实验五

最优化方法

最优化方法

许多生产计划与管理问题都可以归纳为最优化问题，最优化模型是数学建模中应用最广泛的模型之一，其内容包括线性规划、整数线性规划、非线性规划、动态规划、变分法、最优控制等.

近几年来的全国大学生数学建模竞赛中，几乎每次都有一道题要用到此方法.

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
s.t. \quad & g_i(x) \le 0, \quad i = 1,2,\cdots,m \\
& h_j(x) = 0 \quad j = 1,2,\cdots,p \\
& x \in \Omega
\end{aligned}
$$

目标函数

约束条件

可行解域

线性规划

$$
\begin{aligned}
\min \quad & f(x) \\
s.t. \quad & g_i(x) \le 0, \quad i = 1,2,\cdots,m \\
& h_j(x) = 0 \quad j = 1,2,\cdots,p \\
& x \in \Omega
\end{aligned}
$$

若 $f(x)$，$g_i(x)$，$h_i(x)$ 都是线性函数，则称为线性规划问题，简称 LP 问题

引例（任务分配问题)

某车间有甲、乙两台机床，可用于加工三种工件。假定这两台车床的可用台时数分别为800和900，三种工件的数量分别为400、600和500，且已知用三种不同车床加工单位数量不同工件所需的台时数和加工费用如下表。问怎样分配车床的加工任务，才能既满足加工工件的要求，又使加工费用最低？

车床类型	单位工件所需加工台时数			单位工件的加工费用			可用台时数
	工件1	工件2	工件3	工件1	工件2	工件3	
甲	0.4	1.1	1.0	13	9	10	800
乙	0.5	1.2	1.3	11	12	8	900

解 设在甲车床上加工工件1、2、3的数量分别为x_1、x_2、x_3，在乙车床上加工工件1、2、3的数量分别为x_4、x_5、x_6。可建立以下线性规划模型：

$$\min z = 13x_1 + 9x_2 + 10x_3 + 11x_4 + 12x_5 + 8x_6$$

$$s.t.\begin{cases} x_1 + x_4 = 400 \\ x_2 + x_5 = 600 \\ x_3 + x_6 = 500 \\ 0.4x_1 + 1.1x_2 + x_3 \le 800 \\ 0.5x_4 + 1.2x_5 + 1.3x_6 \le 900 \\ x_i \ge 0, i = 1,2,\cdots,6 \end{cases}$$

用MATLAB优化工具箱解线性规划

1、模型： $\min z=cX$

$$s.t. \quad AX \le b$$

命令：**x=linprog（c，A，b）**

2、模型： $\min z=cX$

$$\begin{aligned} s.t. \quad & AX \le b \\ & Aeq \cdot X = beq \end{aligned}$$

命令：**x=linprog（c，A，b，Aeq, beq）**

注意：若没有不等式：$AX \le b$ 存在，则令A=[ ]，b=[ ].

3、模型：min $z=cX$

$$s.t.\quad AX \le b$$

$$Aeq \cdot X = beq$$

VLB≤X≤VUB

命令：[1] **x=linprog（c，A，b，Aeq, beq, VLB，VUB）**

[2] **x=linprog（c，A，b，Aeq, beq, VLB，VUB, X_0）**

注意：若没有等式约束: $Aeq \cdot X = beq$ 则令Aeq=[ ], beq=[ ]; 其中X_0表示初始点

4、命令：**[x,fval]=linprog(…)**

返回最优解 x 及 x 处的目标函数值fval.

例 1 $\min z = 6x_1 + 3x_2 + 4x_3$

$$s.t.\quad x_1 + x_2 + x_3 = 120$$
$$x_1 \ge 30$$
$$0 \le x_2 \le 50$$
$$x_3 \ge 20$$

$$\Longleftrightarrow$$

$$\min \quad z = (6 \quad 3 \quad 4)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$s.t. \quad (1 \quad 1 \quad 1)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 120 \ ,$$

$$(0 \quad 1 \quad 0)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \le 50$$

$$\begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 20 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

解：编写M文件xxgh2.m如下：

```
c=[6 3 4];
A=[0 1 0];
b=[50];
Aeq=[1 1 1];
beq=[120];
vlb=[30,0,20];
vub=[];
[x,fval]=linprog(c,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)
```

例2 任务分配问题解答

改写为：$$\min z = (13 \quad 9 \quad 10 \quad 11 \quad 12 \quad 8)X$$

S.t.

$$\begin{pmatrix} 0.4 & 1.1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.2 & 1.3 \end{pmatrix} X \le \begin{pmatrix} 800 \\ 900 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 400 \\ 600 \\ 500 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} \ge 0$$

编写M文件如下:

```
 f = [13 9 10 11 12 8];
A =  [0.4 1.1 1 0 0 0;
        0 0 0 0.5 1.2 1.3];
b = [800; 900];
Aeq=[1 0 0 1 0 0; 0 1 0 0 1 0; 0 0 1 0 0 1];
beq=[400 600 500];
vlb = zeros(6,1);
vub=[];
[x,fval] = linprog(f,A,b,Aeq,beq,vlb,vub)
```

结果:

x =

0.0000

600.0000

0.0000

400.0000

0.0000

500.0000

fval =1.3800e+004

即在甲机床上加工600个工件2,在乙机床上加工400个工件1、500个工件3，可在满足条件的情况下使总加工费最小为13800。

非线性规划

$$\min F(X)$$
$$s.t \quad G(X) \le 0$$
$$Ceq(X)=0$$
$$AX \le b$$
$$AeqX=beq$$
$$VLB \le X \le VUB$$

其中X为n维变元向量，$G(X)$与$Ceq(X)$均为非线性函数组成的向量.

用Matlab求解上述问题，基本步骤分三步：

1. 首先建立M文件*fun.m*,定义目标函数F（X）：

```
function f=fun(X);
f=F(X);
```

2. 若约束条件中有非线性约束：$G(X) \le 0$或$Ceq(X)=0$，则建立M文件nonlcon.m定义函数G(X)与Ceq(X)：

```
function [G,Ceq]=nonlcon(X)
G=...
Ceq=...
```

3．建立主程序.非线性规划求解的函数是fmincon,命令的基本格式如下:

(1) x=fmincon('fun',X_0,A,b)

(2) x=fmincon('fun',X_0,A,b,Aeq,beq)

(3) x=fmincon('fun',X_0,A,b, Aeq,beq,VLB,VUB)

(4) x=fmincon('fun',X_0,A,b,Aeq,beq,VLB,VUB,'nonlcon')

(5)x=fmincon('fun',X_0,A,b,Aeq,beq,VLB,VUB,'nonlcon',options)

输出极值点　M文件　迭代的初值　变量上下限　参数说明

(6) [x,fval]= fmincon(...)

(7) [x,fval,exitflag]= fmincon(...)

(8) [x,fval,exitflag,output]= fmincon(...)

注意：fmincon函数可能会给出局部最优解，这与初值X0的选取有关

例3 $$\min f=-x_1-2x_2+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$$

$$\text{s.t}\quad \begin{aligned} 2x_1+3x_2 &\le 6\\ x_1+4x_2 &\le 5\\ x_1,\ x_2 &\ge 0\end{aligned}$$

1、**写成标准形式:**

$$\min \quad f=-x_1-2x_2+\frac{1}{2}x_1^2+\frac{1}{2}x_2^2$$

$$s.t.\quad \begin{pmatrix} 2x_1+3x_2-6 \\ x_1+4x_2-5 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \le \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

2、先建立M-文件 fun3.m:

```
function f=fun3(x);
f=-x(1)-2*x(2)+(1/2)*x(1)^2+(1/2)*x(2)^2
```

3、再建立主程序youh2.m:

```
x0=[1;1];
A=[2 3 ;1 4]; b=[6;5];
Aeq=[];beq=[];
VLB=[0;0]; VUB=[];
[x,fval]=fmincon('fun3',x0,A,b,Aeq,beq,VLB,VUB)
```

4、运算结果为:

x = 0.7647   1.0588

fval = -2.0294

实 验 六

MATLAB解非线性方程和方程组

一、roots的基本用法

n次代数方程的一般形式是

$$p_n(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1} x + a_n = 0$$

记向量 $p = (a_0, \quad a_1, \cdots, \quad a_{n-1}, \quad a_n)$

在Matlab中求该方程的根的命令是：roots(p)

例如： $$3x^5 + x^4 - 2x^2 + 1 = 0$$

只需在命令窗口中依次键入：

>>p=[3 1 0 -2 0 1]

(注意若方程不含x的某次幂，则该次幂系数为0，且不可省略)

>>r=roots(p)

Matlab求解非线性方程

- 非线性方程的标准形式为f(x)=0
- 函数 fzero
- 格式 x = fzero (fun,x0) %用fun定义表达式 f(x)，x0为初始解。

  x = fzero (fun,x0,options)

  [x,fval] = fzero(…) %fval=f(x)

  [x,fval,exitflag] = fzero(…)

  [x,fval,exitflag,output] = fzero(…)

例 求

$x^3 - 2x - 5 = 0$ 的根

解：>> fun='x^3-2*x-5';

>> z=fzero(fun,2) %初始估计值为2

结果为

z = 2.0946

二、fzero的基本用法

首先确定一个包含零点的区间；在这个区间内画函数f(x)的图形，观察图形与x轴交点的横坐标的近似值，以此作为根的初始近似值；

（1）任意一元函数零点的精确解

求一元函数零点指令的最简格式

r=fzero(fun,x0)

```
>>fzero(inline('x^3-2*x-5'),0)
>> fzero(inline('x^3-2*x-5'),[1,3])
```

说明：

(1) fzero只能求取一元函数穿越横轴的零点。它不会确定连续函数曲线那种仅与横轴相切而不穿越横轴的零点。如｜sin(x)｜中的所有零点；$(x-1)^2\sin(x)$中x=1的零点。

(2) fzero中的第一个输入量’fun’可用以下3种方式表达：

①字符串方式；

②内联函数（inline function）

③M函数文件的函数句柄（Function handle）

求一元函数零点指令的最完整格式

[r,f_r,exitflag,output]=fzero(fun,x0,options,P1,P2,……)

[x,fvalue,ef,out]=fzero(inline('x^3-2*x-5'),0)

x =   2.0946
fvalue = -8.8818e-016
ef =   1
out =
intervaliterations: 14
iterations: 10
funcCount: 39
algorithm: 'bisection, interpolation'
message: 'Zero found in the interval [-2.56, 2.56]'

Matlab求解非线性方程组

- 非线性方程组的标准形式为：F(x) = 0
- 其中：x为向量，F(x)为函数向量。
- 函数 **fsolve**
- 格式 x = fsolve(fun,x0) %用fun定义向量函数，其定义方式为：先定义方程函数function F = myfun (x)。
- F =[表达式1；表达式2；…表达式m] %保存为myfun.m，并用下面方式调用：x = fsolve(@myfun,x0)，x0为初始估计值。
- x = fsolve(fun,x0,options)

  [x,fval] = fsolve(…) %fval=F(x)，即函数值向量

  [x,fval,exitflag] = fsolve(…)

  [x,fval,exitflag,output] = fsolve(…)

  [x,fval,exitflag,output,jacobian] = fsolve(…) %jacobian为解x处的Jacobian阵。
- 其余参数与前面参数相似。

三、fsolve的基本用法

fsolve命令用于非线性方程组的求解（当然也可以用于非线性方程的求根，但效果一般不如fzero程序），最一般的调用格式是：

[x,fv,ef,out,jac]=fsolve(@fun,x0,opt,p1,p2……)

例如：用fsolve求解下面的例

首先建立如下exp9.m文件计算函数值

再在command windows中输入：

[x,fv,ef,out,jac]=fsolve(@exp9,x0,[ ])

例

求下述方程组在$P_0=(1,1)$附近的解。

$$\begin{cases} u(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2-5=0 \\ v(x_1,x_2)=(x_1+1)x_2-(3x_1+1)=0 \end{cases}$$

例　求系统的根

$$2x_1 - x_2 = e^{-x_1}$$
$$-x_1 + 2x_2 = e^{-x_2}$$

解：

设初值点为x0=[-5 -5]。

先建立方程函数文件，并保存为myfun.m：

```
function F = myfun(x)
      F = [2*x(1) - x(2) - exp(-x(1));
             -x(1) + 2*x(2) - exp(-x(2))];
```

然后调用优化程序

```
 x0 = [-5; -5];              % 初始点
 options=optimset('Display','iter');   % 显示输出信息
 [x,fval] = fsolve(@myfun,x0,options)
```

结果为

实 验 七

零件的参数设计

- 一件产品通常是由多个零部件组装而成，标志产品性能的某个参数取决于这些零件的参数。零件参数包括标定值和容差两部分 。
- 进行零件参数设计，就是确定其标定值和容差。
  需要考虑两方面的因素：

① 质量损失

② 零件制造成本

粒子分离器某参数（记为y），由7个零件的参数$x=(x_1,x_2,\ldots x_7)$决定，经验公式为

$$y=174.42\left(\frac{x_1}{x_5}\right)\left(\frac{x_3}{x_2-x_1}\right)^{0.85}\sqrt{\frac{1-2.62\left(1-0.36\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{-0.56}\right)^{1.5}\left(\frac{x_4}{x_2}\right)^{1.16}}{x_6x_7}}$$

y的目标值（记作y_0）为1.5.当y偏离$y_0\pm0.1$时，质量损失为1000元；当y偏离$y_0\pm0.3$时，产品为废品，质量损失为9000元.

零件参数的标定值有一定的容许变化范围，容差分为A,B,C三个等级，用与标定值的相对值表示，A为±1%，B为±5%，C为±10%. 7个零件参数标定值的容许范围及不同容差等级零件的成本（单位：元）如下表

	标定值容许范围	C等	B等	A等
x_1	[0.075，0.125]	/	25	/
x_2	[0.225，0.375]	20	50	/
x_3	[0.075，0.125]	20	50	200
x_4	[0.075，0.125]	50	100	500
x_5	[0.125，1.875]	50	/	/
x_6	[12，20]	10	25	100
x_7	[0.5625，0.9375]	/	25	100

- **问题**
- 现在要进行批量生产，每批生产1000个。在原设计中7个零件参数的容差均取最便宜的等级，标定值分布为

$$x_1 = 0.1, x_2 = 0.3, x_3 = 0.1, x_4 = 0.1, x_5 = 1.5, x_6 = 16, x_7 = 0.75$$

- 分析原方案的合理性，并给出最优的设计方案

假设:

（1）7个零件的参数均服从正态分布且独立，即

$$x_i \sim N(x_{i0}, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots, 7$$

（2）参数 x_i 的容差记为 Δx_i，其关于标定值 x_0 的相对值记为 r_i，即

$$\Delta x_i = r_i x_{i0}, \Delta x_i = 3\sigma_i, i = 1, 2, \cdots, 7$$

$$r = (r_1, r_2, \cdots, r_7)^T$$

（3）记第 i 种零件的成本为 $c_i(r_i)$,则每件产品的总成本为 $\sum_{i=1}^{7} c_i(r_i)$

- 线性近似及其合理性
- $\Delta y = F(x + \Delta x) - F(x)$

$$\approx \frac{\partial F}{\partial x}\Big|_{x=x_0} \Delta x$$

$$\Delta x_i = x_i - x_{i0} \sim N(0, \sigma_i^2), i = 1, 2, \cdots, 7$$

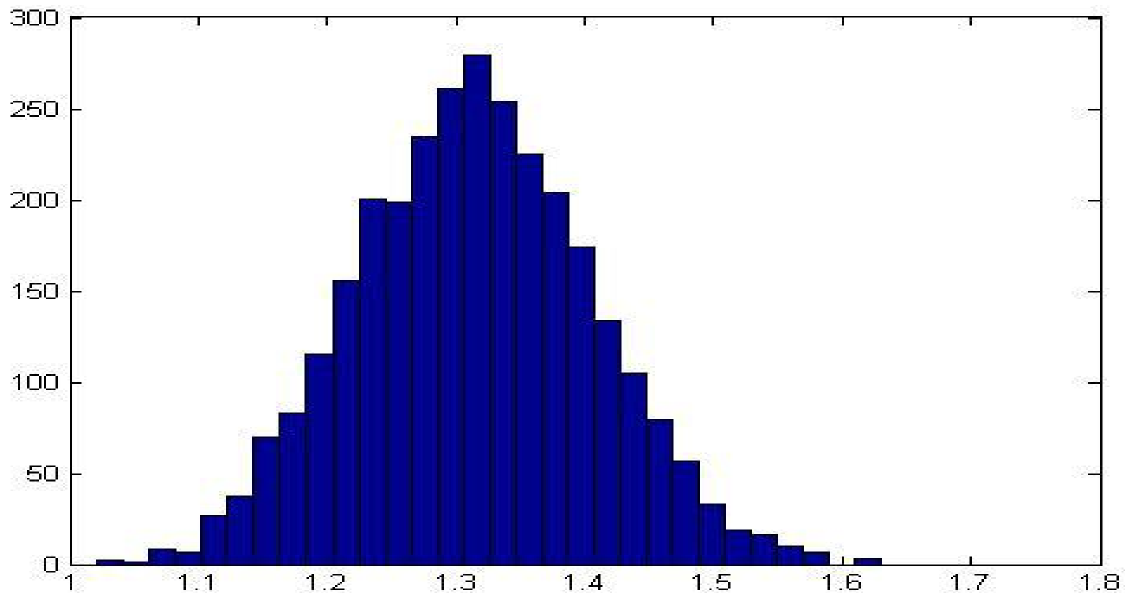
Δy的方差σ_y^2 可近似地表示为

$$\sigma_y^2 = \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 \Bigg|_{x=x_0} \sigma_i^2 = \sum_{i=1}^{7} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i}\right)^2 \Bigg|_{x=x_0} \frac{r_i^2 x_{i0}^2}{9}$$

$$\Delta y \sim N(0, \sigma_y^2), y \sim N(F(x_0), \sigma_y^2)$$

分布拟合的 χ^2 检验

- 数值模拟



目标函数描述

- 质量损失函数

$$L(Y)=\begin{cases} 0, & |Y-y_0|<0.1 \\ 1000, & 0.1\le |Y-y_0|<0.3 \\ 9000, & |Y-y_0|\ge 0.3 \end{cases}$$

Y的概率密度函数

$$f(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_y}e^{-\frac{(y-F(x_0))^2}{2\sigma_y^2}},-\infty<y<+\infty$$

正品的概率为

$$p_1=P(|Y-y_0|<0.1)=\int_{y_0-0.1}^{y_0+0.1}f(y)dy$$

次品的概率为

$$p_2 = P(0.1 \leqslant |Y - y_0| < 0.3) = \int_{y_0-0.3}^{y_0-0.1} f(y)dy + \int_{y_0+0.1}^{y_0+0.3} f(y)dy$$

废品的概率为

$$p_3 = P(|Y - y_0| \geqslant 0.3) = \int_{-\infty}^{y_0-0.3} f(y)dy + \int_{y_0+0.3}^{+\infty} f(y)dy$$

- 平均每件产品的质量损失费用为

$$EL(Y)=1000p_2+9000p_3$$

因此每个产品的总费用c为

$$c=1000p_2+9000p_3+\sum_{i=1}^{7}c_i(r_i)$$

模型建立与求解

$$p_2 = P(0.1 \le |Y - y_0| < 0.3) = \Phi(\frac{1.4 - F(x_0)}{\sigma_y}) - \Phi(\frac{1.2 - F(x_0)}{\sigma_y})$$

$$+\Phi(\frac{1.8 - F(x_0)}{\sigma_y}) - \Phi(\frac{1.6 - F(x_0)}{\sigma_y})$$

$$p_3 = P(|Y - y_0| \ge 0.3) = 1 - \Phi(\frac{1.8 - F(x_0)}{\sigma_y}) + \Phi(\frac{1.2 - F(x_0)}{\sigma_y})$$

目标函数为

$$c = \sum_{i=1}^{7} \sum_{j=1}^{3} c_{ij} d_{ij} 1000 p_2 + 9000 p_3$$

$$\min\ c(x_0,d)=\sum_{i=1}^{7}\sum_{j=1}^{3}c_{ij}d_{ij}+1000\left[\Phi\left(\frac{1.4-F(x_0)}{\sigma_y}\right)+8\Phi\left(\frac{1.2-F(x_0)}{\sigma_y}\right)\right.$$

$$\left.-\Phi\left(\frac{1.6-F(x_0)}{\sigma_y}\right)-8\Phi\left(\frac{1.8-F(x_0)}{\sigma_y}\right)\right]+9000$$

$$s.t.\qquad a_i<x_i<b_i, i=1,2,\cdots,7$$

$$\sum_{j=1}^{3}d_{ij}=1, j=1,2$$

$$d_{ij}\in N, d_{11}=d_{13}=d_{21}=d_{51}=d_{52}=d_{73}=0$$

- 1. 例子相关问题：

（1）如何进行产品目标参数y的分布检验？

（正态分布检验，正态分布的参数（方差）检验）

（2）评价给出的两种算法，优缺点分析及理由。

（第一种enperf.m myfun.m,第二种param9_4.m）

（两种算法计算结果，与教材的结果也有差异，请检查是否有错误的地方，不同结果怎么评判好坏？）

（3）有更好的算法吗？并说明改进之处。

- 2. 校内选拔赛题

$$y = 0.01x_{10}^2 + 0.01x_5^2 + \sum_{i=1}^{10} x_i$$

经验关系

- 考虑某类产品，其由10个主要部件及若干辅件构成。 x_i分别表示主要零部件的质量参数，y表示产品的质量参数。产品质量参数主要由主要零部件确定，辅件等的影响一般不超过产品标定值的5%。
- 附件1是10个主要零部件的各等级品市场售价（单位：百元）;附件2是200件产品的质量参数抽查统计;附件3是该类产品各等级品市场售价（百元）。
- 请解决下列问题：

（1）检验此数据用上述经验关系是否合适?

（2）原产品设计方案是各零部件都选最好的等级，该方案是否合理？请设计最合理的方案。