Programare logică

Sintaxa logicii ecuaţionale
Teorema de completitudine

(S,Σ) **signatură,** X **şi** Y **mulţimi de variabile**
t**,** t_i**,** $t'_i \in T_\Sigma(X)$ **or.** i
E **mulţime de ecuaţii**

Regulile deducţiei ecuaţionale (Birkhoff)

Reflexivitate

$$\frac{}{(\forall X)t \doteq_s t}$$

Simetrie

$$\frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_2 \doteq_s t_1}$$

Tranzitivitate

$$\frac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2,\ (\forall X)t_2 \doteq_s t_3}{(\forall X)t_1 \doteq_s t_3}$$

Compatibilitate$_\Sigma$

$$\frac{(\forall X)t_1 \doteq_{s_1} t'_1, \ldots, (\forall X)t_n \doteq_{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1,\ldots,t_n) \doteq_s \sigma(t'_1,\ldots,t'_n)} \qquad \sigma : s_1 \cdots s_n \to s$$

Substituţie$_E$

$$\frac{}{(\forall Y)\theta(t_1) \doteq_s \theta(t_2)} \qquad \theta : X \to T_\Sigma(Y),\ (\forall X)t_1 \doteq_s t_2 \in E$$

Exemplu

$E = \{x + 0 \doteq x, x + succ(y) \doteq succ(x + y)\}$

$E \vdash 0 + succ(0) \doteq succ(0)$

$$\dfrac{\dfrac{x + succ(y) \doteq succ(x + y)}{0 + succ(0) \doteq succ(0 + 0)}(Sub\{x, y \leftarrow 0\}) \quad \dfrac{\dfrac{x + 0 \doteq x}{0 + 0 \doteq 0}Sub\{x \leftarrow 0\}}{succ(0 + 0) \doteq succ(0)}(C)}{0 + succ(0) \doteq succ(0)}(T)$$

(1) $x + succ(y) \doteq succ(x + y) \in E$

(2) $0 + succ(0) \doteq succ(0 + 0)\ (1, Sub\{x, y \leftarrow 0\})$

(3) $x + 0 = x \in E$

(4) $0 + 0 \doteq 0\ (3, Sub\{x \leftarrow 0\})$

(5) $succ(0 + 0) \doteq succ(0)\ (4, C)$

(6) $0 + succ(0) \doteq succ(0)\ (2, 5, T)$

Axiomele sunt ecuaţii condiţionate

Fie Γ o mulţime de ecuaţii condiţionate.

$$\text{Substituţie}_\Gamma \quad \frac{(\forall Y)\theta(u_1) \doteq_{s_1} \theta(v_1), \ldots, (\forall Y)\theta(u_n) \doteq_{s_1} \theta(v_n)}{(\forall Y)\theta(t_1) \doteq_s \theta(t_2)}$$

unde $(\forall X)t_1 \doteq_s t_2 \ if \ H \in \Gamma$,

$H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$ şi $\theta : X \to T_\Sigma(Y)$ substituţie

- dacă $H = \emptyset$ atunci $$\text{Substituţie}_\Gamma \quad \frac{}{(\forall Y)\theta(t_1) \doteq_s \theta(t_2)}$$

Axiomele sunt ecuaţii condiţionate

$NATBOOL = (S, \Sigma)$, $S = \{n, b\}$, $\Sigma = \{T, F, 0, s, *, >\}$

$\Gamma = \{\gamma, e_1, e_2\}$

$\gamma := \forall\{x, y, z\} x \doteq_n y \ if\ \{z * x \doteq_n z * y, z > 0 \doteq_b T\}$

$e_1 := \forall\{a, c\} s(s(s(0))) * a \doteq_n s(s(s(0))) * c$,

$e_2 := \forall\{a, c\} s(s(s(0))) > 0 \doteq_b T$

$$\Gamma \vdash \forall\{a, c\} a \doteq_n c$$

$$\boxed{\textsf{Sub}_\Gamma \ \frac{e_1, e_2}{a \doteq_s c}}$$

$$\gamma \in \Gamma,\ \theta_n(x) := a,\ \theta_n(y) := c,\ \theta_n(z) := s(s(s(0)))$$

Deducţia sintactică

Fie Γ o mulţime de ecuaţii, numite axiome sau ipoteze. Spunem că ecuaţia $\boldsymbol{e} := (\forall X)t \doteq_s t'$ se deduce sintactic din Γ dacă există o secvenţă de ecuaţii $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n}$ a. î.

- $\boldsymbol{e_n} = \boldsymbol{e}$ şi
- pentru orice $i \in \{1, \ldots, n\}$
  - $\boldsymbol{e_i} \in \Gamma$ sau
  - $\boldsymbol{e_i}$ se obţine din ecuaţiile $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_{i-1}}$ aplicând una din regulile R, S, T, C_Σ, Sub_Γ.

În acest caz scriem $\Gamma \vdash \boldsymbol{e}$ şi spunem că $\boldsymbol{e}$ este deductibilă (sintactic), demonstrabilă, derivabilă din Γ. Secvenţa $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n} = \boldsymbol{e}$ este o demonstraţie pentru $\boldsymbol{e}$ din ipotezele Γ.

Corectitudinea regulilor de deducţie

Γ mulţime de ecuaţii condiţionate

O regula de deductie $\boxed{\dfrac{e_1, \ldots, e_n}{e}}$ este corectă dacă

$$\Gamma \models e_1, \ldots, \Gamma \models e_n \Rightarrow \Gamma \models e$$

Propoziţie. Regulile deducţiei ecuaţionale
R, S, T, C_Σ, Sub_Γ
sunt corecte.

Corectitudinea deducţiei ecuaţionale

Γ mulţime de ecuaţii condiţionate, $\boldsymbol{e}$ ecuaţie

Teoremă. $\Gamma \vdash \boldsymbol{e} \Rightarrow \Gamma \models e$

Demonstraţie: Fie $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_n} = \boldsymbol{e}$ este o demonstraţie pentru $\boldsymbol{e}$ din ipotezele Γ. Demonstrăm prin inducţie după $i = 1, \ldots, n$ că $\Gamma \models e_i$. Observăm că $e_1 \in \Gamma$ sau $e_1 = (\forall X)t \doteq_s t$, deci $\Gamma \models e_1$.

Presupunem că $\Gamma \models \boldsymbol{e_1}, \ldots, \Gamma \models \boldsymbol{e_{i-1}}$. Atunci $\Gamma \models e_i$, deoarece $\boldsymbol{e_i}$ se obţine din ecuaţiile $\boldsymbol{e_1}, \ldots, \boldsymbol{e_{i-1}}$ aplicând una din regulile R, S, T, C$_\Sigma$, Sub$_\Gamma$, iar regulile de deducţie sunt corecte.

Γ-algebre

(S, Σ, Γ) specificaţie,
A algebră şi $\equiv$ o congruenţă pe A

- Spunem că $\equiv$ satisface proprietatea CS(Γ,A) dacă
  CS(Γ,A)

or. $(\forall Y)t \doteq_s t'$ if $H \in \Gamma$, or. $h : T_\Sigma(Y) \to A$ morfism $h_{s'}(u) \equiv_{s'} h_{s'}(v)$ or. $u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow h_s(t) \equiv_s h_s(t')$.

  ($\equiv$ este închisă la substituţie)

- Teoremă. Dacă A este o algebră şi $\equiv$ este o congruenţă pe A care satisface CS(Γ,A) atunci $A/_{\equiv} \models \Gamma$.

Completitudinea deducţiei ecuaţionale

Γ mulţime de ecuaţii condiţionate, $\boldsymbol{e} = (\forall X)t_1 \doteq_s t_2$ ecuaţie

Teoremă. $\Gamma \models \boldsymbol{e} \Rightarrow \Gamma \vdash \boldsymbol{e}$

Demonstraţie: Pe $T_\Sigma(X)$ definim următoarea relaţie S-sortată
$t {\sim_\Gamma}_s t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$ oricare $s \in S$.
Regulile de deducţie R, S, T, C$_\Sigma$, Sub$_\Gamma$ asigură faptul că $\sim_\Gamma$ este o congruenţă care verifică condiţia CS(Γ,$T_\Sigma(X)$). În consecinţă, $T_\Sigma(X)/_{\sim_\Gamma}$ este o Γ-algebră. Deoarece $\Gamma \models e$, deducem că $T_\Sigma(X)/_{\sim_\Gamma} \models \boldsymbol{e}$. Fie $p : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(X)/_{\sim_\Gamma}$ surjecţia canonică, $p(t) := [t]$ oricare $t \in T_\Sigma(X)$, unde $[t]$ este clasa de echivalenţă a lui t determinată de $\sim_\Gamma$. Ştim că $T_\Sigma(X)/_{\sim_\Gamma} \models \boldsymbol{e} = (\forall X)t_1 \doteq_s t_2$, deci $p_s(t_1) = p_s(t_2)$, i.e. $[t_1] = [t_2]$. Obţinem $t_1 {\sim_\Gamma}_s t_2$, deci $\Gamma \vdash (\forall X)t_1 \doteq_s t_2$.

Teorema de completitudine

(S, Σ) signatura, X mulţime de variabile, t, $t' \in T_\Sigma(X)_s$

- $t \sim_\Gamma t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X) t \doteq_s t'$ (echiv. sintactică)
- $t \equiv_\Gamma t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X) t \doteq_s t'$ (echiv. semantică)
- Corectitudinea regulilor de deducţie: $\sim_\Gamma \subseteq \equiv_\Gamma$
- Completitudinea regulilor de deducţie: $\equiv_\Gamma \subseteq \sim_\Gamma$

Teorema de completitudine. $\boldsymbol{\equiv_\Gamma = \sim_\Gamma}$

$$\Gamma \models (\forall X) t \doteq_s t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X) t \doteq_s t'$$

Reguli de deducţie

(S, Σ) signatură, Γ mulţime de ecuaţii

X, Y mulţimi disjuncte de variabile

Abstractizarea $\dfrac{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X \cup Y)t_1 \doteq_s t_2}$

Concretizarea $\dfrac{(\forall X \cup Y)t_1 \doteq_s t_2}{(\forall X)t_1 \doteq_s t_2}$ $\quad t_1, t_2 \in T_\Sigma(X)_s$, $\quad Y_s \neq \emptyset \Rightarrow T_{\Sigma,s} \neq \emptyset$

Abstractizarea şi Concretizarea sunt reguli de deducţie corecte.