Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Бадмаев Чингис Юрьевич

Метод Галёркина

Практическая работа

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

1. Постановка задачи

В данном задании речь идет о решении краевой задачи методом Галёркина.

2. Теорминимум

Краевая задача вида

$$L[u] = k(x)u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b$$

с краевыми условиями первого рода

$$u(a) = u_a, \quad u(b) = u_b.$$

Основа метода Галёркина — проекционная постановка.

$\Phi = \{$кусочно-дифференцируемые $\varphi : \varphi(a) = \varphi(b) = 0\}$.

Умножим наше уравнение на произвольную функцию $\varphi \in \Phi$ и проинтегрируем по x от a до b, получим интегральное тождество

$$\int\limits_a^b L[u]\varphi dx = \int\limits_a^b f\varphi dx.$$

Если функция u — решение дифференциального уравнения, то она удовлетворяет интегральному тождеству. И наоборот, если интегральное тождество выполняется для любой φ, то $L[u] = f$.

Сформулируем нашу задачу в проекционной постановке: необходимо найти функцию u, которая удовлетворяет интегральному тождеству для произвольной $\varphi \in \Phi$ и для которой выполнены краевые условия.

Решение ищем в виде

$$u = \sum_{i=0}^{N} \alpha_i \varphi_i,$$

где φ_i — некоторые базисные функции.

Подставим общий вид решения в наше уравнение

$$k(x)\sum_{i=0}^{N} \alpha_i \varphi_i'' + p(x)\sum_{i=0}^{N} \alpha_i \varphi_i' + q(x)\sum_{i=0}^{N} \alpha_i \varphi_i - f = 0,$$

$$\alpha_0\big(k(x)\varphi_0'' + p(x)\varphi_0' + q(x)\varphi_0\big) + \alpha_1\big(k(x)\varphi_1'' + p(x)\varphi_1' + q(x)\varphi_1\big) + \ldots$$
$$+ \alpha_N\big(k(x)\varphi_N'' + p(x)\varphi_N' + q(x)\varphi_N\big) - f = 0.$$

Обозначим

$$k(x)\varphi_i'' + p(x)\varphi_i' + q(x)\varphi_i = A_i, \quad i = 0, \dots, N.$$

Строим линейную алгебраическую систему. Для этого умножаем уравнение на φ_i и интегрируем по x от a до b

$$\begin{cases} \alpha_0 \int\limits_a^b A_0\varphi_0 dx + \alpha_1 \int\limits_a^b A_1\varphi_0 dx + \ldots + \alpha_N \int\limits_a^b A_N\varphi_0 dx = \int\limits_a^b f(x)\varphi_0 dx \\ \alpha_0 \int\limits_a^b A_0\varphi_1 dx + \alpha_1 \int\limits_a^b A_1\varphi_1 dx + \ldots + \alpha_N \int\limits_a^b A_N\varphi_1 dx = \int\limits_a^b f(x)\varphi_1 dx \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_0 \int\limits_a^b A_0\varphi_N dx + \alpha_1 \int\limits_a^b A_1\varphi_N dx + \ldots + \alpha_N \int\limits_a^b A_N\varphi_N dx = \int\limits_a^b f(x)\varphi_N dx \end{cases}$$

Решаем СЛАУ и находим коэффициенты α_i.

Для наших тестов возьмем базисные функции вида

$$(1 - x^2)P_i^{(1,1)}(x),$$

где

$$P_0^{(k,k)}(x) = 1,$$

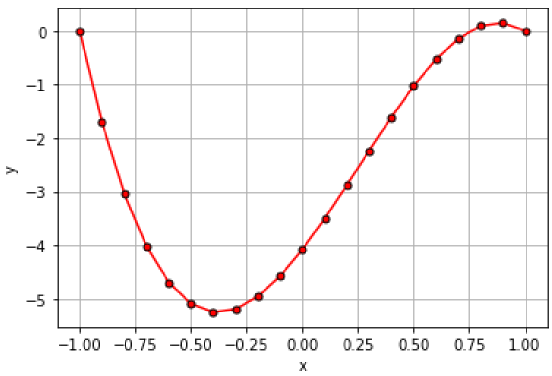
$$P_1^{(k,k)}(x) = (k+1)x,$$

$$P_{n+2}^{(k,k)}(x) = \frac{(n+k+2)(2n+2k+3)x \cdot P_{n+1}^{(k,k)}(x) -}{(n+2k+2)(n+2)}$$

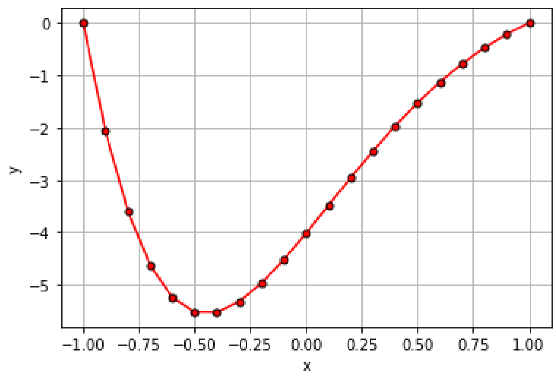
$$\frac{-(n+k+2)(n+k+1)P_n^{(k,k)}(x)}{(n+2k+2)(n+2)}.$$

3. Тесты

- Краевая задача из учебника Пакулиной А.Н. (3 вариант)

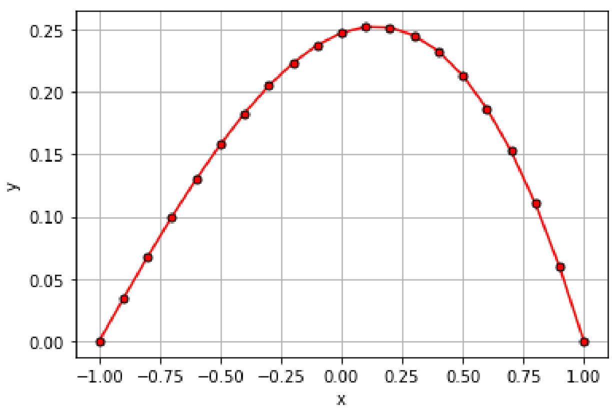


a) N = 1

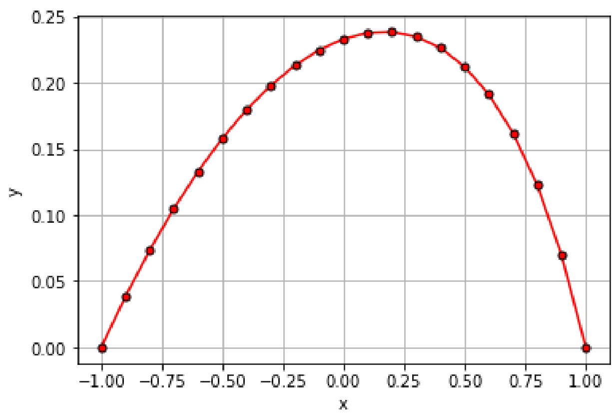


b) N = 10

- Краевая задача из учебника Пакулиной А.Н. (11 вариант)



a) N = 1



b) N = 10

4. Ссылка на код

Ссылка