

INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS
SUPERIORES DE OCCIDENTE



ITESO, Universidad
Jesuita de Guadalajara

ELEMENTOS FINITOS

OTOÑO 2019

PROYECTO INTEGRADOR

**ELEMENTOS FINITOS PARA LA
TRANSFERENCIA DE CALOR EN PLACA CIRCULAR**

INTEGRANTES:

NT704804 CHIÑAS FUENTES, KARINA

NT703441 GONZÁLEZ VÁZQUEZ, NATALIA

NT703798 TERRAZAS ZAFRA, SAMUEL DE JESÚS

PROFESOR: DR. OCHOA GONZÁLEZ DAVID MANUEL

TLAQUEPAQUE, JALISCO

FECHA DE ENTREGA: DICIEMBRE 06, DE 2019

1. Introducción

El método de elemento finito (FEM por sus siglas en inglés) es una técnica numérica que sirve para calcular soluciones, de manera aproximada, a las ecuaciones diferenciales que modelan diferentes escenarios físicos e ingenieriles. El método, básicamente, reduce un comportamiento físico definido a una geometría (domino) específica, de manera que se llega a una solución mediante un número finito de puntos, generados al dividir la geometría en regiones más pequeñas (elementos que crean una malla).

Por la flexibilidad y a adaptabilidad del método se pueden generar diferentes mallas, variando la forma de los elementos que la conforman, de modo que se puede hacer una malla basándose en elementos triangulares o cuadriláteros (en 2D), de igual manera, tetraédricas o hexaédricas (en 3D). Entonces podemos conocer las diferentes variables de cada elemento (tales como temperatura, velocidad, deformación, etc.) partiendo de funciones que nos permiten aproximar los valores, dichas funciones suelen ser polinomiales de orden lineal o mayor. Si se cambia el orden de la función se agregarán de manera geométrica puntos a los elementos (nodos) para poder describir el comportamiento de manera adecuada. Diferiendo de los métodos habituales, como son diferencias finitas en la que la ecuación de comportamiento se aproxima con expresiones algebraicas, que posteriormente la reemplazan con un número finito de ecuaciones y se resuelve todo el conjunto y en simultaneo. En el método de elemento finito la ecuación de comportamiento se integra para cada elemento para después hacer un ensamble de todos los elementos, logrando una solución en conjunto con un número finito de ecuaciones [1].

El método de elemento finito tiene variaciones, una de ellas es la solución con el procedimiento de Rayleigh-Ritz, otra de ellas y la que se usa en este proyecto es la de estudios ponderados y aproximación de Galerkin. Misma que genera una función de ponderación para el residual, que se genera por usar aproximaciones y se iguala a cero, y establece que estas funciones serán las mismas funciones de forma o funciones de peso [2]. Esto tiene como consecuencia que vamos a tener un mismo número de incógnitas y de ecuaciones. Entonces este método puede ser de utilidad para analizar las deformaciones mecánicas en los sólidos, dado que su comportamiento (estrés, diseño estructural, fatiga, deformación, cargas, entre otras variables características) se puede describir con una ecuación diferencial.

En este proyecto, específicamente, se abordará el estrés generado por calor en una placa circular. Para poder entender se tiene que saber que los problemas de elasticidad (en 2D), generalmente, se puede abordar de dos maneras: deformación plana y esfuerzo plano. La primera se refiere a situaciones en donde el grueso del objeto sólido es considerable, de lo contrario se asume un esfuerzo plano.

Asimismo, es necesario tener en consideración que los diferenciales de temperatura son fuentes importantes de estrés y deformación en sólidos. Se utiliza entonces el método de elementos finitos para obtener la distribución de temperaturas en la tapa y con eso calculamos posteriormente las deformaciones que se generan. En la sección de procedimiento se explica a fondo cómo se realizó el análisis térmico y mecánico.

2. Procedimiento Teórico

2.1. Análisis Térmico

Para resolver el sistema térmico, es necesario obtener la distribución de temperaturas por eso se plantea, el problema de manera matricial,

$$\mathbf{K}_t \cdot \mathbf{T} = \mathbf{F}_t, \quad (1)$$

siendo \mathbf{K}_t la matriz

$$\mathbf{K}_t^{(e)} = \frac{k}{4A^{(e)}} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1b_2 + c_1c_2 & b_1b_3 + c_1c_3 \\ b_1b_2 + c_1c_2 & b_2^2 + c_2^2 & b_2b_3 + c_2c_3 \\ b_1b_3 + c_1c_3 & b_2b_3 + c_2c_3 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \quad (2)$$

La cual surge de la operación entre las matrices \mathbf{B} y \mathbf{B}^T (Referente a las funciones de forma correspondientes a elementos planos lineales): $\mathbf{K} = \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B}Ak$ donde A es el área, k la constante de conductividad y matriz de transformación

$$\mathbf{B} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_1 & 0 & b_2 & 0 & b_3 & 0 \\ 0 & c_1 & 0 & c_2 & 0 & c_3 \\ c_1 & b_1 & c_2 & b_2 & c_3 & b_3 \end{bmatrix} \quad (3)$$

cuyos valores de b_i y c_i se calcular como lo muestra la figura 1.

i	a_i	b_i	c_i
1	$x_2y_3 - x_3y_2$	$y_2 - y_3$	$x_3 - x_2$
2	$x_3y_1 - x_1y_3$	$y_3 - y_1$	$x_1 - x_3$
3	$x_1y_2 - x_2y_1$	$y_1 - y_2$	$x_2 - x_1$

Figura 1: Cómo calcular los valores b_i y c_i según las posiciones xy de en el i -ésimo nodo [1, 2].

Respecto a $\mathbf{F}_t^{(e)}$, es el vector carga al cual se le incorporan los valores de temperatura conocidos. Por último \mathbf{FT} es el vector de temperaturas al cual se le resuelve.

Para resolver para las temperaturas, se ensamblan las matrices $\mathbf{K}_t^{(e)}$ en una matriz cuadrada de longitud igual al número de nodos \mathbf{K}_t . Después, se obtiene su inversa y se multiplica por el vector de carga ya ensamblado (un vector columna de longitud igual al número de nodos).

2.2. Análisis Mecánico

El análisis mecánico, es muy similar al análisis térmico, sólo que ahora la $\mathbf{K}_m^{(e)}$ se construye al considerar la matriz \mathbf{D} como

$$\mathbf{K}_m^{(e)} = \int_{A^{(e)}} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \cdot dxdy \quad (4)$$

donde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{E\nu}{1-\nu^2} & 0 \\ \frac{E\nu}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2\nu+2} \end{bmatrix} \quad (5)$$

La cual es la misma para todos los elementos [2]. En este caso, E es el módulo de Young y ν es el radio de Poisson, valores intrínsecos del material siendo estudiados. La matriz resultante de $\mathbf{K}_m^{(e)}$ sería una matriz cuadrada de 6x6; haciendo que la matriz a ensamblar sea cuadrada con longitud total de dos veces el número de nodos. Por otra parte, se calcula el vector $\mathbf{F}_m^{(e)}$, el cual se relaciona con la dilatación térmica [2] al

$$\mathbf{F}_m^{(e)} = \frac{E\alpha t (T^{(n_1)} + T^{(n_2)} + T^{(n_3)} - 3T_0)}{6 - 6\nu} \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \\ b_2 \\ c_2 \\ b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

siendo α el coeficiente de expansión térmica, T^{n_i} la temperatura en el nodo i -ésimo y t el espesor de la placa. Luego, de calcular el vector $\mathbf{F}_m^{(e)}$ de cada elemento, se ensamblan en un vector \mathbf{F} el cual se caracteriza por ser un vector columna de longitud igual dos veces el número de nodos.

Al final, se resuelve para los desplazamientos unitarios \mathbf{U} en las direcciones xy del sistema al resolver la ecuación:

$$\mathbf{K}_m \mathbf{U} = \mathbf{F}_m \quad (7)$$

2.3. Descripción del Sistema Físico a Resolver

Para aplicar los conocimientos en el método numérico de elementos finitos, se va a trabajar con una placa circular a la cual se le somete una fuente de temperatura en su parte inferior. Para ello, los valores físicos que se consideraron se muestran en el cuadro 1.

Variable	Valor
E	$160 \times 10^{-9} \text{ Pa}$
α	$2.6 \times 10^{-6} \text{ 1/K}$
ν	0.22
t	0.1 cm
k	34 W/m°C
T_0	900 K

Cuadro 1: Valores físicos al sistema, correspondientes a un material de Si.

El sistema va a consistir de una oblea de silicio circular con diámetro de 10 cm.

3. Resultados

Para entender las cualidades del sistema propuesto, se llevaron a acabo dos métodos de resolución: uno generado con un código en Python y el otro resuelto a través del *software* COMSOL. Los resultados fueron los siguientes.

3.1. Código en Python

Para abordar el problema, se trabajó una aproximación por elementos triangulares distribuidos en dos polinomios regulares de ocho aristas, como lo muestra la figura2.

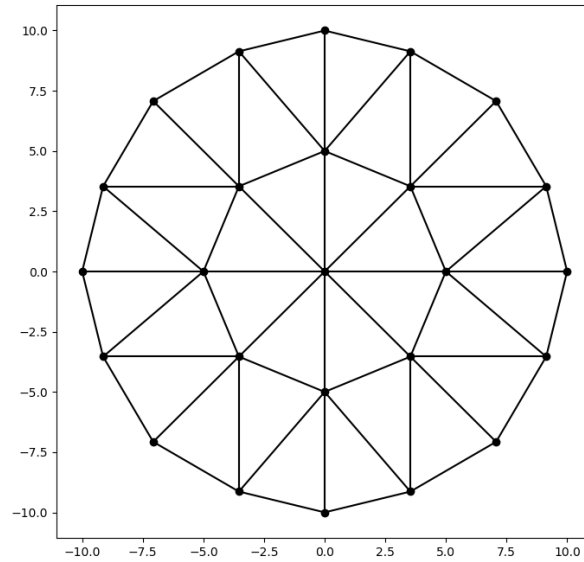


Figura 2: Geometría propuesta para la aproximación.

La nomenclatura de nodos y elementos se muestra en la figura 3.

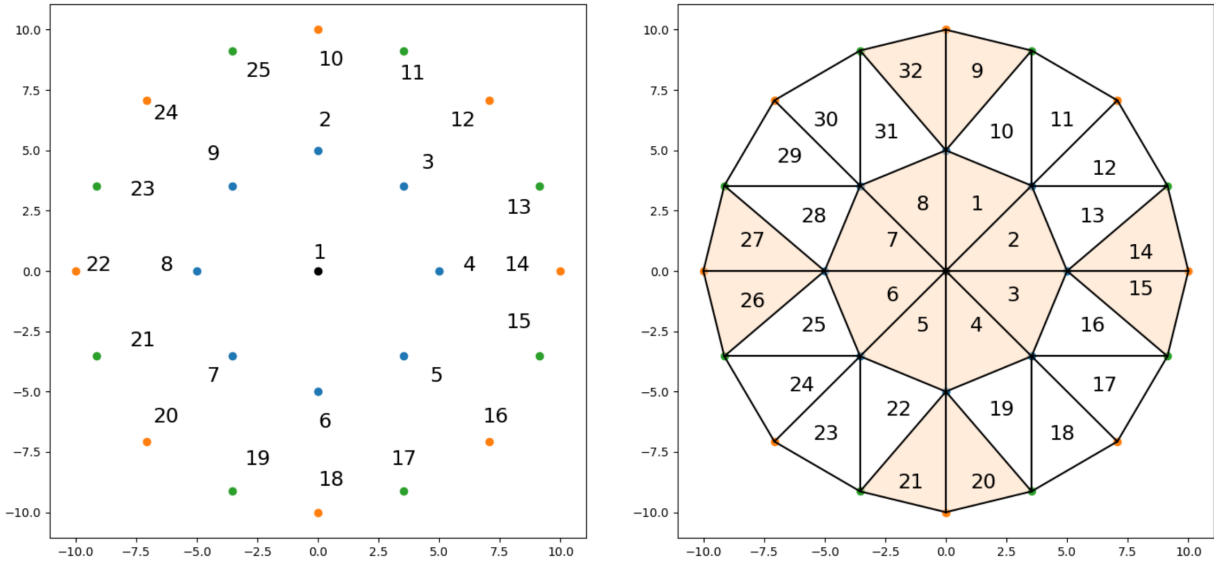


Figura 3: Nomenclatura de nodos (izquierda) y elementos (derecha) para la estructura propuesta. Las regiones con diferentes colores son de áreas diferentes; por lo que, en este caso, se trabajará con dos áreas diferentes.

Al resolver con el código de python, la solución térmica mostró el comportamiento ilustrado en la figura 4.

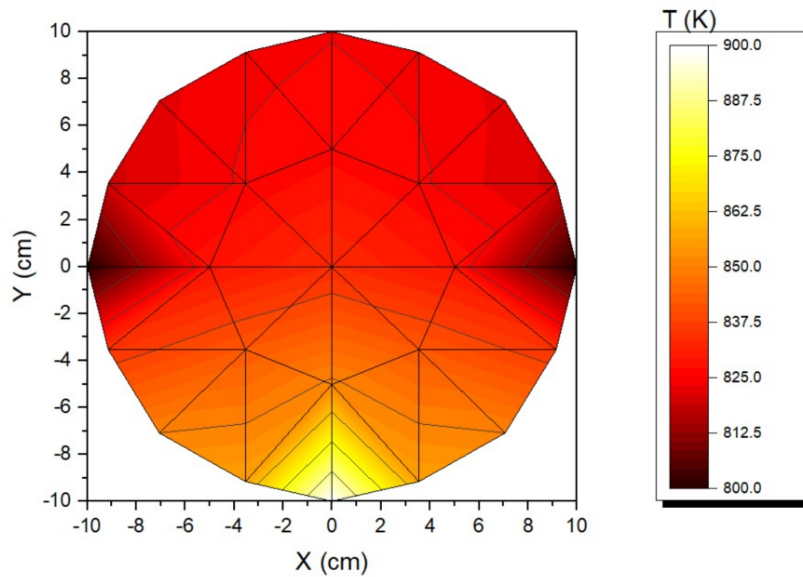


Figura 4: Solución del análisis térmico, imagen obtenida por el *software* ORIGIN.

Respecto al desplazamiento en nodos, se trabajaron dos casos: sin fijar nodos y fijando algunos nodos en la frontera. La figura 5 muestra los resultados.

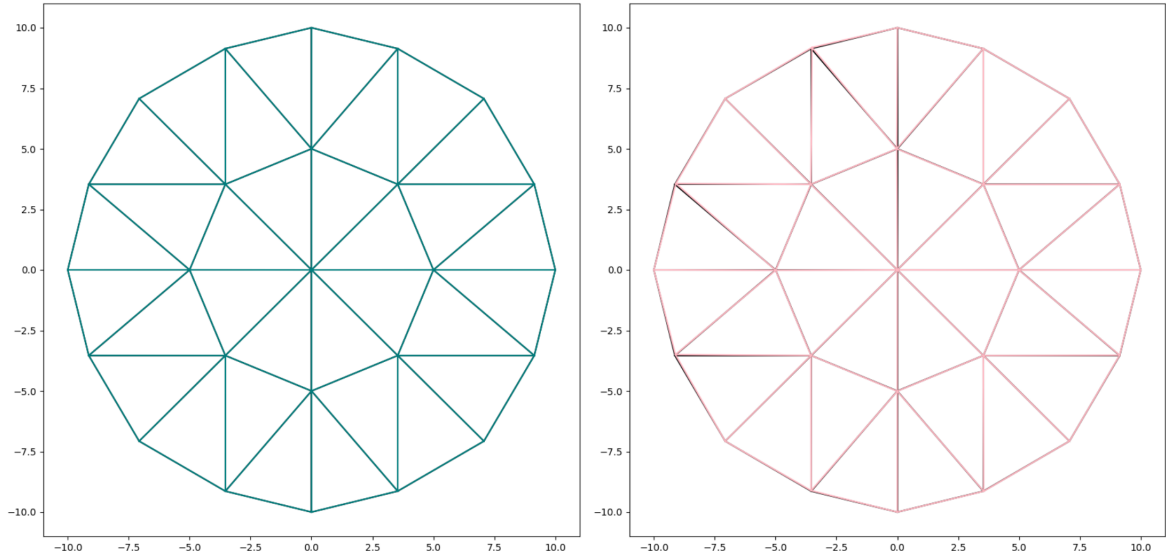


Figura 5: Solución al análisis mecánico: desplazamiento sin fijar nodos (izquierda) y desplazamiento al fijar nodos(derecha).

Como no se podía percibir cambios en el resultado de no fijar nodos, se hizo *zoom* en los nodos y se pudo observar su desplazamiento. La figura 6 muestra el acercamiento al nodo 12 para mostrar o no su desplazamiento, dependiendo del caso.

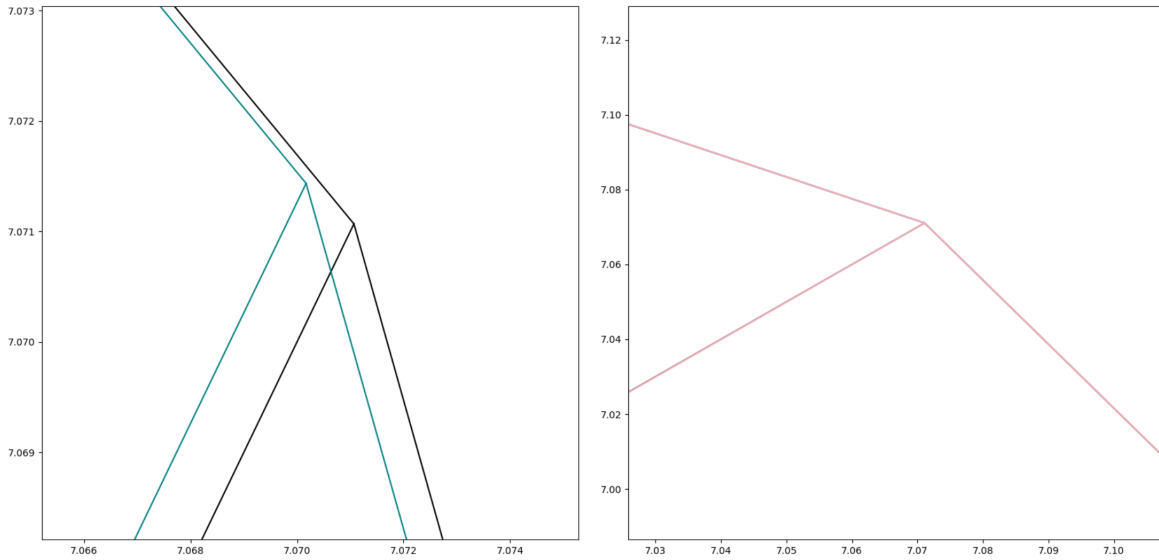


Figura 6: Acercamiento al nodo 12 para corroborar desplazamiento (izquierda) y no desplazamiento (derecha).

Para ver el código, favor de ver el archivo adjunto en este documento¹.

3.2. COMSOL

Para simular la oblea de silicio policristalino se utilizaron 4 módulos de física en COMSOL: transferencia de calor en sólidos, mecánica de sólidos, placa y expansión térmica en un estudio realizado en estado estable. La oblea se construyó en 2D, con un radio de 0.1[m], como se muestra en la figura 7. Las propiedades físicas del material se obtuvieron de la paquetería de materiales de COMSOL (cuadro 1), mismas que se usaron en la simulación en python.

¹El cual también se puede visualizar en <https://github.com/Chinnasf/FiniteElement/blob/master/FP.ipynb>.

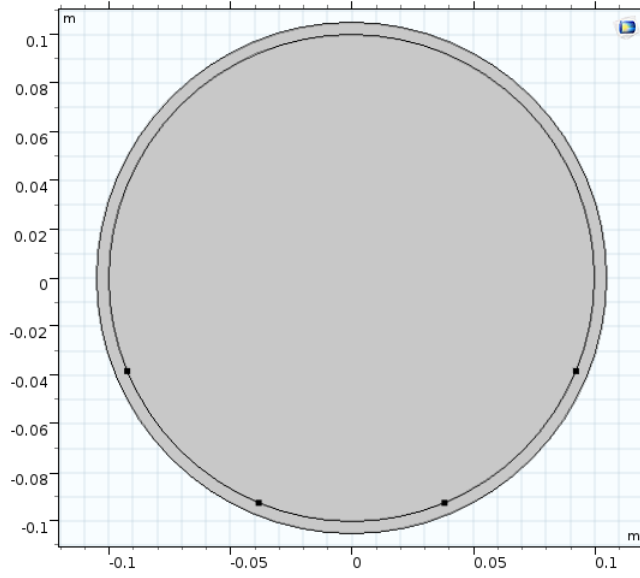
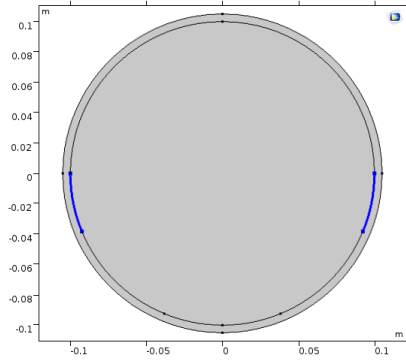
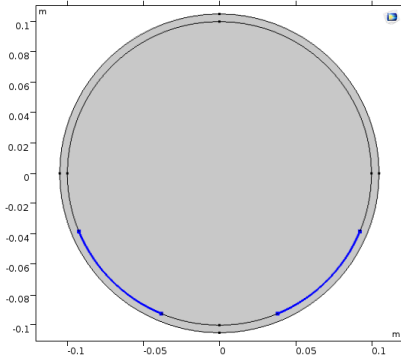


Figura 7: Geometría usada en COMSOL para la simulación de una oblea de silicio.

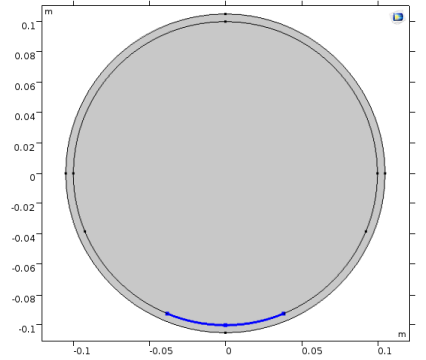
Para generar un modelo similar al que trabajamos con el método de elemento finito generado por el equipo, se utilizaron 3 temperaturas en distintas fronteras, como muestran las figuras 8a, 8b y 8c. La figura 6a corresponde a 800[K], 6b corresponde a 850[K] y 6c a 900[K].



(a) Dominios con temperatura fija en 800[K].



(b) Dominios con temperatura fija en 850[K].



(c) Dominio con temperatura fija en 900[K].

Figura 8: Dominios con condiciones de temperatura fija.

La fuente de calor se declaró como un anillo sólido rodeando la oblea (figura 9), con una fuente general Q de 1000 $[\text{W}/\text{m}^3]$. Como en la parte inferior de la oblea se fijaron las temperaturas mencionadas anteriormente, el que la fuente de calor rodeara toda la geometría no afectó al cómputo de resultados.

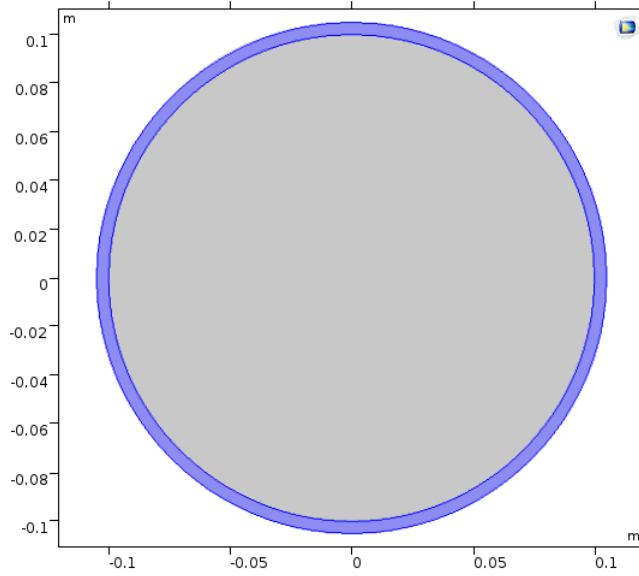


Figura 9: Fuente de calor.

Los módulos de física de placa y expansión térmica se incorporaron solo para hacer los cálculos de desplazamiento y tensión de von Mises, no tuvieron ningún aporte en las características físicas de la oblea de silicio.

El sistema se encontraba en reposo antes de iniciar el estudio; este se realizó con una malla con tamaño de elemento “normal” con un tamaño de elemento controlado por la física del sistema (figura 10).

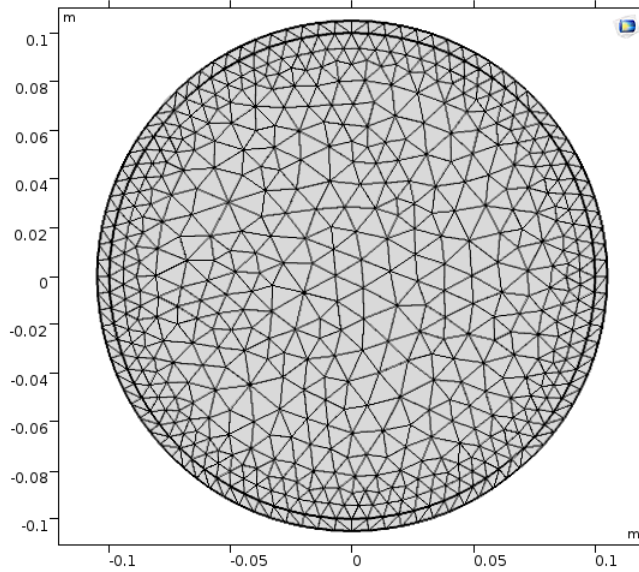
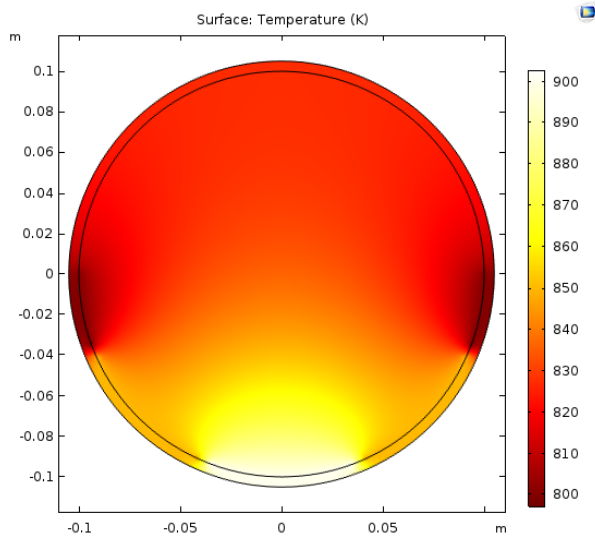


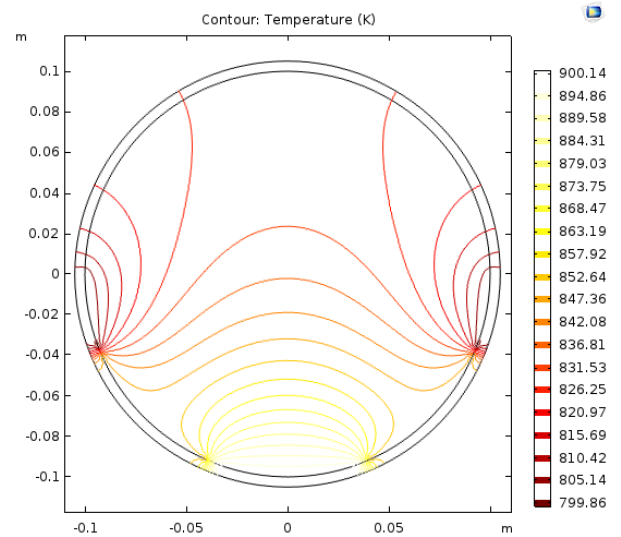
Figura 10: Malla genrada por COMSOL.

Se obtuvieron 4 resultados: temperatura en la placa (figura 11a), isotermas de temperatura (figura 11b), tensión de von Mises generada debido a la distribución de temperaturas y calor en el sólido (figura 12) y desplazamiento (figura 13).

Los resultados de la tensión de von Mises y el desplazamiento en el sólido se calcularon usando los módulos de expansión térmica placa y mecánica de sólidos. Mientras que la distribución de temperaturas se calculó con transferencia de calor en sólidos.



(a) Distribución de temperaturas en la oblea de silicio.



(b) Isotermas de temperatura.

Figura 11: Resultados de temperaturas en COMSOL.

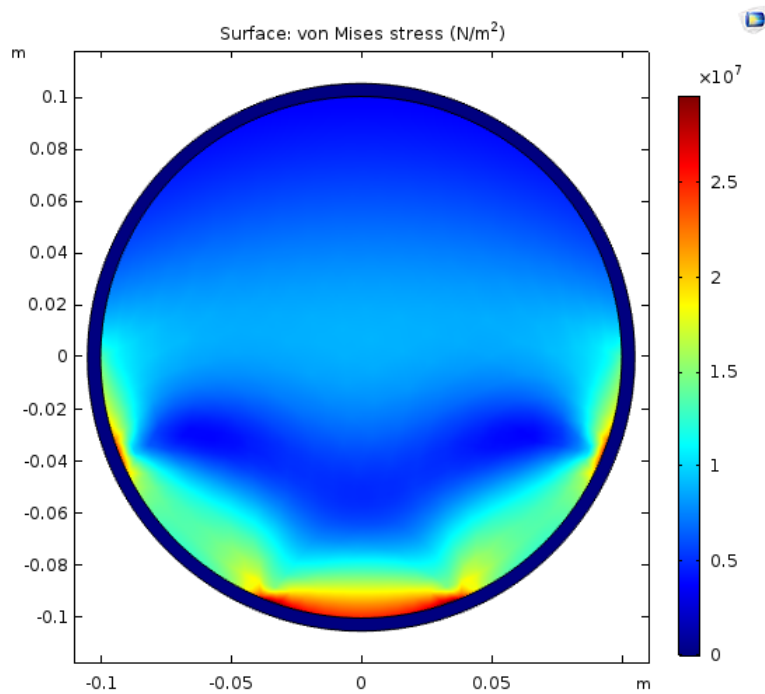


Figura 12: Tensión de von Mises en el sólido.

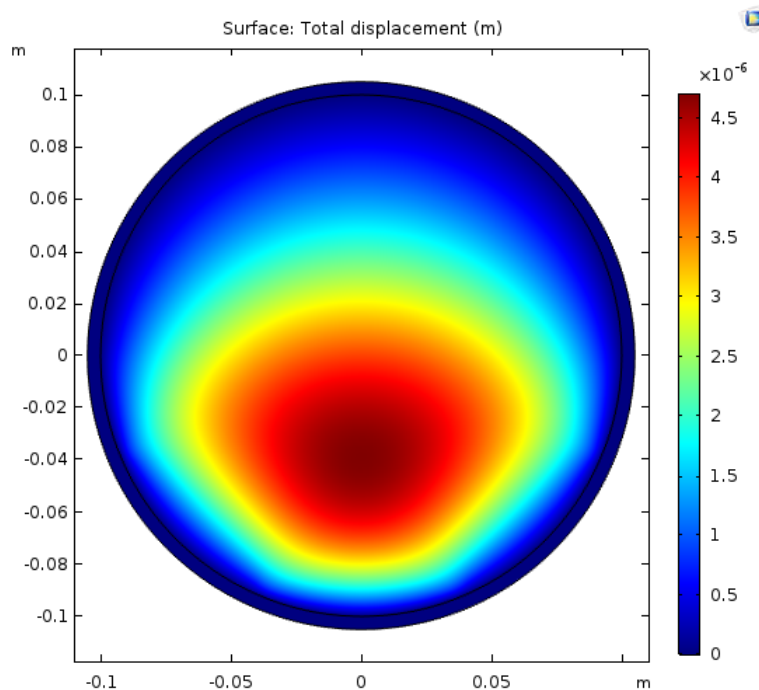


Figura 13: Desplazamiento dentro del sólido.

4. Conclusión

Respecto al código en Python, fue posible calcular los análisis térmicos y mecánicos al seguir la teoría; además, los resultados mostraron un comportamiento esperado en cuanto a su distribución de calor y de desplazamiento nodal. Naturalmente, si hubieramos incrementado el número de nodos y elementos, hubiera sido posible resolver el sistema con una *mejor precisión*, sin embargo, eso hubiera requerido de más recursos, tanto de poder computacional como de tiempo para incorporarlos en los códigos. Por otra parte, cabe mencionar que el código de Python quedó libre para modificar el radio y las variables físicas del sistema, así como su fijación de nodos, sin embargo, el número de aristas para los polinomios no puede ser modificado, causando que el número de elementos y nodos no pueda ser modificado.

Por otra parte, los resultados en COMSOL mostraron coincidencias con los resultados obtenidos en python. Una ventaja de utilizar COMSOL es que es un software hecho para problemas físicos, de forma que si existe un error en la definición de algún parámetro o si existen condiciones de frontera (mixtas, de Dirichlet o Neumann) insuficientes, el programa no podrá solucionar el sistema. Esto no ocurre con el código de python, pues es un método numérico que resuelve las matrices de forma satisfactoria, pero que no detecta cuando un sistema es físicamente imposible.

Referencias

- [1] Pepper, D. W. & Heinrich, J. C.. (2017). *The Finite Element Method*. Third Edition. CRC Press. United States.
- [2] Ochoa, G. D. M.. (2019). *Elementos Finitos*. Curso Universitario del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente. Periodo Otoño. Jalisco, México.