Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Бадмаев Чингис Юрьевич

# Метод вращений

Практическая работа

Санкт-Петербург
2021

# Оглавление

# 1. Постановка задачи

СЛАУ решаем методом вращений. Сравниваем погрешности решения методом вращения и решения методом квадратного корня. СЛАУ представим в матричной форме:

$$Ax = b,$$

где $A$ — это матрица системы, $x$ — столбец неизвестных, а $b$ — столбец свободных членов.

# 2. Теорминимум

Представляем матрицу $A$ в виде

$$A = QR,$$

где $Q$ — унитарная, а $R$ — правая треугольная матрица. $Q$ представляет собой произведение матриц вращения $T_{ij}$

$$T_{ij} = \begin{array}{c} \begin{matrix} & & & i & & & & j & & & \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & c_{ij} & 0 & \dots & 0 & -s_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & s_{ij} & 0 & \dots & 0 & c_{ij} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \end{array},$$

Метод вращения состоит из прямого и обратного хода. При прямом ходе мы приводим матрицу к треугольному виду, последовательно исключая переменные.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Для исключения $x_1$ из 2-го уравнения вычисляем числа

$$c_{12} = \frac{a_{11}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}, \qquad s_{12} = \frac{a_{21}}{\sqrt{a_{11}^2 + a_{21}^2}}.$$

Заменяем коэффициенты 1-го и 2-го уравнения новыми коэффициентами

$$a_{1j}^{(1)} = c_{12}a_{1j} + s_{12}a_{2j}, \qquad a_{2j}^{(1)} = c_{12}a_{2j} - s_{12}a_{1j},$$
$$b_1^{(1)} = c_{12}b_1 + s_{12}b_2, \qquad b_2^{(1)} = c_{12}b_2 - s_{12}b_1.$$

В итоге получаем

$$\begin{cases} a_{11}^{(1)}x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

Далее исключаем $x_1$ из 3-го уравнения. Числа $s$ и $c$ в данном случае такие:

$$c_{13} = \frac{a_{11}^{(1)}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}}, \qquad s_{13} = \frac{a_{31}}{\sqrt{(a_{11}^{(1)})^2 + a_{31}^2}}.$$

Аналогично заменяем коэффициенты и получаем

$$\begin{cases} a_{11}^{(2)}x_1 + a_{12}^{(2)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(2)}x_n = b_1^{(2)} \\ \qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \qquad\qquad a_{32}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{3n}^{(1)}x_n = b_3^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

За n–1 таких преобразований избавимся от $x_1$ во всех уравнениях системы, кроме первого. В итоге получаем

$$\begin{cases} a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)}x_n = b_1^{(n-1)} \\ \qquad\qquad\qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad a_{n2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases}$$

Проделывая аналогичные действия, получим спустя n–1 шагов прямого хода треугольную матрицу

$$\begin{cases} a_{11}^{(n-1)}x_1 + a_{12}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(n-1)}x_n = b_1^{(n-1)} \\ \qquad\qquad\quad a_{22}^{(n-1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(n-1)}x_n = b_2^{(n-1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad a_{nn}^{(n-1)}x_n = b_n^{(n-1)} \end{cases}$$

Неизвестные вычисляем обратным ходом.

# 3. Тесты

```
Матрица Гильберта 5 порядка:
    ||x - x_rot|| = 5.835418912192294e-11

Матрица Гильберта 6 порядка:
    ||x - x_rot|| = 2.1458688641944377e-08

Матрица Гильберта 10 порядка:
    ||x - x_rot|| = 0.008968815946376428
```

Сравниваем погрешности решений методом вращения и решений методом квадратного корня для матриц Гильберта 5, 6, 10 порядков.

Как итог, метод вращения имеет лучшую погрешность, значит, более точен.

# 4. Ссылка на код

Ссылка