

Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Бадмаев Чингис Юрьевич

# Влияние ошибок округления на решение СЛАУ. Числа обусловленности.

Практическая работа

Санкт-Петербург  
2021

# Оглавление

1. Постановка задачи	3
2. Теорминимум	4
3. Тесты	5

# 1. Постановка задачи

В данном задании речь идет о решении СЛАУ (систем линейных алгебраических уравнений). СЛАУ представим в матричной форме:

$$Ax = b,$$

где  $A$  — это матрица системы,  $x$  — столбец неизвестных, а  $b$  — столбец свободных членов.

## 2. Теорминимум

Мы должны по заданной матрице  $A$  и столбцу свободных членов  $b$  найти столбец неизвестных  $x$ . Затем, после возмущения матрицы  $A$  и столбца  $b$ , находим решение  $\tilde{x}$  и сравниваем его с точным решением  $x$ . Кроме того, находим числа обусловленности матрицы  $A$  (спектральный критерий, объемный критерий (критерий Ортеги), угловой критерий). Три критерия обусловленности, используемые в данном задании:

- Спектральный критерий

$$cond_s = \|A\| \|A^{-1}\|$$

- Объемный критерий (критерий Ортеги)

$$cond_v = \frac{\prod_{n=1}^N |a_n|}{|\det A|}$$

- Угловой критерий

$$cond_a = \max_n (|a_n| \cdot |c_n|),$$

где  $c_n$  —  $n$ -й вектор-столбец матрицы  $C = A^{-1}$ .

Точное решение  $x$  мы генерируем случайным образом, чтобы затем найти столбец свободных членов  $b$ , который будем использовать в дальнейшем для нахождения приближенного решения  $\tilde{x}$ .

Приближенное решение находим, используя пакет `numpy.linalg` и функции `solve()`.

Вычисляем числа обусловленности, используя пакет `numpy.linalg` и функции `norm()`, `det()`, `inv()`.

### 3. Тесты

```
Матрица:
[0.9120611  0.70147867 0.30486116 0.47414821 0.96105472]
[0.38955873 0.89633498 0.36784646 0.13949751 0.63848557]
[0.47745388 0.15127675 0.96656214 0.34002035 0.10870904]
[0.55583802 0.17306024 0.01670499 0.68214896 0.46811189]
[0.80516261 0.07946382 0.15093893 0.32213516 0.79451478]

Точное решение:
|-21.04055969|
|-27.47952916|
| 50.10945804|
|-61.05329967|
| 28.51720662|

Числа обусловленности:
Спектральный критерий обусловленности: 60.13936543322244
Объемный критерий (критерий Ортеги): 90.09016197037809
Угловой критерий: 25.17868882879282

eps = 10^(-2):
Приближенное решение:
|-20.98965119|
|-27.46264387|
| 50.08574740|
|-61.07787342|
| 28.46580864|
Невязка:
| 0.050908494013|
| 0.016885289613|
| 0.023710643954|
| 0.024573745177|
| 0.051397985053|
eps = 10^(-5):
Приближенное решение:
|-21.04050878|
|-27.47951228|
| 50.10943433|
|-61.05332425|
| 28.51715523|
Невязка:
| 0.000050908494|
| 0.000016885290|
| 0.000023710644|
| 0.000024573745|
| 0.000051397985|
eps = 10^(-8):
Приближенное решение:
|-21.04055964|
|-27.47952915|
| 50.10945802|
|-61.05329970|
| 28.51720657|
Невязка:
| 0.00000050908|
| 0.00000016885|
| 0.00000023711|
| 0.00000024574|
| 0.00000051398|
```

Рис. 1: Произвольная матрица пятого порядка

```
Матрица:
[1.          0.5         0.33333333]
[0.5         0.33333333 0.25      ]
[0.33333333 0.25       0.2       ]

Точное решение:
|-30.67811697|
|-43.79430941|
|-94.61842166|

Числа обусловленности:
Спектральный критерий обусловленности: 526.1588210797212
Объемный критерий (критерий Ортеги): 758.0469972237893
Угловой критерий: 172.88724649319917

eps = 10^(-2):
Приближенное решение:
|-30.70811697|
|-43.55430941|
|-94.91842166|
Невязка:
| 0.030000000000|
| 0.240000000000|
| 0.300000000000|
eps = 10^(-5):
Приближенное решение:
|-30.67814697|
|-43.79406941|
|-94.61872166|
Невязка:
| 0.000030000000|
| 0.000240000000|
| 0.000300000000|
eps = 10^(-8):
Приближенное решение:
|-30.67811700|
|-43.79430917|
|-94.61842196|
Невязка:
| 0.000000300000|
| 0.000000240000|
| 0.000000300000|
```

Рис. 2: Матрица Гильберта третьего порядка

```

Матрица:
[1.      0.5      0.33333333 0.25 ]
[0.5     0.33333333 0.25    0.2  ]
[0.33333333 0.25    0.2     0.16666667]
[0.25     0.2     0.16666667 0.14285714]

Точное решение:
|-87.95541924 |
| 51.38464919 |
|-60.05895613 |
| 62.26459603 |

Числа обусловленности:
Спектральный критерий обусловленности: 15613.793559642412
Объемный критерий (критерий Ортеги): 937085.8716078639
Угловой критерий: 4020.913453432826

eps = 10^(-2):
Приближенное решение:
|-87.91541924 |
| 50.78464919 |
|-58.25895613 |
| 60.86459603 |
Невязка:
| 0.039999999999 |
| 0.599999999989 |
| 1.799999999974 |
| 1.399999999984 |
eps = 10^(-5):
Приближенное решение:
|-87.95537924 |
| 51.38404919 |
|-60.05715613 |
| 62.26319603 |
Невязка:
| 0.000039999999 |
| 0.000599999991 |
| 0.001799999980 |
| 0.001399999987 |
eps = 10^(-8):
Приближенное решение:
|-87.95541920 |
| 51.38464859 |
|-60.05895433 |
| 62.26459463 |
Невязка:
| 0.000000039999 |
| 0.000000599993 |
| 0.000001799984 |
| 0.000001399990 |

```

Рис. 3: Матрица Гильберта четвертого порядка

```

Матрица:
[-400.6  199.8]
[1198.8  600.4]

Точное решение:
|-43.11112674 |
|-92.75628436 |

Числа обусловленности:
Спектральный критерий обусловленности: 4.162153158416973
Объемный критерий (критерий Ортеги): 1.250311292614698
Угловой критерий: 1.2503112926146984

eps = 10^(-2):
Приближенное решение:
|-43.11111840 |
|-92.75631767 |
Невязка:
| 0.000008345130 |
| 0.000033318024 |
eps = 10^(-5):
Приближенное решение:
|-43.11112673 |
|-92.75628439 |
Невязка:
| 0.00000008345 |
| 0.00000033318 |
eps = 10^(-8):
Приближенное решение:
|-43.11112674 |
|-92.75628436 |
Невязка:
| 0.000000000008 |
| 0.000000000033 |

```

Рис. 4: Матрица из методички Пакулиной

```

Матрица:
[-402.9  200.7]
[1204.2 -603.6]

Точное решение:
| 11.46237936 |
|-41.82328746 |

Числа обусловленности:
Спектральный критерий обусловленности: 4.162153158416973
Объемный критерий (критерий Ортеги): 1.250311292614698
Угловой критерий: 1.2503112926146984

eps = 10^(-2):
Приближенное решение:
| 11.46771468 |
|-41.81262676 |
Невязка:
| 0.005335323384 |
| 0.010660696518 |
eps = 10^(-5):
Приближенное решение:
| 11.46238469 |
|-41.82327679 |
Невязка:
| 0.000005335324 |
| 0.000010660698 |
eps = 10^(-8):
Приближенное решение:
| 11.46237936 |
|-41.82328744 |
Невязка:
| 0.000000005335 |
| 0.000000010661 |

```

Рис. 5: Матрица из методички Пакулиной