

GEOMETRIE COMPUTAȚIONALĂ

Mihai-Sorin Stupariu

Sem. I, 2010-2011

Cuprins

1	Material pregătitor	3
1.1	Elemente de algebră liniară, geometrie afină și euclidiană	3
1.2	Curbe parametrizate. Curbe polinomiale. Schimbări de parametru	3
1.3	Vector tangent, vector accelerație. Regularitate	5
1.4	Racord de clasă \mathcal{C}^k al unor arce de curbă. Continuitate geometrică	6
1.5	Curbe plane (curbe 2D)	8
1.6	Curbe 3D	9
1.7	Elemente de geometrie diferențială a suprafețelor	11
2	Interpolare polinomială	16
2.1	Segmente. Interpolare liniară (afină)	16
2.2	Algoritmul lui Aitken	17
3	Curbe Bézier	19
3.1	Algoritmul de Casteljau	19
3.2	Forma Bernstein a curbelor Bézier	21
4	Proprietăți ale curbelor Bézier	24
4.1	Proprietăți elementare	24
4.2	Derivatele unei curbe Bézier	24
4.3	Modificarea unei curbe Bézier	25
4.4	Generarea unei curbe Bézier cu poligoane de control diferite (mărirea gradului)	26
4.5	Subdivizare	27
5	Cubice spline	29
5.1	Racordul a două arce de curbă Bézier	29
5.2	Cubice spline	32
6	Curbe Bézier raționale	35
A	Proiecte	38
B		40

Capitolul 1

Material pregătitor

1.1 Elemente de algebră liniară, geometrie afină și euclidiană

Noțiuni de algebră liniară: spațiu vectorial, vector, combinație liniară, liniar (in)dependentă, sistem de generatori, bază, reper, dimensiune a unui spațiu vectorial, componentele unui vector într-un reper, matrice de trecere între repere, repere orientate la fel (opus), reper drept (strâmb), produs scalar, norma unui vector, versorul unui vector nenul, spațiu vectorial euclidian, vectori ortogonali, bază ortonormată, reper ortonormat.

Noțiuni de geometrie afină: vectorul determinat de două puncte, combinație afină, afin (in)dependentă, acoperirea afină a unei mulțimi de puncte, dreapta determinată de două puncte distincte, reper cartezian, coordonatele unui punct într-un reper cartezian, sistem de axe asociat unui reper cartezian din \mathbb{R}^n , raportul a trei puncte coliniare, segmentul determinat de două puncte, mulțime convexă, închiderea (înfășurătoarea) convexă a unei mulțimi, aplicație afină (exemplu: translație, omotetie, proiecție, simetrie).

Noțiuni de geometrie euclidiană: distanța dintre două puncte, reper cartezian ortonormat, izometrie, proiecție centrală.

Detalii pot fi găsite în [8], [10], [15] [16].

1.2 Curbe parametrizate. Curbe polinomiale. Schimbări de parametru

Definiția 1.1 Fie $I \subset \mathbb{R}$ un interval. O **curbă parametrizată** de clasă \mathcal{C}^k este dată de o aplicație \mathcal{C}^k -diferențiabilă $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$. Aplicația c se numește **parametrizare**, iar mulțimea $M := \text{Im}(c)$ se numește **image geometrică a curbei**.

Dacă $n = 2$ curba se numește **plană (curbă 2D)**, iar dacă $n = 3$ curba se numește **strâmbă (curbă 3D)**.

Exemplul 1.2 (i) Curbele

$$\begin{aligned}c_1 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & c_1(t) &= (2 + 4t + 1, -2 - 4t); \\c_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & c_2(t) &= (4 - 3 \cos t, 3 + 2 \sin t); \\c'_2 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, & c'_2(t) &= (4 - 3 \cos 3t, 3 + 2 \sin 3t);\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_2'' : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_2''(t) = (4 - 3\cos(1-t), 3 + 2\sin(1-t)); \\
c_3 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_3(t) = (2 - t + t^2 - t^3 + 6t^4, 1 + t + 2t^2 + 3t^3); \\
c_4 : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_4(t) = (t^2 - 2t + 2, 2t^2 - 6t + 4) = \\
&= t^2(1, 0) + 2t(1-t)(1, 1) + (1-t)^2(2, 4); \\
c_5 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_5(t) = (t^3 + 3t, -3t^2 + 3t) = \\
&= t^3(4, 0) + 3t^2(1-t)(2, 1) + 3t(1-t)^2(1, 1) + (1-t)^3(0, 0)
\end{aligned}$$

sunt curbe parametrizate plane de clasă \mathcal{C}^∞ .

(ii) Curba $c_6 : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c_6(t) = (t, t|t|)$ este de clasă \mathcal{C}^1 , dar nu este de clasă \mathcal{C}^2 , iar curba $c_6' : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c_6'(t) = (t, |t|)$ este de clasă \mathcal{C}^0 , dar nu este de clasă \mathcal{C}^1 .

(iii) Curbele $c_7 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c_7(t) = (2\cos t, 2\sin t, t)$ și

$$\begin{aligned}
c_8 : [0, 1] &\rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c_8(t) = (-2t^3 + 3t^2, 4t^3 - 6t^2 + 3t, t^3) = \\
&= t^3(1, 1, 1) + 3t^2(1-t)(1, 0, 0) + 3t(1-t)^2(0, 1, 0) + (1-t)^3(0, 0, 0)
\end{aligned}$$

sunt curbe strâmbe de clasă \mathcal{C}^∞ .

Definiția 1.3 (i) O **curbă polinomială de grad d** este o curbă definită de o parametrizare polinomială, i.e. de o aplicație $c = (c_1, \dots, c_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ cu proprietatea că c_1, \dots, c_n sunt funcții polinomiale de grad cel mult d și cel puțin una dintre ele are grad exact d .

(ii) O curbă dată de o aplicație $c : [u_0, u_L] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numește **polinomială pe porțiuni** dacă există o diviziune

$$u_0 < u_1 < \dots < u_i < u_{i+1} < \dots < u_L$$

a intervalului $[u_0, u_L]$ astfel ca pentru orice $i = 0, \dots, L-1$, restricția $c|_{[u_i, u_{i+1}]}$ a aplicației c la intervalul $[u_i, u_{i+1}]$ să fie polinomială.

Exemplul 1.4 (i) Curbele c_1 , c_3 , c_4 și c_5 din exemplul 1.2 sunt curbe polinomiale de grade 1, 4, 2, respectiv 3.

(ii) Orice curbă polinomială $c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ este o curbă polinomială pe porțiuni.

(iii) Curbele c_6 și c_6' din exemplul 1.2 sunt curbe polinomiale pe porțiuni care nu sunt curbe polinomiale, deoarece avem

$$\begin{aligned}
c_6(t) &= \begin{cases} (t, -t^2), & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ (t, t^2), & \text{dacă } t \in [0, 1]. \end{cases} \\
c_6'(t) &= \begin{cases} (t, -t), & \text{dacă } t \in [-1, 0] \\ (t, t), & \text{dacă } t \in [0, 1]. \end{cases}
\end{aligned}$$

Definiția 1.5 Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $\bar{c} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ două curbe parametrizate. Spunem că c și \bar{c} diferă printr-o **schimbare de parametru** (sau că \bar{c} a fost obținută din c printr-o schimbare de parametru) dacă există un difeomorfism $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$ (numit **reparametrizare**) astfel ca $\bar{c} = c \circ \varphi$.

O reparametrizare φ **păstrează (schimbă) orientarea** dacă este strict crescătoare (respectiv strict descrescătoare).

Observația 1.6 Printr-o reparametrizare imaginea geometrică a curbei considerate nu se modifică, se schimbă doar "modul" în care parcurgem curba.

Definiția 1.7 O schimbare afină de parametru (reparametrizare afină) este o aplicație de forma

$$\varphi : [c, d] \rightarrow [a, b], \quad \varphi(t) = \frac{b-a}{d-c}t + \frac{ad-bc}{d-c},$$

unde $[a, b], [c, d] \subset \mathbb{R}$ sunt două intervale (care nu se reduc la un punct).

Observația 1.8 Schimbările afine de parametru sunt singurele care mențin o curbă polinomială în clasa curbelor polinomiale de același grad.

Exemplul 1.9 (i) Aplicațiile c_2 , c'_2 și c''_2 din exemplul 1.2 sunt parametrizări diferite ale elipsei de ecuație $\frac{(x_1-4)^2}{9} + \frac{(x_2-3)^2}{4} = 1$. Schimbările de parametru utilizate sunt $t \mapsto 3t$, respectiv $t \mapsto 1-t$.

(ii) Aplicația $\varphi : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$, $\varphi(t) = 1-t$ este o schimbare afină de parametru care schimbă orientarea. Aplicând această schimbare de parametru curbei polinomiale de gradul 2 dată de $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (t^2 + 4t + 1, t + 2)$ obținem curba parametrizată $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\bar{c}(t) = (t^2 - 6t + 6, -t + 3)$. Imaginea geometrică a celor două curbe este un arc al parabolei $x_1 - x_2^2 + 3 = 0$, care unește punctele $A = (1, 2)$ și $B = (6, 3)$. Parametrizarea c "parcurge" acest arc de la A la B , în vreme ce \bar{c} "parcurge" acest arc în sens invers.

Definiția 1.10 O curbă dată de o parametrizare injectivă se numește **curbă simplă**.

Exemplul 1.11 În exemplul 1.2 curba c_1 este simplă, iar curba c_2 nu este o curbă simplă.

1.3 Vector tangent, vector accelerație. Regularitate

Definiția 1.12 Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat.

(i) Vectorul $c'(t_0) := (c'_1(t_0), \dots, c'_n(t_0))$ se numește **vector tangent** (**vector viteză**) la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$. Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și are direcția dată de vectorul $c'(t_0)$ se numește **tangentă** la curba c în punctul $c(t_0)$.

(ii) Dreapta care trece prin punctul $c(t_0)$ și este perpendiculară la tangenta la curbă în acest punct se numește **normală** la curba c în punctul $c(t_0)$.

Observația 1.13 Ecuațiile parametrice ale tangentei la curba c prin punctul $c(t_0)$ sunt

$$\begin{cases} x_1 = c_1(t_0) + sc'_1(t_0) \\ \dots\dots\dots \\ x_n = c_n(t_0) + sc'_n(t_0) \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}.$$

Definiția 1.14 Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) a unei curbe

- (i) Punctul $c(t_0)$ se numește **punct regulat** dacă $c'(t_0) \neq 0$.
- (ii) Punctul $c(t_0)$ se numește **punct singular** dacă $c'(t_0) = 0$.
- (iii) O curbă se numește **regulată** dacă toate punctele sale sunt regulate.

Definiția 1.15 Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 2$) a unei curbe și $t_0 \in I$ fixat. Vectorul $c''(t_0) := (c''_1(t_0), \dots, c''_n(t_0))$ se numește **vector accelerație** la curbă în punctul corespunzător lui $c(t_0)$.

Propoziția 1.16 Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $\bar{c} : \bar{I} \rightarrow \mathbb{R}^n$ două parametrizări de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 2$) ale unei curbe, astfel ca $\bar{c} = c \circ \varphi$, unde $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$ este o schimbare de parametru. Pentru orice $s \in \bar{I}$ au loc relațiile

$$\bar{c}'(s) = \varphi'(s) \cdot c'(\varphi(s)),$$

$$\bar{c}''(s) = \varphi'(s)^2 \cdot c''(\varphi(s)) + \varphi''(s) \cdot c'(\varphi(s)).$$

În particular, regularitatea unei curbe este o proprietate intrinsecă a acesteia, în sensul că nu depinde de parametrizarea aleasă.

Definiția 1.17 Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, \dots, c_n)$ o parametrizare de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 1$) a unei curbe și $[a, b] \subset I$ un interval.

- (i) $c|_{[a,b]} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ se numește **arc al curbei** c ;
- (ii) **lungimea arcului de curbă** $c|_{[a,b]}$ este $L(c|_{[a,b]}) = \int_a^b \|c'(t)\| dt$.

Propoziția 1.18 Lungimea unui arc de curbă este invariantă la schimbări de parametru.

1.4 Racord de clasă \mathcal{C}^k al unor arce de curbă. Continuitate geometrică

Definiția 1.19 Fie $c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $c_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ două parametrizări ale unor arce de curbă.

- (i) Dacă $c_1(b) = c_2(b) =: P$, spunem că cele două arce sunt **racordate** în punctul P .
- (ii) Racordul se numește **de clasă \mathcal{C}^k** dacă $c_1^{(l)}(b) = c_2^{(l)}(b)$, oricare ar fi $l = 0, \dots, k$.

Exemplul 1.20 Curbele date de parametrizările

$$c_1 : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) = (2t + 1, t + 2),$$

$$c_2 : [0, 3] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_2(t) = (t^3 - 3t^2 + 2t + 1, t^2 + t + 2)$$

au în punctul $P = (1, 2)$ un racord de clasă \mathcal{C}^1 care nu este de clasă \mathcal{C}^2 . Mai precis, avem:

$$c_1(0) = c_2(0) = (1, 2); \quad c_1'(0) = c_2'(0) = (2, 1);$$

$$c_1''(0) = (0, 0) \neq c_2''(0) = (-6, 2).$$

Observația 1.21 Fie $c_1 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $c_2 : [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^n$ două parametrizări ale unor arce de curbă care au în $P = c_1(b) = c_2(b)$ un racord de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 1$). Fie $\varphi : [\bar{a}, b] \rightarrow [a, b]$ o schimbare de parametru astfel ca $\varphi(b) = b$, dar $\varphi'(b) \neq 1$ (spre exemplu, o schimbare afină de parametru între intervale de lungimi diferite) și fie $\bar{c}_1 := c_1 \circ \varphi$ curba obținută în urma reparametrizării. Atunci

$$\bar{c}_1'(b) = \varphi'(b) \cdot c_1'(b) \neq c_2'(b),$$

ceea ce arată că, în general, racordul de clasă \mathcal{C}^k nu se păstrează în urma schimbărilor de parametru. Vectorii tangenți sunt coliniari, dar nu identici.

Concret, considerând curbele c_1 și c_2 din exemplul 1.20, schimbarea de parametru $\varphi : [-1, 0] \rightarrow [-2, 0]$, $\varphi(s) = 2s$ și curba $\bar{c}_1 : [-1, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2$, $\bar{c}_1 := c_1 \circ \varphi$, i.e.

$$\bar{c}_1(s) = (4s + 1, 2s + 2),$$

avem

$$\bar{c}_1(0) = c_2(0) = (1, 2); \quad \bar{c}'_1(0) = (4, 2) \neq c'_2(0) = (2, 1).$$

Așadar, deși parametrizările \bar{c}_1 și c_1 sunt echivalente, ele nu au același tip de racord cu c_2 în punctul $(1, 2)$: \bar{c}_1 are un racord de clasă \mathcal{C}^0 , iar c_1 are un racord de clasă \mathcal{C}^1 . Remarcăm faptul că avem $\bar{c}'_1(0) = 2 \cdot c'_2(0)$.

Pentru a permite o mai mare flexibilitate în racordul unor arce de curbă și pentru a nu "pierde" proprietatea de racord de clasă \mathcal{C}^k în urma reparametrizărilor este introdusă noțiunea de continuitate geometrică (definiția 1.23).

Observația 1.22 Există o clasă importantă de schimbări de parametru care păstrează racordul de clasă \mathcal{C}^k : **translațiile**, i.e. reparametrizările de forma

$$\varphi : [a, b] \rightarrow [a - \alpha, b - \alpha], \quad \varphi(t) = t - \alpha, \quad (a, b, \alpha \in \mathbb{R}, a < b),$$

deoarece, în cazul unei translații, avem $\varphi'(t) = 1$, $\varphi^{(l)}(t) = 0$, pentru orice $t \in [a, b]$ și pentru orice $l \geq 2$.

În particular, pentru a studia problema racordului de clasă \mathcal{C}^k este suficient să alegem intervalele pe care sunt definite parametrizările de forma $[a, 0]$, respectiv $[0, b]$, deoarece, printr-o schimbare de tip translație, orice două intervale arbitrare pot fi transformate în intervale de acest tip.

Definiția 1.23 Fie $c_1 : [a, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ și $c_2 : [0, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ două parametrizări ale unor arce de curbă astfel ca $c_1(0) = c_2(0) =: P$ și $c'_1(0) \neq 0, c'_2(0) \neq 0$. Cele două arce au în punctul P un **racord de clasă GC^k** dacă există o reparametrizare (care păstrează orientarea) $\varphi : [\bar{a}, 0] \rightarrow [a, 0]$ cu $\varphi(0) = 0$, astfel încât parametrizările $c_1 \circ \varphi$ și c_2 să verifice condițiile de racord de clasă \mathcal{C}^k . În acest caz spunem că parametrizarea

$$c : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n, c(t) = \begin{cases} c_1(t), & \text{dacă } t \in [a, 0] \\ c_2(t), & \text{dacă } t \in [0, b] \end{cases}$$

are **continuitate geometrică de clasă GC^k** în $t = 0$.

Observația 1.24 În CAGD sunt utilizate mai ales condițiile de racord de clasă GC^1 și GC^2 , care pot fi verificate astfel: fie c_1 și c_2 două parametrizări ca în definiția 1.23. Atunci:

(i) arcele definite de cele două parametrizări au un racord de clasă GC^1 dacă și numai dacă există o constantă pozitivă $\alpha > 0$ astfel ca

$$c'_2(0) = \alpha \cdot c'_1(0)$$

(i.e. vectorii tangenți la cele două curbe sunt coliniari și au același sens);

(ii) arcele definite de cele două parametrizări au un racord de clasă GC^2 dacă și numai dacă există o constantă $\alpha > 0, \beta \in \mathbb{R}$ astfel ca

$$\begin{aligned} c'_2(0) &= \alpha \cdot c'_1(0) \\ c''_2(0) &= \alpha^2 \cdot c''_1(0) + \beta \cdot c'_1(0). \end{aligned}$$

Exemplul 1.25 Fie curbele

$$c_1 : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_1(t) = (3t^3 - 2t^2 + 2t + 2, t^2 - 2t + 1),$$

$$c_2 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_2(t) = (6t + 2, -6t + 1),$$

$$c_3 : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c_3(t) = (3t^3 - 10t^2 + 4t + 2, 6t^2 - 4t + 1).$$

Cum $c_1(0) = c_2(0) = c_3(0) = (2, 1)$, ne putem pune problema racordului curbei c_1 cu c_2 și cu c_3 în $t = 0$. Pentru a stabili ce clasă au aceste racorduri, calculăm

$$\begin{aligned} c'_1(0) &= (2, -2), & c'_2(0) &= (6, -6), & c'_3(0) &= (4, -4); \\ c''_1(0) &= (-4, 2), & c''_2(0) &= (0, 0), & c''_3(0) &= (-20, 12). \end{aligned}$$

Avem $c'_2(0) = 3c'_1(0)$, iar $c''_2(0) - 9c''_1(0) = (36, -18)$. Acest vector nu este coliniar cu $c'_1(0) = (2, -2)$, deci curbele c_1 și c_2 au un racord de clasă GC^1 care nu este de clasă GC^2 în $(2, 1) = c_1(0) = c_2(0)$. În schimb,

$$c'_3(0) = 2c'_1(0), \quad c''_3(0) - 4c''_1(0) = (-4, 4) = -2c'_1(0),$$

ceea ce arată că c_1 și c_3 au un racord de clasă GC^2 în $P = c_1(0) = c_3(0)$.

1.5 Curbe plane (curbe 2D)

Definiția 1.26 Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c = (c_1, c_2)$ o curbă plană.

(i) **Curbura** lui c într-un punct regulat $c(t)$ este

$$\kappa_c(t) := \frac{c'_1(t)c''_2(t) - c''_1(t)c'_2(t)}{(c'_1(t)^2 + c'_2(t)^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{\det(c'(t), c''(t))}{\|c'(t)\|^3}.$$

(ii) În cazul în care $\kappa_c(t) \neq 0$, **raza de curbură a lui c în $c(t)$** este, prin definiție, $\frac{1}{|\kappa_c(t)|}$.

Exemplul 1.27 (i) Curbura unei drepte este egală cu 0 în orice punct al dreptei: fie

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (a_1 + t(b_1 - a_1), a_2 + t(b_2 - a_2))$$

o parametrizare a unei drepte. Atunci $c'(t) = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$, $c''(t) = (0, 0)$, deci $\kappa_c(t) = 0$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

(ii) Curbura unui cerc de rază r este, la rândul său constantă, fiind egală cu $\frac{1}{r}$ în orice punct: fie

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad c(t) = (a_1 + r \cos t, a_2 + r \sin t)$$

o parametrizare a cercului de centru (a_1, a_2) și de rază r . Avem

$$c'(t) = (-r \sin t, r \cos t), \quad c''(t) = (-r \cos t, -r \sin t), \quad \forall t \in \mathbb{R},$$

de unde deducem că

$$\det(c'(t), c''(t)) = \det \begin{pmatrix} -r \sin t & -r \cos t \\ r \cos t & -r \sin t \end{pmatrix} = r^2; \quad \|c'(t)\| = r;$$

rezultând imediat că avem $\kappa_c(t) = \frac{1}{r}$ pentru orice $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Fie $c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$, $c(t) = (a \cos t, b \sin t)$ cu $a > b > 0$ o parametrizare a elipsei de centru O și semiaxe a și b . Avem

$$c'(t) = (-a \sin t, b \cos t); \quad c''(t) = (-a \cos t, -b \sin t);$$

$$\det(c'(t), c''(t)) = ab; \quad \|c'(t)\| = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}.$$

În acest caz curbura nu mai este constantă, ci avem $\kappa_c(t) = \frac{ab}{(a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t)^{\frac{3}{2}}}$.

Observația 1.28 (i) Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ o parametrizare a unei curbe 2D regulate și fie $\varphi : \tilde{I} \rightarrow I$ o schimbare de parametru. Oricare ar fi $s \in \tilde{I}$ are loc egalitatea

$$\kappa_{c \circ \varphi}(s) = \text{sgn}(\varphi) \kappa_c(\varphi(s)),$$

unde $\text{sgn}(\varphi)$ este egal cu 1 sau -1 , după cum φ este crescătoare sau descrescătoare (i.e. curbura unei curbe 2D este invariantă, până la semn, la schimbări de parametru).

(ii) Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ o curbă 2D și $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ o izometrie. Pentru orice $t \in I$ are loc egalitatea

$$\kappa_{F \circ c}(t) = \varepsilon(F) \cdot \kappa_c(t),$$

unde $\varepsilon(F)$ este 1 sau -1 , după cum F păstrează sau schimbă orientarea (i.e. curbura unei curbe 2D este invariantă, până la semn, la izometrii).

(iii) Exemplele (i) și (ii) din 1.27 arată că dreptele și cercurile sunt curbe cu curbura constantă (nulă, respectiv nenulă). Reciproc, dacă o curbă 2D $c : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ cu $I \subset \mathbb{R}$ interval conex are curbura constantă $\kappa_c(t) = \kappa$ în orice punct $c(t)$, atunci imaginea sa geometrică este fie inclusă într-o dreaptă (când $\kappa = 0$), fie într-un cerc de rază $\frac{1}{\kappa}$ (când $\kappa \neq 0$).

(iv) În general, se poate pune problema în ce măsură dată curbura putem "reconstitui" curba (existență, unicitate). Răspunsul este dat de teorema fundamentală a curbilor plane (vezi, de exemplu, [11, capitolul 6]).

1.6 Curbe 3D

Definiția 1.29 Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c = (c_1, c_2, c_3)$ o curbă 3D de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 3$) cu proprietatea că vectorii $c'(t)$ și $c''(t)$ sunt liniar independenți, oricare ar fi $t \in I$.

(i) **Curbura** lui c în punctul $c(t)$ este dată de

$$\kappa(t) := \frac{\|c'(t) \times c''(t)\|}{\|c'(t)\|^3}.$$

(ii) **Torsiunea** lui c în punctul $c(t)$ este dată de

$$\tau(t) := \frac{\langle c'(t) \times c''(t), c'''(t) \rangle}{\|c'(t) \times c''(t)\|^2}.$$

Exemplul 1.30 (i) Considerăm curba

$$c : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (2 + t + t^3, -t - t^3, 5 + t^3).$$

Avem, pentru orice $t \in (0, \infty)$,

$$c'(t) = (1 + 3t^2, -1 - 3t^2, 3t^2), \quad \|c'(t)\| = \sqrt{2(1 + 3t^2)^2 + 9t^4};$$

$$c''(t) = (6t, -6t, 6t), \quad c'''(t) = (6, -6, 6),$$

$$c'(t) \times c''(t) = (-6t, -6t, 0); \quad \|c'(t) \times c''(t)\| = 6\sqrt{2}t;$$

$$\kappa(t) = \frac{6\sqrt{2}t}{(\sqrt{2(1 + 3t^2)^2 + 9t^4})^3}, \quad \tau(t) = 0.$$

(ii) Considerăm curba

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (a \cos t, a \sin t, bt), \quad a > 0, b \neq 0,$$

numită **elice circulară dreaptă**. În acest caz avem

$$\begin{aligned} c'(t) &= (-a \sin t, a \cos t, b), & \|c'(t)\| &= \sqrt{a^2 + b^2}; \\ c''(t) &= (-a \cos t, -a \sin t, 0), & c'''(t) &= (a \sin t, -a \cos t, 0); \\ c'(t) \times c''(t) &= (ab \sin t, -ab \cos t, a^2), & \|c'(t) \times c''(t)\| &= a\sqrt{a^2 + b^2}; \\ \kappa(t) &= \frac{a}{a^2 + b^2}, & \tau(t) &= \frac{b}{a^2 + b^2}. \end{aligned}$$

Remarcăm că funcțiile curbură și torsiune sunt constante.

(iii) Considerăm curba

$$c : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (t, t^2, \frac{2t^3}{3}).$$

Pentru această curbă au loc egalitățile

$$\begin{aligned} c'(t) &= (1, 2t, 2t^2), & \|c'(t)\| &= 1 + 2t^2; \\ c''(t) &= (0, 2, 4t), & c'''(t) &= (0, 0, 4); \\ c'(t) \times c''(t) &= 2(2t^2, -2t, 1), & \|c'(t) \times c''(t)\| &= 2(1 + 2t^2); \\ \kappa(t) &= \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}, & \tau(t) &= \frac{2}{(1 + 2t^2)^2}. \end{aligned}$$

În acest caz funcțiile curbură și torsiune nu sunt constante, dar raportul $\frac{\tau}{\kappa}$ este o constantă. În general, o curbă pentru care raportul dintre torsiune și curbură este constant, se numește **elice**.

Observația 1.31 (i) Curbura unei curbe 3D este o funcție pozitivă.

(ii) O curbă 3D are imaginea inclusă într-un plan dacă și numai dacă torsiunea sa este nulă în orice punct al său.

(iii) Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ o parametrizare a unei curbe 3D regulate și fie $\varphi : \bar{I} \rightarrow I$ o schimbare de parametru. Oricare ar fi $s \in \bar{I}$ au loc egalitățile

$$\kappa_{c \circ \varphi}(s) = \kappa_c(\varphi(s)); \quad \tau_{c \circ \varphi}(s) = \varepsilon(\varphi) \tau_c(\varphi(s)).$$

(iv) Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ o curbă 3D și $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ o izometrie. Pentru orice $t \in I$ au loc relațiile

$$\kappa_{F \circ c}(t) = \kappa_c(t), \quad \tau_{F \circ c}(t) = \varepsilon(F) \cdot \tau_c(t).$$

(v) Prin analogie cu rezultatele referitoare la curbele plane, se poate pune problema în ce măsură putem "reconstitui" o curbă 3D (existență, unicitate) pornind de la curbură și torsiune. Răspunsul este dat de teorema fundamentală a curbelor strâmbe (vezi, de exemplu, [11, capitolul 10]).

Definiția 1.32 Fie $c : I \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c = (c_1, c_2, c_3)$ o curbă 3D de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 3$) cu proprietatea că vectorii $c'(t)$ și $c''(t)$ sunt liniar independenți, oricare ar fi $t \in I$. **Triedrul Frenet** în punctul $c(t)$ este format din vectorii

$$T(t) := \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}, \quad N(t) := B(t) \times T(t), \quad B(t) := \frac{c'(t) \times c''(t)}{\|c'(t) \times c''(t)\|}.$$

Vectorul $T(t)$ este **vectorul tangentei** la curbă în punctul $c(t)$. Vectorii $N(t)$ și $B(t)$ se numesc **vector normală principală**, respectiv **vector binormală** la curbă în punctul respectiv.

Observația 1.33 (i) Triedrul Frenet este un reper ortonormat mobil.

(ii) **Formulele lui Frenet**, scrise matriceal sub forma

$$\begin{pmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & v\kappa & 0 \\ -v\kappa & 0 & v\tau \\ 0 & -v\tau & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} T \\ N \\ B \end{pmatrix}, \quad v = \|c'\|$$

arată cum pot fi exprimate derivatele vectorilor triedrului Frenet în reperul asociat acestui triedru.

1.7 Elemente de geometrie diferențială a suprafețelor

Definiția 1.34 O suprafață parametrizată de clasă \mathcal{C}^k este dată de o aplicație \mathcal{C}^k -diferențiabilă $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, unde $U \subset \mathbb{R}^2$ este o mulțime (conexă). Aplicația f se numește **parametrizare**, iar mulțimea $M := \text{Im}(f)$ se numește **image geometrică a suprafeței**.

Exemplul 1.35 (i) Considerăm $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ și

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (u, v, au + bv + c).$$

Imaginea geometrică a lui f este planul de ecuație $x_3 = ax_1 + bx_2 + c$.

(i') Fie $P_0 \in \mathbb{R}^3$ un punct fixat și w_1, w_2 doi vectori ortogonali de lungime egală cu 1. Atunci

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) := P_0 + u \cdot w_1 + v \cdot w_2$$

este o suprafață parametrizată de clasă \mathcal{C}^∞ , a cărei imagine geometrică este planul care trece prin P_0 și are subspațiul director $\langle w_1, w_2 \rangle$.

(ii) Fie $r > 0$ fixat. Aplicația

$$f : \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (r \cos u \cos v, r \cos u \sin v, r \sin u)$$

dă naștere unei suprafețe de clasă \mathcal{C}^∞ a cărei imagine geometrică este sfera de centru 0 și rază r din care au fost eliminate punctele $N(0, 0, r)$ și $S(0, 0, -r)$.

(iii) Funcția

$$f : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (\cos u, \sin u, v)$$

reprezintă o suprafață a cărei imagine este un cilindru circular drept din care a fost scoasă o dreaptă.

(iv) Aplicația

$$f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u)$$

este o parametrizare de clasă \mathcal{C}^∞ a cărei imagine geometrică este **conul** având ecuația $x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 = 0$.

(v) În general, să considerăm o curbă plană și o dreaptă d situată în planul curbei și care nu intersectează imaginea curbei. "Rotind" imaginea geometrică a curbei în jurul lui d , obținem o **suprafață de rotație**. Pentru simplitate să presupunem că dreapta d este dreapta suport a axei Ox_3 , iar curba plană pe care o rotim este inclusă în planul Ox_1x_3 , deci are o parametrizare de forma

$$c : I \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad c(t) = (\varphi(t), 0, \psi(t)), \quad \varphi(t) \neq 0.$$

Vom presupune în continuare că $\varphi(t) > 0$. Un punct fixat $P = (\varphi(t_0), 0, \psi(t_0))$ al curbei se rotește în planul perpendicular pe d ce-l conține, descriind un cerc de centru $(0, 0, \psi(t_0))$ și de rază $\varphi(t_0)$, deci, prin rotire, generează puncte de forma

$$(\varphi(t_0) \cos v, \varphi(t_0) \sin v, \psi(t_0)).$$

În consecință, suprafața de rotație obținută este imaginea parametrizării

$$f : I \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (\varphi(u) \cos v, \varphi(u) \sin v, \psi(u)).$$

Cazuri particulare: Sferă (fără poli), cilindru, tor, hiperboloid cu o pânză, catenoid, pseudosferă.

(vi) Aplicația

$$f : (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad f(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au), \quad a > 0$$

reprezintă o suprafață numită **elicoid drept**.

Observația 1.36 Pentru a obține informații suplimentare despre forma unei suprafețe este util să considerăm curbe (cât mai convenabile) situate pe această suprafață.

De exemplu, să considerăm sfera din exemplul 1.35 (ii) și să fixăm $(u_0, v_0) \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$. Curbele

$$v \mapsto f(u_0, v), \quad u \mapsto f(u, v_0)$$

reprezintă un cerc paralel, respectiv un cerc meridian al sferei.

În cazul elicoidului drept, dacă fixăm (u_0, v_0) cu $u_0 \neq 0$, $f(\cdot, v_0)$ curba reprezintă o porțiune a unei elice circulare drepte, iar curba $f(u_0, \cdot)$ reprezintă normala la această curbă în punctul $f(u_0, v_0)$.

Definiția 1.37 Fie $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ o suprafață. Pentru $(u_0, v_0) \in U$ fixat, curbele

$$v \mapsto f(u_0, v), \quad u \mapsto f(u, v_0)$$

se numesc **curbe coordonate** (duse prin punctul $f(u_0, v_0)$).

Notăție. Fie $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ o suprafață de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 1$). Fixăm $(u_0, v_0) \in U$ și notăm

$$f_u(u_0, v_0) := \frac{\partial f}{\partial u}(u_0, v_0), \quad f_v(u_0, v_0) := \frac{\partial f}{\partial v}(u_0, v_0).$$

Definiția 1.38 Fie $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ o suprafață parametrizată.

(i) f se numește **regulată în punctul** (u_0, v_0) dacă vectorii $f_u(u_0, v_0)$, $f_v(u_0, v_0)$ sunt liniar independenți. În acest caz $f(u_0, v_0)$ (sau (u_0, v_0)) se numește **punct regulat**, în caz contrar se numește **punct singular**.

(ii) f se numește **suprafață regulată** dacă este regulată în orice punct al său.

Exemplul 1.39 (i) Planul, sfera, elicoidul drept sunt suprafețe regulate.

(ii) Punctul $f(0, 0)$ al conului este singular, restul sunt puncte regulate.

Observația 1.40 Vectorii $f_u(u_0, v_0)$, $f_v(u_0, v_0)$ sunt vectorii tangenți ai curbelor coordonate care trec prin punctul $f(u_0, v_0)$.

Observație. În cele ce urmează vom considera suprafețe parametrizate regulate de clasă \mathcal{C}^k ($k \geq 2$).

Definiția 1.41 Fie $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ o suprafață, fie $(u, v) \in U$ fixat.

(i) **Spațiul (vectorial) tangent la suprafață** în $f(u, v)$ este planul $T_{(u,v)} := \langle f_u(u, v), f_v(u, v) \rangle$ generat de vectorii $f_u(u, v), f_v(u, v)$.

(ii) **Planul tangent la suprafață** în punctul $f(u, v)$ este planul care trece prin punctul $f(u, v)$ și are direcția dată de planul vectorial $T_{(u,v)}$.

(iii) **Normala la suprafață** în punctul $f(u, v)$ este dreapta care trece prin $f(u, v)$ și este perpendiculară pe $T_{(u,v)}$.

Observația 1.42 Un vector director al normalei la suprafață în $f(u, v)$ este

$$N(u, v) = \frac{f_u(u, v) \times f_v(u, v)}{\|f_u(u, v) \times f_v(u, v)\|}.$$

Definiția 1.43 Sistemul de vectori

$$\{f_u(u, v), f_v(u, v), N(u, v)\}$$

se numește **reper Gauss** la suprafață în punctul $f(u, v)$.

Definiția 1.44 Fie $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ o suprafață, fie $(u, v) \in U$ fixat. Numerele

$$E(u, v) := \langle f_u(u, v), f_u(u, v) \rangle,$$

$$F(u, v) := \langle f_u(u, v), f_v(u, v) \rangle,$$

$$G(u, v) := \langle f_v(u, v), f_v(u, v) \rangle$$

se numesc **coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței** în $f(u, v)$.

Observația 1.45 (i) Au loc inegalitățile

$$E(u, v) > 0, \quad G(u, v) > 0, \quad E(u, v)G(u, v) - F(u, v)^2 > 0.$$

(ii) Atunci când (u, v) variază în U , se obțin funcții $E, F, G : U \rightarrow \mathbb{R}$ (coeficienții primei forme fundamentale).

Exemplul 1.46 (i) Pentru planul din exemplul 1.35 (i') se obțin vectorii

$$f_u(u, v) = w_1, \quad f_v(u, v) = w_2, \quad N(u, v) = w_1 \times w_2$$

iar coeficienții primei forme fundamentale sunt funcțiile constante

$$E = 1, \quad F = 0, \quad G = 1.$$

(ii) Pentru cilindrul din exemplul 1.35 (iii) avem, oricare ar fi (u, v) :

$$f_u(u, v) = (-\sin u, \cos u, 0), \quad f_v(u, v) = (0, 0, 1), \quad N(u, v) = (\cos u, \sin u, 0);$$

$$E(u, v) = 1, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = 1.$$

În particular, avem două suprafețe diferite având aceiași coeficienți ai primei forme fundamentale.

(iii) Pentru sfera din exemplul 1.35 (ii) avem

$$f_u(u, v) = (-r \sin u \cos v, -r \sin u \sin v, r \cos u),$$

$$f_v(u, v) = (-r \cos u \sin v, r \cos u \cos v, 0),$$

$$N(u, v) = (-\cos u \cos v, -\cos u \sin v, -\sin u);$$

$$E(u, v) = r^2, \quad F(u, v) = 0, \quad G(u, v) = r^2 \cos^2 u.$$

Observația 1.47 Coeficienții primei forme fundamentale sunt utilizați pentru a efectua ”măsurători” pe suprafață (lungimi de curbe, unghiuri între curbe, arii ale unor porțiuni de suprafață) fără a ne raporta la spațiul ambiant \mathbb{R}^3 . **Geometria intrinsecă** a suprafeței este formată din acele proprietăți geometrice care depind numai de coeficienții primei forme fundamentale.

Definiția 1.48 Fie $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ o suprafață, fie $(u, v) \in U$ fixat. Numerele

$$E_{II}(u, v) := \langle N(u, v), f_{uu}(u, v) \rangle,$$

$$F_{II}(u, v) := \langle N(u, v), f_{uv}(u, v) \rangle (= \langle N(u, v), f_{vu}(u, v) \rangle),$$

$$G_{II}(u, v) := \langle N(u, v), f_{vv}(u, v) \rangle$$

se numesc **coeficienții celei de-a doua forme fundamentale a suprafeței** în $f(u, v)$.

Exemplul 1.49 (i) Pentru planul din exemplul 1.35 (i') iar coeficienții celei de-a doua forme fundamentale sunt funcțiile constante

$$E_{II} = 0, \quad F_{II} = 0, \quad G_{II} = 0.$$

(ii) Pentru cilindrul din exemplul 1.35 (iii) avem, oricare ar fi (u, v) :

$$E_{II}(u, v) = -1, \quad F_{II}(u, v) = 0, \quad G_{II}(u, v) = 0.$$

(iii) Pentru sfera din exemplul 1.35 (ii) avem

$$E_{II}(u, v) = r, \quad F_{II}(u, v) = 0, \quad G_{II}(u, v) = r \cos^2 u.$$

Definiția 1.50 Fie $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ o suprafață, fie $(u, v) \in U$ fixat.

(i) **Matricea operatorului Weingarten** în $f(u, v)$ este definită prin

$$A(u, v) := \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} E_{II} & F_{II} \\ F_{II} & G_{II} \end{pmatrix}.$$

(ii) **Curbura medie** a suprafeței în $f(u, v)$ este

$$H(u, v) := \frac{1}{2} \operatorname{tr} A(u, v).$$

(iii) **Curbura Gauss (totală)** a suprafeței în $f(u, v)$ este

$$K(u, v) := \det A(u, v).$$

Observația 1.51 Se obțin funcții $H, K : U \rightarrow \mathbb{R}$, numite curbura medie, respectiv curbura Gauss.

Exemplul 1.52 (i) Pentru planul din exemplul 1.35 (i') curbura medie și curbura Gauss sunt funcțiile constante

$$H(u, v) = 0, \quad K(u, v) = 0.$$

(ii) Pentru cilindrul din exemplul 1.35 (iii) curbura medie și curbura Gauss sunt funcțiile constante

$$H(u, v) = -\frac{1}{2}, \quad K(u, v) = 0.$$

(iii) Pentru sfera din exemplul 1.35 (ii) curbura medie și curbura Gauss sunt funcțiile constante

$$H(u, v) = \frac{1}{r}, \quad K(u, v) = \frac{1}{r^2}.$$

(iv) Pentru elicoidul drept din exemplul 1.35 (vi) curbura medie, respectiv curbura Gauss sunt date de

$$H(u, v) = 0, \quad K(u, v) = -\frac{a}{(a^2 + v^2)^2}.$$

Definiția 1.53 Fie $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ o suprafață. Un punct $f(u, v)$ se numește

- (i) **eliptic** în cazul în care $K(u, v) > 0$;
- (ii) **hiperbolic** în cazul în care $K(u, v) < 0$;
- (iii) **parabolic** în cazul în care $K(u, v) = 0$ și $H(u, v) \neq 0$;
- (iv) **planar** în cazul în care $K(u, v) = 0$ și $H(u, v) = 0$.

Exemplul 1.54 Toate punctele planului sunt planare, toate punctele cilindrului sunt parabolice, toate punctele sferei sunt eliptice, iar punctele elicoidului sunt hiperbolice. Pe de altă parte, torul este o suprafață care are puncte eliptice, parabolice și hiperbolice.

Propoziția 1.55 (O interpretare geometrică a curburii Gauss)

(i) Dacă un punct P al unei suprafețe este eliptic, atunci există o vecinătate a sa astfel ca toate punctele acestei vecinătăți să fie situate de aceeași parte a planului tangent la suprafață în P .

(ii) Dacă un punct P al unei suprafețe este hiperbolic, atunci pentru orice vecinătate a lui P pot fi găsite puncte ale acesteia și de o parte și de cealaltă parte a planului tangent.

Teorema 1.56 (Theorema Egregium, Gauss) Curbura totală ține de geometria intrinsecă a suprafeței.

Teorema 1.57 (Gauss) Fie T un triunghi geodezic al unei suprafețe $f : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ cu f injectivă și fie $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ unghiurile lui T . Are loc egalitatea

$$\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 - \pi = \int_T K d\sigma,$$

unde

$$\int_T K d\sigma = \iint_{f^{-1}(T)} K(u, v) \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

Mai multe noțiuni și rezultate referitoare la teoria curbelor și a suprafețelor, precum și numeroase exemple, pot fi găsite în lucrările [11], [9], [14] și [12].

Capitolul 2

Interpolare polinomială

În acest capitol ne propunem să indicăm o soluție pentru următoarea problemă:

Problema 2.1 *Se consideră un sistem de puncte $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ (poligon de control) din planul \mathbf{R}^2 , precum și un șir de numere reale $t_0 < t_1 < \dots < t_n$. Să se construiască o curbă polinomială care să interpoleze punctele date, i.e. o curbă $\mathbf{c} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$ cu proprietatea că*

$$\mathbf{c}(t_0) = \mathbf{p}_0, \mathbf{c}(t_1) = \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{c}(t_n) = \mathbf{p}_n.$$

2.1 Segmente. Interpolare liniară (afină)

Discutăm mai întâi cazul în care $n = 1$, deci pornim la drum cu două puncte, \mathbf{p}_0 și \mathbf{p}_1 . În cazul particular în care $t_0 = 0$ și $t_1 = 1$, curba parametrizată

$$\mathbf{c} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{c}(s) = (1-s)\mathbf{p}_0 + s\mathbf{p}_1,$$

a cărei imagine geometrică este dreapta $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ reprezintă o soluție a problemei considerate. Mai mult, pentru $s \in [0, 1]$, se obțin punctele segmentului $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]$, pentru $s < 0$ se obțin punctele \mathbf{p} de pe dreapta $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ cu proprietatea că \mathbf{p}_0 este strict între \mathbf{p} și \mathbf{p}_1 , etc.

Fie acum $t_0 < t_1$ două numere reale. Pentru a construi o curbă cu proprietatea cerută, trebuie să găsim o aplicație care să facă "trecerea" între intervalele $[t_0, t_1]$ și $[0, 1]$, cu alte cuvinte să reparametrizăm curba de mai sus. Cea mai simplă posibilitate (dar nu singura!) este de a considera schimbarea afină de parametru $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $\varphi(s) = (1-s)t_0 + st_1$, a cărei inversă este aplicația

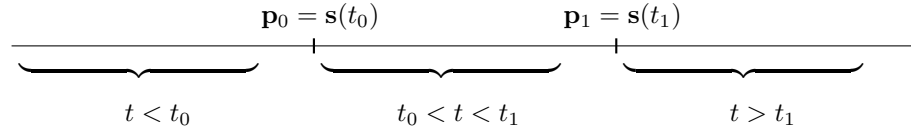
Găsiți și alte schimbări de parametru între intervalele $[0, 1]$ și $[t_0, t_1]$.

$$\psi : [t_0, t_1] \rightarrow [0, 1], \quad \psi(t) = \frac{t - t_0}{t_1 - t_0}.$$

În concluzie, compunerea $\mathbf{s} : [t_0, t_1] \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\mathbf{s} := \mathbf{c} \circ \psi$, reprezintă o soluție a problemei date. Explicit avem

$$\mathbf{s}(t) = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} \mathbf{p}_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \mathbf{p}_1, \quad \forall t \in \mathbf{R}.$$

Pentru $t \in [t_0, t_1]$ obținem o parametrizare a segmentului $[\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1]$, pentru $t < 0$ obținem o parametrizare a semidreptei deschise cu capătul \mathbf{p}_0 care nu îl conține pe \mathbf{p}_1 , ș.a.m.d.



Având în vedere că am utilizat combinații afine ale punctelor \mathbf{p}_0 și \mathbf{p}_1 pentru a obține punctele curbei \mathbf{s} , spunem că această curbă a fost obținută prin **interpolare afină**. Prin abuz de limbaj, metoda mai este numită și interpolare liniară.

2.2 Algoritmul lui Aitken

Înainte de a discuta situația generală, analizăm cazul $n = 2$. Fie, așadar, $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ și \mathbf{p}_2 trei puncte din plan, precum și $t_0 < t_1 < t_2$ trei numere reale. O primă curbă care satisface condiția din enunț este dată de reuniunea semidreptelor $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$ și $[\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2]$. În cazul în care cele trei puncte considerate nu sunt coliniare, această curbă are clasă \mathcal{C}^0 în \mathbf{p}_1 , dar nu are clasă \mathcal{C}^1 în acest punct (de ce?). Pentru a construi o curbă netedă cu proprietatea cerută, vom utiliza o interpolare afină repetată. Definim mai întâi punctele

$$\mathbf{p}_0^1(t) = \frac{t_1 - t}{t_1 - t_0} \mathbf{p}_0 + \frac{t - t_0}{t_1 - t_0} \mathbf{p}_1,$$

$$\mathbf{p}_1^1(t) = \frac{t_2 - t}{t_2 - t_1} \mathbf{p}_1 + \frac{t - t_1}{t_2 - t_1} \mathbf{p}_2,$$

Analizați poziția punctelor $\mathbf{p}_0^1(t)$, respectiv $\mathbf{p}_1^1(t)$, pentru $t \in [t_0, t_2]$.

care sunt situate pe dreptele $\mathbf{p}_0\mathbf{p}_1$, respectiv $\mathbf{p}_1\mathbf{p}_2$. Menționăm faptul că pentru $t = t_1$ cele două puncte coincid cu t_1 ; avem, de asemenea, egalitățile $\mathbf{p}_0^1(t_0) = \mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1^1(t_2) = \mathbf{p}_2$. Ideea de bază a algoritmului este de a efectua o nouă interpolare afină, cât mai convenabilă, de această dată a punctelor nou construite \mathbf{p}_0^1 și \mathbf{p}_1^1 . Fie, așadar

$$\mathbf{p}_0^2(t) := \frac{t_2 - t}{t_2 - t_0} \mathbf{p}_0^1(t) + \frac{t - t_0}{t_2 - t_0} \mathbf{p}_1^1(t).$$

Acest punct, descrie de fapt o curbă

$$\mathbf{c} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{c}(t) := \mathbf{p}_0^2(t).$$

Putem determina explicit punctul \mathbf{c} în funcție de punctele inițiale $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$: un calcul direct arată că avem

$$\mathbf{c}(t) = \frac{(t - t_1)(t - t_2)}{(t_0 - t_1)(t_0 - t_2)} \mathbf{p}_0 + \frac{(t - t_0)(t - t_2)}{(t_1 - t_0)(t_1 - t_2)} \mathbf{p}_1 + \frac{(t - t_0)(t - t_1)}{(t_2 - t_0)(t_2 - t_1)} \mathbf{p}_2. \quad (2.1)$$

Demonstrați relația (2.1).

Curba \mathbf{c} astfel construită este netedă (are clasă \mathcal{C}^∞), fiind polinomială în t . Ea verifică și condițiile de interpolare a punctelor date $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1$ și \mathbf{p}_2 , reprezentând o soluție a problemei date.

Metoda indicată poate fi generalizată cu ușurință pentru cazul n arbitrar, obținând **algoritmul lui Aitken** în forma generală (mai sus acest algoritm a fost prezentat pentru cazul $n = 2$). Fie, așadar, $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n \in \mathbf{R}^2$ și $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ numere reale. Notăm

$$\mathbf{p}_i^0 := \mathbf{p}_i, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Pentru $r = 1, \dots, n$ și $i = 0, \dots, n - r$ și $t \in \mathbf{R}$ fixat se construiesc inductiv, folosind interpolarea afină, punctele

$$\mathbf{p}_i^r(t) := \frac{t_{i+r} - t}{t_{i+r} - t_i} \mathbf{p}_i^{r-1}(t) + \frac{t - t_i}{t_{i+r} - t_i} \mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t). \quad (2.2)$$

Observația 2.2 (i) Direct din relațiile (2.2) se poate deduce că pentru orice $r = 1, \dots, n$, $i = 0, \dots, n - r$ este verificat șirul de egalități

Verificați șirul de egalități alăturat.

$$\mathbf{p}_i^r(t_{i+r}) = \mathbf{p}_{i+1}^{r-1}(t_{i+r}) = \dots = \mathbf{p}_{i+r}^0(t_{i+r}) = \mathbf{p}_{i+r},$$

de unde rezultă că aplicația $t \mapsto \mathbf{p}_i^r(t)$ reprezintă o curbă parametrizată care interpolatează punctele $\mathbf{p}_i, \mathbf{p}_{i+1}, \dots, \mathbf{p}_{i+r}$, astfel încât $\mathbf{p}_i^r(t_i) = \mathbf{p}_i, \dots, \mathbf{p}_i^r(t_{i+r}) = \mathbf{p}_{i+r}$. În particular, curba $\mathbf{c} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^2$, $\mathbf{c}(t) := \mathbf{p}_0^n(t)$ reprezintă o soluție a problemei 2.1.

(ii) Curba \mathbf{c} poate fi descrisă algebric folosind **polinoamele Lagrange** de grad n , care sunt asociate unui sistem de numere reale $t_0 < t_1 < \dots < t_n$ (pentru simplitate aceste numere reale sunt omise din notația polinoamelor Lagrange, acestea fiind notate cu $L_0^n, L_1^n, \dots, L_n^n$):

Scrieți explicit polinoamele Lagrange de grad 1, apoi pe cele de grad 2.

$$L_i^n(t) = \frac{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t - t_j)}{\prod_{j=0, j \neq i}^n (t_i - t_j)}, \quad \forall i = 0, \dots, n.$$

Inductiv, se poate demonstra că avem pentru orice $t \in \mathbf{R}$ relația

$$\mathbf{c}(t) = \sum_{i=0}^n L_i^n(t) \mathbf{p}_i.$$

(iii) Curba \mathbf{c} construită mai sus are proprietatea de **invariantă afină**. Astfel, dacă $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$ este un poligon de control, \mathbf{c} curba dată de algoritmul lui Aitken și $\varphi : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$ o transformare afină, atunci curba $\varphi \circ \mathbf{c}$ interpolatează punctele $\varphi(\mathbf{p}_0), \varphi(\mathbf{p}_1), \dots, \varphi(\mathbf{p}_n)$.

Demonstrați afirmația (iii), folosind relația $\sum_{i=0}^n L_i^n(t) = 1$.

(iv) În general, punctele curbei $\mathbf{c}(t)$ nu sunt situate, pentru $t \in [t_0, t_n]$ în acoperirea convexă a mulțimii de puncte $\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n$. De asemenea, mici variații ale unuia dintre punctele poligonului de control pot duce la variații mari ale acesteia.

Capitolul 3

Curbe Bézier

Am văzut în capitolul anterior cum, dat un poligon de control $(\mathbf{p}_0, \mathbf{p}_1, \dots, \mathbf{p}_n)$, putem construi o curbă polinomială care să interpoleze aceste puncte. Pe de altă parte, unele proprietăți ale acestui tip de curbe (de exemplu, faptul că nu sunt incluse în acoperirea convexă a punctelor poligonului de control) fac ca acestea să nu fie practice în aplicații legate de grafica pe calculator. În anii '60, independent unul de celălalt, Paul de Casteljau și Pierre Bézier au investigat o altă clasă de curbe, care, chiar dacă nu au proprietatea de interpolare, au alte proprietăți geometrice remarcabile și care mai ales, s-au dovedit a fi foarte utile în inginerie și, ulterior, în CAGD: curbele Bézier. La fel ca și curbele de interpolare, curbele Bézier pot fi construite folosind fie metode de natură geometrică (algoritmul de Casteljau), fie utilizând un aparat algebric (forma Bernstein).

3.1 Algoritmul de Casteljau

Observația 3.1 Fie p_0, p_1, p_2 trei puncte distincte pe o parabolă. Presupunem că tangenta la parabolă dusă prin p_i intersectează tangenta la parabolă prin p_j în punctul p_{ij} ($i, j = 0, 1, 2, i \neq j$). Atunci au loc egalitățile

$$r(p_0, p_{01}, p_{02}) = r(p_{01}, p_1, p_{12}) = r(p_{02}, p_{12}, p_2).$$

Demonstrația se face alegând un reper în care parabola să aibă o ecuație cât mai convenabilă.

Reciproca acestei observații este utilă pentru construirea punctelor unei parabole când se dau două puncte ale acesteia și tangentele la parabolă duse prin aceste puncte.

Algoritmul de Casteljau pentru cazul $n = 2$

Fie $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ și \mathbf{b}_2 trei puncte necoliniare. Pentru $t \in \mathbf{R}$ se construiesc punctele

$$\mathbf{b}_0^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_1,$$

$$\mathbf{b}_1^1(t) = (1-t)\mathbf{b}_1 + t\mathbf{b}_2,$$

$$\mathbf{b}_0^2(t) = (1-t)\mathbf{b}_0^1(t) + t\mathbf{b}_1^1(t).$$

Punctul $\mathbf{b}_0^2(t)$ descrie, când t variază în \mathbf{R} , o parabolă, mai precis parabola care trece prin punctele \mathbf{b}_0 și \mathbf{b}_2 și ale cărei tangente în aceste puncte sunt dreptele $\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1$, respectiv $\mathbf{b}_2\mathbf{b}_1$. Pentru $t \in [0, 1]$ se obține arcul acestei parabole care unește punctele \mathbf{b}_0 și \mathbf{b}_2 .

Calculați rapoartele $r(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_0^1(t), \mathbf{b}_1)$ și $r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_1^1(t), \mathbf{b}_2)$.

Exemplul 3.2 Considerăm punctele

$$\mathbf{b}_0 = (0, 6), \quad \mathbf{b}_1 = (6, 6), \quad \mathbf{b}_2 = (6, 0).$$

Pentru $t = \frac{1}{3}$ avem

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_0^1\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{2}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1 = (2, 6), \\ \mathbf{b}_1^1\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{2}{3}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2 = (6, 4), \\ \mathbf{b}_0^2\left(\frac{1}{3}\right) &= \frac{2}{3}\mathbf{b}_0^1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_1^1 = \left(\frac{10}{3}, \frac{16}{3}\right). \end{aligned}$$

Ce puncte se obțin pentru $t = 0$, respectiv $t = \frac{1}{2}$?

Exercițiul 3.3 Considerăm punctele $\mathbf{b}_0 = (2, 4)$, $\mathbf{b}_1 = (4, 2)$ și $\mathbf{b}_2 = (4, 0)$. Calculați punctele $\mathbf{b}_0^1(t)$, $\mathbf{b}_1^1(t)$ și $\mathbf{b}_0^2(t)$ corespunzătoare valorilor $t = \frac{1}{2}$ și $t = \frac{1}{4}$.

Algoritmul de Casteljau, forma generală

Fie $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n \in \mathbf{R}^m$. Pentru $t \in \mathbf{R}$ se notează $\mathbf{b}_i^0(t) := \mathbf{b}_i$ ($i = 0, \dots, n$) și se definesc punctele

Scrieți explicit aceste relații pentru $n = 3$.

$$\mathbf{b}_i^r(t) := (1-t)\mathbf{b}_i^{r-1}(t) + t\mathbf{b}_{i+1}^{r-1}(t), \quad \begin{cases} r = 1, \dots, n \\ i = 0, \dots, n-r \end{cases} \quad (3.1)$$

Definiția 3.4 Punctul $\mathbf{b}_0^n(t)$ descrie, când t variază, o curbă, notată cu \mathbf{b}^n . Punctele $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n$ se numesc **puncte de control** ale curbei \mathbf{b}^n , iar poligonul determinat de acestea se numește **poligon de control**.

Observația 3.5 Punctele intermediare pot fi scrise într-un tablou triunghiular, numit **schema de Casteljau**. Considerăm, de exemplu, $n = 2$ și fixăm $t_0 \in [0, 1]$. Schema de Casteljau corespunzătoare are forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{b}_0 & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1(t_0) & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1(t_0) & \mathbf{b}_0^2(t_0) \end{array} \quad (3.2)$$

Analog, în cazul $n = 3$ și pentru $t_0 \in [0, 1]$ fixat, schema asociată este

$$\begin{array}{cccc} \mathbf{b}_0 & & & \\ \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_0^1(t_0) & & \\ \mathbf{b}_2 & \mathbf{b}_1^1(t_0) & \mathbf{b}_0^2(t_0) & \\ \mathbf{b}_3 & \mathbf{b}_2^1(t_0) & \mathbf{b}_1^2(t_0) & \mathbf{b}_0^3(t_0). \end{array} \quad (3.3)$$

Exemplul 3.6 (i) Schema de Casteljau corespunzătoare punctelor $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ din exemplul 3.2 și valorii $t_0 = \frac{1}{3}$ este

$$\begin{array}{ccc} (0, 6) & & \\ (6, 6) & (2, 6) & \\ (6, 0) & (6, 4) & \left(\frac{10}{3}, \frac{16}{3}\right). \end{array}$$

Scrieți schema de Casteljau corespunzătoare aceluiași puncte și valorii $t = \frac{1}{2}$.

(ii) Considerăm punctele

$$\mathbf{b}_0 = (1, -2), \quad \mathbf{b}_1 = (3, 2), \quad \mathbf{b}_2 = (3, -2), \quad \mathbf{b}_3 = (-3, -2).$$

Schema de Casteljau corespunzătoare acestor puncte și valorii $t_0 = \frac{1}{2}$ a parametrului este

$$\begin{array}{cccc} (1, -2) & & & \\ (3, 2) & (2, 0) & & \\ (3, -2) & (3, 0) & \left(\frac{5}{2}, 0\right) & \\ (-3, -2) & (0, -2) & \left(\frac{3}{2}, -1\right) & \left(2, -\frac{1}{2}\right). \end{array}$$

Exercițiul 3.7 Scrieți schema de Casteljau corespunzătoare punctelor

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 6), \quad \mathbf{b}_2 = (6, 6), \quad \mathbf{b}_3 = (12, 0)$$

și parametrului $t_0 = \frac{1}{3}$.

3.2 Forma Bernstein a curbelor Bézier

Definiția 3.8 Pentru $n \in \mathbf{N}$ fixat, **polinoamele Bernstein de grad n** sunt definite prin

$$B_i^n(t) = C_n^i t^i (1-t)^{n-i}, \quad i \in \{0, \dots, n\},$$

unde $C_n^i = \frac{n!}{i!(n-i)!}$. Prin convenție, definim $B_i^n(t) = 0$, dacă $i \notin \{0, \dots, n\}$.

Exemplul 3.9 În cazul $n = 1$ polinoamele Bernstein sunt

$$B_0^1(t) = 1 - t, \quad B_1^1(t) = t,$$

iar polinoamele Bernstein de grad 2 sunt

$$B_0^2(t) = (1-t)^2, \quad B_1^2(t) = 2t(1-t), \quad B_2^2(t) = t^2.$$

Scrieți explicit polinoamele Bernstein de grad 3.

Observația 3.10 În general, vom considera restricția funcțiilor polinomiale asociate polinoamelor Bernstein (prin abuz de limbaj, a polinoamelor Bernstein), pe intervalul $[0, 1]$. Pentru un interval arbitrar $[a, b]$ polinoamele Bernstein asociate se definesc prin

$$B_i^{[a,b],n}(u) = C_n^i \left(\frac{u-a}{b-a} \right)^i \left(\frac{b-u}{b-a} \right)^{n-i}, \quad u \in [a, b],$$

i.e. $B_i^{[a,b],n}(u) = B_i^n\left(\frac{u-a}{b-a}\right)$, pentru orice $u \in [a, b]$.

Propoziția 3.11 (Proprietăți ale polinoamelor Bernstein)

- (i) Polinoamele Bernstein sunt nenegative pe intervalul $[0, 1]$.
- (ii) Pentru orice număr natural n , polinoamele Bernstein de grad n formează o **partiție a unității**

$$\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1.$$

- (iii) Polinoamele Bernstein verifică relația de recurență

$$B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t). \quad (3.4)$$

- (iv) $B_0^n(0) = 1$, $B_i^n(0) = 0$ pentru $i \neq 0$, respectiv $B_n^n(1) = 1$, $B_i^n(1) = 0$ pentru $i \neq n$.

- (v) Funcția B_i^n are pe intervalul $[0, 1]$ un punct de maxim pentru $t = \frac{i}{n}$.

Definiția 3.12 Fie $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ o mulțime ordonată de puncte din \mathbf{R}^m , numită **polygon de control**. **Curba Bézier $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^m$** definită de polygonul de control $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ este dată de formula

$$\mathbf{b}(t) := \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i.$$

De ce este importantă relația $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$?

Exemplul 3.13 Considerăm poligonul de control

$$\mathbf{b}_0 = (1, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (1, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 2).$$

Curba Bézier asociată $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ se scrie sub forma Bernstein

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(t) &= \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \mathbf{b}_i = (1-t)^2(1, 0) + 2t(1-t)(1, 1) + t^2(0, 2) = \\ &= (1-2t+t^2+2t-2t^2, 2t-2t^2+2t^2) = (1-t^2, 2t). \end{aligned}$$

Avem, de exemplu, $\mathbf{b}(\frac{1}{3}) = (\frac{8}{9}, \frac{2}{3})$, $\mathbf{b}(\frac{1}{4}) = (\frac{15}{16}, \frac{1}{2})$, etc.

Stabilim, în continuare, dacă punctul $(\frac{3}{4}, 1)$ aparține imaginii lui \mathbf{b} . Aceasta este echivalent cu a găsi $t_0 \in [0, 1]$ pentru care $\mathbf{b}(t_0) = (\frac{3}{4}, 1)$, deci

Calculați $\mathbf{b}(0)$, $\mathbf{b}(1)$ și precizați dacă punctul \mathbf{b}_1 aparține curbei.

$$\begin{cases} 1-t_0^2 = \frac{3}{4} \\ 2t_0 = 1 \end{cases} \quad (3.5)$$

Cum sistemul (3.5) admite soluția $t_0 = \frac{1}{2}$, deducem că $(\frac{3}{4}, 1) \in \text{Im } \mathbf{b}$, mai precis, $(\frac{3}{4}, 1) = \mathbf{b}(\frac{1}{2})$.

Exercițiul 3.14 Considerăm poligonul de control

$$\mathbf{b}_0 = (1, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (2, 0), \quad \mathbf{b}_3 = (0, 0)$$

și fie $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ curba Bézier asociată. Calculați $\mathbf{b}(\frac{1}{3})$ și stabiliți dacă punctul $(1, \frac{1}{3})$ aparține imaginii lui \mathbf{b} .

Observația 3.15 Polinoamele Bernstein de grad n , B_0^n, \dots, B_n^n , formează o bază a spațiului vectorial al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu n . În particular, orice curbă polinomială de grad n poate fi scrisă sub forma unei curbe Bézier.

Indicați și alte baze ale acestui spațiu de polinoame.

Exemplul 3.16 În spațiul vectorial al polinoamelor de grad mai mic sau egal cu 2 avem egalitățile

$$t^2 = B_2^2(t), \quad t = \frac{1}{2}B_1^2(t) + B_2^2(t), \quad 1 = B_0^2(t) + B_1^2(t) + B_2^2(t).$$

Fie acum curba polinomială

$$c(t) = (2t + 3t^2, 1 - 2t + t^2) = (0, 1) \cdot 1 + (2, -2) \cdot t + (3, 1) \cdot t^2.$$

Folosind relațiile de mai sus, deducem

$$c(t) = (B_1^2(t) + 5B_2^2(t), B_0^2(t)) = B_0^2(t)(0, 1) + B_1^2(t)(1, 0) + B_2^2(t)(5, 0),$$

deci c este curba Bézier asociată poligonului de control dat de punctele $\mathbf{b}_0 = (0, 1)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (5, 0)$.

Exercițiul 3.17 Stabiliți cărui poligon de control îi corespunde curba polinomială

$$c : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad c(t) = (2 - 4t + t^2, 2 - 2t + 2t^2).$$

Exemplul 3.18 (i) Curba Bézier asociată unui sistem de două puncte distincte $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1$ are ca imagine geometrică segmentul de dreaptă determinat de acestea.

(ii) Dacă punctele de control $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ sunt coliniare, cu \mathbf{b}_1 situat între \mathbf{b}_0 și \mathbf{b}_2 , atunci curba Bézier asociată are gradul 1, imaginea sa fiind segmentul $[\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2]$.

Teorema 3.19 (Legătura dintre forma Bernstein și algoritmul de Casteljau) Fie $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ un poligon de control din \mathbf{R}^m . Atunci:

(i) Curba Bézier \mathbf{b}^n construită cu algoritmul de Casteljau poate fi scrisă sub forma

Demonstrați această relație pentru $n = 2$.

$$\mathbf{b}^n(t) = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) \mathbf{b}_i,$$

deci curba Bézier \mathbf{b}^n construită cu ajutorul algoritmului de Casteljau coincide cu curba Bézier \mathbf{b} definită cu ajutorul polinoamelor Bernstein.

(ii) Punctele intermediare de Casteljau \mathbf{b}_i^r pot fi exprimate prin egalitățile

$$\mathbf{b}_i^r(t) = \sum_{j=0}^r B_j^r(t) \mathbf{b}_{i+j}, \quad \forall r = 0, \dots, n, \quad \forall i = 0, \dots, n-r,$$

ceea ce arată că aceste puncte descriu, la rândul lor, niște curbe Bézier. Mai precis, pentru r fixat și $i = 0, \dots, n-r$, punctul $\mathbf{b}_i^r(t)$ descrie, când t variază, curba Bézier asociată poligonului de control $(\mathbf{b}_i, \mathbf{b}_{i+1}, \dots, \mathbf{b}_{i+r})$.

(iii) Punctele curbei Bézier pot fi scrise cu ajutorul punctelor intermediare de Casteljau sub forma

$$\mathbf{b}(t) = \sum_{i=0}^{n-r} B_i^{n-r}(t) \mathbf{b}_i^r(t), \quad \forall r = 0, \dots, n.$$

Capitolul 4

Proprietăți ale curbelor Bézier

4.1 Proprietăți elementare

Folosind fie algoritmul de Casteljau, fie forma Bernstein a curbelor Bézier pot fi deduse imediat următoarele proprietăți ale acestui tip de curbe:

Propoziția 4.1 Fie $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ un poligon de control din \mathbf{R}^m . Curba Bézier asociată $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^m$ are următoarele proprietăți:

- (i) \mathbf{b} este o curbă polinomială, având gradul mai mic sau egal cu n ;
- (ii) curba \mathbf{b} interpolează extremitățile poligonului de control, i.e. au loc relațiile $\mathbf{b}(0) = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}(1) = \mathbf{b}_n$; în particular, dacă poligonul de control este închis, curba Bézier asociată este închisă;
- (iii) **proprietatea acoperirii convexe**: punctele curbei Bézier \mathbf{b} se află în acoperirea convexă a punctelor de control;
- (iv) **invarianță afină**: dacă $\tau : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m$ este o transformare afină, atunci curba Bézier asociată poligonului de control $(\tau(\mathbf{b}_0), \dots, \tau(\mathbf{b}_n))$ este curba $\tau(\mathbf{b})$;

Dați exemple de poligoane de control pentru care curba asociată are gradul exact n , respectiv mai mic decât n .

- (v) **invarianță la combinații baricentrice**: fie $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$, respectiv $(\tilde{\mathbf{b}}_0, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n)$ două poligoane de control și \mathbf{b} , respectiv $\tilde{\mathbf{b}}$ curbele Bézier corespunzătoare. Pentru orice $\alpha \in \mathbf{R}$, curba Bézier asociată poligonului de control $((1 - \alpha)\mathbf{b}_0 + \alpha\tilde{\mathbf{b}}_0, \dots, (1 - \alpha)\mathbf{b}_n + \alpha\tilde{\mathbf{b}}_n)$ este curba $(1 - \alpha)\mathbf{b} + \alpha\tilde{\mathbf{b}}$.

Ce aplicații au proprietățile (iv) și (v)?

- (vi) dacă $\tilde{\mathbf{b}} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^m$ este curba Bézier asociată poligonului de control $(\mathbf{b}_n, \dots, \mathbf{b}_0)$, atunci $\tilde{\mathbf{b}}(t) = \mathbf{b}(1 - t)$, în particular, cele două curbe au aceeași imagine geometrică.

4.2 Derivatele unei curbe Bézier

Definiția 4.2 (i) Operatorul de diferențiere în avans Δ este definit prin

$$\Delta \mathbf{b}_i := \mathbf{b}_{i+1} - \mathbf{b}_i, \quad \forall i = 0, \dots, n-1.$$

- (ii) Prin convenție $\Delta^0 \mathbf{b}_i := \mathbf{b}_i$, $\forall i = 0, \dots, n$, iar pentru $r \geq 2$ se definește $\Delta^r \mathbf{b}_i := \Delta^{r-1}(\Delta \mathbf{b}_i)$, pentru $i = 0, \dots, n-r$.

Calculați explicit Δ^2 pentru punctele unui poligon de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$.

Propoziția 4.3 Fie $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ un poligon de control din \mathbf{R}^m și fie $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^m$ curba Bézier asociată. Derivatele funcției \mathbf{b} sunt date de formulele

$$\mathbf{b}^{(k)}(t) = \sum_{i=0}^{n-k} \left(\frac{n!}{(n-k)!} \Delta^k \mathbf{b}_i \right) B_i^{n-k}(t) \quad \forall k = 0, \dots, n. \quad (4.1)$$

Corolarul 4.4 (i) Derivatele de orice ordin calculate pentru $t = 0$ și $t = 1$ depind doar de poligonul de control. Mai mult, $\mathbf{b}'(0) = n(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0)$, $\mathbf{b}'(1) = n(\mathbf{b}_n - \mathbf{b}_{n-1})$, cu alte cuvinte, vectorii tangenți la curba Bézier în punctele \mathbf{b}_0 (respectiv \mathbf{b}_n) sunt coliniari și au același sens cu vectorii $\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1}$ (respectiv $\overrightarrow{\mathbf{b}_{n-1} \mathbf{b}_n}$). În cazul în care acești vectori sunt nenuli, ei reprezintă direcția tangentelor la curbă în punctele respective.

Calculați vectorii $\mathbf{b}'(0)$ și $\mathbf{b}'(1)$ direct, folosind forma Bernstein.

(ii) Pentru orice $t \in [0, 1]$ are loc egalitatea

$$\mathbf{b}'(t) = n(\mathbf{b}_1^{n-1}(t) - \mathbf{b}_0^{n-1}(t)),$$

Explicați ce devine această afirmație pentru $t = 0$ și $t = 1$.

cu alte cuvinte, punctele construite în etapa $(n-1)$ a algoritmului de Casteljau determină vectorul tangent la curba Bézier în punctul $\mathbf{b}(t)$.

Exemplul 4.5 Pentru schema de Casteljau din exemplul 3.6 (ii), vectorul tangent la curbă corespunzător valorii $t = \frac{1}{2}$ a parametrului este $(-3, -3)$.

Exercițiul 4.6 Considerăm punctele $\mathbf{b}_0 = (4, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (4, 4)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 4)$ și fie $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ curba Bézier asociată poligonului de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$. Determinați vectorii tangenți la această curbă în punctele $\mathbf{b}(0)$, $\mathbf{b}(\frac{1}{2})$, $\mathbf{b}(1)$.

Exercițiul 4.7 Dacă punctele $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ sunt vârfurile unui pătrat, stabiliți care este punctul obținut aplicând algoritmul de Casteljau pentru valoarea parametrului $t = \frac{1}{2}$ și care este tangenta la curbă în acest punct.

4.3 Modificarea unei curbe Bézier

(i) **Deplasarea unui punct de control**

Fie $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \dots, \mathbf{b}_n)$, respectiv $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, \tilde{\mathbf{b}}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \dots, \mathbf{b}_n)$ două poligoane de control și fie \mathbf{b} , respectiv $\tilde{\mathbf{b}}$ curbele Bézier asociate. Folosind exprimarea în forma Bernstein, deducem că pentru $t \in [0, 1]$ avem

$$\overrightarrow{\mathbf{b}(t) \tilde{\mathbf{b}}(t)} = \tilde{\mathbf{b}}(t) - \mathbf{b}(t) = B_j^n(t)(\tilde{\mathbf{b}}_j - \mathbf{b}_j) = B_j^n(t) \overrightarrow{\mathbf{b}_j \tilde{\mathbf{b}}_j}.$$

Colinearitatea vectorilor $\overrightarrow{\mathbf{b}(t) \tilde{\mathbf{b}}(t)}$ și $\overrightarrow{\mathbf{b}_j \tilde{\mathbf{b}}_j}$ arată că, dacă deplasăm punctul $\mathbf{b}(t)$ într-o anumită direcție, fiecare punct al curbei Bézier se deplasează de-a lungul aceleiași direcții. Lungimea segmentului parcurs diferă însă în funcție de t . În cazul în care $j \in \{1, \dots, n\}$ extremitățile $\mathbf{b}_0 = \mathbf{b}(0)$ și $\mathbf{b}_n = \mathbf{b}(1)$ rămân neschimbate. Curba are cea mai vizibilă modificare într-o vecinătate a punctului $\mathbf{b}(\frac{j}{n})$, deoarece funcția B_j^n are un maxim pentru $t = \frac{j}{n}$. Situația este asemănătoare în cazul în care $j \in \{0, n\}$ (deci modificăm una dintre extremități): de exemplu, dacă $j = 0$, punctul \mathbf{b}_n rămâne pe loc și curba este afectată cel mai mult în vecinătatea lui \mathbf{b}_0 .

Efectuați calcule explicite în cazul $\mathbf{b}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 3)$, $\tilde{\mathbf{b}}_1 = (0, 1)$.

(ii) **Inserarea repetată a unui punct de control**

Fie $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, \mathbf{b}_j, \mathbf{b}_{j+1}, \dots, \mathbf{b}_n)$ un poligon de control cu $n+1$ puncte de control și \mathbf{b} curba Bézier asociată. Utilizând scrierea Bernstein a curbei \mathbf{b} ,

deducem că ponderea punctului \mathbf{b}_j este $B_j^n(t) = C_n^j t^j (1-t)^{n-j}$. Inserând în mod repetat (de k ori) punctul \mathbf{b}_j , obținem poligonul cu $n+k$ puncte de control

$$(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{j-1}, \underbrace{\mathbf{b}_j, \dots, \mathbf{b}_j}_{k \text{ ori}}, \mathbf{b}_{j+1}, \dots, \mathbf{b}_n).$$

Considerând curba Bézier $\tilde{\mathbf{b}}$ asociată, rezultă că ponderea punctului \mathbf{b}_j în curba $\tilde{\mathbf{b}}$ este mai mare decât ponderea lui \mathbf{b}_j în curba \mathbf{b} , deci curba $\tilde{\mathbf{b}}$ este mai "apropiată" de \mathbf{b}_j .

Comparați cele două ponderi în cazul $k = 2$.

Este de reținut faptul că din punct de vedere al imaginii geometrice cele două poligoane coincid, însă privite ca poligoane de control (i.e. ca mulțimi ordonate de puncte) sunt distincte și, în consecință, curbele Bézier asociate sunt diferite.

4.4 Generarea unei curbe Bézier cu poligoane de control diferite (mărirea gradului)

Observația 4.8 Fie $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ puncte coliniare distincte, cu \mathbf{b}_1 situat între \mathbf{b}_0 și \mathbf{b}_2 . Curba Bézier asociată poligonului de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2)$ este dată prin relația

Cum verificați dacă \mathbf{b}_1 este situat între \mathbf{b}_0 sau \mathbf{b}_2 ?

$$\mathbf{b}(t) = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_2,$$

fiind o curbă polinomială de gradul întâi și având ca imagine geometrică segmentul $[\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2]$. Curba Bézier asociată poligonului de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ admite parametrizarea

$$\tilde{\mathbf{b}}(t) = (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2,$$

fiind o curbă polinomială de grad cel mult 2. Imaginea sa coincide însă cu imaginea lui \mathbf{b} , fiind, la rândul său, egală cu segmentul $[\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2]$. Acesta este un exemplu în care poligoane de control diferite generează curbe Bézier cu parametrizări diferite, dar care au aceeași imagine geometrică.

În cazul particular în care punctul \mathbf{b}_1 este mijlocul segmentului $[\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_2]$ avem

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{b}}(t) &= (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\mathbf{b}_1 + t^2\mathbf{b}_2 = (1-t)^2\mathbf{b}_0 + 2t(1-t)\left(\frac{1}{2}\mathbf{b}_0 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_2\right) + t^2\mathbf{b}_2 = \\ &= ((1-t)^2 + t(1-t))\mathbf{b}_0 + (t(1-t) + t^2)\mathbf{b}_2 = (1-t)\mathbf{b}_0 + t\mathbf{b}_2 = \mathbf{b}(t). \end{aligned}$$

Cu alte cuvinte, pentru această alegere particulară a lui \mathbf{b}_1 , coincid atât imaginile geometrice ale celor două curbe, cât și parametrizările \mathbf{b} și $\tilde{\mathbf{b}}$.

Demonstrați că mijlocul segmentului $[\mathbf{b}_0\mathbf{b}_2]$ este singurul punct cu această proprietate.

În general, ne punem problema în ce măsură dat un poligon de control îi putem asocia un nou poligon de control având cu un punct în plus și astfel încât curbele Bézier asociate celor două poligoane să coincidă. Răspunsul este dat de următoarea propoziție:

Propoziția 4.9 Fie $\mathcal{P} = (\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ un poligon de control și \mathbf{b} curba Bézier asociată. Definim poligonul de control $\mathcal{P}^{(1)} = (\mathbf{b}_0^{(1)}, \mathbf{b}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_n^{(1)}, \mathbf{b}_{n+1}^{(1)})$ prin

Scrieți explicit punctele poligonului $\mathcal{P}^{(1)}$ pentru $n = 1, 2, 3$.

$$\mathbf{b}_0^{(1)} = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{b}_{n+1}^{(1)} = \mathbf{b}_n,$$

$$\mathbf{b}_i^{(1)} = \frac{i}{n+1}\mathbf{b}_{i-1} + \left(1 - \frac{i}{n+1}\right)\mathbf{b}_i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

și notăm cu $\mathbf{b}^{(1)}$ curba Bézier asociată. Pentru orice $t \in [0, 1]$ are loc egalitatea $\mathbf{b}(t) = \mathbf{b}^{(1)}(t)$; în particular, imaginile geometrice ale celor două curbe coincid. Reciproc, singurul poligon de control cu $n+2$ puncte care generează curba \mathbf{b} și care are ca extremități punctele \mathbf{b}_0 și \mathbf{b}_n este poligonul $\mathcal{P}^{(1)}$.

Exemplul 4.10 Fie punctele

$$\mathbf{b}_0 = (-6, 6), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 6), \quad \mathbf{b}_2 = (3, 0).$$

Cu notațiile din propoziția 4.9 avem $n = 2$ și

$$\mathbf{b}_0^{(1)} = \mathbf{b}_0 = (-6, 6), \quad \mathbf{b}_3^{(1)} = \mathbf{b}_2 = (3, 0);$$

$$\mathbf{b}_1^{(1)} = \frac{1}{3}\mathbf{b}_0 + \frac{2}{3}\mathbf{b}_1 = (-2, 6); \quad \mathbf{b}_2^{(1)} = \frac{2}{3}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{3}\mathbf{b}_2 = (1, 4)$$

și poligoanele de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$, respectiv $(\mathbf{b}_0^{(1)}, \mathbf{b}_1^{(1)}, \mathbf{b}_2^{(1)}, \mathbf{b}_3^{(1)})$ generează aceeași curbă Bézier (verificați!).

Exercițiul 4.11 Considerăm punctele $\mathbf{b}_0 = (3, 6), \mathbf{b}_1 = (9, 6), \mathbf{b}_2 = (6, 0)$. Găsiți un poligon de control format din patru puncte care generează aceeași curbă Bézier ca și $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$.

Observația 4.12 (i) Extremitățile poligoanelor de control \mathcal{P} și $\mathcal{P}^{(1)}$ coincid, iar punctele intermediare ale poligonului $\mathcal{P}^{(1)}$, adică $\mathbf{b}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_n^{(1)}$ sunt situate respectiv pe segmentele $[\mathbf{b}_0\mathbf{b}_1], \dots, [\mathbf{b}_{n-1}\mathbf{b}_n]$ determinate de punctele de control ale poligonului \mathcal{P} .

Calculați rapoartele în care punctele $\mathbf{b}_1^{(1)}, \dots, \mathbf{b}_n^{(1)}$ împart respectivele segmente.

(ii) Aplicând același procedeu în mod repetat, obținem un șir de poligoane $\mathcal{P}, \mathcal{P}^{(1)}, \mathcal{P}^{(2)}, \mathcal{P}^{(3)}, \dots$, unde $\mathcal{P}^{(k+1)} = (\mathcal{P}^{(k)})^{(1)}$. Acest șir converge la curba Bézier definită de toate aceste poligoane, însă convergența este lentă și nu are consecințe practice.

(iii) Mărirea gradului este utilă atunci când avem o familie de curbe Bézier (date prin poligoanele de control) și dorim ca aceste curbe să fie generate de poligoane cu un același număr de puncte: determinăm poligonul cu cele mai multe puncte (notăm cu N numărul acestora) și mărim numărul punctelor fiecărui poligon de control, până când ajunge egal cu N . Din punct de vedere practic, acest procedeu de uniformizare a gradelor este util în generarea suprafețelor, unde anumiți algoritmi necesită ca date de intrare curbe de același grad. De asemenea, mărirea gradului poate fi folosită în transferul de date între diferite sisteme care lucrează numai cu curbe având gradul fixat.

4.5 Subdivizare

Observația 4.13 Dacă $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^m$ este o curbă Bézier, atunci, pentru orice $\alpha \in [0, 1]$ restricțiile sale la intervalele $[0, \alpha]$ și $[\alpha, 1]$ sunt curbe polinomiale, în particular, sunt curbe Bézier. Se pune în mod natural problema găsirii poligonului de control care le determină. De exemplu, dacă \mathbf{b} este segmentul determinat de \mathbf{b}_0 și \mathbf{b}_1 , atunci pentru orice $\alpha \in [0, 1]$, $\mathbf{b}|_{[0, \alpha]}$ este curba Bézier determinată de poligonul de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}(\alpha))$, iar $\mathbf{b}|_{[\alpha, 1]}$ este asociată poligonului de control $(\mathbf{b}(\alpha), \mathbf{b}_1)$. Procesul prin care unei curbe Bézier i se asociază două arce ale sale a căror reuniune este curba inițială se numește **subdivizare**. Propoziția care urmează descrie situația generală:

Propoziția 4.14 Fie \mathbf{b} curba Bézier determinată de poligonul de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$.

Pentru orice $\alpha \in [0, 1]$, restricția $\mathbf{b}|_{[0, \alpha]}$ a lui \mathbf{b} la intervalul $[0, \alpha]$ este curba Bézier determinată de poligonul de control

Ce se întâmplă pentru $\alpha = 0$ și $\alpha = 1$?

$$(\mathbf{b}_0^0(\alpha), \mathbf{b}_0^1(\alpha), \dots, \mathbf{b}_0^{n-1}(\alpha), \mathbf{b}_0^n(\alpha)),$$

iar restricția $\mathbf{b}|_{[\alpha, 1]}$ a lui \mathbf{b} la intervalul $[\alpha, 1]$ este curba Bézier determinată de poligonul de control

$$(\mathbf{b}_0^n(\alpha), \mathbf{b}_1^{n-1}(\alpha), \dots, \mathbf{b}_{n-1}^1(\alpha), \mathbf{b}_n^0(\alpha)),$$

unde $\mathbf{b}_0^0(\alpha), \mathbf{b}_0^1(\alpha), \dots, \mathbf{b}_0^{n-1}(\alpha), \mathbf{b}_0^n(\alpha), \mathbf{b}_1^{n-1}(\alpha), \dots, \mathbf{b}_{n-1}^1(\alpha), \mathbf{b}_n^0(\alpha)$ sunt puncte de Casteljaou corespunzătoare valorii α a parametrului; în particular $\mathbf{b}_0^0(\alpha) = \mathbf{b}_0$, $\mathbf{b}_0^n(\alpha) = \mathbf{b}(\alpha)$, $\mathbf{b}_n^0(\alpha) = \mathbf{b}_n$.

Observația 4.15 Ultima parte a propoziției se bazează pe următoarea afirmație: fie \mathbf{b} și $\tilde{\mathbf{b}}$ curbe Bézier asociate poligoanelor de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$, respectiv $(\tilde{\mathbf{b}}_0, \tilde{\mathbf{b}}_1, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_n)$, unde

$$\tilde{\mathbf{b}}_0 = \mathbf{b}_n, \tilde{\mathbf{b}}_1 = \mathbf{b}_{n-1}, \dots, \tilde{\mathbf{b}}_{n-1} = \mathbf{b}_1, \tilde{\mathbf{b}}_n = \mathbf{b}_0.$$

Între punctele de Casteljaou asociate au loc relațiile:

$$\tilde{\mathbf{b}}_0^j(t) = \mathbf{b}_{n-j}^j(1-t), \quad \forall j = 0, \dots, n, \quad t \in [0, 1].$$

Exemplul 4.16 Considerăm poligonul de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ format din punctele

$$\mathbf{b}_0 = (-4, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 8)$$

și $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ curba Bézier asociată. Pentru $\alpha = \frac{1}{2}$ punctele de Casteljaou sunt

$$\mathbf{b}_0^0\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{b}_0 = (-4, 0), \quad \mathbf{b}_1^0\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{b}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_2^0\left(\frac{1}{2}\right) = \mathbf{b}_2 = (0, 8);$$

$$\mathbf{b}_0^1\left(\frac{1}{2}\right) = (-2, 0), \quad \mathbf{b}_1^1\left(\frac{1}{2}\right) = (0, 4), \quad \mathbf{b}_0^2\left(\frac{1}{2}\right) = (-1, 2).$$

Se deduce că restricția lui \mathbf{b} la intervalul $[0, \frac{1}{2}]$ este curba Bézier determinată de poligonul de control format din punctele $(-4, 0), (-2, 0), (-1, 2)$, iar restricția lui \mathbf{b} la intervalul $[\frac{1}{2}, 1]$ este curba Bézier asociată poligonului de control $((-1, 2), (0, 4), (0, 8))$.

Exercițiul 4.17 Fie $\mathbf{b}_0 = (4, 4)$, $\mathbf{b}_1 = (4, 8)$, $\mathbf{b}_2 = (0, 4)$, $\mathbf{b}_3 = (4, 0)$ și $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ curba Bézier asociată. Găsiți poligoanele de control care determină curbele Bézier $\mathbf{b}|_{[0, \frac{1}{2}]}$ și $\mathbf{b}|_{[\frac{1}{2}, 1]}$.

Exercițiul 4.18 Fie $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3$ vârfurile unui pătrat și \mathbf{b} curba Bézier asociată. Indicați poligoanele de control care determină curbele Bézier $\mathbf{b}|_{[0, \frac{1}{2}]}$ și $\mathbf{b}|_{[\frac{1}{2}, 1]}$.

Observația 4.19 Procesul de subdivizare a unei curbe pentru o valoare a parametrului (de exemplu $t = \frac{1}{2}$) poate fi repetat, obținând arce de curbă din ce în ce mai mici. Acest procedeu este util pentru a stabili dacă o dreaptă intersectează o curbă Bézier: fără a restrânge generalitatea, se poate presupune că dreapta este paralelă cu una din axele de coordonate. Ceea ce se studiază, de fapt, (și este mult mai ușor de verificat din punct de vedere practic) este intersecția dreptei cu paralelipipedul minim (minmax box-ul) determinat de poligonul de control care generează curba Bézier. În cazul în care dreapta nu intersectează acest paralelipiped, atunci ea nu intersectează nici curba, în caz contrar, prin subdivizări repetate, pot fi approximate punctele de intersecție ale dreptei date cu curba Bézier inițială.

Scrieți în forma Bernstein curbele \mathbf{b} , $\mathbf{b}|_{[0, \frac{1}{2}]}$ și $\mathbf{b}|_{[\frac{1}{2}, 1]}$.

Capitolul 5

Cubice spline

5.1 Racordul a două arce de curbă Bézier

Observația 5.1 Fie $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \dots, \mathbf{b}_n)$ un poligon de control din \mathbf{R}^m și fie $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^m$ curba Bézier asociată. Pentru un interval arbitrar $[\alpha, \beta] \subset \mathbf{R}$ ($\alpha \neq \beta$), definim aplicația (numită **curbă Bézier** definită pe intervalul $[\alpha, \beta]$)

$$\mathbf{b}^{[\alpha, \beta]} : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{b}^{[\alpha, \beta]} := \mathbf{b} \circ \psi,$$

unde

$$\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow [0, 1] \quad \psi(u) = \frac{u - \alpha}{\beta - \alpha}$$

este schimbarea afină de parametru de la intervalul $[\alpha, \beta]$ la intervalul $[0, 1]$. În cele ce urmează vom renunța la scrierea intervalului de definiție ca indice superior, acest interval rezultând din context.

Exemplul 5.2 Considerăm poligonul de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ cu $\mathbf{b}_0 = (0, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (2, 0)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 4)$. Curba Bézier asociată definită pe intervalul $[0, 1]$ este

$$\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{b}(t) = (4t - 2t^2, 4t^2)$$

iar curba Bézier asociată aceluiași poligon, dar definită pe intervalul $[2, 4]$ este

$$\tilde{\mathbf{b}} : [2, 4] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \tilde{\mathbf{b}}(u) = \mathbf{b} \circ \psi(u),$$

cu $\psi(u) = \frac{u-2}{4-2}$, deci

$$\tilde{\mathbf{b}}(u) = \mathbf{b}\left(\frac{u-2}{2}\right) = \left(\frac{-u^2 + 8u - 12}{2}, (u-2)^2\right).$$

Propoziția 5.3 Fie $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n)$ și $(\mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}, \dots, \mathbf{b}_{2n})$ două poligoane de control și $\mathbf{b} : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbf{R}^m$, respectiv $\tilde{\mathbf{b}} : [u_1, u_2] \rightarrow \mathbf{R}^m$ curbele Bézier asociate ($u_0 < u_1 < u_2$; această condiție va fi subînțeleasă în cele ce urmează).

(i) Cele două curbe au un racord de clasă GC^1 în punctul \mathbf{b}_n dacă și numai dacă punctele $\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}$ sunt coliniare.

(ii) Cele două curbe au un racord de clasă C^1 în punctul \mathbf{b}_n dacă și numai dacă punctele $\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}$ sunt coliniare și are loc egalitatea de rapoarte $r(\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$.

(iii) Cele două curbe au un racord de clasă C^2 în punctul \mathbf{b}_n dacă și numai dacă sunt verificate condițiile:

Ce diferență este între curba $\mathbf{b}|_{[0, \frac{1}{2}]}$, construită prin subdivizare și curba $\mathbf{b}^{[0, \frac{1}{2}]}$?

Algoritmul de Casteljau poate fi adaptat pentru construirea curbei $\mathbf{b}^{[\alpha, \beta]}$.

Determinați vectorii tangenți la curba nou construită în capetele sale.

Curbele \mathbf{b} și $\tilde{\mathbf{b}}$ au aceeași imagine geometrică.

Scrieți explicit condițiile din această propoziție pentru $n = 3$.

Demonstrați că, dacă α, β, γ sunt numere reale, atunci $r(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \beta}$.

- punctele $\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}$ sunt coliniare și are loc egalitatea de rapoarte $r(\mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{b}_n, \mathbf{b}_{n+1}) = r(u_0, u_1, u_2)$;
- există un punct \mathbf{d} cu proprietatea că $\mathbf{b}_{n-2}, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{d}$, respectiv $\mathbf{d}, \mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+2}$ sunt triplete de puncte coliniare și, în plus, au loc egalitățile

$$r(\mathbf{b}_{n-2}, \mathbf{b}_{n-1}, \mathbf{d}) = r(\mathbf{d}, \mathbf{b}_{n+1}, \mathbf{b}_{n+2}) = r(u_0, u_1, u_2).$$

Punctul \mathbf{d} se numește **punct de Boor** asociat racordului celor două curbe.

Exemplul 5.4 (i) În \mathbf{R}^2 considerăm punctele $\mathbf{b}_0 = (1, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 4)$, $\mathbf{b}_2 = (2, 5)$, $\mathbf{b}_3 = (4, 5)$, $\mathbf{b}_4 = (6, 3)$, $\mathbf{b}_5 = (6, 2)$, $\mathbf{b}_6 = (3, 0)$; fie, de asemenea, $u_0 = 2, u_1 = 4, u_2 = 7$. Cum $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ nu sunt coliniare, cubicele Bézier $\mathbf{b} : [u_0, u_1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ și $\tilde{\mathbf{b}} : [u_1, u_2] \rightarrow \mathbf{R}^2$ corespunzătoare poligoanelor de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, respectiv $(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$ nu au un racord de clasă GC^1 în \mathbf{b}_3 .

Justificați de ce punctele $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ nu sunt coliniare.

(ii) În \mathbf{R}^2 considerăm punctele $\mathbf{b}_0 = (0, 2)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 3)$, $\mathbf{b}_2 = (3, 3)$, $\mathbf{b}_3 = (4, 2)$, $\mathbf{b}_4 = (6, 0)$, $\mathbf{b}_5 = (4, -6)$, $\mathbf{b}_6 = (1, -1)$. Fie $u_0 = 1, u_1 = 4, u_2 = 7$. Avem:

$$\overrightarrow{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3} = \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2 = (1, -1), \quad \overrightarrow{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_4} = \mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_2 = (3, -3),$$

deci vectorii $\overrightarrow{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3}$ și $\overrightarrow{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_4}$ sunt liniar dependenți, adică punctele $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ sunt coliniare; în particular cubicele Bézier $\mathbf{b} : [1, 4] \rightarrow \mathbf{R}^2$ și $\tilde{\mathbf{b}} : [4, 7] \rightarrow \mathbf{R}^2$ asociate poligoanelor de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, respectiv $(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$ au un racord de clasă GC^1 în \mathbf{b}_3 . Pe de altă parte,

$$\overrightarrow{\mathbf{b}_2\mathbf{b}_3} = \mathbf{b}_3 - \mathbf{b}_2 = (1, -1), \quad \overrightarrow{\mathbf{b}_3\mathbf{b}_4} = \mathbf{b}_4 - \mathbf{b}_3 = (2, -2),$$

adică $r(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4) = \frac{1}{2}$, iar $r(u_0, u_1, u_2) = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} = 1$, așadar

$$r(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4) \neq r(u_0, u_1, u_2),$$

ceea ce arată că racordul nu este de clasă \mathcal{C}^1 . Alegând în schimb $u'_0 = 1, u'_1 = 4$ și $u'_2 = 10$, avem

$$r(u'_0, u'_1, u'_2) = \frac{u'_1 - u'_0}{u'_2 - u'_1} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} = r(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4),$$

cu alte cuvinte curbele Bézier $\mathbf{c} : [1, 4] \rightarrow \mathbf{R}^2$, respectiv $\tilde{\mathbf{c}} : [4, 10] \rightarrow \mathbf{R}^2$ asociate celor două poligoane de control au un racord de clasă \mathcal{C}^1 în \mathbf{b}_3 . Este de remarcat faptul că $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ (ca funcții), în vreme ce parametrizările $\tilde{\mathbf{b}}$ și $\tilde{\mathbf{c}}$ au aceeași imagine geometrică, dar sunt diferite ca aplicații. Acest exemplu arată că un racord care are doar continuitate geometrică GC^1 poate deveni, prin alegerea convenabilă a intervalului pe care este definită parametrizarea (este suficient să modificăm unul din capete!) de clasă \mathcal{C}^1 . Cu alte cuvinte, continuitatea geometrică GC^1 este legată numai de forma poligonului de control, iar faptul că un racord are clasă \mathcal{C}^1 este legat atât de poligonul de control, cât și de intervalele pe care sunt definite parametrizările.

Să analizăm în continuare dacă acest racord este și de clasă \mathcal{C}^2 . Pentru aceasta trebuie să determinăm punctul \mathbf{d} de intersecție a dreptelor $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ și $\mathbf{b}_4\mathbf{b}_5$: dreapta $\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2$ are ecuația implicită $x_2 = 3$, iar dreapta $\mathbf{b}_4\mathbf{b}_5$ are ecuația $3x_1 - x_2 - 18 = 0$ și punctul lor de intersecție este $\mathbf{d} = (7, 3)$. Avem:

$$\overrightarrow{\mathbf{b}_1\mathbf{b}_2} = (2, 0), \quad \overrightarrow{\mathbf{b}_2\mathbf{d}} = (4, 0), \quad r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{d}) = \frac{1}{2},$$

$$\overrightarrow{\mathbf{d}\mathbf{b}_4} = (-1, -3), \quad \overrightarrow{\mathbf{b}_4\mathbf{b}_5} = (-2, -6), \quad r(\mathbf{d}, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5) = \frac{1}{2},$$

deci au loc egalitățile

$$r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{d}) = r(\mathbf{d}, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5) = r(u'_0, u'_1, u'_2),$$

ceea ce arată că racordul curbilor \mathbf{c} și $\tilde{\mathbf{c}}$ este de clasă \mathcal{C}^2 .

Dacă raportul $r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{d})$ (respectiv $r(\mathbf{d}, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5)$) nu ar fi fost egal cu $\frac{1}{2}$, am fi putut modifica punctul \mathbf{b}_1 pe dreapta $\mathbf{b}_2\mathbf{d}$ (respectiv punctul \mathbf{b}_5 pe dreapta \mathbf{db}_4), astfel ca raportul respectiv să fie $\frac{1}{2}$; altfel spus, prin modificarea poligonului de control se poate obține un racord de clasă \mathcal{C}^2 .

În ce situație nu poate fi obținut, nici după modificarea intervalelor, un racord de clasă \mathcal{C}^2 ?

Exercițiul 5.5 În \mathbf{R}^2 considerăm punctele

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (2, 2), \quad \mathbf{b}_2 = (2, 4), \quad \mathbf{b}_3 = (3, 3),$$

$$\mathbf{b}_4 = (5, 1), \quad \mathbf{b}_5 = (4, 0), \quad \mathbf{b}_6 = (2, -1)$$

și numerele reale

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 3.$$

Fie $\mathbf{b} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$ și $\tilde{\mathbf{b}} : [1, 3] \rightarrow \mathbf{R}^2$ curbele Bézier asociate. Stabiliți ce clasă are racordul celor două curbe în punctul \mathbf{b}_3 .

Întrebare: Ce date sunt necesare pentru a putea construi două cubice Bézier care au un racord de clasă \mathcal{C}^1 ? Dar un racord de clasă \mathcal{C}^2 ?

Exemplul 5.6 Considerăm punctele:

$$\mathbf{b}_0 = (1, 1), \quad \mathbf{b}_1 = (2, 2), \quad \mathbf{d} = (6, 2), \quad \mathbf{b}_5 = (3, -3), \quad \mathbf{b}_6 = (1, -3)$$

și numerele reale

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2.$$

Pornind de la aceste date putem construi poligoane de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ și $(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$ astfel încât curbele Bézier asociate \mathbf{b} și $\tilde{\mathbf{b}}$ definite pe intervalele $[0, 1]$, respectiv $[1, 2]$ să aibă un racord de clasă \mathcal{C}^2 . Mai întâi să observăm că avem

$$r(u_0, u_1, u_2) = \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_1} = 1.$$

Punctele $\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4$ le determinăm din condițiile

$$r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{d}) = r(\mathbf{d}, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5) = r(\mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4) = r(u_0, u_1, u_2) = 1,$$

$$\mathbf{b}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{d}, \quad \mathbf{b}_4 = \frac{1}{2}\mathbf{d} + \frac{1}{2}\mathbf{b}_5, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{2}\mathbf{b}_2 + \frac{1}{2}\mathbf{b}_4 :$$

Concret, obținem

$$\mathbf{b}_2 = (4, 2), \quad \mathbf{b}_4 = \left(\frac{9}{2}, -\frac{1}{2}\right), \quad \mathbf{b}_3 = \left(\frac{17}{4}, \frac{3}{4}\right).$$

Exercițiul 5.7 Considerăm punctele:

$$\mathbf{b}_0 = (0, 2), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 4), \quad \mathbf{d} = (4, 2), \quad \mathbf{b}_5 = (4, -2), \quad \mathbf{b}_6 = (0, -3)$$

și numerele reale

$$u_0 = 1, \quad u_1 = 2, \quad u_2 = 3.$$

Determinați poligoanele de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$ și $(\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6)$ astfel încât curbele Bézier asociate \mathbf{b} și $\tilde{\mathbf{b}}$ definite pe intervalele $[1, 2]$, respectiv $[2, 3]$ să aibă un racord de clasă \mathcal{C}^2 .

Dacă A, P, B sunt puncte coliniare cu $r(A, P, B) = r \neq -1$, avem $P = \frac{1}{r+1}A + \frac{r}{r+1}B$.

5.2 Cubice spline

Definiția 5.8 O **cubică spline** este o curbă polinomială pe porțiuni obținută prin racord de clasă \mathcal{C}^2 al unui număr finit de cubice Bézier.

Exemplul 5.9 (i) Aplicația $\gamma : [1, 10] \rightarrow \mathbf{R}^2$ definită prin

$$\gamma(t) = \begin{cases} \mathbf{c}(t), & \text{dacă } t \in [1, 4] \\ \tilde{\mathbf{c}}(t), & \text{dacă } t \in [4, 10], \end{cases}$$

unde \mathbf{c} și $\tilde{\mathbf{c}}$ sunt curbele din exemplul 5.4, este o cubică spline.

(ii) Aplicația $\gamma : [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2$ definită prin

$$\gamma(t) = \begin{cases} \mathbf{b}(t), & \text{dacă } t \in [0, 1] \\ \tilde{\mathbf{b}}(t), & \text{dacă } t \in [1, 2], \end{cases}$$

unde \mathbf{b} și $\tilde{\mathbf{b}}$ sunt curbele din exemplul 5.6, este o cubică spline.

Stabiliți dacă \mathbf{b} și $\tilde{\mathbf{b}}$ din exercițiul 5.5 dau naștere unei cubice spline.

Problemă: Ce date sunt suficiente pentru a construi o cubică spline?

Observația 5.10 (i) O cubică spline este o aplicație $\gamma : [u_0, u_L] \rightarrow \mathbf{R}^m$ cu proprietatea că există o diviziune $u_0 < u_1 < \dots < u_L$ a intervalului $[u_0, u_L]$ astfel ca $\gamma|_{[u_j, u_{j+1}]}$ să fie cubică Bézier pentru orice $j \in \{0, \dots, L\}$ și aplicația γ să fie de clasă \mathcal{C}^2 în fiecare nod u_j ($j = 1, \dots, L-1$).

(ii) Aplicând direct definiția, rezultă că obiectele necesare pentru a putea construi o cubică spline sunt următoarele:

- un interval $[u_0, u_L]$ și o diviziune $u_0 < u_1 < \dots < u_L$ a acestuia;
- un șir de poligoane de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3), (\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6), \dots, (\mathbf{b}_{3j}, \mathbf{b}_{3j+1}, \mathbf{b}_{3j+2}, \mathbf{b}_{3j+3}), \dots, (\mathbf{b}_{3L-3}, \mathbf{b}_{3L-2}, \mathbf{b}_{3L-1}, \mathbf{b}_{3L})$ astfel ca:
 - pentru orice $j \in \{1, \dots, L-1\}$ punctele $\mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{b}_{3j}, \mathbf{b}_{3j+1}$ sunt coliniare și $r(\mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{b}_{3j}, \mathbf{b}_{3j+1}) = r(u_{j-1}, u_j, u_{j+1})$;
 - pentru orice $j \in \{1, \dots, L-1\}$ există un punct \mathbf{d}_j (numit **punct de Boor**) astfel ca $\mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{d}_j$, respectiv $\mathbf{d}_j, \mathbf{b}_{3j+1}, \mathbf{b}_{3j+2}$ să fie coliniare și

$$r(\mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{d}_j) = r(\mathbf{d}_j, \mathbf{b}_{3j+1}, \mathbf{b}_{3j+2}) = r(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}).$$

Scrieți explicit aceste condiții pentru $L = 2$ și $L = 3$.

(iii) Să fixăm acum un nod u_j ($j \in \{2, \dots, L-1\}$). Avem, așadar,

$$r(\mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{b}_{3j-1}) = r(u_{j-2}, u_{j-1}, u_j); \quad r(\mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{d}_j) = r(u_{j-1}, u_j, u_{j+1}).$$

Utilizând lema 5.11, deducem:

$$r(\mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{d}_j) = \frac{u_{j-1} - u_{j-2}}{u_{j+1} - u_{j-1}}, \quad r(\mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{d}_j) = \frac{u_j - u_{j-2}}{u_{j+1} - u_j}. \quad (5.1)$$

Relațiile (5.1) arată că putem determina punctele Bézier \mathbf{b}_{3j-2} și \mathbf{b}_{3j-1} în funcție de punctele de Boor \mathbf{d}_{j-1} și \mathbf{d}_j ; mai precis avem

$$\mathbf{b}_{3j-2} = \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_{j-2}} \mathbf{d}_{j-1} + \frac{u_{j-1} - u_{j-2}}{u_{j+1} - u_{j-2}} \mathbf{d}_j, \quad (5.2)$$

$$\mathbf{b}_{3j-1} = \frac{u_{j+1} - u_j}{u_{j+1} - u_{j-2}} \mathbf{d}_{j-1} + \frac{u_j - u_{j-2}}{u_{j+1} - u_{j-2}} \mathbf{d}_j. \quad (5.3)$$

Deduceți relațiile (5.2) și (5.3) din egalitățile (5.1).

Lema 5.11 Fie A, P, Q, B puncte coliniare din \mathbf{R}^m , cu $A \neq B$ și $P, Q \in (AB)$.
Notăm

$$r_1 = r(A, P, Q), \quad r_2 = r(P, Q, B).$$

*Demonstrați această
lemă în cazul $m = 1$.*

Avem următoarele relații:

$$r(A, P, B) = \frac{r_1 r_2}{r_2 + 1}, \quad r(A, Q, B) = r_2(r_1 + 1).$$

Teorema 5.12 (Algoritmul Boehm-de Boor) O mulțime ordonată \mathcal{P} de $L + 3$ puncte

$$(\mathbf{d}_{-1}, \mathbf{d}_0, \mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_{L+1})$$

și un șir de numere reale

$$u_0 < u_1 < \dots < u_L$$

definesc o cubică spline. Mulțimea \mathcal{P} se numește **poligon de Boor** al cubicei spline.

Demonstrație. Precizăm modul în care se construiesc punctele poligoanelor de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3), (\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \mathbf{b}_6), \dots, (\mathbf{b}_{3j}, \mathbf{b}_{3j+1}, \mathbf{b}_{3j+2}, \mathbf{b}_{3j+3}), \dots, (\mathbf{b}_{3L-3}, \mathbf{b}_{3L-2}, \mathbf{b}_{3L-1}, \mathbf{b}_{3L})$ care definesc arcele de curbă Bézier ce formează cubica spline.

*Scrieți explicit această
demonstrație pentru
 $L = 2$ și $L = 3$.*

- Punctele $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_{3L-1}, \mathbf{b}_{3L}$ se aleg astfel:

$$\mathbf{b}_0 := \mathbf{d}_{-1}, \quad \mathbf{b}_1 := \mathbf{d}_0, \quad \mathbf{b}_{3L-1} := \mathbf{d}_L, \quad \mathbf{b}_{3L} := \mathbf{d}_{L+1}.$$

- Punctele \mathbf{b}_2 și \mathbf{b}_{3L-2} se construiesc pornind de la relațiile $r(\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{d}_1) = r(u_0, u_1, u_2)$, respectiv $r(\mathbf{d}_{L-1}, \mathbf{b}_{3L-2}, \mathbf{b}_{3L-1}) = r(u_{L-2}, u_{L-1}, u_L)$, așadar

$$\mathbf{b}_2 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 - u_0} \mathbf{d}_0 + \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0} \mathbf{d}_1, \quad \mathbf{b}_{3L-2} = \frac{u_L - u_{L-1}}{u_L - u_{L-2}} \mathbf{d}_{L-1} + \frac{u_{L-1} - u_{L-2}}{u_L - u_{L-2}} \mathbf{d}_L.$$

- Punctele $\mathbf{b}_4, \mathbf{b}_5, \dots, \mathbf{b}_{3j-2}, \mathbf{b}_{3j-1}, \dots, \mathbf{b}_{3L-5}, \mathbf{b}_{3L-4}$ se construiesc folosind ecuațiile (5.2), respectiv (5.3).

- Punctele $\mathbf{b}_3, \mathbf{b}_6, \dots, \mathbf{b}_{3j}, \dots, \mathbf{b}_{3L-3}$ se obțin folosind egalitatea de rapoarte $r(\mathbf{b}_{3j-1}, \mathbf{b}_{3j}, \mathbf{b}_{3j+1}) = r(u_{j-1}, u_j, u_{j+1})$, adică

$$\mathbf{b}_{3j} = \frac{u_{j+1} - u_j}{u_{j+1} - u_{j-1}} \mathbf{b}_{3j-1} + \frac{u_j - u_{j-1}}{u_{j+1} - u_{j-1}} \mathbf{b}_{3j+1}, \quad j = 1, \dots, L-1,$$

ceea ce încheie demonstrația. ■

Observația 5.13 Șirul punctelor de diviziune ale intervalului $[u_0, u_L]$ poate fi ales astfel încât să reflecte proprietăți geometrice ale poligonului de Boor. Spre exemplu, prin **metoda lungimii coardei**:

$$\begin{aligned} u_0 &= 0, \quad u_1 = \|\overrightarrow{\mathbf{d}_{-1}\mathbf{d}_1}\|, \\ u_j &= u_{j-1} + \|\overrightarrow{\mathbf{d}_{j-1}\mathbf{d}_j}\|, \quad j = 2, \dots, L-1, \\ u_L &= u_{L-1} + \|\overrightarrow{\mathbf{d}_{L-1}\mathbf{d}_{L+1}}\| \end{aligned}$$

diviziunea este aleasă astfel ca lungimea intervalului $[u_{j-1}, u_j]$ să fie egală cu lungimea segmentului $[\mathbf{d}_{j-1}, \mathbf{d}_j]$ (pentru $j = 2, \dots, L-1$).

Exemplul 5.14 Considerăm numerele reale

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad u_2 = 2, \quad u_3 = 4 \quad (L = 3).$$

Fie poligonul de Boor $(\mathbf{d}_{-1}, \mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_4)$ fixat. Conform algoritmului Boehm-de Boor definim $\mathbf{b}_0 := \mathbf{d}_{-1}, \mathbf{b}_1 := \mathbf{d}_0, \mathbf{b}_8 := \mathbf{d}_3, \mathbf{b}_9 := \mathbf{d}_4$. Mai departe, avem

$$\mathbf{b}_2 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 - u_0} \mathbf{d}_0 + \frac{u_1 - u_0}{u_2 - u_0} \mathbf{d}_1 = \frac{1}{2} \mathbf{d}_0 + \frac{1}{2} \mathbf{d}_1; \quad \mathbf{b}_7 = \frac{2}{3} \mathbf{d}_2 + \frac{1}{3} \mathbf{d}_3.$$

Conform aceluiași algoritm

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_4 = \mathbf{b}_{3 \cdot 2 - 2} &= \frac{u_3 - u_1}{u_3 - u_0} \mathbf{d}_1 + \frac{u_1 - u_0}{u_3 - u_0} \mathbf{d}_2 = \frac{3}{4} \mathbf{d}_1 + \frac{1}{4} \mathbf{d}_2 \\ \mathbf{b}_5 &= \frac{1}{2} \mathbf{d}_1 + \frac{1}{2} \mathbf{d}_2, \quad \mathbf{b}_3 = \frac{1}{2} \mathbf{b}_2 + \frac{1}{2} \mathbf{b}_4, \quad \mathbf{b}_6 = \frac{2}{3} \mathbf{b}_5 + \frac{1}{3} \mathbf{b}_7. \end{aligned}$$

Capitolul 6

Curbe Bézier raționale

Să considerăm aplicația de proiecție centrală pe planul L de ecuație $x_3 = 1$

$$\pi_c : \mathbf{R}^3 \setminus \{x \mid x_3 = 0\} \rightarrow L, \quad \pi_c(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3}, 1 \right).$$

Comparați poziția relativă a dreptelor $\{(\alpha + 1, \alpha - 1, \alpha) \mid \alpha \in \mathbf{R}\}$ și $\{(\beta, -\beta, \beta - 1) \mid \beta \in \mathbf{R}\}$ precum și poziția relativă a imaginilor lor prin π .

Identificând în mod natural acest plan cu \mathbf{R}^2 , obținem o aplicație

$$\pi : \mathbf{R}^3 \setminus \{x \mid x_3 = 0\} \rightarrow L, \quad \pi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3} \right).$$

Propoziția 6.1 Fie $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ un poligon de control din \mathbf{R}^3 și fie mai departe $\mathbf{a} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^3$, $\mathbf{a}(t) = \sum_{i=0}^2 \mathbf{a}_i B_i^2(t)$ curba Bézier asociată. Presupunem că niciunul din cele trei puncte de control nu este situat în planul de ecuație $x_3 = 0$ și că nici curba \mathbf{a} nu intersectează acest plan. Scriem $\mathbf{a}_i = (x_1(\mathbf{a}_i), x_2(\mathbf{a}_i), \lambda_i)$ ($i = 0, 1, 2$) și definim punctele

$$\mathbf{b}_i := \left(\frac{x_1(\mathbf{a}_i)}{\lambda_i}, \frac{x_2(\mathbf{a}_i)}{\lambda_i} \right) = \pi(\mathbf{a}_i) \in \mathbf{R}^2, \quad i = 0, 1, 2.$$

Imagina curbei \mathbf{a} prin aplicația π este curba

$$\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = \frac{\sum_{i=0}^2 \lambda_i \mathbf{b}_i B_i^2(t)}{\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t)}.$$

Avem $\mathbf{r}(t) = \pi(\mathbf{a}(t))$, ținând cont de notațiile introduse, deducem cu ușurință relația din enunț.

Definiția 6.2 Fie $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ puncte din \mathbf{R}^2 , $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$ numere reale, astfel ca $\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t) \neq 0$ pe intervalul $[0, 1]$. Curba

$$\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^2 \frac{\lambda_i B_i^2(t)}{\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t)} \mathbf{b}_i$$

se numește **curbă Bézier rațional pătratică (CBRP)**. Punctele $\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ se numesc **puncte de control ale curbei**, iar numerele $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ se numesc **ponderi ale punctelor de control \mathbf{b}_i** .

Exemplul 6.3 Considerăm punctele

$$\mathbf{b}_0 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 1), \quad \mathbf{b}_2 = (1, 0)$$

și numerele reale

$$\lambda_0 = 1, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2.$$

Avem

$$\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t) = 1 + t^2,$$

iar CBRP asociată este

$$\mathbf{r} : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2, \quad \mathbf{r}(t) = \left(\frac{2t^2}{1+t^2}, \frac{2t(1-t)}{1+t^2} \right).$$

Determinați punctele de intersecție dintre curba \mathbf{b} și curba \mathbf{r} și comparați imaginile lor geometrice.

(Curba Bézier asociată acestui poligon de control este $\mathbf{b}(t) = (t^2, 2t - 2t^2)$.)
Poligonul de control inițial este dat de punctele

$$\mathbf{a}_0 = (0, 0, 1), \quad \mathbf{a}_1 = (0, 1, 1), \quad \mathbf{a}_2 = (2, 0, 2).$$

Exercițiul 6.4 Determinați CBRP asociată datelor

$$\mathbf{b}_0 = (2, 0), \quad \mathbf{b}_1 = (0, 0), \quad \mathbf{b}_2 = (0, 1);$$

$$\lambda_0 = 2, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 1$$

și precizați punctele poligonului de control $(\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)$ din care se obțin aceste date.

Exercițiul 6.5 Puteți determina o curbă Bézier rațional pătratică \mathbf{r} astfel ca $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2} \right)$ oricare ar fi $t \in [0, 1]$? În caz afirmativ, care este poligonul de control din \mathbf{R}^3 inițial?

Propoziția 6.6 Fie \mathbf{r} o curbă Bézier rațional pătratică definită de datele inițiale $(\mathbf{b}_i, \lambda_i)$ $i = 0, 1, 2$.

(i) În cazul în care cele trei ponderi au aceeași valoare, $\lambda \neq 0$, (i.e. punctele $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1$ și \mathbf{a}_2 sunt situate în planul $x_3 = \lambda$), atunci CBRP asociată \mathbf{r} este o curbă Bézier $\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^2 B_i^2(t) \mathbf{b}_i$.

(ii) Au loc relațiile

$$\mathbf{r}(0) = \mathbf{b}_0, \quad \mathbf{r}(1) = \mathbf{b}_2,$$

deci CBRP considerată interpolează punctele de extrem.

(iii) Au loc egalitățile

$$\mathbf{r}'(0) = \frac{2\lambda_1}{\lambda_0}(\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_0), \quad \mathbf{r}'(1) = \frac{2\lambda_1}{\lambda_2}(\mathbf{b}_2 - \mathbf{b}_1),$$

cu alte cuvinte tangentele în punctele extreme sunt direcționate de vectorii $\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1}$, respectiv $\overrightarrow{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2}$

(iv) Dacă ponderile sunt strict pozitive, atunci CBRP este inclusă în înfășurătoarea convexă a punctelor de control.

În proprietățile (ii) și (iii) se folosește faptul că ponderile extreme sunt nenule. Acest fapt rezultă din condiția $\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t) \neq 0$ pe intervalul $[0, 1]$.

Observația 6.7 Convenind că punctele de forma $(\frac{x_1}{x_3}, \frac{x_2}{x_3})$ cu $x_3 = 0$ sunt situate la infinit, putem extinde definiția unei CBRP, cerând doar ca ponderile $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ să nu fie toate nule, dar acceptând ca expresia $\sum_{j=0}^2 \lambda_j B_j^2(t)$ să se anuleze pe intervalul $[0, 1]$. Fiind un polinom de grad cel mult doi nenul (deoarece ponderile nu sunt toate nule), va avea cel mult două rădăcini în acest interval, deci CBRP obținută va avea cel mult două puncte la infinit.

Propoziția 6.8 O curbă Bézier rațional pătratică este un arc de conică. Mai precis, fie CBRP definită de datele $(\mathbf{b}_i, \lambda_i)$, $i = 0, 1, 2$. Atunci:

- dacă $\frac{\lambda_0 \lambda_2}{\lambda_1^2} > 1$, curba este un arc de elipsă,
- dacă $\frac{\lambda_0 \lambda_2}{\lambda_1^2} = 1$, curba este un arc de parabolă,
- dacă $\frac{\lambda_0 \lambda_2}{\lambda_1^2} < 1$, curba este un arc de hiperbolă.

Este posibil ca o CBRP să fie inclusă într-o conică degenerată?

Exemplul 6.9 Sistemul de ponderi $(1, 1, 2)$ conduce la un arc de elipsă, oricare ar fi poligonul de control inițial, în vreme ce cu ponderile $(2, 3, 2)$ se ajunge la arce de hiperbolă.

Propoziția 6.10 Fie \mathbf{r} o CBRP definită de $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2)$. Dacă $\lambda_2 \lambda_0 > 0$, există o schimbare de parametru φ astfel $\mathbf{r} \circ \varphi$ să fie o conică definită de același poligon de control și de ponderile $(1, \lambda_1, 1)$. O parametrizare a unui arc de conică definită de un sistem de date de forma $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, 1, \lambda_1, 1)$ se numește **parametrizare standard**. Tipul conice este dat de ponderea λ_1 :

- dacă $\lambda_1 < 1$ conica este elipsă;
- dacă $\lambda_1 = 1$ conica este parabolă;
- dacă $\lambda_1 > 1$ conica este hiperbolă.

Propoziția 6.11 Datele inițiale $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, 1, \lambda_1, 1)$ definesc un arc de cerc tangent poligonului de control în punctele \mathbf{b}_0 și \mathbf{b}_2 și situat în acoperirea convexă a punctelor poligonului de control dacă și numai dacă sunt verificate condițiile

- (i) $\|\overrightarrow{\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_2}\| = \|\overrightarrow{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2}\|$ (cu alte cuvinte triunghiul $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2$ este isoscel cu $[\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0] \equiv [\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2]$) și
- (ii) $\lambda_1 = \cos(\widehat{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_2})$.

Cum putem construi un cerc complet folosind trei arce de cerc privite ca CBRP?

Corolarul 6.12 Parametrizarea arcului de cerc situat în interiorul poligonului de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ care are extremitățile \mathbf{b}_0 respectiv \mathbf{b}_2 este dată de

$$\mathbf{r}(t) = \frac{B_0^2(t)\mathbf{b}_0 + \cos \theta B_1^2(t)\mathbf{b}_1 + B_2^2(t)\mathbf{b}_2}{B_0^2(t) + \cos \theta B_1^2(t) + B_2^2(t)}, \quad t \in [0, 1],$$

unde $\theta = m(\widehat{\mathbf{b}_1 \mathbf{b}_0 \mathbf{b}_2})$. Centrul cercului este situat la intersecția perpendicula-
relor duse pe $\mathbf{b}_0 \mathbf{b}_1$, respectiv pe $\mathbf{b}_2 \mathbf{b}_1$ în \mathbf{b}_0 , respectiv \mathbf{b}_2 .

Exemplul 6.13 Considerăm $\mathbf{b}_0 = (1, 0)$, $\mathbf{b}_1 = (1, 1)$ și $\mathbf{b}_2 = (0, 1)$, în particular $\theta = \frac{\pi}{4}$, deci $\cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{2}$ și arcul de cerc corespunzător este dat de parametrizarea

$$\mathbf{r}(t) = \left(\frac{1 + (\sqrt{2} - 2)t + (1 - \sqrt{2})t^2}{1 + (\sqrt{2} - 2)t + (2 - \sqrt{2})t^2}, \frac{\sqrt{2}t + (1 - \sqrt{2})t^2}{1 + (\sqrt{2} - 2)t + (2 - \sqrt{2})t^2} \right).$$

Observația 6.14 (i) Punctele unei curbe Bézier rațional pătratică pot fi determinate fie aplicând algoritmul de Casteljau atât numitorului cât și numărătorului și apoi efectuând împărțirea, fie determinând punctele $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2$ din \mathbf{R}^3 care prin π sunt aplicate în \mathbf{b}_i , aplicând acestor puncte algoritmul de Casteljau (cu alte cuvinte determinând puncte ale curbei Bézier asociate \mathbf{a}) și apoi calculând imaginea acestor puncte prin proiecția π .

(ii) Prin analogie cu curbele Bézier rațional pătratică, putem introduce curbe Bézier raționale de grad n din \mathbf{R}^m . Datele cu ajutorul cărora construim o astfel de curbă sunt:

- poligonul de control $(\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$ din \mathbf{R}^m ;
- sistemul de ponderi $(\lambda_0, \dots, \lambda_n)$, nu toate nule.

Curba Bézier rațională de grad n asociată acestor date este dată de

$$\mathbf{r}(t) = \sum_{i=0}^n \frac{\lambda_i B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^n \lambda_j B_j^n(t)} \mathbf{b}_i, \quad t \in [0, 1].$$

Proprietățile unei astfel de curbe sunt analoage proprietăților CBRP.

Anexa A

Proiecte

1. Curbe generate de punctele intermediare

Ilustrează cât mai sugestiv curbele determinate de punctele intermediare de Casteljaou.

2. Invarianța afină a curbelor Bézier.

Ilustrează cât mai sugestiv proprietatea de invarianță la transformări afine a curbelor Bézier.

3. Invarianța la combinații baricentrice a curbelor Bézier.

Ilustrează cât mai sugestiv proprietatea de invarianță la combinații baricentrice a curbelor Bézier.

4. Inserarea repetată a unui punct de control.

Ilustrează cât mai sugestiv ce se întâmplă când inserăm în mod repetat un vârf al unui poligon de control.

5. Intersecția paralelipipedelor minime.

Input: Două poligoane de control ale unor cubice Bézier.

Output: -Precizează dacă interioarele paralelipipedelor minime ale celor două poligoane de control se intersectează sau nu.

-Reprezentare grafică (inclusiv desenarea celor două curbe Bézier).

6. Mărirea gradului unei curbe Bézier

Input: Un poligon de control $\mathcal{P} = (\mathbf{b}_0, \dots, \mathbf{b}_n)$, $k \geq 1$.

Output: -Construiește, folosind metoda de mărire a gradului, poligoane de control având $n+2$, $n+3$, \dots , $n+k+1$ puncte și care generează aceeași curbă Bézier ca și \mathcal{P} .

-Reprezentare grafică (în cazul în care poligonul de control este din \mathbf{R}^2).

7. "Compararea" a două curbe Bézier plane

Input: Poligoanele de control pentru două curbe Bézier plane.

Output: -Decide dacă cele două poligoane generează aceeași curbă Bézier.

-Reprezentare grafică.

8. "Deformarea" unei curbe Bézier într-o altă curbă Bézier

Input: Poligoanele de control pentru două curbe Bézier plane \mathbf{b}_1 și \mathbf{b}_2 .

Output: Folosind mărirea gradului și invarianța la combinații baricentrice, realizează o animație cu o familie de curbe de la \mathbf{b}_1 la \mathbf{b}_2 care să sugereze deplasarea lui \mathbf{b}_1 înspre \mathbf{b}_2 .

9. Subdivizare

Input: Poligonul de control al unei curbe Bézier plane \mathbf{b} , $\alpha \in [0, 1]$.

Output: -Determină poligoanele de control ale curbelor $\mathbf{b}|_{[0,\alpha]}$ și $\mathbf{b}|_{[\alpha,1]}$.
-Reprezentare grafică.

10. Racord de clasă \mathcal{C}^1 al unor cubice Bézier

Input: Două poligoane de control $\mathcal{P} = (\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3)$, $\mathcal{Q} = (\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3)$ din planul \mathbf{R}^2 , numere reale $u_0 < u_1 < u_2$.

Output: -Stabilește dacă \mathbf{b} și \mathbf{c} (curbele Bézier asociate lui \mathcal{P} , respectiv \mathcal{Q} și definite pe $[u_0, u_1]$, respectiv $[u_1, u_2]$) au un racord de clasă $G\mathcal{C}^1$ sau \mathcal{C}^1 .
-Reprezentare grafică.

11. Algoritmul Boehm-de Boor

Input: Un număr natural L , un poligon de Boor $(\mathbf{d}_{-1}, \mathbf{d}_0, \dots, \mathbf{d}_{L+1})$ și un șir de noduri u_0, \dots, u_L .

Output: Reprezintă grafic cubica spline asociată acestor date.

12. Curbe Bézier rațional pătratice

Input: Coeficienții unor polinoame P, Q, R de gradul 2.

Output: -Determină poligonul de control $(\mathbf{b}_0, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2)$ și ponderile $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2$ care determină curba Bézier rațional pătratică $\mathbf{r}(t) = \left(\frac{P(t)}{R(t)}, \frac{Q(t)}{R(t)} \right)$.
-Reprezentare grafică.

Anexa B

- **Punctaj:**

10p: oficiu

20p (max): proiect (*)

20p (max): proiecte **sau** lucrări scrise

50p (max): examen sesiune – probă scrisă ("cu cărțile pe masă")

Nota finală se obține împărțind punctajul la 10 și rotunjind.

ATENȚIE! Pentru a promova examenul trebuie obținute minim **50** de puncte, din care minim **10** puncte la lucrarea scrisă.

- **Proiecte (*) :**

- sunt propuse în suportul de curs (Anexa A);

- pot fi realizate în echipă (1-3 membri);

- nu există restricții asupra limbajului de programare utilizat;

- evaluarea: la laborator. Vor fi punctate:

- respectarea termenului de finalizare **(2p)**;

- aspecte informatice:

- rularea programului **(4p)**,

- tratarea unor cazuri degenerate **(2p)**,

- reprezentarea grafică **(2p)**,

- discuții despre codul sursă **(4p)**;

- aspecte matematice (chestiuni teoretice și rezolvarea unui aplicații) **(6p)**.

Bibliografie

- [1] G. Farin, *Curves and Surfaces for CAGD - A practical guide*, Academic Press, 2002.
<http://www.farinhansford.com/books/cagd/materials.html>
<http://www.vis.uni-stuttgart.de/~kraus/LiveGraphics3D/cagd/>
 - [2] E. Petrișor, *Modelare geometrică algoritmică*, Ed. Tehnică, București, 2001.
 - [3] H. Prautzsch, W. Boehm și M. Paluszny, *Bézier and B-Spline Techniques*, Springer, 2002.
<http://i33www.ira.uka.de/applets/mocca/html/noplugin/inhalt.html>
 - [4] M. de Berg, M. van Kreveld, M. Overmars și O. Schwarzkopf, *Computational Geometry, Algorithms and Applications*, Springer, 2000.
 - [5] F. Preparata și M. Shamos, *Computational Geometry: An Introduction*, Springer, 1985.
 - [6] D. Hearn și M. Baker, *Computer Graphics with OpenGL*, Prentice Hall, 2003.
 - [7] G. Albeanu, *Grafica pe calculator. Algoritmi fundamentali*, Editura Universității din București, 2001.
-
- [8] L. Bădescu, *Geometrie*, Editura Universității București, 2000.
 - [9] M. do Carmo, *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.
 - [10] Gh. Galbură și F. Radó, *Geometrie*, Editura Didactică și Pedagogică, București, 1979.
 - [11] A. Gray, *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica*, CRC Press, 1999.
 - [12] I. Hiriță, S. Leiko, L. Nicolescu, G. Pripoe, *Geometrie diferențială. Probleme. Aplicații*, București, 1999.
 - [13] M.I. Munteanu, *Algoritmi geometrici 2D și aplicații în CAGD*, Editura Universității "Al. I. Cuza" Iași, 2005.
 - [14] L. Nicolescu, *Curs de geometrie*, București, 2002.
 - [15] L. Ornea și A. Turtoi, *O introducere în geometrie*, Editura Theta, București, 2000.
 - [16] M.S. Stupariu, *Geometrie analitică*, București, 2008.