INSTITUTO TECNOLÓGICO Y DE ESTUDIOS SUPERIORES DE OCCIDENTE

ELEMENTOS FINITOS

Otoño 2019

Examen Parcial 1

ELEMENTOS FINITOS PARA LA ECUACIÓN DE CALOR EN COORDENADAS POLARES

Integrantes – equipo 3:

NT704804 Chiñas Fuentes, Karina

NT703441 González Vázquez, Natalia

NT703798 Terrazas Zafa, Samuel de Jesús

Profesor: Dr. Ochoa González David Manuel

Tlaquepaque, Jalisco

Fecha de entrega: octubre 01, de 2019

Ecuación de Calor en Coordenadas Polares

La ecuación diferencial que determina el comportamiento de la transferencia de calor en un tubo está definido por:

$$-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(rK\frac{dT}{dr}\right)=0, \quad \forall \quad r_{int}\leq r\leq r_{ext}. \tag{1}$$

Donde r_{int} y r_{ext} son el radio interno y externo del tubo, respectivamente.

En un intercambiador de calor se tiene un tubo expuesto a flujos internos y externos de líquidos a diferentes temperaturas. En el interior del tubo el fluido tiene $T_{\infty}^{int}=-15°\text{C}$ y en el exterior $T_{\infty}^{ext}=150°\text{C}$, con un valor de $h=50\ \text{W}/(\text{m}^2{\cdot}°\text{C})$ para ambos fluidos. El tubo tiene un $r_{int}=10\text{cm}$ y $r_{ext}=20\text{cm}$ y una $K=45\text{W}/(\text{m}{\cdot}°\text{C})$. Calcula la temperatura de la pared del tubo usando tres elementos cuadrados.

NOTA: Se deberá entregar el desarrollo en limpio (puede ser a mano o a computadora) **describiendo** en un párrafo breve cada paso. Incluye una gráfica de la solución obtenida (temperatura/posición).

Procedimiento

Como se ha estado trabajando en clase, haremos uso del método de residuos ponderados de Garlekin, considerando las coordenadas naturales ξ. Debido a que vamos a estar trabajando con funciones de forma cuadráticas (ver figura 1).

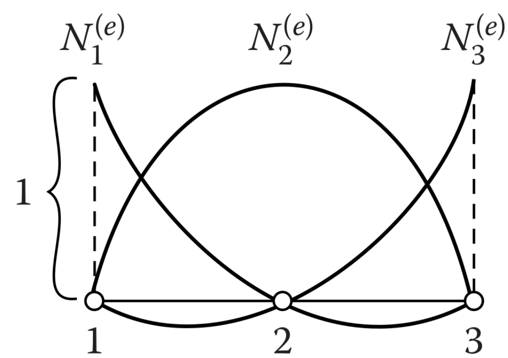

Figura 1: Funciones de forma cuadráricas para un elemento dado, en tres puntos [1].

Como se sabe $-1\leq\xi\leq 1$, es por ello que las funciones N_i y sus derivadas toman la forma de:

$$\begin{array}{rlcr} N_1(\xi)= & \frac{1}{2}\xi(\xi-1) & \longrightarrow & \frac{d}{d\xi}N_1=\frac{1}{2}\left(2\xi-1\right) \\ N_2(\xi)= & 1-\xi^2 & \longrightarrow & \frac{d}{d\xi}N_2=-2\xi \\ N_3(\xi)= & \frac{1}{2}\xi(\xi+1) & \longrightarrow & \frac{d}{d\xi}N_3=\frac{1}{2}\left(2\xi+1\right) \end{array} \tag{2}$$

El jacobiano de este sistema para sistemas unidimensionales tiene un Jacobiano $J=L/6$, siendo L la longidutd del dominio; en este caso $L\rightarrow R=0{,}1/3\text{m}$. No obstante, antes de incorporar las coordenadas naturales, se tomará la integral que surge del método de residuos ponderados para coordenadas polares; eso es:

$$\int_0^{2\pi}\int_{r_{int}}^{r_{ext}} W\left[-\frac{d}{dr}\left(rK\cdot\frac{dT}{dr}\right)\right]drd\theta=0 \tag{3}$$

Donde W es la función que pondera el residuo de la aprocimación. Al integrar por partes, considerar la condición de Neumann y dividir toda la ecuación por 2π, entonces la ecuación (3) queda como [1, 2]:

$$\int_{r_{int}}^{r_{ext}} rK\frac{dW}{dr}\frac{dT}{dr}dr\pm rWh\left(T-T_{\infty}\right)\delta_{e_{(1,3)}}=0 \tag{4}$$

Donde el signo positivo se da para el elemento e_1 y el signo positivo para el elemento e_3. Por otra parte, $\delta_{e_{(1,3)}}$ es la delta de Kronecker y se hace 0 para el elemento e_2 y 1 en e_1 y e_3 [2]. h es la constante de convección térmica.

La relación entre r y ξ, para funciones de forma cuadráticas está dado como [1, 2]

$$r = N_1(\xi)r_{2i-1} + N_2(\xi)r_{2i} + N_3(\xi)r_{2i+1} \tag{5}$$

Donde i hace referencia al i-ésimo elemento. Para este caso $i = 1, \ldots, 7$, donde $r_1 = 0{,}1$m y $r_7 = 0{,}2$m, por lo que cada valor de r_i va a estar distanciado por $r_{ext}/6$ m. Por lo que, para cada elemento se tiene que[1]:

$$e_1 \to \begin{pmatrix} r_1 = r_{int} \\ r_2 = r_{int} + r_{ext}/6 \\ r_3 = r_{int} + r_{ext}/3 \end{pmatrix}, \quad e_2 \to \begin{pmatrix} r_3 = r_{int} + r_{ext}/3 \\ r_4 = r_3 \quad + r_{ext}/6 \\ r_5 = r_4 \quad + r_{ext}/3 \end{pmatrix}, \quad e_3 \to \begin{pmatrix} r_5 = r_4 + r_{ext}/3 \\ r_6 = r_5 + r_{ext}/6 \\ r_7 = r_{ext} \end{pmatrix} \tag{6}$$

Retomando la ecuación (4), la traduciremos a una forma de $(I + A)T = B$, donde I hace referencia a la integral, A es la parte que contiene el factor de convección h, T es el vector de temperatura y B es la parte que contiene T_∞. Teniendo esto en mente, ya podemos expresar la integral de la ecuación (4) en su forma matricial-general, respecto a la integral:

$$I = \int_{-1}^{1} (N_1(\xi)r_{2i-1} + N_2(\xi)r_{2i} + N_3(\xi)r_{2i+1}) \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} \\ \frac{dN_2}{d\xi} \\ \frac{dN_3}{d\xi} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dN_1}{d\xi} & \frac{dN_2}{d\xi} & \frac{dN_3}{d\xi} \end{bmatrix} J d\xi \tag{7}$$

Donde el resultado es una matriz[2] de 3x3. La forma de (7) es independiente del elemento que se estudie.

Para resolver la ecuación (4), se hizo un código en Python para trabajar en cada elemento y el ensamble de la matriz que da la solución final.

Primer Elemento

Cuando se trabaja para el primer elemento, la ecuacíon (4) toma la forma de:

$$\left(\frac{6K}{R} \int_{-1}^{1} f_1(\xi) \begin{bmatrix} (\xi - \frac{1}{2})^2 & \xi(1-2\xi) & \xi^2 - \frac{1}{4} \\ \xi(1-2\xi) & 4\xi^2 & -\xi(2\xi+1) \\ \xi^2 - \frac{1}{4} & -\xi(2\xi+1) & (\xi + \frac{1}{2})^2 \end{bmatrix} d\xi + h \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \end{bmatrix} = hT_\infty \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{8}$$

donde $f_1(r)$ es:

$$f_1(\xi) = -1{,}38777878078145 \times 10^{-17}\xi^2 + 0{,}0166666666666667\xi + 0{,}116666666666667 \tag{9}$$

Segundo Elemento

Cuando se trabaja para el segundo elemento, la ecuacíon (4) toma la forma de:

$$\left(\frac{6K}{R} \int_{-1}^{1} f_2(\xi) \begin{bmatrix} (\xi - \frac{1}{2})^2 & \xi(1-2\xi) & \xi^2 - \frac{1}{4} \\ \xi(1-2\xi) & 4\xi^2 & -\xi(2\xi+1) \\ \xi^2 - \frac{1}{4} & -\xi(2\xi+1) & (\xi + \frac{1}{2})^2 \end{bmatrix} d\xi \right) \cdot \begin{bmatrix} T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{bmatrix} = 0 \tag{10}$$

donde $f_2(r)$ es:

$$f_2(\xi) = -2{,}77555756156289 \times 10^{-17}\xi^2 + 0{,}0166666666666667\xi + 0{,}15 \tag{11}$$

[1]En el caso de que no se cambiara a coordenadas naturales, es importante notar que los límites de la integral mostrada en la ecuacíon (4) se modificarían conforme se muestra en (6), según el elemento que se esté estudiando. No obstante, como nuestro análisis sí lo haremos en coordenadas naturales, los límites para todas las integrales siempre va a ser de -1 a 1.

[2]Toma en cuenta que la resultante del ensamble es de 7x7.

Tercer Elemento

Cuando se trabaja para el tercer elemento, la ecuaciíon (4) toma la forma de:

$$\left(\frac{6K}{R}\int_{-1}^{1} f_3(\xi)\begin{bmatrix}(\xi-\frac{1}{2})^2 & \xi(1-2\xi) & \xi^2-\frac{1}{4}\\ \xi(1-2\xi) & 4\xi^2 & -\xi(2\xi+1)\\ \xi^2-\frac{1}{4} & -\xi(2\xi+1) & (\xi+\frac{1}{2})^2\end{bmatrix} d\xi - h\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{bmatrix}\right)\cdot\begin{bmatrix}T_5\\T_6\\T_7\end{bmatrix} = hT_\infty\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \tag{12}$$

donde $f_3(r)$ es:

$$f_3(\xi) = 0{,}0166666666666667\xi + 0{,}183333333333333 \tag{13}$$

Ensamble de Elementos y Solución

Para la solución general, la matriz resultante va a quedar como una matriz compuesta de todas las matrices que se obtuvieron de todos los elementos, su enamblaje va a estar dado como [2]:

$$\text{Matriz General} = \begin{bmatrix}M_{11}^{(e_1)} & M_{12}^{(e_1)} & M_{13}^{(e_1)} & 0 & 0 & 0 & 0\\ M_{21}^{(e_1)} & M_{22}^{(e_1)} & M_{23}^{(e_1)} & 0 & 0 & 0 & 0\\ M_{31}^{(e_1)} & M_{32}^{(e_1)} & M_{33}^{(e_1)}+M_{11}^{(e_2)} & M_{12}^{(e_2)} & M_{13}^{(e_2)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & M_{21}^{(e_2)} & M_{22}^{(e_2)} & M_{23}^{(e_2)} & 0 & 0\\ 0 & 0 & M_{31}^{(e_2)} & M_{32}^{(e_2)} & M_{33}^{(e_2)}+M_{11}^{(e_1)} & M_{12}^{(e_1)} & M_{13}^{(e_1)}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{21}^{(e_3)} & M_{22}^{(e_3)} & M_{23}^{(e_3)}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{31}^{(e_3)} & M_{32}^{(e_3)} & M_{33}^{(e_3)}\end{bmatrix} \tag{14}$$

donde $M_{ij}^{(e_l)}$ hace referencia al valor de la matriz para el l-ésimo elemento en la posición ij (i para el número de fila y j para el número de columna – recordar que $M^{e_l} = I^{e_l} + A^{e_l}$). El vector de temperatura será de la forma:

$$T = \begin{bmatrix}T_1\\T_2\\T_3\\T_4\\T_5\\T_6\\T_7\end{bmatrix} \tag{15}$$

Y se va a resolver T al calcular $T = M^{-1}B$, donde

$$B = h\begin{bmatrix}r_{int}\cdot T_\infty^{int}\\0\\0\\0\\0\\0\\-r_{ext}\cdot T_\infty^{ext}\end{bmatrix} \tag{16}$$

Código en Python

```
import numpy as np
import sympy as sp
sp.init_printing(use_unicode=True)
```

```
# Valores generales del problema

r, he, R, K = sp.symbols('r, h^{(e)}, R, K')
T_ooint, T_ooext = sp.symbols('T^{int}_{\infty},T^{ext}_{\infty}')
T1, T2, T3 = sp.symbols('T_1,T_2, T_3')
T4, T5, T6 = sp.symbols('T_4,T_5, T_6')
T7, TL = sp.symbols('T_7,T_L')
r_int,r_ext,h = sp.symbols('r_int,r_ext,h')
xi = sp.symbols('\\xi')

N1 = (xi*(xi-1))/2
N2 = 1 - (xi**2)
N3 = (xi*(xi+1))/2

dN1 = sp.diff(N1,xi)
dN2 = sp.diff(N2,xi)
dN3 = sp.diff(N3,xi)

J = R/6

M_diff = sp.Matrix([[dN1*dN1, dN1*dN2, dN1*dN3],
                    [dN2*dN1, dN2*dN2, dN2*dN3],
                    [dN3*dN1, dN3*dN2, dN3*dN3]])

rvec = np.zeros(7)
for i in range(7):
    rvec[i] = 0.1 + (0.1/6)*i
rvec

# Construccion de Sistema de Ecuaciones

f1 = N1*rvec[0] + N2*rvec[1] + N3*rvec[2]
f2 = N1*rvec[2] + N2*rvec[3] + N3*rvec[4]
f3 = N1*rvec[4] + N2*rvec[5] + N3*rvec[6]


I1 = (f1*J*K*M_diff)
I2 = (f2*J*K*M_diff)
I3 = (f3*J*K*M_diff)

intgrl1 = ((sp.integrate((I1), (xi,-1,1) ))).subs({K:45,R:0.10/3})
intgrl2 = ((sp.integrate((I2), (xi,-1,1) ))).subs({K:45,R:0.10/3})
intgrl3 = ((sp.integrate((I3), (xi,-1,1) ))).subs({K:45,R:0.10/3})

A1 = sp.Matrix([[1,0,0],[0,0,0],[0,0,0]])*r_int*h
A3 = sp.Matrix([[0,0,0],[0,0,0],[0,0,1]])*r_ext*h

B1 = sp.Matrix([[1,0,0],[0,0,0],[0,0,0]])*r_int*h*T_ooint
B3 = sp.Matrix([[0,0,0],[0,0,0],[0,0,1]])*r_ext*h*T_ooext


M1 = intgrl1 + A1
M2 = intgrl2
M3 = intgrl3 - A3

# Ensamble de Matrices
```

```
MGen=sp.Matrix([[M1[0],M1[1],M1[2],0,0,0,0],[M1[3],M1[4],M1[5],0,0,0,0],\
                [M1[6],M1[7],M1[8]+M2[0],M2[1],M2[2],0,0],[0,0,M2[3],M2[4],\
                M2[5],0,0],[0,0,M2[6],M2[7],M2[8]+M3[0],M3[1],M3[2]],\
                [0,0,0,0,M3[3],M3[4],M3[5]],[0,0,0,0,M3[6],M3[7],M3[8]]])

BGen = h*sp.Matrix([T_ooint*r_int,0,0,0,0,0,-T_ooext*r_ext])

MGen = MGen.subs({h:50,r_int:0.1,r_ext:0.2})
BGen = BGen.subs({h:50,T_ooext:150,T_ooint:-15,r_int:0.1,r_ext:0.2})

# Solucion de Temperaturas

T = (MGen.inv())*BGen
for i in range(7):
    print(f"T{i+1} = {T[i]} C")
```

La solución del código para T es la siguiente.

$$T = \begin{bmatrix} 298{,}884204445456 \circ \mathrm{C} \\ 300{,}675780954848 \circ \mathrm{C} \\ 302{,}228480596321 \circ \mathrm{C} \\ 303{,}597580661625 \circ \mathrm{C} \\ 304{,}822564930581 \circ \mathrm{C} \\ 305{,}930504878746 \circ \mathrm{C} \\ 306{,}942102222723 \circ \mathrm{C} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Al graficar con el siguiente código:

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt
from matplotlib import colors as mcolors
from matplotlib import rc
import pandas as pd
import os


sstyle = "seaborn-poster"
plt.style.use(sstyle)
plt.rc('text', usetex=True)
plt.rc('font', family='serif')
plt.figure(figsize = (20,11))


rvec = np.zeros(7)
for i in range(7):
    rvec[i] = 0.1 + (0.1/6)*i
rvec


T = [298.884204445456,300.675780954848,302.228480596321\
,303.597580661625,304.822564930581,305.930504878746,306.942102222723]

plt.plot(rvec, T, color = "k")
```

```
plt.title("Temperatura en el Cilindro")
plt.ylabel("Temperatura (Celsius)")
plt.xlabel("Radio (m)")

plt.show()
```

La gráfica que da se puede apreciar en la figura 2.

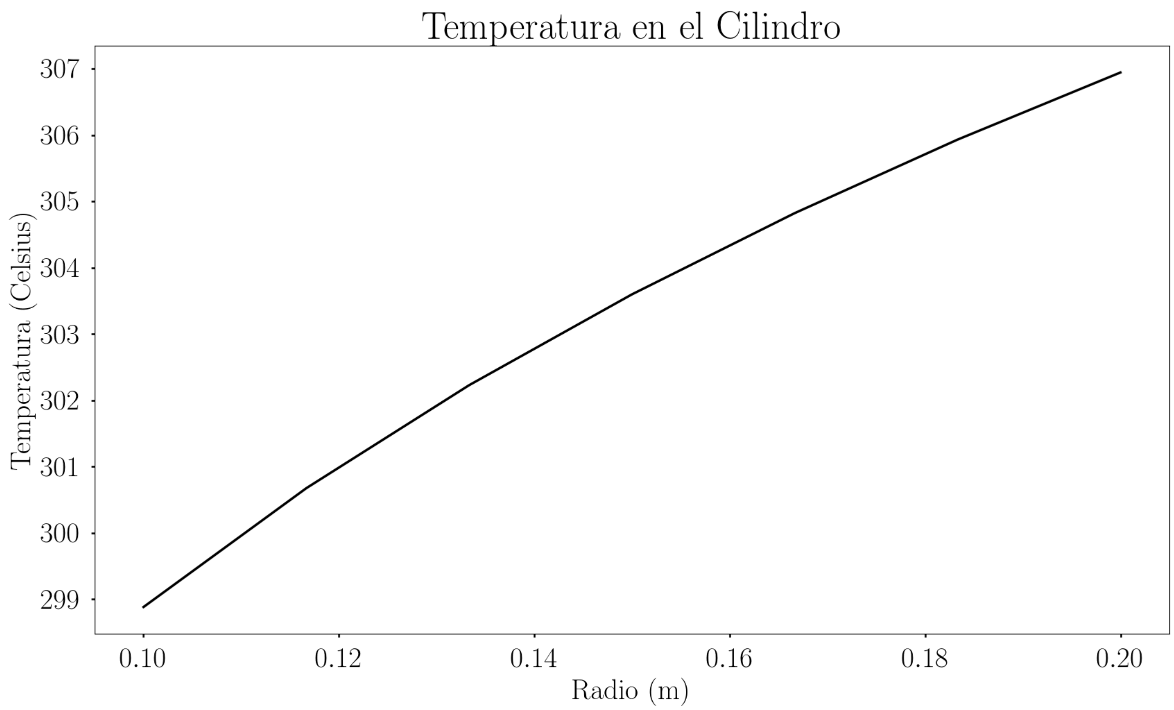

Figura 2: Resultado del código: solución a la ecuación de temperatura usando tres elementos con funciones cuadráticas en coordenadas naturales.

....

Referencias

[1] Pepper, D. W. & Heinrich, J. C.. (2017). *The Finite Element Method.* Third Edition. CRC Press. United States.

[2] Ochoa, G. D. M.. (2019). *Elementos Finitos.* Curso Universitario del Instituto Tecnológico y de Estudios Superiores de Occidente. Periodo Otoño. Jalisco, México.