Санкт-Петербургский государственный университет

Математико-механический факультет

Бадмаев Чингис Юрьевич

Решение ОДУ сеточным методом

Практическая работа

Санкт-Петербург
2021

Оглавление

1. Постановка задачи

В данном задании речь идет о решении краевой задачи сеточным методом.

2. Теорминимум

Краевая задача вида

$$k(x)u''(x) + p(x)u'(x) + q(x)u(x) = f(x), \quad a < x < b.$$

Надо найти $u = u(x)$, удовлетворяющее краевым условиям

$$\begin{cases} \alpha_0 u_0(a) + \alpha_1 u_0'(a) = A \\ \beta_0 u_n(b) + \beta_1 u_n'(b) = B \end{cases}$$

Разбиваем $[a, b]$ на равные части с шагом h

$$x_i = a + ih, \quad h = \frac{b-a}{n}$$

Заменяем производные в изначальной краевой задаче разностными производными

$$u'' = \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2}$$

$$u' = \frac{u_{i+1} - u_{i-1}}{2h}$$

Получаем

$$(2k_i - hp_i)u_{i-1} + (-4k_i + 2h^2 q_i)u_i + (2k_i + hp_i)u_{i+1} = 2h^2 f_i,$$

где k_i, p_i, q_i, f_i являются значениями функций $k(x)$, $p(x)$, $q(x)$, $f(x)$ в точках x_i.

Аналогично производим замену в краевых условиях и получим систему линейных уравнений

$$\begin{cases} (h\alpha_0 - \alpha_1)u_0 + \alpha_1 u_1 = hA \\ (2k_i - hp_i)u_{i-1} + (-4k_i + 2h^2 q_i)u_i + (2k_i + hp_i)u_{i+1} = 2h^2 f_i \\ -\beta_1 u_{n-1} + (h\beta_0 + \beta_1)u_n = hB \end{cases}$$

Матрица этой системы трехдиагональна. Перепишем ее в более удобном виде

$$\begin{cases} B_0u_0 + C_0u_1 = D_0 \\ A_iu_{i-1} + B_iu_i + C_iu_{i+1} = D_i \\ A_nu_{n-1} + B_nu_n = D_n \end{cases}$$

Здесь $i = 1, 2, \ldots, n-1$.

Решаем эту систему с помощью метода прогонки. Ищем решение системы в виде

$$u_i = s_iu_{i+1} + t_i, \quad i = 0, 1, 2, \ldots, n-1.$$

Прямым ходом находим

$$s_0 = -\frac{C_0}{B_0}, \quad t_0 = \frac{D_0}{B_0}$$

$$s_i = -\frac{C_i}{A_is_{i-1} + B_i}, \quad t_i = \frac{D_i - A_it_{i-1}}{A_is_{i-1} + B_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Так как $C_n = 0 \Rightarrow s_n = 0 \Rightarrow u_n = t_n$.

Обратным ходом находим $u_{n-1}, \ldots, u_0$.

Для контроля точности используем метод сгущения сетки.

Строим сетки с шагами h, $\frac{h}{2}$, $\frac{h}{4}$, $\ldots$. Находим решение для каждой сетки и высчитываем погрешность по формуле

$$\Delta(x) = \frac{v_2(x) - v_1(x)}{r^p - 1},$$

где $v_2(x)$ — более мелкая сетка, r — коэффициент сгущения сетки, p — теоретический порядок точности численного метода (в нашем случае равен 1).

Далее уточняем решение с помощью полученной погрешности

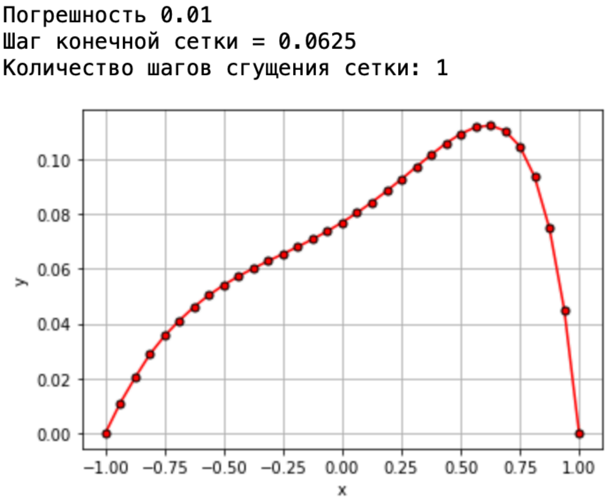
$$\widetilde{v_2}(x) = v_2(x) + \Delta(x).$$

Погрешности нечетных узлов вычисляется с помощью среднего

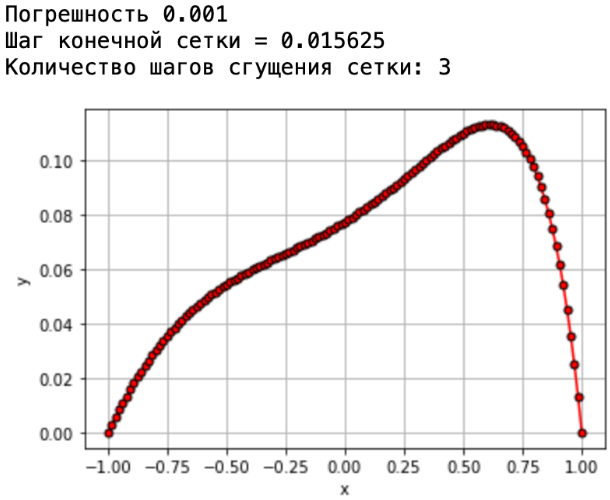
$$\Delta(x_{2n+1}) = \frac{\Delta(x_{2n}) + \Delta(x_{2n+2})}{2}.$$

3. Тесты

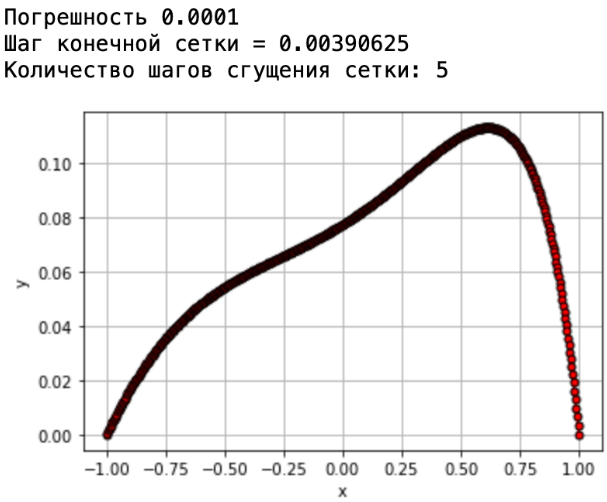
- Краевая задача из учебника Пакулиной А.Н. (6 вариант)



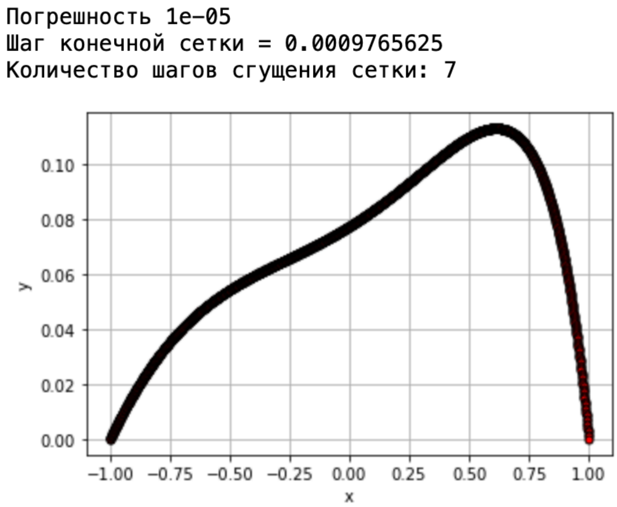
a) Погрешность 0.01



b) Погрешность 0.01



c) Погрешность 0.01



d) Погрешность 0.01

4. Ссылка на код

Ссылка