



# Programare Logică

---

## Metoda Algebrei Inițiale



# Aplicații

---

Vom prezenta următoarele aplicații ale metodei algebrei inițiale:

- reprezentarea expresiilor în formă poloneză inversă,
- compilării unei expresii aritmetice folosind o mașina cu stivă și acumulator.


$$G = (S_0, N, T, P) \text{ pt. expresii}$$

Definim o g.i.c. pentru expresii construite cu variabilele  $X = \{x, y, z\}$ .

■  $G = (S_0, N, T, P)$

$$N = \{\langle prog \rangle, \langle exp \rangle, \langle term \rangle, \\ \langle fact \rangle, \langle var \rangle\},$$

$$S_0 = \langle prog \rangle,$$

$$T = \{x, y, z, (, ), +, *\}, P = \{p_0, \dots, p_9\},$$

$G = (S_0, N, T, P)$  pt. expresii

$[p0] \langle prog \rangle \longrightarrow \langle exp \rangle$

$[p1] \langle var \rangle \longrightarrow x$

$[p2] \langle var \rangle \longrightarrow y$

$[p3] \langle var \rangle \longrightarrow z$

$[p4] \langle fact \rangle \longrightarrow \langle var \rangle$

$[p5] \langle fact \rangle \longrightarrow (\langle exp \rangle)$

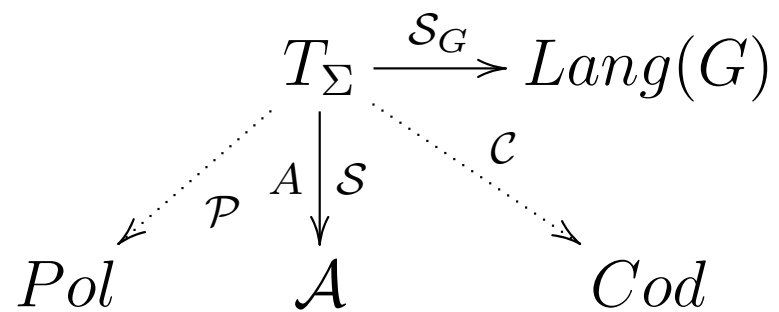
$[p6] \langle term \rangle \longrightarrow \langle fact \rangle$

$[p7] \langle term \rangle \longrightarrow \langle fact \rangle * \langle term \rangle$

$[p8] \langle exp \rangle \longrightarrow \langle term \rangle$

$[p9] \langle exp \rangle \longrightarrow \langle exp \rangle + \langle term \rangle$

# Semantica algebrei inițiale



$$\begin{array}{ccc} t_w & \xrightleftharpoons{S_G} & w \\ \downarrow S_A & & \\ Sem(w) = S_A(t_w) & & \end{array}$$

## Algebra $Pol$ - suportul

- Definim forma poloneză postfix a unei expresii din  $L(G)$  prin metoda algebrei inițiale. Pentru aceasta construim  $\mathcal{G}$ -algebra semantică  $Pol$ , unde  $\mathcal{G} = (S = N, \Sigma = P)$ .
- $Pol_s = T^* = \bigcup_{k \geq 0} T^k, s \in N \setminus \{\langle var \rangle\}$   
 $Pol_{\langle var \rangle} = X = \{x, y, z\}$

## Algebra $Pol$ - operațiile

- $Pol_p : T^* \rightarrow T^*, p \in \{p_0, p_5, p_6, p_8\},$   
 $Pol_p(w) = w$  **oricare**  $w \in T^*,$
- $Pol_{p_1}, Pol_{p_2}, Pol_{p_3} : \rightarrow X,$   
 $Pol_{p_1} = x, Pol_{p_2} = y, Pol_{p_3} = z,$
- $Pol_{p_4} : X \rightarrow T^*, Pol_{p_4}(v) = v, \text{ oricare } v \in X,$
- $Pol_{p_7} : T^* \times T^* \rightarrow T^*, Pol_{p_7}(\alpha, \beta) = \alpha\beta*,$
- $Pol_{p_9} : T^* \times T^* \rightarrow T^*, Pol_{p_7}(\alpha, \beta) = \alpha\beta+,$

## Forma poloneză

- $\mathcal{S}_G : T_\Sigma \rightarrow \text{Lang}(G)$  unicul  $\mathcal{G}$ -morfism  
 $\mathcal{P} : T_\Sigma \rightarrow \text{Pol}$  unicul  $\mathcal{G}$ -morfism
- Pentru orice  $e \in L(G)$ , forma poloneză postfix este  $\mathcal{P}(t_e)$ , unde  $t_e \in T_\Sigma$  este unicul termen cu  $\mathcal{S}_G(t_e) = e$ .
- $e = y * (x + z)$   
 $t_e =$   
 $p_0(p_8(p_7(p_4(p_2), p_5(p_9(p_8(p_6(p_4(p_1))))), p_6(p_4(p_3))))))$   
 $\mathcal{P}(t_e) = \mathcal{P}(T_{p_0}(T_{p_8}(T_{p_7}(T_{p_4}(T_{p_2}), T_{p_5}(T_{p_9}(T_{p_8}($   
 $T_{p_6}(T_{p_4}(T_{p_1}))), T_{p_6}(T_{p_4}(T_{p_3}))))))))) =$   
 $\text{Pol}_{p_0}(\text{Pol}_{p_8}(\text{Pol}_{p_7}(\text{Pol}_{p_4}(\text{Pol}_{p_2}), \text{Pol}_{p_5}(\text{Pol}_{p_9}(\text{Pol}_{p_8}($   
 $\text{Pol}_{p_6}(\text{Pol}_{p_4}(\text{Pol}_{p_1}))), \text{Pol}_{p_6}(\text{Pol}_{p_4}(\text{Pol}_{p_3}))))))) =$   
 $\text{Pol}_{p_7}(y, \text{Pol}_{p_9}(x, z)) = \text{Pol}_{p_7}(y, xz+) = yxz + *$

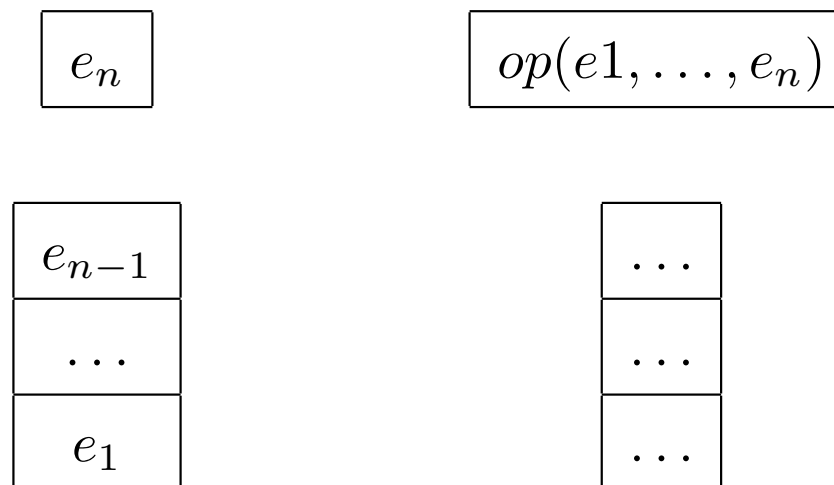


## Compilarea unei expresii

- Folosim pentru compilare o mașină cu stivă și acumulator ( $MSA$ )
- Definim limbajul  $MSA$  și algebra semantică  $Cod$ .  
Compilarea expresiei  $e \in L(G)$  în limbajul  $MSA$  este  $\mathcal{C}(t_e)$ , unde  $t_e \in T_\Sigma$  este unicul termen cu  $\mathcal{S}_G(t_e) = e$ , iar  $\mathcal{C} : T_\Sigma \rightarrow Cod$  este unicul  $\mathcal{G}$ -morfism.

## Funcționarea *SMA*

- La efectuarea operației  $op(e_1, \dots, e_n)$ , valorile  $e_1, \dots, e_{n-1}$  vor fi în stivă, iar valoarea lui  $e_n$  în registru.
- Rezultatul evaluării oricărei expresii este depus în registru. Registrul este vârful *real* al stivei. Evaluarea unei expresii lasă stiva neschimbată.



# Instrucțiunile *SMA*

- **R** este registrul (acumulatorul)
- **P** este adresa primei poziții libere din stivă
- Instrucțiunile *SMA*:
  - inc P** (incrementează **P**)
  - dec P** (decrementează **P**)
  - Ad R** (adună valoarea din vârful stivei cu cea din **R**,  
iar rezultatul este depus în **R**)
  - Mu R** (înmulțește valoarea din vârful stivei cu cea din **R**,  
iar rezultatul este depus în **R**)
  - ld v** (încarcă în **R** valoarea din *v*)
  - st R** (mută în stivă valoarea din **R**)
  - print** (afișează conținutul lui **R**)

## Algebra *Cod* - suportul

- $Inst(MSA)$  = instructiunile definite anterior
- codul unei expresii este un șir de instrucțiuni separate prin ";"
- $Cod_s = (Inst(SMA) \cup \{;\})^*$ , oricare  $s \in S = N$
- Notăm  $SI := Cod_s, s \in S$

## Algebra *Cod* - operațiile

- $C_{p0} : SI \rightarrow SI,$   
 $C_{p0}(\alpha) = \alpha; \text{print}$
- $C_p : SI \rightarrow SI, p \in \{p4, p5, p6, p8\}$   
 $C_p(\alpha) = \alpha$
- $C_{p1}, C_{p2}, C_{p3} : \rightarrow SI,$   
 $C_{p1} = \text{ld } x, C_{p2} = \text{ld } y, C_{p3} = \text{ld } z$
- $C_{p7} : SI \times SI \rightarrow SI,$   
 $C_{p7}(\alpha, \beta) = \alpha; \text{st R}; \text{inc P}; \beta; \text{Mu R}; \text{dec P}$
- $C_{p9} : SI \times SI \rightarrow SI,$   
 $C_{p9}(\alpha, \beta) = \alpha; \text{st R}; \text{inc P}; \beta; \text{Ad R}; \text{dec P}$

# Compilarea

- Pentru orice  $e \in L(G)$ , codul evaluării expresiei  $e$  este  $\mathcal{C}(t_e)$ , unde  $t_e \in T_\Sigma$  este unicul termen cu  $\mathcal{S}_G(t_e) = e$ .

- $e = y * (x + z)$

$t_e =$

$p0(p8(p7(p4(p2), p5(p9(p8(p6(p4(p1))), p6(p4(p3)))))$

$\mathcal{C}(t) = \mathcal{C}(T_{p0}(T_{p8}(T_{p7}(T_{p4}(T_{p2}),$

$T_{p5}(T_{p9}(T_{p8}(T_{p6}(T_{p4}(T_{p1}))), T_{p6}(T_{p4}(T_{p3})))))) =$

$C_{p0}(C_{p8}(C_{p7}(C_{p4}(C_{p2}), C_{p5}($

$C_{p9}(C_{p8}(C_{p6}(C_{p4}(C_{p1}))), C_{p6}(C_{p4}(C_{p3})))) =$

# Compilarea

$C_{p0}(C_{p7}(C_{p2}, C_{p9}(C_{p1}, C_{p3}))) =$

$C_{p7}(C_{p2}, C_{p9}(C_{p1}, C_{p3})); \text{print} =$

$C_{p2}; \text{st R}; \text{inc P}; C_{p9}(C_{p1}, C_{p3});$   
 $\text{Mu R}; \text{dec P}; \text{print} =$

$C_{p2}; \text{st R}; \text{inc P}; C_{p1}; \text{st R}; \text{inc P}; C_{p3};$   
 $\text{Ad R}; \text{dec P}; \text{Mu R}; \text{dec P}; \text{print} =$

$\text{Id } y; \text{st R}; \text{inc P}; \text{Id } x; \text{st R}; \text{inc P}; \text{Id } z;$   
 $\text{Ad R}; \text{dec P}; \text{Mu R}; \text{dec P}; \text{print}$

$$e = y * (x + z), x = 3, y = 7, z = 2$$

| Cod         | R  | Stiva( $\leftarrow$ ) | P |
|-------------|----|-----------------------|---|
| -           | -  | -                     | 1 |
| ld $y$ ;    | 7  | -                     | 1 |
| st R;inc P; | 7  | 7                     | 2 |
| ld $x$ ;    | 3  | 7                     | 2 |
| st R;inc P; | 3  | 3 7                   | 3 |
| ld $z$ ;    | 2  | 3 7                   | 3 |
| Ad R;dec P; | 5  | 7                     | 2 |
| Mu R;dec P; | 35 | -                     | 1 |
| print       | 35 |                       |   |