Euler Bèzier 曲线与 Euler B-Spline 曲线

王庶霖

目录

摘要

这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。这里是摘要内容。

关键词: 关键词 1 关键词 2 关键词 3 ...

1 二维 Euler Bèzier 曲线与 Euler B-Spline 曲线

定义 1.1 (Euler Bèzier 曲线) *记平面 Bèzier 曲线 $\boldsymbol{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{P}_i B_{i,n}(t), t \in [0,1]$, 记向量 $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}$ 到向量 $\boldsymbol{P}_{i+1}\boldsymbol{P}_{i+2}$ 的角为 $\theta_{i+1}(i = 0, 1, \ldots, n-2)$. 如果 $\boldsymbol{P}(t)$ 满足*

$$\begin{aligned} &(1). \quad \|\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}\|(i = 0, 1, \ldots, n-1)\text{是定值;} \\ &(2). \quad \theta_i(i = 1, 2, \ldots, n-1)\text{是等差数列,} \end{aligned} \tag{1}$$

则称曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 是 Euler Bèzier 曲线, 其控制多边形称为 Euler 多边形.

定义 1.2 (Euler B-Spline 曲线) *记平面上的 k 阶均匀节点 B-Spline 曲线 $\boldsymbol{P}(t) = \sum_{i=0}^{n} \boldsymbol{P}_i N_{i,k}(t), t \in [t_{k-1}, t_{n+1}]$, 节点向量 $t_i = i \quad (i = 0, 1, \ldots, n+k)$. 如果其控制多边形 $\boldsymbol{P}_i$ 是 Euler 多边形 (见定义 (1.1)), 则称曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 是 Euler B-Spline 曲线.*

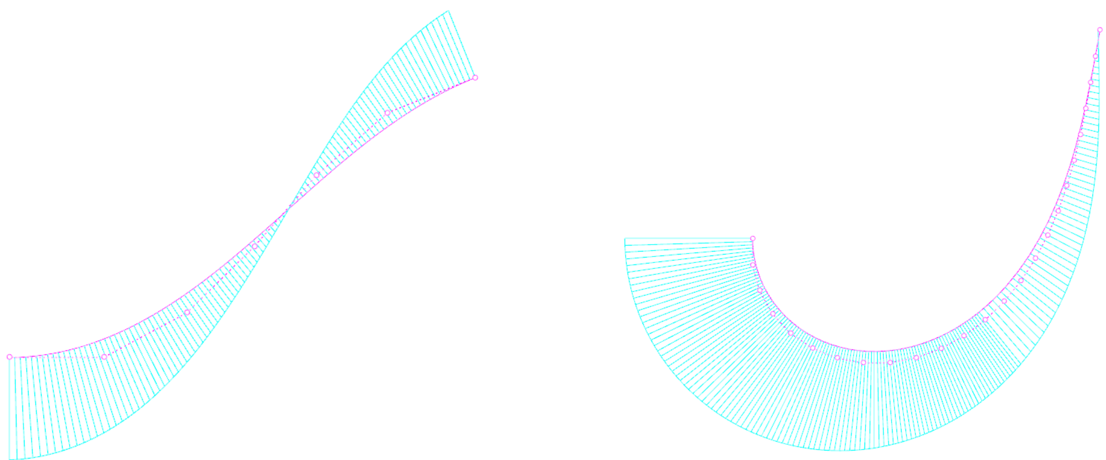

Figure 1: Euler Bezier 曲线

2 利用 Euler Bèzier 曲线和 Euler B-Spline 曲线构造 G2 连续圆角曲线

2.1 二维 Euler Bèzier 曲线

对于一个给定的多边形, 对转角做圆角处理是非常常见的需求, 传统的方法是使用圆弧, 通过确定圆弧的半径来控制圆角的程度. 由于圆弧是固定曲率的, 这种传统的方法只能构造 G^1 连续的圆角, 使用 Euler Bèzier 曲线则可以构造出 G^2 连续的圆角曲线, 并且可以保证有且仅有一个曲率极值点.

考虑多边形的一个转角 $\boldsymbol{ABC}$, 向量 $\boldsymbol{AB}$ 到向量 $\boldsymbol{BC}$ 的旋转角为 $\alpha, |\alpha| \in (0, \pi)$, 我们对转角 $\boldsymbol{B}$ 构造圆角曲线. 由于 Euler Bèzier 螺线是曲率单调的, 而多边形的圆角曲线要达到 G^2 连续需要保证两端的曲率为 0, 所以我们使用对称的两条 Euler Bèzier 螺线拼接得到圆角曲线. 设圆角曲线的起点 $\boldsymbol{P}_S$ 在边 $\boldsymbol{AB}$ 上, 由于要构造对称的两条曲线, 我们把一边曲线的终点 $\boldsymbol{P}_E$ 取在多边形的内角平分线上. 为保证 G^1 连续, 起点 $\boldsymbol{P}_S$ 处的切方向为向量 $\boldsymbol{AB}$ 的方向, 记为 $\boldsymbol{T}_S = \boldsymbol{AB}/\|\boldsymbol{AB}\|$. 终点 $\boldsymbol{P}_E$ 处的切向 $\boldsymbol{T}_E$ 应

当与多边形的内角平分线垂直. 假设 Bèzier 曲线 $\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_iB_{i,n}(t), t\in[0,1]$ 插值了这两个边界条件, $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}$ 到 $\boldsymbol{P}_{i+1}\boldsymbol{P}_{i+2}$ 的角为 $\theta_{i+1}(i=0,1,\ldots,n-2)$. 那么可以得到

$$\prod_{i=1}^{n-1}\mathrm{R}(\theta_i)\boldsymbol{T}_S=\boldsymbol{T}_E \tag{2}$$

其中 $\mathrm{R}(\theta)$ 表示旋转角为 θ 的旋转矩阵. 根据定义 (1.1), θ_i 应当为等差数列. 考虑 Bèzier 曲线的起点曲率

$$\kappa(0)=\frac{n-1}{n}\frac{\sin(\theta_1)}{l}$$

保证 G^2 连续要令 $\kappa(0)=0$, 则有 $\theta_1=0$, 故设 $\theta_i=(i-1)\Delta\theta(i=1,\ldots,n-1)$, 为了保证对称性, $\boldsymbol{T}_E$ 应当与多边形内角平分线垂直, 则 $\boldsymbol{T}_S$ 到 $\boldsymbol{T}_E$ 的夹角为 $\alpha/2$, 所以有

$$\sum_{i=1}^{n-1}\theta_i=\frac{(n-2)(n-1)}{2}\Delta\theta=\frac{\alpha}{2} \tag{3}$$

计算得 $\Delta\theta=\frac{\alpha}{(n-2)(n-1)}$, 从而计算每个 θ_i. Euler 多边形顶点的序列可以递推给出:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1&=l\boldsymbol{T}_S\\ \boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2&=\mathrm{R}(\theta_1)\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\\ &\cdots\\ \boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}&=\mathrm{R}(\theta_i)\boldsymbol{P}_{i-1}\boldsymbol{P}_i\end{aligned} \tag{4}$$

根据起点终点条件有 $\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{P}_S, \boldsymbol{P}_n=\boldsymbol{P}_E$, 结合递推式 (4) 得到:

$$\boldsymbol{P}_S\boldsymbol{P}_E=\sum_{i=0}^{n-1}\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}=l[\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{R}(\phi_i)]\boldsymbol{T}_S \tag{5}$$

其中 $\phi_i=\sum_{j=1}^{i}\theta_j(i=1,\ldots,n-1), \phi_0=0$. 对于一个给定正整数 n, 我们可以计算出向量 $\boldsymbol{D}=\sum_{i=0}^{n-1}\mathrm{R}(\phi_i)\boldsymbol{T}_S$, 这是一个常向量, 从起点到终点的连线必须与它平行. 将向量 $\boldsymbol{D}$ 与向量 $\boldsymbol{T}_S$ 的夹角记为 β(注意 β 也是有符号角, 应当与 α 符号相同), 则有

$$\frac{\|\boldsymbol{OP}_S\|}{\cos(\frac{\alpha}{2}-\beta)}=\frac{\|\boldsymbol{OP}_E\|}{\sin(\beta)}=\frac{\|\boldsymbol{P}_S\boldsymbol{P}_E\|}{\cos(\frac{\alpha}{2})} \tag{6}$$

根据方程 (6), 我们可以在给定圆角起点 $\boldsymbol{P}_S$ 或者给定角平分线上的经过点 $\boldsymbol{P}_E$ 时求得唯一的 Euler 多边形. 对于 n+1 个顶点的 Euler 多边形, 判断以它们为控制顶点的 Bèzier 曲线是否为 Euler Bèzier 曲线, 如果没有满足 Euler Bèzier 曲线的条件, 则使 n 自加一再次重复上述过程, 直到满足 Euler Bèzier 曲线的条件或者控制顶点数达到了预先设定的最大值停止迭代. 如果迭代结束曲线满足了螺线条件, 就得到了一半的圆角曲线. 再将该曲线沿着转角的平分线作对称变换即可得到另一半圆角曲线, 该算法的伪代码实现见 Algorithm 1.

图22是对正六边形 (黑色直线段) 应用 Algorithm 1的结果, 六个圆角曲线 (品红色) 均为对称的两条四次 Bèzier 曲线拼接而成, 其圆角起点与终点都是六边形边的三等分点. 图中的浅蓝色曲率梳表明了该圆角的 G^2 连续性, 并且每一个圆角曲线自身对称, 有且仅有一个曲率极值点, 位于对称轴上.

Data: 构成 Corner 的三个顶点 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{BP}_S$ 的长度 L_S 或 $\boldsymbol{BP}_E$ 的长度 L_E

Result: Bezier 曲线 $\boldsymbol{P}(t)$ 的控制顶点序列 $\boldsymbol{P}_0, \boldsymbol{P}_1, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ 和对称的顶点序列

$n = 4$;
初始化 Bèzier 曲线$\boldsymbol{P}(t)$;
$\boldsymbol{T}_S =$ **Normalize**$(\boldsymbol{B} - \boldsymbol{P}_S)$;
$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{T}_S$;
$\boldsymbol{temp} = \boldsymbol{T}_S$;
while *EulerBèzierSpiralCheck*($\boldsymbol{P}(t)$)*==FALSE and* $n < 20$ **do**
    计算 $\boldsymbol{AB}$ **与** $\boldsymbol{BC}$ **的夹角** α;
    $\Delta\theta = \frac{\alpha}{(n-2)(n-1)}$;
    for $i = 0, 1, \ldots, n-2$ **do**
        $\boldsymbol{temp}$.**Rotate**$(i * \Delta\theta)$;
        $\boldsymbol{D} + = \boldsymbol{temp}$;
    end
    计算 $\boldsymbol{AB}$ **与** $\boldsymbol{D}$ **的夹角** β;
    length $= \cos(\alpha/2)/\cos(\alpha/2 - \beta) * \|\boldsymbol{B} - \boldsymbol{P}_S\|/\|\boldsymbol{D}\|$;
    $\boldsymbol{temp} = \boldsymbol{T}_S *$ **length**;
    $\boldsymbol{P}_0 = \boldsymbol{P}_S$;
    for $i = 1, \ldots, n-1$ **do**
        $\boldsymbol{P}_i = \boldsymbol{P}_{i-1} + \boldsymbol{temp}$;
        $\boldsymbol{temp}$.**Rotate**$((i-1) * \Delta\theta)$;
    end
    $n + +$;
end

Algorithm 1: Euler Bèzier 圆角

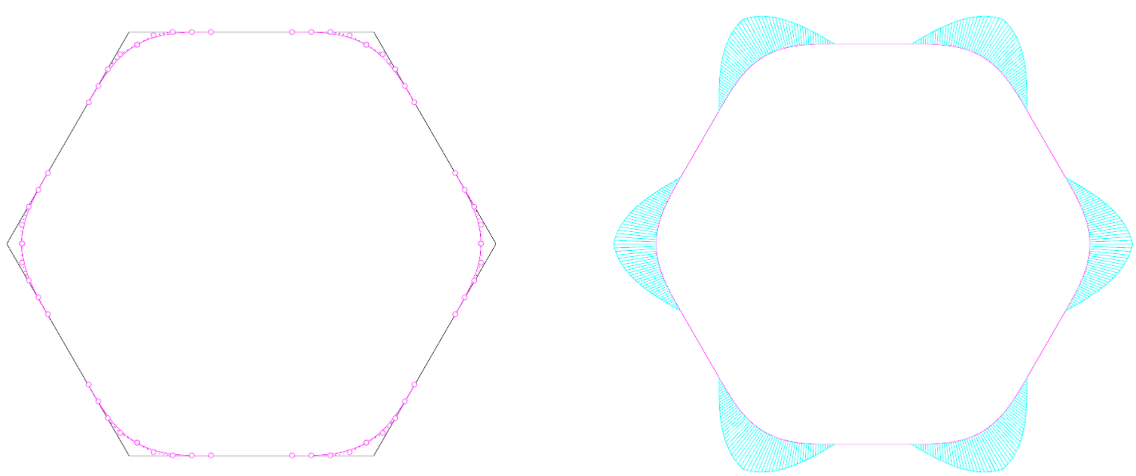

Figure 2: 算法 (1) 得到的 G^2 连续 Euler Bèzier 螺线圆角

2.2 二维 Euler B-Spline 曲线

虽然 Bèzier 曲线已经能得到满足条件的圆角曲线, 但是通常控制顶点较多导致次数较高, 而使用 B-Spline 曲线可以保持次数为三次, 方便进行曲线的拼接处理. 利用二维 Euler B-Spline 曲线构造圆角大体与 Bèzier 曲线的构造一致, 只是生成 Euler 多边形时考虑不同的边界条件. 设四阶 (三次) 均匀 B-Spline 曲线为 $\boldsymbol{P}(t)=\sum_{i=0}^{n}\boldsymbol{P}_iN_{i,4}(t)$, 节点向量为 $t_j=j, j=0,1,\ldots,n+4$

在 Euler Bèzier 圆角的构造中, 我们将起点 $\boldsymbol{P}_0$ 设置在圆角起点 $\boldsymbol{P}_S$ 上, 我们令向量 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1$ 与 $\boldsymbol{T}_S$ 同向, 令 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2$ 三点共线, 这些都是基于 Bèzier 曲线的端点各阶导数与控制顶点的关系得到的. 而对于所求的均匀节点 B-Spline 曲线 $\boldsymbol{P}(t)$, $t\in[3,n+1]$, 我们有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P}(3)&=\frac{\boldsymbol{P}_0+4\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2}{6}\\ \boldsymbol{P}'(3)&=\frac{\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_0}{2}\\ \boldsymbol{P}''(3)&=\boldsymbol{P}_0-2\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2\end{aligned}\tag{7}$$

为满足 G^2 连续条件, 必须有

$$\begin{aligned}&\frac{\boldsymbol{P}_0+4\boldsymbol{P}_1+\boldsymbol{P}_2}{6}=\boldsymbol{P}_S\\ &\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_0=\lambda\boldsymbol{T}_S,\ \text{for some } \lambda>0\\ &\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\times(\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1)=\boldsymbol{0}\end{aligned}\tag{8}$$

第三个条件等价于 $\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_2\times\boldsymbol{P}_0\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{0}$, 所以等式成立当且仅当 $\boldsymbol{P}_0,\boldsymbol{P}_1$ 与 $\boldsymbol{P}_2$ 三点共线. 注意到 Euler 多边形各边等长, 故方程 (8) 的解为

$$\begin{cases}\boldsymbol{P}_0=\boldsymbol{P}_S-l\boldsymbol{T}_S\\ \boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{P}_S\\ \boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{P}_S+l\boldsymbol{T}_S\end{cases}\tag{9}$$

其中 $l>0$ 为多边形的边长.

另外 $\Delta\theta$ 与常向量 $\boldsymbol{D}$ 的定义也会发生变化, 由于终点的导数为

$$\boldsymbol{P}'(n+1)=\frac{\boldsymbol{P}_n-\boldsymbol{P}_{n-2}}{2}\tag{10}$$

所以 θ_i 与 α 的关系变为

$$\sum_{i=2}^{n-2}\theta_i+\frac{1}{2}\theta_{n-1}=\frac{\alpha}{2}\tag{11}$$

结合 $\theta_i=(i-1)\Delta\theta$, 得到

$$\Delta\theta=\frac{\alpha}{(n-2)^2}\tag{12}$$

记 $\phi_i=\sum_{j=1}^{i}\theta_j(i=1,\ldots,n-1),\phi_0=0$. 可以表示控制多边形每一个顶点的坐标

$$\boldsymbol{P}_k=\boldsymbol{P}_0+l\sum_{i=0}^{k-1}\mathrm{R}(\phi_i)\boldsymbol{T}_S,\quad k\geq 1\tag{13}$$

根据终点处的边界条件

$$\boldsymbol{P}_E=\frac{1}{6}(\boldsymbol{P}_{n-2}+4\boldsymbol{P}_{n-1}+\boldsymbol{P}_n)\tag{14}$$

结合式 (13), (14) 和 (9) 得到

$$\boldsymbol{P}_S\boldsymbol{P}_E = l[\frac{1}{6}(\boldsymbol{D}_{n-2} + 4\boldsymbol{D}_{n-1} + \boldsymbol{D}_n) - \boldsymbol{T}_S] \tag{15}$$

其中

$$\boldsymbol{D}_k = \sum_{i=0}^{k-1} \mathrm{R}(\phi_i)\boldsymbol{T}_S, \quad k = 1, \dots, n \tag{16}$$

对于给定的 n, 每个 $\boldsymbol{D}_k$ 都是定值, 最后我们求解 l, 只需要和 Bèzier 的方法类似, 确定了 $\boldsymbol{P}_S$ 或 $\boldsymbol{P}_E$ 的位置后, 通过求解三角形得到 $\boldsymbol{P}_S\boldsymbol{P}_E$ 的长即可. 之后再进行与算法 (1) 类似的迭代过程即得到一半的 Euler B-Spline 圆角曲线, 将其对称并拼接可以得到一整条 B-Spline 圆角曲线.

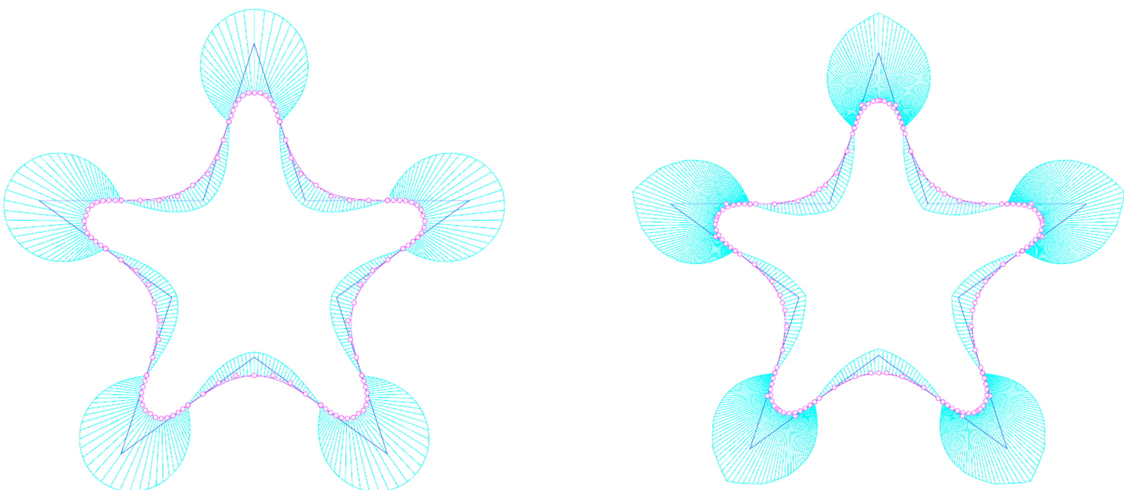

Figure 3: 对正五角星的每一个角做圆角, 圆角的起点和终点均为各边中点. 左图: 使用 Euler Bèzier 曲线生成, 钝角的圆角曲线是两段 4 次曲线, 锐角的圆角为两段 7 次曲线. 右图: 使用 Euler B-Spline 曲线生成, 所有曲线均为三次. 两个例子都表现出了 G^2 连续性, Bèzier 曲线次数更高, 每一段内的几何连续性也更高, B-Spline 曲线次数恒定, 但由于拼接, 几何连续性只能达到 G^2.

3 三维 Euler Bèzier 曲线与 Euler B-Spline 曲线

3.1 三维情况的 Euler 多边形

三维空间中插值 G^1 边界条件的曲率 (以及挠率) 单调曲线的存在性不像二维的情形有简单且完整的理论证明. 现有的一些构造三维螺线的结果有对于离散多边形的非线性细分方法, 有根据 Frenet 方程的离散形式进行计算的方法, 这些方法得到的都是离散形式的曲线, 需要进行多次迭代, 或者计算大量的采样点, 而我们的目的是使用显式的 (分段) 多项式曲线来尽可能的构造曲率单调曲线. 我们的方法从生成二维 Euler 多边形的方法演变而来, 将初始控制多边形的起点和终点以及初始的切向量生成的平面作为 xy 平面建立三维坐标系, 我们要重新定义三维的 Euler 多边形. 首先介绍三维情况下两种角的定义方式, 假设有非零的三维向量 $\boldsymbol{v} = (v_x, v_y, v_z)$, 将其化为极坐标得到 $\hat{\boldsymbol{v}} = (\rho_v, \theta_v, \phi_v)$, 其中 $\rho_v > 0$ 是 $\boldsymbol{v}$

的模长, $\theta_v \in [0, 2\pi)$ 是 $\boldsymbol{v}$ 在 xy 平面投影向量的极角, $\phi_v \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ 是 $\boldsymbol{v}$ 的仰角, 它们满足等式

$$
\begin{aligned}
\rho_v &= \sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2} \\
\theta_v &= \begin{cases} \arccos(\dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}), & v_x^2+v_y^2>0, v_y \geq 0 \\ -\arccos(\dfrac{v_x}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}})+2\pi, & v_x^2+v_y^2>0, v_y<0 \\ 0, & v_x=v_y=0 \end{cases} \\
\phi_v &= \begin{cases} \arctan(\dfrac{v_z}{\sqrt{v_x^2+v_y^2}}), & v_x^2+v_y^2>0 \\ \mathrm{sign}(v_z)*\dfrac{\pi}{2}, & v_x=v_y=0 \end{cases}
\end{aligned}
\tag{17}
$$

对于一个三维多边形 $\boldsymbol{P}_0, \ldots, \boldsymbol{P}_n$, 它的 n 条边 $\boldsymbol{P}_i\boldsymbol{P}_{i+1}$ 记为向量 $\boldsymbol{v}_i(0 \leq i \leq n-1)$, 其极坐标表示的极角和俯角记为 θ_{v_i}, ϕ_{v_i}, 记相邻边 $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{i+1}$ 的水平夹角为 $\theta_i = \theta_{v_{i+1}} - \theta_{v_i}$, 相邻边 $\boldsymbol{v}_i, \boldsymbol{v}_{i+1}$ 的竖直夹角为 $\phi_i = \phi_{v_{i+1}} - \phi_{v_i}$, $0 \leq i \leq n-2$ 我们使用这两种角定义三维的 Euler 多边形.

定义 3.1 (三维 Euler 多边形) *设三维空间中有多边形 $\boldsymbol{P}_0, \ldots, \boldsymbol{P}_n$, 顶点互不相同, 如果它们的相邻边的水平夹角 θ_i, 竖直夹角 ϕ_i 满足:*

$$
\begin{aligned}
&(1). \quad \theta_i - 2\theta_{i+1} + \theta_{i+2} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-4 \\
&(2). \quad \phi_i - 2\phi_{i+1} + \phi_{i+2} = 0, \quad i = 0, 1, \ldots, n-4 \\
&(3). \quad \text{所有边长} \|\boldsymbol{v_i}\| \text{相等}
\end{aligned}
\tag{18}
$$

则称 $\boldsymbol{P}_0, \ldots, \boldsymbol{P}_n$ 是三维 Euler 多边形.

由三维 Euler 多边形作为控制顶点生成的 Bèzier 曲线或整数节点 B 样条曲线称为三维 Euler Bèzier 曲线或三维 Euler B-Spline 曲线.

假定有三维 G^1 条件: 起点 $\boldsymbol{P}_S$, 终点 $\boldsymbol{P}_E$, 以及起点终点切向 $\boldsymbol{T}_S, \boldsymbol{T}_E$, 其中 $\boldsymbol{T}_S, \boldsymbol{T}_E$ 是单位向量, 并且与起点指向终点的向量 $\boldsymbol{P}_S\boldsymbol{P}_E$, 三个向量异面. 对于这样的 G^1 条件, 直接构造严格满足定义 (3.1) 的曲线是行不通的, 事实上在二维情况下都是不可行的, 所以我们依然使用一种非线性细分的方法对初始多边形进行迭代, 使其逐渐逼近三维的 Euler 多边形, 当然没有理论保证对于任意的边值条件都存在满足定义 (3.1) 的多边形, 但是如果这样的多边形存在, 我们的方法可以很好的逼近出这样的多边形, 以它们作为控制顶点的 Bèzier 和 B-Spline 曲线是曲率单调的.

3.2 三维 Euler Bèzier 曲线

对于一般的三维 G^1 边值条件, 我们先作刚体变换使得起点 $\boldsymbol{P}_S$ 位于原点, 初始切向变换为 x 轴正向的单位向量 $(1, 0, 0)$ 并且终点的端切向与 xOy 平面平行, 这样的变换是非常容易的, 只需要一次平移和旋转即可.

变换后的边值条件, 起点和起点端切向即为 $\boldsymbol{P}_S = (0, 0, 0), \boldsymbol{T}_S = (1, 0, 0)$, 终点的端切向与 xOy 平面平行. 我们很容易构造一个初始多边形, 使得该多边形生成的 Bèzier 曲线满足该 G^1 边值条件, 这样

的多边形至少要四个顶点, 可以表示为

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{P}_0 &= \boldsymbol{P}_S \\
\boldsymbol{P}_1 &= \boldsymbol{P}_S + \lambda \boldsymbol{T}_S \\
\boldsymbol{P}_2 &= \boldsymbol{P}_E - \mu \boldsymbol{T}_E \\
\boldsymbol{P}_3 &= \boldsymbol{P}_E
\end{aligned} \tag{19}$$

其中 $\lambda, \mu > 0$ 是可变的常数, 我们可以选择设置为 $\lambda = \mu = \|\boldsymbol{P}_S\boldsymbol{P}_E\|/3$.

接下来, 我们从初始多边形开始进行保边界条件的迭代. 假设当前的多边形顶点按顺序为 $\boldsymbol{P}_0, \ldots, \boldsymbol{P}_n$, 那么 $\boldsymbol{P}_0$ 和 $\boldsymbol{P}_n$ 的位置不变, $\boldsymbol{P}_1$ 和 $\boldsymbol{P}_{n-1}$ 的位置只依赖于多边形的边长, 因为它们用于满足端切向条件, 所以从 $\boldsymbol{P}_2$ 开始计算. 假定现有连续的三点 $\boldsymbol{P}_{i-1}, \boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{P}_{i+1}$, 其中 $i = 2, \ldots, n-2$, 我们计算新的 $\hat{\boldsymbol{P}}_i$ 更新该多边形. 我们把多边形相交于顶点 $\boldsymbol{P}_i$ 的边 $\boldsymbol{v}_{i-1}$ 和 $\boldsymbol{v}_i$ 的水平, 竖直夹角称为点 $\boldsymbol{P}_i$ 处的水平, 竖直转角, 记为 θ_i 和 ϕ_i(定义 (3.1)). 为了在局部满足 Euler 多边形的条件, 应当让转角满足 $2\theta_i = \theta_{i-1} + \theta_{i+1}$, 以及 $2\phi_i = \phi_{i-1} + \phi_{i+1}$, 因此, 我们更新 $\boldsymbol{P}_i$ 处的转角为:

$$\begin{aligned}
\hat{\theta}_i &= \frac{\theta_{i-1} + \theta_i + \theta_{i+1}}{3} \\
\hat{\phi}_i &= \frac{\phi_{i-1} + \phi_i + \phi_{i+1}}{3}
\end{aligned} \tag{20}$$

接下来, 我们通过已经更新的 $\hat{\theta}_i$ 和 $\hat{\phi}_i$ 来确定 $\hat{\boldsymbol{P}}_i$ 的位置. 设 $\boldsymbol{P}_{i-1}$ 和 $\boldsymbol{P}_{i+1}$ 的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1) 和 (x_2, y_2, z_2), $\boldsymbol{P}_{i-1}$ 和 $\boldsymbol{P}_{i+1}$ 在 xOy 平面上的投影记为 $\bar{\boldsymbol{P}}_{i-1}$ 和 $\bar{\boldsymbol{P}}_{i+1}$, 所求的新 $\hat{\boldsymbol{P}}_i$ 在 xOy 面上的投影为 $\bar{\hat{\boldsymbol{P}}}_i$. 我们要使得 $\bar{\boldsymbol{P}}_{i-1}$, $\bar{\hat{\boldsymbol{P}}}_i$ 和 $\bar{\boldsymbol{P}}_{i+1}$ 三点形成的转角为 $\hat{\theta}_i$, 从而点 $\bar{\hat{\boldsymbol{P}}}_i$ 应当位于一段圆弧上, 该圆弧的半径为

$$R = \frac{\|\bar{\boldsymbol{P}}_{i-1}\bar{\boldsymbol{P}}_{i+1}\|}{2\sin(\hat{\theta}_i)} \tag{21}$$

圆心的位置也可以由下式给出

$$C_i = \frac{\bar{\boldsymbol{P}}_{i-1} + \bar{\boldsymbol{P}}_{i+1}}{2} + \mathrm{R}(\mathrm{sign}(\hat{\theta}_i) \cdot \frac{\pi}{2}) \cdot \frac{\bar{\boldsymbol{P}}_{i-1}\bar{\boldsymbol{P}}_{i+1}}{\|\bar{\boldsymbol{P}}_{i-1}\bar{\boldsymbol{P}}_{i+1}\|} \cdot \sqrt{R^2 - \frac{1}{4}\|\bar{\boldsymbol{P}}_{i-1}\bar{\boldsymbol{P}}_{i+1}\|^2} \tag{22}$$

其中 $\mathrm{R}(\theta)$ 表示在 xOy 平面绕原点旋转 θ 角度, 注意到 $\hat{\theta}_i$ 是有符号的, 并且圆心与点 $\bar{\hat{\boldsymbol{P}}}_i$ 位于 $\bar{\boldsymbol{P}}_{i-1}\bar{\boldsymbol{P}}_{i+1}$ 的两侧. 将 C_i 的坐标记为 (a, b), 从而我们可以设 $\bar{\hat{\boldsymbol{P}}}_i = (a + R\cos(x), b + R\sin(x))$, 设 $\hat{\boldsymbol{P}}_i = (a + R\cos(x), b + R\sin(x), z)$.

接下来考虑竖直角, 向量 $\boldsymbol{P}_{i-1}\hat{\boldsymbol{P}}_i$ 和 $\hat{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{P}_{i+1}$ 的俯角应当满足

$$\begin{aligned}
\tan(\phi_{\boldsymbol{P}_{i-1}\hat{\boldsymbol{P}}_i}) &= \frac{z - z_1}{L_1(x)} \\
\tan(\phi_{\hat{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{P}_{i+1}}) &= \frac{z_2 - z}{L_2(x)}
\end{aligned} \tag{23}$$

其中, $L_1(x)$ 和 $L_2(x)$ 分别表示点 $\bar{\hat{\boldsymbol{P}}}_i$ 到点 $\bar{\boldsymbol{P}}_{i-1}$ 和点 $\bar{\boldsymbol{P}}_{i+1}$ 的距离. 我们要使 $\phi_{\hat{\boldsymbol{P}}_i\boldsymbol{P}_{i+1}} - \phi_{\boldsymbol{P}_{i-1}\hat{\boldsymbol{P}}_i} = \hat{\phi}_i$, 从而得到方程

$$\frac{z_2 - z}{L_2(x)} - \frac{z - z_1}{L_1(x)} = \tan(\hat{\phi}_i)(1 + \frac{(z_2 - z)(z - z_1)}{L_1(x)L_2(x)}) \tag{24}$$

最后再利用 Euler 多边形的各边相等, 要有 $\|\boldsymbol{P}_{i-1}\hat{\boldsymbol{P}}_i\| = \|\boldsymbol{P}_{i+1}\hat{\boldsymbol{P}}_i\|$, 则有方程

$$\boldsymbol{L_1(x)^2 + (z - z_1)^2 = L_2(x)^2 + (z_2 - z)^2} \tag{25}$$

注意到式 (25) 等价于

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} + \frac{L_1(x)^2 - L_2(x)^2}{2(z_1 - z_2)} \tag{26}$$

将其代入式 (24), 并记 $z_2 - z_1 = h$ 得到

$$\begin{aligned} L_1(x)(\frac{h}{2} + \frac{L_1(x)^2 - L_2(x)^2}{2h}) - L_2(x)(\frac{h}{2} - \frac{L_1(x)^2 - L_2(x)^2}{2h}) \\ - \tan(\hat{\phi}_i)(L_1(x)L_2(x) + \frac{h^2}{4} - \frac{(L_1(x)^2 - L_2(x)^2)^2}{4h^2}) = 0 \end{aligned} \tag{27}$$

将式 (27) 左侧的表达式记为 $\Phi(x)$, 我们即要求 $\Phi(x)$ 的零点.

3.3 三维 Euler B-Spline 曲线

参考文献

[1] 第一篇文献.

[2] 第二篇文献.

[3] 第三篇文献.

[4] 第四篇文献.