# Programare logică

## Demonstrarea ecuaţiilor condiţionate

# Demonstrarea ec. condiţionate

$(S, \Sigma)$ signatura, $X$ mulţime de variabile
$\Gamma$ mulţime de ecuaţii condiţionate

Teoremă deducţiei. Sunt echivalente:

(1) $\Gamma \models (\forall X) t \doteq_s t' \ if \ H$

(2) $\Gamma \bigcup \{(\forall X) u \doteq_{s'} v \mid u \doteq_{s'} v \in H\} \vdash \ (\forall X) t \doteq_s t'$

Demonstraţie: (1) $\Rightarrow$(2) este evidentă

(2) $\Rightarrow$(1) este evidentă pentru $X = \emptyset$

Pentru a demonstra (2) $\Rightarrow$(1) cu $X$ mulţime arbitrară de variabile vom folosi Teorema constantelor

# $\Sigma(X)$

$(S, \Sigma)$ signatură, $X$ mulţime de variabile

- mulţimea $X$ poate fi privită ca o signatură care are numai operaţii constante:
  variabila $x \in X_s$ devine operaţia constantă $x :\to s$
- $X = \{X_{w,s}\}_{w \in S^*, s \in S}$
  - $X_{w,s} = \emptyset$ pentru $w \neq \lambda$
  - $X_{\lambda,s} = X_s$
- $\Sigma(X) := \Sigma \cup X$
  - $\Sigma(X)_{w,s} = \Sigma_{w,s}$ pentru $w \neq \lambda$
  - $\Sigma(X)_{\lambda,s} = \Sigma_{\lambda,s} \cup X_s$

## $(S, \Sigma)$ signatură, $X$ mulţime de variabile $\Sigma(X)$-algebre

- $A$ $\Sigma$-algebră, $\boldsymbol{a} : X \to A$ atribuire
  - $(A, \boldsymbol{a})$ este $\Sigma(X)$-algebră
  - $A_x := \boldsymbol{a}_s(x)$ oricare $x \in X_s$, $s \in S$
  - orice $\Sigma(X)$-algebră poate fi construită astfel
- $T_{\Sigma(X)} = \{T_{\Sigma(X),s}\}_{s \in S}$
  - $T_{\Sigma(X),s} = T_{\Sigma}(X)_s$
  - $T_x := x$ oricare $x \in X_s$, $s \in S$
- $T_{\Sigma(X)}$ este $\Sigma(X)$-algebră iniţială
- $(A, \boldsymbol{a})$ $\Sigma(X)$-algebră
  $\tilde{\boldsymbol{a}} : T_{\Sigma(X)} \to A$ unicul morfism

# Teorema constantelor I

$(S, \Sigma)$ signatura, $X$ mulţime de variabile

Teorema constatelor. Sunt echivalente:

- $A \models_{\Sigma} (\forall X) t \doteq_s t'$
- $(A, \boldsymbol{a}) \models_{\Sigma(X)} (\forall \emptyset) t \doteq_s t'$ oricare $\boldsymbol{a} : X \to A$

variabilele “sunt” constante despre care nu ştim nimic

# Teorema constantelor II

$(S, \Sigma)$ signatura, $X$ mulţime de variabile
$E$ o mulţime de $\Sigma$-ecuaţii necondiţionate

Teorema constatelor. Sunt echivalente:

- $E \models_{\Sigma} (\forall X) t \doteq_s t' \ if \ H$
- $E \bigcup \{(\forall \emptyset) u \doteq_{s'} v \mid u \doteq_{s'} v \in H\} \models_{\Sigma(X)} \ (\forall \emptyset) t \doteq_s t'$

# Demonstrarea ecuaţiilor condiţionate

$(S,\Sigma)$ signatura, $X$ mulţime de variabile
$\Gamma$ mulţime de ecuaţii condiţionate

Teoremă deducţiei. Sunt echivalente:

(1) $\Gamma \models (\forall X)t \doteq_s t' \ if \ H$

(2) $\Gamma \bigcup \{(\forall X)u \doteq_{s'} v \mid u \doteq_{s'} v \in H\} \vdash \ (\forall X)t \doteq_s t'$

(3) $\Gamma \bigcup \{(\forall X)u \doteq_{s'} v \mid u \doteq_{s'} v \in H\} \models \ (\forall X)t \doteq_s t'$

# Exemplu

Orice funcţie inversabilă la dreapta este injectivă.

$S := \{s\}$, $\Sigma := \{f : s \to s, g : s \to s\}$

$\Gamma := \{(\forall\{x\})\, g(f(x)) \doteq x\}$ ($g$ inversa la dreapta a lui $f$)

$\Gamma \vdash (\forall\{x, y\})\, x \doteq y \; if \; \{f(x) \doteq f(y)\}$

$\Gamma \cup \{(\forall\{x, y\})\, f(x) \doteq f(y)\} \vdash (\forall\{x, y\})\, x \doteq y$ (teorema deducţiei)

(1) $(\forall\{x, y\})\, f(x) \doteq f(y)$ (ipoteză)

(2) $(\forall\{x, y\})\, g(f(x)) \doteq g(f(y))$ ($C_\Sigma$)

(3) $(\forall\{y\})\, g(f(y)) \doteq y$ (Sub$\{x \leftarrow y\}$)

(4) $(\forall\{x, y\})\, g(f(x)) \doteq y$ (2,3,T)

(5) $(\forall\{x\})\, x \doteq g(f(x))$ (S)

(6) $(\forall\{x, y\})\, x \doteq y$ (4,5, T)