

Euler Bèzier 曲线与 Euler B-Spline 曲线

王庶霖

目录

摘要	2
1 二维 Euler Bèzier 曲线与 Euler B-Spline 曲线	3
2 利用 Euler Bèzier 曲线和 Euler B-Spline 曲线构造 G2 连续圆角曲线	3
2.1 二维 Euler Bèzier 曲线	3
2.2 二维 Euler B-Spline 曲线	4
3 三维 Euler Bèzier 曲线与 Euler B-Spline 曲线	7
3.1 二维到三维的方法	7
3.2 三维 Euler Bèzier 曲线	7
3.3 三维 Euler B-Spline 曲线	7
参考文献	7

摘要

这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。

关键词: 关键词 1 关键词 2 关键词 3 ...

1 二维 Euler Bèzier 曲线与 Euler B-Spline 曲线

定义 1.1 (Euler Bèzier 曲线) 记平面 Bèzier 曲线 $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_{i,n}(t), t \in [0, 1]$, 记向量 $P_i P_{i+1}$ 到向量 $P_{i+1} P_{i+2}$ 的角为 $\theta_{i+1} (i = 0, 1, \dots, n-2)$. 如果 $P(t)$ 满足

- (1). $\|P_i P_{i+1}\| (i = 0, 1, \dots, n-1)$ 是定值;
 - (2). $\theta_i (i = 1, 2, \dots, n-1)$ 是等差数列,
- (1)

则称曲线 $P(t)$ 是 Euler Bèzier 曲线, 其控制多边形称为 Euler 多边形.

定义 1.2 (Euler B-Spline 曲线) 记平面上的 k 阶均匀节点 B-Spline 曲线 $P(t) = \sum_{i=0}^n P_i N_{i,k}(t), t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$, 节点向量 $t_i = i (i = 0, 1, \dots, n+k)$. 如果其控制多边形 P_i 是 Euler 多边形 (见定义 (1.1)), 则称曲线 $P(t)$ 是 Euler B-Spline 曲线.

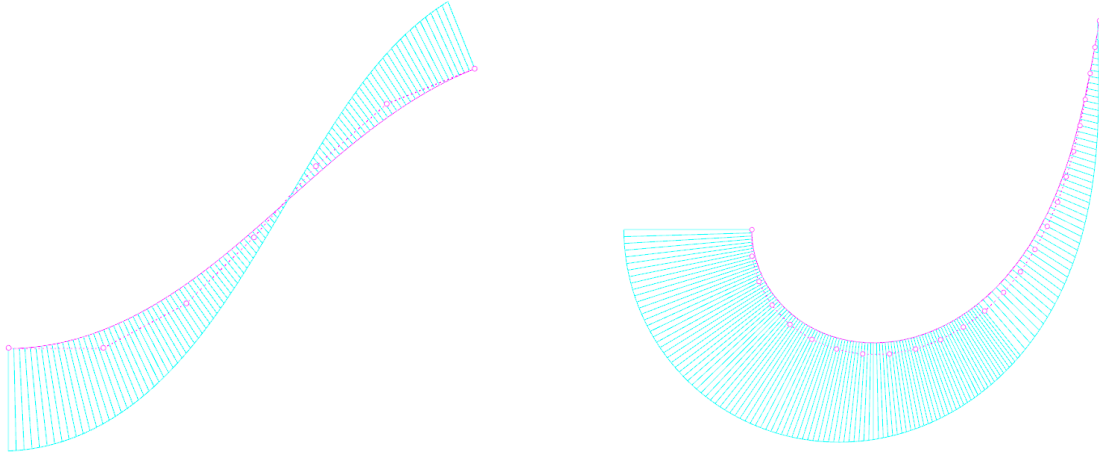


Figure 1: Euler Bezier 曲线

2 利用 Euler Bèzier 曲线和 Euler B-Spline 曲线构造 G2 连续圆角曲线

2.1 二维 Euler Bèzier 曲线

对于一个给定的多边形, 对转角做圆角处理是非常常见的需求, 传统的方法是使用圆弧, 通过确定圆弧的半径来控制圆角的程度. 由于圆弧是固定曲率的, 这种传统的方法只能构造 G^1 连续的圆角, 使用 Euler Bèzier 曲线则可以构造出 G^2 连续的圆角曲线, 并且可以保证有且仅有一个曲率极值点.

考虑多边形的一个转角 ABC , 向量 AB 到向量 BC 的旋转角为 $\alpha, |\alpha| \in (0, \pi)$, 我们对转角 B 构造圆角曲线. 由于 Euler Bèzier 螺线是曲率单调的, 而多边形的圆角曲线要达到 G^2 连续需要保证两端的曲率为 0, 所以我们使用对称的两条 Euler Bèzier 螺线拼接得到圆角曲线. 设圆角曲线的起点 P_S 在边 AB 上, 由于要构造对称的两条曲线, 我们把一边曲线的终点 P_E 取在多边形的内角平分线上. 为保证 G^1 连续, 起点 P_S 处的切方向为向量 AB 的方向, 记为 $T_S = AB/\|AB\|$. 终点 P_E 处的切向 T_E 应

当与多边形的内角平分线垂直. 假设 Bèzier 曲线 $\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i B_{i,n}(t)$, $t \in [0, 1]$ 插值了这两个边界条件, $\mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1}$ 到 $\mathbf{P}_{i+1} \mathbf{P}_{i+2}$ 的角为 θ_{i+1} ($i = 0, 1, \dots, n-2$). 那么可以得到

$$\prod_{i=1}^{n-1} \mathbf{R}(\theta_i) \mathbf{T}_S = \mathbf{T}_E \quad (2)$$

其中 $\mathbf{R}(\theta)$ 表示旋转角为 θ 的旋转矩阵. 根据定义 (1.1), θ_i 应当为等差数列. 考虑 Bèzier 曲线的起点曲率

$$\kappa(0) = \frac{n-1}{n} \frac{\sin(\theta_1)}{l}$$

保证 G^2 连续要令 $\kappa(0) = 0$, 则有 $\theta_1 = 0$, 故设 $\theta_i = (i-1)\Delta\theta$ ($i = 1, \dots, n-1$), 为了保证对称性, \mathbf{T}_E 应当与多边形内角平分线垂直, 则 \mathbf{T}_S 到 \mathbf{T}_E 的夹角为 $\alpha/2$, 所以有

$$\sum_{i=1}^{n-1} \theta_i = \frac{(n-2)(n-1)}{2} \Delta\theta = \frac{\alpha}{2} \quad (3)$$

计算得 $\Delta\theta = \frac{\alpha}{(n-2)(n-1)}$, 从而计算每个 θ_i . Euler 多边形顶点的序列可以递推给出:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 &= l \mathbf{T}_S \\ \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 &= \mathbf{R}(\theta_1) \mathbf{P}_0 \mathbf{P}_1 \\ &\dots \\ \mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1} &= \mathbf{R}(\theta_i) \mathbf{P}_{i-1} \mathbf{P}_i \end{aligned} \quad (4)$$

根据起点终点条件有 $\mathbf{P}_0 = \mathbf{P}_S$, $\mathbf{P}_n = \mathbf{P}_E$, 结合递推式 (4) 得到:

$$\mathbf{P}_S \mathbf{P}_E = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{P}_i \mathbf{P}_{i+1} = l \left[\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{R}(\phi_i) \right] \mathbf{T}_S \quad (5)$$

其中 $\phi_i = \sum_{j=1}^i \theta_j$ ($i = 1, \dots, n-1$), $\phi_0 = 0$. 对于一个给定正整数 n , 我们可以计算出向量 $\mathbf{D} = \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{R}(\phi_i) \mathbf{T}_S$, 这是一个常向量, 从起点到终点的连线必须与它平行. 将向量 \mathbf{D} 与向量 \mathbf{T}_S 的夹角记为 β (注意 β 也是有符号角, 应当与 α 符号相同), 则有

$$\frac{\|\mathbf{OP}_S\|}{\cos(\frac{\alpha}{2} - \beta)} = \frac{\|\mathbf{OP}_E\|}{\sin(\beta)} = \frac{\|\mathbf{P}_S \mathbf{P}_E\|}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \quad (6)$$

根据方程 (6), 我们可以在给定圆角起点 \mathbf{P}_S 或者给定角平分线上的经过点 \mathbf{P}_E 时求得唯一的 Euler 多边形, 以它们为控制顶点的 Bèzier 曲线即为一半的 Euler Bèzier 圆角曲线. 再将该曲线沿着转角的平分线作对称变换即可得到另一半圆角曲线, 该算法的伪代码实现见 Algorithm 1.

图22是对正六边形 (黑色直线段) 应用 Algorithm 1 的结果, 六个圆角曲线 (品红色) 的圆角起点与终点都是六边形边的三等分点. 图中的浅蓝色曲率梳表明了该圆角的 G^2 连续性, 并且每一个圆角曲线自身对称, 有且仅有一个曲率极值点, 位于对称轴上.

2.2 二维 Euler B-Spline 曲线

利用二维 Euler B-Spline 曲线构造圆角大体与 Bèzier 曲线的构造一致, 只有一些细节的不同. 我们使用常用的四阶 (三次) 均匀 B-Spline, 设所求曲线为 $\mathbf{P}(t) = \sum_{i=0}^n \mathbf{P}_i N_{i,4}(t)$, 节点向量为 $t_j = j$, $j =$

Data: 构成 Corner 的三个顶点 A, B, C , BP_S 的长度 L_S 或 BP_E 的长度 L_E

Result: Bezier 曲线 $P(t)$ 的控制顶点序列 P_0, P_1, \dots, P_n 和对称的顶点序列

```

1  $n = 4$ ;
2 初始化 Bèzier 曲线  $P(t)$ ;
3  $T_S = \text{Normalize}(B - P_S)$ ;
4  $D = T_S$ ;
5  $temp = T_S$ ;
6 while EulerBèzierSpiralCheck( $P(t)$ ) == FALSE and  $n < 20$  do
7   计算  $AB$  与  $BC$  的夹角  $\alpha$ ;
8    $\Delta\theta = \frac{\alpha}{(n-2)(n-1)}$ ;
9   for  $i = 0, 1, \dots, n-2$  do
10     $temp.\text{Rotate}(i * \Delta\theta)$ ;
11     $D+ = temp$ ;
12  end
13  计算  $AB$  与  $D$  的夹角  $\beta$ ;
14   $length = \cos(\alpha/2) / \cos(\alpha/2 - \beta) * \|B - P_S\| / \|D\|$ ;
15   $temp = T_S * length$ ;
16   $P_0 = P_S$ ;
17  for  $i = 1, \dots, n-1$  do
18     $P_i = P_{i-1} + temp$ ;
19     $temp.\text{Rotate}((i-1) * \Delta\theta)$ ;
20  end
21   $n++$ ;
22 end

```

Algorithm 1: Euler Bèzier 圆角

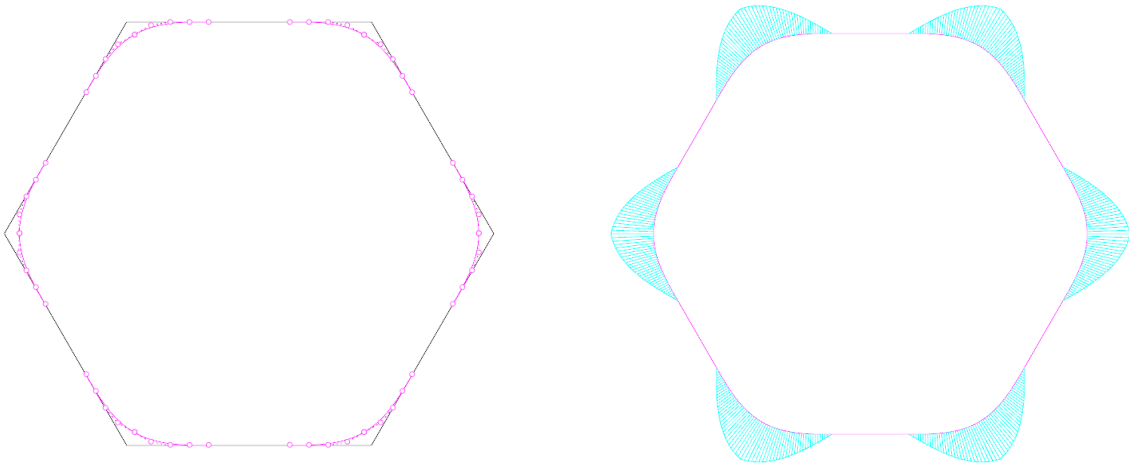


Figure 2: 算法 (1) 得到的 G^2 连续 Euler Bèzier 螺线圆角

$0, 1, \dots, n+4$. 事实上, 控制多边形 P_i 仍然要为 Euler 多边形, 它的构造思路与 Bèzier 曲线的构造一致, 唯一变化的是边界条件.

在 Euler Bèzier 圆角的构造中, 我们将起点 P_0 设置在圆角起点 P_S 上, 我们令向量 P_0P_1 与 T_S 同向, 令 $P_0P_1P_2$ 三点共线, 这些都是基于 Bèzier 曲线的端点各阶导数与控制顶点的关系得到的. 而对于所求的均匀节点 B-Spline 曲线 $P(t)$, $t \in [3, n+1]$, 我们有

$$\begin{aligned} P(3) &= \frac{P_0 + 4P_1 + P_2}{6} \\ P'(3) &= \frac{P_2 - P_0}{2} \\ P''(3) &= P_0 - 2P_1 + P_2 \end{aligned} \quad (7)$$

为满足 G^2 连续条件, 必须有

$$\begin{aligned} \frac{P_0 + 4P_1 + P_2}{6} &= P_S \\ P_2 - P_0 &= \lambda T_S, \text{ for some } \lambda > 0 \\ P_0P_2 \times (P_1P_2 - P_0P_1) &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

第三个条件等价于 $P_0P_2 \times P_0P_1 = 0$, 所以等式成立当且仅当 P_0, P_1 与 P_2 三点共线. 注意到 Euler 多边形各边等长, 故方程 (8) 的解为

$$\begin{cases} P_0 = P_S - lT_S \\ P_1 = P_S \\ P_2 = P_S + lT_S \end{cases} \quad (9)$$

其中 $l > 0$ 为多边形的边长.

另外 $\Delta\theta$ 与常向量 D 的定义也会发生变化, 由于终点的导数为

$$P'(n+1) = \frac{P_n - P_{n-2}}{2} \quad (10)$$

所以 θ_i 与 α 的关系变为

$$\sum_{i=2}^{n-2} \theta_i + \frac{1}{2}\theta_{n-1} = \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

结合 $\theta_i = (i-1)\Delta\theta$, 得到

$$\Delta\theta = \frac{\alpha}{(n-2)^2} \quad (12)$$

记 $\phi_i = \sum_{j=1}^i \theta_j$ ($i = 1, \dots, n-1$), $\phi_0 = 0$. 可以表示控制多边形每一个顶点的坐标

$$P_k = P_0 + l \sum_{i=0}^{k-1} R(\phi_i) T_S, \quad k \geq 1 \quad (13)$$

根据终点处的边界条件

$$P_E = \frac{1}{6}(P_{n-2} + 4P_{n-1} + P_n) \quad (14)$$

结合式 (13), (14) 和 (9) 得到

$$P_S P_E = l \left[\frac{1}{6}(D_{n-2} + 4D_{n-1} + D_n) - T_S \right] \quad (15)$$

其中

$$D_k = \sum_{i=0}^{k-1} R(\phi_i) T_S, \quad k = 1, \dots, n \quad (16)$$

对于给定的 n , 每个 D_k 都是定值, 最后我们求解 l , 只需要和 Bèzier 的方法类似, 确定了 P_S 或 P_E 的位置后, 通过求解三角形得到 $P_S P_E$ 的长即可.

3 三维 Euler Bèzier 曲线与 Euler B-Spline 曲线

3.1 二维到三维的方法

三维空间中插值 G^1 边界条件的曲率 (以及挠率) 单调曲线的存在性不像二维的情形有简单且完整的理论证明

3.2 三维 Euler Bèzier 曲线

3.3 三维 Euler B-Spline 曲线

参考文献

- [1] 第一篇文献.
- [2] 第二篇文献.
- [3] 第三篇文献.
- [4] 第四篇文献.