PA - Curs 1

6.10.2011

Căzănescu Virgil Emil VEC

e = element dintr-o algebră liberă

expresie

(S, Σ) signatura

$X = \{X_s\}_{s \in S}$

Alg. expr. = alg. liberă

$X \hookrightarrow T_\Sigma(X) \ni e$. se dă

$f \searrow \mathcal{A}$ $\exists! f^{\#}$ cu $f^{\#}/_X = f$

A da valori variabilelor din X în alg $\mathcal{A}$ = a da o funcție $f: X \to A$

= a da un morfism $h: T_\Sigma(X) \to A$

Rezultatul evaluării lui e este $f^{\#}(e)$

$f: A \to B$ bijectivă $\Leftrightarrow (\forall b \in B)(\exists! a \in A)$ a.î. $f(a) = b$

$Alg_\Sigma(T_\Sigma(X), A) \longrightarrow Set(X, \mathcal{A})$ $r(h) = h/_X$

(mulțime)

$\forall f \in Set(X, \mathcal{A})\ \exists!\ h \in ?_\Sigma(T_\Sigma(X), \mathcal{A})$

$r(h) = f$

Σ-alg. inițială T_Σ

$I \xrightarrow{\exists! \alpha} \forall O$

(inițial)

Care e mulțimea inițială? $\emptyset$ (de la ea în $\forall$ altă mulțime e o funcție - funcția incluziunii

Monoid inițial ($\exists$ un morfism și numai unul) $\{e\}$

Grup inițial $\{e\}$

semigrup inițial $\emptyset$

inel inițial $\mathbb{Z}$

semiinel inițial: $\mathbb{N}$ $(P(S\times S), \cup, \emptyset, ;, \Delta\}$

$(\mathcal{C}(A^*), \cup, \emptyset, \cdot, \{\lambda\})$

Ecuație condiționată $(\forall X)\, l \doteq_s r$ $\underline{\text{if } H}$ $l, r \in T_\Sigma(X)_s$

mulț. finită de egalități formale

$(\forall X)\, \underbrace{H \Rightarrow}\, l \doteq_s r$

$\forall x\, y\, z\ (x\cdot y = x\cdot z \Rightarrow y = z)$ Legea simplificării (ex. de ec. condiționată)

Rescrierea = semantică operațională pt PΔ.

Algebră satisface o ec condiționată

$\mathcal{A} \models (\forall X)\, l \doteq_s r$ if $H \iff (\forall h: T_\Sigma(X) \to \mathcal{A}\ \Sigma\text{-morf})$ dacă $(\forall u \doteq_t v \in H\ \ h_t(u) = h_t(v)) \Rightarrow$
$\Rightarrow h_s(l) = h_s(r)$

(lipsește dacă ec. e necondiționată)

Prog logice ediția a 3-a + articolul lui Țuțu

În ce condiții o specificație e program? - să se termine (∄ rescrieri infinite)
(rescrierea generată de specificație) - confluența (rez. unicității f.n. unice)

cartea: Țiplea - Fundamentele algebrice ale informaticii (ultimul capitol)

$Sen(\mathcal{A}) = \mathcal{A}\times\mathcal{A} = \{a \doteq_s b \mid a, b \in A_s\}_{s\in S}$

sentence

$= \{(a,b) \mid a, b \in A_s\}_{s\in S}$

Γ - mulț. ec cond

$A \models_\Sigma \Gamma \iff (\mathcal{A} \models_\Sigma \gamma,\ \forall \gamma \in \Gamma)$

- congruența semantică a lui $\mathcal{A}$

$$\boxed{a \equiv_\Gamma^{\mathcal{A}} b \iff \forall h : \mathcal{A} \to \mathcal{M} \models \Gamma \quad h(a) = h(b)}$$

$$\equiv_\Gamma^{\mathcal{A}} = \bigcap_{h : A \to \mathcal{M} \models \Gamma} Ker(h)$$

- cuprinde toate consecințele lui Γ din algebra $\mathcal{A}$

	Programare logică ecuațională
$\Gamma \models (\forall X)\, G$	$\Gamma \models (\exists X)\, G$

EQLOG

Prog. log. ecuațională / relațională

(AI) Prolog

Princ. lb. pt prog. decl.

OBJ J. Goguen

Maude J. Meseguer

CAFEObj japonezi, R. Diaconescu (români)

CASL

$\forall x \exists y \Leftarrow \exists y \forall x$

$$\Gamma \models (\forall X)\, G \iff (\forall \mathcal{M} \models \Gamma)\ \mathcal{M} \models (\forall X) G \iff \forall h : T_\Sigma(X) \to \mathcal{M} \models \Gamma$$

orice gama-alg

$h_t(u) = h_t(v)$ pt orice $u \doteq_t v \in G$

$$\Gamma \models (\forall X)\, G \iff G \subseteq \equiv_\Gamma^{T_\Sigma(X)}$$

Dem.

$$\Gamma \models (\forall X)\, G \iff \forall h : T_\Sigma(X) \to \mathcal{M} \models \Gamma \ \forall u \doteq_t v \in G \ h_t(u) = h_t(v)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall u \doteq_t v \in G \ \forall h : T_\Sigma(X) \to \mathcal{M} \models \Gamma \quad h_t(u) = h_t(v)$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall u \doteq_t v \in G \quad u \equiv_\Gamma^{T_\Sigma(X)} v$$

$$\Updownarrow$$

$$\forall u \doteq_t v \in G \quad (u, v) \in \equiv_\Gamma^{T_\Sigma(X)}$$

$$\Updownarrow$$

$$G \subseteq \equiv_\Gamma^{T_\Sigma(X)}$$

$h: A \to B \quad a \equiv_\Gamma^{\mathcal{A}} b \Rightarrow h(a) \equiv_\Gamma^{\mathcal{B}} h(b)$ $\quad h(\equiv_\Gamma^{\mathcal{A}}) \subseteq \equiv_\Gamma^{B}$

Dem.: Fie $a \equiv_\Gamma^{\mathcal{A}} b$ tb. ar. $h(a) \equiv_\Gamma^{B} h(b) \iff$

$\forall m : B \to \mathcal{M} \models \Gamma$

$m(h(a)) = m(h(b))$

Fie m un morf.

$m: B \to \mathcal{M} \models \Gamma$

$\mathcal{A} \xrightarrow{h;m} \mathcal{M} \models \Gamma$

$(h;m)(a) = (h;m)(b)$

$\quad \| $

$m(h(a))$

$A \xrightarrow{h} B$

$h: Sen(A) \to Sen(B)$

$h(a \doteq b) = h(a) \doteq h(b)$

$h: \mathcal{P}(Sen(A)) \to \mathcal{P}(Sen(B))$

$h(G) = \{ h(g) \mid g \in G \}$

Consecință

$h: A \to B \quad h(\equiv_\Gamma^{\mathcal{A}}) \subseteq \equiv_\Gamma^{B}$

$h: T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(Y)$

$\Gamma \models (\forall X) G \Rightarrow \Gamma \models (\forall Y) h(G)$

$\Downarrow$ dem

$G \subseteq \equiv_\Gamma^{T_\Sigma(X)}$

Aplic. $\Gamma \models (\forall X)\, G \iff G \subseteq \equiv_\Gamma^{T_\Sigma(X)}$ (mai sus)

$h(G) \subseteq \equiv_\Gamma^{T_\Sigma(X)}$

$\Downarrow$ aplic h

$h(G) \subseteq h(\equiv_\Gamma^{T_\Sigma(X)}) \subseteq \equiv_\Gamma^{T_\Sigma(Y)}$

$\mathcal{A} \xrightarrow{\eta} \mathcal{A}/_{\equiv_\Gamma} = \mathcal{A}_\Gamma$ (factorizare) $\models \Gamma$ (e Γ-alg)

$\begin{array}{l} \forall h \downarrow \quad \swarrow \exists h^{\#} \\ \text{morf} \quad B \models \Gamma \quad \eta; h^{\#} = h \end{array}$

$\eta(a) = \eta(b) \iff a \equiv b$

· ~~$A_\Gamma \models \Gamma$ (e gama-alg)~~

$$
\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "\forall h"] & B \\
T_\Sigma(X) \arrow[u, "\exists f"] \arrow[ur, "\forall g"'] &
\end{tikzcd}
$$

$T_\Sigma(X)$ proiectivă

$\forall s \in S$

$h_s : A_s \to B_s$ surj.

$(\exists f) \cdot f ; h = g$