INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE OCCIDENTE

Departamento de Matemáticas y Física

Cálculo Tensorial

Dr. Luis Ignacio López Benítez

# Tensor de Riemann

Chiñas Fuentes, Karina
Hernández Mota, Daniel

8 de mayo de 2018

**Resumen**

En este escrito se busca analizar el tensor de Riemann desde su formación matemática hasta sus propiedades; para desarrollar el análisis, se consideró el convenio de sumatoria de Einstein y que los sistemas cumplen con el Teorema Fundamental de la Geometría de Riemann. El texto se divide en 5 secciones; en la primera sección se encuentra la introducción donde abordamos su mayor aplicación en ciencias exactas, en la segunda sección explicamos la teoría matemática mínima necesaria para entender lo que compone al tensor, en la tercera sección se encuentra un desarrollo matemático que surge para definir al tensor de Riemann, en la cuarta sección analizamos sus propiedades e identidades de Bianchi y por último, se encuentran las conclusiones.

# 1. Introducción

Los objetos tensoriales de diversos rangos tienen gran importancia en disciplinas de la física teórica y matemáticas aplicadas. El tensor de Riemann, también conocido como el tensor de curvatura de Riemann-Christoffel, es un tensor de cuarto rango que tiene una gran aplicación en la Teoría de la Relatividad General y en el campo de Geometría Diferencial [1].

Intuitivamente, el tensor de curvatura de Riemann se asocia a la idea de *qué tanto se curva* una variedad (como un evento en el espacio-tiempo), o qué tanto se aleja esta variedad de un espacio Euclidiano (o de Minkowski). Por esta razón, se espera que el tensor de Riemann dé alguna idea de la estructura geométrica de dicha variedad [2].

En la Relatividad General, el espacio le dice a la materia como moverse y la materia le dice al espacio como curvarse; formalmente el espacio-tiempo es una variedad $m$, en la cual está definida una métrica Lorentziana cuya curvatura está relacionada con la distribución de materia en el espacio-tiempo mediante las ecuaciones de Einstein. Esta métrica representa las propiedades crono-geométricas y define los potenciales del campo gravitacional [3].

# 2. Teoría

Cuando se quiere estudiar un espacio se puede utilizar una base que está dada por un conjunto de vectores arbitrarios. En este escrito, se harán análisis en dos tipos de bases: la base coordenada natural y la base coordenada recíproca, las cuales estarán formadas por los vectores $\mathbf{g}_i$ y $\mathbf{g}^i$, respectivamente.

Para entender cómo funciona el tensor de Riemann, es importante saber qué son los símbolos de Christoffel y qué aporte tienen en el análisis geométrico de la base natural y la base recíproca. Los símbolos de Christoffel surgen de la necesidad de poder expresar las derivadas parciales de los vectores de la base natural (o recíproca) como una combinación lineal de la base natural, eso es

$$\frac{\partial \mathbf{g}_i}{\partial u^j} = \mathbf{g}_{i,j} = \Gamma_{ij}^k \mathbf{g}_k$$

donde $u^j$ es la $j$-ésima variable arbitraria del espacio que se analiza. Sabiendo que $\mathbf{g}_k \cdot \mathbf{g}^k = 1$ [4], entonces es notable que

$$\Gamma_{ij}^k = \mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_{i,j} \tag{1}$$

De estos conceptos, se puede encontrar la expresión de la derivada del vector de la base recíproca. Al derivar un producto punto de un vector de la base natural con otro de la base recíproca se obtiene que

$$\partial_j \left( \mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k \right) = \partial_j \delta_k^i = 0$$

$$\partial_j \left(\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k\right) = \left(\partial_j \mathbf{g}_i\right) \cdot \mathbf{g}^k + \mathbf{g}_i \cdot \left(\partial_j \mathbf{g}^k\right) = 0$$

haciendo que

$$\left(\partial_j \mathbf{g}_i\right) \cdot \mathbf{g}^k = -\mathbf{g}_i \cdot \left(\partial_j \mathbf{g}^k\right)$$

$$\mathbf{g}^k \cdot \mathbf{g}_{i,j} = -\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k_{,j}$$

donde se puede sustituir la relación encontrada en la Eq. (1)

$$\Gamma^k_{ij} = -\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}^k_{,j}$$

haciendo que la expresión que representa la derivada de un vector de la base recíproca como combinación lineal sea de la forma

$$\mathbf{g}^k_{,j} = -\Gamma^k_{ij} \mathbf{g}^i \tag{2}$$

Gracias a estas definiciones, los símbolos de Christoffel también se pueden representar de la forma [5]

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} g^{il} \left(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}\right) \tag{3}$$

donde se puede deducir una expresión similar pero con todos los índices abajo; al multiplicar la Eq. (3) por las componentes del tensor métrico y así bajar su primer índice [6]

$$g_{im} \Gamma^m_{jk} = \Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} g_{im} g^{ml} \left(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}\right) = \frac{1}{2} \delta^l_i \left(g_{jl,k} + g_{kl,j} - g_{jk,l}\right)$$

$$\Gamma_{ijk} = \frac{1}{2} \left(g_{ji,k} + g_{ki,j} - g_{jk,i}\right) \tag{4}$$

Además de ello, es importante tener en cuenta que los símbolos de Christoffel son simétricos en sus últimos dos índices, gracias a que se cumple el Teorema Fundamental de la Geometría de Riemann.

Por otra parte, para analizar el origen del tensor de Riemann se necesita tomar en cuenta el concepto del operador diferencial vectorial $\nabla$, el cual se define como [5]

$$\nabla := \mathbf{g}^i \partial_i$$

donde $\mathbf{g}^i$ es vector de la base recíproca.

# 3. Análisis Previo al Tensor de Riemann

Para comenzar a analizar el tensor de Riemann, se necesita hacer un desarrollo de la expresión $\nabla\nabla\mathbf{v}$ [5] donde $\mathbf{v}$ es un vector cualquiera y $\nabla\nabla$ es el operador Hessiano que se pueden visualizar como tensores de tercer, primer y segundo rango, respectivamente.

El vector $\mathbf{v}$ cuenta con componentes covariantes y contravariantes de alguna base natural y recíproca; para este análisis, se considerarán sus componentes covariantes, eso es $\mathbf{v} = v_i\mathbf{g}^i$. Por lo que al aplicar el gradiente al vector se obtiene que

$$\nabla\mathbf{v} = \mathbf{g}^j\partial_j\left(v_i\mathbf{g}^i\right) = \mathbf{g}^j\left(\left(\partial_j v_i\right)\mathbf{g}^i + v_i\left(\partial_j\mathbf{g}^i\right)\right) = \mathbf{g}^j\left(\left(\partial_j v_i\right)\mathbf{g}^i - v_i\Gamma^i_{lj}\mathbf{g}^l\right)$$

Note que quedó en términos de los símbolos de Christoffel gracias a la Eq. (2). Entonces, cambiando los índices únicamente del último término $\{l \to i\}$,$\{i \to l\}$, queda

$$\nabla\mathbf{v} = \mathbf{g}^j\left(\left(\partial_j v_i\right)\mathbf{g}^i - v_l\Gamma^l_{ij}\mathbf{g}^i\right) = \mathbf{g}^j\mathbf{g}^i\left(\partial_j v_i - v_l\Gamma^l_{ij}\right) \tag{5}$$

que es equivalente a tener

$$\nabla\mathbf{v} = \mathbf{g}^j\mathbf{g}^i v_{i;j}$$

De aquí se introduce el concepto de *derivada covariante* que se define como el componente que acompaña a los vectores de la base recíproca cada vez que se le aplica el operador $\nabla$ a un tensor de cualquier rango. En este caso, se le aplicó el operador $\nabla$ al tensor de primer rango $\mathbf{v}$, haciendo que dé la derivada covariante de la componente $i$-ésima con respecto la $j$-ésima variable arbitraria, la cual es

$$v_{i;j} = \partial_j v_i - v_l\Gamma^l_{ij} \tag{6}$$

Regresando a la Eq. (5), si se vuelve a aplicar el operador $\nabla$ (es decir obtener el gradiente del gradiente del vector) sería como aplicar el operador Hessiano al vector $\mathbf{v}$, de la siguiente manera

$$\nabla\nabla\mathbf{v} = \nabla\left(\nabla\mathbf{v}\right) = \mathbf{g}^k\partial_k\left(\mathbf{g}^j\mathbf{g}^i\left(\partial_j v_i - v_l\Gamma^l_{ij}\right)\right) \tag{7}$$

desarrollando el triple producto, se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^k\partial_k\left(\mathbf{g}^j\mathbf{g}^i\left(\partial_j v_i - v_l\Gamma^l_{ij}\right)\right) = &\ \mathbf{g}^k\left(\partial_k\mathbf{g}^j\right)\mathbf{g}^i\left(\partial_j v_i - v_l\Gamma^l_{ij}\right) + \\ &\ \mathbf{g}^k\mathbf{g}^j\left(\partial_k\mathbf{g}^i\right)\left(\partial_j v_i - v_l\Gamma^l_{ij}\right) + \\ &\ \mathbf{g}^k\mathbf{g}^j\mathbf{g}^i\left(\partial_k\partial_j v_i - \left(\partial_k v_l\right)\Gamma^l_{ij} - v_l\left(\partial_k\Gamma^l_{ij}\right)\right)\end{aligned}$$

al hacer uso de la Eq. (2) y lo expresamos en términos de los símbolos de Christoffel

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^k\partial_k\left(\mathbf{g}^j\mathbf{g}^i\left(\partial_j v_i - v_l\Gamma^l_{ij}\right)\right) = {} & \mathbf{g}^k\left(-\Gamma^j_{nk}\mathbf{g}^n\right)\mathbf{g}^i\left(\partial_j v_i - v_l\Gamma^l_{ij}\right) + \\ & \mathbf{g}^k\mathbf{g}^j\left(-\Gamma^i_{nk}\mathbf{g}^n\right)\left(\partial_j v_i - v_l\Gamma^l_{ij}\right) + \\ & \mathbf{g}^k\mathbf{g}^j\mathbf{g}^i\left(\partial_k\partial_j v_i - \left(\partial_k v_l\right)\Gamma^l_{ij} - v_l\left(\partial_k\Gamma^l_{ij}\right)\right)\end{aligned}$$

renombrando índices de tal manera que quede la triada $\mathbf{g}^k\mathbf{g}^j\mathbf{g}^i$ para todos los términos

$$\begin{aligned}\mathbf{g}^k\partial_k\left(\mathbf{g}^j\mathbf{g}^i\left(\partial_j v_i - v_l\Gamma^l_{ij}\right)\right) = {} & \mathbf{g}^k\left(-\Gamma^n_{jk}\mathbf{g}^j\right)\mathbf{g}^i\left(\partial_n v_i - v_l\Gamma^l_{in}\right) + \\ & \mathbf{g}^k\mathbf{g}^j\left(-\Gamma^n_{ik}\mathbf{g}^i\right)\left(\partial_j v_n - v_l\Gamma^l_{nj}\right) + \\ & \mathbf{g}^k\mathbf{g}^j\mathbf{g}^i\left(\partial_k\partial_j v_i - \left(\partial_k v_l\right)\Gamma^l_{ij} - v_l\left(\partial_k\Gamma^l_{ij}\right)\right)\end{aligned}$$

al reacomodar los términos de manera que la triada $\mathbf{g}^k\mathbf{g}^j\mathbf{g}^i$ sea factorizable y modificando ciertos índices repetidos, se obtiene

$$\nabla\nabla\mathbf{v} = \left[v_l\Gamma^n_{jk}\Gamma^l_{in} - \Gamma^l_{jk}\partial_l v_i - \Gamma^l_{ik}\partial_j v_l + v_l\Gamma^n_{ik}\Gamma^l_{nj} + \partial_k\partial_j v_i - \left(\partial_k v_l\right)\Gamma^l_{ij} - v_l\partial_k\Gamma^l_{ij}\right]\mathbf{g}^k\mathbf{g}^j\mathbf{g}^i$$

si se analiza los componentes de la Eq. (7), es decir, la derivada covariante $v_{i;jk}$ se tiene

$$v_{i;jk} = v_l\Gamma^n_{jk}\Gamma^l_{in} - \Gamma^l_{jk}\partial_l v_i - \Gamma^l_{ik}\partial_j v_l + v_l\Gamma^n_{ik}\Gamma^l_{nj} + \partial_k\partial_j v_i - \left(\partial_k v_l\right)\Gamma^l_{ij} - v_l\partial_k\Gamma^l_{ij} \tag{8}$$

que sería equivalente a sacar la derivada covariante de la Eq. (6) pero ahora con respecto de la $k$-ésima variable arbitraria.

De aquí, sigue analizar la conmutación entre los dos últimos índices de la Eq. (8), eso es [5]

$$\begin{gathered} v_{i;jk} - v_{i;kj} = \\ v_l\Gamma^n_{jk}\Gamma^l_{in} - \Gamma^l_{jk}\partial_l v_i - \Gamma^l_{ik}\partial_j v_l + v_l\Gamma^n_{ik}\Gamma^l_{nj} + \partial_k\partial_j v_i - \left(\partial_k v_l\right)\Gamma^l_{ij} - v_l\partial_k\Gamma^l_{ij} + \\ -v_l\Gamma^n_{kj}\Gamma^l_{in} + \Gamma^l_{kj}\partial_l v_i + \Gamma^l_{ij}\partial_k v_l - v_l\Gamma^n_{ij}\Gamma^l_{nk} - \partial_j\partial_k v_i + \left(\partial_j v_l\right)\Gamma^l_{ik} + v_l\partial_j\Gamma^l_{ik}\end{gathered}$$

Es fácil ver que ciertos términos se eliminan por el hecho de la simetría en los símbolos de Christoffel y la presencia de índices mudos, dejando así la siguiente expresión

$$v_{i;jk} - v_{i;kj} = v_l\partial_j\Gamma^l_{ik} - v_l\partial_k\Gamma^l_{ij} + v_l\Gamma^n_{ik}\Gamma^l_{nj} - v_l\Gamma^n_{ij}\Gamma^l_{nk}$$

$$v_{i;jk} - v_{i;kj} = v_l\left[\partial_j\Gamma^l_{ik} - \partial_k\Gamma^l_{ij} + \Gamma^n_{ik}\Gamma^l_{nj} - \Gamma^n_{ij}\Gamma^l_{nk}\right] = v_l R^l_{ijk}$$

en la otra notación

$$v_{i;jk} - v_{i;kj} = v_l\left[\Gamma^l_{ik,j} - \Gamma^l_{ij,k} + \Gamma^n_{ik}\Gamma^l_{nj} - \Gamma^n_{ij}\Gamma^l_{nk}\right] = v_l R^l_{ijk} \tag{9}$$

Se puede apreciar de la Eq. (9) que $v_l$ son las componentes de un vector, y que $v_{i;jk}$ son las componentes de un tensor de tercer rango, por lo que se puede deducir que $R^l_{ijk}$ son las componentes de un tensor de cuarto rango [5].

# 4. Tensor de Riemann

De la Eq. (9), al cambiar los índices de tal manera que quede $R^i_{jkl}$, se llega a

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^n_{jl}\Gamma^i_{nk} - \Gamma^n_{jk}\Gamma^i_{nl} \tag{10}$$

Estas son las componentes de un tensor de cuarto rango llamado el *Tensor de Curvatura de Riemann* ó el *Tensor de Riemann-Christoffel*. El tensor de Riemann se caracteriza por ser antisimétrico en sus últimos dos índices, antisimétrico en sus primeros dos índices y simétrico en el intercambio del primer y último par de índices [5], eso es

$$R_{ijkl} = -R_{ijlk} = -R_{jikl} = R_{klij}$$

Además de tener la propiedad de

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$$

Naturalmente, para demostrar sus características, es necesario contar con la expresión de las componentes del tensor con todos sus índices abajo; para ello, se utiliza las coponentes del tensor métrico para bajar índices

$$g_{mi}R^m_{jkl} = R_{ijkl} = g_{mi}\Gamma^m_{jl,k} - g_{mi}\Gamma^m_{jk,l} + g_{mi}\Gamma^n_{jl}\Gamma^m_{nk} - g_{mi}\Gamma^n_{jk}\Gamma^m_{nl} = g_{mi}\Gamma^m_{jl,k} - g_{mi}\Gamma^m_{jk,l} + \Gamma^m_{jl}\Gamma_{imk} - \Gamma^m_{jk}\Gamma_{iml}$$

donde se considera

$$\left(g_{mi}\Gamma^m_{jl}\right)_{,k} = g_{mi,k}\Gamma^m_{jl} + g_{mi}\Gamma^m_{jl,k} = \left(\partial_k\left(\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}_i\right)\right)\Gamma^m_{jl} + g_{mi}\Gamma_{ijl,k} = \left(\partial_k\mathbf{g}_m \cdot \mathbf{g}_i + \mathbf{g}_m \cdot \partial_k\mathbf{g}_i\right)\Gamma^m_{jl} + g_{mi}\Gamma^m_{jl,k}$$

de la Eq. (1) y que $\mathbf{g}_i \cdot \mathbf{g}_j = g_{ij}$ [6]

$$\left(g_{mi}\Gamma^m_{jl}\right)_{,k} = \Gamma_{ijl,k} = \left(\Gamma^n_{mk}g_{ni} + \Gamma^n_{ik}g_{nm}\right)\Gamma^m_{jl} + g_{mi}\Gamma^m_{jl,k} = \left(\Gamma_{imk} + \Gamma_{mik}\right)\Gamma^m_{jl} + g_{mi}\Gamma^m_{jl,k}$$

por lo tanto

$$g_{mi}\Gamma^m_{jl,k} = \Gamma_{ijl,k} - \Gamma_{imk}\Gamma^m_{jl} - \Gamma_{mik}\Gamma^m_{jl}$$

para entonces sustituir en $R_{ijkl}$ y tener

$$R_{ijkl} = \Gamma_{ijl,k} - \Gamma_{imk}\Gamma^m_{jl} - \Gamma_{mik}\Gamma^m_{jl} - \Gamma_{ijk,l} + \Gamma_{iml}\Gamma^m_{jk} + \Gamma_{mil}\Gamma^m_{jk} + \Gamma^m_{jl}\Gamma_{imk} - \Gamma^m_{jk}\Gamma_{iml}$$

al quitar los términos que se cancelan, queda que las componentes del tensor de Riemann con todos sus índices contravariantes es

$$R_{ijkl} = \Gamma_{ijl,k} - \Gamma_{ijk,l} + \Gamma_{mil}\Gamma^m_{jk} - \Gamma_{mik}\Gamma^m_{jl} \tag{11}$$

Además de la Eq. (11), para demostrar las propiedades del tensor, es necesario pasar todos los símbolos de Christoffel a su forma dependiente de las componentes del tensor métrico, utilizando la Eq. (3) y Eq. (4); al hacer los respectivos cambios, queda

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = {} & \frac{1}{2}\left(g_{ji,lk} + g_{li,jk} - g_{jl,ik}\right) - \frac{1}{2}\left(g_{ji,kl} + g_{ki,jl} - g_{jk,il}\right) + \\ & \frac{1}{4}g^{ms}\left(g_{im,l} + g_{lm,i} - g_{il,m}\right)\left(g_{js,k} + g_{ks,j} - g_{jk,s}\right) - \\ & \frac{1}{4}g^{ms}\left(g_{im,k} + g_{km,i} - g_{ik,m}\right)\left(g_{js,l} + g_{ls,j} - g_{jl,s}\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_{ijkl} = {} & \frac{1}{2}\left(g_{li,jk} - g_{jl,ik}\right) - \frac{1}{2}\left(g_{ki,jl} - g_{jk,il}\right) + \\ & \frac{1}{4}g^{ms}\left(g_{im,l} + g_{lm,i} - g_{il,m}\right)\left(g_{js,k} + g_{ks,j} - g_{jk,s}\right) - \\ & \frac{1}{4}g^{ms}\left(g_{im,k} + g_{km,i} - g_{ik,m}\right)\left(g_{js,l} + g_{ls,j} - g_{jl,s}\right) \end{aligned}$$

Aquí introducimos los nuevos componentes $h_{ijkl}$ y $H_{ijklms}$ que los definimos como

$$h_{ijkl} = g_{li,jk} - g_{jl,ik} - g_{ki,jl} + g_{jk,il} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} H_{ijklms} = {} & \left(g_{im,l} + g_{lm,i} - g_{il,m}\right)\left(g_{js,k} + g_{ks,j} - g_{jk,s}\right) - \\ & \left(g_{im,k} + g_{km,i} - g_{ik,m}\right)\left(g_{js,l} + g_{ls,j} - g_{jl,s}\right) \end{aligned}$$

con el objetivo de poder llevar a cabo este análisis de una forma más efectiva. Entonces $R_{ijkl}$ sería la suma de estos dos pero con sus respectivos factores

$$R_{ijkl} = \frac{1}{2}h_{ijkl} + \frac{1}{4}g^{ms}H_{ijklms} \tag{13}$$

es importante notar que gracias a la simetría de $g^{ms}$ entonces

$$g^{ms}H_{ijklms} = g^{sm}H_{ijklsm} = g^{ms}H_{ijklsm}$$

$$g^{ms}H_{ijklms} = g^{ms}H_{ijklsm}$$

lo cual es importante para atribuirle su simetría y antisimetría a las componentes del tensor de Riemann. Ahora, al analizar de forma explícita a $H_{ijklms}$, se llega a

$$\begin{aligned} H_{ijklms} = & \partial_l g_{mi}\partial_k g_{js} + \partial_l g_{mi}\partial_j g_{ks} - \partial_l g_{mi}\partial_s g_{jk}+ \\ & \partial_i g_{ml}\partial_k g_{js} + \partial_i g_{ml}\partial_j g_{ks} - \partial_i g_{ml}\partial_s g_{jk}- \\ & \partial_m g_{il}\partial_k g_{js} - \partial_m g_{il}\partial_j g_{ks} + \partial_m g_{il}\partial_s g_{jk}- \\ & \partial_k g_{mi}\partial_l g_{js} - \partial_k g_{mi}\partial_j g_{ls} + \partial_k g_{mi}\partial_s g_{jl}- \\ & \partial_i g_{mk}\partial_l g_{js} - \partial_i g_{mk}\partial_j g_{ls} + \partial_i g_{mk}\partial_s g_{jl}+ \\ & \partial_m g_{ik}\partial_l g_{js} + \partial_m g_{ik}\partial_j g_{ls} - \partial_m g_{ik}\partial_s g_{jl} \end{aligned} \tag{14}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (11), (12), (13) y (14) es suficiente para demostrar las propiedades de las componentes del tensor de Riemann, en orden:

- ANTISIMETRÍA: $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$

  Al hacer el respectivo cambio de índices de la Eq. (11) se llega a que

  $$R_{ijlk} = \Gamma_{ijk,l} + \Gamma_{mik}\Gamma^m_{jl} - \Gamma_{mil}\Gamma^m_{jk} - \Gamma_{ijl,k}$$

  luego de cambiar el signo

  $$-R_{ijlk} = -\Gamma_{ijk,l} - \Gamma_{mik}\Gamma^m_{jl} + \Gamma_{mil}\Gamma^m_{jk} + \Gamma_{ijl,k} = R_{ijkl}$$

  haciendo que *quede demostrado.*

- ANTISIMETRÍA: $R_{ijkl} = -R_{jikl}$

  Para esta demostración, se considera la Eq. (13) y se hace el cambios de índices: $\{i \to j\}$, $\{j \to i\}$; así mismo, a la Eq. (14) se le hace el cambio de índices mudos $\{m \to s\}$ y $\{s \to m\}$, para entonces analizar la expresión

  $$R_{jikl} = \frac{1}{2}h_{jikl} + \frac{1}{4}g^{ms}H_{jiklsm}$$

  donde

  $$h_{jikl} = \partial_k\partial_i g_{jl} - \partial_k\partial_j g_{il} - \partial_l\partial_i g_{jk} + \partial_l\partial_j g_{ik}$$

  y

$$\begin{aligned}
H_{ijklms} = {} & \partial_l g_{sj} \partial_k g_{im} + \partial_l g_{sj} \partial_i g_{km} - \partial_l g_{sj} \partial_m g_{ik} + \\
& \partial_j g_{sl} \partial_k g_{im} + \partial_j g_{sl} \partial_i g_{km} - \partial_j g_{sl} \partial_m g_{ik} - \\
& \partial_s g_{jl} \partial_k g_{im} - \partial_s g_{jl} \partial_i g_{km} + \partial_s g_{jl} \partial_m g_{ik} - \\
& \partial_k g_{sj} \partial_l g_{im} - \partial_k g_{sj} \partial_i g_{lm} + \partial_k g_{sj} \partial_m g_{il} - \\
& \partial_j g_{sk} \partial_l g_{im} - \partial_i g_{sk} \partial_i g_{lm} + \partial_i g_{sk} \partial_m g_{il} + \\
& \partial_s g_{jk} \partial_l g_{im} + \partial_s g_{jk} \partial_i g_{lm} - \partial_s g_{jk} \partial_m g_{il}
\end{aligned}$$

Si comparamos $h_{ijkl}$ con $h_{jikl}$, es trivialmente notable que una es el negativo de la otra. Mientras que si se compara $H_{ijklms}$ con $H_{jiklsm}$, al considerar factores como la simetría de las componentes y la conmutación de las derivadas del tensor métrico es posible notar que $H_{ijklms}$ es el negativo de $H_{jiklsm}$. Por lo tanto

$$R_{jikl} = -\frac{1}{2} h_{ijkl} - \frac{1}{4} g^{ms} H_{ijklms} = -R_{ijkl}$$

haciendo que *quede demostrado*.

- Simetría: $R_{ijkl} = R_{klij}$

  Para esta demostración, se considera la Eq. (13) y se hace los cambios de índices: $\{i \to k\}$, $\{j \to l\}$, $\{k \to i\}$, $\{l \to j\}$, para entonces analizar

  $$R_{klij} = \frac{1}{2} h_{klij} + \frac{1}{4} g^{ms} H_{klijms}$$

  donde

  $$h_{klij} = \partial_i \partial_l g_{kj} - \partial_i \partial_k g_{lj} - \partial_j \partial_l g_{ki} + \partial_j \partial_k g_{li}$$

  y

  $$\begin{aligned}
  g^{ms} H_{klijms} = {} & g^{ms} \partial_j g_{mk} \partial_i g_{ls} + g^{ms} \partial_j g_{mk} \partial_l g_{is} - g^{ms} \partial_j g_{mk} \partial_s g_{li} + \\
  & g^{ms} \partial_k g_{mj} \partial_i g_{ls} + g^{ms} \partial_k g_{mj} \partial_l g_{is} - g^{ms} \partial_k g_{mj} \partial_s g_{li} - \\
  & g^{ms} \partial_m g_{kj} \partial_i g_{ls} - g^{ms} \partial_m g_{kj} \partial_l g_{is} + g^{ms} \partial_m g_{kj} \partial_s g_{li} - \\
  & g^{ms} \partial_i g_{mk} \partial_j g_{ls} - g^{ms} \partial_i g_{mk} \partial_l g_{js} + g^{ms} \partial_i g_{mk} \partial_s g_{lj} - \\
  & g^{ms} \partial_k g_{mi} \partial_j g_{ls} - g^{ms} \partial_k g_{mi} \partial_l g_{js} + g^{ms} \partial_k g_{mi} \partial_s g_{lj} + \\
  & g^{ms} \partial_m g_{ki} \partial_j g_{ls} + g^{ms} \partial_m g_{ki} \partial_l g_{js} - g^{ms} \partial_m g_{ki} \partial_s g_{lj}
  \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g^{ms}H_{klijms} = {} & g^{ms}\partial_j g_{sk}\partial_i g_{lm} + g^{ms}\partial_j g_{sk}\partial_l g_{im} - g^{ms}\partial_j g_{sk}\partial_m g_{li} + \\
& g^{ms}\partial_k g_{sj}\partial_i g_{lm} + g^{ms}\partial_k g_{sj}\partial_l g_{im} - g^{ms}\partial_k g_{sj}\partial_m g_{li} - \\
& g^{ms}\partial_s g_{kj}\partial_i g_{lm} - g^{ms}\partial_s g_{kj}\partial_l g_{im} + g^{ms}\partial_s g_{kj}\partial_m g_{li} - \\
& g^{ms}\partial_i g_{mk}\partial_j g_{ls} - g^{ms}\partial_i g_{mk}\partial_l g_{js} + g^{ms}\partial_i g_{mk}\partial_s g_{lj} - \\
& g^{ms}\partial_k g_{mi}\partial_j g_{ls} - g^{ms}\partial_k g_{mi}\partial_l g_{js} + g^{ms}\partial_k g_{mi}\partial_s g_{lj} + \\
& g^{ms}\partial_m g_{ki}\partial_j g_{ls} + g^{ms}\partial_m g_{ki}\partial_l g_{js} - g^{ms}\partial_m g_{ki}\partial_s g_{lj}
\end{aligned}
$$

Note que a comparación de la demostración anterior, aquí sí se consideró la multiplicación de $g^{ms}$ debido a que se hizo el cambio de índice $\{m \to s\}$, $\{s \to m\}$, en sólo la mitad de lo que compone $H_{klijms}$ y eso no podría ser posible sin la consideración de $g^{ms}$. Al comparar la última expresión de $g^{ms}H_{klijms}$ con $g^{ms}H_{ijklms}$ se llega a que es lo mismo (tomando en cuenta la simetría de las componentes del tensor métrico y la conmutatividad de los términos); así como con $h_{klij}$ y $h_{ijkl}$, por lo tanto

$$R_{klij} = \frac{1}{2}h_{ijkl} + \frac{1}{4}g^{ms}H_{ijklms} = R_{ijkl}$$

haciendo que *quede demostrado.*

- Sumatoria: $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$

  Naturalmente, calcular esa sumatoria es equivalente a calcular

  $$h_{ijkl} + h_{iklj} + h_{iljk} = 0$$

  así como

  $$H_{ijklms} + H_{ikljms} + H_{iljkms} = 0$$

  Respecto a $h_{ijkl} + h_{iklj} + h_{iljk} = 0$

  $$
  \begin{aligned}
  h_{ijkl} + h_{iklj} + h_{iljk} = {} & \partial_k\partial_j g_{il} - \partial_k\partial_i g_{jl} - \partial_l\partial_j g_{ik} + \partial_l\partial_i g_{jk} + \\
  & \partial_l\partial_k g_{ij} - \partial_l\partial_i g_{kj} - \partial_j\partial_k g_{il} + \partial_j\partial_i g_{kl} + \\
  & \partial_j\partial_l g_{ik} - \partial_j\partial_i g_{lk} - \partial_k\partial_l g_{ij} + \partial_k\partial_i g_{lj}
  \end{aligned}
  $$

  rápidamente se puede notar que

  $$h_{ijkl} + h_{iklj} + h_{iljk} = 0$$

  Respecto a la otra relación

$$H_{ijklms} + H_{ikljms} + H_{iljkms} =$$

$$\begin{array}{ll}
\partial_l g_{mi}\partial_k g_{js} + \partial_l g_{mi}\partial_j g_{ks} - \partial_l g_{mi}\partial_s g_{jk} + & \text{A} \\
\partial_i g_{ml}\partial_k g_{js} + \partial_i g_{ml}\partial_j g_{ks} - \partial_i g_{ml}\partial_s g_{jk} - & \text{B} \\
\partial_m g_{il}\partial_k g_{js} - \partial_m g_{il}\partial_j g_{ks} + \partial_m g_{il}\partial_s g_{jk} - & \text{C} \\
\partial_k g_{mi}\partial_l g_{js} - \partial_k g_{mi}\partial_j g_{ls} + \partial_k g_{mi}\partial_s g_{jl} - & \text{D} \\
\partial_i g_{mk}\partial_l g_{js} - \partial_i g_{mk}\partial_j g_{ls} + \partial_i g_{mk}\partial_s g_{jl} + & \text{E} \\
\partial_m g_{ik}\partial_l g_{js} + \partial_m g_{ik}\partial_j g_{ls} - \partial_m g_{ik}\partial_s g_{jl} + & \text{F} \\
\partial_j g_{mi}\partial_l g_{ks} + \partial_j g_{mi}\partial_k g_{ls} - \partial_j g_{mi}\partial_s g_{kl} + & \text{G} \\
\partial_i g_{mj}\partial_l g_{ks} + \partial_i g_{mj}\partial_k g_{ls} - \partial_i g_{mj}\partial_s g_{kl} - & \text{H} \\
\partial_m g_{ij}\partial_l g_{ks} - \partial_m g_{ij}\partial_k g_{ls} + \partial_m g_{ij}\partial_s g_{kl} - & \text{I} \\
\partial_l g_{mi}\partial_j g_{ks} - \partial_l g_{mi}\partial_k g_{js} + \partial_l g_{mi}\partial_s g_{kj} - & \text{A} \\
\partial_i g_{ml}\partial_j g_{ks} - \partial_i g_{ml}\partial_k g_{js} + \partial_i g_{ml}\partial_s g_{kj} + & \text{B} \\
\partial_m g_{il}\partial_j g_{ks} + \partial_m g_{il}\partial_k g_{js} - \partial_m g_{il}\partial_s g_{kj} + & \text{C} \\
\partial_k g_{mi}\partial_j g_{ls} + \partial_k g_{mi}\partial_l g_{js} - \partial_k g_{mi}\partial_s g_{lj} + & \text{D} \\
\partial_i g_{mk}\partial_j g_{ls} + \partial_i g_{mk}\partial_l g_{js} - \partial_i g_{mk}\partial_s g_{lj} - & \text{E} \\
\partial_m g_{ik}\partial_j g_{ls} - \partial_m g_{ik}\partial_l g_{js} + \partial_m g_{ik}\partial_s g_{lj} - & \text{F} \\
\partial_j g_{mi}\partial_k g_{ls} - \partial_j g_{mi}\partial_l g_{ks} + \partial_j g_{mi}\partial_s g_{lk} - & \text{G} \\
\partial_i g_{mj}\partial_k g_{ls} - \partial_i g_{mj}\partial_l g_{ks} + \partial_i g_{mj}\partial_s g_{lk} + & \text{H} \\
\partial_m g_{ij}\partial_k g_{ls} + \partial_m g_{ij}\partial_l g_{ks} - \partial_m g_{ij}\partial_s g_{lk} & \text{I}
\end{array}$$

Se agregaron las letras para que sea más fácil para el lector notar dónde están los términos que se eliminan con qué; las filas que comparten la letra es porque al sumarlas se vuelve cero. Con ello, es posible decir que

$$H_{ijklms} + H_{ikljms} + H_{iljkms} = 0$$

por lo tanto

$$R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$$

haciendo que *quede demostrado.*

Finalmente, la derivada covariante de los componentes del tensor de curvatura de Riemann se relacionan con las identidades de Bianchi, las cuales establecen que

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0$$

Donde [7]

$$R_{ijkl;m} = R_{ijkl,m} - \Gamma^n_{im} R_{njkl} - \Gamma^n_{jm} R_{inkl} - \Gamma^n_{km} R_{ijnl} - \Gamma^n_{lm} R_{ijkn}$$

Es posible introducir coordenadas geodésicas locales para simplificar el análisis. Esto genera que $\Gamma^i_{jk} = 0$. Pero esto no quiere decir que su derivada sea nula [8]. Entonces la expresión de la derivada covariante toma la forma de

$$R_{ijkl;m} = R_{ijkl,m}$$

por lo que

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = 0$$

donde

$$R_{ijlk,m} = \Gamma_{ijk,lm} - \Gamma_{ijl,km}$$

por lo tanto

$$R_{ijlm,k} = \Gamma_{ijm,lk} - \Gamma_{ijl,mk}$$

$$R_{ijmk,l} = \Gamma_{ijk,ml} - \Gamma_{ijm,kl}$$

entonces

$$R_{ijkl,m} + R_{ijlm,k} + R_{ijmk,l} = \Gamma_{ijl,km} - \Gamma_{ijk,lm} + \Gamma_{ijm,lk} - \Gamma_{ijl,mk} + \Gamma_{ijk,ml} - \Gamma_{ijm,kl} = 0$$

ya que el operador derivada conmuta. Por lo tanto

$$R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0$$

haciendo que *quede demostrado*.

# 5. Conclusiones

A lo largo de este escrito, analizamos, desde su definición, las distintas propiedades del tensor de Riemann. Dichas propiedades surgen como consecuencia de la simetría de las componentes del tensor métrico, así como de la simetría de los símbolos de Christoffel y la conmutatividad de las derivadas parciales. Concretamente, el tensor de Riemann surge de calcular y analizar la segunda derivada covariante de un vector **v** cualquiera y la diferencia de sus componentes en el intercambio de sus derivadas covariantes. De esta manera, se define el tensor de Riemann como

$$R^i_{jkl} = \Gamma^i_{jl,k} - \Gamma^i_{jk,l} + \Gamma^n_{jl}\Gamma^i_{nk} - \Gamma^n_{jk}\Gamma^i_{nl}$$

La simetría se manifiesta ante el intercambio del primer y último par de índices. Es decir: $R_{ijkl} = R_{klij}$. Por su parte, la antisimetría se manifiesta entre los dos últimos índices, así como los dos primeros: $R_{ijkl} = -R_{ijlk} = -R_{jikl}$. Finalmente, otra propiedad que se demostró fue $R_{ijkl} + R_{iklj} + R_{iljk} = 0$

Por último, tenemos la identidad de Bianchi, la cual corresponde a las derivadadas covariantes del tensor de Riemann: $R_{ijkl;m} + R_{ijlm;k} + R_{ijmk;l} = 0$. La cual pudo ser demostrada al considerar una localidad que hiciera que los símbolos de Christoffel fuesen cero pero sus derivadas no.

Es importante notar que estas propiedades no se manifestarían en el tensor de Riemann si no se cumpliera el Teorema Fundamental de la Geometría de Riemann.

# Referencias


[1] Wolfram. (2018). *Riemann Tensor*. Recuperado el 23 de abril de 2018 de: `http://mathworld.wolfram.com/RiemannTensor.html`

[2] Rojas, G. (2008). *Teoría de Gravitación No Simétrica.*Revista Integración. Recuperado el 23 de abril de 2018 de: `http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=327028435002`

[3] De Unánue, A. (2011). *Revisión de la Teoría de Perturbaciones en Relatividad General*. Revista Mexicana de Física. Recuperado el 23 de abril de 2018 de: `http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=57021109001`

[4] López, L. (2018). *Componentes Covariantes y Contravariantes de un Vector*. Cálculo Tensorial (Notas 19). ITESO: Curso de Primavera 2018.

[5] Danielson, D. (2003). *General Coordinates*. Vectors and Tensors in Engineering and Physics(p.180). Estados Unidos: Perseus Books.

[6] López, L. (2018). *Tensor Identidad. Tensor Métrico*. Cálculo Tensorial (Notas 20). ITESO: Curso de Primavera 2018.

[7] López, L. (2018). *Derivada Covariante*. Cálculo Tensorial (Notas 23). ITESO: Curso de Primavera 2018.

[8] Chamizo, F ( n.d.). *Geometría Diferencial.*Capítulo 4 Curvatura y Gravedad. Universidad Autónoma de Madrid Recuperado el 06 de mayo del 2018 de: `https://www.uam.es/otros/openmat/cursos/geodif/sections/geomivS41.pdf`