INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE OCCIDENTE

DEPARTAMENTO DE FÍSICA Y MATEMÁTICAS

ECUACIONES DIFERENCIALES EN DERIVADAS PARCIALES

COORDENADAS ESFÉRICAS Y SEPARACIÓN DE VARIABLES

Chiñas Fuentes Karina
NT704804

Hernández Mota Daniel
NT702357

1 de noviembre de 2017

Profesor

Dr. Miranda Montoya Eduardo

INTRODUCCIÓN

En este escrito se busca explicar la resolución de dos ecuaciones diferenciales parciales en coordenadas esféricas en tres dimensiones; la ecuación de Laplace y la ecuación de calor. Previo a la resolución de las ecuaciones diferenciales parciales, hay un apartado especial para explicar la transformación del laplaciano, de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas. Al final de nuestros propios análisis, se encuentra un apartado donde recuperamos información sobre lo que generalmente se hace para resolver lo que involucra a esta clase de problemas.

Por lo que, en la primera sección, hablamos sobre la transformación de coordenadas rectangulares a esféricas, en la segunda sección tratamos la ecuación de calor, en la tercera tratamos la ecuación de Laplace y por último se encuentra el apartado de *lectura* y referencias. Se decidió tomar ese orden ya que consideramos que era la mejor forma de abordar los problemas.

1 LAPLACIANO: DE COORDENADAS RECTANGULARES A COORDENADAS ESFÉRICAS

El laplaciano de una función escalar $U(x, y, z)$ se define como

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

En coordenadas esféricas, se realiza una transformación a la función $U(x, y, z)$ para que ahora sea una función $U = U(r, \theta, \varphi)$. Donde r es la distancial del origen al punto a analizar, θ es el ángulo entre el eje z y r, y φ es el ángulo entre el eje x y la proyección de r limitado en el plano xy.

Para poder encontrar el Laplaciano de U en coordenadas esféricas, se va a considerar a la variable generalizada q_i, donde q_i puede ser x, y o z. Se sabe que r, θ y φ dependen de q_i; por lo que, para encontrar la primera derivada parcial de U con respecto de q_i se tiene que hacer uso de la regla de la cadena, eso es

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial q_i} + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}$$

Para encontrar la segunda derivada parcial de U con respecto de q_i

$$\frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial U}{\partial q_i}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial {q_i}^2} = \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial q_i}\right) + \frac{\partial}{\partial q_i}\left(\frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\right)$$

Aplicando la derivada y volviendo a usar la regla de la cadena, se tiene

$$\frac{\partial^2 U}{\partial {q_i}^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial q_i}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial q_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial q_i}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial q_i^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial q_i}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q_i^2} \tag{1}$$

Sabiendo que las relaciones de coordenadas rectangulares a coordenadas esféricas son las siguientes expresiones (estas se pueden obtener haciendo un análisis gráfico de las equivalencias de coordenadas en una esfera)

$$x = r\sin(\theta)\cos(\varphi)$$

$$y = r\sin(\theta)\sin(\varphi)$$

$$z = r\cos(\theta)$$

y así mismo, las relaciones de coordenadas esféricas a coordenadas rectangulares (que se pueden obtener de las tres relaciones anteriores)

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$\theta = \arccos\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

Entonces, se pueden trabajar las respectivas derivadas parciales en coordenadas esféricas y luego sustituir.

Utilizando la ecuación (1) para $q_i = x$, y, y z, respectivamente, se obtiene

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Para obtener el Lapaciano en coordenadas esféricas se deben sumar las tres componentes rectangulares con su dicha regla de la cadena, eso es

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} +$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} +$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}$$

Reagrupando y simplificando, se llega a que

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{\partial U}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) +$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{\partial U}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) +$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)$$

Se encontraron las primeras y segundas derivadas necesarias para poder cumplir con la transformación, la factorización de las funciones no se realizó al máximo con el objetivo de encontrar rápidamente lo que implicaba en coordenadas esféricas, como $x^2 + y^2 + z^2$ es r^2. Entonces, para cada variable esférica, se obtienen las siguientes expresiones

Para la variable r:

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 = \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} = \frac{y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial y^2} = \frac{x^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

Para la variable θ:

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 = \frac{x^2z^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 = \frac{y^2z^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} = \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2\right)z - \left(x^2+y^2+z^2\right)x^2z - 2x^2z\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} = \frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2\right)z - \left(x^2+y^2+z^2\right)y^2z - 2y^2z\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{2z\left(x^2+y^2\right)^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

Para la variable φ:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 = \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 = 0$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = \frac{2yx}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{2yx}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0$$

Sustituyendo en el Lapaciano y reduciendo se obtiene que

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2}\left(\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{\partial U}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2}\right) +$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2}\left(\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{\partial U}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}\right) +$$
$$\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\left(\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2\right) + \frac{\partial U}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right)$$

Por lo que se puede obtener lo siguiente al sumar las expresiones

Suma de r:

Derivadas parciales elevadas al cuadrado

$$\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial z}\right)^2 = \frac{x^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{y^2}{x^2+y^2+z^2} + \frac{z^2}{x^2+y^2+z^2} = \frac{x^2+y^2+z^2}{x^2+y^2+z^2} = 1$$

Segundas derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 r}{\partial z^2} = \frac{y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} + \frac{x^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} + \frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2x^2+2y^2+2z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}=2\frac{x^2+y^2+z^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}}$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial z^2}=\frac{2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=\frac{2}{r}$$

Suma de θ:

Derivadas parciales elevadas al cuadrado

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2=\frac{x^2z^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+\frac{y^2z^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+\frac{x^2+y^2}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2=\frac{x^2z^2+y^2z^2+\left(x^2+y^2\right)^2}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left[z^2+\left(x^2+y^2\right)\right]}{\left(x^2+y^2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial z}\right)^2=\frac{1}{x^2+y^2+z^2}=\frac{1}{r^2}$$

Segundas derivadas parciales

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2\right)z-\left(x^2+y^2+z^2\right)x^2z-2x^2z\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+$$

$$\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2\right)z-\left(x^2+y^2+z^2\right)y^2z-2y^2z\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}+\frac{2z\left(x^2+y^2\right)^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$=\frac{\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2\right)z-\left(x^2+y^2+z^2\right)x^2z-2x^2z\left(x^2+y^2\right)+\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2\right)z-\left(x^2+y^2+z^2\right)y^2z-2y^2z\left(x^2+y^2\right)+2z\left(x^2+y^2\right)^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$=\frac{2\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2\right)z-\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2\right)z-2(x^2+y^2)z\left(x^2+y^2\right)+2z\left(x^2+y^2\right)^2}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}=\frac{\left(2z-z\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)\left(x^2+y^2\right)}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)^3}\left(x^2+y^2+z^2\right)^2}=\frac{z}{\sqrt{\left(x^2+y^2\right)}\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2}=\frac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}$$

Suma de φ:

Derivadas parciales elevadas al cuadrado

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + \frac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} + 0 = \frac{1}{x^2+y^2}$$

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)^2 = \frac{1}{x^2+y^2} = \frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}$$

Segundas derivadas parciales

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{2yx}{\left(x^2+y^2\right)^2} - \frac{2yx}{\left(x^2+y^2\right)^2} + 0 = 0$$

Por lo que, entonces, el Laplaciano de U en coordenadas esféricas queda como

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r}\right)\frac{\partial U}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\right)\frac{\partial U}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \tag{2}$$

2 ECUACIÓN DE CALOR

La ecuación de calor en tres dimensiones y coordenadas rectangulares se define como

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha\left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}\right)$$

donde α es una constante que se conoce como *difusividad térmica*, que es propiedad del material con el que se trabaja. Sabemos que, por la ecuación (2), la ecuación de calor en coordenadas esféricas sería

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha\left[\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r}\right)\frac{\partial U}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\right)\frac{\partial U}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2}\right]$$

Para resolver esta ecuación diferencial parcial por el método de separación de variables, se piensa a la función $U = U(t, r, \theta, \varphi)$, y ésta a su vez es una multiplicación de las funciones $T(t), R(r), \Theta(\theta), \Phi(\varphi)$: $U = TR\Theta\Phi$. Sustituyendo en la ecuación de calor, se obtiene

$$T'R\Theta\Phi = \alpha\left[TR''\Theta\Phi + \left(\tfrac{2}{r}\right)TR'\Theta\Phi + \left(\tfrac{1}{r^2}\right)TR\Theta''\Phi + \left(\tfrac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\right)TR\Theta'\Phi + \left(\tfrac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\right)TR\Theta\Phi''\right]$$

Al dividir la expresión entre $TR\Theta\Phi$, se obtiene

$$\frac{T'}{T} = \alpha\left[\frac{R''}{R} + \left(\frac{2}{r}\right)\frac{R'}{R} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\right)\frac{\Theta'}{\Theta} + \left(\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\right)\frac{\Phi''}{\Phi}\right]$$

$$\frac{T''}{T}\frac{1}{\alpha} = \frac{R''}{R} + \left(\frac{2}{r}\right)\frac{R'}{R} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\right)\frac{\Theta'}{\Theta} + \left(\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\right)\frac{\Phi''}{\Phi}$$

La relación sería válida si se igualan a constantes, para después poder solucionar las ecuaciones diferenciales ordinarias por venir. Por lo que se va a definir

$$\frac{T''}{T}\frac{1}{\alpha} = \lambda_1 \tag{3}$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda_2 \tag{4}$$

Donde λ_1 y λ_2 son constantes. Entonces

$$\lambda_1 = \frac{R''}{R} + \left(\frac{2}{r}\right)\frac{R'}{R} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\right)\frac{\Theta'}{\Theta} + \left(\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\right)\lambda_2$$

Si se multiplica por r^2 y luego se suma un $-\lambda_1 r^2$, en ambos lados

$$-\lambda_1 r^2 + r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\frac{\Theta'}{\Theta} + \left(\frac{1}{\sin^2(\theta)}\right)\lambda_2 = 0$$

Entonces, podemos decir que

$$-\lambda_1 r^2 + r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = \lambda_3 \tag{5}$$

donde λ_3 también es una constante; haciendo que la relación finalmente quede como

$$\lambda_3 + \frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\frac{\Theta'}{\Theta} + \left(\frac{1}{\sin^2(\theta)}\right)\lambda_2 = 0 \tag{6}$$

Multiplicando todo por $\sin^2(\theta)$ se obtiene la siguiente ecuación

$$\lambda_3\sin^2(\theta) + \sin^2(\theta)\frac{\Theta''}{\Theta} + (\cos(\theta)\sin(\theta))\,\frac{\Theta'}{\Theta} + \lambda_2 = 0$$

haciendo que las ecuaciones (3), (4), (5) y (6) sean las ecuaciones diferenciales ordinarias a resolver. Cabe mencionar que importa mucho los valores que cualquier λ pueda tomar, ya que eso daría una solución específica para cada función a buscar; por ejemplo, en la ecuación (4), si λ_2 es cero, entonces la función $\Phi(\varphi)$ sería una constante, pero si lambda toma valores negativos, la solución sería de tipo senoidal o de funciones exponenciales complejas. Para propósitos del escrito, se va a analizar cada uno de los casos (analizar cuando cualquier λ es mayor, menor o igual que cero).

RESOLVIENDO PARA $T(t)$:

$$\frac{T''}{T} = \lambda_1 \alpha$$

$$\int \frac{T''}{T}\,\mathrm{d}t = \int \lambda_1 \alpha\,\mathrm{d}t$$

$$\mathrm{Ln}(T(t)) = \lambda_1 \alpha t + c, \qquad c = \text{constante}$$

$$T(t) = K e^{\lambda_1 \alpha t} \tag{7}$$

Donde K es una constante. Si λ_1 fuera cero, entonces $T(t)$ sólo sería la constante K. Si λ_1 fuera negativa, entonces el exponencial sería negativo. Si λ_1 fuera positiva, entonces el exponencial sería positivo. Realmente, la forma de la función $T(t)$ no depende mucho de λ_1. Entonces, podemos decir que la ecuación (7) es la solución general para la ecuación diferencial (3).

RESOLVIENDO PARA $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi'' = \lambda_2 \Phi$$

$$\Phi'' - \lambda_2 \Phi = 0$$

En su forma polinomial:

$$m^2 - \lambda_2 = 0, \qquad m = \pm\sqrt{\lambda_2}$$

Como se mencionó, ahora sí va a importar el valor que se le busque asignar a λ_2 porque eso va a determinar la función que describiría a $\Phi(\varphi)$. Si λ_2 es cero, entonces

$$\Phi(\varphi) = A_1 \varphi + B_1$$

Si λ_2 toma valores positivos

$$\Phi(\varphi) = A_1 e^{\sqrt{\lambda_2}\varphi} + B_1 e^{-\sqrt{\lambda_2}\varphi}$$

Si λ_2 toma valores negativos

$$\Phi(\varphi) = A_1 e^{i\sqrt{\lambda_2}\varphi} + B_1 e^{-i\sqrt{\lambda_2}\varphi}$$

o

$$\Phi(\varphi) = A_1 \cos\left(\sqrt{\lambda_2}\varphi\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_2}\varphi\right) \tag{8}$$

donde A_1 y B_1 son constantes que se pueden determinar con condiciones iniciales o de frontera. Por lo general, se suele trabajar con la ecuación (8) como solución a la ecuación (4), debido a que es capaz de cubrir a la mayoría de las condiciones necesarias para describir un sistema.

RESOLVIENDO PARA $R(r)$:

$$-\lambda_1 r^2 + r^2 \frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = \lambda_3$$

$$r^2 R'' + 2rR' = \left(\lambda_3 + \lambda_1 r^2\right) R$$

$$r^2 R'' + 2rR' - \left(\lambda_3 + \lambda_1 r^2\right) R = 0$$

Se debe notar que esta ecuación tiene mucho parecido a la ecuación de Bessel, sin embargo no es completamente similar por lo que se debe utilizar una expansión de series mediante el método de Frobenius, por lo que se asume lo siguiente

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\gamma},$$

$$R' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\gamma) r^{n+\gamma-1},$$

$$R'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\gamma)(n+\gamma-1) r^{n+\gamma-2}$$

Sustituyendo en la ecuación diferencial se obtiene

$$r^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\gamma)(n+\gamma-1) r^{n+\gamma-2} \quad +$$

$$2r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\gamma) r^{n+\gamma-1} \qquad +$$

$$-(\lambda_3 + \lambda_1 r^2) \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\gamma} = 0$$

La expresión se puede enunciar equivalente a

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\gamma)(n+\gamma-1)r^{n+\gamma} \quad +$$

$$2\sum_{n=0}^{\infty} a_n(n+\gamma)r^{n+\gamma} \qquad +$$

$$-\lambda_3\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\gamma} - \lambda_1\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\gamma+2} = 0$$

Que sería lo mismo a tener

$$r^\gamma a_0\left[\gamma(\gamma-1)+2\gamma-\lambda_3\right] + r^{\gamma+1}a_1\left[\gamma(\gamma+1)+2(1+\gamma)-\lambda_3\right] \quad +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} r^{k+\gamma}\left[a_k\left((k+\gamma)^2+(k+\gamma)-\lambda_3\right)-\lambda_1 a_{k-2}\right]=0$$

$$= r^\gamma a_0\left[\gamma^2+\gamma-\lambda_3\right] + r^{\gamma+1}a_1\left[(\gamma+1)^2+(\gamma+1)-\lambda_3\right] \quad +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} r^{k+\gamma}\left[a_k\left((k+\gamma)^2+(k+\gamma)-\lambda_3\right)-\lambda_1 a_{k-2}\right]=0$$

De esta expresión se obtienen tres ecuaciones que determinan las características de a_0, a_1 y a_k, las cuales son

$$a_0(\gamma^2+\gamma-\lambda_3)=0$$

$$a_1\left((\gamma+1)^2+(\gamma+1)-\lambda_3\right)=0$$

$$a_k\left[(k+\gamma)^2+(k+\gamma)-\lambda_3\right]-\lambda_1 a_{k-2}=0$$

Si proponemos que $a_0 \neq 0$, entonces

$$\gamma^2+\gamma-\lambda_3=0 \quad \therefore \quad \gamma=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{1+4\lambda_3}}{2}$$

Se necesita la condición de que $\lambda_3 > -\frac{1}{4}$ para que el exponente de la serie de Frobenius sea real. Debido a esto, automáticamente se puede decir que $a_1 = 0$; mientras que la última expresión se puede obtener una forma para a_k

$$a_k\left((k+\gamma)^2 + (k+\gamma) - \lambda_3\right) - \lambda_1 a_{k-2} = 0$$

$$a_k = \frac{\lambda_1}{(k+\gamma)^2 + (k+\gamma) - \lambda_3} a_{k-2}$$

$$a_k = \frac{\lambda_1}{(k+\gamma+\frac{1}{2})^2 - (\lambda_3 + \frac{1}{4})} a_{k-2}$$

Si se sustituye por la parte positiva que se encontró de γ, entonces quedaría que

$$a_k = \frac{\lambda_1}{\left(k + \frac{\sqrt{1+4\lambda_3}}{2}\right)^2 - (\lambda_3 + \frac{1}{4})} a_{k-2}$$

De esta relación, si denotamos que $l = \frac{\sqrt{1+4\lambda_3}}{2}$, entonces obtenemos que $l^2 = \lambda_3 + \frac{1}{4}$ y por lo tanto la ecuación se puede reducir a

$$a_k = \frac{\lambda_1}{(k+l)^2 - (l^2)} a_{k-2}$$

Desarrollando el binomio, se puede encontrar

$$a_k = \frac{\lambda_1}{k^2 + 2kl} a_{k-2}$$

$$a_k = \frac{\lambda_1}{k\,(k+2l)} a_{k-2} = \frac{\lambda_1}{2k\left(\frac{k}{2} + l\right)} a_{k-2}$$

Al desarrollalo, nos encontramos con un patrón de a_k equivalente a

$$a_2 = \frac{\lambda_1}{4\,(1+l)} a_0 = \frac{\lambda_1}{2^2(1)\,(1+l)} a_0$$

$$a_4 = \frac{\lambda_1}{8\,(2+l)} a_2 = \frac{\lambda_1^2}{2^4(2)(1)\,(2+l)\,(1+l)} a_0$$

$$a_6 = \frac{\lambda_1}{12\,(3+l)} a_4 = \frac{\lambda_1^3}{2^6(3)(2)(1)\,(3+l)\,(2+l)\,(1+l)} a_0$$

$$a_8 = \frac{\lambda_1}{16\,(4+l)} a_6 = \frac{\lambda_1^4}{2^8 (4)(3)(2)(1)\,(4+l)\,(3+l)\,(2+l)\,(1+l)} a_0$$

De aquí se puede encontrar una fórmula general para expresar a_k

$$a_k = \frac{l!\,\lambda_1^{\frac{k}{2}}}{2^k \left(\frac{k}{2}\right)!\,\Gamma(l+\frac{k+2}{2})} a_0$$

Donde Γ representa a la *función gamma*, que se define como

$$\Gamma(q) \equiv \int_0^\infty e^{-x} x^{q-1} dx$$

que cuenta con las propiedades de

$$\Gamma(q+1) = q\Gamma(q)$$

$$\Gamma(q+1) = q!$$

donde q es un escalar positivo (Courant & John, 1984). Entonces, las constantes de la sumatoria se pueden representar como:

$$a_2 = \frac{l!\,\lambda_1 a_o}{1!\,2^2 \Gamma\,(l+2)}$$

$$a_4 = \frac{l!\,\lambda_1^2 a_o}{2!\,2^4 \Gamma\,(l+3)}$$

$$a_6 = \frac{l!\,\lambda_1^3 a_o}{3!\,2^6 \Gamma\,(l+4)}$$

$$a_8 = \frac{l!\,\lambda_1^4 a_o}{4!\,2^8 \Gamma\,(l+5)}$$

Considerando esta información, ahora sí se puede recuperar la forma de $R(r)$, eso es

$$R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+l-\frac{1}{2}}$$

$$R(r) = a_0 r^{l-\frac{1}{2}} + a_2^{2+l-\frac{1}{2}} + a_4^{4+l-\frac{1}{2}} + a_6^{6+l-\frac{1}{2}} + a_8^{8+l-\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$R(r) = a_0 r^{l-\frac{1}{2}} + \frac{l!\,\lambda_1 a_o}{1!\,2^2\Gamma\left(l+2\right)} r^{2+l-\frac{1}{2}} + \frac{l!\,\lambda_1^2 a_o}{2!\,2^4\Gamma\left(l+3\right)} r^{4+l-\frac{1}{2}} + \cdots$$

Factorizando

$$R(r) = l!\,a_0 r^{l-\frac{1}{2}} \left[\frac{1}{l!} + \frac{\lambda_1 r^2}{1!\,2^2\Gamma\left(l+2\right)} + \frac{\lambda_1^2 r^4}{2!\,2^4\Gamma\left(l+3\right)} + \frac{\lambda_1^3 r^6}{3!\,2^6\Gamma\left(l+4\right)} + \cdots\right]$$

Si decimos que $C_0 = l!\,a_0$ y reducimos la expresión en una sumatoria, entonces $R(r)$ queda como

$$R(r) = C_0 r^{l-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^n r^{2n}}{\Gamma\left(n+1+l\right) n!\,2^{2n}}$$

$$R(r) = C_0 r^{l-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1}{4}\right)^n \frac{r^{2n}}{\Gamma(n+1+l)n!}$$

Si ahora trabajamos con la parte negativa que se encontró de γ, entonces quedaría la relación que describe a a_k toma la forma de

$$a_k = \frac{\lambda_1}{\left(k - \frac{\sqrt{1+4\lambda_3}}{2}\right)^2 - \left(\lambda_3 + \frac{1}{4}\right)} a_{k-2}$$

al volver a hacer el mismo cambio de $l = \frac{\sqrt{1+4\lambda_3}}{2}$, entonces la función de a_k queda como

$$a_k = \frac{\lambda_1}{\left(k-l\right)^2 - \left(l^2\right)} a_{k-2}$$

$$a_k = \frac{\lambda_1}{k\left(k-2l\right)} a_{k-2} = \frac{\lambda_1}{2k\left(\frac{k}{2}-l\right)} a_{k-2}$$

Al desarrollarlo, se puede encontrar un patrón para a_k equivalente a

$$a_2 = \frac{\lambda_1}{(1)\,!\,2^2\left(1-l\right)} a_0 = \frac{-\lambda_1}{(1)\,!\,2^2\left(l-1\right)} a_0$$

$$a_4 = \frac{\lambda_1^2}{(2)\,!\,2^4\left(2-l\right)\left(1-l\right)} a_0$$

$$a_6 = \frac{-\lambda_1^3}{(3)\,!\,2^6\left(3-l\right)\left(2-l\right)\left(1-l\right)} a_0$$

$$a_8 = \frac{\lambda_1^4}{(4)\,!\,2^8\,(4-l)\,(3-l)\,(2-l)\,(1-l)} a_0$$

Haciendo una simplificación con la función gamma se puede determinar que las formulas pueden quedar como

$$a_2 = \frac{-\,(\lambda_1)\,\Gamma(l-1)}{(1)\,!\,2^2\,(l-1)\,!} a_0$$

$$a_4 = \frac{(\lambda_1)^2\,\Gamma(l-2)}{(2)\,!\,2^4\,(l-1)\,!} a_0$$

$$a_6 = \frac{-\,(\lambda_1)^3\,\Gamma(l-3)}{(3)\,!\,2^6\,(l-1)\,!} a_0$$

$$a_8 = \frac{(\lambda_1)^4\,\Gamma(l-4)}{(4)\,!\,2^8\,(l-1)\,!} a_0$$

Por lo que poniendo la solución de la ecuación diferencial

$$R(r) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\gamma} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n-l-\frac{1}{2}}$$

$$= a_0 r^{-l-\frac{1}{2}} - \frac{(\lambda_1)\,\Gamma(l-1)}{(1)\,!\,2^2\,(l-1)\,!} a_0 r^{2-l-\frac{1}{2}} + \frac{(\lambda_1)^2\,\Gamma(l-2)}{(2)\,!\,2^4\,(l-1)\,!} a_0 r^{4-l-\frac{1}{2}} + \cdots$$

$$\frac{a_0 r^{-l-\frac{1}{2}}}{(l-1)\,!}\left[(l-1)\,! - \frac{(\lambda_1)\,\Gamma(l-1)}{1!\,2^2} r^2 + \frac{(\lambda_1)^2\,\Gamma(l-2)}{2!\,2^4} r^4 - \cdots\right]$$

Si decimos que $C_1 = \frac{a_0}{(l-1)!}$, y se reduce la expresión a una sumatoria, queda

$$R(r) = C_1 r^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\lambda_1}{4}\right)^n \frac{\Gamma(l-n)}{n!} r^{2n}$$

Por combinación lineal, se pueden sumar las dos ecuaciones que se encontraron y se tendría una solución general para la ecuación (5), la ecuación (9) muestra dicha solución.

$$R(r) = C_0 r^{l-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\lambda_1}{4}\right)^n \frac{r^{2n}}{\Gamma(n+1+l)n!} + C_1 r^{-l-\frac{1}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{-\lambda_1}{4}\right)^n \frac{\Gamma(l-n)}{n!} r^{2n} \tag{9}$$

RESOLVIENDO PARA $\Theta(\theta)$:

Se tenía que

$$\lambda_3 + \frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\frac{\Theta'}{\Theta} + \left(\frac{1}{\sin^2(\theta)}\right)\lambda_2 = 0$$

Haciendo uso de simple álgebra, la ecuación diferencial queda como

$$\sin^2(\theta)\Theta'' + \sin(\theta)\cos(\theta)\Theta' + \left(\lambda_3 \sin^2(\theta) + \lambda_2\right)\Theta = 0$$

Si se propone el cambio de variable

$$w = \sin(\theta)$$

Entonces la ecuación diferencial tomaría una forma diferente, para encontrar dicha forma, es necesario utilizar la regla de la cadena para calcular la segunda y primera derivada de Θ, eso es:

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} = \cos(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}$$

y

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}^2w}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} = -\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w} + \cos^2(\theta)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2}$$

Haciendo la respectiva sustitución, la ecuación diferencial entonces se vuelve como

$$\left(-\sin\theta\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w} + \cos^2(\theta)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2}\right)\sin^2(\theta) + \left(\cos(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}\right)\sin(\theta)\cos(\theta) + \left(\lambda_3\sin^2(\theta) + \lambda_2\right)\Theta = 0$$

Factorizando

$$\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2} + \left(-\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right)\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w} +$$

$$\left(\lambda_3\sin^2(\theta) + \lambda_2\right)\Theta = 0$$

Al hacer uso de la identidad $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$, entonces

$$\left(1-\sin^2(\theta)\right)\sin^2(\theta)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2}+\left(-\sin^2(\theta)+\left(1-\sin^2(\theta)\right)\right)\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}+$$

$$\left(\lambda_3\sin^2(\theta)+\lambda_2\right)\Theta=0$$

Cambiando ahora por w

$$\left(w^2-w^4\right)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2}+\left(w-2w^3\right)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}+\left(\lambda_3 w^2+\lambda_2\right)\Theta=0$$

Para resolver esta ecuación diferencial de segundo orden con coeficientes no constantes, se va a hacer uso de las series de Frobenius, por lo que se implica hacer uso de

$$\Theta(w)=\sum_{n=0}^{\infty}C_n w^{n+\gamma}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(n+\gamma\right)w^{n+\gamma-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2}=\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left[\left(n+\gamma\right)^2-\left(n+\gamma\right)\right]w^{n+\gamma-2}$$

Al sustituir

$$\left(w^2-w^4\right)\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left[\left(n+\gamma\right)^2-\left(n+\gamma\right)\right]w^{n+\gamma-2}\quad+$$

$$\left(w-2w^3\right)\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(n+\gamma\right)w^{n+\gamma-1}\quad+$$

$$\left(\lambda_3 w^2+\lambda_2\right)\sum_{n=0}^{\infty}C_n w^{n+\gamma}=0$$

Entonces, la ecuación diferencial toma la forma de

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left[\left(n+\gamma\right)^2-\left(n+\gamma\right)\right]w^{n+\gamma}-\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left[\left(n+\gamma\right)^2-\left(n+\gamma\right)\right]w^{n+\gamma+2}\quad+$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(n+\gamma\right)w^{n+\gamma}-2\sum_{n=0}^{\infty}C_n\left(n+\gamma\right)w^{n+\gamma+2}\quad+$$

$$\lambda_3 \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+\gamma+2} + \lambda_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+\gamma} = 0$$

Se puede notar que no es posible factorizar algunas sumatorias por el hecho de que unas empiezan con el factor $w^{n+\gamma+2}$ y otras con $w^{n+\gamma}$, por lo que se van a correr el índice de algunas sumatorias con el objetivo de que al final se pueda obtener una que englobe todos los demás términos, junto con las ecuaciones que ayudan a describir el comportamiento de C_n. Entonces

$$C_0\left(\gamma^2-\gamma\right) w^\gamma + C_1\left[(1+\gamma)^2-(1+\gamma)\right] w^{\gamma+1} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n\left[(n+\gamma)^2-(n+\gamma)\right] w^{n+\gamma} \quad +$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left[(n+\gamma)^2-(n+\gamma)\right] w^{n+\gamma+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n\left(n+\gamma\right) w^{n+\gamma+2} \quad +$$

$$C_0\gamma w^\gamma + C_1\left(1+\gamma\right) w^{\gamma+1} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n\left(n+\gamma\right) w^{n+\gamma} + \lambda_3 \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+\gamma+2} \quad +$$

$$\lambda_2 C_0 w^\gamma + \lambda_2 C_1 w^{\gamma+1} + \lambda_2 \sum_{n=2}^{\infty} C_n w^{n+\gamma} = 0$$

Ya que todas las sumatorias empiezan con el exponente de w con $\gamma+2$, ahora sí se puede factorizar las sumatorias pero con un cambio de índice (con n = k para aquellas que empiezan en n = 2 y con n = k - 2 para aquellas que empiezan con n = 0). Entonces, con ayuda de álgebra, la ecuación diferencial se convierte en

$$\left[\gamma^2+\lambda_2\right] C_0 w^\gamma + \left[(1+\gamma)^2+\lambda_2\right] C_1 w^{\gamma+1} \quad +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \left[C_k\left(\lambda_2+(k+\gamma)^2\right) - C_{k-2}\left((k+\gamma-2)^2+(k+\gamma-2)-\lambda_3\right)\right] w^{k+\gamma} = 0$$

De aquí se pueden obtener las siguientes ecuaciones

$$\left[\gamma^2+\lambda_2\right] C_0 = 0$$

$$\left[(1+\gamma)^2+\lambda_2\right] C_1 = 0$$

$$C_k\left(\lambda_2+(k+\gamma)^2\right) - C_{k-2}\left((k+\gamma-2)^2+(k+\gamma-2)-\lambda_3\right) = 0$$

Si se supone que $C_0 \neq 0$, entonces, se tendría que

$$\gamma^2 + \lambda_2 = 0$$

$$\gamma^2 = -\lambda_2$$

$$\gamma = \pm\sqrt{-\lambda_2}$$

Debido a que λ_2 tiene que ser real, entonces $\lambda_2 < 0$. De ahora en adelante se hará válida esta expresión por lo que

$$\gamma = \pm\sqrt{\lambda_2}$$

De esa forma, C_1 tendría que ser igual a cero. En cuanto a la última ecuación que se encontró, se tiene que

$$C_k = \frac{(k+\gamma)^2 - 3(k+\gamma) + 2 - \lambda_3}{\lambda_2 + (k+\gamma)^2} C_{k-2}$$

Si se considera el caso de $\gamma = \sqrt{\lambda_2}$ entonces,

$$C_k = \frac{\left(k+\sqrt{\lambda_2}\right)^2 - 3\left(k+\sqrt{\lambda_2}\right) + 2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \left(k+\sqrt{\lambda_2}\right)^2} C_{k-2}$$

Mientras que el otro caso sería si $\gamma = -\sqrt{\lambda_2}$, por lo que

$$C_k = \frac{\left(k-\sqrt{\lambda_2}\right)^2 - 3\left(k-\sqrt{\lambda_2}\right) + 2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \left(k-\sqrt{\lambda_2}\right)^2} C_{k-2}$$

Viendo ahora sólo para $\gamma = \sqrt{\lambda_2}$, entonces encontramos un comportamiento de C_k de tipo

$$C_2 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[1^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + 1\right)^2\right]} C_0$$

$$C_4 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[2^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + 2\right)^2\right]} C_2$$

$$C_6 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[3^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + 3\right)^2\right]} C_4$$

$$C_8 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[4^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + 4\right)^2\right]} C_6$$

Mientras que para C_k

$$C_k = C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{2l-3}{2}\right)^2 - (\frac{1}{4} + \lambda_3)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right), \quad \text{Para } l > 0$$

Entonces

$$\Theta(w) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k w^{k+\sqrt{\lambda_2}}$$

$$\Theta(w) = C_0 w^{\sqrt{\lambda_2}} + C_2 w^{2+\sqrt{\lambda_2}} + C_4 w^{4+\sqrt{\lambda_2}} + C_6 w^{6+\sqrt{\lambda_2}} + \cdots$$

$$\Theta(w) = C_0 w^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{2l-3}{2}\right)^2 - (\frac{1}{4} + \lambda_3)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) w^{k+\sqrt{\lambda_2}}, \quad \text{Para } l > 0$$

Regresando a la dependencia en θ se tiene

$$\Theta(\theta) = C_0 \sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{2l-3}{2}\right)^2 - (\frac{1}{4} + \lambda_3)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) \sin(\theta)^{k+\sqrt{\lambda_2}}, \quad \text{Para } l > 0$$

Ahora, considerando el caso de $\gamma = -\sqrt{\lambda_2}$ entonces la ecuación que se genera queda

$$C_k = \frac{\left(k - \sqrt{\lambda_2}\right)^2 - 3\left(k - \sqrt{\lambda_2}\right) + 2 - \lambda_3}{\lambda_2 + \left(k - \sqrt{\lambda_2}\right)^2} C_{k-2}$$

Viendo ahora sólo para $\gamma = -\sqrt{\lambda_2}$, entonces encontramos un comportamiento de C_k de tipo

$$C_2 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[1^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - 1\right)^2\right]} C_0$$

$$C_4 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[2^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - 2\right)^2\right]} C_2$$

$$C_6 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[3^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - 3\right)^2\right]} C_4$$

$$C_8 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[4^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - 4\right)^2\right]} C_6$$

El comportamiento de C_k

$$C_k = C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right), \quad \text{Para } l > 0$$

Por lo que la ecuación diferencial resueltante sería

$$\Theta(w) = C_0 w^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) w^{k+\sqrt{\lambda_2}}, \quad \text{Para } l > 0$$

Regresando a la dependencia en θ se obtiene

$$\Theta(\theta) = C_0 \sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) \sin(\theta)^{k+\sqrt{\lambda_2}}, \quad \text{Para } l > 0$$

Generando una combinación lineal y renombrando las constantes de ambos resultados se obtiene que

$$\Theta(\theta) = C_0 \sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=par}^{\infty} C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) \sin(\theta)^{k+\sqrt{\lambda_2}} \quad +$$

$$C_1 \sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=par}^{\infty} C_1 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_3\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) \sin(\theta)^{k+\sqrt{\lambda_2}} \tag{10}$$

para toda $l, k > 0$. Cabe mencionar que se intentó desarrollar las multiplicatorias pero fue considerablemente difícil encontrar un patrón que describiera el comportamiento de C_k sin necesidad de tener una multiplicatoria. Por lo que decimos que la ecuación (10) muestra una solución general para la ecuación diferencial (6).

Al contar entonces con las solciones de cada ecuación diferencial ordinaria que se encontró, es posible conocer la solución de $U(t,r,\theta,\varphi)$; que, básicamente, es la multiplicación de las ecuaciones (7), (8), (9) y (10). Entonces

$$U(t,r,\theta,\varphi)=T(t)R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

donde

$$T(t)=Ke^{\lambda_1\alpha t}$$

$$R(r)=A_0r^{l-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda_1}{4}\right)^n\frac{r^{2n}}{\Gamma(n+1+l)n!}+A_1r^{-l-\frac{1}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-\lambda_1}{4}\right)^n\frac{\Gamma(l-n)}{n!}r^{2n}$$

$$\Theta(\theta)=B_0\sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}}+\sum_{n=par}^{\infty}B_0\left(\prod_{k=par}^{n}\frac{\left(\sqrt{\lambda_2}+\frac{2k-3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}+\lambda_3\right)}{2\left[\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\lambda_2}+\frac{k}{2}\right)^2\right]}\right)\sin(\theta)^{n+\sqrt{\lambda_2}}\quad+$$
$$B_1\sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}}+\sum_{n=par}^{\infty}B_1\left(\prod_{k=par}^{n}\frac{\left(\sqrt{\lambda_2}-\frac{2k-3}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{4}+\lambda_3\right)}{2\left[\left(\frac{k}{2}\right)^2+\left(\sqrt{\lambda_2}-\frac{k}{2}\right)^2\right]}\right)\sin(\theta)^{n+\sqrt{\lambda_2}}$$

$$\Phi(\varphi)=C_0\cos\left(\sqrt{\lambda_2}\varphi\right)+C_1\sin\left(\sqrt{\lambda_2}\varphi\right)$$

con

$$l=\frac{\sqrt{1+4\lambda_1}}{2}$$

y, para dichas expresiones, las raíces no pasan a tener valores complejos; ya que eso ya se tiene considerado, por lo que se podría ver como si λ_1, λ_2 y λ_3 sólo toman valores positivos para las expresiones mostradas de U. Además, K, A_0, A_1, B_0, B_1, C_0 y C_1 son constantes a determinar con condiciones.

3 ECUACIÓN DE LAPLACE

La ecuación de Laplace en tres dimensiones y coordenadas rectangulares se define como

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0$$

Sabemos que, por la ecuación (2), la ecuación de Laplace toma la forma de

$$\nabla^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \left(\frac{2}{r}\right)\frac{\partial U}{\partial r} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\right)\frac{\partial U}{\partial \theta} + \left(\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} = 0$$

Al igual que para la ecuación de calor, se consideró el método de separación de variables para resolver la ecuación de Laplace, sólo que U ahora se define como la multiplicación de las funciones $R(r), \Theta(\theta), \Phi(\varphi)$: $U = R(r), \Theta(\theta), \Phi(\varphi)$. Entonces, la ecuación de Laplace queda como

$$R''\Theta\Phi + \left(\frac{2}{r}\right)R'\Theta\Phi + \left(\frac{1}{r^2}\right)R\Theta''\Phi + \left(\frac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\right)R\Theta'\Phi + \left(\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\right)R\Theta\Phi'' = 0$$

Dividiendo entre $R(r), \Theta(\theta), \Phi(\varphi)$

$$\frac{R''}{R} + \left(\frac{2}{r}\right)\frac{R'}{R} + \left(\frac{1}{r^2}\right)\frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{\cos(\theta)}{r^2\sin(\theta)}\right)\frac{\Theta'}{\Theta} + \left(\frac{1}{r^2\sin^2(\theta)}\right)\frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

Multiplicando todo por r^2

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} + \frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\frac{\Theta'}{\Theta} + \left(\frac{1}{\sin^2(\theta)}\right)\frac{\Phi''}{\Phi} = 0$$

Se sabe que esa relación sólo puede ser posible si se trata de constantes, es por eso que se van a realizar las siguientes definiciones

$$r^2\frac{R''}{R} + 2r\frac{R'}{R} = \lambda_1 \tag{11}$$

$$\frac{\Phi''}{\Phi} = \lambda_2 \tag{12}$$

donde λ_1 y λ_2 son constantes; haciendo que la relación quede como

$$\lambda_1 + \frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\frac{\Theta'}{\Theta} + \left(\frac{1}{\sin^2(\theta)}\right)\lambda_2 = 0 \tag{13}$$

Donde las ecuaciones (11), (12) y (13) son las ecuaciones diferenciales ordinarias para encontrar las funciones $R(r), \Phi(\varphi)$ y $\Theta(\theta)$, respectivamente. Y así tener una solución a la ecuación de Laplace. Al igual que en el análisis de la ecuación de calor, aquí también se van a analizar los casos de que cualquier λ tome un valor menor o mayor a cero. (De otra forma, se llegarían a expresiones que por lo general llevan a soluciones triviales).

RESOLVIENDO PARA $\Phi(\varphi)$:

$$\Phi'' = \lambda_2 \Phi, \qquad \Phi'' - \lambda_2 \Phi = 0$$

En su forma polinomial

$$m^2 - \lambda_2 = 0, \qquad m = \pm\sqrt{\lambda_2}$$

Si λ_2 es igual a cero:

$$\Phi(\varphi) = A_1 \varphi + B_1$$

Si λ_2 es mayor a cero:

$$\Phi(\varphi) = A_1 e^{\sqrt{\lambda_2}\varphi} + B_1 e^{-\sqrt{\lambda_2}\varphi}$$

Si λ_2 es menor a cero:

$$\Phi(\varphi) = A_1 e^{i\sqrt{\lambda_2}\varphi} + B_1 e^{-i\sqrt{\lambda_2}\varphi}$$

o

$$\Phi(\varphi) = A_1 \cos\left(\sqrt{\lambda_2}\varphi\right) + B_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_2}\varphi\right) \tag{14}$$

donde A_1 y B_1 son constantes que se encuentran con condiciones iniciales o de frontera. Lo común es que la solución de una ecuación diferencial, como la ecuación (12), esté expresada como la ecuación (14), por la misma razón de que dicha expresión alcanza a cubrir las necesidades que las condiciones de un sistema necesita.

RESOLVIENDO PARA $R(r)$:

Se tenía la ecuación de

$$r^2 \frac{R''}{R} + 2r \frac{R'}{R} = \lambda_1$$

Que es equivalente a tener

$$r^2R'' + 2rR' - \lambda_1 R = 0$$

Utilizando a Frobenius, se plantean las siguientes ecuaciones

$$R = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\gamma},$$

$$R' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\gamma) r^{n+\gamma-1},$$

$$R'' = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\gamma)(n+\gamma-1) r^{n+\gamma-2}$$

La ecuación diferencial toma la forma de

$$r^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\gamma)(n+\gamma-1) r^{n+\gamma-2} + 2r \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\gamma) r^{n+\gamma-1} - \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\gamma} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\gamma)(n+\gamma-1) r^{n+\gamma} + 2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n (n+\gamma) r^{n+\gamma} - \lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\gamma} = 0$$

Es notable ahora que es posible factorizar la sumatoria, debido a que todas las sumatorias empiezan con el mismo exponente; por lo que, la ecuación diferencial tomaría la forma de

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\gamma} \left[(n+\gamma)(n+\gamma-1) + 2(n+\gamma) - \lambda_1\right] = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^{n+\gamma} \left[(n+\gamma)^2 + (n+\gamma) - \lambda_1\right] = 0$$

Para encontrar la ecuación indicial

$$a_0 \left(\gamma^2 + \gamma - \lambda_1\right) r^{\gamma} + \sum_{n=2}^{\infty} a_n r^{n+\gamma} \left[(n+\gamma)^2 + (n+\gamma) - \lambda_1\right] = 0$$

Se sabe que a_0 es diferente de cero, por lo que encontramos que

$$\gamma^2 + \gamma - \lambda_1 = 0$$

$$\gamma_{\pm} = -\frac{1}{2}\left(1 \mp \sqrt{1+4\lambda_1}\right)$$

Es importante notar que λ_1 debe tomar un valor específico tal que evite que γ tome un valor complejo, por lo que

$$\lambda_1 > -\frac{1}{4}$$

Entonces

$$\gamma_{+} = -\frac{1}{2}\left(1 - \sqrt{1+4\lambda_1}\right)$$

$$\gamma_{-} = -\frac{1}{2}\left(1 + \sqrt{1+4\lambda_1}\right)$$

Si evaluamos esa relación en la ecuación que multiplica a a_n, entonces encontramos que

$$(n+\gamma_{\pm})^2 + (n+\gamma_{\pm}) - \lambda_1 \neq 0$$

Obligando a que

$$a_1 = a_2 = a_3 = \cdots = 0$$

Por combinación lineal de las dos soluciones de γ la ecuación de R entonces queda de la forma

$$R(r) = a_{0_+} r^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+4\lambda_1}\right)} + a_{0_-} r^{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\lambda_1}\right)}, \tag{15}$$

Entonces, podemos decir que la ecuación (15) muestra una solución general a la ecuación diferencial (11).

RESOLVIENDO PARA $\Theta(\theta)$

Se tenía que

$$\lambda_1 + \frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\frac{\Theta'}{\Theta} + \left(\frac{1}{\sin^2(\theta)}\right)\lambda_2 = 0$$

que es equivalente a tener

$$\sin^2(\theta)\Theta'' + \sin(\theta)\cos(\theta)\Theta' + \left(\lambda_1 \sin^2(\theta) + \lambda_2\right)\Theta = 0$$

Si se vuelve a considerar el cambio de variable

$$w = \sin(\theta)$$

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta} = \cos(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}$$

mientras que para la segunda derivada, usando la regla de la cadena

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}\theta^2} + \frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2}\left(\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}\theta}\right)^2$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} = -\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w} + \cos^2(\theta)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2}$$

Entonces la ecuación diferencial queda como

$$\sin^2(\theta)\left(-\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w} + \cos^2(\theta)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2}\right) + \cos(\theta)\sin(\theta)\left(\cos(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w}\right) + \left(\lambda_1\sin^2(\theta) + \lambda_2\right)\Theta = 0$$

Factorizando

$$\cos^2(\theta)\sin^2(\theta)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2} + \left(-\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta)\right)\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w} + \left(\lambda_1\sin^2(\theta) + \lambda_2\right)\Theta = 0$$

Al hacer uso de la identidad $\cos^2(\theta) = 1 - \sin^2(\theta)$, entonces

$$\left(1 - \sin^2(\theta)\right)\sin^2(\theta)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2} + \left(-\sin^2(\theta) + \left(1 - \sin^2(\theta)\right)\right)\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w} +$$

$$\left(\lambda_1\sin^2(\theta) + \lambda_2\right)\Theta = 0$$

Cambiando ahora por w

$$\left(w^2 - w^4\right)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2} + \left(w - 2w^3\right)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w} + \left(\lambda_1 w^2 + \lambda_2\right)\Theta = 0$$

Al igual que en la sección anterior, se volvió a optar por el método de Series de Frobenius para poder encontrar una solución general a la ecuación diferencial ordinaria, por lo que

$$\Theta(w) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+\gamma}$$

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}w} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(n+\gamma\right) w^{n+\gamma-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}w^2} = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left[(n+\gamma)^2 - (n+\gamma)\right] w^{n+\gamma-2}$$

Al sustituir

$$\left(w^2 - w^4\right) \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left[(n+\gamma)^2 - (n+\gamma)\right] w^{n+\gamma-2} \quad +$$

$$\left(w - 2w^3\right) \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(n+\gamma\right) w^{n+\gamma-1} \quad +$$

$$\left(\lambda_1 w^2 + \lambda_2\right) \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+\gamma} = 0$$

Entonces, la ecuación diferencial toma la forma de

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left[(n+\gamma)^2 - (n+\gamma)\right] w^{n+\gamma} - \sum_{n=0}^{\infty} C_n \left[(n+\gamma)^2 - (n+\gamma)\right] w^{n+\gamma+2} \quad +$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(n+\gamma\right) w^{n+\gamma} - 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(n+\gamma\right) w^{n+\gamma+2} \quad +$$

$$\lambda_1 \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+\gamma+2} + \lambda_2 \sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+\gamma} = 0$$

Al igual que en el procedimiento pasado, (y en general, cada vez que se resuelve una ecuación diferencial por series) se va a buscar las ecuaciones que describan el comportamiento de a_k y para ello, es necesario buscar la factorización de las sumatorias, por lo que, al correr los índices necesarios la ecuación toma la forma de

$$C_0 \left(\gamma^2 - \gamma\right) w^{\gamma} + C_1 \left[(1+\gamma)^2 - (1+\gamma)\right] w^{\gamma+1} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n \left[(n+\gamma)^2 - (n+\gamma)\right] w^{n+\gamma} \quad +$$

$$-\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left[(n+\gamma)^2 - (n+\gamma)\right] w^{n+\gamma+2} - 2\sum_{n=0}^{\infty} C_n \left(n+\gamma\right) w^{n+\gamma+2} \quad +$$

$$C_0\gamma w^{\gamma} + C_1\left(1+\gamma\right)w^{\gamma+1} + \sum_{n=2}^{\infty} C_n\left(n+\gamma\right)w^{n+\gamma} + \lambda_1\sum_{n=0}^{\infty} C_n w^{n+\gamma+2} \quad +$$

$$\lambda_2 C_0 w^{\gamma} + \lambda_2 C_1 w^{\gamma+1} + \lambda_2\sum_{n=2}^{\infty} C_n w^{n+\gamma} = 0$$

Ahora sí se puede factorizar, al hacer eso nos queda que

$$\left[\gamma^2 + \lambda_2\right]C_0 w^{\gamma} + \left[\left(1+\gamma\right)^2 + \lambda_2\right]C_1 w^{\gamma+1} \quad +$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\left[C_k\left(\lambda_2 + \left(k+\gamma\right)^2\right) - C_{k-2}\left(\left(k+\gamma-2\right)^2 + \left(k+\gamma-2\right) - \lambda_1\right)\right]w^{k+\gamma} = 0$$

De aquí se pueden obtener las siguientes ecuaciones

$$\left[\gamma^2 + \lambda_2\right]C_0 = 0$$

$$\left[\left(1+\gamma\right)^2 + \lambda_2\right]C_1 = 0$$

$$C_k\left(\lambda_2 + \left(k+\gamma\right)^2\right) - C_{k-2}\left(\left(k+\gamma-2\right)^2 + \left(k+\gamma-2\right) - \lambda_1\right) = 0$$

Podemos decir que $C_0 \neq 0$; entonces, se tiene

$$\gamma^2 + \lambda_2 = 0$$

$$\gamma^2 = -\lambda_2$$

$$\gamma = \pm\sqrt{-\lambda_2}$$

Debido a que γ sólo puede tomar valores reales, decimos que λ_2 toma valores menores a cero. Al establecer eso, ya podemos trabajar con la expresión

$$\gamma = \pm\sqrt{\lambda_2}$$

Haciendo que C_1 tome el valor de cero. Al analizar la expresión para C_k

$$C_k = \frac{(k+\gamma)^2 - 3(k+\gamma) + 2 - \lambda_1}{\lambda_2 + (k+\gamma)^2} C_{k-2}$$

Si se considera el caso de $\gamma = \sqrt{\lambda_2}$ entonces

$$C_k = \frac{\left(k+\sqrt{\lambda_2}\right)^2 - 3\left(k+\sqrt{\lambda_2}\right) + 2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \left(k+\sqrt{\lambda_2}\right)^2} C_{k-2}$$

Mientras que el otro caso sería si $\gamma = -\sqrt{\lambda_2}$, por lo que

$$C_k = \frac{\left(k-\sqrt{\lambda_2}\right)^2 - 3\left(k-\sqrt{\lambda_2}\right) + 2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \left(k-\sqrt{\lambda_2}\right)^2} C_{k-2}$$

Viendo ahora sólo para $\gamma = \sqrt{\lambda_2}$, nos encontramos con un comportamiento de C_k de tipo

$$C_2 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[1^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + 1\right)^2\right]} C_0$$

$$C_4 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{5}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[2^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + 2\right)^2\right]} C_2$$

$$C_6 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{9}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[3^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + 3\right)^2\right]} C_4$$

$$C_8 = \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{13}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[4^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + 4\right)^2\right]} C_6$$

Mientras que para C_k

$$C_k = C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right), \quad \text{Para } l > 0$$

Entonces

$$\Theta(w) = C_0 w^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) w^{k+\sqrt{\lambda_2}}, \quad \text{Para } l > 0$$

Regresando a la dependencia en θ se tiene

$$\Theta(\theta) = C_0 \sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) \sin(\theta)^{k+\sqrt{\lambda_2}}, \quad \text{Para } l > 0$$

Entonces, es fácil notar que al trabajar con $\gamma = -\sqrt{\lambda_2}$ se va a encontrar la misma solución que se encontró para la ecuación (6) al trabajar con $\gamma = -\sqrt{\lambda_2}$, ya que lo único que cambia entre las ecuaciones (6) y (13) es que λ_3 pasa a ser λ_1, por lo que podemos decir que la otra solución será

$$\Theta(w) = C_0 w^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) w^{k+\sqrt{\lambda_2}}, \quad \text{Para } l > 0$$

Regresando a la dependencia en θ se obtiene

$$\Theta(\theta) = C_0 \sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=2,4,6,\cdots}^{\infty} C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) \sin(\theta)^{k+\sqrt{\lambda_2}}, \quad \text{Para } l > 0$$

Al renombrar las constantes y considerar una combinación lineal, se puede decir que

$$\begin{aligned} \Theta(\theta) = C_0 \sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=par}^{\infty} C_0 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) \sin(\theta)^{k+\sqrt{\lambda_2}} \quad + \\ C_1 \sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{k=par}^{\infty} C_1 \left(\prod_{l=par}^{k} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{2l-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{l}{2}\right)^2\right]} \right) \sin(\theta)^{k+\sqrt{\lambda_2}} \end{aligned} \tag{16}$$

Por lo que, la ecuación (16) muestra una solución general para la ecuación (13). Creemos que es importante mencionar que se intentó solucionar la ecuación (13) considerando el cambio de variable de $w = \cos(\theta)$, en lugar de $w = \sin(\theta)$ ya que notamos que podríamos llegar a otra solución haciendo dicha consideración; no obstante, el método que se mostró fue con $w = \sin(\theta)$ ya que al intentarlo con $w = \cos(\theta)$ nos encontramos con el caso donde γ tomaba valores de cero o uno, causando que C_1 (diferente al de la combinación lineal, sino al de las sumatorias) tomara un valor diferente de cero; haciendo que las ecuaciones fueran muy difíciles de manejar, incluso si la solución se dejaba expresado en términos de multiplicatorias y no sumatorias (a comparación de la solución de $R(r)$, en la ecuación de calor).

Finalmente, después de hacer todo el análisis y encontrar las descripciones de cada constante λ, podemos decir que

$$U(r,\theta,\varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$$

donde

$$R(r) = A_0 r^{-\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{1+4\lambda_1}\right)} + A_1 r^{-\frac{1}{2}\left(1+\sqrt{1+4\lambda_1}\right)}$$

$$\Theta(\theta) = \Theta(\theta) = B_0 \sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{n=par}^{\infty} B_0 \left(\prod_{k=par}^{n} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{2k-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} + \frac{k}{2}\right)^2\right]} \right) \sin(\theta)^{n+\sqrt{\lambda_2}} \quad +$$

$$B_1 \sin(\theta)^{\sqrt{\lambda 2}} + \sum_{n=par}^{\infty} B_1 \left(\prod_{k=par}^{n} \frac{\left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{2k-3}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4} + \lambda_1\right)}{2\left[\left(\frac{k}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\lambda_2} - \frac{k}{2}\right)^2\right]} \right) \sin(\theta)^{n+\sqrt{\lambda_2}}$$

$$\Phi(\varphi) = C_0 \cos\left(\sqrt{\lambda_2}\varphi\right) + C_1 \sin\left(\sqrt{\lambda_2}\varphi\right)$$

Para dichas expresiones las raíces no pasan a tener valores complejos; ya que eso ya se tiene considerado, por lo que se podría ver como si λ_1y λ_2 sólo toman valores positivos para las expresiones mostradas de U. Además, A_0, A_1, B_0, B_1, C_0 y C_1 son constantes a determinar con condiciones.

4 LECTURAS

Debido a que sabemos que las soluciones de una ecuación diferencial parcial pueden variar de muchas formas, estamos conscientes que las soluciones mostradas en éste escrito no son las únicas (o las mejores) que se pueden tener para describir un fenómeno en coordenadas esféricas que requiera la solución de la ecuación (2), por lo que se decidió crear un apartado al escrito donde hablamos sobre lo que se puede encontrar en documentos que describan el análisis de lo relacionado.

Respecto a las ecuaciones de $\Theta(\theta)$ (6) y (13), se tenía algo como

$$\lambda + \frac{\Theta''}{\Theta} + \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\frac{\Theta'}{\Theta} + \left(\frac{1}{\sin^2(\theta)}\right)\beta = 0$$

donde λ y β son constantes. Desde que trabajamos con dicha ecuación diferencial, análogamente, β tenía que tomar valores menores a cero, por lo que ahora trabajaremos con la expresión

$$\Theta'' + \left(\frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)}\right)\Theta' + \left(\lambda - \frac{\beta}{\sin^2(\theta)}\right)\Theta = 0$$

Según Mañas y Martines (n.d.), la ecuación diferencial debería analizarse con el cambio de variable

$$\xi = \cos(\theta)$$

Al trabajar con la regla de la cadena y las respectivas derivadas, se tendría entonces

$$\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\theta} = -\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}$$

y la segunda derivada

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} = \frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}\theta^2}\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi} + \left(\frac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}\theta}\right)^2\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\xi^2}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\theta^2} = -\cos(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi} + \sin^2(\theta)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\xi^2}$$

Sustituyendo en la ecuación de $\Theta(\theta)$

$$\frac{1}{\sin(\theta)}\left(\sin(\theta)\left(-\cos(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi} + \sin^2(\theta)\frac{\mathrm{d}^2\Theta}{\mathrm{d}\xi^2}\right) + \cos(\theta)\left(-\sin(\theta)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\right)\right) + \left(\lambda - \frac{\beta}{\sin^2(\theta)}\right)\Theta = 0$$

$$\sin^2(\theta)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2} - 2\cos(\theta)\frac{d\Theta}{d\xi} + \left(\lambda - \frac{\beta}{\sin^2(\theta)}\right)\Theta = 0$$

sabiendo que

$$\sin^2(\theta) = 1 - \cos^2(\theta)$$

y al hacer el cambio a ξ, se tendría

$$\left(1-\xi^2\right)\frac{d^2\Theta}{d\xi^2}-2\xi\frac{d\Theta}{d\xi}+\left(\lambda-\frac{\beta}{\sin^2(\theta)}\right)\Theta=0$$

donde es posible notar que se puede expresar como la derivada de un producto de funciones, eso es

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1-\xi)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\right]+\left(\lambda-\frac{\beta}{\sin^2(\theta)}\right)\Theta=0 \tag{17}$$

donde la ecuación (17) se le conoce como *ecuación de Legendre adjunta*. Si $\beta=0$, se llega *a la ecuación de Legendre*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(1-\xi)\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\xi}\right]+\lambda\Theta=0$$

donde se tienen soluciones no triviales. Para tratar la solución, se debe comenzar definiendo a $\lambda=l\,(l+1)$, esto válido $\forall\ l\in\mathbb{N}$, haciendo que la solución de la ecuación asociada de Legendre sea

$$\Theta(\xi)=\left(1-\xi^2\right)^{\frac{\sqrt{|\beta|}}{2}}=\frac{\mathrm{d}^{\sqrt{|\beta|}}P_l(\xi)}{\mathrm{d}\xi^{\sqrt{|\beta|}}}$$

donde

$$P_l(\xi)=\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\xi^l}\left(\xi^2-1\right)^l$$

haciendo que la solución se vea como

$$\Theta(\xi)=\left(1-\xi^2\right)^{\frac{\sqrt{|\beta|}}{2}}=\frac{\mathrm{d}^{\sqrt{|\beta|}+l}}{\mathrm{d}\xi^{\sqrt{|\beta|}+l}}\left(\xi^2-1\right)^l,\qquad\forall\quad\sqrt{|\beta|}\leq l$$

Mientras que la solución a la ecuación de Legendre (no adjunta), es simplemente

$$P_l(\xi)=\frac{\mathrm{d}^l}{\mathrm{d}\xi^l}\left(\xi^2-1\right)^l$$

Al tener en consideración la solución a la función de Θ y de Φ, llegamos a algo que se le conocen como *armónicos esféricos*. Los armónicos esféricos dan solución a diversos problemas de la física, tal como la solución a la ecuación de Schrödinger para pozos de potenciales esféricos (Hyperphysics, 2010).

5 REFERENCIAS

1. Courant, T., & John, F.. (1984). *Integrales Multiples.* En Introducción al Calculo y Análisis Matemático. Volumen II. (pp. 556-667). Estados Unidos: Limusa.

2. Hyperphysics. (2010). *Spherical Harmonics.* Octubre, 26, 2017, del Departamento de Física y Astronomía del Estado de Georgia. Sitio web: textithttp://hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbasees/Math/sphhar.html

3. Mañas, M., & Martínez, L.. (n. d.). *Ecuaciones Diferenciales II.* España: Universidad Complutense de Madrid.