Programare logică

Terminare. Confluenţă. Completare

Logica ecuaţională şi rescrierea

- Terminarea unui sistem de rescriere este nedecidabilă.
- Pentru sisteme de rescriere particulare putem decide asupra terminării.
- Dacă E este o mulţime de ecuaţii a.î. R_E este un sistem de rescriere complet atunci deducţia ecuaţională $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$ este decidabilă:
  - $t \xrightarrow{*} fn(t)$
  - $t' \xrightarrow{*} fn(t')$
  - $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \Leftrightarrow fn(t) = fn(t')$
- Pentru sisteme de rescriere noetheriene, confluenţa este decidabilă.

Terminarea

(S, Σ) signatură, R un sistem de rescriere (TRS)

Propoziţie. Dacă fiecărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $t \mapsto \mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât

$$t \to_R t' \Rightarrow \mu(t) > \mu(t')$$

oricare tşi t', atunci R este noetherian.

- $R = \{x - 0 \to x, succ(x) - succ(y) \to x - y\}$ noetherian
  $\mu(t) :=$ lungimea lui t
  (nr. de simboluri din scrierea lui t în forma prefix)
- $R = \{f(g(x), y) \to f(y, y)\}$ nu este noetherian
  $f(g(x), g(x)) \to_R f(g(x), g(x)) \to_R \cdots$

Arborele de reducere

(S, Σ) signatură, R un sistem de rescriere (TRS)

- Arborele de reducere al termenului t este definit astfel:
  $\bullet$ rădăcina arborelui are eticheta t,
  $\bullet$ descendenţii nodului cu eticheta u sunt etichetaţi cu termenii u' care verifică $u \rightarrow_R u'$.
- Orice nod al unui arbore de reducere are un număr finit de descendenţi deoarece R este o mulţime finită.
- Dacă R se termină atunci
  $\mu(t) :=$ înălţimea arborelui de reducere asociat lui t.
  $t \rightarrow_R t' \Rightarrow \mu(t) > \mu(t')$

Arbore de reducere

$R = \{x + 0 \to x, x + succ(y) \to succ(x + y)\}$

$$
\begin{tikzcd}
 & succ(0) + succ(0+0) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
succ(0) + succ(0) \arrow[d] & & succ(succ(0) + (0+0)) \arrow[d] \\
succ(succ(0) + 0) \arrow[d] & & succ(succ(0) + 0) \arrow[d] \\
succ(succ(0)) & & succ(succ(0))
\end{tikzcd}
$$

Terminare

(S, Σ) signatură, R un sistem de rescriere (TRS)

Lema lui König. Dacă R este noetherian atunci orice termen are un arbore de reducere finit.

- Sunt echivalente
  - R este noetherian
  - oricărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $\mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât $t \to_R t'$ implică $\mu(t) > \mu(t')$ ($\mu(t)$ este o măsură strict descrescătoare în raport cu relaţia de rescriere).

Terminare

(S,Σ) signatură, R un sistem de rescriere (TRS)

Propoziţie. Fie A o (S,Σ)-algebră astfel încât:

• $A_s = \mathbb{N}$ or. $s \in S$,

• or. $\sigma : s_1 \dots s_n \to s$, dacă $k_i > k'_i$ atunci $A_\sigma(k_1,\dots,k_i,\dots k_n) > A_\sigma(k_1,\dots,k'_i,\dots k_n)$,

• $\tilde{a}(l) > \tilde{a}(r)$ or. $l \to r \in R$ or. $a : Var(l) \to A$.

Atunci R este noetherian

- $R = \{x + 0 \to 0, x + succ(y) \to succ(x+y)\}$
  $A_0 := 1$, $A_{succ}(k) := k+1$,
  $A_+(k,m) := k + 2 * m$
  ($k +_A m := k + 2 * m$) or. k, $m \in \mathbb{N}$.

Confluenţă. Perechi critice

(S, Σ) signatură, R un sistem de rescriere (TRS)

Fie $l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$ astfel încât:

- $Var(l_1) \cup Var(l_2) = \emptyset$,
- $l_1 = c[z \leftarrow t]$ unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă (t este subtermen al lui l_1 care nu este variabilă),
- θ c.g.u pentru t şi l_2 ($\Rightarrow \theta(t) = \theta(l_2)$).

Atunci $(\theta(r_1), \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)])$ este pereche critică.

Confluenţă. Perechi critice

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
& \theta(l_1) \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\theta(r_1) & & \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)]
\end{tikzcd}$$

$l_1 \to r_1$, $l_2 \to r_2 \in R$,

$Var(l_1) \cup Var(l_2) = \emptyset$,

$l_1 = c[z \to t]$,

$\theta(t) = \theta(l_2)$ c.g.u

Teorema Perechilor Critice.

Dacă R este noetherian atunci sunt echivalente:

- R este confluent,
- $t_1 \downarrow_R t_2$ oricare (t_1, t_2) pereche critică.

Exemplu

$R = \{f(f(x)) \to x\}$ este confluent.

Determinăm perechile critice:

• $l_1 := f(f(x))$, $r_1 := x$, $l_2 := f(f(y))$, $r_2 := y$

• Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ şi $f(x)$.

(1) $t := f(f(x))$, $c = z$, $\theta := \{x \leftarrow y\}$

$\theta(r_1) = y$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y$

(2) $t := f(x)$, $c = f(z)$, $\theta := \{x \leftarrow f(y)\}$

$\theta(r_1) = f(y)$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = f(y)$

Perechile critice sunt (y, y) şi $(f(y), f(y))$. Deoarece $y \downarrow y$ şi $f(y) \downarrow f(y)$, sistemul de rescriere R este confluent.

Completarea unui TRS

(S, Σ) signatură

Intrare. R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.

Iniţializare. $T := R$

Se execută următorii paşi, cât timp este posibil:

(1) $CP := CP(T) = \{(t_1, t_2) | (t_1, t_2)$ pereche critică în $T\}$

(2) Dacă $t_1 \downarrow t_2$ oricare $(t_1, t_2) \in CP$,

atunci STOP (T *este completarea lui* R).

(3) Dacă $(t_1, t_2) \in CP$, $t_1 \not\downarrow t_2$, atunci

dacă $T \cup \{fn(t_1) \to fn(t_2)\}$ e noetherian, atunci

$T := T \cup \{fn(t_1) \to fn(t_2)\}$,

altfel dacă $T \cup \{fn(t_2) \to fn(t_1)\}$ e noetherian, atunci

$T := T \cup \{fn(t_2) \to fn(t_1)\}$,

altfel STOP (R *nu are completare*).

Ieşire. T completarea lui R (T este noetherian şi confluent)

sau faptul că R nu are completare.

Exemplu

$S := \{s\}$, $\Sigma := \{* : ss \to s\}$, $E := \{\forall\{x, y, a\}(x * y) * (y * a) \doteq y)\}$

$R_E := \{(x * y) * (y * a) \to y\}$, $\mu(t) :=$ lungimea termenului t

Determinăm perechile critice:

• $l_1 := (x * y) * (y * a)$, $r_1 := y$, $l_2 := (x' * y') * (y' * a')$, $r_2 := y'$

• Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $(x * y)$ şi $y * a$.

(1) $t := x * y$, $c = z * (y * a)$, $\theta := \{x \leftarrow x' * y', y \to y' * a'\}$

$\theta(r_1) = y' * a'$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y' * ((y' * a') * a)$

(2) $t := y * a$, $c = (x * y) * z$, $\theta := \{y \to x' * y', a \to y' * a'\}$

$\theta(r_1) = x' * y'$, $\theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = (x * (x' * y')) * y'$

$CP = \{(y * a, y * ((y * a) * a)), (x * y, (x * (x * y)) * y)\}$

$R_E \cup \{y * ((y * a) * a) \to y * a,\ (x * (x * y)) * y \to x * y\}$ este complet