垂直轴定理的推广及其应用*

周检检 申法瑞
(武汉钢铁学院)

由垂直定理可知:薄板状刚体对于板面内两条互相垂直转动惯量的和,等于这个物体对过该二轴交点垂直于板面内的那条转轴的转动惯量.众所周知,此定理能简化转动惯量的计算,尤其是在由于对称性使得两个转动惯量相等的场合有其独特优点.

但是,由于垂直轴定理只适用薄板状物体,其用途大大受到限制.为了简化三度刚体转动惯量的计算,我们由三度刚体转动惯量定义式,推导出刚体的一般性垂直轴定理.其具体推导过程如下:

图1所示 x,y,z 轴垂直相交于原点 O,设:J_x、J_y、J_z 分别表示三度刚体关于互相垂直的 x、y、z 轴的转动惯量,其定义是:

$$
\begin{aligned}
J_x &= \int (y^2+z^2)\mathrm{d}m \\
J_y &= \int (x^2+z^2)\mathrm{d}m \\
J_z &= \int (x^2+y^2)\mathrm{d}m
\end{aligned} \tag{1}
$$

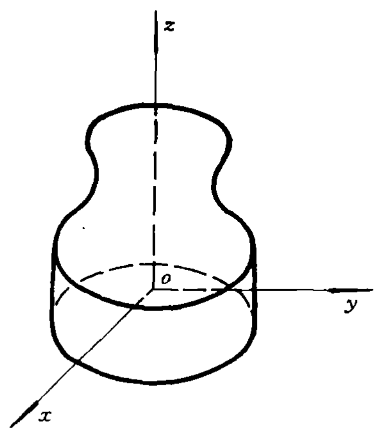

图1

由(1)式,$J_x+J_y=\int(x^2+y^2+2z^2)\mathrm{d}m$

$=J_z+2\int z^2\mathrm{d}m$

所以 $$J_z=J_x+J_y-2\int z^2\mathrm{d}m. \tag{2}$$

这就是刚体的一般性垂直轴定理.

虽然上述推导过程十分简单,但其结果的意义是不容忽视的.首先,(2)式给出的计算转动惯量的方法比直接用(1)式简单得多.其次,由(2)式能推断出用其它方法不易得到的某些一般关系.例如:(2)式的右边的积分不能为负,可立即得到不等式:$J_z\leqslant J_x+J_y$.对于薄板状刚体,(2)式中积分项为0,可得:$J_z=J_x+J_y$.这就是垂直轴定理的常见形式.所以,我们可以说垂直轴定理是刚体的一般性垂直轴定理的一个特例.

下面通过实例说明刚体的一般性垂直轴定理的应用.

例1 设一密度均匀,截面是任意形状的圆柱体,截面积为 S,质量为 M,体积为 V,如图2所示.

对于这种形状的物体,可取图示的的质量元:

* 本文1991—03—23收到.

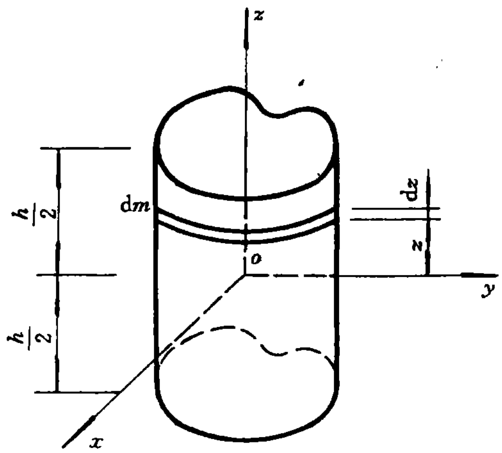

图 2

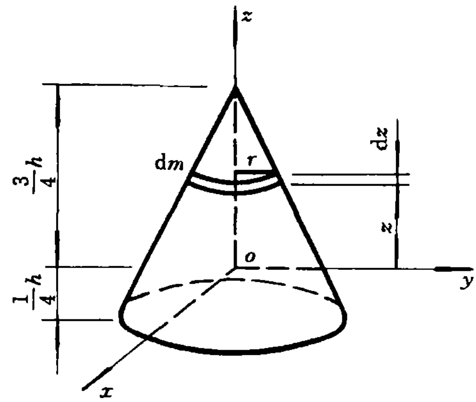

图 3

$$dm=(M/V)Sdz=(M/h)dz. \tag{3}$$

将(3)代入(2)得：

$$J_x=J_z+J_y-(2M/h)\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}z^2dz$$

经计算其结果为：

$$J_x=J_z+J_y-(Mh^2/6) \tag{4}$$

对于密度均匀的圆柱体，设圆柱体的底面半径为 R，质量为 M. 由于对称性，$J_x=J_y$；又知：$J_z=\frac{1}{2}MR^2$；将 J_z 代入(4)式，可得：$\frac{1}{2}MR^2=2J_x-(Mh^2/6)$. 所以

$$J_x=\frac{1}{12}Mh^2+\frac{1}{4}MR^2. \tag{5}$$

这就是熟知的关于通过质心且垂直于圆柱轴的旋转圆柱体的转动惯量.

例 2 设一密度均匀的直圆锥体，底面半径为 R，锥体高度为 h，质量为 M，如图 3 所示.

过圆锥体的质心建立如图 3 所示的直角坐标系. 由于对称性，$J_x=J_y$；又知：$J_z=\frac{3}{10}MR^2$；则(2)式变为：

$$\frac{3}{10}MR^2=2J_x-2\int z^2dm$$

所以

$$J_x=\frac{3}{20}MR^2+\int z^2dm \tag{6}$$

取图示的质量元：$dm=(M/V)\pi r^2dz$，将 $V=\frac{1}{3}\pi R^2h$ 及 $r=\frac{3}{4}R-(z/h)R$ 代入上式得：$dm=(3M/h)(\frac{3}{4}-\frac{z}{h})^2dz$，所以

$$J_x=\frac{3}{20}MR^2+\int_{-\frac{h}{4}}^{\frac{3}{4}h}z^2(3M/h)(\frac{3}{4}-\frac{z}{h})^2dz.$$

经计算得：

$$J_x=\frac{3M}{20}(R^2+h^2/4) \tag{7}$$

例 3　设一密度均匀的正八面体，边长为 a，质量为 M，体积为 V，如图 4 所示.

过质心建立如图示的直角坐标系，由于对称性，$J_x=J_y=J_z$，仍可用(8)式计算.由图可知，高 h 和边长 a 的关系为：

$h=\frac{\sqrt{2}}{2}a$，取图示的质量元：

$\mathrm{d}m=(M/V)(a-\sqrt{2}z)^2\mathrm{d}z.$

将 $\mathrm{d}m$ 代入(8)可得：

$$J_z=2\int z^2(M/V)(a-\sqrt{2}z)^2\mathrm{d}z$$
$$=4(m/V)\int_0^h(a-\sqrt{2}z)^2z^2\mathrm{d}z$$
$$=(\sqrt{2}/30)(M/V)a^5.$$

考虑到：$V=(\sqrt{2}/3)a^3$ 可得：

$$J_z=\frac{1}{10}Ma^2=\frac{1}{5}Mh^2. \tag{8}$$

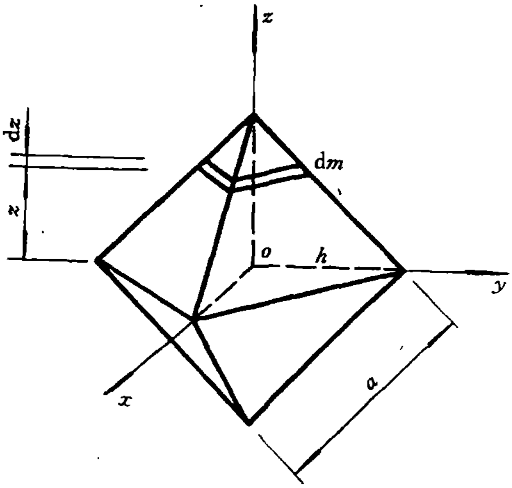

图 4

从上面几个例子，我们不难得出如下结论：

1. 刚体的一般性垂直轴定理为求三度刚体，特别是圆柱体和旋转体的转动惯量提供了一种简单而又有力的计算工具.对于轴向转动惯量已知的旋转体，为求横向转动惯量，该定理总是最简单的计算程序.

2. 对于正多面体，只要当由于对称性使得 $J_x=J_y=J_z$ 时，刚体的一般性垂直轴定理提供的计算程序也是最简单的.

参 考 文 献

1　周衍柏编.理论力学教程.北京：人民教育出版社，1979

2　顾建中编.普通物理学简明教程.北京：人民教育出版社，1977

3　[西德]A 贝茨等著.休特工程师手册.北京：机械工业出版社，1984