

Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Бадмаев Чингис Юрьевич

Метод простой итерации. Метод Зейделя

Практическая работа

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

1. Постановка задачи	3
2. Теорминимум(Метод простой итерации)	4
3. Теорминимум(Метод Зейделя)	5
4. Тесты	6
5. Ссылка на код	8

1. Постановка задачи

СЛАУ решаем методом простой итерации и методом Зейделя. Сравниваем погрешности решений и количество итераций в методе простой итерации и в методе Зейделя. СЛАУ представим в матричной форме:

$$Ax = b,$$

где A — это матрица системы, x — столбец неизвестных, а b — столбец свободных членов.

2. Теорминимум(Метод простой итерации)

Приведем СЛАУ к итерационной форме

$$x = \alpha x + \beta$$

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nn} \end{bmatrix}$$

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{bmatrix}$$

Обозначим:

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_{ii}};$$

$$\alpha_{ij} = -\frac{a_{ij}}{a_{ii}}, i \neq j;$$

$$\alpha_{ii} = 0.$$

За начальное приближение возьмем столбец сводных членов.

$$x^{(k)} = \alpha x^{(k+1)} + \beta$$

Итерационный процесс идет до тех пор, пока вектор приближений не достигнет заданной точности, т. е. когда

$$|x^{(k+1)} - x^{(k)}| < \varepsilon$$

4. Тесты

Матрица:
[1. 0.5]
[0.5 0.33333333]
Погрешность: 0.0001
Метод простой итерации:
Количество итераций: 103
||x - x_a||: 3.209057829422238e-05
Метод Зейделя:
Количество итераций: 42
||x - x_a||: 0.00024079087618882373

Погрешность: 1e-07
Метод простой итерации:
Количество итераций: 151
||x - x_a||: 3.219940967511304e-08
Метод Зейделя:
Количество итераций: 66
||x - x_a||: 2.416074249253481e-07

Погрешность: 1e-10
Метод простой итерации:
Количество итераций: 199
||x - x_a||: 3.2335390810196794e-11
Метод Зейделя:
Количество итераций: 90
||x - x_a||: 2.4238119505898795e-10

Погрешность: 1e-13
Метод простой итерации:
Количество итераций: 248
||x - x_a||: 1.0345658394727079e-13
Метод Зейделя:
Количество итераций: 114
||x - x_a||: 2.0495186137532011e-13

Матрица Гильберта второго
порядка

Матрица:
[50 10 20]
[70 82 -14]
[5 -11 20]
Погрешность: 0.0001
Метод простой итерации:
Количество итераций: 47
||x - x_a||: 0.00026714351684353776
Метод Зейделя:
Количество итераций: 24
||x - x_a||: 0.00012122346711829667

Погрешность: 1e-07
Метод простой итерации:
Количество итераций: 76
||x - x_a||: 2.3196938547862793e-07
Метод Зейделя:
Количество итераций: 37
||x - x_a||: 7.672965860911897e-08

Погрешность: 1e-10
Метод простой итерации:
Количество итераций: 104
||x - x_a||: 2.5682043722303443e-10
Метод Зейделя:
Количество итераций: 49
||x - x_a||: 8.557520524739113e-11

Погрешность: 1e-13
Метод простой итерации:
Количество итераций: 133
||x - x_a||: 1.8882932218273128e-13
Метод Зейделя:
Количество итераций: 61
||x - x_a||: 9.352480803022575e-14

Матрица с диагональным
преобладанием

Матрица:
 [-400.6 199.8]
 [1198.8 -600.4]
 Погрешность: 0.0001
 Метод простой итерации:
 Количество итераций: 4610
 $||x - x_a||$: 0.004561086988324154
 Метод Зейделя:
 Количество итераций: 1912
 $||x - x_a||$: 0.023941279232258885

Погрешность: 1e-07
 Метод простой итерации:
 Количество итераций: 7926
 $||x - x_a||$: 4.561062652480573e-06
 Метод Зейделя:
 Количество итераций: 3570
 $||x - x_a||$: 2.394114876518729e-05

Погрешность: 1e-10
 Метод простой итерации:
 Количество итераций: 11242
 $||x - x_a||$: 4.561794816913303e-09
 Метод Зейделя:
 Количество итераций: 5228
 $||x - x_a||$: 2.3942116023978445e-08

Погрешность: 1e-13
 Метод простой итерации:
 Количество итераций: 14560
 $||x - x_a||$: 5.254372250153213e-12
 Метод Зейделя:
 Количество итераций: 6878
 $||x - x_a||$: 2.5897801160361776e-11

Матрица из методички
Пакулиной

Матрица:
 [-402.9 200.7]
 [1204.2 -603.6]
 Погрешность: 0.0001
 Метод простой итерации:
 Количество итераций: 4281
 $||x - x_a||$: 6.953565738817226e-05
 Метод Зейделя:
 Количество итераций: 1166
 $||x - x_a||$: 0.01596949961645067

Погрешность: 1e-07
 Метод простой итерации:
 Количество итераций: 6503
 $||x - x_a||$: 6.949311377146162e-08
 Метод Зейделя:
 Количество итераций: 2277
 $||x - x_a||$: 1.5959978607582397e-05

Погрешность: 1e-10
 Метод простой итерации:
 Количество итераций: 8725
 $||x - x_a||$: 6.839158173521238e-11
 Метод Зейделя:
 Количество итераций: 3388
 $||x - x_a||$: 1.5949621746967647e-08

Погрешность: 1e-13
 Метод простой итерации:
 Количество итераций: 10057
 $||x - x_a||$: 4.843822518161191e-13
 Метод Зейделя:
 Количество итераций: 4493
 $||x - x_a||$: 1.58214977156548e-11

Матрица из методички
Пакулиной

Как итог, метод Зейделя достигает заданной точности за меньшее количество итераций.

5. Ссылка на код

[Ссылка](#)