PARTE I MATRICES

APELLIDO……………………FECHA………………………..

Tecnicatura Superior en Sistemas Informáticos Matemática.-

INTRO. MATRICES Y DETERMINANTES

Las matrices se utilizan en el cálculo numérico, en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de las ecuaciones diferenciales y de las derivadas parciales. Tienen también muchas aplicaciones en el campo de la física.

MATRICES

Una matriz es una tabla ordenada de escalares a_{ij} de la forma

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

La matriz anterior se denota también por (a_{ij}), i =1, ..., m, j =1, ..., n, o simplemente por (a_{ij}).

Los términos horizontales son las filas de la matriz y los verticales son sus columnas. Una matriz con m filas y n columnas se denomina matriz m por n, o matriz $m \times n$.

Las matrices se denotarán usualmente por letras mayúsculas, A, B, ..., y los elementos de las mismas por minúsculas, a, b, ...

Ejemplo:

La siguiente matriz es una matriz 2×3: $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 5 & -2 \end{pmatrix}$

donde sus filas son (1, -3, 4) y (0, 5, -2) y sus

columnas $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$.

CLASES DE MATRICES

Según el aspecto de las matrices, éstas pueden clasificarse en:

Matrices cuadradas

Una matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas. Se dice que una matriz cuadrada $n \times n$ es de orden n y se denomina *matriz n-cuadrada.*

Ejemplo: Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & 0 & 5 \\ 3 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad y \quad B = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Entonces, A y B son matrices cuadradas de orden 3 y 2 respectivamente.

Matriz identidad

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz n-cuadrada. La diagonal (o diagonal principal) de A consiste en los elementos a_{11}, a_{22}, ..., a_{nn}. La traza de A, escrito tr A, es la suma de los elementos diagonales.

La matriz n-cuadrada con unos en la diagonal principal y ceros en cualquier otra posición, denotada por I, se conoce como matriz identidad (o unidad). Para cualquier matriz A,

$A \cdot \mathrm{I} = \mathrm{I} \cdot A = A$.

Matrices triangulares

Una matriz cuadrada $A = (a_{ij})$ es una matriz triangular superior o simplemente una matriz triangular, si todas las entradas bajo la diagonal principal son iguales a cero. Así pues, las matrices

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 7 & -2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 8 & 3 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 7 \\ 0 & 0 & 6 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

son matrices triangulares superiores de órdenes 2, 3 y 4.

Matrices diagonales

Una matriz cuadrada es diagonal, si todas sus entradas no diagonales son cero o nulas. Se denota por D = diag (d_{11}, d_{22}, ..., d_{nn}). Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & & & \\ & 6 & & \\ & & 0 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}$$

son matrices diagonales que pueden representarse, respectivamente, por
diag(3,-1,7) diag(4,-3) y diag(2,6,0,-1).

Traspuesta de una matriz

La traspuesta de una matriz A consiste en intercambiar las filas por las columnas y se denota por A^T.

Así, la traspuesta de

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 2 & 5 & -7 \\ 4 & 0 & 9 \end{pmatrix} \text{ es } A^T = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ -1 & 5 & 0 \\ 4 & -7 & 9 \end{pmatrix}.$$

En otras palabras, si $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$, entonces $A^T = (a_{ji})$ es la matriz $n \times m$. La trasposición de una matriz cumple las siguientes propiedades:

1. $(A + B)^T = A^T + B^T$.
2. $(A^T)^T = A$.
3. $(kA)^T = kA^T$ (si k es un escalar).
4. $(AB)^T = B^T A^T$.

Matrices simétricas

Se dice que una matriz real es simétrica, si $A^T = A$;
Es antisimétrica, si $A^T = -A$
.

Ejemplo:

Consideremos las siguientes matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ -3 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & -8 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -4 \\ -3 & 0 & 5 \\ 4 & -5 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Podemos observar que los elementos simétricos de A son iguales, o que $A^T = A$. Siendo así, A es simétrica.

Para B los elementos simétricos son opuestos entre sí, de este modo B es antisimétrica.

C no es cuadrada; en consecuencia, no es ni simétrica ni antisimétrica.

Ejemplos: Son ejemplos de matrices los siguientes:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} \sqrt{6} & -4 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

A tiene 2 filas y 2 columnas, diremos que su tamaño es 2 x 2.¿Qué elemento es a_{21}?.
B tiene 2 filas y 3 columnas, diremos que su tamaño es 2 x 3.¿Qué elemento es b_{23}?.
C tiene 4 filas y 3 columnas, diremos que su tamaño es 4 x 3.¿Qué elemento es c_{42}?.

6.4. Aplicaciones de las matrices

Las matrices se utilizan en el contexto de las ciencias como elementos que sirven para clasificar valores numéricos atendiendo a dos criterios o variables.

Ejemplo: Un importador de globos los importa de dos colores, naranja (N) y fresa (F). Todos ellos se envasan en paquetes de 2, 5 y 10 unidades, que se venden al precio (en euros) indicado por la tabla siguiente:

	2 unid.	5 unid.	10 unid.
Color N	0'04	0'08	0'12
Color **F**	0'03	0'05	0'08

Sabiendo que en un año se venden el siguiente número de paquetes:

	Color N	Color F
2 unid.	700000	50000
5 unid.	600000	40000
10 unid.	500000	500000

Resumir la información anterior en 2 matrices A y B, de tamaño respectivo 2x3 y 3x2 que recojan las ventas en un año (A) y los precios (B).

Nos piden que organicemos la información anterior en dos matrices de tamaño concreto. Si nos fijamos en las tablas, es sencillo obtener las matrices:

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 2\text{ ud} & 5\text{ ud} & 10\text{ ud} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 700000 & 600000 & 500000 \\ 50000 & 40000 & 500000 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ \text{N} \\ \text{F} \end{array} \quad B = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{N} & \textbf{F} \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0'04 & 0'03 \\ 0'08 & 0'05 \\ 0'12 & 0'08 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{c} \\ 2\text{ ud} \\ 5\text{ ud} \\ 10\text{ ud} \end{array}$$

6.5. Operaciones con matrices

6.5.1. Suma y diferencia

Dadas dos matrices A y B podemos realizar su suma o diferencia de acuerdo a la siguiente regla. Para sumar o restar dos matrices *del mismo tamaño*, se suman o restan los elementos que se encuentren en la misma posición, resultando otra matriz de igual tamaño.

Por ejemplo:

$$\underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \end{pmatrix}} - \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}} = \underset{2x3}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -7 & 0 & -4 \end{pmatrix}}$$

Si las matrices tienen diferente tamaño, no se pueden sumar o restar entre sí.

Propiedades de la suma (y diferencia) de matrices:

a) Conmutativa: A + B = B + A

b) Asociativa: A + (B + C) = (A + B) + C

c) Elemento neutro: La matriz nula del tamaño correspondiente.

d) Elemento opuesto de A: La matriz -A, que resulta de cambiar de signo a los elementos de A.

Ejemplo:

Si

$$A = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}} \implies -A = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}}$$

porque:

$$\underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -4 & -2 \\ 3 & -9 \end{pmatrix}} + \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 4 & 2 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}} = \underset{3x2}{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Ejercicios:

1. Las exportaciones, en millones de euros, de 3 países A, B, C a otros tres X, Y, Z, en los años 2000 y 2001 vienen dadas por las matrices:

$$A_{2000} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 11 & 6'7 & 0'5 \\ 14'5 & 10 & 1'2 \\ 20'9 & 3'2 & 2'3 \end{pmatrix} \end{array} \qquad A_{2001} = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} X & Y & Z \end{array} \\ \begin{pmatrix} 13'3 & 7 & 1 \\ 15'7 & 11'1 & 3'2 \\ 21 & 0'2 & 4'3 \end{pmatrix} \end{array}$$

   Calcula y expresa en forma de matriz el total de exportaciones para el conjunto de los dos años.

   ¿Cuántos millones ha exportado el país B al Z en total?

   Calcula el incremento de las exportaciones del año 2000 al 2001 con los datos del ejemplo anterior.

2. Calcula x, y, z en la suma:

$$\begin{pmatrix} x-y & -1 & 2 \\ 1 & y & -x \\ 0 & z & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y & 0 & z \\ -z & 2 & 3 \\ -2 & 3 & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Calcula a, b, c para que se cumpla la igualdad:

$$\begin{pmatrix} 3-a & b & -2 \\ 4 & -c+1 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & a+b & 4 \\ 1-c & 2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & a & 2 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$