Programare logică

Mulţimi de generatori
Algebre libere

Mulţimi de generatori

(S, Σ) signatură multisortată,
A-algebră, X mulţime, $X \subseteq A$

- Subalgebra generată de X în A, notată $\overline{X}$, este *cea mai mică* ($\subseteq$) subalgebră a lui A care include X.
- $C = \overline{X}$ dacă şi numai dacă:
  - $C \subseteq A$, C subalgebră,
  - $X \subseteq C$,
  - $B \subseteq A$, B subalgebră, $X \subseteq B \Rightarrow C \subseteq B$.
- Spunem că A este generată de X dacă $X \subseteq A$ şi $\overline{X} = A$. În acest caz X este mulţime de generatori pentru A.

Construcţia subalgebrei generate

A-algebră, X mulţime, $X \subseteq A$

- $\mathcal{F} := \{B \subseteq A \,|B$ subalgebră, $X \subseteq B\}$
  - $A \in \mathcal{F}$, deci $\mathcal{F} \neq \emptyset$
  - $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}$ implică $\bigcap_{i\in I} B_i \in \mathcal{F}$
  - $\overline{X} = \bigcap\{B \mid B \in \mathcal{F}\}$
- Construim un şir de mulţimi S-sortate $(X_n)_n$ astfel:

  $X_0 := X$,

  $X_{n+1,s} := X_{n,s} \cup \{A_\sigma \,|\, \sigma :\to s\} \cup \{A_\sigma(a_1,\ldots,a_k) \,|$
  $\sigma : s_1 \ldots s_k \to s, (a_1,\ldots,a_k) \in X_{n,s_1} \times \cdots \times X_{n,s_k}\}$.
- Propoziţie. $\overline{X} = \bigcup_n X_n$.

Exemple

Exemplu. M mulţime, $Q \subseteq M$,
$BOOL$-algebra $A = (\mathcal{P}(M), \cup, \cap, \neg, \emptyset, M)$

- $X := \{Q\}$
  $\overline{X} = \{\emptyset, Q, \neg Q, M\}$
- $\overline{\emptyset} = \{\emptyset, M\}$
- $Y := \{\{a\}, \{b\}\}$, unde $a \neq b \in M$
  $\overline{Y} = \{\{a\}, \{b\}\} \cup \{\emptyset, M\} \cup$
  $\cup \{\neg\{a\}, \neg\{b\}, \{a, b\}\} \cup$
  $\cup \{\neg\{a, b\}\}$

Proprietăţi

(S, Σ) signatură multisortată

Propoziţie. Fie $h : A \to B$ şi $g : A \to B$ morfisme.

- $X \subseteq A$, $h|_X = g|_X \Rightarrow h|_{\overline{X}} = g|_{\overline{X}}$,
- $h(\,\overline{X}\,) = \overline{h(X)}$ pentru $X \subseteq A$,
- $\overline{h^{-1}(Y)} \subseteq h^{-1}(\,\overline{Y}\,)$ pentru $Y \subseteq B$.

Algebre libere

(S, Σ) signatură multisortată, X mulţime de variabile

- O algebră A este liber generată de X dacă
  - $X \subseteq A$,
  - oricare ar fi B o algebră şi $f : X \to B$ o funcţie există un unic morfism $\tilde{f} : A \to B$ cu $\tilde{f}_s(x) = f_s(x)$ oricare $x \in X_s$, $s \in S$.
- Dacă A_1 şi A_2 sunt liber generate de X, atunci $A_1 \simeq A_2$.
- $T_\Sigma(Y)$ este liber generată de mulţimea de variabile Y.
- T_Σ este liber generată de mulţimea $\emptyset$.

o expresie este un element al unei algebre libere

Mulţimi de generatori liberi

(S, Σ) signatură multisortată,
A-algebră, X mulţime de variabile, $X \subseteq A$

- Propoziţie. Dacă A este liber generată de X, atunci $\overline{X} = A$. În acest caz, spunem că X este mulţime de generatori liberi pentru A.
- $NAT = (S = \{s\}, \Sigma)$, $\Sigma = \{0 :\to nat, succ : nat \to nat\}$
  $A_{nat} := \mathbb{N}$, $A_0 := 0$, $A_{succ}(x) := x + 1$
  - $\{1\}$ este mulţime de generatori pentru A
  - $\{1\}$ nu este mulţime de generatori liberi pentru A
  - A este liber generată de $\emptyset$

Exemple

- $STIVA = (S = \{elem, stiva\}, \Sigma)$
  $\Sigma = \{0 :\to elem, empty :\to stiva, pop : stiva \to stiva,$
  $push : elem\ stiva \to stiva, top : stiva \to elem\}$
- $STIVA$-algebra A: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
  $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \cdots n_k) := n\, n_1 \cdots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) = A_{pop}(n) := \lambda$,
  $A_{pop}(n_1 n_2 \cdots n_k) := n_2 \cdots n_k$ pt. $k \geq 2$,
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \cdots n_k) := n_1$ pt. $k \geq 1$.
- Dacă $P := \overline{\emptyset}$ atunci $P_{elem} = \{0\}$ şi $P_{stiva} = \{0\}^*$.
- A este liber generată de X, unde
  $X_{elem} := \mathbb{N} \setminus \{0\}$ şi $X_{stiva} := \emptyset$.

Axiomatizarea Peano a numerelor naturale

- Există o mulţime $\mathbb{N}$, ale cărei elemente se numesc *numere naturale* şi o funcţie $succ : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, numită *funcţia succesor* cu următoarele proprietăţi:
  - $\mathbb{N}$ conţine un element special, notat 0,
  - $0 \neq succ(n)$ oricare $n \in \mathbb{N}$,
  - $succ(n) = succ(m) \Rightarrow n = m$,
  - *Principiul inducţiei:*
    dacă $P \subseteq \mathbb{N}$ a.î. $0 \in P$ şi $n \in P$ implică $succ(n) \in P$, atunci $P = \mathbb{N}$.

Algebre Peano

(S, Σ) signatură multisortată
A algebră, X mulţime de variabile

- Spunem că A este algebră Peano peste X dacă:
  - $X \subseteq A$,
  - $A_\sigma(a_1, \ldots, a_n) \notin X_s$, or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$, $(a_1, \ldots, a_n) \in A_{s_1} \times \cdots , A_{s_n}$,
  - or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$, or $(a_1, \ldots, a_n) \in A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n}$, or. $\tau : s'_1 \ldots s'_k \to s$, or. $(a'_1, \ldots, a'_k) \in A_{s'_1} \times \cdots \times A_{s'_k}$ $A_\sigma(a_1, \ldots, a_n) = A_\tau(a'_1, \ldots, a'_k) \Rightarrow \sigma = \tau$, $n = k$, $a_i = a'_i$ or. i
  - $\overline{X} = A$.

Algebre Peano

(S, Σ) signatură multisortată
A algebră, X mulţime de variabile

Teoremă. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- A este Peano peste X,
- A este liber generată de X,
- $A \simeq T_\Sigma(X)$.