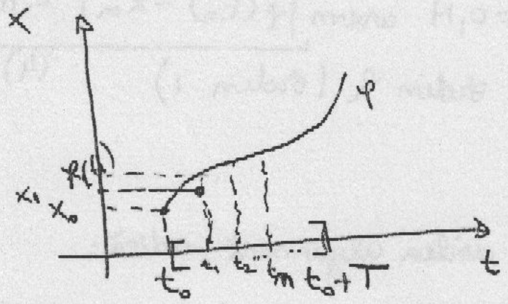
Ecuații diferențiale
CURS 4

26.10.2011

Metoda Euler pentru aproximarea soluției unei probleme Cauchy pentru ecuații diferențiale

Fie problema Cauchy: $\begin{cases} x' = f(t,x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$ (1)



$\varphi(\cdot): [t_0, t_0+T] \to \mathbb{R}$ soluție pt (1)

Problemă: pt $t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_N \leq t_0+T$ să determinăm niște $x_1, x_2, \ldots, x_m$ care să aproximeze $\varphi(t_1), \varphi(t_2), \ldots, \varphi(t_N)$

Considerăm diviziune echidistantă cu $N+1$ puncte cu pasul $h = \frac{t_0+T-t_0}{N} = \frac{T}{N}$; $t_m = t_{m-1}+$

Pentru $= t_0 + m \cdot h$

Pentru intervalul $[t_m, t_{m+1}]$ avem:

$$\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, x(t))\,dt \overset{(1)}{=} \int_{t_m}^{t_{m+1}} x'(t)\,dt = x(t)\Big|_{t_m}^{t_{m+1}} = x(t_{m+1}) - x(t_m) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x(t_{m+1}) = x(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, x(t))\,dt \quad (2) \Rightarrow x(t_{m+1}) = x(t_0) + \int_{t_0}^{t_{m+1}} f(t, x(t))$$

th de medie

$$\boxed{\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t, x(t))\,dt = f(t^*, x(t^*)) \cdot \underbrace{(t_{m+1} - t_m)}_{h} \approx f(t_m, x_m) \cdot h}$$

Se consideră expresia aproximativă:

$$x_{m+1} \approx x(t_{m+1})$$

$$x_{m+1} = x_m + h \cdot f(t_m, x_m)$$

Prin urmare, schema numerică Euler explicită este:

$$(3) \begin{cases} x_0 \\ x_{m+1} = x_m + h \cdot f(t_m, x_m) \ ; \ 0 \leq m \leq N-1 \end{cases}$$

Teorema de aproximare prin metoda Euler

$f: D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continuă

∂f, ∂f sunt deci continue

$$D_1=[t_0-a,t_0+a]\times[x_0-b,x_0+b]\subset D$$
$$M=\sup_{(t,x)\in D_1}|f(t,x)|$$
(sunt îndeplinite condițiile t. Cauchy - Picard)

~~schema de aproximare (3) de mai sus~~

Fie $\varphi:[t_0-T,t_0+T]\to\mathbb{R}$ soluția unică a cărei existență și unicitate este asigurată de th Cauchy - Picard

Se consideră aproximarea $(x_m)_{0\le m\le N}$ dată de (3).

Atunci $\exists$ o constantă $A>0$ astfel încât pt oricare $m=\overline{0,N}$ avem $|\varphi(t_m)-x_m|<A\cdot h$ (4)

unde $t_m=t_0+m\cdot h$, $h=\frac{T}{N}$, adică metoda Euler este de ordin h (ordin 1)

În particular avem $|\varphi(t_0+T)-x_N|<A\cdot h$ (5)

OBS:

1) $\frac{\partial f}{\partial x}$ continuă pe $D_1\Rightarrow f$ este funcție Lipschitz în al doilea argument, adică:

$\exists L_2>0$ a.î. $|f(t,x_1)-f(t,x_2)|<L_2|x_1-x_2|,\ \forall (t,x_1),(t,x_2)\in D_1$ (6)

2) $\frac{\partial f}{\partial t}$ continuă pe $D_1\Rightarrow f$ este funcție Lipschitz în primul argument, adică:

$\exists L_1>0$ a.î. $|f(t_1,x)-f(t_2,x)|<L_1|t_1-t_2|,\ \forall (t_1,x),(t_2,x)\in D$ (

Lema 1: Fie $x_0,x_1,\dots,x_N$ date de (3)

În condițiile teoremei de aproximare avem:

$$|x_m-x_0|\le M\cdot m\cdot h,\ \forall m=\overline{0,N}\quad (8)$$

DEM: • Pt $m=0$: $|x_0-x_0|=0\le M\cdot 0\cdot h=0$

Pt $m=1$: $|x_1-x_0|=|x_0+h\cdot f(t_0,x_0)-x_0|=h\cdot\underbrace{|f(t_0,x_0)|}_{\le M}\le$

$\boxed{\text{din (3)}\Rightarrow x_1=x_0+h\cdot f(t_0,x_0)}$

$M\cdot h=M\cdot 1\cdot h$

Presupunem proprietatea A pentru m: $|x_m-x_0|\le M\cdot m\cdot h$ și demonstrăm pentru $m+1$, adică: $|x_{m+1}-x_0|\le M\cdot(m+1)\cdot h$

Avem:

$$|x_{m+1}-x_0|=|(x_{m+1}-x_m)+(x_m-x_0)|\le |x_{m+1}-x_m|+\underbrace{|x_m-x_0|}_{\le M\cdot m\cdot h}\le$$

$|x_{m+1}-x_m|=|\cancel{x_m}+h\cdot f(t_m,x_m)-\cancel{x_m}|$

~~$|x_{m+1}-h$~~

$$\le h|f(t_m,x_m)|+M\cdot m\cdot h\le h\cdot M+M\cdot m\cdot h=M\cdot(m+1)\cdot h$$

EDDP
CURS 4
26.10.2011

Lema 2: În condițiile th de aproximare $\exists\, B>0$ a.î.:

$$\left|\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,\varphi(t))dt - h f(t_m,\varphi(t_m))\right| < B\cdot h^2,\ \forall m=\overline{0,N-1}$$

Mai mult $B = L_1 + L_2\cdot M$

DEM:

Din th de medie (deoarece f este continuă): $\exists\, t^* \in [t_m, t_{m+1}]$ a.î. $\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,\varphi(t))dt =$

$= f(t^*,\varphi(t^*))\cdot \underbrace{(t_{m+1}-t_m)}_{h} = h\cdot f(t^*,\varphi(t^*))$.

Deci

$$\stackrel{not}{=}\left|\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,\varphi(t))dt - h\cdot f(t_m,\varphi(t_m))\right| = \left|h\cdot f(t^*,\varphi(t^*)) - h\cdot f(t_m,\varphi(t_m))\right| =$$

$$= h\cdot\left|f(t^*,\varphi(t^*)) - f(t_m,\varphi(t^*)) + f(t_m,\varphi(t^*)) - f(t_m,\varphi(t_m))\right| \le$$

$$\le h\cdot\Big[\underbrace{|f(t^*,\varphi(t^*)) - f(t_m,\varphi(t^*))|}_{\stackrel{(7)}{\le}} + \underbrace{|f(t_m,\varphi(t^*)) - \varphi(t_m,\varphi(t_m))|}_{\stackrel{(6)}{\le}}\Big] \le$$

$$\le h\,(L_1\underbrace{|t^*-t_m|}_{\le h} + L_2|\varphi(t^*)-\varphi(t_m)|$$

Aplicăm th Lagrange funcției φ pe $[t_m, t^*]$:

$\exists\, c\in(t_m,t^*)$ a.î. $\varphi(t_m)-\varphi(t^*) = \varphi'(c)(t_m-t^*)$ $\Rightarrow$

$$|E| \le h\,(L_1 h + L_2|\varphi'(c)|\,|\underbrace{t_m-t^*}_{\le h}|) \underset{\uparrow}{\le} h\,(L_1 h + L_2 h\,\underbrace{|f(c,\varphi(c))|}_{\le M}) \le$$

$(1) \Rightarrow \varphi'(c) = f(c,\varphi(c))$

$$\le h^2\,(L_1 + L_2\cdot M) = h^2\cdot B \;\blacksquare$$

Dem th de convergență în metoda Euler

Notăm

$E_m = |\varphi(t_m) - x_m|$, $m=\overline{0,N}$

eroarea care se face dacă la momentul t_m, se folosește aproximația x_m în locul valorii exacte $\varphi(t_m)$

I. Căutăm o relație de recurență între E_{m+1} și E_m

Avem: $\varphi(t_{m+1}) = \varphi(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,\varphi(t))\,dt$ $\Big\}\Rightarrow E_{m+1} = |\varphi(t_{m+1}) - x_{m+1}| =$

$x_{m+1} = x_m + h\cdot f(t_m, x_m)$

$$|\varphi(t_m) + \int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,\varphi(t))\,dt - x_m - h\,f(t_m,x_m)| \le \underbrace{|\varphi(t_m) - x_m|}_{E_m} +$$

$$+ \left|\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,\varphi(t))\,dt - h\cdot f(t_m,x_m)\right| = E_m + \left|\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,\varphi(t))\,dt -\right.$$

$$\left. - \underbrace{h\cdot f(t_m,\varphi(t_m))}_{\cancel{f(t_m,\varphi(t_m))\int_{t_m}^{t_{m+1}} 1\,dt}} + h\,f(t_m,\varphi(t_m)) - h\cdot f(t_m,x_m)\right| \le$$

$$\cancel{= E_m + \left|\int_{t_m}^{t_{m+1}} (f(t,\varphi(t)) - f(t_m,\varphi(t_m)))\,dt\right| + h\,|f(t_m,\varphi(t_m)) - f(t_m,x_m)|} =$$

$$= E_m + \underbrace{\left|\int_{t_m}^{t_{m+1}} f(t,\varphi(t))\,dt - h\cdot f(t_m,\varphi(t_m))\right|}_{\le Bh^2 \text{ (din Lema 2)}} + \underbrace{h\,|f(t_m,\varphi(t_m)) - f(t_m,x_m)|}_{\le_{(6)} h\cdot L_2\,|\varphi(t_m)-x_m| = L_2 E_m}$$

$$\le E_m + Bh^2 + hL_2E_m \Rightarrow E_{m+1} \le E_m(L_2 h + 1) + Bh^2, \quad m=\overline{0,N-1}$$

II. Dem prin inducție că:

$$E_m \le \frac{(1+hL_2)^m - 1}{hL_2}\cdot Bh^2, \ \forall\, m=\overline{0,N}$$

Pt $m=0$, $E_0 = |\underbrace{\varphi(t_0)}_{x_0} - x_0| = 0 \le \frac{(1+hL_2)^0 - 1}{hL_2} = 0$

Pt $m=1$, $E_1 = |\varphi(t_1) - x_1| \le \underset{0}{\underset{\parallel}{E_0}}(1+hL_2) + Bh^2 = Bh^2 \quad \Big\} \Rightarrow$

dar $\frac{(1+hL_2)-1}{hL_2}\cdot Bh^2 = Bh^2$

$$E_1 \le \frac{(1+hL_2)^1 - 1}{hL_2}\cdot Bh^2$$

Presupunem proprietatea A pt n și dem pt $n+1$:

Pt n: $E_n \le \frac{(1+hL_2)^n - 1}{hL_2}\cdot Bh^2$ și dem pt $m+1$:

$$E_{m+1} \le \frac{(1+hL_2)^{m+1} - 1}{hL_2}\,Bh^2$$

EDDP
CURS 4
26.10.2011

Avem: din rel de recurență de la I:

$$E_{n+1} \le E_n(1+hL_2)+Bh^2 \le \frac{(1+hL_2)^n-1}{hL_2}\cdot Bh^2(1+hL_2)+Bh^2$$

$$= Bh^2\,\frac{(1+hL_2)^{n+1}-1-\cancel{hL_2}+hL_2}{hL_2} = Bh^2\,\frac{(1+hL_2)^{n+1}-1}{hL_2}.$$

III Demonstrăm inegalitatea din teoremă:

Avem inegalitatea cunoscută: $1+x \le e^x, \forall x \in \mathbb{R}$

pentru $x = hL_2 \Rightarrow 1+hL_2 \le e^{hL_2} \overset{II}{\Rightarrow} E_n \le \frac{(e^{L_2\cdot h})^n-1}{\cancel{h}L_2}\cdot B h^{\cancel{2}} = \frac{B(e^{nhL_2}-1)}{L_2}\cdot h \Rightarrow$

$\boxed{\text{Avem } nh \le N\cdot h = T}$

$$\Rightarrow E_n \le \underbrace{\frac{B(e^{TL_2}-1)}{L_2}}_{=A}\cdot h \Rightarrow |\varphi(t_n)-x_n| \le A\cdot h, \quad n=\overline{0,N}$$

$$A = \frac{B(e^{TL_2}-1)}{L_2}$$

Concluzii:

1) Metoda Euler este metodă de ordin 1
2) Micșorarea lui h conduce la viteză de convergență mai mică, dar aproximare mai bună
3) Se poate considera o schemă Euler implicită astfel:

$$\begin{cases} x_0 \\ \underbrace{x_{n+1} = x_n + h\cdot f(t_{n+1}, x_{n+1})}_{x_{n+1} \text{ este soluție a acestei ecuații}}, \quad n=\overline{0,N-1} \end{cases}$$

Temă: Pt o problemă Cauchy dată, de exemplu $\frac{dx}{dt} = x^2 - \frac{4}{t}x + \frac{4}{t^2}, t\in[1,3]$

$x(1)=2$

a) determinați soluția exactă
b) reprezentați grafic soluția exactă și aproximările ce se obțin folosind schema Euler explicită pt $N \in \{3, 5, 10, 20, 50\}$

+0,5 la nota finală