第八章 电磁感应 作业

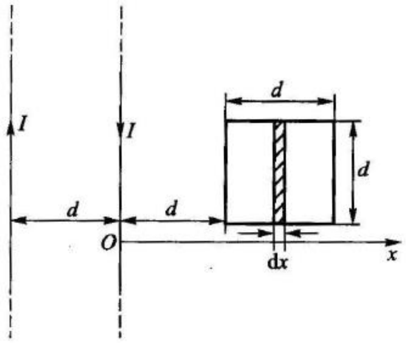
A类计算题（教材P357~P362）：

8 －7

有两根相距为d 的无限长平行直导线，它们通以大小相等流向相反的电流，且电流均以$\frac{dI}{dt}$的变化率增长．若有一边长为d 的正方形线圈与两导线处于同一平面内，如图所示．求线圈中的感应电动势．

分析 本题仍可用法拉第电磁感应定律$\mathscr{E}=-\frac{d\Psi}{dt}$来求解.由于回路处在非均匀磁场中,磁通量$\Phi=\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}$,其中$\boldsymbol{B}$为两无限长直电流单独存在时产生的磁感强度$\boldsymbol{B}_1$与$\boldsymbol{B}_2$之矢量和.

建立如图所示的坐标系.取平行于长直导线且宽为dx、长为d的面元dS,如图中阴影部分所示,则$dS=d\,dx$,总磁通量可通过积分求得.本题在工程技术中又称为互感现象,也可用公式$\mathscr{E}_M=-M\frac{dI}{dt}$求解.



题 8-7 图

解 1 穿过面元dS的磁通量为

$$d\Phi=\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}=\boldsymbol{B}_1\cdot d\boldsymbol{S}+\boldsymbol{B}_2\cdot d\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi(x+d)}d\,dx-\frac{\mu_0 I}{2\pi x}d\,dx$$

因此穿过线圈的磁通量为

$$\Phi=\int d\Phi=\int_d^{2d}\frac{\mu_0 Id}{2\pi(x+d)}dx-\int_d^{2d}\frac{\mu_0 Id}{2\pi x}dx=\frac{\mu_0 Id}{2\pi}\ln\frac{3}{4}$$

再由法拉第电磁感应定律,有

$$\mathscr{E}=-\frac{d\Phi}{dt}=\left(\frac{\mu_0 d}{2\pi}\ln\frac{4}{3}\right)\frac{dI}{dt}$$

解 2 当两长直导线有电流I通过时,穿过线圈的磁通量为

$$\Phi=\frac{\mu_0 dI}{2\pi}\ln\frac{3}{4}$$

线圈与两长直导线间的互感为

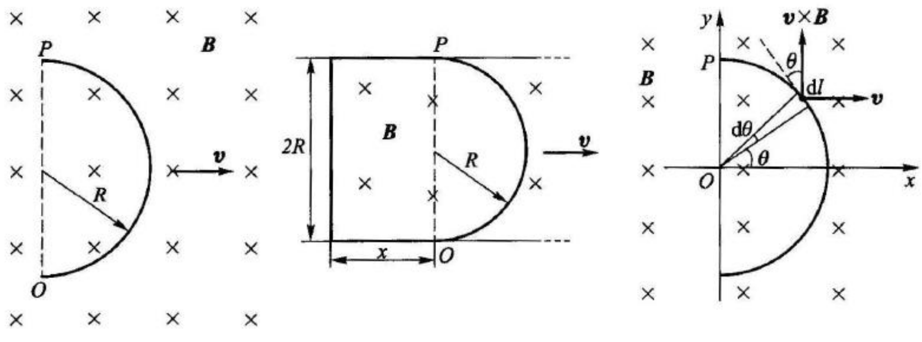
$$M=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 d}{2\pi}\ln\frac{3}{4}$$

当电流以$\frac{dI}{dt}$变化时,线圈中的互感电动势为

$$\mathscr{E}=-M\frac{dI}{dt}=\left(\frac{\mu_0 d}{2\pi}\ln\frac{4}{3}\right)\frac{dI}{dt}$$

8 －10

如图所示，把一半径为R 的半圆形导线OP 置于磁感强度为$\boldsymbol{B}$的均匀磁场中，当导线以速率v 水平向右平动时，求导线中感应电动势E 的大小，哪一端电势较高？



(a) (b) (c)

题 8-11 图

分析 本题可设法构造一个闭合回路由 $\mathscr{E}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$求解；也可以利用动生电动势公式 $\mathscr{E}=\int_l(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 求解，此时导线元 dl 上的动生电动势为 $\mathrm{d}\mathscr{E}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$，而矢量$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$的方向就是导线中电势升高的方向.

解 1 如图(b)所示，假想半圆形导线 OP 在宽为 $2R$ 的静止"⊏"形导轨上滑动，两者之间形成一个闭合回路. 设顺时针方向为回路正向，任一时刻端点 O 或端点 P 距"⊏"形导轨左侧距离为 x，则

$$\Phi=\left(2Rx+\frac{1}{2}\pi R^2\right)B$$

则

$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-2RB\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=-2RvB$$

由于静止的"⊏"形导轨上的电动势为零，则 $\mathscr{E}=-2RvB$. 式中负号表示电动势的方向为逆时针，对 OP 段来说端点 P 的电势较高.

解 2 建立如图(c)所示的坐标系，在导体上任意处取导体元 dl，则

$$\mathrm{d}\mathscr{E}=(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=vB\sin 90^\circ\cos\theta\mathrm{d}l=vB\cos\theta R\mathrm{d}\theta$$

由矢量$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})$的指向可知，端点 P 的电势较高.

$$\mathscr{E}=\int\mathrm{d}\mathscr{E}=vBR\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos\theta\mathrm{d}\theta=2RvB$$

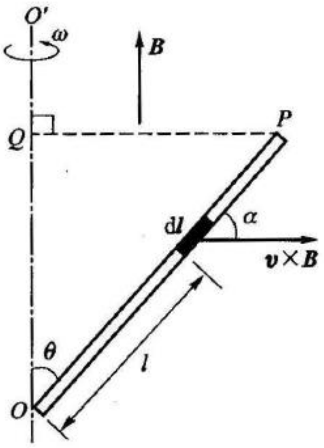
解 3 连接 OP 使导线构成一个闭合回路. 由于磁场是均匀的，在任意时刻，穿过回路的磁通量 $\Phi=BS=$常量. 由法拉第电磁感应定律 $\mathscr{E}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$可知，在均匀磁场中，任意闭合导体回路因平动而产生的动生电动势为零；而任意曲线形导体上的动生电动势等于首尾相连直导体上的动生电动势.

$$\mathscr{E}=\mathscr{E}_{\widehat{OP}}+\mathscr{E}_{PO}=0$$

即

$$\mathscr{E}_{\widehat{OP}}=-\mathscr{E}_{PO}=2RvB$$

8-13 如图所示,长为 L 的导体棒 OP 处于均匀磁场中,并绕 OO' 轴以角速度 ω 旋转,棒与转轴间的夹角恒为 θ,磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 与转轴平行.求 OP 棒在图示位置处的电动势.



题 8-13 图

分析 本题可以构造一个包含 OP 导体在内的闭合回路,用法拉第电磁感应定律 $\mathscr{E}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$ 计算,也可用 $\mathscr{E}=\int_l(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 来计算.由于对称性,导体 OP 旋转至任何位置时产生的电动势与图示位置是相同的.

解 1 由上分析,得

$$\begin{aligned}\mathscr{E}_{OP}&=\int_{OP}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=\int_l vB\sin 90^\circ\cos\alpha\mathrm{d}l\\&=\int_l(l\sin\theta\omega)B\cos(90^\circ-\theta)\mathrm{d}l\\&=\omega B\sin^2\theta\int_0^L l\mathrm{d}l=\frac{1}{2}\omega B(L\sin\theta)^2\end{aligned}$$

由矢量($\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}$)的方向可知端点 P 的电势较高.

解 2 设想导体 OP 为直角三角形导体回路 $OPQO$ 中的一部分,任一时刻穿过回路的磁通量 Φ 为零,则回路的总电动势

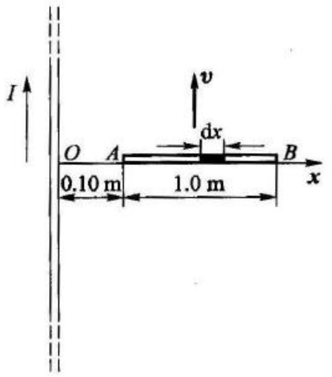
$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=0=\mathscr{E}_{OP}+\mathscr{E}_{PQ}+\mathscr{E}_{QO}$$

显然,$\mathscr{E}_{QO}=0$,所以

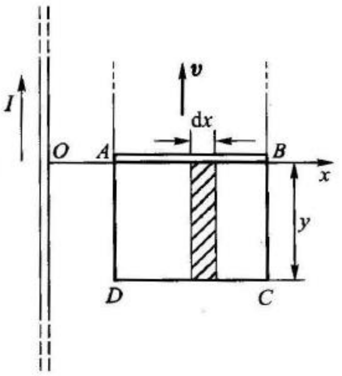
$$\mathscr{E}_{OP}=-\mathscr{E}_{PQ}=\mathscr{E}_{QP}=\frac{1}{2}\omega B(PQ)^2=\frac{1}{2}\omega B(L\sin\theta)^2$$

由上可知,导体棒 OP 旋转时,在单位时间内切割的磁感线数与导体棒 QP 等效.后者是垂直切割的情况.

8-14 如图(a)所示，金属杆 AB 以匀速 $v=2.0\ \mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 平行于一根长直导线移动，此导线通有电流 $I=40$ A.问此杆中的感应电动势为多大？杆的哪一端电势较高？



(a)



(b)

分析 本题可用两种方法求解.(1) 用公式 $\mathscr{E}=\int_l(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 求解，建立如图(a)所示的坐标系，线元 $\mathrm{d}l=\mathrm{d}x$ 处的磁感强度 $B=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi x}$.(2) 用法拉第电磁感应定律求解，构造一个包含杆 AB 在内的闭合回路.为此可设想杆 AB 在一个静止的"⊔"形导轨上滑动，如图(b)所示.设时刻 t，杆 AB 距导轨下端 CD 的距离为 y，由公式 $\boldsymbol{\Phi}=\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$ 求得穿过该回路的磁通量，再由 $\mathscr{E}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$，即可求得回路的电动势，亦即本题金属杆 AB 中的电动势.

解 1 根据分析，杆中的感应电动势为

$$\mathscr{E}_{AB}=\int_{AB}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\int_{0.1\ \mathrm{m}}^{1.1\ \mathrm{m}}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}v\mathrm{d}x=-\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln 11=-3.84\times10^{-5}\ \mathrm{V}.$$

式中负号表示电动势方向由 B 指向 A，故点 A 电势较高.

解 2 设顺时针方向为回路 $ABCD$ 的正向，在距直导线 x 处，取宽为 $\mathrm{d}x$、长为 y 的面元 $\mathrm{d}S$，则穿过面元的磁通量为

$$\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}=\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\frac{\mu_0 I}{2\pi x}y\mathrm{d}x$$

穿过回路的磁通量为

$$\boldsymbol{\Phi}=\int_S\mathrm{d}\boldsymbol{\Phi}=\int_{0.1\ \mathrm{m}}^{1.1\ \mathrm{m}}\frac{\mu_0 I}{2\pi x}y\mathrm{d}x=\frac{\mu_0 Iy}{2\pi}\ln 11$$

回路的电动势为

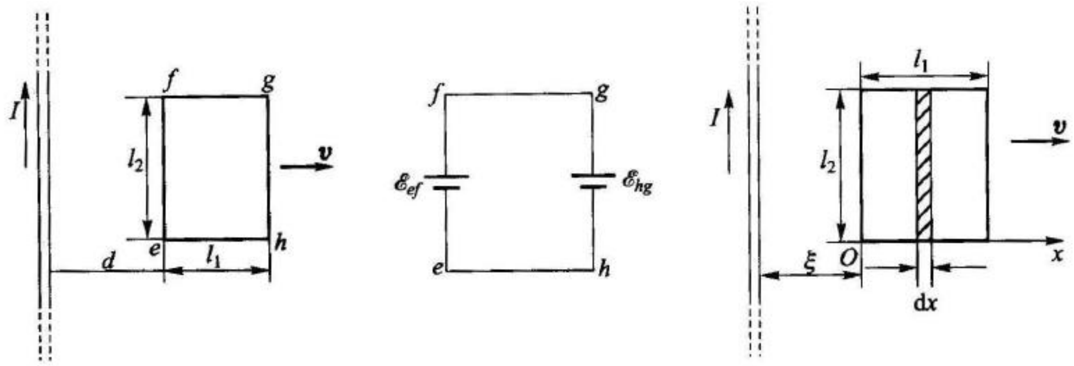
$$\mathscr{E}=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 I}{2\pi}\ln 11\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln 11=-3.84\times10^{-5}\ \mathrm{V}$$

由于静止的"⊔"形导轨上电动势为零，所以

$$\mathscr{E}_{AB}=\mathscr{E}=-3.84\times10^{-5}\ \mathrm{V}$$

式中负号说明回路电动势方向为逆时针，对 AB 导体来说，电动势方向应由 B 指向 A，故点 A 电势较高.

8 －15 如图所示，在“无限长”直载流导线的近旁，放置一个矩形导体线框，该线框在垂直于导线方向上以匀速率v 向右移动，求在图示位置处，线框中感应电动势的大小和方向.



(a) (b) (c)

分析 本题亦可用两种方法求解.

方法 1 当闭合导体线框在磁场中运动时，线框中的总电动势等于框上各段导体中的动生电动势的代数和.如图(a)所示，导体 eh 段和 fg 段上的电动势为零[此两段导体上处处满足$(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$]，因而线框中的总电动势为

$$\mathscr{E}=\oint_l(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{ef}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{gh}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{ef}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}-\int_{hg}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mathscr{E}_{ef}-\mathscr{E}_{hg}$$

，其等效电路如图(b)所示.

方法 2 用公式 $\mathscr{E}=-\dfrac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$求解，式中 Φ 是线框运动至任意位置处时，穿过线框的磁通量.为此设时刻 t 时，线框左边距导线的距离为 ξ，如图(c)所示，显然 ξ 是时间 t 的函数，且有$\dfrac{\mathrm{d}\xi}{\mathrm{d}t}=v$.求得线框在任意位置处的电动势 $\mathscr{E}(\xi)$，令 $\xi=d$，即可得线框在题目所给位置处的电动势.

解 1 根据分析，线框中的电动势为

$$\begin{aligned}\mathscr{E}&=\mathscr{E}_{ef}-\mathscr{E}_{hg}\\&=\int_{ef}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}-\int_{hg}(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B})\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi d}\int_0^{l_2}\mathrm{d}l-\frac{\mu_0 Iv}{2\pi(d+l_1)}\int_0^{l_2}\mathrm{d}l\\&=\frac{\mu_0 Ivl_1l_2}{2\pi d(d+l_1)}\end{aligned}$$

由 $\mathscr{E}_{ef}>\mathscr{E}_{hg}$可知，线框中的电动势方向为 $efgh$.

$$\mathscr{E}(\xi)=-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}=\frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2\pi\xi(\xi+l_1)}$$

令 $\xi=d$,得线框在图示位置处的电动势为

$$\mathscr{E}=\frac{\mu_0 I v l_1 l_2}{2\pi d(d+l_1)}$$

由 $\mathscr{E}>0$ 可知,线框中电动势方向为顺时针方向.

解 (1) 根据分析,在 $t\leqslant t_1$ 时间内,线框为自由落体运动,于是

$$v_1=gt(t\leqslant t_1),\quad 其中\ t=t_1 时, v_1=v_{10}=\sqrt{2gh}$$

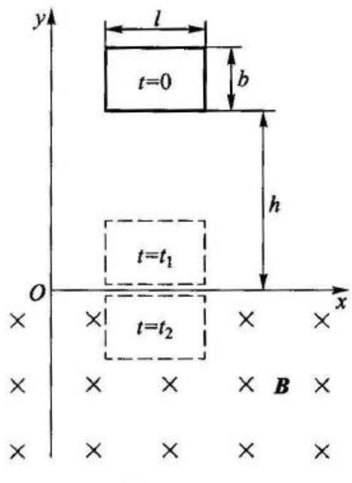
(2) 线框进入磁场后,受到向上的安培力为

$$F_A=IlB=\frac{B^2l^2}{R}v$$

根据牛顿运动定律,可得线框运动的微分方程

$$mg-\frac{B^2l^2}{R}v=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

8-16 一个长为 l、宽为 b 的矩形导线框架,其质量为 m,电阻为 R.在 $t=0$ 时,框架从距水平面 $y=0$ 的上方 h 处由静止自由下落,如图所示.磁场的分布为:在 $y=0$ 的水平面上方没有磁场;在 $y=0$ 的水平面下方有磁感强度为 $\boldsymbol{B}$ 的均匀磁场,$\boldsymbol{B}$ 的方向垂直纸面向里.已知框架在时刻 t_1 和 t_2 的位置如图中所示.求在下述时间内,框架的速度与时间的关系:(1) $0<t\leqslant t_1$,即框架进入磁场前;(2) $t_1<t\leqslant t_2$,即框架进入磁场,但尚未全部进入磁场;(3) $t>t_2$,即框架全部进入磁场后.



题 8-16 图

分析 设线框刚进入磁场(t_1 时刻)和全部进入磁场(t_2 时刻)的瞬间,其速度分别为 v_{10} 和 v_{20}.在情况(1)和(3)中,线框中无感应电流,线框仅在重力作用下作落体运动,其速度与时间的关系分别为 $v=gt(t<t_1)$ 和 $v=v_{20}+g(t-t_2)(t>t_2)$.而在 $t_1<t<t_2$ 这段时间内,线框运动较为复杂,由于穿过线框回路的磁通量变化,使得回路中有感应电流存在,从而使线框除受重力外,还受到一个向上的安培力 F_A,其大小与速度有关,即 $F_A=F_A(v)$.根据牛顿运动定律,此时线框的运动微分方程为 $mg-F_A(v)=m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$,解此微分方程可得 $t_1<t<t_2$ 时间内线框的速度与时间的关系式.

令 $K=\frac{B^2l^2}{mR}$，整理上式并分离变量积分，有

$$\int_{v_{10}}^{v}\frac{\mathrm{d}v}{g-Kv}=\int_{t_1}^{t}\mathrm{d}t$$

积分后将 $v_{10}=\sqrt{2gh}$ 代入，可得

$$v_2=\frac{1}{K}\left[g-(g-K\sqrt{2gh})\,\mathrm{e}^{-K(t-t_1)}\right]\quad(t_1<t\leqslant t_2)$$

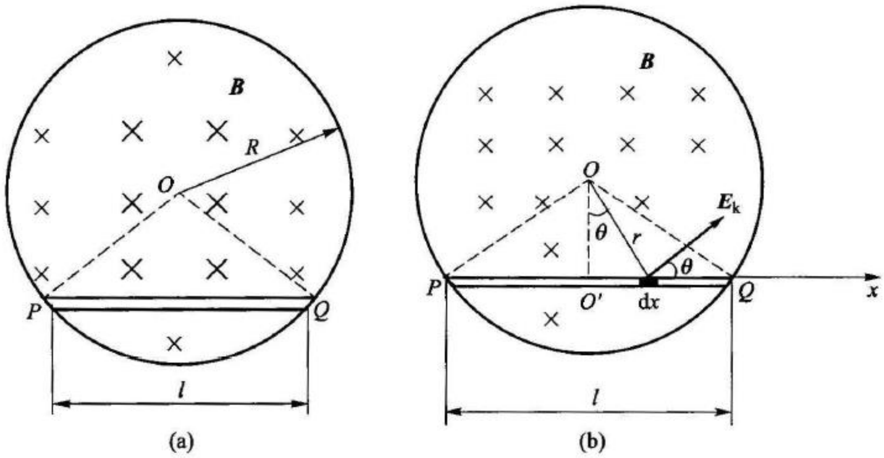
（3）线框全部进入磁场后（$t>t_2$），作初速为 v_{20} 的落体运动，故有

$$v_3=v_{20}+g(t-t_2)=\frac{1}{K}\left[g-(g-K\sqrt{2gh})\,\mathrm{e}^{-K(t_2-t_1)}\right]+g(t-t_2)$$

8 －18

在半径为R 的圆柱形空间中存在着均匀磁场，B 的方向与柱的轴线平行．如图所示，有一长为l 的金属棒放在磁场中，设B 随时间的变化率$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$为常量．试证：棒上感应电动势的大小为

$$\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{l}{2}\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$



题 8-19 图

分析 变化磁场在其周围激发感生电场，把导体置于感生电场中，导体中的自由电子就会在电场力的作用下移动，在棒内两端形成正负电荷的积累，从而产生感生电动势．利用上题结果，由 $\mathscr{E}=\int_l \boldsymbol{E}_\mathrm{k}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 计算棒上感生电动势．此外，还可连接 OP、OQ，设想 $PQOP$ 构成一个闭合导体回路，用法拉第电磁感应定律求解，由于 OP、OQ 沿半径方向，与通过该处的感生电场强度 $\boldsymbol{E}_\mathrm{k}$ 处处垂直，故 $\boldsymbol{E}_\mathrm{k}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=0$，$OP$、$OQ$ 两段均无电动势，由法拉第电磁感应定律求出的闭合回路的总电动势，就等于导体棒 PQ 上的电动势．

证 1 由法拉第电磁感应定律，有

$$\mathscr{E}_{PQ}=\mathscr{E}_{\triangle}=\left|-\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}\right|=S\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{l}{2}\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

证 2 由习题 8-17 可知，在 $r<R$ 区域，感生电场强度的大小 $E_k=\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}$. 设 PQ 上线元 $\mathrm{d}x$ 处，$\boldsymbol{E}_k$ 的方向如图(b)所示，则金属杆 PQ 上的电动势为

$$\mathscr{E}_{PQ}=\int_l \boldsymbol{E}_k\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\int E_k\cos\theta\mathrm{d}x=\int_0^l\frac{r}{2}\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{\sqrt{R^2-(l/2)^2}}{r}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{\mathrm{d}B}{\mathrm{d}t}\frac{l}{2}\sqrt{R^2-\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

8 －22

有两根半径均为a 的平行长直导线，它们中心距离为d．试求长为l的一对导线的自感（导线内部的磁通量可略去不计）．

分析 两平行长直导线可以看成无限长但宽为 d 的矩形回路的一部分. 设在矩形回路中通有逆时针方向电流 I，然后计算图中阴影部分(宽为 d、长为 l)的磁通量. 该区域内磁场可以看成两无限长直载流导线分别在该区域产生的磁场的叠加.

解 在如图所示的坐标中，当两导线中通有如图所示的电流 I 时，两平行导线间的磁感强度为

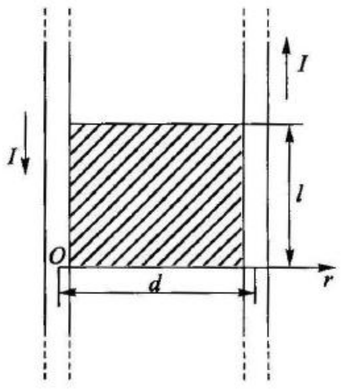
$$B=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}+\frac{\mu_0 I}{2\pi(d-r)}$$

穿过图中阴影部分的磁通量为

$$\Phi=\int_S\boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\int_a^{d-a}Bl\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 Il}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$

则长为 l 的一对导线的自感为

$$L=\frac{\Phi}{I}=\frac{\mu_0 l}{\pi}\ln\frac{d-a}{a}$$



题 8-22 图

8 －28

一无限长直导线，截面各处的电流密度相等，总电流为I．试证：单位长度导线内所贮藏的磁能为$\mu_0 I^2/16\pi$．

分析 本题中电流激发的磁场不但存在于导体内$\left(当\ r<R\ 时, B_1=\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}\right)$，而且存在于导体外$\left(当\ r>R\ 时, B_2=\dfrac{\mu_0 I}{2\pi r}\right)$.由于本题仅要求每单位长度导体内所贮存的磁能，故用公式 $W_m=\int_V w_m \mathrm{d}V$ 计算为宜，因本题中 B 呈柱对称性，取单位长度，半径为 r，厚为 $\mathrm{d}r$ 的薄柱壳（壳层内 w_m 处处相同）为体元 $\mathrm{d}V$，则该体元内贮存的能量 $\mathrm{d}W_m=\left[\dfrac{1}{2\mu_0}\left(\dfrac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}\right)^2\right]2\pi r\mathrm{d}r$，积分即可求得磁能.

证 根据以上分析单位长度导线内贮存的磁能为

$$W_m=\int \mathrm{d}W_m=\int_0^R\left(\frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 R^4}r^2\right)\cdot 2\pi r\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I^2}{16\pi}$$

上述结果仅为单位长度载流导线内所具有的磁场能量，它是总磁场能量的一部分，总能量还应包括导线外磁场所贮存的磁能.

8 －31

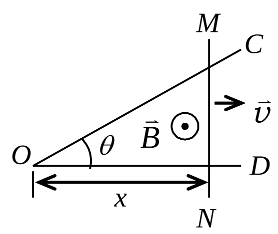
设有半径R ＝0.20 m 的圆形平行板电容器，两板之间为真空，板间距离d ＝0.50 cm，以恒定电流I ＝2.0 A 对电容器充电．求位移电流密度（忽略平板电容器的边缘效应，设电场是均匀的）．

解 忽略电容器的边缘效应，电容器内电场的空间分布是均匀的，因此极板间位移电流 $I_d=\int_S \boldsymbol{j}_d\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=j_d\pi R^2$，由此得位移电流密度的大小为

$$j_d=\frac{I_d}{\pi R^2}=\frac{I_c}{\pi R^2}=15.9\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$$

B 类计算题

1、如图所示，有一弯成θ角的金属架 COD 放在磁场中，磁感强度 $\vec{B}$ 的方向垂直于金属架 COD 所在平面．一导体杆 MN 垂直于 OD 边，并在金属架上以恒定速度$\vec{v}$ 向右滑动，$\vec{v}$ 与 MN 垂直．设 t=0 时，$x=0$．求下列两情形，框架内的感应电动势$\mathscr{E}_i$．



(1) 磁场分布均匀，且 $\vec{B}$ 不随时间改变．

(2) 非均匀的时变磁场 $B=Kx\cos\omega t$．

解：（1） $\phi = B\cdot S = B\cdot \frac{1}{2}xy, y = x\cdot tg\theta, x = vt$

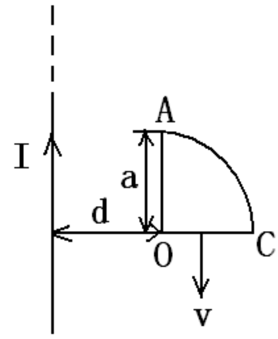
$$\varepsilon = -d\phi/dt = -d(\tfrac{1}{2}Bv^2t^2tg\theta)/dt = Bv^2t\cdot tg\theta$$，电动势方向：由 M 指向 N

（2）对非均匀时变磁场：$B = Kx\cos\omega t$，在 a 处取高为 $atg\theta$ 宽为 da 的面元，

$$d\phi = Ka\cos\omega t\cdot atg\theta\cdot da$$

$$\phi = \int_o^x Batg\theta da = \int_o^x Ka\cos\omega t\cdot atg\theta da = \tfrac{1}{3}Kx^3\cos\omega t\cdot tg\theta$$

$$\varepsilon = -d\phi/dt = Kv^3\cdot tg\theta(\tfrac{1}{3}\omega t^3\sin\omega t - t^2\cos\omega t)$$



2、无限长直导线通以电流 I，扇形线圈 OAC 以速度V匀速向下运动，求 1、OA 边、OC 边、AC 边的动电势的大小和方向;2、求整个扇形线圈 OCA 的电动势。

解：方法一

据动生电动势公式：$\varepsilon = \int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l}$　　令 $\vec{E}_k = \vec{v}\times\vec{B}$

则 $\vec{E}_k$ 方向为水平向右

对 $\overline{OA}$ 边：$\varepsilon_{i\overline{OA}} = \int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int\vec{E}_k\cdot d\vec{l}$

$\because \vec{E}_k \perp \vec{dl}$

$\therefore \vec{E}_k\cdot d\vec{l} = 0$　　　　$\therefore \varepsilon_{i\overline{OA}} = 0$

对 $\overline{OC}$ 边：$\varepsilon_{i\overline{OC}} = \int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int vBdl$

$$= \int_d^{d+a} v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}dx$$

$$= \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

方向：$O\rightarrow C$

对 $\overset{\frown}{AC}$ 边：$\varepsilon_{i\overset{\frown}{AC}} = \int(\vec{v}\times\vec{B})\cdot d\vec{l} = \int vB\cos\theta dl = \int vBdx$　　　　$(\because dl\cos\theta = dx)$

$$= \int_d^{d+a} v\frac{\mu_0 I}{2\pi x}dx = \frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

方向：$A\to C$

$\because \varepsilon_{i\overline{OC}}$与$\varepsilon_{i\overset{\frown}{AC}}$大小相等、方向相反、故整个扇形线圈$\varepsilon_{总}=0$

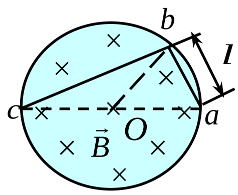
方法二：

对整个线圈：$\varepsilon_{i总}=\left|\dfrac{d\phi}{dt}\right|=0$ $\qquad\qquad \because \varepsilon_{i\overline{OA}}=0$

$\therefore \varepsilon_{i\overset{\frown}{AC}}$与$\varepsilon_{i\overline{OC}}$大小相等，方向相反。

$$\therefore \varepsilon_{i\overset{\frown}{AC}}=\varepsilon_{i\overline{OC}}=\frac{\mu_0 Iv}{2\pi}\ln\frac{d+a}{d}$$

3、在无限长螺线管中，均匀分布变化的磁场$\vec{B}(t)$。设$\vec{B}$以速率$\dfrac{dB}{dt}=k$变化（$k>0$，且为常量），方向与螺线管轴线平行，如图所示。现在其中放置一直角形导线abc。若已知螺线管截面半径为R，$\overline{ab}=l$，试求：



(1)螺线管中的感生电场$\vec{E}_V$；

(2)$\overline{ab}$，$\overline{bc}$两段导线中的感生电动势。

解:（1）考虑对称性，取圆心为o，半径为$r(r<R)$的圆周，根据感生电场与变化磁场之间的关系

$$\oint_L \vec{E}_V\cdot d\vec{l}=-\frac{d\Phi_m}{dt}=-\int_S\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$$

可得

$$E_V\cdot 2\pi r=-\pi r^2\frac{dB}{dt}=-\pi r^2 k$$

有

$$E_V=-\frac{r}{2}k\quad (r<R)$$

由楞次定律可以判定感生电场为逆时针方向。

（2）连接oa，ob和oc，在回路oabo中，穿过回路所围面积的磁通量为

$$\Phi=-BS=-\frac{1}{2}lBh=-\frac{1}{2}Bl(R^2-\frac{l^2}{4})^{1/2}$$

则

$$\varepsilon_1=-\frac{d\Phi}{dt}=\frac{1}{2}l(R^2-\frac{l^2}{4})^{1/2}\frac{dB}{dt}=\frac{1}{2}l(R^2-\frac{l^2}{4})^{1/2}k$$

而

$$\varepsilon_1=\varepsilon_{ab}+\varepsilon_{bo}+\varepsilon_{oa}=\varepsilon_{ab}$$

所以

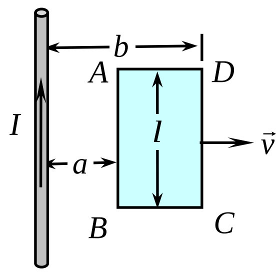
$$\varepsilon_{ab}=\varepsilon_1=\frac{1}{2}lk(R^2-\frac{l^2}{4})^{1/2}$$

方向由 a 指向 b 。

同理可得　　$\varepsilon_{bc}=\frac{1}{2}lk(R^2-\frac{l^2}{4})^{1/2}$

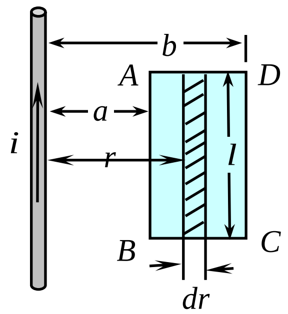
方向由 b 指向 c 。

4、一无限长直导线载有 $5.0A$ 直电流，旁边有一与它共面的矩形线圈 $ABCD$ ，已知 $l=20cm$ ， $a=10cm$ ， $b=20cm$；线圈共有 $N=1000$ 匝，以速率 $v=3.0m/s$ 离开直导线，如图所示。试求线圈内感应电动势的大小和方向。



解：（1）在距导线 r 处，磁感应强度

$$B=\frac{\mu_0 i}{2\pi r}=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\sin\omega t$$



取面元 Idr ，穿过该面元的磁通量为

$$d\Phi=BdS=\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\sin\omega t\bullet ldr$$

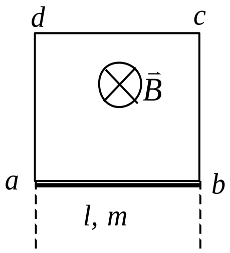
在 t 时刻穿过回路 $ABCD$ 的磁通量为

$$\Phi=\int d\Phi=\int_a^b\frac{\mu_0 I_0}{2\pi r}\sin\omega t\bullet ldr=\frac{\mu_0 l}{2\pi}(\ln\frac{b}{a})I_0\sin\omega t$$

（2）根据法拉第电磁感应定律，将 Φ 对时间 t 求导数，得回路 $ABCD$ 中的感应电动势

$$\varepsilon=-\frac{d\Phi}{dt}=-\frac{\mu_0 l\omega}{2\pi}(\ln\frac{b}{a})I_0\cos\omega t$$　　其方向作周期形变化

5、如图所示，在竖直面内有一矩形导体回路 *abcd* 置于均匀磁场 $\vec{B}$ 中， $\vec{B}$ 的方向垂直于回路平面，*abcd* 回路中的 *ab* 边的长为 *l*，质量为 *m*，可以在保持良好接触的情况下下滑，且摩擦力不计．*ab* 边的初速度为零，回路电阻 *R* 集中在 *ab* 边上． (1) 求任一时刻 *ab* 边的速率 *v* 和 *t* 的关系；　(2) 设两竖直边足够长，最后达到稳定的速率为若干？



解：

(1)
$$I=\frac{\varepsilon}{R}=\frac{Bvl}{R}$$

安培力：
$$F=\int\left|Id\vec{l}\times\vec{B}\right|=\frac{B^2vl^2}{R}$$

$$ma=mg-F=mg-\frac{B^2vl^2}{R}$$

$$\frac{dv}{dt}=g-\frac{B^2vl^2}{R}$$

$$\int_0^v\frac{dv}{g-\frac{B^2vl^2}{R}}=\int_0^t dt$$

$$v=\left[1-e^{-\frac{B^2l^2}{mR}t}\right]\frac{mgR}{B^2l^2}$$

(2)最后达到稳定的速率

$$v=\frac{mgR}{B^2l^2}$$