9 Noţiuni de teoria reînoirii

Modelele de teoria fiabilităţii işi propun să studieze şi evalueze calitatea sistemelor in funcţie de modul lor de funcţionare. Fiabilitatea este deci un indicator de calitate. Teoria reînoirii işi propune să determine *ce trebuie* făcut ca un sistem să fie menţinut in stare de bună funţionare sau să determine când vor fi inlocuite componentele care se defectează, sau când trebuie înlocuit intregul sistem. Modelele de teoria reînoirii sunt de mai multe tipuri şi anume:

1. Reînoirea/înlocuirea la cădere;
2. Reînoirea/înlocuirea după vârstă;
3. Reînoirea/înlocuirea cu reparare;
4. Inlocuirea la depreciere.

In acest capitol vom prezenta câteva modele de teoria reînoirii.

9.1 Reînoirea la cădere

Se presupune că sistemul,sau componente ale sale, se înlocuiesc atunci când ele cad. Să presupunem că durata aleatoare X de funcţionare până la cădere a componentei sau sistemului are funcţia de reparrtiţie $F(x)$. *Viaţa* sistemului evoluează in timp astfel: siatemul este pus in funcţiune la momentul $t = 0$; după o perioadă de timp X_1 componenta cade, este înlocuită instantaneu si sistemul funcţioneaza o perioadă de timp X_2 şi a.m.d. Pe un interval de timp $(0, t)$ vor avea loc un număr aleator de înlocuiri $N(t)$. Duratele de funcţionare $\{X_n\}_{n\geq 1}$ sunt deci variabile aleatoare presupuse independente şi identic repartizate având funcţia de repartiţie $F(t)$. Dacă $F(t)$ este cunoscut, atunci se pune problema determinării repartiţiei lui $N(t)$, deoarece acesta reprezintă numărul de înlocuiri (piese/componente de schimb!) necesare pentru ca sistemul să funcţioneze pe $(0, t)$. Mărimea $M(t) = E[N(t)]$ este deci *numărul mediu de înlocuiri* pe $(0, t)$. Să decsriem acum mai precis matematic cele prezentate anterior.

Definiţia 9.1.*Procesul stochastic* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *pentru care* $X_i, i \geq 1$ *sunt variabile aleatoare independente şi identic repartizate având funcţia de repartiţie* $F(t) \geq 0, t \geq 0, (F(t) = 0 \; cand \; t < 0)$ *se numeşte proces elementar de reînoire, sau simplu, proces de reînoire. Procesul stochastic* $N(t)$ *care reprezintă numărul de înlocuiri determinate pe* $(0, t)$ *de procesul de reînoire* $\{X_n\}_{n\geq 1}$ *se numeşte proces numărabil de reînoire. Mărimea* $N(t)$ *se mai numeşte variabilă de reînoire, iar valoarea sa medie* $M(t) = E[N(t)]$ *se numeşte funcţie de reînoire.*

Se observă că $N(t)$ este determinat de $\{X_n\}_{n\geq 1}$ şi de aceea de multe ori denumirea *proces de reînoire* desemnează pe oricare din ele.

Să mai observăm că $N(t)=n$ dacă este satisfă relaţia

$$S_n \leq t < S_{n+1}, \ \ unde \ \ S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i. \tag{9.1}$$

Fiind date două funcţii de repartiţie $F(x), G(x)$ ce corepund variabilelor aleatoare independente X, Y, se ştie că funcţia de repartiţie $H(z)$ a sumei $Z = X + Y$ este produsul de convoluţie al funcţiilor F şi G, adică

$$H(z) = \int_{-\infty}^{\infty} F(z-y)dG(y). \tag{9.2}$$

Dacă X, Y sunt durate in funţionare (adică sunt pozitive) atunci

$$H(z) = \int_{0}^{z} F(z-y)dG(y) \tag{9.2$'$}$$

iar dacă F, G admit respectiv densităţie de repartiţie f, g atunci densitatea $h(z)$ a lui Z este

$$h(z) = \int_{0}^{z} f(z-y)g(y)dy. \tag{9.2”}$$

In cele ce urmează vom nota $F^{(n)}(x)$ produsul de convoluţie al lui F cu el insuşi de n ori, adică

$$F^{(n)}(x) = (F * F * ... * F)(x), \ \ F^{(1)}(x) = F(x) \tag{9.3}$$

şi notăm

$$F^{(0)}(x) = \begin{cases} 1, & daca \ \ x \geq 0 \\ 0 & daca \ \ x < 0, \end{cases} \quad (F^{(0)} * F^{(1)})(x) = F^{(1)}(x). \tag{9.3$'$}$$

Funcţia $F^{(0)}(x)$ se mai numeşte *funcţia treaptă* sau *funcţia lui Heaviside.*

Propoziţia 9.1. *Cu notaţiile de mai sus are loc formula*

$$P[N(t) = n] = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t). \tag{9.4}$$

Demonstraţie. Considerăm evenimentele aleatoare

$$A = \{S_n \leq t\}, \quad B = \{S_{n+1} \leq t\}, \ \ B \subset A.$$

De aici rezultă

$$P[N(t) = n] = P[S_n \leq t, \ \ S_{n+1} > t] =$$

$$= P(A \backslash B) = P(A) - P(B) = F^{(n)}(t) - F^{(n+1)}(t)$$

şi propoziţia este demonstrată.

Observaţii. **1.** Din propoziţia 9.1 rezultă că

$$P[N(t) \geq n] = F^{(n)}(t). \tag{9.4'}$$

2. Dacă F este IFR cu media $\mu_1 = \int_0^\infty x dF(x)$, atunci conform teoremei 8.3, pentru $t < \mu_1$ avem $F(t) < 1 - e^{-\frac{t}{\mu_1}}$ de unde

$$P[N(t) \geq n] = F^{(n)}(t) \leq 1 - \sum_{i=1}^{n} \frac{(\frac{t}{\mu_1})^i}{i!} e^{-\frac{t}{\mu_1}}. \tag{9.4"}$$

Formula (9.4") se poate demonstra şi ţinând seama de faptul (cunoscut din Cap 1) că dacă $X_i, i \geq 1$ au repartiţii exponenţiale de parametru $\lambda = \frac{1}{\mu_1}$ şi sunt independente, atunţ $N(t)$ este PPO deci repartiţia sa este

$$P[N(t) = n] = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}.$$

Teporema 9.1. *Funcţia de reînoire $M(t) = E[N(t)]$ satisface următoarea ecuaţie integrală*

$$M(t) = \int_0^t [1 + M(t-x)] dF(x). \tag{9.5}$$

Această ecuaţie se numeşte ecuaţia reînoirii.

Demonstraţie. Conform propoziţie 9.1 avem

$$M(t) = \sum_{i=1}^{\infty} kP[N(t) = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k[F^{(k)}(t) - F^{(k+1)}(t)] =$$

$$= F^{(1)}(t) - F^{(2)}(t) + 2F^{(2)}(t) - 2F^{(3)}(t) + ... = \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t). \tag{9.5'}$$

Deoarece $F^{(k)}(t)$ este produs de convoluţie avem

$$F^{(k}(t) = \int_0^t F^{(k-1)}(t-x) dF(x) = (F^{(k-1)} * F)(x),$$

de unde

$$M(t) = F(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \int_0^t F^{(k)}(t-x) dF(x) =$$

$$= \int_0^t [1 + \sum_{k=1}^{\infty} F^{(k)}(t-x)]dF(x).$$

Tinând seama de (9.5') rezultă ecuaţioa reînoirii (9.5).

Ecuaţia (9.5) este o ecuaţie integrală de tip Voltera şi ea se mai numeşte *Ecuaţia fundamentală a reînoirii;* funcţia necunoscută este $M(t)$. O problemă importantă este deci rezolvarea ecuaţiei reînoirii. Rezolvarea acestei ecuaţii se realizează ceva mai uşor când $F(t)$ admite densitate de repartiţie $f(t)$.

In acest caz există şi *densitatea de reînoire*

$$m(t) = \frac{dM(t)}{dt}.$$

Dacă $f^{(k)}(t)$ este produsul de convoluţie al densităţii de repartiţie al lui f cu el însuşi de k ori, atunci evident

$$f^{(k)}(t) = \int_0^t f^{(k-1)}(t-x)f(x)dx, \quad m(t) = \int_0^t [1 + m(t-x)]f(x)dx. \quad (9.6)$$

Ecuaţia (9.6) satisfăcută de $m(t)$ se numeşte *ecuaţia densităţii de reînoire.* Dacă se cunoaţe $m(t)$, atunci funcţia de reînoire $M(t)$ se calculează cu formula

$$M(t) = \int_0^t m(u)du. \quad (9.6')$$

Pentru rezolvarea ecuaţiei reînoirii/densităţii de reînoire se poate proceda fie numeric, fie folosind *transformata Laplace.*

Pentru **a rezolva numeric** ecuaţia densităţii de reînoire se porneşte de la o *aproximantă* iniţială $m_0(t)$, $t \in [0, t]$. Această aproximantă este un tabel de forma

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & ... & x_p \\ m_{01} & m_{02} & ... & m_{0p} \end{pmatrix}, \ p \in \mathcal{N}^+.$$

In tabel sunt deci valorile lui $m_0(t)$ date pe o reţea de puncte $0 = x_1 < x_2 < ... < x_p = t$. Ecuaţia (9.6) ne conduce la formula iterativă

$$m_{i+1}(t) = \int_0^t [1 + m_i(t-x)]f_(x)dx, \ \ i \geq 0 \quad (9.6")$$

care se calculează numeric folosind formule cunoscute de cuadratură. Dându-se o eroare $\epsilon > 0$, suficient de mică soluţia numerică este acea aproximantă $m_i(t)$ pentru care $sup_t\|m_{i+1}(t) - m_i(t)\| \leq \epsilon$. Desigur, toate aproximantele $m_i(t)$ se calculează in punctele grilei alese $x_1, x_2, ..., x_p$. Din valorile densităţii de reînoire se deduc apoi prin integrare valorile numerice ale funcţiei de reînoire, folosind (9.6) in care integrarea se face numeric.

Desigur, valorile numerice ale funcţiei de reînoire $M(t)$ se pot deduce prin acelaş principiu iterativ, discretizând in prealabil integrala Stieltjes din (9.5).

Rezolvarea ecuaţiei densităţii de reînoire folosind transformata Laplace. Vom defini mai intâi această transformată pentru funcţii care au suportul pe $(0, \infty)$.

Definiţia 9.2. *Fiind dată funcţia $g(x)$, cu suportul $(0, \infty)$ se numeşte transformata Laplace a sa, când aceasta există, funcţia $g^*(s)$ definită pe mulţimea numerelor complexe $\mathcal{C}$ dată de relaţia*

$$g^*(s) = \int_0^\infty e^{-st} g(t)dt, \ s = x + iy, \ \ s \in \mathcal{C}, i = \sqrt{-1}. \tag{9.7}$$

Funcţia $g(t)$ se numeşte *originalul* şi funcţia $g^*(s)$ se numeşte *transformata.* Pentru aflarea originalului se folosesc uneori tabele. Următorul tabel conţine originalele şi transformatele unor funcţii obişnuite, densităţi de repartiţie.

Tabel cu transformate Laplace

	$g(t)$	$g^*(s)$
1.	$\lambda e^{-\lambda t}, \lambda > 0 \ t > 0$	$\frac{\lambda}{\lambda+s}$
2.	$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}, \ \ m >>> 3\sigma \ \sigma > 0$	$e^{-ms+\frac{s^2\sigma^2}{2}}$
3.	$\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} t^{\alpha-1} e^{-\beta t} \ t > 0, \ \alpha, \beta > 0$	$\frac{\beta^\alpha}{(s+\beta)^\alpha}$
4.	$\lambda, \ t > 0, \ \lambda > 0$	$\frac{\lambda}{s}$
5.	$t^n e^{-\lambda t}, t > 0, \ n \in \mathcal{N}^+$	$\frac{n!}{(\lambda+s)^{n+1}}$

Din linia 1. se vrede că originalul funcţiei $g^*(s) = \frac{\lambda}{\lambda+s}$ este $g(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ iar din linia 4., originalul funcţiei $g^*(s) = \frac{\lambda}{s}$ este $g(t) = \lambda = const.$

Observaţie. *Orice funcţie $f(t)$, $t > 0$ care are proprietatea că $|f(t)| \leq ce^{-at}, \ a > 0, \ c > 0$ are transformată Laplace pentru $x = Re(s) > a$.*

Intr-adevăr, aceasta rezultă din relaţiile

$$|f^*(s)| = |\int_0^\infty e^{-st} f(t)dt| \leq \int_0^\infty |f(t)e^{-(x+iy)t}|dt \leq$$

$$\leq \int_0^\infty ce^{at}e^{-xt}|cos(yt + isin(yt)|dt = \int_0^\infty ce^{(a-x)t}dt < \infty, \ x = Re(s) > a.$$

S-a folosit şi faptul că $|cos(yt) + i.sin(yt)| = 1$.

Propoziţia 9.2. *Transformata Laplace are următoarele proprietăţi*

$$(c_1 f_1 + c_2 f_2)^*(s) = c_1 f_1^*(s) + c_2 f_2^*(s), \ (liniaritatea); \tag{9.8}$$

$$(f_1 * f_2)^*(s) = f_1^*(s) f_2^*(s). \tag{9.9}$$

Demonstraţie. Demonstraţia liniarităţii este evidentă. Formula (9.9), care spune că transformata Laplace a produsului de convoluţie a două funcţii este produsul transformatelor Laplace al celor două funcţii, se demonstreaza astfel

$$(f_1 * f_2)^*(s) = \int_0^\infty e^{-st}[\int_0^t f_1(t-x)f_2(x)dx]dt =$$

$$= \int_0^\infty \int_0^t e^{-s(t-x)} f_1(t-x)dt \int_0^\infty e^{-sx} f_2(x)dx = f_1^*(s) f_2^*(s).$$

Proprietăţile transformatei Laplace ne permit rezolvarea ecuaţiei densităţii de reînoire. Astfel, dacă aplicăm transformata Laplace ecuaţiei densităţii de reînoire din (9.6) avem

$$m^*(s) = f^*(s) + m^*(s) f^*(s)$$

de unde se obţine transformata Laplace

$$m^*(s) = \frac{f^*(s)}{1 - f^*(s)}. \tag{9.6'}$$

Deci pentru o funcţie $f(t)$ dată, se calculează $m^*(s)$ iar originalul acestei funcţii transformate este soluţia ecuaţiei densităţii de reînoire.

Aplicaţie. Presupunem că $f(t) = \lambda e^{-\lambda t} I_{(0,\infty)}(t)$ adică durata in funcţionare are repartiţie exponenţială de parametru λ. Atunci

$$f^*(s) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} e^{-sx} dx = \int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+s)x} dx = \frac{\lambda}{\lambda + s}.$$

Deci conform (9.6')

$$m^*(s) = \frac{\frac{\lambda}{\lambda+s}}{1 - \frac{\lambda}{\lambda+s}} = \frac{\lambda}{s}.$$

Din tabelul de mai sus rezultă că originalul funcţiei $m^*(s) = \frac{\lambda}{s}$ este $m(t) = \lambda = \frac{1}{\mu_1} = const$. Funcţia de reînoire este deci

$$M(t) = \int_0^t \frac{1}{\mu_1} dx = \frac{t}{\mu_1}$$

şi de aici rezultă că

$$M(t+h) - M(t) = \frac{h}{\mu_1}, \ \ h > 0. \tag{9.10}$$

Formula (9.10) se interpretează astfel: in cazul repartiţiei exponenţiale, mumărul mediu de căderi ce au loc pe un interval de timp de lungime h este egal cu lungimea intervalului inmulţită cu rata căderilor $\frac{1}{\mu_1}$.

Se arată [4] că pentru o clasă largă de repartiţii ale căderilor are loc relaţia

$$\lim_{t\to\infty}[M(t+h)-M(t)] = \frac{h}{\mu_1}, \tag{9.10'}$$

ceea ce inseamnă că asimptotic, sistemele de fiabilitate se comportă ca şi cum duratele in funţionare ar fi repartizate exponenţial. Acest fapt evidenţiază incă odată importanţa repartiţiei exponenţiale in teoria fiabilităţii şi reînoirii.

In continuarea acestei secţiuni vom demonstra câteva proprietăţi ale funcţiei de reînoire $M(t)$ şi ale variabilei de reînoire $N(t)$.

Teorema 9.2. *Dacă funcţia F are media μ_1 atunci are loc convergenţa aproape sigură*

$$\frac{N(t}{t} \overset{a.s.}{\to} \frac{1}{\mu_1}. \tag{9.11}$$

Demonstraţie. Să observăm că

$$\frac{S_{N(t)}}{N(t)} \leq \frac{t}{N(t)} < \frac{S_{N(t)+1}}{[N(t)+1]\frac{N(t)}{N(t)+1}}.$$

Conform *legii numerelor mari,* $\frac{S_{N(t)}}{t} \overset{a.s.}{\to} \mu_1$, şi trecând la limită in relaţia precedentă deducem $\frac{N(t)}{t} \overset{a.s.}{\to} \frac{1}{\mu_1}$. Teorema este demonstrată.

Teorema 9.3. *Dacă F are media μ_1 atunci*

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t} = \frac{1}{\mu_1}. \tag{9.12}$$

Demonstraţie. Mai intâi se observă că

$$E[S_{N(t)+1}] = \mu_1[M(t)+1]. \tag{9.12'}$$

De asemenea, din definiţia lui $N(t)$ avem

$$E[S_{N(t)+1}] \geq t \tag{9.13}$$

deci

$$M(t) \geq \frac{t}{\mu_1} - 1,$$

de unde rezultă că

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\geq\frac{1}{\mu_1.}\tag{9.13'}$$

Pentru a demonstra teorema trebuie să demonstrăm inegalitatea contrară inegalităţii (9.13'). Să considerăm *procesul de reînoire cenzurat* definit pentru un $c>0$ astfel: $X_i^{(c)}=min\{X_i,c\}$ şi fie $N^{(c)}(t)$ procesul numărabil de reinoire asociat lui $\{X_i^{(c)}\}_{i\geq 1}$. Atunci $N^{(c)}(t)\geq N(t),\ M^{(c)}(t)=E[N^{(c)}(t)]$ şi $M^{(c)}(t)\geq M(t)$. Notând $\mu_1^{(c)}=E[X_i^{(c)}]$ are loc pentru acesta relatia asemănătoate relaţiei (9.12') de unde rezultă că

$$\frac{M^{(c)}(t)+1}{t}=\frac{1}{\mu_1^{(c)}}\frac{E[S_{n^{(c)}(t)+1}]}{t}\leq\frac{1}{\mu_1^{(c)}}[1+\frac{c}{t}].\tag{9.13''}$$

Deoarece $\frac{M(t)}{t}\leq\frac{M^{(c)}(t)}{t}$ dacă ţinem seama de (9.13") si trecem la limită, rezultă

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\leq\lim_{t\to\infty}\frac{M^{(c)}(t)}{t}=\frac{1}{\mu_1^{(c)}}.$$

Dar $\lim\limits_{c\to\infty}\mu_1^{(c)}=\mu_1$ de unde rezultă

$$\lim_{t\to\infty}\frac{M(t)}{t}\leq\frac{1}{\mu_1}.$$

Teorema este deci demonstrată.

Alte proprietăţi ale transformatei Laplace. Aceste proprietăţi, pe care le vom enumera mai jos, sunt utile in rezolvarea ecuaţiilor de reînoire.

Teorema 9.4. (1). *Dacă*

$$f_1(t)=\begin{cases}f(t-\tau), & daca\ \ t\geq\tau\\ 0, & daca\ \ t<\tau\end{cases}$$

atunci

$$f_1^*(z)=e^{-sz}f^*(z),\ z\in clc.$$

(2). *Dacă f admite transformată Laplace, atunci*

$$\int_0^\infty e^{-zt}f(t)e^{-\lambda t}dt=f^*(\lambda+z)$$

(3). *Dacă* $f^{(n)}(t)=\frac{d^nf(t)}{dt^n}$ *atunci*

$$\int_0^\infty f^{(n)}(t)e^{-zt}dt=z^nf^*(z)-z_{n-1}f(0)-z^{n-2}f'(0)-...-f^{(n-1)}(0).$$

(4). $\lim\limits_{t\to\infty} zf^*(z) = f(0)$.
(5). *Dcaă* $\lim\limits_{t\to\infty} f(t) = f(\infty)$ *atunci* $\lim\limits_{z\to 0} zf^*(z)) = f(\infty)$.

Originalul unei transformate Laplace se poate calcula folosind următorea *formulă de inversiune*

$$f(t) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i}^{c+i} f^*(z)e^{zt}dz,\ z \in \mathcal{C}$$

unde integrala se calculează in planul complex pe dreapta $Re(z) = c > a$, unde a are semnificaţia din observaţia anterioară propoziţiei 9.2.

Calculul funcţiei original se uşurează când transformata Laplace $f^*(z), z \in \mathcal{C}$ este o funcţie raţională, adică un raport de forma

$$f^*(z) = R(z) = \frac{P(z)}{Q(z)},\ P, Q - polinoame,\ gr(P) < gr(Q) = n. \tag{9.15}$$

Să notăm z_k rădăcinile lui $Q(z)$ (adică z_k sunt *polii* fracţiei $R(z)$) şi să presupunem că z_k este rădăcină cu gradul de multiplicitate $s_k, s_k \in \mathcal{N}^+$. Atunci fracţia $R(z)$ se descompune in fracţii simple de forma

$$R(z) = \sum_{k\geq 1}\left[\frac{A_{k1}}{z - z_k} + \frac{A_{k2}}{(z - z_k)^2} + ... + \frac{A_{ks_k}}{(z - z_k)^{s_k}}\right]. \tag{9.15'}$$

Aplicând formula de inversiune în (9.15') se deduce, prin calcule laborioase, că originalul lui $f^*(z) = R(z)$ este

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c-i}^{c+i} R(z)dz =$$

$$= \sum_{k\geq 1}\left[A_{k1} + \frac{A_{k2}}{1!}t + ... + \frac{A_{ks_k}}{(s_k - 1)!}t^{s_k - 1}\right]e^{z_k t} = \sum_{k\geq 1} P_k(t)e^{z_k t} \tag{9.16}$$

unde $P_k(t)$ sunt polinoame cu $gr(P_k) = s_k - 1$.

In cazul când rădăcinile z_k sunt simple, $1 \leq k \leq n$ atunci se observă cu uşurinţă că

$$f^*(z) = R(z) = \sum_{k=1}^{n}\frac{A_k}{z - z_k},\ A_k = \frac{P(z_k)}{Q'(z_k)} \tag{9.17}$$

iar funcţia original este

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{z_k t}. \tag{9.17'}$$

Dacă Z_k este rădăcină complexă, $z_k = \alpha_k + i\beta_k$, atunci

$$e^{z_k t} = e^{\alpha_k t}(cos(\beta_k t) + isin(\beta_k t)). \tag{9.18}$$

Formulele (9.17') şi (9.18) stabilesc deci in final forma funcţiei $f(t)$. Să mai observăm că echivalenta intre (9.17') şi (9.17) se poate deduce dacă aplicăm lui (9.17') transformata Laplace, care conduce direct la (9.17).

Aplicaţie. Fie transformata Laplace de forma

$$f^*(z) = \frac{1}{z(z+1)},$$

care are polii $z_1 = 0, z_2 = -1$. Descompusă in fracţii simple transformata devine

$$f^*(z) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}.$$

Aplicând (9.17') deducem originalul $f(t) = 1 - e^{-t}$.

9.2 Inlocuirea după vârstă

Multe sisteme reale pot fi periculoase dacă se defectează; de exemplu sistemul de aprovizionare cu energie electrică poate cauza când cade, pagube mari altor sisteme care lucrează cu energie electrică; pot exista nenumărate alte exemple legate alimentarea cu apă, ecologie, etc. Deci este necesar ca astfel de sisteme să fie înlocuite *inainte* ca ea să cadă, adică inlocuirea se realizează după o perioadă fixată T (adică la *vârsta* T) sau când sistemul a căzut. Acest mod de înlocuire se numeşte *după vârstă.* (Se observă că duratele in funcţionare sunt cenzurate de T la dreapta, cenzură de tipul I). Desigur şi aici ne interesează numărul mediu de înlocuiri pe un interval de timp $(0, t)$, $t > T$.

Propoziţia 9.3 *Probabilitatea* $\overline{S}_T(t)$ *ca sistemul să nu cadă inainte de momemtul t (adică fiabilitatea la momentul t), când înlocuirea se face după vârstă, este*

$$\overline{S}_T(t) = [\overline{F}(T)]^n \overline{F}(t - nT), \tag{9.19}$$

unde F *este funcţia de repartiţie a căderilor,* $\overline{F}(t) = 1 - F(t)$, $nT \leq t < (n+1)T$.

Demonstraţie. Conform regulei de reînoire, se fac n înlocuiri pe $[0, t)$ (fără ca sistemul să fi căzut!) şi sistemul nu a căzut nici pe intervalul $(t, (n+1)T), T < t$. Desigur, înlocuirile sunt independente şi de aici rezultă formula (9,19).

Acum putem stabili

Teorema 9.5. *Pentru* $T_1 < T_2 < t$ *avem* $\overline{S}_{T_1}(t) \geq \overline{S}_{T_2}(t)$ *dacă şi numai dacă* F *eate IFR şi are densitate.*

Demonstraţie. Cu alte cuvinte vrem să arătăm că $\overline{S}_T(t)$ este descresătoare in T. Să derivăm (9.19) in raport cu T. Avem

$$\overline{S'}_T(t) = -n[\overline{F}(T)]^{n-1} f(T)\overline{F}(t-nT) + n[\overline{F}(T)]^n f(t-nT) =$$

$$= n[\overline{F}(T)]^{n-1}[-f(T)\overline{F}(t-nT) + \overline{F}(T)f(n-nT)]. \tag{9.19'}$$

Deoarece F este IFR şi $t - nT < T$ avem

$$\frac{f(t-nT)}{\overline{F}(t-nT)} < \frac{f(T)}{\overline{F}(T)}. \tag{9.19"}$$

Tinînd seama de (9.19") in (9.19') rezultă că $\overline{S'}_T(t) < 0$, adică derivata in raport cu T a lui $\overline{S}_T(t)$ este negativă şi deci teorema este demonstrată.

Se observă că dacă $T = \infty$ atunci $\overline{S}_\infty(t) = \overline{F}(t)$, (pentrucă înlocuirea se face la cădere!). Din teorema 9.5 rezultă deci că dacă $T < \infty$ atunci

$$\overline{S}_T(t) \geq \overline{F}(t) \tag{9.20}$$

ceea ce inseamnă că înlocuirea după vârstă măreşte probabilitatea de supravieţuire, adică această *inlocuire după vârstă este mai bună.*

Să mai observăm că valoarea medie a intervalului de timp de înlocuire *până la prima cădere* este

$$E^1(T) = \int_0^T \frac{xdF(x)}{F(T)} = \frac{\int_0^T [1-F(x)]dx}{F(T)} = \frac{\int_0^T \overline{F}(x)dx}{F(T)}. \tag{9.21}$$

Dar $E^1(T)$ este timpul mediu de funţionare până la prima cădere care poate fi calculat si cu formula

$$E^1(T) = \int_0^T \overline{S}_T(x)dx$$

iar conform teoremei 9.5, pentru $T_1 < T_2$ avem $\overline{S}_{T_1}(t) \geq \overline{S}_{T_2}(t)$ de unde se deduce că $E^1(T_1) \geq E^1(T_2)$, adică media $E^1(T)$ este descrescătoare in T. In particular, $E^1(T) \geq \mu_1,\ T < \infty$ unde μ_1 este media lui F.

Teorema 9.6. *Dacă* F *este IFR cu densitatea* f *şi media* μ_1, *atunci*

$$\mu_1 \leq E^1(T) \leq \frac{1}{f(0)} \tag{9.22}$$

$$E^1(T) \geq \frac{p}{-log(1-p)},\ T \leq \xi_p \tag{9.22'}$$

unde ξ_p este $p-$cuantila lui F adică $F(\xi_p) = p$.

Demonstraţie. Inegalitatea (9.22) din stânga este cunoscută, conform celor menţionate anterior. Inegalitatea (9.22) din dreapta se demonstrează astfel: din ipoteza ca F este IFR rezultă

$$h(0) = \frac{f(0)}{\overline{F}(0)} \leq \frac{f(x)}{\overline{F}(x)},\ sau\ \overline{F}(x) \leq \frac{f(x)}{f(0)}.$$

De aici rezultă că

$$E^1(T) = \frac{\int_0^T \overline{F}(x)dx}{\overline{F}(T)} \leq \frac{\int_0^T f(x)dx}{\overline{F}(T)f(0)} = \frac{1}{f(0)}.$$

(In relaţiile de mai sus s-au folosit formulele $\overline{F}(0) = 1$ şi $F(T) = \int_0^T f(x)dx$). Deci relaţia (9.22) este demonstrată.

Pentru a demonstra (9.22') să observăm că din $x \leq \xi_p$, conform lemei 8.2 avem $\overline{F}(x) \geq \left[\overline{F}(\xi_p)\right]^{\frac{x}{\xi_p}}$

De aici avem

$$\int_0^T \overline{F}(x)dx \geq \frac{\xi_p[1 - F(\xi_p)]^{\frac{T}{\xi_p}}}{-log\overline{F}(\xi_p)}$$

şi

$$F(t) \leq 1 - [\overline{F}(\xi_p)]^{\frac{T}{\xi_p}}$$

deci

$$E^1(T) = \frac{\int_0^\infty \overline{F}(x)dx}{F(T)} \geq \frac{\xi_p}{-log\overline{F}(\xi_p)} = \frac{\xi_p}{-log(1-p)}.$$

Inegalitatea (9.22') este demonstrată.

Aplicaţie. Să considerăm un sistem formet din n componente independente fiecare având funcţia de repartiţie a căderilor $F(t)$ şi să notăm cu $G_n(t)$ funcţia de repartiţie a duratei in funţionare a sistemului (funcţia de repartiţie a căderilor pentru acest sistem). Să considerăm acum timpul mediu de funcţionare $E_n(T)$ până la prima cădere a sistemului când inlocuirea se face după vârsata T adică

$$G_n(T) = \frac{\int_0^T \overline{G}_n(x)dx}{G_n(T)}.$$

Dacă sistemul este conectat in serie atunci se ştie că

$$G_n(t) = 1 - [\overline{F}(t)]^n.$$

Să presupunem că F este IFR. Să arătăm că

$$E_n(\infty) \geq \frac{\mu_1}{n}. \qquad (9.23).$$

Intr-adevăr, să observăm că

$$E_n(\infty) = \int_0^\infty \overline{G}_n(x)dx = \int_0^\infty [\overline{F}(x)]^n dx \geq \int_0^\infty [\overline{G}(x)]^n dx$$

unde

$$\overline{G}(x) = e^{-\frac{x}{\mu_1}}$$

este funcţia de fiabilitate exponenţială care are media μ_1 ca şi F. Deci

$$\int_0^\infty [\overline{G}(x)]^n dx = \int_0^\infty e^{-\frac{nx}{\mu_1}} dx = \frac{\mu_1}{n}.$$

Dar $E_n(T)$ este descrescătoare in T de unde

$$E_n(T) \geq E_n(\infty) \geq \frac{\mu_1}{n}$$

adică (9.23) este demonstrată.

Aici se vede incă odată că repartiţia exponenţială joacă un rol important in teoria fiabilităţii şi reînoirii.

9.3 Inlocuirea cu reparare

In secţiunile 9.1 şi 9.2 s-a presupus că înlocuirea se face instantaneu. Aici presupunem că operatţia de înlocuire are o duartă aleatoare de repartiţie dată. Deci *viaţa* unui sistem incepe cu o durată de funcţionare X_1 urmată de o durată de reparaţie (înlocuire) Y_1, urmată de o durată de funcţionere X_2 urmată de o durată de înlocuire Y_2 şi a.m.d. Presupunem că $\{X_i\}_{i\geq 1}, \{Y_i\}_{i\geq 1}$ sunt independente şi identic repartizate având respectiv funcţiile de repartiţie $F(x), G(x)$. Deci $\{X_i\}, \{Y_i\}$ sunt două procese de reinoire *intercalate.* Viaţa sistemului incepe la un moment iniţial (prin convenţie momemtul $t = 0$) cu o durată in funcţionare X sau o durată de reparaţie Y. Ne interesează să studiem variabilele de reînoire de forma $N_{ij}(t)$ care reprezintă numărul de treceri din starea i la momentul zero in starea j la momentul t, stările putând fi $i = 0$-stare de cădere (reparare), $i = 1$-stare de funcţionare.

Să observăm că pentru două valori consecutive X_i, Y_i (care definesc un ciclu din viaţa sistemului) putem considera funcţia de repartiţie $H(x)$ a duratei $Z_i = X_i + Y_i$ a ciclului care este dată de produsul de convoluţie

$$H(x) = \int_0^x F(x-y)dg(y) = \int_0^x G(x-y)dF(y). \qquad (9.24)$$

Asemănător cazului reînoirii la cădere, şi in cazul inloocuirii cu reparare suntem interesaţi să cunoaştem $M_{ij}(t) = E[N_{ij}(t),\ i,j = 0,1$ - numărul mediu de inlocuiri pe intervalul de timp $(0,t)$ când sistemul evoluează din starea i la momentul $t = 0$ in starea j la momentul $t, t > 0$. Funcţiile $M_{ij}(t)$ sunt *funcţii de reînoire* asemănătoare funcţiei $M(t)$ introdusă in secţiunea 9.1. Pentru aceste funcţii este valabilă

Teorema 9.6 *Funcţiile $M_{ij}(t)$ satisfac următoarele ecuaţii integrale*

$$M_{11}(t) = \int_0^t M_{01}(t-x)dF(x) \tag{9.25}$$

$$M_{01}(t) = \int_0^t [1 + M_{11}(t-x)]dG(x) \tag{9.26}$$

$$M_{10}(t) = \int_0^t [1 + M_{00}(t-x)]dF(x) \tag{9.27}$$

$$M_{00}(t) = \int_0^t M_{10}(t-x)dG(x). \tag{9.28}$$

Demonstraţie. Vom demonstra ecuaţia (9.27), celelalte demonstrându-se in mod asemănător. Se observă că in acest caz siatemul se află in starea 1 la momentul $t = 0$ şi ajunge in starea 0 la momentul t. Să considerăm deci suma corespunzătoare

$$S_{X,k}(t) = X + (Y_1 + X_1) + (Y_2 + X_2) + ... + (Y_k + X_k).$$

Se observă (ca şi in demonstraţia ecuaţiei reînoirii) că

$$P[N(t) = k] = P[S_{X(k-1)} \leq t] - P[S_{X,k} < t] =$$

$$= [F * H^{(k-1)}](t) - [F * H^{(k)}](t),$$

$$P[N_{10}(t) = 0] = 1 - F(t).$$

unde $H = F * G$ este produsul de convoluţie. Din formulele precedente rezultă

$$M_{10}(t) = \sum_{k\geq 1} kP[N_{10}(t) = k] =$$

$$= [F*H^{(0)}](t) - [F*H^{(1)}](t) + 2[F*H^{(1)}](t)] + ... + k[F*H^{(k-1)}](t) - [F^* H^{(k)}](t)] + ... =$$

$$= [F * (1 + H^{(0)} + H^{(1)} + ...)](t).$$

Dar $M_{00}(t) = [H^{(0)} + H^{(1)} + ...](t)$ de unde

$$M_{01}(t) = [F * (1 + M_{00})](t)$$

care este tocmai ecuaţia (9.27).

Celelalte formule (9.25),(9.26),(9.28) se demonstrează in mod asemănător.Se remarcă o simetrie in formulele (9.25)-(9.28).

Ecuaţiile (9.25)-(9.28) reprezintă două sisteme de ecuaţii integrale ce se rezolvă ca şi ecuaţia de reinoire. Să vedem cum se foloseşte transformata Laplace pentru rezolvarea acestor sisteme de ecuaţii. Aplicând transformata Laplace in relaţiile (9.25)-(9.28) se obţin relaţiile

$$M_{11}^*(z) = M_{01}^*(z)F^*(z) \tag{9.25'}$$

$$M_{01}^*(z) = G^*(z) + M_{11}^*(z) \tag{9.26'}$$

$$M_{10}^*(z) = G^*(z) + G^*(z)M_{00}^*(z) \tag{9.27'}$$

$$M_{00}^*(z) = G^*(z)M_{10}^*(z). \tag{9.28'}$$

Sistemul de ecuaţii (9.25'),(9.26') conduce la

$$M_{11}^*(z) = \frac{F^*(z)G^*(z)}{1 - F^*(z)G^*(z)} \tag{29}$$

$$M_{01}^*(z) = \frac{G^*(z)}{1 - F^*(z)G^*(z)} \tag{9.30}$$

iar sistemul de ecuaţii (9.26),(9.27) conduce la

$$M_{10}^*(z) = \frac{F^*(z)}{1 - F^*(z)G^*(z)} \tag{9.31}$$

$$M_{00}^*(z) = \frac{F^*(z)G^*(z)}{1 - F^*(z)G^*(z)}. \tag{9.32}$$

se observă că $M_{00}^*(z) = M_{11}^*(z)$ ceea ce era de aşteptat.

Originalele funcţiilor transformate $M_{ij}^*(z)$ sunt funcţiile de reînoire $M_{ij}(t)$.

Sistemul de fiabilitate la care ne referim este modelat ca un proces Markov cu două stau ari $i - 0, 1$. Să vedem cum se calculează probabilitatea $P_{ij}(t)$ ca sistemul să evolueze din starea i la momentul $t = 0$ in starea j la momentul t. Să observăm că

$$Z = N_{10}(t) - N_{11}(t) = \begin{cases} 1, \; daca\ sistemul\ este\ cazut\ la\ momentul\ t \\ 0, \; altfel \end{cases} \tag{9.33}$$

adică Z este o variabilă Bernoulli. Deci

$$P_{10}(t) = E[Z] = E[N_{10}(t) - N_{11}(t)] = M_{10}(t) - M_{11}(t), \qquad (9.33)$$

$$P_{11}(t) = 1 - P_{10}(t). \qquad ((9.34)$$

In mod asemănător se arată că

$$P_{01}(t) = M_{01}(t) - M_{00}(t), \quad P_{00}(t) = 1 - P_{01}(t). \tag{9.35}$$

Rezolvarea efectivă a ecuaţiilor de reinoire se va face calcullâmd densităţile de reinoire
$$m_{ij}(t) = M'_{ij}(t), \tag{9.36}$$
din care vor rezulta funcţiile de reînoire
$$M_{ij}(t) = \int_0^t m_{ij}(t). \tag{9.36'}$$
Ecuaţiile (9.25)-(9.28) se scriu uşor in termeni de densităţi de reînoire dacă inlocuim M_{ij} cu m_{ij}. Calculul funcţiilor de reînoire $M_{ij}(t)$ se realizează astfel: se determină mai intâi densităţile de reînoire $m_{ij}(t)$ şi apoi $M_{ij}(t)$ cu formulele (9.36').

Aplicaţie. Să presupunem că X_i au repartiţie exponenţială de parametru λ şi Y_i au repartiţie exponenţială de parametreu μ. Densităţile de reînoire $m_{ij}(t)$ se vor calcula cu formule asemănătoare formulelor (9.29)-(9.32). Notănd cu f, g densităţile exponenţiale de parametri respectiv λ, μ avem
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x), \;\; f^*(z) = \frac{\lambda}{\lambda + z} \tag{9.37}$$
$$g(x) = \mu e^{-\mu x} I_{(0,\infty)}(x), \;\; g^*(z) = \frac{\mu}{\mu + z}. \tag{9.37'}$$
Tinând seama de (9.29)-(9.32) avem
$$m^*_{11}(z) = \frac{\lambda\mu}{z(z+\lambda+\mu)}, \; m^*_{01}(z) = \frac{\mu(\lambda+z)}{z(z+\lambda+\mu)}. \tag{9.38}$$
$$m^*_{00}(z) = \frac{\lambda\mu}{z(z+\lambda+\mu)}, \;\; m^*_{10}(z) = \frac{\lambda(\mu+z)}{z(z+\lambda+\mu)}. \tag{9.38'}$$
Descompunerile in fracţii simple şi originalele corespunzătoare sunt
$$m^*_{11}(z) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}.\frac{1}{z} - \frac{\mu\lambda}{\lambda+\mu}.\frac{1}{z+\lambda+\mu}, \;\; m_{11}(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \tag{9.39}$$
$$m^*_{01}(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}.\frac{1}{z} + \frac{\mu^2}{\lambda+\mu}.\frac{1}{z+\lambda+\mu}, \;\; m_{01}(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\mu^2}{\lambda+\mu} e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{9.40}$$
$$m^*_{00}(z) = m^*_{11}(z), \;\; m_{00}(t) = m_{11}(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}) \tag{9.40'}$$
Din aceste relaţii rezultă
$$M_{11}(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu} t - \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} e^{-(\lambda+\mu)t}) + \frac{\lambda\mu}{(\lambda+\mu)^2} = M_{00}(t) \tag{9.41}$$

$$M_{01}(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}t + \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{9.42}$$

$$M_{10}(t) = \frac{\lambda\mu}{\lambda+\mu}t + \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2} - \frac{\lambda^2}{(\lambda+\mu)^2}e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{9.42'}$$

Acum putem calcula şi probabilităţile de trecere

$$P_{10}(t) = M_{10}(t) - M_{11}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \tag{9.43}$$

$$P_{11}(t) = 1 - P_{10}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu} + \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t} \tag{9.43'}$$

$$P_{01}(t) = M_{01}(t) - M_{00}(t) = \frac{\mu}{\lambda+\mu}\left(1 - e^{-(\lambda+\mu)t}\right) \tag{9.44}$$

$$P_{00}(t) = 1 - P_{01}(t) = \frac{\lambda}{\lambda+\mu} + \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-(\lambda+\mu)t}. \tag{9.44'}$$

Se observă că, abstracţie făcând de un termen exponenţial, $M_{ij}(t)$ sunt funcţii liniare de t ca şi in cazul exponenţial pentru ecuaţia de reînoire (secţiunea 9.4).

9.4 Inlocuirea la depreciere

In multe situaţii practice este nevoie să se facă inlocuirea ţinând seama de valoarea "la zi" a echipamentelor (in funcţie de stadiul lor de amortizare) şi de costrurile de intreţtinere a echipamentelor. Vom prezenta aici o clasă de modele deterministe [35].

Vom nota A_0 valoarea iniţială a achipamentului (valoarea de cumpărare când a fost pus in funcţiune). Valoarea sa după un anumit timp t este $A_0\varphi(t)$, $\varphi(0) = 1$, unde funcţia $\varphi(t)$, numită *funcţie de depreciere* este o funcţie subunitară, descrescătoare in t. (Deci valoarea $A_0\varphi(t)$ este valoarea amortizată a echipamentului la momemtul t). Fie $\psi(t)$, $\psi(0) = 0$, o funcţie crescătoere de t care descrie *costul cumulat al cheltuiellilor de intrteţinere pe intervalul* $(0, t)$. Atunci costul total al echipamentului la momentul t este

$$C(t) = A_0 - A_0\varphi(t) + \psi(t) \tag{9.45}$$

unde $A_0 - A_0\varphi(t) = A_0(1 - \varphi(t))$ este valoarea la zi a echipamentului (după amortizare). Se pune problema să determinăm *momentul optim* $t^* > 0$ *când trebuie inlocuit echipamentul,* cunoscându-se A_0 şi funcţiile $\varphi(t)$, $\psi(t)$.Mărimea t^* se numeşte *momentul optim de inlocuire al echipamentului.*

Observăm că *nu putem să minimizăm costul* $C(t)$ deoarece acesta este minim ($C = 0$) la momentul $t = 0$ ceea ce nu are sens. Putem insă utiliza ca *funcţie obiectiv* (de minimizat) funcţia

$$\gamma(t) = \frac{C(t)}{t} = \frac{1}{t}\left[A_0 - A_0\varphi(t) + \psi(t),\ t > 0\right] \tag{9.45'}$$

care reprezintă *costul pe unitatea de timp.*

Minimul funcţiei $\gamma(t)$ este atins in punctul t^* care satisface relaţia

$$\gamma'(t) = \left(\frac{C(t)}{t}\right)' = \frac{tC'(t) - C(t)}{t^2} = 0, \quad adica, \ \ C'(t) = \frac{C(t)}{t} \tag{9.46}$$

sau

$$A_0[1 - \varphi(t) + t\varphi'(t)] + \psi(t) - t\psi'(t) = 0. \tag{9.46'}$$

Dar punctul de minim t^* trebuie să satisfacă şi condiţia

$$t^{*2}\gamma\text{''}(t) = t^*C\text{''}(t^*) - 2t^*C'(t) + 2C(t) > 0. \tag{9.46''}$$

Fiecare pereche de funcţii particulare $\varphi(t)$, $\psi(t)$ defineşte un model pentru determinarea momentului optim de inlocuire. Vom considera câteva astfel de modele.

9.4.1. Fie

$$\varphi(t) = 1 - \frac{t}{\theta},\ \theta > 0,\ \ \psi(t) = kt,\ k > 0. \tag{9.47}$$

Deci

$$\gamma(t) = \frac{A_0}{\theta} + k = const.$$

De aici rezultă că dacă $\varphi(t)$ şi $\psi(t)$ sunt liniare (date de (9.47)) atunci costul este constant şi punctul de minim t^* al lui $\gamma(t)$ poate fi orice număr pozitiv şi deci acest model nu este interesant.

9.4.2. Fie

$$\varphi(t) = e^{-\lambda t},\ \lambda > 0,\ \ \psi(t) = kt,\ \ k > 0. \tag{9.48}$$

Atunci

$$\gamma(t) = \frac{1}{t}\left[A_0 - A_0\varphi(t)\right] + k,\ \ \lim_{t\to\infty}\gamma(t) = k = const$$

şi $\gamma(t)$ este descrescătoare, deci ea nu are un punct de minim t^* finit. Din punct de vedere practic rezultă că inlocuirea trebiue să se facă cât mai târziu (de ex, când se consideră că echipamentul este uzat *moral*).

9.4.3. Fie

$$\varphi(t) = e^{-\lambda t},\ \ \lambda > 0,\ \ \psi(t) = k_0(e^{\mu t} - 1),\ k_0 > 0,\ \mu > 0. \tag{9.49}$$

Deci
$$\gamma(t) = \frac{1}{t}\left[A_0(1-e^{-\lambda t}) + k_0(e^{\mu t}-1)\right].$$
Atunci rezultă că
$$\gamma'(t) = \frac{(A_0\lambda e^{-\lambda t} + k_0\mu e^{-\mu t})t - A_0(1-e^{-\lambda t}) + k_0(e^{\mu t}-1)}{t^2}$$
care se anulează când
$$A_0(\lambda t e^{-\lambda t} + e^{-\lambda t} - 1) = k_0(-\mu t e^{-\mu t} + e^{\mu t} - 1) \qquad (9.50)$$
sau
$$\frac{1-e^{-\lambda t}(1+\lambda t)}{1-e^{\mu t}(1-\mu t)} = \frac{k_0}{A_0}. \qquad (9.50')$$
Dacă notăm
$$\Phi(x) = 1 - e^{-x}(1+x)$$
care este o funcţie monoton descrescătoare atunci ecuaţia (9.50') se scrie
$$\frac{\Phi(\lambda t)}{\Phi(-\mu t)} = \frac{k_0}{a_0}, \qquad (9.50")$$
ecuaţie care are soluţie unică pe $(0,\infty)$ şi se poate rezolva numeric. Momemtul optim de inlocuire in acest caz este deci soluţia t^*, $0 < t^* < \infty$ a ecuaţiei (9.50').

In continuare vom prezenta două modele particulare din [44].

9.4.4. Fie funcţiile
$$\varphi(t) = \frac{\beta}{\beta+t},\ \ \psi(t) = kt^n,\ \ \beta > 0, k > 0, n \geq 2.$$
Analizând condiţiile de minim (9.46'),(9.46") ale funcţiei $\gamma(t)$ din (9.45') deducem că momentul optim de inlocuire t^* satisface ecuaţia
$$H_1(t) = H_2(t),\ \textit{unde}\ H_1(t) = \frac{a_0\beta}{(\beta+t)^2},\ H_2(t) = k(n-1)t^{n-2} \qquad (9.51)$$
dar şi condiţia
$$t^3\gamma"(t) = \frac{2A_0t^3}{(\beta+3)^3} + kt^n(n^2-3n+2) > 0,\ \ t \in (0,\infty). \qquad (9.47')$$
Deoarece $H_1(t)$ este descrescătoare şi $H_2(t)$ este crescătoare pe $(0,\infty)$ rezultă că ecuaţia (9.51) are soluţia unică t^* care este momentul optim de inlocuire.

9.4.5. Fie funcţiile

$$\varphi(t) = \frac{\beta}{\beta + t}, \ \psi(t) = kte^t(1 - e^{-\mu t}) \tag{9.52}$$

unde β, k, μ sunt constante pozitive astfel incât

$$\beta^2 \mu k < A_0, \ 0 < \mu < 1. \tag{9.52'}$$

Deci avem

$$C(t) = \frac{A_0 t}{\beta + t} + kte^t(1 - e^{-\mu t})$$

$$\gamma(t) = \frac{A_0}{\beta + t} + ke^t(1 - e^{-\mu t})$$

care conduce la

$$H(t) = \gamma'(t) = \frac{A_0}{(\beta + t)^2} + ke^t + k(\mu + 1)e^{(1 - \mu t)}.$$

Deoarece in ipotezele (9.52') avem $H(0) = -\frac{A_0}{\beta^2} + \mu k, \ H(\infty) = \infty$, rezultă datorită continuităţii lui H că esistă $t^* \in (0, \infty)$ astfel incât $H(t^*) = 0$. Dar

$$\gamma\text{"}(t) = \frac{\beta A_0}{(\beta + t)^2} + ke^t[1 - (1 - \mu)^2 e^{-\mu t}] > 0, \ \forall t \in (0, \infty),$$

deci t^* este moment optim de inlocuire.

Dacă in (9.52') presupunem $\mu > 1, A_0 > 1$ atunci de asemenea $\gamma\text{"}(t) > 0, \forall t \in (0, \infty)$ şi deci t^* este moment optim de inlocuire.