Edp - Seminar 2

13.10.2011

Ecuaţii cu variabile separabile (din temă)

1) $$\frac{dx}{dt} = \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{(t^2+1)(2x+1)\cdot e^{x^2+x}} \qquad x \in \left(-\frac{1}{2}; +\infty\right),\ t \in \mathbb{R}$$

$$a(t) = \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{t^2+1}$$

$$b(x) = \frac{1}{(2x+1)\, e^{x^2+x}}$$

I) $b(x) = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{(2x+1)\, e^{x^2+x}} = 0$ nu are soluţii reale $\Rightarrow$ ec. nu are sol. staţionare

II) $b(x) \neq 0$

$$(2x+1)\, e^{x^2+x}\, dx = \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{t^2+1}\, dt$$

$$B(x) = \int (2x+1)\, e^{x^2+x}\, dx = \int \left(e^{x^2+x}\right)' dx = e^{x^2+x}$$

$$A(t) = \int \frac{e^{\operatorname{arctg} t}}{t^2+1}\, dt = -\int \left(e^{\operatorname{arctg} t}\right)' dt = -e^{\operatorname{arctg} t}$$

$B(x) = A(t) + \mathscr{C} \Rightarrow$

$e^{x^2+x} = -e^{\operatorname{arctg} t} + \mathscr{C}$. (sol. ec. în forma implicită)

Dacă se cere sol care verif condiţia iniţială $x(1) = 0$

înlocuim pe x cu 0 şi pe t cu 1

$$e^0 = -e^{\operatorname{arctg} 1} + \mathscr{C}$$

$$1 = -e^{\frac{\pi}{4}} + \mathscr{C} \Rightarrow \mathscr{C} = 1 + e^{\frac{\pi}{4}}$$

Sol. pb. Cauchy $$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \dfrac{e^{\operatorname{arctg} t}}{(t^2+1)(2x+1)\, e^{x^2+x}} \\ x(1) = 0 \end{cases}$$ (la care adăugăm)

este sub forma implicită $e^{x^2+x} = -e^{\operatorname{arctg} t} + 1 + e^{\frac{\pi}{4}}$

Ecuația liniară

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\cdot x + b(t) \qquad (1)$$

$a, b : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funcții continue

I. Rez. ec. liniară omogenă atașată: $\frac{d\bar{x}}{dt} = a(t)\bar{x}$

$\Rightarrow \bar{x}(t) = C e^{A(t)}$, unde $A(\cdot)$ este o primitivă pt $a(\cdot)$.

II Variația constantelor

- determinăm $C(\cdot)$ a.î. $x(t) = C(t) e^{A(t)}$ să verifice ecuația (1)

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(C(t)\cdot e^{A(t)}\right) = a(t)\, C(t)\, e^{A(t)} + b(t) \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ pt $C(\cdot)$ o ecuație de tip primitivă $\Rightarrow C(t) = \ldots \Rightarrow$ se scrie sol ec. (1)

Exemple

① Să se determine mulțimea soluțiilor ec.:

$$x' = \frac{x - \ln t}{t \ln t}, \quad t > 1$$

Aflați soluția care verifică $x(e) = 1$

$$x' = \frac{x}{t \ln t} - \frac{1}{t}$$

$$a(t) = \frac{1}{t \ln t}$$

$$b(t) = -\frac{1}{t}$$

I. $\frac{d\bar{x}}{dt} = \frac{1}{t \ln t}\bar{x}$

$$\bar{x}(t) = C e^{A(t)}$$

$$A(t) = \int \frac{1}{t \ln t}\, dt \Leftrightarrow \int \cancel{\ldots}\, u\, du = \frac{u^2}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2t^2}$$

$\cancel{\ln t = u \Rightarrow \frac{1}{t}\, dt = du}$ $\quad \ln t = u \Rightarrow \frac{1}{t}\, dt = du$

$$\int \frac{du}{u} = \ln|u|$$

$$A(t) = \ln|\underbrace{\ln t}_{>0}| = \ln(\ln(t))$$

$$\bar{x}(t) = C \cdot e^{\ln(\ln(t))} = C \cdot \ln t$$

I. $x(t) = c(t) \cdot \ln t$

$$\frac{d}{dt}\left(c(t)\cdot \ln(t)\right) = \frac{1}{t\cancel{\ln t}}\cdot c(t)\cancel{\ln t} - \frac{1}{t}$$

$$(c(t))' \cdot \ln t + \cancel{c(t)\cdot\frac{1}{t}} = \cancel{\frac{1}{t}c(t)} - \frac{1}{t}$$

$$c'(t)\cdot \ln t = -\frac{1}{t} \Rightarrow c'(t) = \frac{-1}{t\ln t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow c(t) = -\int \frac{1}{t\ln t}\,dt = -\ln(\ln t) \Rightarrow c(t) = -\ln(\ln t) + c_1$$

$$x(t) = (-\ln(\ln t) + c_1)\cdot \ln t$$

$x = 1$, $t = e$ $\Rightarrow (-\ln(\ln e) + c_1)\ln e = 1 \Rightarrow c_1 = 1$

Temă. Det mult. sol ec.

a) $x' = \operatorname{tg} t\, x + \cos t$, $t \in (0, \frac{\pi}{4})$

b) $t(x' - t\cos t) - x = 0$ (expr. x'), $t > 0$

c) $x' = \dfrac{2x + \ln t}{t\ln t}$, $t > 1$

Ec. omogenă

(2) $\boxed{\dfrac{dx}{dt} = g\left(\dfrac{x}{t}\right)}$ sau $\dfrac{dx}{dt} = f(t,x)$ cu $f(\alpha t, \alpha x) = f(t,x)$ $\forall \alpha \in \mathbb{R}$

Rezolvarea: presupune schimbarea de variabila

$$\boxed{y = \frac{x}{t}} \quad \left(y(t) = \frac{x(t)}{t}\right) \Leftrightarrow \boxed{x = ty}$$

În ec (2) $\Rightarrow \dfrac{d}{dt}(yt) = g(y) \Rightarrow$ ec cu var separabile $\Rightarrow y(t) = \dots \Rightarrow$

$\Rightarrow x(t) = ty$

Exemplu

(2) Determinați mulțimea sol. ec. urm.

$$\frac{dx}{dt} = \frac{x^2 - 2t^2}{xt + t^2}, \quad t \in (0, \infty)$$

Aflați soluția ce verifică condiția inițială: $x(1) = 2$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\cancel{t^2}\left(\frac{x^2}{t^2} - 2\right)}{\cancel{t^2}\left(\frac{x}{t} + 1\right)}$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\left(\frac{x}{t}\right)^2 - 2}{\frac{x}{t} + 1}$$

$$g(y) = \frac{y^2 - 2}{y + 1}$$ (schimbare de var $y = \frac{x}{t} \Updownarrow x = ty$)

$$\frac{d}{dt}(ty) = g(y) = \frac{y^2-2}{y+1} \Rightarrow$$

$c'(t) \Updownarrow \frac{dc}{dt}$

$$\Rightarrow \underbrace{t'y + ty'}_{\cancel{y + ty}}$$

$\frac{dy}{dt} \Leftrightarrow y'$

$$1 \cdot y + t\frac{dy}{dt} = \frac{y^2-2}{y+1}$$

$$t\frac{dy}{dt} = \frac{y^2 - 2 - y^2 - y}{y+1} \Leftrightarrow \frac{dy}{dt} = \underbrace{-\frac{y+2}{y+1}}_{b(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{t}}_{a(t)}$$ ec cu var separabile

$$b(y) = 0 \Rightarrow -\frac{y+2}{y+1} = 0 \Rightarrow y + 2 = 0 \Rightarrow y = -2 \Rightarrow \boxed{x(t) = -2t}$$

$$b(y) \neq 0 \Rightarrow -\frac{y+1}{y+2}\,dy = \frac{1}{t}\,dt$$

$$B(y) = -\int \frac{y+1+1-1}{y+2}\,dy = -\int \frac{y+2-1}{y+2}\,dy = -\int 1\,dy + \int \frac{1}{y+2}\,dy =$$

$$= -y + \ln|y+2|$$

$A(t) = \int \frac{1}{t}\,dt = \ln \underset{>0}{|t|} = \ln t$

$-y + \ln|y+2| = \ln t + c$

$y = \frac{x}{t} \Rightarrow -\frac{x}{t} + \ln\left|\frac{x}{t}+2\right| = \ln t + c$ sol. implicită

$x(1) = 2 \Rightarrow -\frac{2}{1} + \ln 4 = \ln 1 + c \Rightarrow$

$t = 1$

$x = 2$ $\Rightarrow c = \ln 4 - 2$

Temă. Mulț. sol. ec.

1) $\frac{dx}{dt} = \frac{2x+t}{x-t}$ $t \in \mathbb{R}$, $x \neq t$

2) $\frac{dx}{dt} = \frac{xt}{x^2 + t^2}$ $t, x > 0$

$$\frac{dx}{dt} = g\left(\frac{at+bx+c}{\alpha t+\beta x+\gamma}\right)$$

$\Delta = a\beta - b\alpha$ $|a|+|\alpha| > 0$

$|b|+|\beta| > 0$

$\Delta = 0 \Rightarrow$ pt $b \neq 0$ se face s.v. $y = at + bx$ sau

pt $\beta \neq 0$ se face s.v. $y = \alpha t + \beta x$ $\Rightarrow$ ec. cu var. sep.

$\Delta \neq 0 \Rightarrow$ s.v. $\begin{cases} s = t - t_0 \\ y = x - x_0 \end{cases}$ unde (t_0, x_0) sol. sist. $\begin{cases} at + bx + c = 0 \\ \alpha t + \beta x + \gamma = 0 \end{cases}$ $\Rightarrow$ ec. omogenă

Exemple

③ $\frac{dx}{dt} = \frac{x+t-1}{t-x+2}$

④ $\frac{dx}{dt} = \frac{2x-t-1}{x+t-2}$

$a = -1$

$b = 2$

$\alpha = 1$

$\beta = 1$

$\Delta = -1\cdot1 - 2\cdot1 \neq 0$

$\begin{cases} 2x - t - 1 = 0 \\ x + t - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - t = 1 \\ x + t = 2 \end{cases}$

$3x \quad / = 3 \Rightarrow x = 1 \Rightarrow t = 1$

⑤ $\frac{dx}{dt} = \left(\frac{x+t-3}{t-x+1}\right)^2$

$$\begin{cases} s = t-1 & s(t) \\ y = x-1 \end{cases} \qquad y(s) = x(t(s)) - 1$$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} t = s+1 & t(s) \\ x = y+1 \end{cases} \qquad \boxed{x(t) = y(s(t)) + 1}$$

$\downarrow$ în ec. princ

$$\frac{d}{dt}\left(y(s(t))+1\right) = \frac{2(y+\cancel{1})-(s+\cancel{1})-\cancel{1}}{y+\cancel{1}+s+\cancel{1}\cancel{-2}}$$

$$\frac{dy}{ds}\cdot\underbrace{\frac{ds}{dt}}_{=1} = \frac{2y-s}{y+s} \Rightarrow \frac{dy}{ds} = \frac{2\frac{y}{s}-1}{\frac{y}{s}-1} \qquad \text{ec. omogenă}$$

$s(t) = t-1$

$\frac{ds}{dt} = 1$

$$v = \frac{y}{s} \Leftrightarrow y = sv$$

$$v(s) = \frac{y(s)}{s} \Rightarrow \text{Temă}$$

$$x(t) \xrightarrow[\substack{t=s+1 \\ x=y+1 \\ x(t)=y(s(t))+1}]{} y(s) \ (\Rightarrow \text{din ec. omog}) \xrightarrow[y(s)=sv(s)]{} v(s)$$