Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Бадмаев Чингис Юрьевич

Метод Якоби поиска собственных чисел

Практическая работа

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

1. Постановка задачи

В данном задании речь идет о нахождении собственных чисел матрицы A с помощью метода Якоби.

2. Теорминимум

Итерационный процесс метода Якоби представлен формулой

$$A^{(k+1)} = \left(H^{(k)}\right)^{\mathrm{T}} A^{(k)} H^{(k)},$$

где матрица $H^{(k)}$ называется матрицей вращения Якоби.

$$H^k = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ i \\ \\ \\ \\ j \\ \\ \\ \\ \end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccccccc} & & & i & & & & j & & & \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \cos\phi^{(k)} & 0 & \dots & 0 & \text{-}\sin\phi^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \sin\phi^{(k)} & 0 & \dots & 0 & \cos\phi^{(k)} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array}.$$

На k-й итерации выбирается максимальный по модулю недиагональный элемент $a_{ij}^{(k)}$, для которого определяется матрица $H^{(k)}$, приводящая элемент $a_{ij}^{(k+1)}$ матрицы $A^{(k+1)}$ к нулю.

Угол $\phi^{(k)}$ определяется по формуле

$$\phi^{(k)} = \frac{1}{2}\arctan\frac{2a_{ij}^{(k)}}{a_{ii}^{(k)} - a_{jj}^{(k)}}.$$

Итерационный процесс идет до тех пор, пока максимальный по модулю недиагональный элемент $a_{ij}^{(k)}$ больше заданной точности ε.

В итоге собственные числа матрицы A лежат на диагонали матрицы $A^{(k)}$.

3. Тесты

В качестве тестов используем матрицы Гильберта порядка 50, 60, 70, 80. Правый столбец – поиск оптимального элемента, где он наибольший наддиагональный по модулю. Левый столбец – поиск оптимального элемента с помощью кругов Гершгорина.

```
Матрица Гильбертва 50 порядка

Погрешность: 0.01
Количество итераций: 147
||lambdaAcc - lambda|| = 0.14762565110111972

Погрешность: 0.001
Количество итераций: 183
||lambdaAcc - lambda|| = 0.14757350186458798

Погрешность: 0.0001
Количество итераций: 183
||lambdaAcc - lambda|| = 0.14757350186458798

Погрешность: 1e-05
Количество итераций: 184
||lambdaAcc - lambda|| = 0.14757147864318373
```

```
Матрица Гильбертва 50 порядка

Погрешность: 0.01
Количество итераций: 154
||lambdaAcc - lambda|| = 0.14871656038197573

Погрешность: 0.001
Количество итераций: 314
||lambdaAcc - lambda|| = 0.004054006126851481

Погрешность: 0.0001
Количество итераций: 471
||lambdaAcc - lambda|| = 0.0005770589186387965

Погрешность: 1e-05
Количество итераций: 618
||lambdaAcc - lambda|| = 7.206232800533228e-05
```

```
Матрица Гильбертва 60 порядка

Погрешность: 0.01
Количество итераций: 180
||lambdaAcc - lambda|| = 0.1653531087854459

Погрешность: 0.001
Количество итераций: 211
||lambdaAcc - lambda|| = 0.16530110806920797

Погрешность: 0.0001
Количество итераций: 211
||lambdaAcc - lambda|| = 0.16530110806920797

Погрешность: 1e-05
Количество итераций: 211
||lambdaAcc - lambda|| = 0.16530110806920797
```

```
Матрица Гильбертва 60 порядка

Погрешность: 0.01
Количество итераций: 190
||lambdaAcc - lambda|| = 0.1665316944954425

Погрешность: 0.001
Количество итераций: 391
||lambdaAcc - lambda|| = 0.005161427515732019

Погрешность: 0.0001
Количество итераций: 612
||lambdaAcc - lambda|| = 0.0008420595576923628

Погрешность: 1e-05
Количество итераций: 807
||lambdaAcc - lambda|| = 1.693968379547375e-05
```

```
Матрица Гильбертва 70 порядка

Погрешность: 0.01
Количество итераций: 213
||lambdaAcc - lambda|| = 0.1809894928198786

Погрешность: 0.001
Количество итераций: 256
||lambdaAcc - lambda|| = 0.18093526724393907

Погрешность: 0.0001
Количество итераций: 364
||lambdaAcc - lambda|| = 0.033826406807361584

Погрешность: 1e-05
Количество итераций: 365
||lambdaAcc - lambda|| = 0.033826406806355735
```

```
Матрица Гильбертва 70 порядка

Погрешность: 0.01
Количество итераций: 221
||lambdaAcc - lambda|| = 0.18225803518112177

Погрешность: 0.001
Количество итераций: 462
||lambdaAcc - lambda|| = 0.006368923808159694

Погрешность: 0.0001
Количество итераций: 720
||lambdaAcc - lambda|| = 0.0010888642335213632

Погрешность: 1e-05
Количество итераций: 983
||lambdaAcc - lambda|| = 2.342916428437828e-05
```

```
Матрица Гильбертва 80 порядка

Погрешность: 0.01
Количество итераций: 244
||lambdaAcc - lambda|| = 0.19496672949161922

Погрешность: 0.001
Количество итераций: 300
||lambdaAcc - lambda|| = 0.19491108149938513

Погрешность: 0.0001
Количество итераций: 424
||lambdaAcc - lambda|| = 0.03860875900222459

Погрешность: 1e-05
Количество итераций: 424
||lambdaAcc - lambda|| = 0.03860875900222459
```

```
Матрица Гильбертва 80 порядка

Погрешность: 0.01
Количество итераций: 249
||lambdaAcc - lambda|| = 0.1963494375386368

Погрешность: 0.001
Количество итераций: 537
||lambdaAcc - lambda|| = 0.007511448808678527

Погрешность: 0.0001
Количество итераций: 830
||lambdaAcc - lambda|| = 0.0013469663261879263

Погрешность: 1e-05
Количество итераций: 1118
||lambdaAcc - lambda|| = 3.0267510240020313e-05
```

4. Ссылка на код

Ссылка