 证明下列集合 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的凸集：

$$S=\{x \mid x\in\mathbb{R}^n, x=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}\in C\},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是给定的 $n\times p$ 实矩阵.

**证** 对任意两点 $x^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)}\in S$ 及每个数 $\lambda\in[0,1]$，根据集合 $S$ 的定义，存在 $\boldsymbol{\rho}_1,\boldsymbol{\rho}_2\in C$，使 $x^{(1)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}_1$，$\boldsymbol{x}^{(2)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}_2$，因此必有 $\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}=\lambda\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{A}\boldsymbol{\rho}_2=\boldsymbol{A}[\lambda\boldsymbol{\rho}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{\rho}_2]$. 由于 $C$ 是凸集，必有 $\lambda\boldsymbol{\rho}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{\rho}_2\in C$，因此 $\lambda\boldsymbol{x}^{(1)}+(1-\lambda)\boldsymbol{x}^{(2)}\in S$，故 $S$ 是凸集.

**3.** 证明下列集合 $S$ 是凸集：

$$S=\{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}, \boldsymbol{y}\geqslant\boldsymbol{0}\},$$

其中 $\boldsymbol{A}$ 是 $n\times m$ 矩阵，$\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n$，$\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^m$.

**证** 对任意的 $\boldsymbol{x}^{(1)},x^{(2)}\in S$ 及每个数 $\lambda\in[0,1]$，存在 $\boldsymbol{y}_1,\boldsymbol{y}_2\geqslant 0$，使 $x^{(1)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_1$，$x^{(2)}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}_2$，因此有 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}=\boldsymbol{A}[\lambda\boldsymbol{y}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_2]$，而 $\lambda\boldsymbol{y}_1+(1-\lambda)\boldsymbol{y}_2\geqslant\boldsymbol{0}$，故 $\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)}\in S$，即 $S$ 是凸集.

**4.** 设 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个非空凸集. 证明对每一个整数 $k\geqslant 2$，若 $\boldsymbol{x}^{(1)},\boldsymbol{x}^{(2)},\cdots,\boldsymbol{x}^{(k)}\in S$，则

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\boldsymbol{x}^{(i)}\in S,$$

其中 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1(\lambda_i\geqslant 0, i=1,2,\cdots,k)$.

**证** 用数学归纳法. 当 $k=2$ 时，由凸集的定义知上式显然成立. 设 $k=m$ 时结论成立，当 $k=m+1$ 时，有

$$\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i\boldsymbol{x}^{(i)}=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\boldsymbol{x}^{(i)}+\lambda_{m+1}\boldsymbol{x}^{(m+1)}=\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\boldsymbol{x}^{(i)}+\lambda_{m+1}\boldsymbol{x}^{(m+1)},$$

其中 $\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i=1$. 根据归纳法假设，

$$\boldsymbol{x}=\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i}{\sum_{i=1}^{m}\lambda_i}\boldsymbol{x}^{(i)}\in S.$$

由于$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i+\lambda_{m+1}=1$，因此$\left(\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\right)x+\lambda_{m+1}x^{(m+1)}\in S$，即$\sum_{i=1}^{m+1}\lambda_i x^{(i)}\in S$. 于是当$k=m+1$时结论也成立. 从而得证.

**5.** 设$A$是$m\times n$矩阵，$B$是$l\times n$矩阵，$c\in\mathbb{R}^n$，证明下列两个系统恰有一个有解：

系统1 $Ax\leqslant 0$，$Bx=0$，$c^{\mathrm{T}}x>0$，对某些$x\in\mathbb{R}^n$.

系统2 $A^{\mathrm{T}}y+B^{\mathrm{T}}z=c$，$y\geqslant 0$，对某些$y\in\mathbb{R}^m$和$z\in\mathbb{R}^l$.

证　由于$Bx=0$等价于

$$\begin{cases}Bx\leqslant 0,\\ Bx\geqslant 0.\end{cases}$$

因此系统1有解，即

$$\begin{bmatrix}A\\ B\\ -B\end{bmatrix}x\leqslant 0,\quad c^{\mathrm{T}}x>0 \text{ 有解.}$$

根据Farkas定理，得

$$(A^{\mathrm{T}}\quad B^{\mathrm{T}}\quad -B^{\mathrm{T}})\begin{bmatrix}y\\ u\\ v\end{bmatrix}=c,\quad \begin{bmatrix}y\\ u\\ v\end{bmatrix}\geqslant 0$$

无解. 记$u-v=z$，即得

$$A^{\mathrm{T}}y+B^{\mathrm{T}}z=c,\quad y\geqslant 0$$

无解. 反之亦然.

**6.** 设$A$是$m\times n$矩阵，$c\in\mathbb{R}^n$，则下列两个系统恰有一个有解：

系统1 $Ax\leqslant 0$，$x\geqslant 0$，$c^{\mathrm{T}}x>0$，对某些$x\in\mathbb{R}^n$.

系统2 $A^{\mathrm{T}}y\geqslant c$，$y\geqslant 0$，对某些$y\in\mathbb{R}^m$.

证　若系统1有解，即

$$\begin{bmatrix}A\\ -I\end{bmatrix}x\leqslant 0,\quad c^{\mathrm{T}}x>0$$

有解，则根据Farkas定理，有

$$(A^{\mathrm{T}}\ -I)\begin{bmatrix}y\\ u\end{bmatrix}=c,\quad \begin{bmatrix}y\\ u\end{bmatrix}\geqslant 0$$

无解，即$A^{\mathrm{T}}y-u=c$，$y\geqslant 0$，$u\geqslant 0$无解，亦即

$$A^{\mathrm{T}}y\geqslant c,\quad y\geqslant 0$$

无解.

反之，若$A^{\mathrm{T}}y\geqslant c$，　$y\geqslant 0$有解，即

$$A^{\mathrm{T}}y-u=c,\quad y\geqslant 0,\ u\geqslant 0$$

有解，亦即

$$(A^T\ -I)\begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}=c,\quad \begin{bmatrix} y \\ u \end{bmatrix}\geqslant 0$$

有解. 根据 Farkas 定理,有

$$\begin{bmatrix} A \\ -I \end{bmatrix}x\leqslant 0,\quad c^Tx>0$$

无解,即

$$Ax\leqslant 0,\quad x\geqslant 0,\quad c^Tx>0$$

无解.

7. 证明 $Ax\leqslant 0, c^Tx>0$ 有解. 其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix},\quad c=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

证 根据 Farkas 定理,只需证明

$$A^Ty=c,\quad y\geqslant 0$$

无解. 事实上,$A^Ty=c$,即

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

对此线性方程组的增广矩阵做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}.$$

此线性方程组 $A^Ty=c$ 的系数矩阵与增广矩阵的秩不等,因此无解,即 $A^Ty=c, y\geqslant 0$ 无解. 根据 Farkas 定理,$Ax\leqslant 0, c^Tx>0$ 有解.

8. 证明下列不等式组无解:

$$\begin{cases} x_1+3x_2<0, \\ 3x_1-x_2<0, \\ 17x_1+11x_2>0. \end{cases}$$

证 将不等式组写作

$$Ax<0,\quad 其中\quad A=\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & -1 \\ -17 & -11 \end{bmatrix}.$$

根据 Gordan 定理,只需证明 $A^Ty=0, y\geqslant 0, y\neq 0$ 有解. 对系数矩阵 $A^T$ 做初等行变换:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -17 \\ 3 & -1 & -11 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 3 & -17 \\ 0 & -10 & 40 \end{bmatrix}\longrightarrow\begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

$A^{T}y=0$ 的同解线性方程组为

$$\begin{cases} y_1=5y_3, \\ y_2=4y_3, y_3 \text{ 任意}. \end{cases}$$

显然 $A^{T}y=0, y\geqslant 0, y\neq 0$ 有解. 根据 Gordan 定理，原来的不等式组无解.

9. 判别下列函数是否为凸函数：

(1) $f(x_1,x_2)=x_1^2-2x_1x_2+x_2^2+x_1+x_2$;

(2) $f(x_1,x_2)=x_1^2-4x_1x_2+x_2^2+x_1+x_2$;

(3) $f(x_1,x_2)=(x_1-x_2)^2+4x_1x_2+e^{x_1+x_2}$;

(4) $f(x_1,x_2)=x_1e^{-(x_1+x_2)}$;

(5) $f(x_1,x_2,x_3)=x_1x_2+2x_1^2+x_2^2+2x_3^2-6x_1x_3$.

解 (1) $\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$为半正定矩阵，故 $f(x_1,x_2)$是凸函数.

(2) $\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix} 2 & -4 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}$为不定矩阵，故 $f(x_1,x_2)$不是凸函数.

(3) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=2(x_1-x_2)+4x_2+e^{x_1+x_2}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=-2(x_1-x_2)+4x_1+e^{x_1+x_2}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=2+e^{x_1+x_2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}=2+e^{x_1+x_2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=2+e^{x_1+x_2}$,

因此 Hesse 矩阵

$$\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix} 2+e^{x_1+x_2} & 2+e^{x_1+x_2} \\ 2+e^{x_1+x_2} & 2+e^{x_1+x_2} \end{bmatrix}=(2+e^{x_1+x_2})\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

为半正定矩阵，因此 $f(x)$是凸函数.

(4) $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}=e^{-(x_1+x_2)}-x_1e^{-(x_1+x_2)}=(1-x_1)e^{-(x_1+x_2)}$, $\dfrac{\partial f}{\partial x_2}=-x_1e^{-(x_1+x_2)}$,

$\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=(x_1-2)e^{-(x_1+x_2)}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}=(x_1-1)e^{-(x_1+x_2)}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=x_1e^{-(x_1+x_2)}$,

于是 Hesse 矩阵

$$\nabla^2 f(x)=e^{-(x_1+x_2)}\begin{bmatrix} x_1-2 & x_1-1 \\ x_1-1 & x_1 \end{bmatrix}$$

为不定矩阵，故 $f(x)$不是凸函数.

(5) $f(x)$的 Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

做合同变换：

$$\begin{bmatrix} 4 & 1 & -6 \\ 1 & 2 & 0 \\ -6 & 0 & 4 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{7}{4} & \frac{3}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -5 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{44}{7} \end{bmatrix}.$$

由此可得$\nabla^2 f(x)$为不定矩阵，因此$f(x)$不是凸函数.

10. 设$f(x_1,x_2)=10-2(x_2-x_1^2)^2$,

$$S=\{(x_1,x_2)\mid -11\leqslant x_1\leqslant 1,-1\leqslant x_2\leqslant 1\},$$

$f(x_1,x_2)$是否为$S$上的凸函数？

**解** $\frac{\partial f}{\partial x_1}=8x_1(x_2-x_1^2)$, $\frac{\partial f}{\partial x_2}=-4(x_2-x_1^2)$,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}=8(x_2-3x_1^2),\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_1\partial x_2}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_2\partial x_1}=8x_1,\quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}=-4,$$

函数$f(x_1,x_2)$的 Hesse 矩阵为

$$\nabla^2 f(x)=\begin{bmatrix} 8(x_2-3x_1^2) & 8x_1 \\ 8x_1 & -4 \end{bmatrix}.$$

易知$\nabla^2 f(x)$在集合$S$上不是半正定矩阵，如在点$(0,1)$处的 Hesse 矩阵是$\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix}$，是不定矩阵. 因此$f(x_1,x_2)$不是$S$上的凸函数.

11. 证明$f(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+b^{\mathrm{T}}x$为严格凸函数的充要条件是 Hesse 矩阵$A$正定.

**证** 先证必要性. 设$f(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+b^{\mathrm{T}}x$是严格凸函数. 根据定理 1.4.14，对任意非零向量$x$及$\bar{x}=0$，必有

$$f(x)>f(0)+\nabla f(0)^{\mathrm{T}}x. \tag{1}$$

将$f(x)$在$\bar{x}=0$处展开，有

$$f(x)=f(0)+\nabla f(0)^{\mathrm{T}}x+\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(0)x+o(\|x\|^2). \tag{2}$$

由(1)式和(2)式知

$$\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(0)x+o(\|x\|^2)>0.$$

由于$f(x)$是二次凸函数，$\nabla^2 f(0)=A$，$o(\|x\|^2)=0$，因此$x^{\mathrm{T}}Ax>0$，即$A$正定.

再证充分性. 设$A$正定，对任意两个不同点$x$和$\bar{x}$，根据中值定理，有

$$f(x)=f(\bar{x})+\nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x-\bar{x})+\frac{1}{2}(x-\bar{x})^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(\hat{x})(x-\bar{x})$$

$$> f(\bar{x}) + \nabla f(\bar{x})^{\mathrm{T}}(x-\bar{x}).$$

根据定理 1.4.14，$f(x)=\frac{1}{2}x^{\mathrm{T}}Ax+b^{\mathrm{T}}x$ 是严格凸函数.

12. 设 $f$ 是定义在$\mathbb{R}^n$上的凸函数，$x^{(1)},x^{(2)},\cdots,x^{(k)}$是$\mathbb{R}^n$中的点，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k$ 是非负数，且满足 $\lambda_1+\lambda_2+\cdots+\lambda_k=1$，证明：

$$f(\lambda_1x^{(1)}+\lambda_2x^{(2)}+\cdots+\lambda_kx^{(k)})\leqslant\lambda_1f(x^{(1)})+\lambda_2f(x^{(2)})+\cdots+\lambda_kf(x^{(k)}).$$

证 用数学归纳法. 当 $k=2$ 时，根据凸函数的定义，必有

$$f(\lambda_1x^{(1)}+\lambda_2x^{(2)})\leqslant\lambda_1f(x^{(1)})+\lambda_2f(x^{(2)}).$$

设 $k=m$ 时不等式成立. 当 $k=m+1$ 时，有

$$\begin{aligned}&f(\lambda_1x^{(1)}+\lambda_2x^{(2)}+\cdots+\lambda_mx^{(m)}+\lambda_{m+1}x^{(m+1)})\\ &=f\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\left(\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^m\lambda_i}x^{(1)}+\frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^m\lambda_i}x^{(2)}+\cdots+\frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^m\lambda_i}x^{(m)}\right)+\lambda_{m+1}x^{(m+1)}\right).\end{aligned}$$

记

$$x=\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^m\lambda_i}x^{(1)}+\frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^m\lambda_i}x^{(2)}+\cdots+\frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^m\lambda_i}x^{(m)}.$$

由于 $f(x)$ 是凸函数，$\sum_{i=1}^m\lambda_i+\lambda_{m+1}=1$，$\lambda_i\geqslant0$，根据凸函数定义，有

$$f\left(\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\right)x+\lambda_{m+1}x^{(m+1)}\right)\leqslant\left(\sum_{i=1}^m\lambda_i\right)f(x)+\lambda_{m+1}f(x^{(m+1)}).$$

根据归纳法假设，有

$$f(x)\leqslant\frac{\lambda_1}{\sum_{i=1}^m\lambda_i}f(x^{(1)})+\frac{\lambda_2}{\sum_{i=1}^m\lambda_i}f(x^{(2)})+\cdots+\frac{\lambda_m}{\sum_{i=1}^m\lambda_i}f(x^{(m)}).$$

代入上式，则有

$$f(\lambda_1x^{(1)}+\lambda_2x^{(2)}+\cdots+\lambda_{m+1}x^{(m+1)})\leqslant\lambda_1f(x^{(1)})+\lambda_2f(x^{(2)})+\cdots+\lambda_{m+1}f(x^{(m+1)}),$$

即 $k=m+1$ 时，不等式也成立. 从而得证.

13. 设 $f$ 是$\mathbb{R}^n$上的凸函数，证明：如果 $f$ 在某点 $x\in\mathbb{R}^n$处具有全局极大值，则对一切点 $x\in\mathbb{R}^n$，$f(x)$为常数.

证 用反证法. 设 $f(x)$ 在点$\bar{x}$处具有全局极大值，且在点 $x^{(1)}$ 处有 $f(x^{(1)})<f(\bar{x})$. 在过点 $x^{(1)}$ 和$\bar{x}$的直线上任取一点 $x^{(2)}$，使得

$$\bar{x}=\lambda x^{(1)}+(1-\lambda)x^{(2)},\quad \lambda\in(0,1).$$

$$\leqslant \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)})$$
$$\leqslant \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(1)}) = f(x^{(1)}),\text{矛盾}.$$

(2) 若 $f(x^{(2)}) > f(x^{(1)})$，由于 $f(x)$ 是凸函数，必有

$$\begin{aligned} f(\bar{x}) &= f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda) x^{(2)}) \\ &\leqslant \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}) \\ &< \lambda f(x^{(2)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}) = f(x^{(2)}),\text{矛盾}. \end{aligned}$$

综上，$f(x)$ 必为常数.

14. 设 $f$ 是定义在 $\mathbb{R}^n$ 上的函数，如果对每一点 $x \in \mathbb{R}^n$ 及正数 $t$ 均有 $f(tx) = tf(x)$，则称 $f$ 为正齐次函数. 证明 $\mathbb{R}^n$ 上的正齐次函数 $f$ 为凸函数的充要条件是，对任何 $x^{(1)}$，$x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$，有

$$f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leqslant f(x^{(1)}) + f(x^{(2)}).$$

**证** 先证必要性. 设正齐次函数 $f(x)$ 是凸函数，则对任意两点 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$，必有

$$f\left(\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}\right) \leqslant \frac{1}{2} f(x^{(1)}) + \frac{1}{2} f(x^{(2)}).$$

由于 $f(x)$ 是正齐次函数，有

$$f\left(\frac{1}{2}x^{(1)} + \frac{1}{2}x^{(2)}\right) = \frac{1}{2} f(x^{(1)} + x^{(2)}).$$

代入前式得

$$\frac{1}{2} f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leqslant \frac{1}{2} f(x^{(1)}) + \frac{1}{2} f(x^{(2)}),$$

即

$$f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leqslant f(x^{(1)}) + f(x^{(2)}).$$

再证充分性. 设正齐次函数 $f(x)$ 对任意的 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ 满足

$$f(x^{(1)} + x^{(2)}) \leqslant f(x^{(1)}) + f(x^{(2)}),$$

则对任意的 $x^{(1)}, x^{(2)} \in \mathbb{R}^n$ 及每个数 $\lambda \in (0,1)$，必有

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda) x^{(2)}) \leqslant f(\lambda x^{(1)}) + f((1-\lambda) x^{(2)}) = \lambda f(x^{(1)}) + (1-\lambda) f(x^{(2)}).$$

因此 $f(x)$ 是 $\mathbb{R}^n$ 上的凸函数.

15. 设 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中非空凸集，$f$ 是定义在 $S$ 上的实函数. 若对任意的 $x^{(1)}, x^{(2)} \in S$ 及每一个数 $\lambda \in (0,1)$，均有

$$f(\lambda x^{(1)} + (1-\lambda) x^{(2)}) \leqslant \max\{f(x^{(1)}), f(x^{(2)})\},$$

则称 $f$ 为拟凸函数.

试证明：若 $f(x)$ 是凸集 $S$ 上的拟凸函数，$\bar{x}$ 是 $f(x)$ 在 $S$ 上的严格局部极小点，则 $\bar{x}$ 也是 $f(x)$ 在 $S$ 上的严格全局极小点.

**证** 用反证法. 设 $\bar{x}$ 是严格局部极小点，即存在 $\bar{x}$ 的 $\delta$ 邻域 $N_\delta(\bar{x})$，对于每个 $x \in S \cap N_\delta(\bar{x})$ 且 $x \neq \bar{x}$，有 $f(x) > f(\bar{x})$，但 $\bar{x}$ 不是严格全局极小点，即存在点 $\hat{x} \in S, \hat{x} \neq \bar{x}$，使得



$$f(\hat{x}) \leqslant f(\bar{x}).$$

由于 $f(x)$ 是凸集 $S$ 上的拟凸函数，对每个 $\lambda \in (0,1)$ 有

$$f(\lambda \hat{x} + (1-\lambda)\bar{x}) \leqslant f(\bar{x}).$$

对充分小的 $\lambda$，$\lambda \hat{x} + (1-\lambda)\bar{x} \in S \cap N_\delta(\bar{x})$，这与 $\bar{x}$ 是严格局部极小点相矛盾. 因此，$\bar{x}$ 也是严格全局极小点.

16. 设 $S$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中一个非空开凸集，$f$ 是定义在 $S$ 上的可微实函数. 如果对任意两点 $x^{(1)}$，$x^{(2)} \in S$，有 $(x^{(1)} - x^{(2)})^{\mathrm{T}} \nabla f(x^{(2)}) \geqslant 0$ 蕴含 $f(x^{(1)}) \geqslant f(x^{(2)})$，则称 $f(x)$ 是伪凸函数.

试证明：若 $f(x)$ 是开凸集 $S$ 上的伪凸函数，且对某个 $\bar{x} \in S$ 有 $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$，则 $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 在 $S$ 上的全局极小点.

**证** 设存在 $\bar{x} \in S$ 使得 $\nabla f(\bar{x}) = \mathbf{0}$. 由于 $f(x)$ 是开凸集 $S$ 上的伪凸函数，按伪凸函数的定义，对任意的 $x \in S$，$(x - \bar{x})^{\mathrm{T}} \nabla f(\bar{x}) = 0$ 蕴含 $f(x) \geqslant f(\bar{x})$，因此 $\bar{x}$ 是 $f(x)$ 在 $S$ 上的全局极小点.