Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Бадмаев Чингис Юрьевич

Метод простой итерации. Метод Зейделя. Метод релаксации

Практическая работа

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

1. Постановка задачи

СЛАУ решаем методом простой итерации и методом Зейделя. Сравниваем погрешности решений и количество итераций в методе простой итерации и в методе Зейделя. СЛАУ представим в матричной форме:

$$Ax = b,$$

где A — это матрица системы, x — столбец неизвестных, а b — столбец свободных членов.

2. Теорминимум(Метод простой итерации)

Приведем СЛАУ к итерационной форме

$$x = \alpha x + \beta$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Обозначим:

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}};$$

$$\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j;$$

$$\alpha_{ii} = 0.$$

За начальное приближение возьмем столбец сводных членов.

$$x^{(k)} = \alpha x^{(k+1)} + \beta$$

Итерационный процесс идет до тех пор, пока вектор приближений не достигнет заданной точности, т. е. когда

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$$

3. Теорминимум(Метод Зейделя)

Метод Зейделя можно рассматривать как модификацию метода Якоби. Модификация заключается в том, что новые значения $x^{(i)}$ используются сразу же по мере получения.

$$\begin{cases} x_1^{(k+1)} = c_{12}x_2^{(k)} + c_{13}x_3^{(k)} + \ldots + c_{1n}x_n^{(k)} + d_1 \\ x_2^{(k+1)} = c_{21}x_1^{(k+1)} + c_{23}x_3^{(k)} + \ldots + c_{2n}x_n^{(k)} + d_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_n^{(k+1)} = c_{n1}x_1^{(k+1)} + c_{n2}x_2^{(k+1)} + \ldots + c_{n(n-1)}x_{n-1}^{(k+1)} + d_n \end{cases}$$

Обозначим

$$d_i = \frac{b_i}{a_{ii}};$$

$$c_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j;$$

$$c_{ii} = 0.$$

Итерационный процесс идет до тех пор, пока вектор приближений не достигнет заданной точности, т. е. когда

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$$

4. Теорминимум(Метод релаксации)

- Выбирают начальное приближение $\mathbf{x}^{(0)}$.
- Вычисляют невязки $\delta_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(0)} - b_i$.
- Находят $x_1^{(1)}$, удовлетворяющее равенству $a_{i1} x_1^{(1)} + \sum_{j=2}^{n} a_{ij} x_j^{(0)} = b_i$, где i — номер уравнения с максимальной по модулю невязкой.
- Затем подсчитываем невязки $\delta_j = a_{j1} x_1^{(1)} + \sum_{l=2}^{n} a_{jl} x_j^{(0)} - b_j$, $j \neq i$
- и подбираем $x_2^{(1)}$, удовлетворяющее равенству $a_{j1} x_1^{(1)} + a_{j2} x_2^{(1)} + \sum_{l=3}^{n} a_{jl} x_l^{(0)}$, где j — номер уравнения с наибольшей по модулю невязкой.
- И т.д., пока не используем все n уравнений. $\Leftrightarrow$ Найдем все $x_i^{(1)}$.
- Тогда начинаем второй цикл, аналогично, но вместо $\mathbf{x}^{(0)}$ используется $\mathbf{x}^{(1)}$.
- Повторение циклов продолжают до тех пор, пока не достигнут требуемой точности.

5. Тесты

```
Матрица:
[1.  0.5]
[0.5        0.33333333]
Погрешность: 0.0001
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 103
   ||x - x_a||: 3.209057829422238e-05
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 42
   ||x - x_a||: 0.00024079087618882373


Погрешность: 1e-07
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 151
   ||x - x_a||: 3.219940967511304e-08
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 66
   ||x - x_a||: 2.416074249253481e-07


Погрешность: 1e-10
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 199
   ||x - x_a||: 3.2335390810196794e-11
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 90
   ||x - x_a||: 2.4238119505898795e-10


Погрешность: 1e-13
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 248
   ||x - x_a||: 1.0345658394727079e-13
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 114
   ||x - x_a||: 2.0495186137532011e-13
```

```
Матрица:
[50 10 20]
[ 70  82 -14]
[  5 -11  20]
Погрешность: 0.0001
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 47
   ||x - x_a||: 0.00026714351684353776
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 24
   ||x - x_a||: 0.00012122346711829667


Погрешность: 1e-07
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 76
   ||x - x_a||: 2.3196938547862793e-07
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 37
   ||x - x_a||: 7.672965860911897e-08


Погрешность: 1e-10
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 104
   ||x - x_a||: 2.5682043722303443e-10
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 49
   ||x - x_a||: 8.557520524739113e-11


Погрешность: 1e-13
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 133
   ||x - x_a||: 1.8882932218273128e-13
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 61
   ||x - x_a||: 9.352480803022575e-14
```

```
Матрица:
[-400.6  199.8]
[1198.8 -600.4]
Погрешность: 0.0001
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 4610
   ||x - x_a||: 0.004561086988324154
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 1912
   ||x - x_a||: 0.023941279232258885


Погрешность: 1e-07
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 7926
   ||x - x_a||: 4.561062652480573e-06
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 3570
   ||x - x_a||: 2.394114876518729e-05


Погрешность: 1e-10
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 11242
   ||x - x_a||: 4.561794816913303e-09
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 5228
   ||x - x_a||: 2.3942116023978445e-08


Погрешность: 1e-13
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 14560
   ||x - x_a||: 5.254372250153213e-12
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 6878
   ||x - x_a||: 2.5897801160361776e-11
```

```
Матрица:
[-402.9  200.7]
[1204.2 -603.6]
Погрешность: 0.0001
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 4281
   ||x - x_a||: 6.953565738817226e-05
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 1166
   ||x - x_a||: 0.01596949961645067


Погрешность: 1e-07
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 6503
   ||x - x_a||: 6.949311377146162e-08
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 2277
   ||x - x_a||: 1.5959978607582397e-05


Погрешность: 1e-10
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 8725
   ||x - x_a||: 6.839158173521238e-11
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 3388
   ||x - x_a||: 1.5949621746967647e-08


Погрешность: 1e-13
Методе простой итерации:
   Количество итераций: 10057
   ||x - x_a||: 4.843822518161191e-13
Метод Зейделя:
   Количество итераций: 4493
   ||x - x_a||: 1.58214977156548e-11
```

Как итог, метод Зейделя достигает заданной точности за меньшее количество итераций.

6. Тест для метода на больших разреженных матрицах

Тест проводился на матрице размерностью 201. При неусточйчивости матрицы мы варьировали стартовый x и матрицу для метода релаксации. Норма погрешности = 7.53982713e-07

7. Ссылка на код

Ссылка