Programare Logică

Metoda Algebrei Iniţiale

Semantica termenilor

(S, Σ) signatură, X mulţime de variabile

Teoremă. Fie A o (S, Σ)-algebră. Orice funcţie $\boldsymbol{a} : X \to A$ se extinde la un unic (S, Σ)-morfism $\tilde{\boldsymbol{a}} : T_\Sigma(X) \to A$.

- $X = \emptyset$

  Corolar. T_Σ este (S, Σ)-algebră iniţială.

- $A = T_\Sigma(Y)$

  Corolar. Orice substituţie $\nu : X \to T_\Sigma(Y)$ se extinde la un unic morfism de (S, Σ)-algebre $\tilde{\nu} : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(Y)$.

Semantica termenilor

(S, Σ) signatură, X mulţime de variabile

Teoremă. Fie A o (S, Σ)-algebră. Orice funcţie $\boldsymbol{a} : X \to A$ se extinde la un unic (S, Σ)-morfism $\tilde{\boldsymbol{a}} : T_\Sigma(X) \to A$.

- $\boldsymbol{a} : X \to A$ atribuire
  $\tilde{\boldsymbol{a}}(t)$ este rezultatul evaluării termenului $t \in T_\Sigma(X)$ în A
- $X = \emptyset$
  Corolar. T_Σ este (S, Σ)-algebră iniţială.
  Fie $\mathcal{S}_A : T_\Sigma \to A$ unicul morfism. Orice termen $t \in T_\Sigma$ are o unică interpretare $\mathcal{S}_A(t)$ în algebra A.

Semantica instrucţiunii de atribuire x:=e

- X este mulţimea variabilelor, $x \in X$, $e \in T_{\Sigma}(X)$

Semantica instrucţiunii de atribuire x:=e

- X este mulţimea variabilelor, $x \in X$, $e \in T_\Sigma(X)$
- D este Σ-algebra datelor

Semantica instrucţiunii de atribuire x:=e

- X este mulţimea variabilelor, $x \in X$, $e \in T_\Sigma(X)$
- D este Σ-algebra datelor
- o stare a memoriei este o funcţie $\boldsymbol{a} : X \to D$

Semantica instrucţiunii de atribuire x:=e

- X este mulţimea variabilelor, $x \in X$, $e \in T_\Sigma(X)$
- D este Σ-algebra datelor
- o stare a memoriei este o funcţie $\boldsymbol{a} : X \to D$
- semantica unei instrucţiuni descrie modul în care instrucţiunea modifică starile memoriei

Semantica instrucţiunii de atribuire x:=e

- X este mulţimea variabilelor, $x \in X$, $e \in T_\Sigma(X)$
- D este Σ-algebra datelor
- o stare a memoriei este o funcţie $\boldsymbol{a} : X \to D$
- semantica unei instrucţiuni descrie modul în care instrucţiunea modifică starile memoriei
- $Mem := \{\boldsymbol{a} : X \to D | \ \boldsymbol{a}$ funcţie$\}$

  $Sem(x := e) \ : \ Mem \ \to \ Mem$

  $$Sem(x := e)(\boldsymbol{a})(y) := \begin{cases} \tilde{\boldsymbol{a}}(e) & \text{dacă } y = x, \\ \boldsymbol{a}(y) & \text{dacă } y \neq x. \end{cases}$$

Adîncimea termenilor

(S, Σ) signatură multisortată

- $D = (D_S, D_\Sigma)$, $D_s := \mathbb{N}$ or. $s \in S$
  dacă $\sigma :\to s$ atunci $D_\sigma := 0$,
  dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$, k_1, …, $k_n \in \mathbb{N}$
  $D_\sigma(k_1, \ldots, k_n) := 1 + max(k_1, \ldots, k_n)$

Adîncimea termenilor

(S, Σ) signatură multisortată

- $D = (D_S, D_\Sigma)$, $D_s := \mathbb{N}$ or. $s \in S$
  dacă $\sigma :\to s$ atunci $D_\sigma := 0$,
  dacă $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$, k_1, ..., $k_n \in \mathbb{N}$
  $D_\sigma(k_1, \ldots, k_n) := 1 + max(k_1, \ldots, k_n)$
- $\mathcal{S}_D : T_\Sigma \to D$ unicul morfism
  dc. $t = \sigma(t_1, \ldots, t_n)$ at. $arb(t) :=$

$$\begin{tikzcd} & \sigma \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ arb(t_1) & \cdots & arb(t_n) \end{tikzcd}$$

Adîncimea termenilor

(S, Σ) signatură multisortată

- $D = (D_S, D_\Sigma)$, $D_s := \mathbb{N}$ or. $s \in S$
  dacă $\sigma :\to s$ atunci $D_\sigma := 0$,
  dacă $\sigma : s_1 \dots s_n \to s$, k_1, ..., $k_n \in \mathbb{N}$
  $D_\sigma(k_1, \dots, k_n) := 1 + max(k_1, \dots, k_n)$
- $\mathcal{S}_D : T_\Sigma \to D$ unicul morfism
  dc. $t = \sigma(t_1, \dots, t_n)$ at. $arb(t) :=$

$$\begin{tikzcd} & \sigma \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ arb(t_1) & \cdots & arb(t_n) \end{tikzcd}$$

- $\mathcal{S}_D(t) =$ adîncimea $arb(t)$

Semantica algebrei iniţiale pentru limbaje definite de g.i.c.

- Unei g.i.c. neambigue $G = (S_0, N, T, P)$ îi asociem signatura $\mathcal{G} = (S = N, \Sigma = P)$
- Definim $\mathcal{G}$-algebra $Lang(G)$ astfel încât $L(G) = \mathcal{S}_{G,S_0}(T_{\Sigma,S_0})$, unde $\mathcal{S}_G : T_\Sigma \to Lang(G)$ este unicul $\mathcal{G}$-morfism. Deoarece G este neambiguă, morfismul $\mathcal{S}_G : T_\Sigma \to Lang(G)$ este injectiv.
- Pentru $w \in L(G)$ exista un unic $t \in T_{\Sigma S_0}$ astfel încât $\mathcal{S}_G(t) = w$. Vom scrie $t_w = \mathcal{S}_G^{-1}(w)$.
- Pentru orice $\mathcal{G}$-algebră $\mathcal{A}$, unicul $\mathcal{G}$-morfism $\mathcal{S}_A : T_\Sigma \to \mathcal{A}$ îi asociază lui t_w o interpretare în $\mathcal{A}$, şi anume $\mathcal{S}_A(t_w)$.
- $Sem(w) = \mathcal{S}_\mathcal{A}(t_w) = \mathcal{S}_\mathcal{A}(\mathcal{S}_G^{-1}(w))$ oricare $w \in L(G)$

Semantica algebrei iniţiale

$$
\begin{tikzcd}
T_\Sigma \arrow[r, "\mathcal{S}_G"] \arrow[d, "\mathcal{S}_A"] & Lang(G) \\
\mathcal{A} &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
t_w \arrow[r, shift left, "\mathcal{S}_G"] \arrow[d, "\mathcal{S}_A"] & w \arrow[l, shift left, dashed] \\
Sem(w) = \mathcal{S}_A(t_w) &
\end{tikzcd}
$$

Semantica algebrei iniţiale

$$
\begin{tikzcd}
T_\Sigma \arrow[r, "\mathcal{S}_G"] \arrow[d, "\mathcal{S}_A"] & Lang(G) \\
\mathcal{A} &
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
t_w \arrow[rr, shift left, "\mathcal{S}_G"] \arrow[d, "\mathcal{S}_A"] & & w \arrow[ll, dashed, shift left] \\
Sem(w) = \mathcal{S}_A(t_w) & &
\end{tikzcd}
$$

- Σ instrucţiunile, w (t_w) program, A maşină,
  $Sem(w) = \mathcal{S}_A(t_w)$ execuţia programului w pe maşina A
- w sintaxa concretă, t_w sintaxa abstractă,
  A algebra semantică, A_s domeniu semantic or. $s \in S$
  $\mathcal{S}_A(t)$ denotaţia termenului t

Aplicaţii

Vom prezenta următoarele aplicaţii ale metodei algebrei iniţiale:

- semantica unui şir de cifre ca număr natural,
- semantica limbajului unui minicalculator,
- reprezentarea expresiilor în formă poloneză inversă,
- modelarea algebrică a compilării unei expresii aritmetice folosind o maşina cu stivă şi acumulator.

Gramatici independente de context

- $G = (S_0, N, T, P)$
  - N este mulţimea neterminalelor
  - T este mulţimea terminalelor
  - S_0 este simbolul de start
  - $P \subseteq N \times (N \cup T)^*$ mulţimea producţiilor

$S_0 \in N$, $T \cap N = \emptyset$,
o producţie $p = (A, \omega) \in P$ va fi descrisă prin

$$[p]\ A \longrightarrow \omega$$

$G = (S_0, N, T, P)$ g.i.c. neambiguă

- Definim signatura $\mathcal{G} = (S, \Sigma)$ astfel:
  - neterminalele devin sorturi: $S = N$
  - producţiile devin simboluri de operaţie:

$$p \in \Sigma_{n_1 \cdots n_k, n} \Leftrightarrow p = (n, t_0 n_1 t_1 \cdots n_k t_k) \in P,$$

  unde $n, n_1, \ldots, n_k \in N$ şi $t_0, \ldots, t_k \in T^*$.

Observăm că

$$p : n_1 \cdots n_k \to n \Leftrightarrow [p]\ n \longrightarrow t_0 n_1 t_1 \cdots n_k t_k.$$

Vom scrie simplu $\Sigma = P$.

$G = (S_0, N, T, P)$ g.i.c. neambiguă

- Exemplu. descrierea unui număr natural ca şir de cifre

Gramatica G	Signatura $\mathcal{G}$
$N = \{\langle cifra \rangle, \langle nat \rangle\}$	$S = N$
$T = \{0, \ldots, 9\}$, $S_0 = \langle nat \rangle$	
$P = \{c0, \cdots, c9, p1, p2\}$	$\Sigma = \{$
$[ci]\ \langle cifra \rangle \longrightarrow i$, $i = 0, 9$	$ci :\to \langle cifra \rangle$, $i = 0, 9$
$[p1]\ \langle nat \rangle \longrightarrow \langle cifra \rangle$	$p1 : \langle cifra \rangle \to \langle nat \rangle$
$[p2]\ \langle nat \rangle \longrightarrow \langle nat \rangle \langle cifra \rangle$	$p2 : \langle nat \rangle \langle cifra \rangle \to \langle nat \rangle\}$

$G = (S_0, N, T, P)$ g.i.c. neambiguă

Am definit signatură multisortată $\mathcal{G} = (S = N, \Sigma = P)$. Construim o $\mathcal{G}$-algebră care va permite definirea limbajului generat de gramatică prin metoda algebrei iniţiale.

- $Lang(G) = (L_S, L_\Sigma)$ $\mathcal{G}$-algebră
  - $L_n = T^*$, oricare $n \in N$
  - $p : n_1 \cdots n_k \to n \in \Sigma$ şi $(w_1, \ldots, w_k) \in (T^*)^k$

$$L_p(w_1, \ldots, w_k) = t_0 w_1 \cdots w_k t_k,$$

unde $[p]\ n \longrightarrow t_0 n_1 t_1 \cdots n_k t_k$ în P.

Limbajul $L(G)$

- T_Σ este $\mathcal{G}$-algebră iniţială.
- Teoremă (metoda algebrei iniţiale).
  Dacă $\mathcal{S}_G : T_\Sigma \to Lang(G)$ unicul $\mathcal{G}$-morfism atunci pentru orice neterminal $n \in N$

$$\{w \in T^* \mid n \stackrel{*}{\Rightarrow} w\} = \mathcal{S}_{G,n}(T_{\Sigma,n})$$

In particular $L(G) = \mathcal{S}_{G,S_0}(T_{\Sigma,S_0})$.

Dem. $\subseteq$ inducţie după lungimea derivării.

$\supseteq$ inducţie structurală.

Algebra arborilor de derivare

Arbore de derivare pentru G:

• frunzele sunt terminale,

• nodurile interioare sunt neterminale,

• rădăcina este neterminal,

• dacă un nod are eticheta $n \in N$, iar succesorii săi sunt etichetaţi cu $x_1, \ldots, x_k \in N \cup T$, atunci $(n, x_1 \cdots x_k) \in P$

Teoremă. Mulţimea arborilor de derivare are o structura canonică de $\mathcal{G}$-algebră, Arb, care este izomorfă cu algebra termenilor T_Σ. Prin urmare, algebra arborilor de derivare Arb este o $\mathcal{G}$-algebră iniţială.

Semantica unui şir de cifre

Semantica unui şir de cifre ca număr natural

- $G = (S_0, N, T, P)$, unde $N = \{\langle cifra\rangle, \langle nat\rangle\}$, $S_0 = \langle nat\rangle$, $T = \{0, \ldots, 9\}$, $P = \{c0, \cdots, c9, p1, p2\}$
- $\mathcal{G} = (S = N, \Sigma = P)$
  $\Sigma = \{ci :\to \langle cifra\rangle \mid i = 0, 9\} \cup$
  $\{p1 : \langle cifra\rangle \to \langle nat\rangle,$
  $p2 : \langle nat\rangle\langle cifra\rangle \to \langle nat\rangle\}$

Semantica unui şir de cifre

- Definim $\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$ $\mathcal{G}$-algebră:
  $A_{\langle cifra \rangle} = \{0, \ldots, 9\} \subseteq \mathbb{N}$, $A_{\langle nat \rangle} = \mathbb{N}$,
  $A_{ci} = i \in A_{\langle cifra \rangle}$, $i = 0, 9$ (operaţie constantă)
  $A_{p1} : \{0, \ldots, 9\} \to \mathbb{N}$, $A_{p1}(i) = i$,
  $A_{p2} : \mathbb{N} \times \{0, \ldots, 9\} \to \mathbb{N}$, $A_{p2}(m, i) = m * 10 + i$
- Dacă $\mathcal{S}_A : T_\Sigma \to \mathcal{A}$ şi $\mathcal{S}_G : T_\Sigma \to Lang(G)$ sunt unicele morfisme definite pe T_Σ, atunci semantica unui sir de cifre $w \in L_{\langle nat \rangle}$ este $Sem(w) = \mathcal{S}_A(\mathcal{S}_G^{-1}(w))$.

Semantica unui şir de cifre

$$
\begin{tikzcd}
& \langle nat \rangle \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
\langle nat \rangle \arrow[d] & & \langle cifra \rangle \arrow[d] \\
\langle cifra \rangle \arrow[d] & & 5 \\
2 & &
\end{tikzcd}
$$

$Sem(\overline{25}) = \mathcal{S}_A(T_{p2}(T_{p1}(T_{c2}), T_{c5})) = A_{p2}(A_{p1}(A_{c2}), A_{c5}) =$
$A_{p1}(A_{c2}) * 10 + 5 = A_{c2} * 10 + 5 = 2 * 10 + 5 = 25$.

Calculatorul de buzunar

IF 2+M,(M+45)+3,5+6 E

0	1	2	3	4	+	(	IF	M	ON
5	6	7	8	9	*	)	,	E	OFF

- M este celula de memorie
- E comanda de evaluare
- $val(IF\ e1, e2, e3) = val(e2)$ daca $val(e1) = 0$
  $val(IF\ e1, e2, e3) = val(e3)$ daca $val(e1) \neq 0$

Calculatorul de buzunar

$[ci]\ \langle cifra \rangle \longrightarrow i,\ i = 0,9$

$[p1]\ \langle nat \rangle \longrightarrow \langle cifra \rangle$

$[p2]\ \langle nat \rangle \longrightarrow \langle nat \rangle \langle cifra \rangle$

$[r1]\ \langle exp \rangle \longrightarrow \langle nat \rangle$

$[r2]\ \langle exp \rangle \longrightarrow M$

$[r3]\ \langle exp \rangle \longrightarrow \langle exp \rangle + \langle exp \rangle$

$[r4]\ \langle exp \rangle \longrightarrow IF \langle exp \rangle, \langle exp \rangle, \langle exp \rangle$

$[r5]\ \langle exp \rangle \longrightarrow (\langle exp \rangle)$

$[I1]\ \langle inst \rangle \longrightarrow \langle exp \rangle E\ OFF$

$[I2]\ \langle inst \rangle \longrightarrow \langle exp \rangle E \langle inst \rangle$

$[Pr]\ \langle prog \rangle \longrightarrow ON \langle inst \rangle$

Calculatorul de buzunar

- La pornirea calculatorului memoria M este initializată cu 0. La apăsarea butonului E, expresia de pe ecran este evaluată folosind valoarea celulei M. Valoarea astfel obţinută este afişată pe ecran şi este introdusă în M.
- Un program este un şir de instrucţiuni
  $ON\ e1\ E\ e2\ E \cdots en\ E\ OFF$
  Semantica lui este şirul de numere care apare pe ecran, adică un element din $\mathbb{N}^{+}$.
  - $Sem(w) \in \mathbb{N}^{+}$, unde w este un program

Calculatorul de buzunar

- O instrucţiune este o secvenţă care se execută dintr-o anumită stare a memoriei
  $e1\ E\ e2\ E \cdots en\ E\ OFF$
  Semantica unei instrucţiuni va fi o funcţie $I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$.
  - $Sem(I) \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+$, unde I este o instructiune
- Expresiile sunt termeni în variabila M. Pentru fiecare evaluare se foloseşte valoarea curentă a memoriei M.
  Semantica unei expresii e este o funcţie $e : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  - $Sem(e) \in \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, unde e este o expresie

• Notaţie $A \to B := \{f \mid f : A \to B \text{ funcţie}\}$

Algebra semantică

- este o $\mathcal{G}$-algebra, unde $G = (S, P)$,

$S = \{\langle cifra\rangle, \langle nat\rangle, \langle expr\rangle,$
$\langle inst\rangle, \langle prog\rangle\}$

$\Sigma = \{c0, \ldots, c9, p1, p2, r1, \ldots, r5, I1, I2, Pr\}$ Definim

$\mathcal{A} = (A_S, A_\Sigma)$

$A_{\langle cifra\rangle} = \{0, \ldots, 9\}$, $A_{\langle nat\rangle} = \mathbb{N}$,

$A_{\langle expr\rangle} = \{e : \mathbb{N} \to \mathbb{N} \mid e \;\; functie\}$,

$A_{\langle inst\rangle} = \{I : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^+ \mid I \;\; functie\}$,

$A_{\langle prog\rangle} = \mathbb{N}^+$

Definim operatiile A_p, cu $p \in \Sigma$

Algebra semantică

- A_{ci}, A_{p1}, A_{p2}
- $A_{r1}(k) : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $A_{r1}(k)(m) = k$
- $A_{r2} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $A_{r2}(m) = m$,
- $A_{r3} : A_{\langle expr\rangle} \times A_{\langle expr\rangle} \to A_{\langle expr\rangle}$,
$A_{r3}(e1, e2)(m) = e1(m) + e2(m)$,
- $A_{r4} : A_{\langle expr\rangle} \times A_{\langle expr\rangle} \times A_{\langle expr\rangle} \to A_{\langle expr\rangle}$,
$A_{r4}(e1, e2, e3)(m) =$ daca $e1(m) = 0$ atunci $e2(m)$ altfel $e3(m)$,
- $A_{r5} : A_{\langle expr\rangle} \to A_{\langle expr\rangle}$, $A_{r5}(e) = e$,
- $A_{I1} : A_{\langle expr\rangle} \to A_{\langle inst\rangle}$, $A_{I1}(e)(m) = e(m)$,
- $A_{I2} : A_{\langle expr\rangle} \times A_{\langle inst\rangle} \to A_{\langle inst\rangle}$, $A_{I2}(e, I) = e(m)I(e(m))$,
- $A_{Pr} : A_{\langle inst\rangle} \to A_{\langle prog\rangle}$, $A_{Pr}(I) = I(0)$.

Semantica algebrei initiale

- $\mathcal{S}_A : T_\Sigma \to \mathcal{A}$ unicul morfism
- $\mathcal{S}_G : T_\Sigma \to Lang(G)$ unicul morfism
- $w \in L(G)$, $t_w \in T_\Sigma$, $\mathcal{S}_G(t_w) = w$ (t este unic)

  semantica lui w este $Sem(w) = \mathcal{S}_A(t_w)$

Exemplu:

$w = ON\ 5 + M\ E\ OFF$

$t_w = T_{\langle Pr \rangle}(T_{\langle I1 \rangle}(T_{\langle r3 \rangle}(T_{\langle r1 \rangle}(T_{\langle p1 \rangle}(T_{\langle c5 \rangle})), T_{\langle r2 \rangle})))$

$Sem(w) = \mathcal{S}_A(t) =$

$A_{\langle Pr \rangle}(A_{\langle I1 \rangle}(A_{\langle r3 \rangle}(A_{\langle r1 \rangle}(A_{\langle p1 \rangle}(A_{\langle c5 \rangle})), A_{\langle r2 \rangle})))$

Semantica algebrei initiale

$w = ON\ 5 + M\ E\ OFF$

$Sem(w) = A_{\langle Pr\rangle}(A_{\langle I1\rangle}(A_{\langle r3\rangle}(A_{\langle r1\rangle}(A_{\langle p1\rangle}(A_{\langle c5\rangle})), A_{\langle r2\rangle}))) =$

$A_{\langle I1\rangle}(A_{\langle r3\rangle}(A_{\langle r1\rangle}(A_{\langle p1\rangle}(A_{\langle c5\rangle})), A_{\langle r2\rangle}))(0) =$

$A_{\langle r3\rangle}(A_{\langle r1\rangle}(A_{\langle p1\rangle}(A_{\langle c5\rangle})), A_{\langle r2\rangle})(0) =$

$A_{\langle r1\rangle}(A_{\langle p1\rangle}(A_{\langle c5\rangle}))(0) + A_{\langle r2\rangle}(0) =$

$A_{\langle p1\rangle}(A_{\langle c5\rangle}) + 0 =$

$A_{\langle c5\rangle} + 0 =$

$5 + 0 = 5$