Programare logică

Semantica termenilor

Mulţime de variabile

(S, Σ) signatură multisortată

$|\Sigma| := \bigcup_{w,s} \Sigma_{w,s}$

$|X| := \bigcup_{s \in S} X_s$ dacă X mulţime S-sortată

O mulţime de variabile este o mulţime S-sortată X a.î.:

- $X_s \cap X_{s'} = \emptyset$ or. $s \neq s'$
- $|X| \cap |\Sigma| = \emptyset$

simbolurile de variabile sunt distincte între ele şi sunt distincte de simbolurile de operaţii din Σ

Termeni cu variabile din X

(S, Σ) signatură, X mulţime de variabile

Mulţimea S-sortată termenilor cu variabile din X, $T_\Sigma(X)$, este *cea mai mică* mulţime de *şiruri finite* peste alfabetul

$$L = \bigcup_{s\in S} X_s \cup \bigcup_{w,s} \Sigma_{w,s} \cup \{(,)\} \cup \{,\}$$

care verifică următoarele proprietăţi:

- (T1) $X_s \subseteq T_\Sigma(X)_s$
- (T2) dc. $\sigma :\to s$, at. $\boldsymbol{\sigma} \in T_\Sigma(X)_s$,
- (T3) dc. $\sigma : s_1 \cdots s_n \to s$ şi $t_i \in T_\Sigma(X)_{s_i}$ or. $i = 1, \ldots, n$ at. $\boldsymbol{\sigma(t_1, \ldots, t_n)} \in T_\Sigma(X)_s$.

Algebra de termeni $T_\Sigma(X)$

(S, Σ) signatură, X mulţime de variabile
Mulţimea termenilor $T_\Sigma(X) = \{T_\Sigma(X)_s\}_{s \in S}$ este (S, Σ)-algebră astfel:

- pt. $\sigma :\to s$, operaţia corespunzătoare este $T_\sigma := \boldsymbol{\sigma}$
- pt. $\sigma : s_1 \cdots s_n \to s$, operaţia corespunzătoare este
  $T_\sigma : T_\Sigma(X)_{s_1} \times \cdots \times T_\Sigma(X)_{s_n} \to T_\Sigma(X)_s$
  $T_\sigma(t_1, \ldots, t_n) := \boldsymbol{\sigma(t_1, \ldots, t_n)}$
  or. $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}$, ..., $t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$

- $T_\Sigma(X)$ algebra termenilor cu variabile din X
- vom nota $\boldsymbol{\sigma(t_1, \ldots, t_n)} := \sigma(t_1, \ldots, t_n)$

Semantica termenilor
Evaluarea termenilor în algebre

(S, Σ) signatură, X mulţime de variabile

Teoremă. Fie A o (S, Σ)-algebră. Orice funcţie $\boldsymbol{a} : X \to A$ se extinde la un unic (S, Σ)-morfism $\tilde{\boldsymbol{a}} : T_\Sigma(X) \to A$.

- $\boldsymbol{a} : X \to A$ atribuire, interpretare
- Definim $\tilde{\boldsymbol{a}}(t)$ prin inducţie pe termeni:
  - or. $x \in X_s$, $\tilde{\boldsymbol{a}}_s(x) := \boldsymbol{a}_s(x)$,
  - or. $\sigma :\to s$, $\tilde{\boldsymbol{a}}_s(\sigma) := A_\sigma$
  - or. $\sigma : s_1 \cdots s_n \to s$, or. $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}, \ldots, t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$
    $\tilde{\boldsymbol{a}}_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) := A_\sigma(\tilde{\boldsymbol{a}}_{s_1}(t_1), \ldots, \tilde{\boldsymbol{a}}_{s_n}(t_n))$
- Dacă $f : T_\Sigma(X) \to A$ morfism şi $f|_X = \boldsymbol{a}$ atunci se demonstrează prin inducţie pe termeni că $f = \tilde{\boldsymbol{a}}$.

Semantica expresiilor aritmetice

- $NATEXP = (S = \{nat\}, \Sigma)$, $X = \{x, y\}$
- $\Sigma = \{0 :\to nat, s : nat \to nat,$
  $+ : nat\ nat \to nat, * : nat\ nat \to nat\}$
- $T_{NATEXP}(X) = \{0, x, y, s(0), s(x), s(y), s(s(0)), \ldots$
  $+(0,0), +(0,x), +(x,y), *(0, +(s(0), x)), *(s(y), s(s(x))), \ldots\}$
- $A = (\mathbb{Z}_4, 0, s, +, *)$ cu operaţiile obişnuite
- $\boldsymbol{a} : \{x, y\} \to \mathbb{Z}_4$, $\boldsymbol{a}(x) := 1$, $\boldsymbol{a}(y) := 3$
- $\tilde{\boldsymbol{a}}(\,+(x,y)\,) = A_+(\boldsymbol{a}(x), \boldsymbol{a}(y)) = 1 + 3 = 0\ (mod\ 4)$
  $\tilde{\boldsymbol{a}}(\,*(s(x), s(s(0)))\,) = A_*(A_s(\boldsymbol{a}(x)), A_s(A_s(A_0))) =$
  $(1+1) * (0+1+1) = 2 * 2 = 0\ (mod\ 4)$

Semantica termenilor

(S, Σ) signatură, X mulţime de variabile

Teoremă. Fie A o (S, Σ)-algebră. Orice funcţie $\boldsymbol{a} : X \to A$ se extinde la un unic (S, Σ)-morfism $\tilde{\boldsymbol{a}} : T_\Sigma(X) \to A$.

- $X = \emptyset$
  Corolar. T_Σ este (S, Σ)-algebră iniţială.
- $A = T_\Sigma(Y)$
  Corolar. Orice substituţie $\nu : X \to T_\Sigma(Y)$ se extinde la un unic morfism de (S, Σ)-algebre $\tilde{\nu} : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(Y)$.

Proprietăţi

(S, Σ) signatură, X şi Y mulţimi de variabile

- Propoziţie. Fie A o (S, Σ)-algebră. Dacă $f : T_\Sigma(X) \to A$ şi $g : T_\Sigma(X) \to A$ sunt morfisme, atunci

$$\boxed{f = g \Leftrightarrow f|_X = g|_X}$$

- Propoziţie. $\boxed{X \simeq Y \Leftrightarrow T_\Sigma(X) \simeq T_\Sigma(Y)}$

- Propoziţie. Fie $h : A \to B$ este un morfism *surjectiv*. Oricare ar fi $f : T_\Sigma(X) \to B$ un morfism, există $g : T_\Sigma(X) \to A$ astfel încât $g; h = f$.

Ecuaţiile şi semantica lor

(S, Σ) signatură multisortată

- O (S, Σ)-ecuaţie este formată dintr-o mulţime de variabile X şi din doi termeni de acelaşi sort din $T_\Sigma(X)$. Vom nota o ecuaţie prin
$$(\forall X)t \doteq_s t'.$$
- Spunem că o (S, Σ)-algebră A satisface o ecuaţie $(\forall X)t \doteq_s t'$ dacă $\tilde{\boldsymbol{a}}_s(t) = \tilde{\boldsymbol{a}}_s(t')$ pentru orice atribuire $\boldsymbol{a} : X \to A$. În acest caz, vom nota
$$A \models (\forall X)t \doteq_s t'.$$
- $\doteq$ egalitate formală, $=$ egalitate efectivă

Definirea operaţiilor derivate

$(S = \{s\}, \Sigma)$ signatură,
$X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ mulţime de variabile

- A o Σ-algebră, $t \in T_\Sigma(X)$
  Definim funcţia termen $A_t : A^n \to A$ prin
  $A_t(a_1, \ldots, a_n) := \tilde{\boldsymbol{a}}(t)$, unde $\boldsymbol{a}(x_i) := a_i$ or. $i = 1, \ldots, n$
  - A_t este operaţie derivată pe A
- $\Sigma = \{0, 1, \vee, \wedge, ^{-}\}$ signatura algebrelor Boole,
  $X = \{x, y\}$, $t = \overline{x} \vee y \in T_\Sigma(X)$
  Dacă B este o algebră Boole, atunci
  $t_B(b_1, b_2) = b_1 \to b_2$ oricare b_1, $b_2 \in B$.

Semantica instrucţiunii de atribuire x:=e

- X este mulţimea variabilelor, $x \in X$, $e \in T_\Sigma(X)$
- D este Σ-algebra datelor
- o stare a memoriei este o funcţie $\boldsymbol{a} : X \to D$
- semantica unei instrucţiuni descrie modul în care instrucţiunea modifică starile memoriei
- $Mem := \{\boldsymbol{a} : X \to D \mid \boldsymbol{a} \text{ funcţie}\}$

  $Sem(x := e) \; : \; Mem \; \to \; Mem$

  $$Sem(x := e)(\boldsymbol{a})(y) := \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{a}}(e) & \text{dacă } y = x, \\ \boldsymbol{a}(y) & \text{dacă } y \neq x. \end{cases}$$