



Programare logică

Sintaxa logicii ecuaționale
Teorema de completitudine

(S, Σ) **signatură**, X și Y **mulțimi de variabile**

$t, t_i, t'_i \in T_\Sigma(X)$ **or.** i

E **mulțime de ecuații**

Regulile deducției ecuaționale (Birkhoff)

Reflexivitate

$$\overline{(\forall X)t \dot{=} _s t}$$

Simetrie

$$\frac{(\forall X)t_1 \dot{=} _s t_2}{(\forall X)t_2 \dot{=} _s t_1}$$

Tranzitivitate

$$\frac{(\forall X)t_1 \dot{=} _s t_2, (\forall X)t_2 \dot{=} _s t_3}{(\forall X)t_1 \dot{=} _s t_3}$$

Compatibilitate $_\Sigma$

$$\frac{(\forall X)t_1 \dot{=} _{s_1} t'_1, \dots, (\forall X)t_n \dot{=} _{s_n} t'_n}{(\forall X)\sigma(t_1, \dots, t_n) \dot{=} _s \sigma(t'_1, \dots, t'_n)}$$

$$\sigma : s_1 \cdots s_n \rightarrow s$$

Substituție $_E$

$$\overline{(\forall Y)\theta(t_1) \dot{=} _s \theta(t_2)}$$

$$\theta : X \rightarrow T_\Sigma(Y),$$

$$(\forall X)t_1 \dot{=} _s t_2 \in E$$

Exemplu

$$E = \{x + 0 \dot{=} x, x + succ(y) \dot{=} succ(x + y)\}$$

$$E \vdash 0 + succ(0) \dot{=} succ(0)$$

$$\frac{\frac{x + succ(y) \dot{=} succ(x + y)}{0 + succ(0) \dot{=} succ(0 + 0)} (Sub\{x, y \leftarrow 0\}) \quad \frac{\frac{x + 0 \dot{=} x}{0 + 0 \dot{=} 0} Sub\{x \leftarrow 0\}}{succ(0 + 0) \dot{=} succ(0)} (C)}{0 + succ(0) \dot{=} succ(0)} (T)$$

$$(1) x + succ(y) \dot{=} succ(x + y) \in E$$

$$(2) 0 + succ(0) \dot{=} succ(0 + 0) \text{ (1, } Sub\{x, y \leftarrow 0\})$$

$$(3) x + 0 = x \in E$$

$$(4) 0 + 0 \dot{=} 0 \text{ (3, } Sub\{x \leftarrow 0\})$$

$$(5) succ(0 + 0) \dot{=} succ(0) \text{ (4, } C)$$

$$(6) 0 + succ(0) \dot{=} succ(0) \text{ (2, 5, } T)$$

Axiomele sunt ecuații condiționate

Fie Γ o mulțime de ecuații condiționate.

$$\text{Substituție}_\Gamma \quad \frac{(\forall Y)\theta(u_1) \dot{=}_{s_1} \theta(v_1), \dots, (\forall Y)\theta(u_n) \dot{=}_{s_1} \theta(v_n)}{(\forall Y)\theta(t_1) \dot{=}_s \theta(t_2)}$$

unde $(\forall X)t_1 \dot{=}_s t_2$ *if* $H \in \Gamma$,

$H = \{u_1 \dot{=}_{s_1} v_1, \dots, u_n \dot{=}_{s_n} v_n\}$ și $\theta : X \rightarrow T_\Sigma(Y)$ substituție

■ dacă $H = \emptyset$ atunci

$$\text{Substituție}_\Gamma \quad \frac{}{(\forall Y)\theta(t_1) \dot{=}_s \theta(t_2)}$$

Axiomele sunt ecuații condiționate

$$NATBOOL = (S, \Sigma), S = \{n, b\}, \Sigma = \{T, F, 0, s, *, >\}$$

$$\Gamma = \{\gamma, e_1, e_2\}$$

$$\gamma := \forall\{x, y, z\} x \dot{=}^n y \text{ if } \{z * x \dot{=}^n z * y, z > 0 \dot{=}^b T\}$$

$$e_1 := \forall\{a, c\} s(s(s(0))) * a \dot{=}^n s(s(s(0))) * c,$$

$$e_2 := \forall\{a, c\} s(s(s(0))) > 0 \dot{=}^b T$$

$$\Gamma \vdash \forall\{a, c\} a \dot{=}^n c$$

$$\boxed{\text{Sub}_\Gamma \frac{e_1, e_2}{a \dot{=}^s c}}$$

$$\gamma \in \Gamma, \theta_n(x) := a, \theta_n(y) := c, \theta_n(z) := s(s(s(0)))$$

Deducția sintactică

Fie Γ o mulțime de ecuații, numite **axiome** sau **ipoteze**.
Spunem că ecuația $e := (\forall X)t \dot{=} _s t'$ se deduce sintactic din Γ dacă există o secvență de ecuații e_1, \dots, e_n a. î.

- $e_n = e$ și

- pentru orice $i \in \{1, \dots, n\}$

 - $e_i \in \Gamma$ sau

 - e_i se obține din ecuațiile e_1, \dots, e_{i-1} aplicând una din regulile **R, S, T, C_Σ, Sub_Γ**.

În acest caz scriem $\Gamma \vdash e$ și spunem că e este deductibilă (sintactic), demonstrabilă, derivabilă din Γ . Secvența $e_1, \dots, e_n = e$ este o demonstrație pentru e din ipotezele Γ .

Corectitudinea regulilor de deducție

Γ mulțime de ecuații condiționate

O regula de deducție $\boxed{\frac{e_1, \dots, e_n}{e}}$ este **corectă** dacă

$$\Gamma \models e_1, \dots, \Gamma \models e_n \Rightarrow \Gamma \models e$$

Propoziție. Regulile deducției ecuaționale

R, S, T, C_Σ, Sub_Γ

sunt corecte.

Corectitudinea deducției ecuaționale

Γ mulțime de ecuații condiționate, e ecuație

Teoremă. $\Gamma \vdash e \Rightarrow \Gamma \models e$

Demonstrație: Fie $e_1, \dots, e_n = e$ este o demonstrație pentru e din ipotezele Γ . Demonstrăm prin inducție după $i = 1, \dots, n$ că $\Gamma \models e_i$.

Observăm că $e_1 \in \Gamma$ sau $e_1 = (\forall X)t \dot{=} _s t$, deci $\Gamma \models e_1$.

Presupunem că $\Gamma \models e_1, \dots, \Gamma \models e_{i-1}$. Atunci $\Gamma \models e_i$, deoarece e_i se obține din ecuațiile e_1, \dots, e_{i-1} aplicând una din regulile R, S, T, C_Σ , Sub_Γ , iar regulile de deducție sunt corecte.

Γ -algebre

(S, Σ, Γ) specificație,

A algebră și \equiv o congruență pe A

- Spunem că \equiv satisface proprietatea $\text{CS}(\Gamma, A)$ dacă $\text{CS}(\Gamma, A)$

or. $(\forall Y) t \dot{=}_s t'$ if $H \in \Gamma$, or. $h : T_\Sigma(Y) \rightarrow A$ morfism
 $h_{s'}(u) \equiv_{s'} h_{s'}(v)$ or. $u \dot{=}_{s'} v \in H \Rightarrow h_s(t) \equiv_s h_s(t')$.

(\equiv este închisă la substituție)

- **Teoremă.** Dacă A este o algebră și \equiv este o congruență pe A care satisface $\text{CS}(\Gamma, A)$ atunci $A/\equiv \models \Gamma$.

Completitudinea deducției ecuaționale

Γ mulțime de ecuații condiționate, $e = (\forall X)t_1 \dot{=}^s t_2$ ecuație

Teoremă. $\Gamma \models e \Rightarrow \Gamma \vdash e$

Demonstrație: Pe $T_\Sigma(X)$ definim următoarea relație S -sortată

$t \sim_{\Gamma_s} t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}^s t'$ oricare $s \in S$.

Regulile de deducție R, S, T, C_Σ , Sub_Γ asigură faptul că \sim_Γ este o congruență care verifică condiția **CS**($\Gamma, T_\Sigma(X)$). În consecință,

$T_\Sigma(X)/\sim_\Gamma$ este o Γ -algebră. Deoarece $\Gamma \models e$, deducem că

$T_\Sigma(X)/\sim_\Gamma \models e$. Fie $p : T_\Sigma(X) \rightarrow T_\Sigma(X)/\sim_\Gamma$ surjecția canonică,

$p(t) := [t]$ oricare $t \in T_\Sigma(X)$, unde $[t]$ este clasa de echivalență a lui t

determinată de \sim_Γ . Știm că $T_\Sigma(X)/\sim_\Gamma \models e = (\forall X)t_1 \dot{=}^s t_2$, deci

$p_s(t_1) = p_s(t_2)$, i.e. $[t_1] = [t_2]$. Obținem $t_1 \sim_{\Gamma_s} t_2$, deci $\Gamma \vdash (\forall X)t_1 \dot{=}^s t_2$.

Teorema de completitudine

(S, Σ) signatura, X mulțime de variabile, $t, t' \in T_\Sigma(X)_s$

- $t \sim_\Gamma t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t'$ (echiv. sintactică)
- $t \equiv_\Gamma t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall X)t \dot{=}_s t'$ (echiv. semantică)
- Corectitudinea regulilor de deducție: $\sim_\Gamma \subseteq \equiv_\Gamma$
- Completitudinea regulilor de deducție: $\equiv_\Gamma \subseteq \sim_\Gamma$

Teorema de completitudine. $\equiv_\Gamma = \sim_\Gamma$

$$\Gamma \models (\forall X)t \dot{=}_s t' \Leftrightarrow \Gamma \vdash (\forall X)t \dot{=}_s t'$$

Reguli de deducție

(S, Σ) semnătură, Γ mulțime de ecuații
 X, Y mulțimi disjuncte de variabile

$$\text{Abstractizarea} \quad \frac{(\forall X)t_1 \dot{=} _s t_2}{(\forall X \cup Y)t_1 \dot{=} _s t_2}$$

$$\text{Concretizarea} \quad \frac{(\forall X \cup Y)t_1 \dot{=} _s t_2}{(\forall X)t_1 \dot{=} _s t_2} \quad \begin{array}{l} t_1, t_2 \in T_\Sigma(X)_s \\ Y_s \neq \emptyset \Rightarrow T_{\Sigma,s} \neq \emptyset \end{array}$$

Abstractizarea și Concretizarea sunt
reguli de deducție corecte.