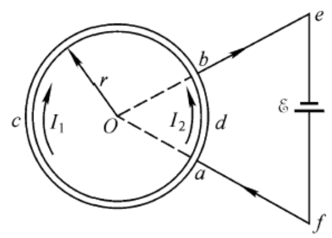
第七章 恒定磁场 作业

A类计算题（教材P314~P320）：

7 －10

如图所示，有两根导线沿半径方向接触铁环的a、b 两点，并与很远处的电源相接。求环心 O 的磁感强度.

分析 根据叠加原理,点 O 的磁感强度可视作$\overline{ef}$、$\overline{be}$、$\overline{fa}$三段直线以及$\overset{\frown}{acb}$、$\overset{\frown}{adb}$两段圆弧电流共同激发.由于电源距环较远,$B_{ef}=0$.而$\overline{be}$、$\overline{fa}$两段直线的延长线通过点 O,$I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}=0$,由毕奥－萨伐尔定律知,$B_{be}=B_{fa}=0$,流过圆弧的电流 I_1、I_2的方向如图所示,两圆弧在点 O 激发的磁场分别为



$$B_1=\frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi R^2},B_2=\frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi R^2}$$

其中 l_1、l_2分别为两段圆弧$\overset{\frown}{acb}$、$\overset{\frown}{adb}$弧线的长度,由于导线电阻 R 和弧线长度成正比,而圆弧$\overset{\frown}{acb}$、$\overset{\frown}{adb}$又构成并联电路,故有

$$I_1 l_1=I_2 l_2$$

将 $\boldsymbol{B}_1$、$\boldsymbol{B}_2$ 叠加,可得点 O 的磁感强度 $\boldsymbol{B}$.

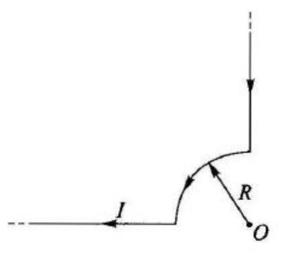
解 由上述分析可知,点 O 的磁感强度大小为

$$B=B_1-B_2=\frac{\mu_0 I_1 l_1}{4\pi R^2}-\frac{\mu_0 I_2 l_2}{4\pi R^2}=0$$

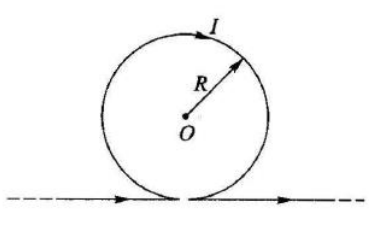
7 －11

7-11 如图所示,几种载流导线在平面内分布,电流均为 I,它们在点 O 的磁感强度各为多少?

分析 应用磁场叠加原理求解,将不同形状的载流导线分解成长直部分和圆弧部分,它们各自在点 O 处所激发的磁感强度较容易求得,则总的磁感强度应该为每一段载流导线激发磁感强度的矢量和.



(a)



解 (a) 长直载流导线对点 O 而言,有 $I\mathrm{d}\boldsymbol{l}\times\boldsymbol{r}=0$,因此它在点 O 产生的磁场为零,则点 O 处总的磁感强度为 1/4 圆弧电流所激发,故有

$$B_O=\frac{\mu_0 I}{8R}$$

磁场的方向垂直纸面朝外.

（b）将载流导线分解为圆电流和无限长长直电流，由叠加原理可得

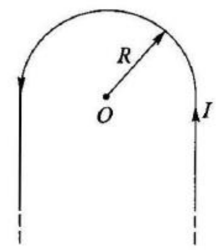
$$B_O=\frac{\mu_0 I}{2R}-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

磁场的方向垂直纸面朝里.

（c）将载流导线分解为 1/2 圆电流和两段半无限长长直电流，由叠加原理可得

$$B_O=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4R}=\frac{\mu_0 I}{2\pi R}+\frac{\mu_0 I}{4R}$$

(b)

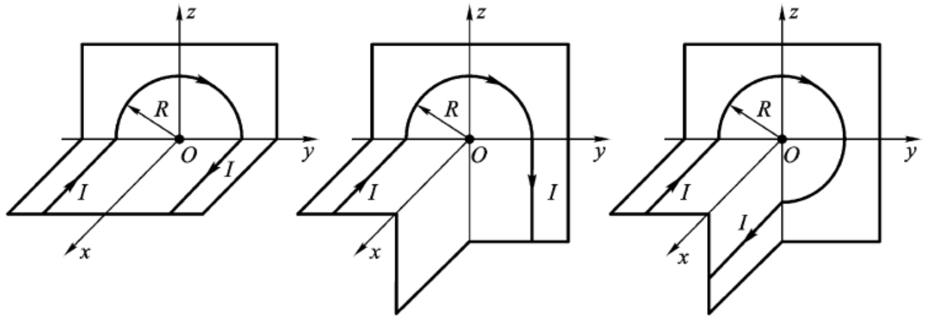


(c)

题 7-11 图

7 —12

载流导线形状如图所示（图中直线部分导线延伸到无穷远），求点O的磁感强度$\boldsymbol{B}$.



(a) (b) (c)

分析 由教材第 7-4 节例 2 可知，圆弧载流导线在圆心激发的磁感强度 $B=\frac{\mu_0 I\alpha}{4\pi R}$，其中 α 为圆弧载流导线所张的圆心角，磁感强度的方向依照右手螺旋定则确定；半无限长载流导线在圆心点 O 激发的磁感强度 $B=\frac{\mu_0 I}{4\pi R}$，磁感强度的方向依照右手螺旋定则确定.

点 O 的磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 可以视为由圆弧载流导线、半无限长载流导线等激发的磁场在空间点 O 的叠加.

解 根据磁场的叠加原理，有

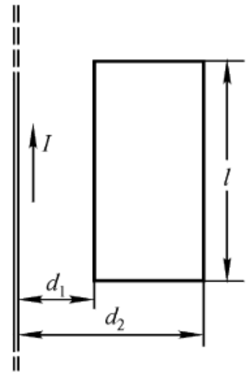
$$\boldsymbol{B}_a=-\frac{\mu_0 I}{4R}\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{k}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{k}=-\frac{\mu_0 I}{4R}\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{2\pi R}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{B}_b=-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{4R}\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{k}=-\frac{\mu_0 I}{4R}\left(\frac{1}{\pi}+1\right)\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{k}$$

$$\boldsymbol{B}_c=-\frac{3\mu_0 I}{8R}\boldsymbol{i}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{j}-\frac{\mu_0 I}{4\pi R}\boldsymbol{k}$$

7 －15

如图所示，载流长直导线的电流为I，试求通过矩形面积的磁通量.



分析　由于矩形平面上各点的磁感强度不同,故磁通量 $\Phi \neq BS$.为此,可在矩形平面上沿平行电流方向,取一细长的矩形面元 $\mathrm{d}S = l\mathrm{d}x$,如图(b)所示(请读者思考,为何不是垂直电流方向取面元).载流长直导线的磁场穿过该面元的磁通量为

$$\mathrm{d}\Phi = \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\mathrm{d}x$$

矩形平面的总磁通量为

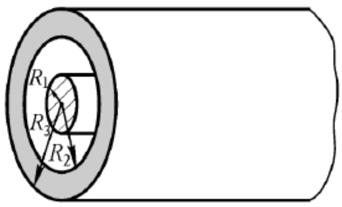
$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi$$

解　由上述分析可得矩形平面的总磁通量

$$\Phi = \int \mathrm{d}\Phi = \int_{d_1}^{d_2} \frac{\mu_0 I}{2\pi x} l\mathrm{d}x = \frac{\mu_0 I l}{2\pi} \ln\frac{d_2}{d_1}$$

7 －17

有一同轴电缆，其尺寸如图所示．两导体中的电流均为I，但电流的流向相反，导体的磁性可不考虑．试计算以下各处的磁感强度：（1） $r < R_1$ ；（2） $R_1 < r < R_2$ ；（3） $R_2 < r < R_3$ ；（4） $r > R_3$ ．画出$B－r$ 图线.



分析　同轴电缆导体内的电流均匀分布,其磁场呈轴对称,取半径为 r 的同心圆为积分路径,$\oint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = B\cdot 2\pi r$,利用安培环路定理

$$\oint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum I$$

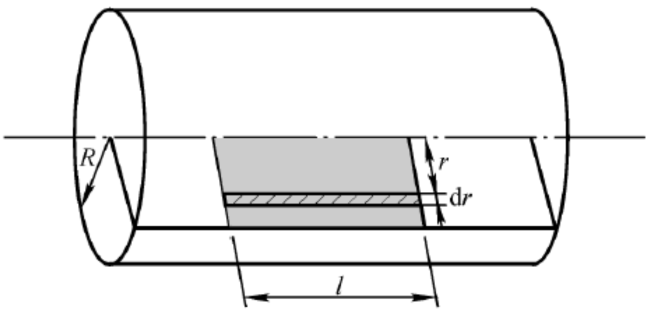
可以解得各区域的磁感强度.

解　由上述分析,利用安培环路定理 $\oint \boldsymbol{B}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \mu_0 \sum I$,得

$r<R_1$:
$$B_1 \cdot 2\pi r=\mu_0 \frac{I}{\pi R_1^2}\pi r^2$$
$$B_1=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R_1^2}$$
$R_1<r<R_2$:
$$B_2 \cdot 2\pi r=\mu_0 I$$
$$B_2=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$
$R_2<r<R_3$:
$$B_3 \cdot 2\pi r=\mu_0\left[I-\frac{\pi(r^2-R_2^2)}{\pi(R_3^2-R_2^2)}I\right]$$
$$B_3=\frac{\mu_0 I}{2\pi r}\cdot\frac{R_3^2-r^2}{R_3^2-R_2^2}$$
$r>R_3$:
$$B_4 \cdot 2\pi r=\mu_0(I-I)=0$$
$$B_4=0$$

7 －20

电流I 均匀地流过半径为R 的圆形长直导线，试计算单位长度导线内的磁场通过图中所示剖面的磁通量.

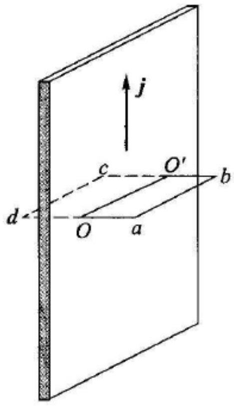


分析 由习题 7-16 可得导线内部距轴线为 r 处的磁感强度
$$B=\frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}$$
剖面上磁感强度分布不均匀，由磁通量的定义 $\Phi=\int \boldsymbol{B}(r)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$.沿轴线方向在剖面上取面元 $\mathrm{d}S=l\mathrm{d}r$，面元上各点 $\boldsymbol{B}$ 相同，穿过面元的磁通量 $\mathrm{d}\Phi=B\mathrm{d}S$，通过积分，可得单位长度($l=1$)导线内的磁通量
$$\Phi'=\int_S B\mathrm{d}r$$
解 由分析可得单位长度导线内的磁通量
$$\Phi'=\int_0^R \frac{\mu_0 Ir}{2\pi R^2}\mathrm{d}r=\frac{\mu_0 I}{4\pi}$$

7 －21

设电流均匀流过无限大导电平面，其面电流密度为j．求导电平面两侧的磁感强度．（提示：用安培环路定理求解．）

分析 依照右手螺旋定则，磁感强度 $\boldsymbol{B}$ 和电流面密度 $\boldsymbol{j}$ 相互垂直，由电流的面对称性分析，无限大电流平面两侧的磁感强度大小相等，方向相互平行反向，如图所示．在垂直电流的平面内对称取矩形回路 $abcd$，回路所在平面与导电平面相交于 OO'，且 $ab \parallel cd \parallel OO'$，$ad \perp OO'$，$cb \perp OO'$，$ab = cd = L$．根据磁场和电流面对称分布的特点，利用安培环路定理可以求得磁感强度的分布．



题 7-21 图

解 对如图所示的矩形回路 $abcd$，磁感强度沿回路的环路积分

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \int_{ab} \boldsymbol{B}_1 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{bc} \boldsymbol{B}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{cd} \boldsymbol{B}_3 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} + \int_{da} \boldsymbol{B}_4 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

由于磁场的对称分布，$B_1 = B_3 = B$，$\boldsymbol{B}_2 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \boldsymbol{B}_4 \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 0$，因而

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2BL$$

回路 $abcd$ 内包围的电流 $\sum I = jL$，根据安培环路定理，有

$$\oint_L \boldsymbol{B} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = 2BL = \mu_0 jL$$

解得导电平面两侧的磁感强度大小为

$$B = \frac{\mu_0 j}{2}$$

磁感强度的方向由电流的右手螺旋定则确定．

7 －24

将一根带电导线弯成半径为R的圆环，电荷线密度为$\lambda\,(\lambda > 0)$，圆环绕过圆心且与圆环面垂直的轴以角速度ω转动，求轴线上任一点的磁感强度．

分析 带电圆环绕过圆心且与圆环面垂直的轴以角速度 ω 转动，其等效圆电流为

$$i = \frac{2\pi R\lambda}{T}$$

上述等效圆电流在转动轴线上任一点激发的磁感强度为

$$B = \frac{\mu_0 R^2 i}{2\,(R^2 + x^2)^{3/2}}$$

代入可解得转动轴线上任一点的磁感强度．

解 转动的带电圆环其等效圆电流为

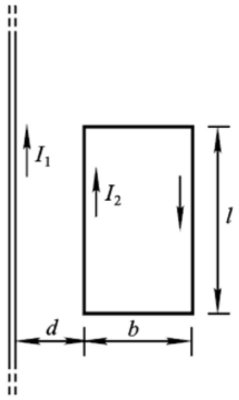
$$i=\frac{2\pi R\lambda}{2\pi/\omega}=R\lambda\omega$$

代入得圆环在轴线上任一点激发的磁感强度

$$B=\frac{\mu_0 R^2 i}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}=\frac{\mu_0 R^3\lambda\omega}{2\left(R^2+x^2\right)^{3/2}}$$

7 －37

如图所示，一根长直导线载有电流I_1 ＝30 A，矩形回路载有电流I_2 ＝20 A．试计算作用在回路上的合力．已知d ＝1.0 cm，b ＝8.0 cm，l ＝0.12 m．



分析 矩形上、下两端导线受安培力 $\boldsymbol{F}_1$ 和 $\boldsymbol{F}_2$ 的大小相等，方向相反，对不变形的矩形回路来说，两力的矢量和为零.而矩形的左右两段导线，由于载流导线所在处磁感强度不等，所受到的安培力 $\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$ 的大小不同，且方向相反，因此线框所受的力为这两个力的合力.

解 由分析可知，线框所受总的安培力为左、右两侧安培力 $\boldsymbol{F}_3$ 和 $\boldsymbol{F}_4$ 之矢量和，如图(b)所示，它们的大小分别为

$$F_3=\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d},\quad F_4=\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(d+b)}$$

合力的大小为

$$F=F_3-F_4=\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi d}-\frac{\mu_0 I_1 I_2 l}{2\pi(d+b)}=1.28\times10^{-3}\ \mathrm{N}$$

7 －40

在直径为1.0 cm 的铜棒上，切割下一个圆盘，设想这个圆盘的厚度只有一个原子线度那么大，这样在圆盘上约有6.2×10^{14} 个铜原子．每个铜原子有27 个电子，每个电子的自旋磁矩为$\mu_e=9.3\times10^{-24}\ \mathrm{A\cdot m^2}$．我们假设所有电子的自旋磁矩方向都相同，且平行于铜棒的轴线．求：（1） 圆盘的磁矩；（2） 如这磁矩是由圆盘上的电流产生的，那么圆盘边缘上需要有多大的电流．

解 (1) 因为所有电子的磁矩方向相同，则圆盘的磁矩为

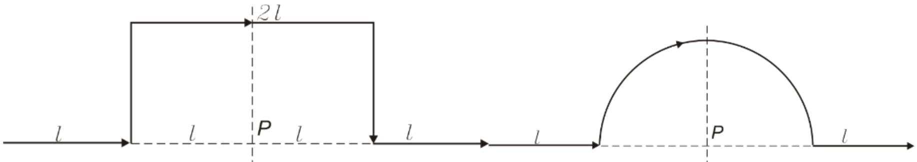
$$m=N\mu_e=1.56\times10^{-7}\ \mathrm{A\cdot m^{-2}}$$

(2) 由磁矩的定义，可得圆盘边缘等效电流

$$I=m/S=2.0\times10^{-3}\ \mathrm{A}$$

B 类计算题

1、一段导线先弯成图（*a*）所示形状，然后将同样长导线再弯成图（*b*）所示形状。在导线通以电流 *I* 后，求两个图形中 *P* 点磁感应强度之比。



(*a*)　　(*b*)

1、解：图中（*a*）可分解为 5 段电流。
处于同一直线的两段电流对 *P* 点的磁感应强度为零，其他三段在 *P* 点的磁感应强度方向相同。

长为 *l* 的两段在 *P* 点的磁感应强度为 $B_1 = \dfrac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}$

长为 2*l* 的一段在 *P* 点的磁感应强度为 $B_2 = \dfrac{\sqrt{2}\mu_0 I}{4\pi l}$

所以
$$B = B_2 + B_1 = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi l}$$

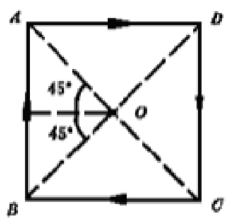
图（*b*）中可分解为 3 段电流。
处于同一直线的两段电流对 *P* 点的磁感应强度为零，半圆弧在 *P* 点的磁感应强度为

$$B_2' = \frac{\pi\mu_0 I}{16l}$$

所以
$$B' = B_2{}' = \frac{\pi\mu_0 I}{16l}$$

两个图形中 *P* 点的磁感应强度之比 $\dfrac{B}{B'} = \dfrac{8\sqrt{2}}{\pi^2}$

2、如图所示，一只正方形线圈 $\boldsymbol{ABCD}$，边长为 $\boldsymbol{a}$，通有电流 $\boldsymbol{I}$。求正方形中心 $\boldsymbol{O}$ 处磁感应强度的大小。



解：AB 段电流在 O 点产生的磁感应强度为：

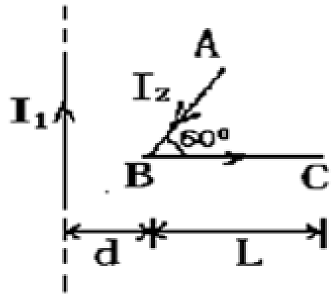
$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi\dfrac{a}{2}}[\sin 45° - \sin(-45°)] = \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{2\pi a}$$

方向垂直纸面向内。正方形各

边电流在 O 点产生的磁感应强度大小相等，方向相同。

所以 $$B_0 = 4B_1 = \frac{2\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi a}$$ 方向垂直纸面向内

3、如图，无限长载流直导线旁放置一与之共面的导线 $\boldsymbol{ABC}$，导线 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BC}$ 的长度相同。求：(1) 导线 $\boldsymbol{AB}$ 受到的安培力的大小和方向； (2) 导线 $\boldsymbol{BC}$ 受到的安培力的大小和方向。(方向在图中标出)



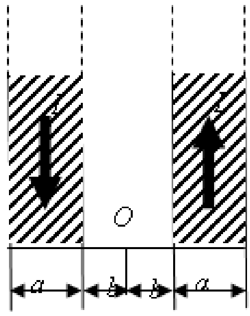
解：

（1） $dx = dl\cos 60°$ $\qquad dl = \frac{dx}{\cos 60°} = 2dx$

$$dF = BI_2 dl = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} 2dx \qquad F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\int_d^{d+\frac{L}{2}} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{\pi}\ln\frac{d+\frac{L}{2}}{d}$$

（2） $$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\int_d^{L+d}\frac{dx}{x} = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi}\ln\frac{L+d}{d}$$

4、一条宽度为a的半无限长平行共面金属薄带上均匀流过电流I，如图，求O点处的磁感应强度。



解：

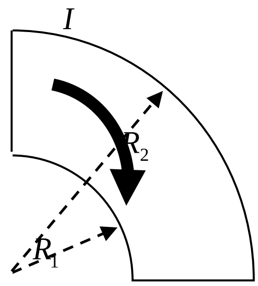
$$dI = \frac{I}{a}dx, dB = \frac{\mu_0 dI}{4\pi x} = \frac{\mu_0 I}{4\pi a x}dx$$

$$B_1 = \int dB = \int_b^{a+b}\frac{\mu_0 I}{4\pi a x}dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi a}\ln\frac{a+b}{b}$$

$$B_2 = B_1$$

$$B = B_1 + B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi a}\ln\frac{a+b}{b}$$

5、如图示，强度为 I 的电流均匀流过 1/4 圆环形带状导体（厚度不计），内半径 r 外半径 R，求圆心处的磁感应强度。（提示：电流按半径均匀 $dI = \frac{I}{R_2 - R_1}dr$ ）



解：

$$dI=\frac{I}{R_2-R_1}dr$$

$$dB=\frac{1}{4}\times\frac{\mu_0 dI}{2r}=\frac{\mu_0 I}{8(R_2-R_1)r}dr$$

$$B=\int dB=\int_{R_1}^{R_2}\frac{\mu_0 I}{8(R_2-R_1)r}dr=\frac{\mu_0 I}{8(R_2-R_1)}\ln\frac{R_2}{R_1},\otimes$$