



Programare logică

Signaturi, Algebre, Morfisme

Morfisme

Exemplu. Signatura

$$MONOID = (S = \{s\}, \Sigma = \{e : \rightarrow s, * : ss \rightarrow s\})$$

Fie $(A, 1, \star)$ și $(B, 0, +)$ monoizi

$$(A_e := 1, A_* := \star, B_e := 0, B_* := +)$$

O funcție $f : A \rightarrow B$ este morfism de monoizi dacă:

$$\blacksquare f(1) = 0 \Leftrightarrow f(A_e) = B_e$$

$$\blacksquare f(x \star y) = f(x) + f(y) \Leftrightarrow f(A_*(x, y)) = B_*(f(x), f(y))$$

or. $x, y \in A$.

$$\begin{array}{ccccc} A & \times & A & \xrightarrow{A_*} & A \\ f \downarrow & & f \downarrow & & f \downarrow \\ B & \times & B & \xrightarrow{B_*} & B \end{array}$$

Morfisme

$(A_S, A_\Sigma), (B_S, B_\Sigma)$ (S, Σ) -algebre

Un **morfism** de (S, Σ) -algebre ((S, Σ) -*morfism*) este o funcție S -sortată $f : A \rightarrow B$ care verifică condițiile de **compatibilitate**:

■ $f_s(A_\sigma) = (B_\sigma)$ oricare $\sigma \rightarrow s$,

■ $f_s(A_\sigma(a_1, \dots, a_n)) = B_\sigma(f_{s_1}(a_1), \dots, f_{s_n}(a_n))$

or. $\sigma : s_1 \cdots s_n \rightarrow s$, or. $(a_1, \dots, a_n) \in A_{s_1} \times \cdots \times A_{s_n}$.

$$\begin{array}{ccccccc} A_{s_1} & \times & \cdots & \times & A_{s_n} & \xrightarrow{A_g} & A_s \\ f_{s_1} \downarrow & & \cdots & & f_{s_n} \downarrow & & f_s \downarrow \\ B_{s_1} & \times & \cdots & \times & B_{s_n} & \xrightarrow{B_g} & B_s \end{array}$$

Exemplu

- $NAT = (S = \{nat\}, \Sigma = \{0 : \rightarrow nat, succ : nat \rightarrow nat\})$
- NAT -algebra A :
 $A_{nat} := \mathbb{N}, A_0 := 0, A_{succ}(x) := x + 1$
- NAT -algebra B :
 $B_{nat} := \{0, 1\}, B_0 := 0, B_{succ}(x) := 1 - x$
- $f : A \rightarrow B, f = \{f_{nat}\}, f_{nat}(n) = n(mod\ 2)$
este morfism de NAT -algebre
- Nu există morfism de NAT -algebre $g : B \rightarrow A$.

Example

- $STIVA = (S = \{elem, stiva\}, \Sigma)$
 $\Sigma = \{0 : \rightarrow elem, empty : \rightarrow stiva, pop : stiva \rightarrow stiva,$
 $push : elem\ stiva \rightarrow stiva, top : stiva \rightarrow elem\}$
- $STIVA$ -algebra A : $A_{elem} := \mathbb{N}, A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
 $A_0 := 0, A_{empty} := \lambda, A_{push}(n, n_1 \cdots n_k) := n\ n_1 \cdots n_k,$
 $A_{pop}(\lambda) = A_{pop}(n) := \lambda,$
 $A_{pop}(n_1 n_2 \cdots n_k) := n_2 \cdots n_k$ **pt.** $k \geq 2,$
 $A_{top}(\lambda) := 0, A_{top}(n_1 \cdots n_k) := n_1$ **pt.** $k \geq 1.$
- $STIVA$ -algebra B : $B_{elem} := \{0\}, B_{stiva} := \mathbb{N}$
 $B_0 := 0, B_{empty} := 0, B_{push}(0, n) := n + 1$ **or.** $n,$
 $B_{pop}(0) := 0, A_{pop}(n) := n - 1$ **pt.** $n \geq 1,$
 $B_{top}(n) := 0$ **or.** $n.$

Exemple

- *STIV A*-algebra $A = (A_{elem} = \mathbb{N}, A_{stiva} = \mathbb{N}^*, \dots)$
- *STIV A*-algebra $B = (B_{elem} = \{0\}, B_{stiva} := \mathbb{N}, \dots)$
- $f : A \rightarrow B, f = (f_{elem} : \mathbb{N} \rightarrow \{0\}, f_{stiva} : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N})$
 $f_{elem}(n) := 0$ or. n ,
 $f_{stiva}(\lambda) := 0, f_{stiva}(n_1 \cdots n_k) := k$ pt. $k \geq 1$
- $g : B \rightarrow A, g = (g_{elem} : \{0\} \rightarrow \mathbb{N}, g_{stiva} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}^*)$
 $g_{elem}(0) := 0$,
 $g_{stiva}(0) := \lambda, g_{stiva}(k) := \underbrace{0 \cdots 0}_k$ pt. $k \geq 1$
 f și g sunt morfisme de *STIV A*-algebre

Morfisme - Proprietăți

$f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C, h : C \rightarrow D$

morfisme de (S, Σ) -algebre

- $f : A \rightarrow B, g : B \rightarrow C$ morfisme $\Rightarrow f; g : A \rightarrow C$ morfism
(compunerea a două morfisme este tot un morfism)
- $1_A : A \rightarrow A$ este morfism
- P parte stabilă în $A \Rightarrow f(P)$ parte stabilă în B
- Q parte stabilă în $B \Rightarrow f^{-1}(Q)$ parte stabilă în A

Izomorfisme

Un (S, Σ) -morfism $f : A \rightarrow B$ este **izomorfism** dacă există un morfism $g : B \rightarrow A$ a.î. $f; g = 1_A$ și $g; f = 1_B$.

Propoziție. Un morfism $f : A \rightarrow B$ este izomorfism dacă și numai dacă este funcție bijectivă, adică $f_s : A_s \rightarrow B_s$ este bijecție oricare $s \in S$.

Observație. f morfism și bijecție $\Rightarrow f^{-1}$ morfism

Izomorfisme

Spunem că algebrele $A = (A_S, A_\Sigma)$ și $B = (B_S, B_\Sigma)$ sunt izomorfe dacă există un izomorfism $f : A \rightarrow B$. În acest caz notăm $A \simeq B$.

- $A \simeq A$ (1_A este izomorfism)

- $A \simeq B \Rightarrow B \simeq A$

- $A \simeq B, B \simeq C \Rightarrow A \simeq C$

Relația de izomorfism este o relație de echivalență (reflexivă, simetrică și tranzitivă).

Observație. $A \simeq B \Rightarrow A_s \simeq B_s$ oricare $s \in S$

Exemple

- $NAT = (S = \{nat\}, \Sigma = \{0 : \rightarrow nat, succ : nat \rightarrow nat\})$
- NAT -algebra A : $A_{nat} = \mathbb{N}$, $A_0 := 0$, $A_{succ}(x) := x + 1$
- NAT -algebra B : $B_{nat} := \{0, 1\}$, $B_0 := 0$, $B_{succ}(x) := 1 - x$
- NAT -algebra C : $C_{nat} := \{2^n \mid n \in \mathbb{N}\}$
 $C_0 := 1$, $C_{succ}(2^n) := 2^{n+1}$
- $A \not\simeq B$
- $A \simeq C$
 $f : A \rightarrow C$, $f(n) := 2^n$ este un NAT -izomorfism.

Exemple

- $BOOL = (S = \{bool\}, \Sigma)$
 $\Sigma = \{T : \rightarrow bool, F : \rightarrow bool, \neg : bool \rightarrow bool,$
 $\vee : bool\ bool \rightarrow bool, \wedge : bool\ bool \rightarrow bool\}$
- $A_{bool} := \{0, 1\}$
 $A_T := 1, A_F := 0, A_{\neg}(x) := 1 - x,$
 $A_{\vee}(x, y) := \max(x, y), A_{\wedge}(x, y) := \min(x, y)$
- $B_{bool} := \mathcal{P}(\mathbb{N})$
 $B_T := \mathbb{N}, B_F := \emptyset, B_{\neg}(X) := \mathbb{N} \setminus X,$
 $B_{\vee}(X, Y) := X \cup Y, B_{\wedge}(X, Y) := X \cap Y$
- $A \neq B$

Exemple

■ *BOOL*-algebra C :

$$C_{bool} := \{t : \mathbb{N} \rightarrow \{0, 1\} \mid t \text{ funcție}\}$$

$$C_T(n) := 1, C_F(n) := 0 \text{ or. } n \in \mathbb{N}$$

$$C_{\neg}(t)(n) := 1 - t(n) \text{ or. } t \in C_{bool}, n \in \mathbb{N}$$

$$C_{\vee}(t_1, t_2)(n) := \max(t_1(n), t_2(n)) \text{ or. } t_1, t_2 \in C_{bool}, n \in \mathbb{N}$$

$$C_{\wedge}(t_1, t_2)(n) := \min(t_1(n), t_2(n)) \text{ or. } t_1, t_2 \in C_{bool}, n \in \mathbb{N}$$

■ $B \simeq C$

$$f : B \rightarrow C, f(Y) := \chi_Y \text{ oricare } Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

$$f(Y)(n) = 1 \text{ dacă } n \in Y, f(Y)(n) = 0 \text{ dacă } n \notin Y$$

f este *BOOL*-izomorfism



Exemple

- *STIV* A-algebra $A = (A_{elem} = \mathbb{N}, A_{stiva} = \mathbb{N}^*, \dots)$
- *STIV* A-algebra $B = (B_{elem} = \{0\}, B_{stiva} := \mathbb{N}, \dots)$
- $A \not\equiv B$

Exemple

- *STIVA*-algebra A :
 $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$ $A_0 := 0$,
 $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \cdots n_k) := n n_1 \cdots n_k$,
 $A_{pop}(\lambda) = A_{pop}(n) := \lambda$,
 $A_{pop}(n_1 n_2 \cdots n_k) := n_2 \cdots n_k$ **pt.** $k \geq 2$,
 $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \cdots n_k) := n_1$ **pt.** $k \geq 1$.
- *STIVA*-algebra C :
 $A_{elem} := \mathbb{Z}$, $A_{stiva} := \mathbb{Z}^*$
 $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(x, x_1 \cdots x_k) := x_1 \cdots x_k x$,
 $A_{pop}(\lambda) = A_{pop}(x) := \lambda$,
 $A_{pop}(x_1 \cdots x_{k-1} x_k) := x_1 \cdots x_{k-1}$ **pt.** $k \geq 2$,
 $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(x_1 \cdots x_k) := x_k$ **pt.** $k \geq 1$.

Exemple

- *STIVA*-algebra A : $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
- *STIVA*-algebra C : $A_{elem} := \mathbb{Z}$, $A_{stiva} := \mathbb{Z}^*$
- $f : A \rightarrow C$, $f = (f_{elem} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}, f_{stiva} : \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{Z}^*)$
 $f_{elem}(2k) := k$, $f_{elem}(2k + 1) := -k - 1$ pt. $k \in \mathbb{N}$,
 $f_{stiva}(n_1 \cdots n_k) := f_{elem}(n_k) \cdots f_{elem}(n_1)$ pt. $n_1 \cdots n_k \in \mathbb{N}^*$.
 f este *STIVA*-izomorfism
- Algebrele izomorfe satisfac "aceleași proprietăți".

Exemple

- *AUTOMAT*-algebra A :

$$A_{intrare} = \{x, y\}, A_{stare} = \{s0, s1\}, A_{iesire} := \{T, F\}$$

$$A_{s0} := s0, A_g(s0) := F, A_g(s1) := T,$$

$$A_f(x, s0) := s0, A_f(y, s0) := s1,$$

$$A_f(x, s1) := s0, A_f(y, s1) := s1.$$

- **Exercițiu.** Dacă C este o *AUTOMAT*-algebră și $C \simeq A$ atunci automatele asociate acceptă același limbaj (modulo redenumire).

- Algebrele izomorfe sunt "identice" (modulo redenumire).

ADT

- Un *tip abstract de date* este o mulțime de **date** (**valori**) și **operații** asociate lor, a căror descriere (specificare) este **independentă de implementare**.
abstract=disassociated from any specific instance
- O algebră este formată dintr-o **mulțime de elemente** și o **mulțime de operații**. Algebrele pot modela tipuri de date.
- Două algebre **izomorfe** au același comportament, deci trebuie să fie modele ale același tip de date. Aceasta asigură **independența de implementare**.

ADT

- O semnătură (S, Σ) este interfața sintactică a unui tip abstract de date.
- O algebră $A = (A_S, A_\Sigma)$ este o posibilă implementare.
- Dacă $A \simeq B$, atunci A și B implementează același tip de date.
- Un **tip abstract de date** este o clasă \mathcal{C} de (S, Σ) -algebre închisă la izomorfism:

$$A \in \mathcal{C}, A \simeq B \Rightarrow B \in \mathcal{C}.$$