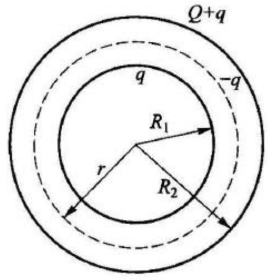
6-8 一个导体球半径为 R_1，外罩一个半径为 R_2 的同心薄导体球壳，外球壳所带总电荷为 Q，而内球的电势为 V_0.求此系统的电势和电场分布.

分析 若 $V_0=\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$，内球电势等于外球壳的电势，则内球不带电，内、外球壳间必定等电势.

若 $V_0\neq\dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$，内、外球壳间存在电势差，则内球带电，内、外球壳间必定存在电场.



题 6-8 图

不失一般情况，假设内导体球带电荷 q，导体达到静电平衡时电荷的分布如图所示，依照电荷的这一分布，利用高斯定理可求得电场分布.并由 $V_P=\int_P^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 或电势叠加原理求出电势的分布.最后将电场强度和电势用已知量 V_0、Q、R_1、R_2 表示.

解 根据静电平衡时电荷的分布，可知电场分布呈球对称.作半径为 r 的同心球面为高斯面，由高斯定理 $\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=E(r)\cdot 4\pi r^2=\sum q/\varepsilon_0$，根据不同半径的高斯面内的电荷分布，解得各区域内的电场分布.

$r<R_1$ 时： $$E_1(r)=0$$

$R_1<r<R_2$ 时： $$E_2(r)=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$r>R_2$ 时： $$E_2(r)=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

由电场强度与电势的积分关系，可得各相应区域内的电势分布.

$r<R_1$ 时：

$$V_1=\int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^{R_1}\boldsymbol{E}_1\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{R_2}^\infty \boldsymbol{E}_3\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$R_1<r<R_2$ 时：

$$V_2=\int_r^\infty \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_r^{R_2}\boldsymbol{E}_2\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}+\int_{R_2}^\infty \boldsymbol{E}_3\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

$r>R_2$ 时： $$V_3=\int_r^\infty \boldsymbol{E}_3\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

也可以从球面电势的叠加求电势的分布.在导体球内（$r<R_1$）

$$V_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

在导体球和球壳之间（$R_1<r<R_2$）

$$V_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

在球壳外（$r>R_2$）

$$V_3=\frac{Q+q}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

由题意

$$V_1=V_0=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R_2}$$

得
$$q=4\pi\varepsilon_0R_1V_0-\frac{R_1}{R_2}Q$$
把上式代入电场、电势的分布，于是可得

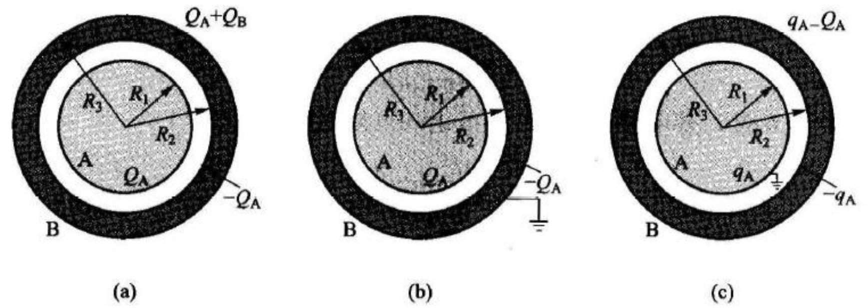
$r<R_1$ 时，
$$E_1=0;V_1=V_0$$
$R_1<r<R_2$ 时，
$$E_2=\frac{R_1V_0}{r^2}-\frac{R_1Q}{4\pi\varepsilon_0R_2r^2};V_2=\frac{R_1V_0}{r}+\frac{(r-R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0R_2r}$$
$r>R_2$ 时，
$$E_3=\frac{R_1V_0}{r^2}+\frac{(R_2-R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0R_2r^2};V_3=\frac{R_1V_0}{r}+\frac{(R_2-R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0R_2r}$$

6-10 如图所示，在一个半径为 $R_1=6.0$ cm 的金属球 A 外面套一个同心的金属球壳 B.已知球壳 B 的内、外半径分别为 $R_2=8.0$ cm，$R_3=10.0$ cm.设球 A 带有总电荷 $Q_A=3.0\times10^{-8}$ C，球壳 B 带有总电荷 $Q_B=2.0\times10^{-8}$C.(1) 求球壳 B 内、外表面上所带的电荷以及球 A 和球壳 B 的电势；*(2) 将球壳 B 接地然后断开，再把金属球 A 接地，求金属球 A 和球壳 B 内、外表面上所带的电荷以及球 A 和球壳 B 的电势.

分析 (1) 根据静电感应和静电平衡时导体表面电荷分布的规律，电荷 Q_A 均匀分布在球 A 表面，球壳 B 内表面带电荷$-Q_A$，外表面带电荷 Q_B+Q_A，电荷在导体表面均匀分布[图(a)]，由带电球面电势的叠加可求得球 A 和球壳 B 的电势.

(2) 导体接地，表明导体与大地等电势(大地电势通常取为零).球壳 B 接地后，外表面的电荷与从大地流入的负电荷中和，球壳内表面带电荷 $-Q_A$[图(b)].

断开球壳 B 的接地后，再将球 A 接地，此时球 A 的电势为零.电势的变化必将引起电荷的重新分布，以保持导体的静电平衡.不失一般性可设此时球 A 带电荷 q_A，根据静电平衡时导体上电荷的分布规律，可知球壳 B 内表面感应$-q_A$，外表面带电荷 q_A-Q_A[图(c)].此时球 A 的电势可表示为



题 6-10 图

$$V_A=\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0R_1}+\frac{-q_A}{4\pi\varepsilon_0R_2}+\frac{q_A-Q_A}{4\pi\varepsilon_0R_3}$$
由 $V_A=0$ 可解出球 A 所带的电荷 q_A，再由带电球面电势的叠加，可求出球 A 和球壳 B 的电势.

解 (1) 由分析可知,球 A 的外表面带电荷 3.0×10^{-8} C,球壳 B 内表面带电荷 -3.0×10^{-8} C,外表面带电荷 5.0×10^{-8} C.由电势的叠加,球 A 和球壳 B 的电势分别为

$$V_A=\frac{Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-Q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=5.6\times10^3\ \text{V}$$

$$V_B=\frac{Q_A+Q_B}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=4.5\times10^3\ \text{V}$$

(2) 将球壳 B 接地后断开,再把球 A 接地,设球 A 带电荷 q_A,球 A 和球壳 B 的电势为

$$V_A=\frac{q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_1}+\frac{-q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_2}+\frac{-Q_A+q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=0$$

$$V_B=\frac{-Q_A+q_A}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

解得

$$q_A=\frac{R_1R_2Q_A}{R_1R_2+R_2R_3-R_1R_3}=2.1\times10^{-8}\ \text{C}$$

即球 A 外表面带电荷 2.1×10^{-8} C,由分析可推得球壳 B 内表面带电荷 -2.1×10^{-8} C,外表面带电荷 -0.9×10^{-8} C.另外球 A 和球壳 B 的电势分别为

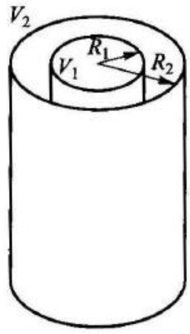
$$V_A=0$$

$$V_B=-7.9\times10^2\ \text{V}$$

导体的接地使各导体的电势分布发生变化,打破了原有的静电平衡,导体表面的电荷将重新分布,以建立新的静电平衡.

6-11 同轴传输线由长直圆柱形导线和同轴的导体圆筒构成,导线的半径为 R_1,电势为 V_1,圆筒的半径为 R_2,电势为 V_2,如图所示.试求它们之间距离轴线 r 处($R_1<r<R_2$)的电场强度.

分析 首先假设长直圆柱形导线单位长度带电荷 λ,同轴的导体圆筒内表面带电荷 $-\lambda$,由于电荷轴对称分布,电场分布同样轴对称,电场强度必定沿径向.可以借助高斯定理求电场强度分布,并进一步由电势差 V_1-V_2 解出单位长度所带电荷 λ 和长直圆柱形导线和导体圆筒间的电场强度.



题 6-11 图

解 假设长直圆柱形导线单位长度带电荷 λ,由分析知电场分布轴对称,电场强度沿径向.作同轴圆柱面为高斯面($R_1<r<R_2$),由高斯定理

$$\oint_S \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=2\pi rLE=\frac{1}{\varepsilon_0}\lambda L$$

$$E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

由电势差的定义

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}\mathrm{d}r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{R_2}{R_1}$$

解得

$$\lambda = \frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln(R_2/R_1)}(V_1 - V_2)$$

代入得长直圆柱形导线和导体圆筒间的电场强度

$$E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} = \frac{V_1 - V_2}{r\ln(R_2/R_1)}$$

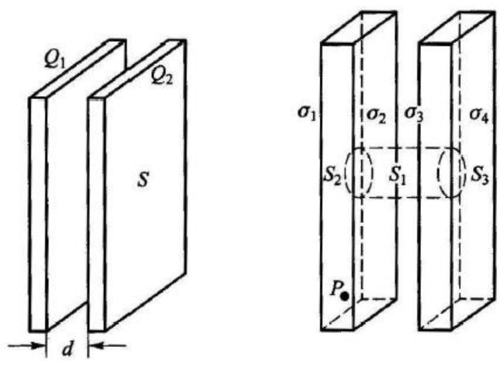
6-13 如图(a)所示,两块分别带电荷为 Q_1、Q_2 的导体平板平行相对放置,假设导体平板面积为 S,两块导体平板间距为 d,并且 $\sqrt{S} \gg d$.试证明:(1) 相向的两面,电荷面密度大小相等符号相反;(2) 相背的两面,电荷面密度大小相等符号相同.

分析 导体平板间距 $d \ll \sqrt{S}$,忽略边缘效应,导体板近似可以当作无限大带电平板处理.取如图(b)所示的圆柱面为高斯面,高斯面的侧面与电场强度 $\boldsymbol{E}$ 平行,侧面的电场强度通量为零;高斯面的两个端面在导体内部,因静电平衡时导体内电场强度为零,因而端面的电场强度通量同样为零,由高斯定理

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q/\varepsilon_0 = 0$$

得

$$\sum q = 0$$



(a) (b)

上式表明处于静电平衡的平行导体板,相对的两个面带等量异号电荷.

再利用叠加原理,导体板上四个带电面在导体内任意一点激发的合电场强度必须为零,因而平行导体板外侧两个面带等量同号电荷.

证 (1) 设两块导体平板表面的电荷面密度分别为 σ_1、σ_2、σ_3、σ_4,取如图(b)所示的圆柱面为高斯面,高斯面由侧面 S_1 和两个端面 S_2、S_3 构成,由分析可知

$$\oint \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \sum q/\varepsilon_0 = 0$$

$$\sum q = \sigma_2 \Delta S + \sigma_3 \Delta S = 0$$

$$\sigma_2 + \sigma_3 = 0$$

两块导体板相向的两面电荷面密度大小相等符号相反.

（2）由电场的叠加原理，导体内点 P 的电场强度为

$$\frac{\sigma_1}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_2}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_3}{2\varepsilon_0}-\frac{\sigma_4}{2\varepsilon_0}=0$$

$$\sigma_1-\sigma_4=0$$

两块导体板相背的两面电荷面密度大小相等符号相同.

6-14 将带电荷为 Q 的导体板 A 从远处移至不带电的导体板 B 附近［如图(a)所示］，两导体板几何形状完全相同，面积均为 S，移近后两导体板距离为 $d(d\ll\sqrt{S})$.（1）忽略边缘效应，求两导体板间的电势差；（2）若将 B 接地，结果又将如何？

分析 由习题 6-13 可知，导体板达到静电平衡时，相对的两个面带等量异号电荷；相背的两个面带等量同号电荷.再由电荷守恒可以求出导体各表面的电荷分布，进一步求出电场分布和导体的电势差.

导体板 B 接地后电势为零，B 的外侧表面不带电，根据导体板相背的两个面带等量同号电荷可知，A 的外侧表面也不再带电，由电荷守恒可以求出导体各表面的电荷分布，进一步求出电场分布和导体的电势差.

解 （1）如图(b)所示，依照题意和导体板达到静电平衡时的电荷分布规律

$$(\sigma_1+\sigma_2)S=Q$$

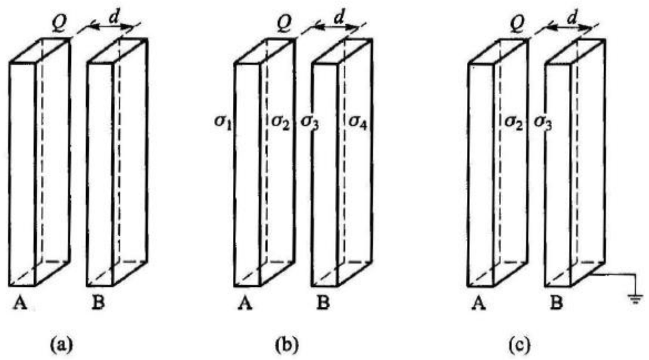
$$(\sigma_3+\sigma_4)S=0$$

$$\sigma_1-\sigma_4=0$$

$$\sigma_2+\sigma_3=0$$

解得

$$\sigma_1=\sigma_2=-\sigma_3=\sigma_4=\frac{Q}{2S}$$



题 6-14 图

两导体板间电场强度为

$$E=\frac{\sigma_2}{\varepsilon_0}=\frac{Q}{2\varepsilon_0 S}$$

方向为由 A 指向 B.两导体板间的电势差为

$$U_{AB}=Ed=\frac{Qd}{2\varepsilon_0 S}$$

(2) 如图(c)所示,导体板 B 接地后电势为零,则

$$\sigma_1' = \sigma_4' = 0$$

$$\sigma_2' = -\sigma_3' = \frac{Q}{S}$$

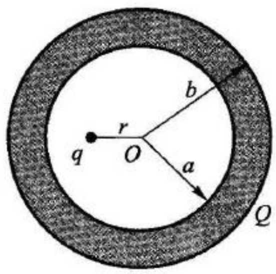
两导体板间电场强度为

$$E' = \frac{\sigma_2'}{\varepsilon_0} = \frac{Q}{\varepsilon_0 S}$$

方向为由 A 指向 B.两导体板间的电势差为

$$U_{AB}' = E'd = \frac{Qd}{\varepsilon_0 S}$$

6-15 如图所示,球形金属腔带电荷为 $Q(Q>0)$,内半径为 a,外半径为 b,腔内距球心 O 为 r 处有一点电荷 q,求球心的电势.



题 6-15 图

分析 导体球达到静电平衡时,内表面感应电荷 $-q$,外表面感应电荷 q;内表面感应电荷分布不均匀,外表面感应电荷均匀分布.球心 O 点的电势由点电荷 q、导体表面的电荷共同决定.

设在半径为 R 带电荷 q 的任意带电球面上任意取一电荷元,电荷元在球心产生的电势

$$\mathrm{d}V = \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

由于 R 为常量,因而无论球面电荷如何分布,半径为 R 的带电球面在球心产生的电势为

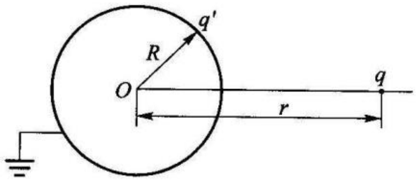
$$V = \int_S \frac{\mathrm{d}q}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

由带电球面和点电荷电势的叠加可以求得球心的电势.

解 导体球内表面感应电荷 $-q$,外表面感应电荷 q;依照分析,球心的电势为

$$V = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} - \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a} + \frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 b}$$

6-16 如图所示,在真空中将半径为 R 的金属球接地,在与球心 O 相距为 $r(r>R)$ 处放置一点电荷 q,不计接地导线上电荷的影响,求金属球表面上的感应电荷.



题 6-16 图

分析 静电感应使得接地的导体球邻近点电荷一侧产生异号感应电荷,感应电荷分布在导体球表面,它和点电荷 q 在球体内任意点激发的电势为零,借助这一关系可以求出导体球表面的感应电荷.

解 在导体球表面取电荷元 $dq=\sigma dS$,感应电荷在球心一点产生的电势

$$V'=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_S \sigma dS$$

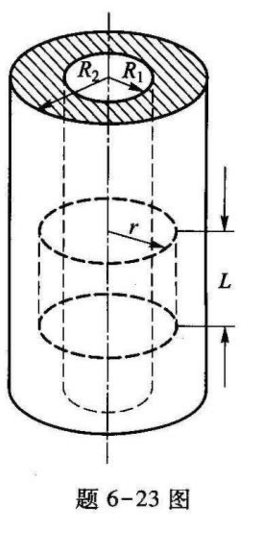
尽管导体球表面的感应电荷分布不均匀,但 $\int_S \sigma dS=q'$, q'为感应电荷.

由电势的叠加原理,球心一点的电势为

$$V=\frac{q'}{4\pi\varepsilon_0 R}+\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}=0$$

解得
$$q'=-\frac{R}{r}q$$

6-23 盖革-米勒管可用来测量电离辐射.该管的基本结构如图所示,半径为 R_1 的长直导线作为一个电极,半径为 R_2 的同轴圆柱筒作为另一个电极.它们之间充以相对电容率 $\varepsilon_r\approx 1$ 的气体.当电离粒子通过气体时,能使其电离.当两极间有电势差时,极板间有电流,从而可测出电离粒子的数量.以 E_1 表示半径为 R_1 的长直导线附近的电场强度.(1) 求极板间电势的关系式;(2) 若 $E_1=2.0\times10^6\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$, $R_1=0.30\ \mathrm{mm}$, $R_2=20.0\ \mathrm{mm}$,则两极板间的电势差为多少?



题 6-23 图

解 (1) 利用高斯定理可得 $E\cdot 2\pi rL=\frac{1}{\varepsilon_0}\lambda L$,则两极板间的电场强度为 $E=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}$,导线表面($r=R_1$)的电场强度为

$$E_1=\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 R_1}$$

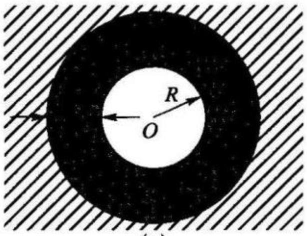
解得 $\lambda=2\pi\varepsilon_0 R_1 E_1$.两极板间的电势差为

$$U=\int_{R_1}^{R_2}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r}dr=R_1E_1\ln\frac{R_2}{R_1}$$

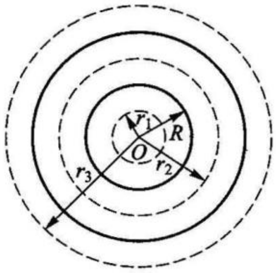
(2) 将 $E_1=2.0\times10^6\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$, $R_1=0.30\ \mathrm{mm}$, $R_2=20.0\ \mathrm{mm}$ 代入,得

$$U=2.52\times10^3\ \mathrm{V}$$

6-25 如图所示，半径 $R=0.10\ \mathrm{m}$ 的导体球带有电荷 $Q=1.0\times10^{-8}\ \mathrm{C}$，导体球外有两层均匀介质，一层介质的 $\varepsilon_r=5.0$，厚度 $d=0.10\ \mathrm{m}$，另一层介质为空气，充满其余空间．求：(1) 离球心为 $r=5\ \mathrm{cm}, 15\ \mathrm{cm}, 25\ \mathrm{cm}$ 处的电位移 $\boldsymbol{D}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$；(2) 离球心为 $r=5\ \mathrm{cm}, 15\ \mathrm{cm}, 25\ \mathrm{cm}$ 处的电势；(3) 极化电荷面密度．



(a)



(b)

题 6-25 图

分析 带电球上的自由电荷均匀分布在导体球表面，电介质的极化电荷也均匀分布在介质与导体球的界面上，因而介质中的电场球对称分布．

任取同心球面为高斯面，电位移 $\boldsymbol{D}$ 的通量只与自由电荷分布有关，因此在高斯面上 $\boldsymbol{D}$ 呈均匀对称分布，由高斯定理 $\oint \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\sum q_0$ 可得 $\boldsymbol{D}(r)$，再由 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{D}/\varepsilon_0\varepsilon_r$ 可得 $\boldsymbol{E}(r)$．

由电势和电场强度的积分关系 $V=\int_r^{\infty}\boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 求得介质内电势的分布，或者由电势叠加原理求得电势的分布．

极化电荷分布在均匀介质的表面，极化电荷面密度 $|\sigma'|=P_n$．

解 (1) 取半径为 r 的同心球面为高斯面，由高斯定理得

$r<R$：
$$D_1\cdot 4\pi r^2=0$$
解得
$$D_1=0;\quad E_1=0$$

$R<r<R+d$：
$$D_2\cdot 4\pi r^2=Q$$
解得
$$D_2=\frac{Q}{4\pi r^2};\quad E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r^2}$$

$r>R+d$：
$$D_3\cdot 4\pi r^2=Q$$
解得
$$D_3=\frac{Q}{4\pi r^2};\quad E_3=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

将不同的 r 值代入上述公式，可得 $r=5\ \mathrm{cm}, 15\ \mathrm{cm}, 25\ \mathrm{cm}$ 时的电位移和电场强度的大小，其方向均沿径向朝外．

$r_1=5\ \mathrm{cm}$，该点在导体球内，则
$$D_1=0;E_1=0$$
$r_2=15\ \mathrm{cm}$，该点在介质层内，$\varepsilon_r=5.0$，则
$$D_2=\frac{Q}{4\pi r_2^2}=3.5\times10^{-8}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$$
$$E_2=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_2^2}=8.0\times10^{2}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$$
$r_3=25\ \mathrm{cm}$，该点在空气层内，空气中 $\varepsilon\approx\varepsilon_0$，则
$$D_3=\frac{Q}{4\pi r_3^2}=1.3\times10^{-8}\ \mathrm{C\cdot m^{-2}}$$
$$E_3=\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_3^2}=1.4\times10^{3}\ \mathrm{V\cdot m^{-1}}$$

(2) 取无穷远处电势为零，由电势与电场强度的积分关系得

$$r_3 = 25\ \text{cm}, V_3 = \int_{r_3}^{\infty} \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r_3} = 360\ \text{V}$$

$$r_2 = 15\ \text{cm}, V_2 = \int_{r_2}^{R+d} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{R+d}^{\infty} \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r r_2} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(R+d)} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R+d)} = 480\ \text{V}$$

$$r_1 = 5\ \text{cm}, V_1 = \int_{R}^{R+d} \boldsymbol{E}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{R+d}^{\infty} \boldsymbol{E}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r R} - \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0\varepsilon_r(R+d)} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0(R+d)} = 540\ \text{V}$$

(3) 均匀介质的极化电荷分布在介质界面上，因空气的电容率 $\varepsilon=\varepsilon_0$，极化

电荷可忽略.故在介质外表面

$$P_n = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_n = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r(R+d)^2}$$

$$\sigma = P_n = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r(R+d)^2} = 1.6\times10^{-8}\ \text{C}\cdot\text{m}^{-2}$$

在介质内表面

$$P_n' = (\varepsilon_r - 1)\varepsilon_0 E_n' = \frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r R^2}$$

$$\sigma' = -P_n' = -\frac{(\varepsilon_r - 1)Q}{4\pi\varepsilon_r R^2} = -6.4\times10^{-8}\ \text{C}\cdot\text{m}^{-2}$$

介质球壳内、外表面的极化电荷面密度虽然不同，但是两表面极化电荷的总量还是等量异号.

6-27 一个平板电容器充电后，极板上电荷面密度为 $\sigma_0 = 4.5\times10^{-3}\ \text{C}\cdot\text{m}^{-2}$，现将两极板与电源断开，然后再把相对电容率为 $\varepsilon_r = 2.0$ 的电介质插入两极板之间.此时电介质中的电位移 $\boldsymbol{D}$、电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和极化强度 $\boldsymbol{P}$ 各为多少？

分析 平板电容器充电后两极板与电源断开，由电荷守恒，插入电介质过程中电容器极板上的电荷保持不变，极板间为均匀电场，依照介质中的高斯定理，可以求得电位移 $\boldsymbol{D}$，进一步由电位移 $\boldsymbol{D}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 及极化强度 $\boldsymbol{P}$ 的关系求出各量.

解 极板间为均匀电场，由介质中的高斯定理可得

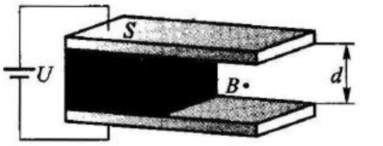
$$D = \sigma_0 = 4.5\times10^{-3}\ \text{C}\cdot\text{m}^{-2}$$

由介质中电位移 $\boldsymbol{D}$ 和电场强度 $\boldsymbol{E}$ 及极化强度 $\boldsymbol{P}$ 的关系得

$$E = \frac{D}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0\varepsilon_r} = 2.5\times10^{8}\ \text{V}\cdot\text{m}^{-1}$$

$$P = \varepsilon_0(\varepsilon_r - 1)E = \left(1 - \frac{1}{\varepsilon_r}\right)\sigma_0 = 2.3\times10^{-3}\ \text{C}\cdot\text{m}^{-2}$$

6-28 两块面积为 S 的导体板构成一平板电容器，导体极板间距离为 d.将平板电容器两极板接到电压为 U 的电源上，接通电源后在导体极板间的一半插入电容率为 ε 的电介质，如图所示，略去边缘效应.(1) 试比较 A、B 两点的电场强度各为未插入电介质时的多少倍？(2) 假如电容器充满电后，先断开电源，再在导体极板间的一半插入电介质，则结果又将如何？



题 6-28 图

分析 (1) 电容器在两极板间插入电介质过程中保持和电源连接，导体板间的电势差保持不变，因而 $E=E_0=U/d$.

(2) 电容器充满电后，导体板上的电荷为

$$Q_0=CU=\frac{\varepsilon_0 SU}{d}$$

断开电源再插入电介质，电容器两极板上的电荷保持不变，由于导体板是等势体，因而介质内(A 区)、外(B 区)的电场强度必定相等，导体板上电荷分布不均等.设导体板 A、B 区电荷面密度分别为 σ_A、σ_B，则

$$D_A=\sigma_A,\quad D_B=\sigma_B$$

$$E'_A=\frac{D_A}{\varepsilon}=\frac{\sigma_A}{\varepsilon},\quad E'_B=\frac{D_B}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_B}{\varepsilon_0}$$

再利用电荷守恒关系

$$\sigma_A\frac{S}{2}+\sigma_B\frac{S}{2}=Q_0$$

解出 A、B 区电场强度.

解 (1) 插入电介质过程中保持和电源连接，有

$$E_A=E_B=\frac{U}{d}=E_0$$

(2) 电容器充满电后，导体板上的电荷为

$$Q_0=CU=\frac{\varepsilon_0 SU}{d}$$

断开电源插入电介质后电容器两极板上的总电荷量保持不变，设导体板 A、B 区电荷面密度分别为 σ_A、σ_B，由介质中的高斯定理可得

$$D_A=\sigma_A,\quad D_B=\sigma_B$$

介质内(A 区)、外(B 区)的电场强度相等，导体板上电荷分布不相等.

$$E'_A=\frac{D_A}{\varepsilon}=\frac{\sigma_A}{\varepsilon},\quad E'_B=\frac{D_B}{\varepsilon_0}=\frac{\sigma_B}{\varepsilon_0},\quad E'_A=E'_B$$

由于导体板上的电荷在插入电介质前后守恒

$$\sigma_A\frac{S}{2}+\sigma_B\frac{S}{2}=Q_0$$

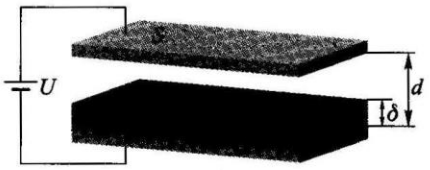
$$\varepsilon E'_A\frac{S}{2}+\varepsilon_0 E'_B\frac{S}{2}=\frac{\varepsilon_0 SU}{d}$$

解出 A、B 区电场强度

$$E'_A=E'_B=\frac{2\varepsilon_0 U}{d(\varepsilon+\varepsilon_0)}$$

比较未插入介质时的电场强度 E_0，显然有 $E'_A=E'_B=\dfrac{2\varepsilon_0}{\varepsilon+\varepsilon_0}E_0$.

6-29 如图所示，一个空气平板电容器的极板面积为 S，间距为 d.现将该电容器接到电压为 U 的电源上充电，当(1) 充足电后，(2) 然后平行插入一块面积相同、厚度为 $\delta(\delta<d)$、相对电容率为 ε_r 的电介质板，(3) 将上述电介质换为同样大小的导体板时，分别求极板上的电荷 Q、极板间的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 和电容器的电容 C.



题 6-29 图

分析 (1) 电容器充电后依据已知条件可以直接求得平板电容器电容、电容器极板上电荷以及极板间的电场强度；

(2) 插入电介质板后，电容器极板间的电势差保持不变，不妨假设此时电容器极板上电荷为 Q'，由介质中的高斯定理可得

$$D'=\sigma'=\frac{Q'}{S}$$

由电位移矢量和电场强度间的关系得，真空和介质中的电场强度分别为

$$E'=\frac{D'}{\varepsilon_0\varepsilon_r}=\frac{Q'}{S\varepsilon_0\varepsilon_r},\quad E'_0=\frac{D'}{\varepsilon_0}=\frac{Q'}{S\varepsilon_0}$$

利用极板间的电势差 $U=E'\delta+E'_0(d-\delta)$ 可以解得极板上的电荷 Q' 和极板间的电场强度 E'、E'_0.由电容器电容的定义可以求得电容器电容

$$C=\frac{Q'}{U}$$

间的电势差保持不变，不妨假设此时电容器极板上电荷为 Q''，由高斯定理可得真空中的电场强度为

$$E''=\frac{U}{d-\delta}=\frac{Q''}{S\varepsilon_0}$$

由上式解得极板上的电荷 Q''.由电容器电容的定义可以求得电容器电容

$$C=\frac{Q''}{U}$$

解 (1) 平板电容器的电容为 $C=\dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$，充电至电势差为 U 后，极板间的电场强度和极板上的电荷分别为

$$E=\frac{U}{d},\quad Q=CU=\frac{\varepsilon_0 SU}{d}$$

(2) 插入电介质板后，电容器极板间的电势差保持不变，假设此时电容器极板上电荷为 Q'，由介质中的高斯定理可得

$$D' = \sigma' = \frac{Q'}{S}$$

$$E' = \frac{D'}{\varepsilon_0 \varepsilon_r} = \frac{Q'}{S\varepsilon_0 \varepsilon_r}, E'_0 = \frac{D'}{\varepsilon_0} = \frac{Q'}{S\varepsilon_0}$$

$$U = \frac{Q'}{S\varepsilon_0 \varepsilon_r}\delta + \frac{Q'}{S\varepsilon_0}(d-\delta)$$

解得

$$Q' = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r SU}{\delta + \varepsilon_r(d-\delta)}$$

$$E' = \frac{U}{\delta + \varepsilon_r(d-\delta)}, \quad E'_0 = \frac{\varepsilon_r U}{\delta + \varepsilon_r(d-\delta)}$$

$$C = \frac{Q'}{U} = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon_r S}{\delta + \varepsilon_r(d-\delta)}$$

（3）假如插入导体板，导体板内电场强度为零，假设此时电容器极板上电荷为 Q''，真空中的电场强度为

$$E'' = \frac{U}{d-\delta}$$

由高斯定理可得

$$E'' = \frac{Q''}{S\varepsilon_0}$$

解得

$$Q'' = \varepsilon_0 S E'' = \frac{\varepsilon_0 SU}{d-\delta}$$

$$C = \frac{Q''}{U} = \frac{\varepsilon_0 S}{d-\delta}$$

B 类计算题

1、 证明：因为两球相距甚远，半径为 R 的导体球在半径为 r 的导体球上产生的电势忽略不计，半径为 r 的导体球在半径为 R 的导体球上产生的电势忽略不计，所以

半径为 R 的导体球的电势为

$$V_1 = \frac{\sigma_1 \pi R^2}{4\pi\varepsilon_0 R} = \frac{\sigma_1 R}{4\varepsilon_0}$$

半径为 r 的导体球的电势为

$$V_2 = \frac{\sigma_2 \pi r^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{\sigma_2 r}{4\varepsilon_0}$$

用细导线连接两球，有 $V_1 = V_2$，所以

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{r}{R}$$

2、解：电场具有球对称分布，以r为半径作同心球面为高斯面。由介质中的高斯定理得

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = D \cdot 4\pi r^2 = \Sigma q_i$$

当$r < R$时，$\Sigma q_i = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi r^3$，所以

$$D = \frac{\rho r}{3}，\ E_1 = \frac{D}{\varepsilon_1} = \frac{\rho r}{3\varepsilon_1}$$

当$r > R$时，$\Sigma q_i = \rho \cdot \frac{4}{3}\pi R^3$，所以

$$D = \frac{\rho R^3}{3r^2}，\ E_2 = \frac{D}{\varepsilon_2} = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_2 r^2}$$

球内（$r \le R$）电势为

$$V_1 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^R \frac{\rho r}{3\varepsilon_1} dr + \int_R^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_2 r^2} dr$$

$$= \frac{\rho}{6\varepsilon_1}(R^2 - r^2) + \frac{\rho R^2}{3\varepsilon_2}$$

球外（$r > R$）电势为

$$V_2 = \int_r^\infty \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_r^\infty \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_2 r^2} dr = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_2 r}$$

3、解：内外导体间的电势差满足下面关系

$$U = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) \qquad ①$$

内球表面附近的电场强度可表示为

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 a^2} \qquad ②$$

把①代入②得

$$E = \frac{U}{\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)a^2} = \frac{bU}{ab - a^2} \qquad ③$$

把③对a求导数并令其等于零

$$\frac{dE}{da}=\frac{d}{da}\left(\frac{bU}{ab-a^2}\right)=\frac{bU(2a-b)}{(ab-a^2)^2}=0$$

解得

$$a=\frac{b}{2}$$

所以，当 $a=b/2$ 时，内球表附近的电场强度最小；这个最小电场强度的大小为

$$E_{\min}=\frac{bU}{ab-a^2}=\frac{bU}{b^2/2-b^2/4}=\frac{4U}{b}$$

4、解：（1）应用均匀带电球面产生的电势公式和电势叠加原理求解。

半径为 R 、带电量为 q 的均匀带电球面产生的电势分布为

$$V=\begin{cases}\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} & (r\le R)\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} & (r>R)\end{cases}$$

导体球外表面均匀带电 q ；导体球壳内表面均匀带电 $-q$ ，外表面均匀带电 $q+Q$ ，由电势叠加原理知，空间任一点的电势等于导体球外表面、导体球壳内表面和外表面电荷在该点产生的电势的代数和。

导体球是等势体，其上任一点电势为

$$V_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{q}{R_1}-\frac{q}{R_2}+\frac{q+Q}{R_3}\right)$$

球壳是等势体，其上任一点电势为

$$V_2=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{-q}{4\pi\varepsilon_0 r}+\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=\frac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}$$

（2）球壳接地 $V_2=\dfrac{q+Q}{4\pi\varepsilon_0 R_3}=0$ ，表明球壳外表面电荷 $q+Q$ 入地，球壳外表面不带电，导体球外表面、球壳内表面电量不变，所以

$$V_1=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)$$

（3）导体球接地 $V_1=0$ ，设导体球表面的感应电荷为 q' ，则球壳内表面均匀带电 $-q'$ 、

外表面均匀带电$q'+Q$，所以

$$V_1=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}(\frac{q'}{R_1}-\frac{q'}{R_2}+\frac{q'+Q}{R_3})=0$$

解得 $$q'=-\frac{R_1R_2Q}{R_2R_3-R_1R_3+R_1R_2}$$

$$V_2=\frac{q'+Q}{4\pi\varepsilon_0R_3}=\frac{(R_2-R_1)Q}{4\pi\varepsilon_0(R_2R_3-R_1R_3+R_1R_2)}$$

5、解：由于电源保持连接，所以在把两个极板间距拉大的过程中，外力与电源共同对系统作功，拉大的过程所满足的功能关系应为

$$A_{外}+A_{电源}=\Delta W_e$$

我们只要算出系数能量的增量ΔW_e和电源作的功$A_{电源}$就能求得外力的功$A_{外}$。

解：因为保持与电源连接，因而两极间的电势差U不变。由于在极板间距拉大的过程中，电容器的电容从

$$C=\frac{\varepsilon_0S}{d}$$

变到 $$C'=\frac{\varepsilon_0S}{nd}=\frac{C}{n}$$

所以电容器能量的增量为

$$\Delta W_e=W'-W=\frac{1}{2}C'U^2-\frac{1}{2}CU^2=\frac{1}{2}CU^2(\frac{1}{n}-1)<0$$

在极板间距拉大的过程中，电容器上带电从Q变到Q'，电源所作的功为

$$A_{电源}=(Q'-Q)U=(C'U-CU)U=CU^2(\frac{1}{n}-1)<0$$

由功能关系

$$A_{外}+A_{电源}=\Delta W_e$$

可得外力所作的功为

$$A_{外}=\Delta W_e-A_{电源}=\frac{1}{2}CU^2(\frac{1}{n}-1)-CU^2(\frac{1}{n}-1)=\frac{1}{2}CU^2(1-\frac{1}{n})>0$$