

Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Бадмаев Чингис Юрьевич

Степенной метод. Метод скалярных произведений

Практическая работа

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

1. Постановка задачи	3
2. Теорминимум(Степенной метод)	4
3. Теорминимум(Метод скалярных произведений)	5
4. Тесты	6
5. Ссылка на код	7

1. Постановка задачи

В данном задании речь идет о нахождении максимального по модулю собственного числа матрицы A с помощью степенного метода и метода скалярных произведений.

2. Теорминимум(Степенной метод)

Нужно вычислить максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A , причем

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

В качестве нулевого приближения $x^{(0)}$ возьмем произвольный вектор. Далее строим $x^{(k)}$ и $\lambda_1^{(k)}$ по формулам

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)},$$

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{(x^{(k)})_i}{(x^{(k-1)})_i}.$$

Итерационный процесс идет до тех пор, пока вектор приближений не достигнет заданной точности, т. е. когда

$$|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \varepsilon.$$

Получаем, что $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k+1)}$.

3. Теорминимум(Метод скалярных произведений)

Нужно вычислить максимальное по модулю собственное число λ_1 матрицы A , причем

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

В качестве нулевого приближения $x^{(0)}$ возьмем произвольный вектор, а $y^{(0)} = x^{(0)}$. Далее строим $x^{(k)}$, $y^{(k)}$ и $\lambda_1^{(k)}$ по формулам

$$x^{(k)} = Ax^{(k-1)},$$

$$y^{(k)} = A^T y^{(k-1)},$$

$$\lambda_1^{(k)} = \frac{(x^{(k)}, y^{(k)})}{(x^{(k-1)}, y^{(k)})}.$$

Итерационный процесс идет до тех пор, пока вектор приближений не достигнет заданной точности, т. е. когда

$$|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}| < \varepsilon.$$

Получаем, что $\lambda_1 \approx \lambda_1^{(k+1)}$.

4. Тесты

```
Матрица Гильберта пятого порядка:  
[1.      0.5      0.33333333 0.25      0.2       ]  
[0.5     0.33333333 0.25      0.2       0.16666667]  
[0.33333333 0.25      0.2       0.16666667 0.14285714]  
[0.25     0.2       0.16666667 0.14285714 0.125     ]  
[0.2      0.16666667 0.14285714 0.125     0.11111111]
```

Погрешность: 0.01

Степенной метод:

Количество итераций: 4
|lambdaAcc - lambda|: 0.001221369082482049

Метод скалярных произведений:

Количество итераций: 3
|lambdaAcc - lambda|: 1.3406487585410076e-05

Погрешность: 0.001

Степенной метод:

Количество итераций: 6
|lambdaAcc - lambda|: 2.1610229906876555e-05

Метод скалярных произведений:

Количество итераций: 3
|lambdaAcc - lambda|: 1.3406487585410076e-05

Погрешность: 0.0001

Степенной метод:

Количество итераций: 7
|lambdaAcc - lambda|: 2.8757273158319663e-06

Метод скалярных произведений:

Количество итераций: 4
|lambdaAcc - lambda|: 2.374147907158175e-07

Погрешность: 1e-05

Степенной метод:

Количество итераций: 8
|lambdaAcc - lambda|: 3.826847809751399e-07

Метод скалярных произведений:

Количество итераций: 4
|lambdaAcc - lambda|: 4.204325776413498e-09

```
Матрица Гильберта шестого порядка:  
[1.      0.5      0.33333333 0.25      0.2       0.16666667]  
[0.5     0.33333333 0.25      0.2       0.16666667 0.14285714]  
[0.33333333 0.25      0.2       0.16666667 0.14285714 0.125     ]  
[0.25     0.2       0.16666667 0.14285714 0.125     0.11111111]  
[0.2      0.16666667 0.14285714 0.125     0.11111111 0.1       ]  
[0.16666667 0.14285714 0.125     0.11111111 0.1       0.09090909]
```

Погрешность: 0.01

Степенной метод:

Количество итераций: 5
|lambdaAcc - lambda|: 0.002936458774360773

Метод скалярных произведений:

Количество итераций: 3
|lambdaAcc - lambda|: 2.7699432503913712e-05

Погрешность: 0.001

Степенной метод:

Количество итераций: 6
|lambdaAcc - lambda|: 4.395301903570292e-05

Метод скалярных произведений:

Количество итераций: 3
|lambdaAcc - lambda|: 6.208181393407841e-07

Погрешность: 0.0001

Степенной метод:

Количество итераций: 7
|lambdaAcc - lambda|: 6.579903279346766e-06

Метод скалярных произведений:

Количество итераций: 4
|lambdaAcc - lambda|: 6.208181393407841e-07

Погрешность: 1e-05

Степенной метод:

Количество итераций: 8
|lambdaAcc - lambda|: 9.850545206191441e-07

Метод скалярных произведений:

Количество итераций: 4
|lambdaAcc - lambda|: 1.3913922902730747e-08

a)

b)

Как итог, метод скалярных произведений достигает заданной точности за меньшее количество итераций.

5. Ссылка на код

[Ссылка](#)