Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Бадмаев Чингис Юрьевич

Метод квадратного корня

Практическая работа

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

1. Постановка задачи

Решение СЛАУ методом квадратного корня. Для плохо обусловленных матриц нужно реализовать метод регуляризации и определить наилучший параметр регуляризации. СЛАУ представим в матричной форме:

$$Ax = b,$$

где A — это матрица системы, x — столбец неизвестных, а b — столбец свободных членов.

2. Теорминимум(Метод квадратного корня)

A — симметричная положительно определенная матрица. Представляем матрицу A в виде

$$A = LL^{\mathrm{T}},$$

где L — нижняя треугольная матрица.

Формулы для нахождения элементов матрицы L:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ki}^2}, \quad 1 < i \leq n;$$

$$l_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum\limits_{k=1}^{i-1} l_{ki} l_{kj}}{l_{ii}}, \quad i < j.$$

Нахождение решения исходной СЛАУ сводится к последовательному решению двух систем с треугольными матрицами:

$$Ly = b, \quad L^{\mathrm{T}} x = y.$$

3. Теорминимум(Регуляризация)

Регуляризация заключается в замене исходной задачи

$$Ax = b$$

задачей минимизации функционала

$$||Ax - b||^2 + \alpha||x||^2,$$

где α — параметр регуляризации. Параметр α фиксирован. При $\alpha \to 0$ приближенное решение стремится к точному решению.

Если A — положительно определенная матрица, то минимазация функционала представляет собой решение системы

$$(A + \alpha E)x_\alpha = b.$$

4. Тесты

```
Матрица:
[1.         0.5        0.33333333 0.25       0.2       ]
[0.5        0.33333333 0.25       0.2        0.16666667]
[0.33333333 0.25       0.2        0.16666667 0.14285714]
[0.25       0.2        0.16666667 0.14285714 0.125     ]
[0.2        0.16666667 0.14285714 0.125      0.11111111]

| alpha    | cond(A)    | cond(A + alpha * E)    | ||x - x_a||     |
|----------|------------|------------------------|-----------------|
| 0.01     | 476607     | 157.653                | 0.130061        |
| 0.001    | 476607     | 1562.91                | 0.0387793       |
| 1e-05    | 476607     | 117931                 | 0.00379261      |
| 1e-07    | 476607     | 462539                 | 0.000139421     |
| 1e-09    | 476607     | 476462                 | 1.43576e-06     |
| 1e-12    | 476607     | 476607                 | 1.43783e-09     |

Наилучшее значение alpha = 1e-12

||x - x_a|| для различных матриц:
| Ax = b      | A + alpha * x = b    | A + 10 * alpha * x = b     | A + 0.1 * alpha * x = b     |
|-------------|----------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 9.78415e-11 | 1.97205e-05          | 0.000197202                | 1.9722e-06                  |
..
```

Рис. 1: Матрица Гильберта 5 порядка

```
Матрица:
[1.         0.5        0.33333333 0.25       0.2        0.16666667]
[0.5        0.33333333 0.25       0.2        0.16666667 0.14285714]
[0.33333333 0.25       0.2        0.16666667 0.14285714 0.125     ]
[0.25       0.2        0.16666667 0.14285714 0.125      0.11111111]
[0.2        0.16666667 0.14285714 0.125      0.11111111 0.1       ]
[0.16666667 0.14285714 0.125      0.11111111 0.1        0.09090909]

| alpha    | cond(A)      | cond(A + alpha * E)    | ||x - x_a||     |
|----------|--------------|------------------------|-----------------|
| 0.01     | 1.49511e+07  | 162.888                | 0.140268        |
| 0.001    | 1.49511e+07  | 1619.72                | 0.0446479       |
| 1e-05    | 1.49511e+07  | 160157                 | 0.00448694      |
| 1e-07    | 1.49511e+07  | 7.77271e+06            | 0.000456846     |
| 1e-09    | 1.49511e+07  | 1.48142e+07            | 8.61772e-06     |
| 1e-12    | 1.49511e+07  | 1.49509e+07            | 8.39662e-09     |

Наилучшее значение alpha = 1e-12

||x - x_a|| для различных матриц:
| Ax = b      | A + alpha * x = b    | A + 10 * alpha * x = b     | A + 0.1 * alpha * x = b     |
|-------------|----------------------|----------------------------|-----------------------------|
| 3.49818e-08 | 0.000250571          | 0.00250554                 | 2.50401e-05                 |
```

Рис. 2: Матрица Гильберта 6 порядка

```
Матрица:
[1.         0.5        0.33333333 0.25       0.2        0.16666667
 0.14285714 0.125      0.11111111 0.1       ]
[0.5        0.33333333 0.25       0.2        0.16666667 0.14285714
 0.125      0.11111111 0.1        0.09090909]
[0.33333333 0.25       0.2        0.16666667 0.14285714 0.125
 0.11111111 0.1        0.09090909 0.08333333]
[0.25       0.2        0.16666667 0.14285714 0.125      0.11111111
 0.1        0.09090909 0.08333333 0.07692308]
[0.2        0.16666667 0.14285714 0.125      0.11111111 0.1
 0.09090909 0.08333333 0.07692308 0.07142857]
[0.16666667 0.14285714 0.125      0.11111111 0.1        0.09090909
 0.08333333 0.07692308 0.07142857 0.06666667]
[0.14285714 0.125      0.11111111 0.1        0.09090909 0.08333333
 0.07692308 0.07142857 0.06666667 0.0625    ]
[0.125      0.11111111 0.1        0.09090909 0.08333333 0.07692308
 0.07142857 0.06666667 0.0625     0.05882353]
[0.11111111 0.1        0.09090909 0.08333333 0.07692308 0.07142857
 0.06666667 0.0625     0.05882353 0.05555556]
[0.1        0.09090909 0.08333333 0.07692308 0.07142857 0.06666667
 0.0625     0.05882353 0.05555556 0.05263158]
```

alpha	cond(A)	cond(A + alpha * E)	||x - x_a||
0.01	1.60249e+13	176.192	0.17995
0.001	1.60249e+13	1752.92	0.0560088
1e-05	1.60249e+13	175193	0.0056311
1e-07	1.60249e+13	1.75192e+07	0.000576228
1e-09	1.60249e+13	1.75173e+09	5.50945e-05
1e-12	1.60249e+13	1.57926e+12	3.51614e-05

```
Наилучшее значение alpha = 1e-12

||x - x_a|| для различных матриц:
```

Ax = b	A + alpha * x = b	A + 10 * alpha * x = b	A + 0.1 * alpha * x = b
0.0290514	50.3858	55.8388	26.6886

Рис. 3: Матрица Гильберта 10 порядка

5. Итог

При уменьшении параметра регуляризации α точность решения регуляризационной системы растет и растут числа обусловленности.

6. Ссылка на код

Ссылка