Programare logică

Sisteme de rescriere abstracte

Sisteme de rescriere abstracte

Un sistem de rescriere abstract este o pereche $(T, \rightarrow)$, unde T este o mulţime şi $\rightarrow \subseteq T \times T$ ($\rightarrow$ este o relaţie binară pe T).

Definiţii

$\leftarrow := \rightarrow^{-1}$ (relaţia inversă)

$\leftrightarrow := \rightarrow \cup \leftarrow$ (închiderea simetrică)

$\stackrel{*}{\rightarrow} := (\rightarrow)^*$ (închiderea reflexivă şi tranzitivă)

$\stackrel{*}{\leftrightarrow} := (\leftrightarrow)^*$ (echivalenţa generată)

$(T_\Sigma(X)_s, \rightarrow_s)$ sistem de rescriere abstract

Exemplu

$T := \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, $\rightarrow := \{(m,k) \mid k < m, k|m\}$

- $\leftarrow = \{(k,m) \mid k < m, k|m\}$
- $\leftrightarrow = \{(k_1,k_2) \mid k_1 \neq k_2, k_1|k_2$ sau $k_2|k_1\}$
- $\xrightarrow{+} = \{(m,k) \mid$ ex.$n \geq 0,$ ex. $k_1, \cdots, k_n \in T$
  $m \rightarrow k_1 \rightarrow \cdots \rightarrow k_n \rightarrow k\}$
- $\xrightarrow{*} = \xrightarrow{+} \cup \{(k,k) | k \in T\}$
- Cine este $\overset{*}{\leftrightarrow}$?

Teorema lui Birkhoff

(S, Σ) signatură, X mulţime de variabile,
E mulţime de ecuaţii necondiţionate,
R_E sistemul de rescriere determinat de E,
$\to_E \subseteq T_\Sigma(X) \times T_\Sigma(X)$ relaţia de rescriere

Teoremă. Fie t, $t' \in T_\Sigma(X)_s$. Sunt echivalente:

(1) $E \models (\forall X) t \doteq_s t'$

(2) $E \vdash (\forall X) t \doteq_s t'$

(3) $E \vdash_{\text{R,S,T, SR}_E} (\forall X) t \doteq_s t'$

(4) $t \overset{*}{\leftrightarrow}_E t'$,
unde $\overset{*}{\leftrightarrow}_E$ este echivalenţa generată de $\to_E$.

Sisteme de rescriere abstracte

$(T, \to)$ sistem de rescriere (T mulţime, $\to \subseteq T \times T$)

Definiţii

$t \in T$ este reductibil dc. ex. $t' \in T$ a.î. $t \to t'$

$t_0 \to t_1 \to t_2 \to \cdots$ reducere

$t \in T$ este formă normală(ireductibil) dc. nu este reductibil

t_0 este o formă normală a lui t dc. $t \stackrel{*}{\to} t_0$ şi

t_0 este formă normală

$t_1 \downarrow t_2$ dc. ex. $t \in T$ a.î. $t_1 \stackrel{*}{\to} t \stackrel{*}{\leftarrow} t_2$

(t_1 şi t_2 se întàlnesc, $\downarrow$ relaţia de întâlnire)

Exemple

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\rightarrow := \{(m, k) \mid k < m, k|m\}$
  k este formă normală dacă este număr prim
  $k_1 \downarrow k_2$ dacă nu sunt prime între ele
  k este formă normală a lui m dacă k este factor prim al lui m
- $T := \{a, b\}^*$, $\rightarrow := \{(ubav, uabv) | u, v \in T\}$
  $w \in T$ este formă normală dacă $w = a^n b^k$ cu n, $k \geq 0$
  $w_1 \downarrow w_2$ dacă $nr_a(w_1) = nr_a(w_2)$ şi $nr_b(w_1) = nr_b(w_2)$

Sisteme de rescriere abstracte

$(T, \rightarrow)$ sistem de rescriere (T mulţime, $\rightarrow \subseteq T \times T$)

Definiţii $(T, \rightarrow)$ se numeşte

noetherian: nu există reduceri infinite $t_0 \rightarrow t_1 \rightarrow \cdots$

(orice rescriere se termină)

confluent: $t_1 \overset{*}{\leftarrow} t \overset{*}{\rightarrow} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$

Church-Rosser: $t_1 \overset{*}{\leftrightarrow} t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$

local confluent: $t_1 \leftarrow t \rightarrow t_2 \Rightarrow t_1 \downarrow t_2$

normalizat: orice element are o formă normală

complet (convergent, canonic): confluent şi noetherian

- $T := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, $\rightarrow := \{(k, m) \mid k < m, k|m\}$
  $(T, \rightarrow)$ e noetherian, nu e confluent

Sisteme de rescriere abstracte

Propoziţii.

- $(T, \rightarrow)$ confluent $\Leftrightarrow$ $(T, \rightarrow)$ Church-Rosser
- (Lema lui Newmann) Dacă $(T, \rightarrow)$ este local confluent şi noetherian atunci este confluent
- Dacă $(T, \rightarrow)$ este complet atunci orice termen are o singură formă normală.
  În acest caz vom nota $fn(t)$ forma normală a lui $t \in T$.

Exerciţiu

$T = \{a, b, c, d\}$

$\rightarrow = \{(a, b), (a, c), (b, a), (b, d)\}$

Putem descrie sistemul de rescriere $(T, \rightarrow)$ prin
$R = \{a \rightarrow b, a \rightarrow c, b \rightarrow a, b \rightarrow d\}$
Vom identifica $R = (T, \rightarrow)$

- arătaţi că R e local confluent
- arătaţi că R nu e confluent
- arătaţi că R nu e noetherian
- determinaţi formele normale ale lui R
- adăugaţi o regulă de rescriere a.î. R să devină confluent
- ştergeţi o regulă de rescriere a.î. R să devină confluent

Teorema

(S, Σ) signatură, X mulţime de variabile,
E mulţime de ecuaţii necondiţionate,
R_E sistemul de rescriere determinat de E,
$\rightarrow_E \subseteq T_\Sigma(X) \times T_\Sigma(X)$ relaţia de rescriere
t, $t' \in T_\Sigma(X)_s$

Teoremă. Dacă R_E este complet atunci sunt echivalente:

(1) $E \models (\forall X)t \doteq_s t'$

(2) $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$

(3) $t \stackrel{*}{\leftrightarrow}_E t'$

(4) $fn(t) = fn(t')$ (t şi t' au aceeaşi formă normală)

Logica ecuaţională şi rescrierea

- Terminarea unui sistem de rescriere este nedecidabilă.
- Pentru sisteme de rescriere particulare putem decide asupra terminării.
- Dacă E este o mulţime de ecuaţii a.î. R_E este un sistem de rescriere complet atunci deducţia ecuaţională $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t'$ este decidabilă:
  - $t \xrightarrow{*} fn(t)$
  - $t' \xrightarrow{*} fn(t')$
  - $E \vdash (\forall X)t \doteq_s t' \Leftrightarrow fn(t) = fn(t')$
- Pentru sisteme de rescriere noetheriene, confluenţa este decidabilă.