Programare logică

Congruenţe

Congruenţe

(S,Σ) signatură, A (S,Σ) algebră

- O relaţie S-sortată $\equiv = \{\equiv_s\}_{s\in S} \subseteq A \times A$ este congruenţa dacă:
  - $\equiv_s \subseteq A_s \times A_s$ echivalenţă or. $s \in S$,
  - $\equiv$ este compatibilă cu operaţiile $a_i \equiv_{s_i} b_i$ or. $i = 1, \ldots, n \Rightarrow A_\sigma(a_1, \ldots, a_n) \equiv_s A_\sigma(b_1, \ldots, b_n)$ or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$

Exemple

(S, Σ) signatură, A (S, Σ) algebră

- NAT-algebra A:

  $A_{nat} := \mathbb{N}$, $A_0 := 0$, $A_{succ}(x) := x + 1$

  $n_1 \equiv_k n_2 \Leftrightarrow k | (n_1 - n_2)$ pentru $k \in \mathbb{N}$ fixat

  • $n_1 \equiv_k n_2 \Rightarrow A_{succ}(n_1) \equiv_k A_{succ}(n_2)$

- $AUTOMAT$-algebra B:

  $B_{intrare} = B_{stare} = B_{iesire} := \mathbb{N}$

  $B_{s0} := 0$, $B_f(m, n) := m + n$, $B_g(n) := n + 1$

  $\equiv$ este congruenţă pe B, unde

  $\equiv_{intrare} = \equiv_{stare} = \equiv_{iesire} := \equiv_k$

Algebra cât

(S,Σ) signatură, A algebră, $\equiv$ congruenţă pe A

- $[a]_{\equiv_s} := \{a' \in A_s \mid a \equiv_s a'\}$ (clasa lui a)
- $A_s/_{\equiv_s} := \{[a]_{\equiv_s} \mid a \in A_s\}$ or. $s \in S$
- $A/_{\equiv} := \{A_s/_{\equiv_s}\}_{s\in S}$ este (S,Σ)-algebră
  - $(A/_{\equiv})_\sigma := [A_\sigma]$ or. $\sigma :\to s$,
  - $(A/_{\equiv})_\sigma([a_1]_{\equiv_{s_1}}, \ldots, [a_n]_{\equiv_{s_n}}) := [A_\sigma(a_1,\ldots,a_n)]_{\equiv_s}$ or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$ şi $(a_1,\ldots,a_n) \in A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n}$
- $[\cdot]_{\equiv} : A \to A/_{\equiv}$, $a \mapsto [a]_{\equiv_s}$ or. $a \in A_s$ este morfism.

$$[a]_{\equiv_s} = [b]_{\equiv_s} \;\Leftrightarrow\; a \equiv_s b$$

Exemple

- $STIVA$-algebra A: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
  $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \cdots n_k) := n\, n_1 \cdots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) = A_{pop}(n) := \lambda$,
  $A_{pop}(n_1 n_2 \cdots n_k) := n_2 \cdots n_k$ pt. $k \geq 2$,
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \cdots n_k) := n_1$ pt. $k \geq 1$.
- $\equiv_{elem} := \mathbb{N} \times \mathbb{N}$,
  $\equiv_{stiva} := \{(w, w') \mid (w, w') \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, |w| = |w'|\}$
  $\equiv = \{\equiv_{elem}, \equiv_{stiva}\}$ congruenţă
- $A/_{\equiv} \simeq B$, unde
  $STIVA$-algebra B: $B_{elem} := \{0\}$, $B_{stiva} := \mathbb{N}$
  $B_0 := 0$, $B_{empty} := 0$, $B_{push}(0, n) := n + 1$ or. n,
  $B_{pop}(0) := 0$, $B_{pop}(n) := n - 1$ pt. $n \geq 1$, $B_{top}(n) := 0$ or. n.

Teorema I de izomorfism

(S, Σ) signatură, A şi B algebre

- Oricare $f : A \to B$ morfism, $Ker(f) = \{Ker(f_s)\}_{s \in S}$ este congruenţă pe A, unde $Ker(f_s) := \{(a, a') \in A_s \times A_s \mid f_s(a) = f_s(a')\}$.
- Dacă $\equiv$ congruenţă pe A, atunci $Ker([\cdot]_\equiv) = \equiv$.
- Teoremă I de izomorfism.
  Oricare $f : A \to B$ morfism, $A/_{Ker(f)} \simeq f(A)$.

Proprietatea de universalitate

(S, Σ) signatură, A algebră, $\equiv$ congruenţă pe A

Proprietatea de universalitate a algebrei cât

Oricare ar fi B o algebră şi $h : A \to B$ un morfism a.î. $\equiv \subseteq Ker(h)$ există un unic morfism $\overline{h} : A/_{\equiv} \to B$ a.î.

$$[\cdot]_{\equiv} ; \overline{h} = h.$$

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "{[\cdot]_{\equiv}}"] \arrow[d, "h"] & A/_{\equiv} \arrow[dl, dotted, "\overline{h}"] \\ B & \end{tikzcd}$$

Proprietatea de universalitate

(S, Σ) signatură

- **Corolar.** Fie $\mathcal{K}$ o clasă de (S, Σ)-algebre. Dacă

$$\equiv_{\mathcal{K}} := \bigcap \{Ker(h) \,|\, h : T_\Sigma \to A \in \mathcal{K},\ h \text{ morfism}\},$$

  atunci următoarele proprietăţi sunt adevărate:
  - $\equiv_{\mathcal{K}}$ este congruenţă pe T_Σ,
  - pentru orice $A \in \mathcal{K}$ există un unic morfism $\overline{h} : T_\Sigma/_{\equiv_{\mathcal{K}}} \to A$.