Logică matematică

George Georgescu[1], **Afrodita Iorgulescu**[2]
[1] Universitatea din Bucureşti, Catedra de Fundamentele Informaticii
[2] Academia de Studii Economice, Catedra de Informatică Economică

October 1, 2009

Prefaţă

Logica se ocupă de legile gândirii (raţiunii) şi anume de acele proprietăţi structurale formale ale gândirii care apar în reflectarea proprietăţilor lumii reale. Deci avem *gândirea*, *realitatea* şi *legătura* dintre ele. In logică există substituienţi abstracţi pentru gândire, pentru realitate şi pentru legătura dintre ele şi anume, *limbajul* L substituie gândirea, *structura* S substituie realitatea (unde S este mai mult decât o colecţie de lucruri susceptibile de a fi corelate, ca înţeles, diferitelor expresii din limbaj), iar *interpretarea* I substituie legătura (I este o funcţie).

Limbajul L este fixat, dar se consideră mai multe interpretări ale lui L în diferite structuri; aceasta pentru că, pe de-o parte, nu ştim în care realitate (lume) particulară ne regăsim cu adevărat, pe de altă parte pentru că logicienii sunt interesaţi de principiile universale, care sunt adevărate în orice lume posibilă.

O *teorie* (în sens tehnic) este un limbaj L împreună cu o mulţime T de propoziţii sau formule din L. In practică, o teorie este definită fie *sintactic*, fie *semantic*, adică:
- T poate fi formată din toate formulele care rezultă printr-o relaţie de implicare sintactică dintr-o mulţime de axiome sau
- T poate fi formată din toate formulele care sunt adevărate în orice interpretare considerată.

Scopul principal al logicii este studiul în paralel al *relaţiei de implicare sintactică (formală)*:

$$p \vdash q \quad (q \text{ se deduce din } p \text{ conform unor reguli prestabilite})$$

şi al *relaţiei de implicare semantică (reală)*:

$$p \models q \quad (\text{dacă } p \text{ este adevărată, atunci } q \text{ este adevărată}).$$

Logica clasică este *bivalentă*, în sensul că mulţimea valorilor de adevăr are două elemente: *adevărul* şi *falsul*. *Logica propoziţiilor* este teoria T a tuturor formulelor valide (i.e. care sunt adevărate în orice interpretare) într-un limbaj L al propoziţiilor. Această teorie este decidabilă (există un algoritm care, aplicat oricărei formule, ne spune dacă ea este din T). *Logica predicatelor* este teoria T a tuturor formulelor valide într-un limbaj L al predicatelor. Presupunand că L are cel puţin un simbol de funcţie de rang cel puţin 1 sau un simbol de relaţie de rang cel puţin 2, atunci T nu este decidabilă, dar este axiomatizabilă (i.e. există o axiomatizare a lui T (cu axiome şi reguli de inferenţă) sub care formulele lui T sunt demonstrabile).

In secolul al 19-lea apar primele sisteme de logică *polivalentă*.

In evoluţia unei teorii ştiinţifice se disting patru etape succesive: *etapa descriptivă*, *etapa inductivă*, *etapa deductivă* şi *etapa axiomatică*. Organizarea ştiintei în teorii deductive este legată de evoluţia matematicii şi de expansiunea metodelor sale în celelalte ştiinţe.

"*Eu afirm ca în orice disciplină a naturii se găseşte de fapt numai atâta adevărată ştiinţă câtă matematică se cuprinde în ea*" (Immanuel Kant).

Logica matematică este ştiinţa care are ca obiect studiul formelor propoziţionale şi al legilor de raţionare cu expresii propoziţionale, precum şi metodele care permit realizarea acestui studiu.

In studiul propoziţiilor sau al expresiilor propoziţionale, logica matematică este interesată numai de valoarea logică.

R. Descartes, prin încercarea de a forma o ştiinţă matematică generală, a stimulat cercetările logice în direcţia simbolismului matematic, lucru realizat parţial de G. Leibniz.

La jumătatea secolului al 19-lea, George Boole şi Augustus De Morgan au introdus metodele matematice în logică, creând logica matematică. Calculul logic al lui G. Boole este bivalent şi se face după regulile din algebră; el stă la baza calculatoarelor actuale.

Contribuţii ulterioare au adus G. Frege, G. Peano, B. Russell şi Gödel. Primul tratat modern de logică matematică, "Principia Mathematica" a fost scris de B. Russell şi A.N. Whitehead, între 1910-1913.

Intr-o etapă ulterioară apare *logica polivalentă* (cu mai multe valori de adevăr), prin lucrările lui J. Łukasiewicz şi L.E. Post, apoi ale lui C.C. Chang. In ţara noastră, cercetările de logică matematică au fost iniţiate de Gr. C. Moisil în 1933 şi cunosc în prezent o mare dezvoltare.

Aplicaţiile logicii matematice se regăsesc la teoria algebrică a automatelor, la programarea automată, la programarea logică, la bazele de date relaţionale, în inteligenţa artificială. Cercetările contemporane tind să extindă considerabil sfera aplicaţiilor (logica fuzzy se aplică în economie, de exemplu).

In paralel cu logica matematică, şi în stransă legătura cu ea, s-a dezvoltat *algebra logicii matematice* (teoria algebrelor Boole, teoria algebrelor MV, a algebrelor Łukasiewicz-Moisil, etc.), care constituie în prezent un capitol separat din algebră.

In această lucrare sunt prezentate logica clasică, cu două valori de adevăr, şi modelul ei algebric, algebra Boole. Algebrele logicilor cu mai multe valori sunt prezentate in [29].

Lucrarea se adresează studenţilor facultăţilor de matematică informatică şi informatică economică, dar şi unui public mai larg.

Bucureşti, Septembrie 2009

Autorii

Contents

Chapter 1

Calculul propoziţiilor (Prezentare neformalizată)

Vom face aici o prezentare neformalizată a calculului propoziţiilor clasic (bivalent), prezentarea formalizată fiind făcută mai târziu. Se spune, echivalent, Calculul propoziţiilor (propoziţional) sau Logica propoziţiilor.

In *calculul propoziţiilor* se studiază propoziţiile (=propoziţii închise) din punctul de vedere al adevărului sau falsităţii lor, neluându-se în seamă conţinutul lor.

1.1 Propoziţiile

Definiţie 1.1.1 Un *enunţ* este un text lingvistic care se referă la un anumit domeniu U, numit *univers al discursului* şi exprimă o proprietate a unui obiect (sau a unui grup de obiecte) din universul respectiv.

Subiectul (subiectele) enunţului exprimă obiectul (obiectele).

Partea predicativă a enunţului exprimă proprietatea.

Definiţie 1.1.2 *Propoziţia* este enunţul cu sens, în care toate subiectele sunt determinate.

Vom nota propoziţiile cu $p, q, r, s, t, \ldots$.

Vom nota cu P_0 mulţimea propoziţiilor *iniţiale, date, primitive.* Din propoziţiile date în P_0 se construiesc propoziţii *noi, compuse*, cu ajutorul *operatorilor logici, propoziţionali (= conectorilor logici, propoziţionali)*: $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$. Astfel, pentru p, q propoziţii, avem următoarele definiţii.

Definiţie 1.1.3 Se numeşte *negaţia propoziţiei* p, şi se notează : $\neg p$ (se citeşte "non p"), propoziţia care afirmă proprietatea contrară celei exprimate de p şi care se construieşte lingvistic din p prin intercalarea **particulei negative** "nu" în faţa părţii predicative a lui p.

Definiţie 1.1.4 Se numeşte *disjuncţia propoziţiilor* p, q (în această ordine), şi se notează: $p \vee q$ (se citeşte "p sau q"), propoziţia care afirmă că **cel puţin una** din proprietăţile exprimate de p şi q are loc şi care se construieşte lingvistic alăturând textele celor două propoziţii în ordinea (p, q) şi intercalând între ele **particula disjunctivă** "sau".

Definiţie 1.1.5 Se numeşte *conjuncţia propoziţiilor* p, q (în această ordine), şi se notează: $p \wedge q$ (se citeşte "p şi q"), propoziţia care afirmă că **fiecare** din proprietăţile exprimate de p şi q are loc şi care se construieşte lingvistic alăturând textele celor două propoziţii în ordinea (p, q) şi intercalând între ele **particula conjunctivă** "şi".

Definiţie 1.1.6 Se numeşte *implicaţia propoziţiilor* p, q (în această ordine), şi se notează: $p \to q$ (se citeşte "p implică q" sau "dacă p atunci q"), propoziţia: $\neg p \vee q$.

Definiţie 1.1.7 Se numeşte *echivalenţa propoziţiilor* p, q (în această ordine), şi se notează: $p \leftrightarrow q$ (se citeşte "p echivalent cu q" sau " p dacă şi numai dacă q"), propoziţia: $(p \to q) \wedge (q \to p)$. Deci, echivalenţa este conjuncţia a două implicaţii de sens contrar.

Observaţii 1.1.8

1) Implicaţia şi echivalenţa se definesc cu ajutorul operatorilor propoziţionali $\neg$, $\vee$, $\wedge$.

2) Operatorii propoziţionali afectează **partea predicativă** a enunţurilor, nu şi subiectul (subiectele).

3) Obiectul de studiu al calculului propoziţiilor este mulţimea P a tuturor propoziţiilor, care se obţin plecând de la propoziţiile din P_0 şi aplicând repetat, în toate modurile posibile, conectorii logici $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\to$, $\leftrightarrow$. Mai exact spus, mulţimea P se defineşte **prin recurenţă** astfel:
(R1) Dacă $p \in P_0$, atunci $p \in P$.
(R2) Dacă $p, q \in P$, atunci $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \to q$, $p \leftrightarrow q \in P$.
(R3) Orice propoziţie $p \in P$ se obţine aplicând regulile (R1) şi (R2) de un număr **finit** de ori.

4) Dacă p, q sunt propoziţii în sensul logicii matematice, atunci $p \vee q$, $p \wedge q$ etc. sunt propoziţii în sensul logicii matematice, dar din punctul de vedere al **gramaticii** nu sunt propoziţii, ci **fraze**. Deci, noţiunea de propoziţie cu care lucrează calculul propoziţiilor este diferită de noţiunea de propoziţie din gramatică.

1.2 Valorea de adevăr a unei propoziţii

Logica (clasică a) propoziţiilor este bivalentă, adică studiază doar propoziţiile care sunt fie adevărate, fie false, adică care au cele două valori de adevăr **extreme**: "adevărat" şi "fals".

Observaţii 1.2.1

1) Ipoteza este că **fiecare propoziţie are o valoare de adevăr**. Este clar că propoziţiile **interogative** ("Ce mai faci ? etc.), cele **exclamative** ("Ce frumos este afara!" etc.) precum şi cele **imperative** ("Fii atent!" etc.) nu au valoare de adevăr. Deci, **doar propoziţiile declarative fac obiectul studiului logicii matematice, sunt propoziţii în sensul calculului propoziţiilor**.

2) Problema determinării valorilor de adevăr ale propoziţiilor din mulţimea P_0 dată la început **nu aparţine logicii matematice**. De exemplu, dacă o propoziţie $p \in P_0$ este din domeniul chimiei, atunci stabilirea valorii de adevăr a propoziţiei p este o problemă a chimiei etc.

Nu se presupune că am cunoaşte efectiv valorile de adevăr ale tuturor propoziţiilor din P_0.

Definiţie 1.2.2 O propoziţie este *adevărată* dacă şi numai dacă starea de fapt descrisă de propoziţie are loc.

Stabilirea adevărului unei propoziţii se poate face şi in raport cu adevărul altor propoziţii.

Să definim acum valorile de adevăr ale propoziţiilor compuse $\neg p,\ p \vee q,\ p \wedge q,\ p \rightarrow q,\ p \leftrightarrow q$ în funcţie de valorile de adevăr ale propoziţiilor componente, p şi q.

Definiţie 1.2.3 Propoziţia $\neg p$ este *adevărată* dacă şi numai dacă propoziţia p este *falsă*. Rezultă că propoziţia $\neg p$ este falsă dacă şi numai dacă propoziţia p este adevărată.

Definiţie 1.2.4 Propoziţia $p \vee q$ este *adevărată* dacă şi numai dacă **cel puţin una** din propoziţiile p, q este *adevărată*. Rezultă că $p \vee q$ este falsă dacă şi numai dacă **ambele** propoziţii p, q sunt false.

Definiţie 1.2.5 Propoziţia $p \wedge q$ este *adevărată* dacă şi numai dacă **ambele** propoziţii p, q sunt *adevărate*. Rezultă că $p \wedge q$ este falsă dacă şi numai dacă **cel puţin una** din propoziţiile p, q este falsă.

Pentru orice propoziţie $p \in P_0$, să asociem 1 valorii de adevăr "adevărat" şi 0 valorii de adevăr "fals", adică să definim funcţia de adevăr (de evaluare)

$$v_0 : P_0 \longrightarrow \{0, 1\}$$

astfel: pentru orice $p \in P_0$,

$$v_0(p) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad p \text{ este adevărată,} \\ 0, & \text{dacă} \quad p \text{ este falsă.} \end{cases}$$

Funcţia de adevăr $v_0 : P_0 \longrightarrow \{0, 1\}$ se extinde (prelungeste) în mod unic la funcţia de adevăr $v : P \longrightarrow \{0, 1\}$ astfel: pentru orice $p, q \in P$,

$$v(\neg p) = \begin{cases} 1, & v(p) = 0, \\ 0, & v(p) = 1, \end{cases}$$

$$v(p \vee q) = \begin{cases} 1, & v(p) = 1 \text{ sau } v(q) = 1, \\ 0, & v(p) = 0 \text{ şi } v(q) = 0, \end{cases}$$

$$v(p \wedge q) = \begin{cases} 1, & v(p) = 1 \text{ şi } v(q) = 1, \\ 0, & v(p) = 0 \text{ sau } v(q) = 0. \end{cases}$$

Deducem că

$$v(p \to q) = v(\neg p \vee q) = \begin{cases} 1, & v(\neg p) = 1 \text{ sau } v(q) = 1, \\ 0, & v(\neg p) = 0 \text{ şi } v(q) = 0. \end{cases} = \begin{cases} 1, & v(p) = 0 \text{ sau } v(q) = 1, \\ 0, & v(p) = 1 \text{ şi } v(q) = 0, \end{cases}$$

şi

$$v(p \leftrightarrow q) = v((p \to q) \wedge (q \to p)) = \begin{cases} 1, & v(p \to q) = 1 \text{ şi } v(q \to p) = 1, \\ 0, & v(p \to q) = 0 \text{ sau } v(q \to p) = 0. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & [v(p) = 0 \text{ şi } v(q) = 0] \text{ sau } [v(p) = 1 \text{ şi } v(q) = 1], \\ 0, & [v(p) = 1 \text{ şi } v(q) = 0] \text{ sau } [v(p) = 0 \text{ şi } v(q) = 1]. \end{cases}$$

Obţinem atunci următoarele **tabele de adevăr**:

(1)

$v(p)$	$v(\neg p)$
0	1
1	0

(2)

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \vee q)$	$v(p \wedge q)$	$v(p \to q)$	$v(p \leftrightarrow q)$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

sau următoarele **matrici de adevăr**:

$v(p \vee q)$	v(q)=0	v(q)=1
v(p)=0	0	1
v(p)=1	1	1

$v(p \wedge q)$	v(q)=0	v(q)=1
v(p)=0	0	0
v(p)=1	0	1

$v(p \to q)$	v(q)=0	v(q)=1
v(p)=0	1	1
v(p)=1	0	1

$v(p \leftrightarrow q)$	v(q)=0	v(q)=1
v(p)=0	1	0
v(p)=1	0	1

Observaţie 1.2.6 Dintr-o premiză (ipoteză) falsă, p, se poate obţine o concluzie, q, adevărată sau falsă, implicaţia fiind adevărată. Deci, atenţie la ipoteze.

Rezultă că fiecărei propoziţii $p \in P$ îi asociem o valoare de adevăr $v(p) \in \{0,1\}$ după următoarele reguli:
1) Dacă $p \in P_0$, atunci $v(p) = v_0(p)$,
2) Dacă $p, q \in P$ şi am asociat propoziţiilor p, q valorile de adevăr $v(p)$, $v(q)$, atunci asociem propoziţiilor $\neg p$, $p \vee q$, $p \wedge q$, $p \to q$, $p \leftrightarrow q$ valorile de adevăr $v(\neg p)$, $v(p \vee q)$, $v(p \wedge q)$, $v(p \to q)$, $v(p \leftrightarrow q)$ date de tabelele sau matricile de mai sus.

Să definim pe mulţimea $L_2 = \{0,1\} \subseteq \Re$ **operaţia unară** $\neg^{L_2}$ şi **operaţiile binare** $\vee^{L_2}$, $\wedge^{L_2}, \to^{L_2}$, $\leftrightarrow^{L_2}$ astfel: pentru orice $x, y \in L_2$,

$$\neg^{L_2} x \stackrel{def.}{=} 1 - x, \quad , x \vee^{L_2} y \stackrel{def}{=} \max(x,y), \quad x \wedge^{L_2} y \stackrel{def.}{=} \min(x,y),$$

and

$$x \to^{L_2} y \stackrel{def.}{=} (\neg^{L_2} x) \vee^{L_2} y, \quad x \leftrightarrow^{L_2} y \stackrel{def.}{=} (x \to^{L_2} y) \wedge^{L_2} (y \to^{L_2} x).$$

Deducem următoarele tabele de valori:

(3)

x	$\neg^{L_2} x$
0	1
1	0

(4)

x	y	$x \vee^{L_2} y$	$x \wedge^{L_2} y$	$x \to^{L_2} y$	$x \leftrightarrow^{L_2} y$
0	0	0	0	1	1
0	1	1	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Din tabelele (1), (2) şi (3), (4), se vede că funcţia $v : P \longrightarrow L_2$ este un **homomorfism** (adică pentru orice $p, q \in P$, $v(\neg p) = \neg^{L_2} v(p)$, $v(p \vee q) = v(p) \vee^{L_2} v(q)$, şi $v(p \wedge q) = v(p) \wedge^{L_2} v(q)$; rezultă că $v(p \to q) = v(p) \to^{L_2} v(q)$ şi $v(p \leftrightarrow q) = v(p) \leftrightarrow^{L_2} v(q)$). Se observă că v este surjectiv, dar nu este injectiv.

Propoziţia 1.2.7 *Structura* $\mathcal{L}_2 = (L_2 = \{0,1\}, \vee^{L_2}, \wedge^{L_2}, \neg^{L_2}, 0, 1)$ *este o algebră Boole cu două elemente, numita* **algebra Boole canonică**.

Dem. Rutină. □

Definiţie 1.2.8
O propoziţie compusă $p \in P$ care este adevărata independent de valorile de adevăr ale propoziţiilor componente se numeste *propoziţie universal adevărata* sau *tautologie.*
O propoziţie compusă $p \in P$ care este falsă independent de valorile de adevăr ale propoziţiilor componente se numeste *contradicţie* sau *antilogie.*

Se observă că o propoziţie $p \in P_0$ nu poate fi tautologie sau antilogie, căci nu este compusă.

Exemplu 1.2.9 Exemplu de antilogie *Pentru orice $p \in P$,*

$$p \wedge \neg p \qquad \textit{Principiul contradicţiei.}$$

Exemple 1.2.10 Exemple de tautologii *Vom grupa unele exemple în grupe sau sisteme de tautologii, notate $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$, $\mathcal{A}_4$, $\mathcal{A}_5$, sisteme corespunzătoare celor mai utilizate sisteme de axiome ale sistemului formal al calculului propoziţiilor.*

Să notam cu **O** *propoziţia $p \wedge \neg p$ şi cu* **I** *propoziţia $p \vee \neg p$, pentru orice $p \in P$. Atunci*

- *Sistemul $\mathcal{A}_1$ ($\vee, \wedge, \neg, \leftrightarrow$, **O, I**):*
  (P1) $p \vee p \leftrightarrow p$, $\quad p \wedge p \leftrightarrow p$ (idempotenţa lui $\vee$, $\wedge$),
  (P2) $p \vee q \leftrightarrow q \vee p$, $\quad p \wedge q \leftrightarrow q \wedge p$, (comutativitatea lui $\vee$, $\wedge$),
  (P3) $p \vee (q \vee r) \leftrightarrow (p \vee q) \vee r$, $\quad p \wedge (q \wedge r) \leftrightarrow (p \wedge q) \wedge r$, (asociativitatea lui $\vee$, $\wedge$),
  (P4) $p \vee (p \wedge q) \leftrightarrow p$, $\quad p \wedge (p \vee q) \leftrightarrow p$, (absorbţia),
  (P5) $p \vee (q \wedge r) \leftrightarrow (p \vee y) \wedge (p \vee r)$, $\quad p \wedge (q \vee r) \leftrightarrow (p \wedge y) \vee (p \wedge r)$, (distributivitatea lui $\vee$ faţă de $\wedge$ şi invers),
  *(P6) $p \vee$ **O** $\leftrightarrow p$, $\quad p \wedge$ **I** $\leftrightarrow p$,*
  (P7) $p \vee \neg p$, adică **I** *(Principiul terţului exclus), $\quad \neg(p \wedge \neg p)$ adică $\neg$***O** *(Principiul contradicţiei).*

- *Sistemul $\mathcal{A}_2$ ($\rightarrow, \neg$):*
  (G1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,
  (G2) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$,
  (G3) $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$.

- *Sistemul $\mathcal{A}_3$ ($\rightarrow, \neg, \vee, \wedge$):*
  (G1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,
  (G2) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$,
  (G3) $(\neg q \rightarrow \neg p) \rightarrow (p \rightarrow q)$,
  (T4) $p \wedge q \rightarrow p$,
  (T5) $p \wedge q \rightarrow q$,
  (T6) $p \rightarrow p \vee q$,
  (T7) $q \rightarrow p \vee q$,
  (T8) $(r \rightarrow p) \rightarrow [(r \rightarrow q) \rightarrow (r \rightarrow (p \wedge q))]$,
  (T9) $(p \rightarrow r) \rightarrow [(q \rightarrow r) \rightarrow ((p \vee q) \rightarrow r)]$.

- *Sistemul $\mathcal{A}_4$ ($\rightarrow, \vee$):*

(S1) $(p \vee p) \rightarrow p$,
(S2) $p \rightarrow (p \vee q)$,
(S3) $p \vee q \rightarrow q \vee p$,
(S4) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \vee p) \rightarrow (r \vee q)]$.

• *Sistemul* $\mathcal{A}_5$ $(\rightarrow, \mathbf{O})$:
(V1) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,
(V2) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \rightarrow [(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)]$,
(V3) $[(p \rightarrow \mathbf{O}) \rightarrow \mathbf{O}] \rightarrow p$.

Alte tautologii remarcabile sunt următoarele:
(P8) $\neg(p \vee q) \leftrightarrow \neg p \wedge \neg q$, $\quad \neg(p \wedge q) \leftrightarrow \neg p \vee \neg q$ *(Legile De Morgan)*,
(P9) $\neg\neg p \leftrightarrow p$ *(Principiul dublei negaţii)*,
(P10) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow [(\neg p \vee q) \leftrightarrow (p \vee \neg p)]$, $\quad (p \rightarrow q) \leftrightarrow [(p \wedge \neg q) \leftrightarrow (p \wedge \neg p)]$,
(P11) $p \leftrightarrow p$,
(P12) $[(p \wedge \neg q) \rightarrow \neg p] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$, $\quad [(p \wedge \neg q) \rightarrow q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$ *(două din schemele reducerii la absurd)*,
(P13) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\neg q \rightarrow \neg p)$ *(se foloseşte în demonstraţii)*,
(P14) $\neg(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \neg q$ *(arată cum se neagă* $p \rightarrow q$*)*,
(P15) $p \wedge (p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge q$,
(P16) $[p \rightarrow (p \wedge q)] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$,
(P17) $[(p \rightarrow q) \rightarrow q] \leftrightarrow p \vee q$,
(P18) $[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \leftrightarrow [(p \wedge q) \rightarrow r]$ *(stă la baza Teoremei deducţiei)*,
(P19) $p \rightarrow (q \rightarrow p)$,
(P20) $[(p \rightarrow q) \rightarrow r] \rightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$,
(P21) $[(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)] \leftrightarrow [p \rightarrow (q \rightarrow r)]$,
(P22) $(p \rightarrow q) \rightarrow [(r \rightarrow p) \rightarrow (r \rightarrow q)]$,
(P23) $[p \wedge (p \rightarrow q)] \rightarrow q$ *(Modus ponens)*.

In general, aflăm dacă o propoziţie compusă oarecare $p \in P$ este tautologie sau nu cu ajutorul următorului algoritm:
Dacă propoziţia $p \in P$ se descompune în propoziţiile componente $p_1, p_2, \ldots, p_n \in P_0$, atunci vectorul $(v(p_1), v(p_2), \ldots, v(p_n)) \in \{0,1\} \times \{0,1\} \times \ldots \times \{0,1\} = \{0,1\}^n$. Mulţimea $\{0,1\}^n$ are 2^n elemente. Parcurgem atunci un ciclu care generează cele 2^n elemente (vectori); pentru fiecare element $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ calculam $v(p)$ folosind valorile $v(p_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$ şi:
- dacă pentru un anumit element $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$ obţinem $v(p) = 0$, atunci ciclul se opreşte, cu răspunsul "p nu este tautologie";
- dacă ciclul se termină, adică dacă pentru toate cele 2^n elemente din $\{0,1\}^n$ obţinem $v(p) = 1$, atunci răspunsul este "p este tautologie".

Dacă în algoritmul prezentat continuăm să calculam $v(p)$ şi după ce întâlnim valoarea 0, deci dacă ducem ciclul până la capăt, atunci realizăm tabela de adevăr a propoziţiei date p.

Faptul că se poate stabili algoritmic dacă o propoziţie oarecare este tautologie sau nu constituie o proprietate importantă, care se enunţă sub forma: **calculul propoziţiilor este decidabil**.

Tabelele de adevăr, sau matricile de adevăr, constituie deci o **modalitate algoritmică** de a determina valoarea de adevăr a unei propoziţii compuse. Mai există şi alte modalităti, nealgoritmice, şi anume bazate pe proprietăţi deja stabilite ale altor propoziţii.

Să definim pe mulţimea P o relaţie binară $\sim$ astfel: pentru orice $p, q \in P$,

$$p \sim q \text{ dacă şi numai dacă } p \leftrightarrow q \text{ este tautologie,}$$

deci dacă şi numai dacă $v(p \leftrightarrow q) = 1$ întotdeauna. Vom nota astfel:

$$p \sim q \overset{def}{\Leftrightarrow} p \leftrightarrow q \text{ este tautologie, sau}$$

$$p \sim q \overset{def}{\Leftrightarrow} v(p \leftrightarrow q) = 1.$$

Atunci sunt adevărate următoarele două Propoziţii.

Propoziţia 1.2.11 *Relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe P.*

Dem.

(i) $\sim$ este reflexivă, adică pentru orice $p \in P$, $p \sim p$. Intr-adevăr, fie $p \in P$, propoziţie fixată, altfel arbitrară; $p \sim p \overset{def}{\Leftrightarrow} p \leftrightarrow p$ este tautologie, ceea ce este adevărat, conform (P11). Conform **Principiului Generalizării , (PG)** pe scurt, rezultă că pentru orice $p \in P$, $p \sim p$; deci (i) are loc.

(ii) $\sim$ este simetrică, adică pentru orice $p, q \in P$, $p \sim q$ implică $q \sim p$. Intr-adevăr, fie $p, q \in P$ propoziţii fixate, altfel arbitrare; $p \sim q \overset{def}{\Leftrightarrow} v(p \leftrightarrow q) = 1$; atunci $v(q \leftrightarrow p) = 1$, adică $q \sim p$, deci $p \sim q$ implică $q \sim p$. Conform **(PG)**, pentru orice $p, q \in P$, $p \sim q$ implică $q \sim p$, deci (ii) are loc.

(iii) $\sim$ este tranzitivă, adică pentru orice $p, q, r \in P$, $p \sim q$ şi $q \sim r$ implică $p \sim r$. Intr-adevăr, fie $p, q, r \in P$ propoziţii fixate, altfel arbitrare; ($p \sim q$ şi $q \sim r$)$\overset{def}{\Leftrightarrow}$ ($v(p \leftrightarrow q) = 1$ şi $v(q \leftrightarrow r) = 1$); atunci

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \leftrightarrow q)$
0	0	1
1	1	1

$v(q)$	$v(r)$	$v(q \leftrightarrow r)$
0	0	1
1	1	1

Atunci obtinem:

$v(p)$	$v(r)$	$v(p \leftrightarrow r)$
0	0	1
1	1	1

deci $v(p \leftrightarrow r) = 1$, adică $p \sim r$, deci $p \sim q$ şi $q \sim r$ implică $p \sim r$. Conform **(PG)**, pentru orice $p, q, r \in P$, $p \sim q$ şi $q \sim r$ implică $p \sim r$, deci (iii) are loc. $\square$

Propoziţia 1.2.12 *Pentru orice $p, q, p', q' \in P$, avem proprietăţile:*
1) dacă $p \sim q$ atunci $\neg p \sim \neg q$,
2) dacă $p \sim p'$ şi $q \sim q'$, atunci $(p \vee q) \sim (p' \vee q')$ şi $(p \wedge q) \sim (p' \wedge q')$,
3) $(p \vee \neg p) \sim (q \vee \neg q)$ şi $(p \wedge \neg p) \sim (q \wedge \neg q)$.

Dem.
1) Fie $p, q \in P$, fixate, altfel arbitrare; $p \sim q \overset{def}{\Leftrightarrow} v(p \leftrightarrow q) = 1$; atunci avem:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \leftrightarrow q)$	$v(\neg p)$	$v(\neg q)$	$v(\neg p \leftrightarrow \neg q)$
0	0	1	1	1	1
1	1	1	0	0	1

adică $\neg p \sim \neg q$. Rezultă, conform (**PG**), că pentru orice $p, q \in P$, dacă $p \sim q$, atunci $\neg p \sim \neg q$.

2) Fie $p, q, p', q' \in P$, fixate, altfel arbitrare; $(p \sim p'$ şi $q \sim q') \overset{def}{\Leftrightarrow} (v(p \leftrightarrow p') = 1$ şi $v(q \leftrightarrow q') = 1)$, adică:

$v(p)$	$v(p')$	$v(p \leftrightarrow p')$
0	0	1
1	1	1

şi

$v(q)$	$v(q')$	$v(q \leftrightarrow q')$
0	0	1
1	1	1

de unde obţinem:

$v(p)$	$v(p')$	$v(q)$	$v(q')$	$v(p \vee q)$	$v(p' \vee q')$	$v((p \vee q) \leftrightarrow (p' \vee q'))$
0	0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1

adică $p \vee q \sim p' \vee q'$. Rezultă, conform (**PG**), că pentru orice $p, q, p', q' \in P$, dacă $p \sim p'$ şi $q \sim q'$, atunci $(p \vee q) \sim (p' \vee q')$. Analog se demonstrează că $(p \wedge q) \sim (p' \wedge q')$.

3) Fie $p, q \in P$, fixate, altfel arbitrare; $p \vee \neg p \sim q \vee \neg q \overset{def}{\Leftrightarrow} v((p \vee \neg p) \leftrightarrow (q \vee \neg q)) = 1$; atunci avem:

$v(p)$	$v(q)$	$v(\neg p)$	$v(\neg q)$	$v(p \vee \neg p)$	$v(q \vee \neg q)$	$v((p \vee \neg p) \leftrightarrow (q \vee \neg q))$
0	0	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1

adică $p \vee \neg p \sim q \vee \neg q$. Rezultă, conform (**PG**), că pentru orice $p, q \in P$, $p \vee \neg p \sim q \vee \neg q$. Restul se demonstrează la fel. $\square$

Observaţii 1.2.13 1) Propoziţia 1.2.12 spune că relaţia $\sim$ este o relaţie de congruenţă pe $(P, \vee, \wedge, \neg)$.

2) In mod uzual, relaţia $\sim$ se mai notează $\Leftrightarrow$.

Deoarece $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe P, să formăm clasele de echivalenţă; vom nota cu $\widehat{p}$ clasa lui p, pentru orice $p \in P$, i.e.

$$\widehat{p} = \{q \in P \mid q \sim p\}.$$

Lema 1.2.14

$$\widehat{p} = \widehat{q} \Longleftrightarrow p \sim q.$$

Dem.

$\Longrightarrow$: $\widehat{p} = \widehat{q}$ implică $p \in \widehat{q}$, deci $p \sim q$.

$\Longleftarrow$: $p \sim q$ implică $\widehat{p} \subseteq \widehat{q}$ şi $\widehat{q} \subseteq \widehat{p}$, adică $\widehat{p} = \widehat{q}$. Intr-adevăr, $\widehat{p} \subseteq \widehat{q}$ înseamnă că pentru orice r, $r \in \widehat{p} \rightarrow r \in \widehat{q}$. Fie r cu $r \in \widehat{p}$; deci, $r \sim p$; dar $p \sim q$; rezultă $r \sim q$, adică $r \in \widehat{q}$. $\square$

Fie $P/_\sim = \{\widehat{p} \mid p \in P\}$. Atunci să definim pe $P/_\sim$ două operaţii binare, $\bigvee$ şi $\bigwedge$, o operaţie unara, NEG astfel: pentru orice $\widehat{p}$, $\widehat{q} \in P/_\sim$,

$$\widehat{p} \bigvee \widehat{q} \stackrel{def.}{=} \widehat{p \vee q},$$

$$\widehat{p} \bigwedge \widehat{q} \stackrel{def.}{=} \widehat{p \wedge q},$$

$$NEG\ \widehat{p} \stackrel{def.}{=} \widehat{\neg p}\ .$$

Aceste trei operaţii sunt bine definite (adică nu depind de reprezentanţii aleşi ai claselor), conform Propoziţiei 1.2.12(1),(2). Să considerăm, de asemenea, următoarele elemente remarcabile din $P/_\sim$ (conform Propoziţiei 1.2.12(3)):

$$\widehat{I} \stackrel{def.}{=} \{p \vee \neg p \mid p \in P\}$$

şi

$$\widehat{O} \stackrel{def.}{=} \{p \wedge \neg p \mid p \in P\}.$$

Obţinem atunci următoarea

Teorema 1.2.15 *Structura* $(P/_{\sim}, \bigvee, \bigwedge, NEG, \widehat{O}, \widehat{I})$ *este o algebră Boole.*

Dem. Trebuie să demonstrăm că, pentru orice $\widehat{p}$, $\widehat{q}$, $\widehat{r} \in P/_{\sim}$:

(B1) $\widehat{p} \bigvee \widehat{p} = \widehat{p}$, $\quad \widehat{p} \bigwedge \widehat{p} = \widehat{p}$,

(B2) $\widehat{p} \bigvee \widehat{q} = \widehat{q} \bigvee \widehat{p}$, $\quad \widehat{p} \bigwedge \widehat{q} = \widehat{q} \bigwedge \widehat{p}$,

(B3) $\widehat{p} \bigvee (\widehat{q} \bigvee \widehat{r}) = (\widehat{p} \bigvee \widehat{q}) \bigvee \widehat{r}$, $\quad \widehat{p} \bigwedge (\widehat{q} \bigwedge \widehat{r}) = (\widehat{p} \bigwedge \widehat{q}) \bigwedge \widehat{r}$,

(B4) $\widehat{p} \bigvee (\widehat{p} \bigwedge \widehat{q}) = \widehat{p}$, $\quad \widehat{p} \bigwedge (\widehat{p} \bigvee \widehat{q}) = \widehat{p}$,

(B5) $\widehat{p} \bigvee (\widehat{q} \bigwedge \widehat{r}) = (\widehat{p} \bigvee \widehat{q}) \bigwedge (\widehat{p} \bigvee \widehat{r})$, $\quad \widehat{p} \bigwedge (\widehat{q} \bigvee \widehat{r}) = (\widehat{p} \bigwedge \widehat{q}) \bigvee (\widehat{p} \bigwedge \widehat{r})$,

(B6) $\widehat{p} \bigvee \widehat{O} = \widehat{p}$, $\quad \widehat{p} \bigwedge \widehat{I} = \widehat{p}$,

(B7) $\widehat{p} \bigvee NEG\ \widehat{p} = \widehat{I}$, $\quad \widehat{p} \bigwedge NEG\ \widehat{p} = \widehat{O}$.

Vom demonstra prima egalitate din (B1):

$$\widehat{p} \bigvee \widehat{p} = \widehat{p} \overset{def \bigvee}{\Leftrightarrow} \widehat{p \vee p} = \widehat{p} \overset{egal.\ claselor}{\Leftrightarrow} p \vee p \sim p \overset{def. \sim}{\Leftrightarrow} (p \vee p) \leftrightarrow p \text{ este o tautologie,}$$

ceea ce este adevărat, conform primei tautologii (P1) din sistemul $\mathcal{A}_1$ de tautologii.

Restul proprietăţilor se demonstrează folosind, similar, restul tautologiilor din $\mathcal{A}_1$. □

Dacă în algebra Boole $P/_{\sim}$ considerăm submulţimea $P_2 = \{\widehat{O}, \widehat{I}\}$, atunci structura

$$(P_2, \bigvee, \bigwedge, NEG, \widehat{O}, \widehat{I})$$

este o subalgebră a algebrei Boole $P/_{\sim}$, deci este la rândul ei o algebră Boole, şi anume o algebră Boole cu două elemente (deci izomorfă cu algebra Boole canonică, L_2).

Dacă facem asocierile: $\widehat{O}$ - $FALSE$, $\widehat{I}$ - $TRUE$, $\bigvee$ - OR, $\bigwedge$ - AND, NEG - NOT, atunci obţinem algebra Boole cu două elemente,

$$(P_2' = \{FALSE, TRUE\}, OR, AND, NOT, FALSE, TRUE),$$

care este implementată în limbajul PASCAL prin tipul de date BOOLEAN.

Observaţii 1.2.16

1) Am făcut o prezentare semantică, neformalizată, a calculului propoziţiilor.

2) Orice *limbă* este constituită dintr-un vocabular, o gramatică şi totalitatea frazelor posibile ale limbii, construite pe baza vocabularului, cu respectarea regulilor gramaticale.

Prin analogie, vorbim de *limbajul calculului propoziţiilor*, al cărui vocabular este format din elementele mulţimii P_0, din conectorii logici ($\vee$, $\wedge$, $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) şi din parantezele rotunde stângă şi dreaptă, (,), gramatica fiind dată de regulile (R1) - (R3), iar rolul frazelor este jucat de propoziţiile din P.

3) Semnul $\sim$ nu face parte din limbajul calculului propoziţiilor, iar afirmaţiile de forma: $p \sim q$, $p \sim (q \vee r)$ sunt afirmaţii despre limbajul calculului propoziţiilor; spunem că aceste afirmaţii fac parte din *meta-limbajul* calculului propoziţiilor.

Afirmatiile de forma: "dacă $p \sim q$ atunci $\neg p \sim \neg q$" , "dacă $p \sim p'$ şi $q \sim q'$, atunci $(p \vee q) \sim (p' \vee q')$" sunt afirmaţii despre metalimbajul calculului propoziţiilor; spunem că ele fac parte *meta-meta-limbajul* calculului propoziţiilor; deci, este greşit să notăm cuvintele "dacă ... atunci" cu semnul $\rightarrow$ din limbaj.

Chapter 2

Calculul predicatelor (Prezentare neformalizată)

Calculul predicatelor este o extensie a calculului propoziţiilor. In calculul predicatelor (logica predicatelor) se studiază, în afara propoziţiilor, predicatele (= funcţii propoziţionale = propoziţii variabile = propoziţii deschise).

2.1 Predicatele

Definiţie 2.1.1 *Predicatul* este enunţul cu sens care are printre subiectele sale cel puţin unul care este nedeterminat. Un subiect nedeterminat se numeste *variabilă liberă.*

Predicatele se notează astfel:
- cu $P(x)$, dacă este un predicat *unar (monadic)* (= cu un loc liber); x este variabilă liberă.
- cu $P(x, y)$, dacă este *binar* (= cu 2 locuri libere), cu $P(x, y, z)$, dacă este *ternar*(= cu 3 locuri libere), ..., cu $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, dacă este *n-ar* (= cu n locuri libere); dacă un predicat nu este monadic, se zice că este *poliadic.* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sunt variabile libere.

Exemple 2.1.2 1) Enunţurile "Socrate este muritor", "Platon este muritor" sunt propoziţii, adevărate, iar enunţul "x este muritor" este un predicat unar, pe care-l vom nota cu "muritor(x)" sau cu $P(x)$.
2) Enunţurile "$3 < 5$", "$10 < 5$" sunt propoziţii, prima adevărată, a doua falsă, iar enunţul "$n < 5$" este un predicat unar, pe care-l vom nota $Q(n)$.
3) Enunţurile "$2 \leq 3$", "$5 \leq 1$" sunt propoziţii, prima adevărată, a doua falsă, iar enunţul "$x \leq y$" este un predicat binar, pe care-l vom nota cu $F(x, y)$.

Observaţii 2.1.3

1) Dacă P este un predicat care conţine, de exemplu, trei variabile libere, atunci in funcţie de situaţie, putem pune în evidenţă una, două sau toate trei variabilele, sau chiar niciuna, în care caz se scrie respectiv:

$$P(x),\ P(x,y),\ P(x,y,z),\ P.$$

2) Propoziţiile pot fi considerate cazuri particulare (limită) de predicate şi anume: predicate cu 0 locuri.

3) Dacă într-un predicat n-ar ($n \geq 1$) înlocuim toate cele n variabile libere (= subiecte nedeterminate) cu subiecte determinate(=obiecte), atunci obţinem o propoziţie. Deci, înlocuirea (=substituţia, fixarea) tuturor variabilelor libere ale unui predicat este o *modalitate de trecere* de la predicate la propoziţii. Vom vedea că mai există o modalitate: cuantificarea.

4) Locul variabilelor libere nu este indiferent. De exemplu, dacă $P(x,y) \equiv$ "$x > y$", atunci $P(x,y) \not\leftrightarrow P(y,x)$.

Mulţimea (mulţimile) de obiecte (domeniul) a (ale) unui predicat

Definiţie 2.1.4 Fie $P(x)$ un predicat unar. Vom spune că *variabila liberă x ia valori în mulţimea D de obiecte* din universul de discurs U şi vom nota: $x \in D$, dacă pentru orice obiect $a \in D$, $P(a)$ este o propoziţie *cu sens*, adevărată sau falsă.

Exemple 2.1.5

(1) Dacă $P(x) \equiv$"x este muritor", atunci propoziţia "*Socrate* este muritor" are sens şi este adevărată, iar propoziţia "Numarul 5 este muritor" nu are sens. Deci, D este mulţimea oamenilor sau mulţimea animalelor.

(2) Dacă $Q(x) \equiv$ "$n < 5$", atunci propoziţia "$10 < 5$" are sens şi este falsă, iar propoziţia "*Socrate* < 5" nu are sens. Deci, D este $\mathbf{N}$ sau $\mathbf{Q}$ sau $\Re$.

Definiţie 2.1.6 Fie $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un predicat n-ar ($n > 1$).

(i) Vom spune că *variabilele libere $x_1,\ x_2,\ \ldots\ , x_n$ iau valori în mulţimea de obiecte D* din universul de discurs U
(sau, echivalent, că *tuplul de variabile libere $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ia valori în produsul cartezian $D \times D \times \ldots \times D = D^n$*, generat de mulţimea de obiecte D)
şi vom nota aceasta cu: $x_i \in D,\ i = \overline{1,n}$
(sau, echivalent, cu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D^n$)
dacă pentru orice obiecte $a_i \in D,\ i = \overline{1,n}$
(sau, echivalent, pentru orice tuplu de obiecte $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in D^n$)
avem că $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este o propoziţie cu sens, adevărată sau falsă. Vom spune în acest caz că predicatul P este *unisort (cu un singur sort).*

(ii) Vom spune că *variabilele libere $x_1,\ x_2,\ \ldots\ , x_n$ iau valori respectiv în mulţimile de obiecte $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n$* din universul de discurs U
(sau, echivalent, că *tuplul de variabile libere $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ ia valori în produsul cartezian $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n = \prod_{i=1}^{n} D_i$*, generat de mulţimile de obiecte $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n$)

şi vom nota aceasta cu: $x_i \in D_i,\ i = \overline{1,n}$
(sau, echivalent, cu $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} D_i$)
dacă pentru orice obiecte $a_i \in D_i,\ i = \overline{1,n}$
(sau, echivalent, pentru orice tuplu de obiecte $(a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \prod_{i=1}^{n} D_i$)
avem că $P(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ este o propoziţie cu sens, adevărată sau falsă. Vom spune în acest caz că predicatul P este *plurisort (cu mai multe sorturi).*

Observaţii 2.1.7

(1) Mulţimea de obiecte D (mulţimile de obiecte $D_1,\ D_2,\ \ldots,\ D_n$) depinde (depind) de P:

$$D = D_P \quad (D_1 = D_1^P,\ \ldots\ D_n = D_n^P).$$

(2) Semnul $\equiv$ din scrierea: $P(x) \equiv$ "x este muritor" înseamna că $P(x)$ este o notaţie pentru "x este muritor".

Predicat parţial

Definiţie 2.1.8 *Fie $P(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ un predicat n-ar ($n > 1$). Dacă fixăm (precizăm) variabilele $x_2, x_3, \ldots, x_n$ într-un mod oarecare (de exemplu, prin înlocuirea lor cu obiectele $a_2, a_3, \ldots, a_n$ din mulţimea (mulţimile) de obiecte a (ale) lui P), atunci enunţul obţinut, $P(x_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$, este un predicat unar, conţinând doar variabila x_1, care se numeşte predicatul parţial în raport cu x_1 obţinut din P prin fixarea variabilelor $x_2, x_3, \ldots, x_n$.*

Propoziţii complexe (enunţuri complexe)

Din predicate date (sau din predicate şi propoziţii) se construiesc propoziţii complexe cu ajutorul operatorilor propoziţionali $(\neg, \vee, \wedge, \rightarrow, \leftrightarrow)$ şi al cuantificatorilor $(\forall, \exists)$, şi anume:

(1) Fie, pentru început, predicatele unare $P(x)$ şi $Q(x)$.

Enunţurile $\neg P(x),\ P(x) \vee Q(x),\ P(x) \wedge Q(x),\ P(x) \rightarrow Q(x),\ P(x) \leftrightarrow Q(x)$ se construiesc lingvistic ca în cazul propoziţiilor, operatorii propoziţionali afectând părţile predicative, nu şi subiectele. Aceste enunţuri sunt de asemenea predicate.

Enunţurile $(\forall x)P(x)$ şi $(\exists x)P(x)$ se construiesc lingvistic astfel: se scrie întreg textul predicatului (enunţului) $P(x)$ şi se adaugă în faţa lui textul: "Oricare ar fi x, ", respectiv textul "există (cel puţin un)x, astfel încât". Deci, enunţul $(\forall x)P(x)$ se citeşte: "Oricare ar fi x, $P(x)$", iar enunţul $(\exists x)P(x)$ se citeşte: "există x, astfel încât $P(x)$".

Enunţurile $(\forall x)P(x)$ şi $(\exists x)P(x)$ nu se mai referă la obiectul nedeterminat x, ci la mulţimea de obiecte D în care variabila x ia valori, **exprimând o proprietate a lui** D, şi anume:

"**Toate obiectele** din D au proprietatea P",
respectiv

"**există cel puţin un obiect** în D care are proprietatea P".

Observaţii 2.1.9

(1) Cuantificatorii lucrează asupra subiectului (subiectelor) unui enunţ.

(2) Prin cuantificarea predicatului unar $P(x)$, numărul locurilor libere din enunţul astfel obţinut s-a redus la 0. Deci, **enunţurile** $(\forall x)P(x)$ **şi** $(\exists x)P(x)$ **sunt propoziţii**, în care x se numeşte *variabilă legată*. Deci, cuantificarea este a doua modalitate de trecere de la predicate la propoziţii.

(3) Cuantificatorii $\forall$ şi $\exists$ nu sunt independenţi (după cum nici $\vee$ şi $\wedge$ nu sunt independenţi).

(2) Fie acum $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ două predicate binare (sau unul unar şi celălalt binar).

Construcţiile lingvistice ale enunţurilor:
$\neg P(x, y),\ P(x, y) \vee Q(x, y),\ P(x, y) \wedge Q(x, y),\ P(x, y) \rightarrow Q(x, y),\ P(x, y) \leftrightarrow Q(x, y)$
sunt evidente. Toate aceste enunţuri sunt predicate.

Construcţiile lingvistice ale enunţurilor:
(a) $(\forall x)P(x, y),\ (\forall y)P(x, y),\ (\exists x)P(x, y),\ (\exists y)P(x, y)$,
(b) $(\forall x)(\forall y)P(x, y),\ (\forall x)(\exists y)P(x, y),\ (\exists x)(\forall y)P(x, y),\ (\exists x)(\exists y)P(x, y)$,
$(\forall y)(\forall x)P(x, y),\ (\forall y)(\exists x)P(x, y),\ (\exists y)(\forall x)P(x, y),\ (\exists y)(\exists x)P(x, y)$
sunt evidente, cele grupate în (a) fiind predicate, cele grupate în (b) fiind propoziţii.

(3) Construcţiile propoziţiilor complexe în cazul predicatelor ternare, ..., n-are se generalizează într-un mod evident.

Observaţii 2.1.10

(1) Fie $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un predicat n-ar ($n > 1$). Prin o cuatificare, numărul locurilor libere din predicat scade cu o unitate. Deci, enunţurile:
$(\forall x_1)P(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (\exists x_1)P(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (\forall x_2)P(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ (\exists x_2)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
s.a.m.d. sunt predicate $(n-1)$-are, enunţurile:
$(\forall x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
$(\forall x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
$(\exists x_1)(\forall x_2)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
$(\exists x_1)(\exists x_2)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$
ş.a.m.d. sunt predicate $(n-2)$-are, ş.a.m.d., iar enunţurile:
$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\forall x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
$(\forall x_1)(\forall x_2)\ldots(\exists x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
....
$(\exists x_1)(\exists x_2)\ldots(\exists x_n)P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$,
ş.a.m.d. sunt predicate 0-are, adică sunt **propoziţii**.

Variabila care apare lângă un cuantificator (= aflată în aria de cuprindere a unui cuantificator) dispare din predicat, nu mai este liberă, ci *legată*. Evident, aceeaşi variabilă nu poate fi legată de mai multe ori într-un predicat.

(2) Avem deci două modalităţi de trecere de la predicate (= propoziţii deschise) la propoziţii (= propoziţii închise), numite şi modalităţi de *închidere* a unui predicat:
MOD1 - prin **înlocuirea** tuturor variabilelor libere cu obiecte,
MOD2 - prin **cuantificarea** (legarea) tuturor variabilelor libere.

(3) Dacă D, mulţimea de obiecte a unui predicat unar $P(x)$, este finită:

$$D = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\},$$

atunci

$$(\forall x)P(x) \leftrightarrow (P(a_1) \wedge P(a_2) \wedge \ \ldots \ \wedge P(a_n)),$$

$$(\exists x)P(x) \leftrightarrow (P(a_1) \vee P(a_2) \vee \ \ldots \vee \ P(a_n)),$$

adică **cuantificatorul universal coincide cu o conjuncţie**, iar **cuantificatorul existenţial coincide cu o disjuncţie**.

(4) Rezultătul unei cuantificări nu depinde de notaţia (numele) variabilei în raport cu care se face cuantificarea, adică, de exemplu:
$(\exists x)P(x) \leftrightarrow (\exists y)P(y)$ şi $(\exists y)P(x,y,z) \leftrightarrow (\exists u)P(x,u,z)$ (este corect),
dar
$(\exists x)P(x,y) \not\leftrightarrow (\exists y)P(x,y)$ şi $(\exists u)P(x,u,z) \not\leftrightarrow (\exists x)P(x,x,z)$ (greşit).

(5) In cazul unei **cuantificări repetate** nu putem înlocui variabila unei cuantificări cu o variabilă care intervine în altă cuantificare. Deci,
$(\forall x)(\exists y)P(x,y,z) \leftrightarrow (\forall x)(\exists u)P(x,u,z)$ (este corect),
$(\forall x)(\exists y)P(x,y,z) \not\leftrightarrow (\forall x)(\exists x)P(x,x,z)$ (este greşit).

Convenţii de scriere

(1) Vom scrie: $(\forall x)P(x)$ în loc de: $\forall xP(x)$ şi vom scrie: $(\exists x)P(x)$ în loc de: $\exists xP(x)$. Dar scrierea: $(\forall)xP(x)$ este greşită, ca şi scrierea: $(\exists)xP(x)$.

(2) Pentru a uşura scrierea unei propoziţii complexe, vom presupune următoarele:

- (i) cuantificatorii ($\forall$, $\exists$) au prioritate în faţa operatorilor propoziţionali (leagă mai tare), ei având aceeaşi prioritate (leagă la fel de tare);
- (ii) operatorii propoziţionali au priorităţile următoare:
  (I): $\neg$ ($\neg$ leagă cel mai tare),
  (II): $\wedge$,
  (III): $\vee$,
  (IV): $\rightarrow$,
  (V): $\leftrightarrow$ ($\leftrightarrow$ leagă cel mai slab).

2.2 Valoarea de adevăr a unui predicat

Un predicat unar, $P(x)$, poate fi **adevărat**, **fals**, sau **ambivalent**. La fel un predicat n-ar ($n > 1$).

Definiţie 2.2.1 Fie $P(x)$ un predicat unar şi D mulţimea sa de obiecte.

Spunem că $P(x)$ este *adevărat* dacă pentru orice $a \in D$, propoziţia $P(a)$ este adevărată.

Spunem că $P(x)$ este *fals* dacă pentru orice $a \in D$, propoziţia $P(a)$ este falsă.

Spunem că $P(x)$ este *ambivalent* dacă există $a \in D$, astfel încât propoziţia $P(a)$ este adevărată şi există $b \in D$, astfel încât propoziţia $P(b)$ este falsă.

Exemple 2.2.2 Fie $D = \mathbf{N}$ şi fie predicatele unare următoare care au pe D ca domeniu:

(1) $P(n) \equiv$"$n \geq 0$" - este un predicat adevărat;
(2) $P(n) \equiv$"$n < 0$" - este un predicat fals;
(3) $P(n) \equiv$"$n \geq 5$" - este un predicat ambivalent.

Fie $P(x)$ un predicat unar oarecare. Enunţurile $(\forall x)P(x)$ şi $(\exists x)P(x)$ sunt propoziţii, a căror valoare de adevăr se defineşte astfel:

Definiţie 2.2.3

(i) Propoziţia $(\forall x)P(x)$ este *adevărată* dacă şi numai dacă predicatul $P(x)$ este adevărat; propoziţia $(\forall x)P(x)$ este *falsă* dacă şi numai dacă predicatul $P(x)$ este fals sau ambivalent.

(ii) Propoziţia $(\exists x)P(x)$ este *adevărată* dacă şi numai dacă predicatul $P(x)$ este adevărat sau ambivalent; propoziţia $(\exists x)P(x)$ este *falsă* dacă şi numai dacă predicatul $P(x)$ este fals.

Fie $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ un predicat n-ar ($n > 1$) oarecare. El poate fi adevărat, fals sau ambivalent, definiţiile fiind evidente.

Exercitii

(1) Fie $P(x)$ un predicat unar. Să se demonstreze că următoarea propoziţie este întotdeauna adevărată:

$$h \equiv \text{"}\neg[(\forall x)P(x)] \leftrightarrow (\exists x)[\neg P(x)]\text{"}.$$

Dem.

$$h \equiv \text{" }(\neg\neg[(\forall x)P(x)] \vee (\exists x)[\neg P(x)]) \wedge (\neg[(\exists x)(\neg P(x))] \vee \neg[(\forall x)P(x)])\text{ "}.$$

Să notăm cei doi termeni ai conjuncţiei astfel:

$$h_1 \equiv \text{"}\neg\neg[(\forall x)P(x)] \vee (\exists x)[\neg P(x)]\text{"} \leftrightarrow \text{"}(\forall x)P(x) \vee \exists x)[\neg P(x)]\text{"},$$

deoarece $\neg\neg p \leftrightarrow p$ şi

$$h_2 \equiv \text{"}\neg[(\exists x)(\neg P(x))] \vee \neg[(\forall x)P(x)]\text{"}.$$

h este atunci adevărată dacă şi numai dacă h_1 este adevărată şi h_2 este adevărată. Să notăm $p \equiv$ "$(\forall x)P(x)$".

• Să arătăm că propoziţia h_1 este adevărată:
- dacă propoziţia p este adevărată, atunci h_1 este adevărată;
- dacă propoziţia p este falsă, atunci predicatul $P(x)$ este fals sau ambivalent; rezultă că predicatul $\neg P(x)$ este adevărat sau ambivalent; deci propoziţia $(\exists x)[\neg P(x)]$ este adevărată; rezultă că h_1 este adevărată.

• Să arătăm că propoziţia h_2 este adevărată:
- dacă propoziţia p este adevărată, atunci predicatul $P(x)$ este adevărat; atunci predicatul $\neg P(x)$ este fals; deci propoziţia $(\exists x)[\neg P(x)]$ este falsă; rezultă că propoziţia $\neg[(\exists x)(\neg P(x))]$ este adevărată şi, deci, h_2 este adevărată;
- dacă propoziţia p este falsă, atunci propoziţia $\neg p$ este adevărată şi deci h_2 este adevărată.

Deci, h este adevărată întotdeauna.

(2) Fie $P(x)$ un predicat unar oarecare. Să se demonstreze că predicatul următor este adevărat:

$$H(y) \equiv \text{"}(\forall x)P(x) \to P(y)\text{"}.$$

Dem.

Conform definiţiei, predicatul $H(y)$ este adevărat dacă şi numai dacă, pentru orice obiect $a \in D_H$ (D_H este domeniul lui H), $H(a)$ este o propoziţie adevărată. Fie atunci $a \in D_H$ un obiect oarecare, fixat, altfel arbitrar; să arătăm că $H(a)$ este o propoziţie adevărată:

$$H(a) \equiv \text{"}(\forall x)P(x) \to P(a)\text{"} \leftrightarrow \text{"}\neg[(\forall x)P(x)] \vee P(a)\text{"}.$$

Să notăm $p \equiv$ "$(\forall x)P(x)$"; atunci
- dacă propoziţia p este adevărată, atunci $P(x)$ este un predicat adevărat, deci $P(a)$ este o propoziţie adevărată şi, prin urnare, $H(a)$ este o propoziţie adevărată;
- dacă propoziţia p este falsă, atunci propoziţia $\neg p$ este adevărată şi, deci, propoziţia $H(a)$ este adevărată.

Deci, în ambele cazuri posibile, $H(a)$ este o propoziţie adevărată. Rezultă, conform (**PG**), că pentru orice obiect $a \in D_H$, propoziţia $H(a)$ este adevărată, deci $H(y)$ este un predicat adevărat.

(3) Fie p o propoziţie şi $Q(x)$ un predicat unar oarecare. Să se demonstreze că următoarea propoziţie este întotdeauna adevărată:

$$h \equiv \text{"}[(\forall x)(p \to Q(x))] \to [p \to (\forall x)Q(x)]\text{"}.$$

Dem.

$h \leftrightarrow \neg[(\forall x)(\neg p \vee Q(x))] \vee [\neg p \vee (\forall x)Q(x)]$
$\leftrightarrow (\exists x)[\neg(\neg p \vee Q(x))] \vee [\neg p \vee (\forall x)Q(x)]$
$\leftrightarrow (\exists x)[p \wedge \neg Q(x)] \vee [\neg p \vee (\forall x)Q(x)]$,
conform primului exerciţiu, faptului că $\neg\neg p \leftrightarrow p$ şi conform legilor De Morgan.

- Dacă p este falsă, atunci $\neg p$ este adevărată şi deci h este adevărată.
- Dacă p este adevărată, atunci să notăm:

$$h_1 \equiv "(\exists x)[p \wedge \neg Q(x)]", \quad h_2 \equiv "[\neg p \vee (\forall x)Q(x)]".$$

- dacă predicatul $Q(x)$ este adevărat, atunci propoziţia $(\forall x)Q(x)$ este adevărată, deci h_2 este adevărată; rezultă h adevărată;
- dacă predicatul $Q(x)$ este fals, atunci predicatul $\neg Q(x)$ este adevărat; rezultă că $p \wedge \neg Q(x)$ este un predicat adevărat, de unde obţinem că h_1 este adevărată, deci h este adevărată;
- dacă predicatul $Q(x)$ este ambivalent, atunci predicatul $\neg Q(x)$ este ambivalent; rezultă că $p \wedge \neg Q(x)$ este un predicat ambivalent, de unde obţinem că h_1 este adevărată, deci h este adevărată.

Deci, h este întotdeauna o propoziţie adevărată.

Definiţie 2.2.4

Se numeşte *lege logică* orice enunţ complex (adică format cu ajutorul operatorilor propoziţionali ($\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$) şi al cuantificatorilor ($\forall$, $\exists$) din alte enunţuri, numite *enunţuri componente*) care are proprietatea că este adevărat independent de valorile de adevăr ale enunţurilor componente. O lege logică care se construieşte fără cuatificatori se numeşte *tautologie.* O lege logică în construcţia căreia intervin şi cuantificatorii nu are un nume special în literatura de specialitate; noi o vom numi *tautologie cuantificată.*

Un enunţ complex care este fals, oricare ar fi valorile de adevăr ale enunţurilor componente, se numeşte *antilogie* - dacă nu conţine cuantificatorii, şi *antilogie cuantificată* - dacă conţine cuantificatori.

Exemple 2.2.5 Exemple de antilogii cuantificate

1. $(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)[\neg P(x)]$,
2. $(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)[\neg P(x)]$.

Exemple 2.2.6 Exemple de tautologii cuantificate

Vom grupa exemplele de tautologii cuantificate în opt grupe:

(I) echivalenţele cuantificatorilor:

1. $[(\forall x)P(x)] \leftrightarrow \neg[(\exists x)(\neg P(x))]$,
2. $[(\exists x)P(x)] \leftrightarrow \neg[(\forall x)(\neg P(x))]$,
3. $\neg[(\forall x)P(x)] \leftrightarrow (\exists x)[\neg P(x)]$, (vezi exerciţiul 1)
4. $\neg[(\exists x)P(x)] \leftrightarrow (\forall x)[\neg P(x)]$.

(II):

1. $(\forall x)P(x) \vee (\exists x)[\neg P(x)]$,
2. $(\exists x)P(x) \vee (\forall x)[\neg P(x)]$.

(III):

1. $\neg[(\forall x)P(x) \wedge (\exists x)(\neg P(x))]$,
2. $\neg[(\exists x)P(x) \wedge (\forall x)(\neg P(x))]$.

(IV):
1. $(\forall x)P(x) \to P(y)$, (vezi exerciţiul 2)
2. $P(y) \to (\exists x)P(x)$.

(V) (o consecinţă a (IV)):
$(\forall x)P(x) \to (\exists x)P(x)$.

(VI) Fie p o propoziţie şi $Q(x)$ un predicat unar:
1. $[(\forall x)(p \to Q(x))] \to [p \to (\forall x)Q(x)]$, "Regula ($\to\ \forall$)" (vezi exerciţiul 3)
2. $[(\forall x)(Q(x) \to p)] \to [(\exists x)Q(x) \to p]$, "Regula ($\exists\ \to$)".

(VII):
1. $(\forall x)[P(x) \wedge Q(x)] \leftrightarrow [(\forall x)P(x) \wedge (\forall x)Q(x)]$,
2. $(\exists x)[P(x) \vee Q(x)] \leftrightarrow [(\exists x)P(x) \vee (\exists x)Q(x)]$,
3. $(\forall x)[P(x) \to Q(x)] \to [(\forall x)P(x) \to (\forall x)Q(x)]$,
4. $(\forall x)[P(x) \leftrightarrow Q(x)] \to [(\forall x)P(x) \leftrightarrow (\forall x)Q(x)]$.

(VIII):
1. $(\forall x)(\forall y)P(x,y) \leftrightarrow (\forall y)(\forall x)P(x,y)$,
2. $(\exists x)(\exists y)P(x,y) \leftrightarrow (\exists y)(\exists x)P(x,y)$,
3. $(\exists x)(\forall y)P(x,y) \to (\forall y)(\exists x)P(x,y)$.

Observaţie 2.2.7 Toate regulile de deducţie sunt consecinţe a trei reguli fundamentale: "modus ponens", "$\to\ \forall$", "$\exists\ \to$". Se poate arăta că pentru nevoile unei teorii deductive ne putem rezuma doar la două reguli: "modus ponens" şi una din celelalte două.

Observaţie 2.2.8 Semnificaţia scrierilor din matematică $\forall x > 0, P(x)$ şi $\exists x > 0, P(x)$ este urmatoarea:

$$\forall x > 0, P(x) \equiv (\forall x)(x > 0 \to P(x)),$$

$$\exists x > 0, P(x) \equiv (\exists x)(x > 0 \wedge P(x)).$$

In consecinţă, dacă le negăm, obţinem respectiv:

$$\begin{aligned}\neg(\forall x > 0, P(x)) &\equiv \neg((\forall x)(x > 0 \to P(x))) \\ &\leftrightarrow (\exists x)\neg(x > 0 \to P(x)) \\ &\leftrightarrow (\exists x)\neg(\neg(x > 0) \vee P(x)) \\ &\leftrightarrow (\exists x)(x > 0 \wedge \neg P(x)) \\ &\equiv \exists x > 0, \neg P(x).\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\neg(\exists x > 0, P(x)) &\equiv \neg((\exists x)(x > 0 \land P(x))) \\
&\leftrightarrow (\forall x)\neg(x > 0 \land P(x)) \\
&\leftrightarrow (\forall x)(\neg(x > 0) \lor \neg P(x)) \\
&\leftrightarrow (\forall x)(x > 0 \to \neg P(x)) \\
&\equiv \forall x > 0, \neg P(x).
\end{aligned}
$$

Calculul predicatelor prezentat se mai numeşte *calculul predicatelor de ordinul I*. Dacă variabilele libere $x, y, z, \ldots$ din predicate sunt mulţimi, atunci calculul predicatelor corespunzător se zice de *ordinul II*; dacă ele sunt mulţimi de mulţimi, calculul se zice de *ordinul III* ş.a.m.d.

Chapter 3

Latici

3.1 Mulţimi (pre)ordonate

Definiţii 3.1.1 Fie A o mulţime nevidă.

O relaţie binară R pe A se numeşte *relaţie de ordine (parţială)* dacă sunt verificate următoarele axiome: pentru orice $x, y, z \in A$,
(O_1) xRx (reflexivitatea),
(O_2) dacă xRy şi yRx, atunci $x = y$ (antisimetria),
(O_3) dacă xRy şi yRz, atunci xRz (tranzitivitatea).

Dacă R mai verifică şi axioma:
(O_4) pentru orice $x, y \in A$, xRy sau yRx (x şi y sunt compatibile),
atunci R se numeşte *relaţie de ordine totală*.

O relaţie binară R pe A se numeşte *relaţie de preordine* dacă verifică (O_1) şi (O_3).

O pereche (A, R) se numeşte
- *mulţime (parţial) ordonată*, dacă R este o relaţie de ordine (parţială) pe A,
- *mulţime total ordonată* sau *mulţime liniară (liniar ordonată)* sau *lanţ*, dacă R este o relaţie de ordine totală pe A,
- *mulţime preordonată*, dacă R este o relaţie de preordine pe A.

Exemple 3.1.2

(1) Mulţimile $(\mathbf{R}, \leq)$, $(\mathbf{Q}, \leq)$, $(\mathbf{Z}, \leq)$, $(\mathbf{N}, \leq)$ sunt lanţuri.

(2) Dacă X este o mulţime nevidă, atunci $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ este o mulţime ordonată; ea este total ordonată dacă şi numai dacă X este formată dintr-un singur element.

(3) Dacă X este o mulţime nevidă, atunci $(X, =)$ este o mulţime ordonată (în acest caz R este $\Delta = \{(x, x) \mid x \in X\}$).

(4) Dacă pe mulţimea $\mathbf{N}^* = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ definim, pentru orice x, y, $x \preceq y \Leftrightarrow x \mid y$ (x este divizibil cu y), atunci $(\mathbf{N}^*, \preceq)$ este o mulţime ordonată, dar nu total ordonată.

(5) Dacă pe mulţimea C definim relaţia binară $\preceq$ astfel: pentru orice $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2 \in C$,

$$z_1 \preceq z_2 \Leftrightarrow (a_1 \leq a_2,\ b_1 \leq b_2),$$

atunci (C,
preced) este o mulţime ordonată, dar nu total ordonată.

(6) Relaţia $x \preceq y \Leftrightarrow x \mid y$, definită pe $\mathbf{Z}$, este o relaţie de preordine, care nu este relaţie de ordine.

(7) Fie A mulţimea ofiţerilor dintr-o unitate militară. Pentru $x, y \in A$, spunem că $x \leq y$ dacă gradul lui x este mai mic sau egal cu gradul lui y. Atunci $(A, \leq)$ este o mulţime preordonată, care nu este ordonată.

3.1.1 Principiul dualităţii. Diagrama Hasse

Principiul dualităţii pentru mulţimi (pre)ordonate este următorul: Orice enunţ cu privire la mulţimea (pre) ordonată $(A, \leq)$ rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul său schimbăm relaţia de (pre) ordine $\leq$ cu relaţia de (pre) ordine *inversă*, $\geq$ ($y \geq x \Leftrightarrow x \leq y$, pentru orice $x, y \in A$). Structura $(A, \geq)$ astfel obţinută este tot o mulţime (pre) ordonată, numită *duala* lui $(L, \leq)$.

Diagrama Hasse
O relaţie binară $\leq$ pe o mulţime finită A se va reprezenta grafic prin *diagrama Hasse* astfel: elementele mulţimii sunt reprezentate prin puncte, iar faptul că $x < y$ (adică $x \leq y$ şi $x \neq y$) şi nu există z cu $x < z < y$ se reprezintă printr-o linie care leagă cele doua puncte, y fiind situat mai sus ca x:

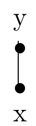


Diagrama Hasse este utilă pentru recunoaşterea proprietăţilor relaţiei binare.

Exemplu de diagramă Hasse.
Dacă $A = \{a, b, c, d\}$ şi $R = \{(a, a), (b, b), (c, c), (d, d), (a, b), (a, c), (a, d), (b, c), (b, d)\}$, atunci (A, R) este o mulţime ordonată, ce va fi reprezentată grafic de diagrama Hasse din Figura 3.1.

Convenţie. O relaţie de (pre)ordine arbitrară pe o mulţime A va fi notată de acum înainte prin $\leq$.

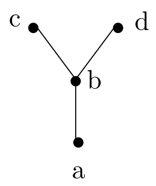


Figure 3.1: Diagrama Hasse a mulţimii ordonate (A, R)

3.1.2 Reprezentarea unei relaţii binare pe o mulţime finită prin matrice booleană

Să observăm că oricărei mulţimi finite, *"concrete"* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ îi putem asocia o singură mulţime finită, *"abstractă"* $\{1, 2, \ldots, n\}$, abstracţie făcând de un izomorfism, şi că oricărei mulţimi finite *"abstracte"* $\{1, 2, \ldots, n\}$ îi putem asocia o infinitate de mulţimi finite *"concrete"* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Fie o mulţime finită $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ($A = \{1, 2, \ldots, n\}$) şi R o relaţie binară pe A. Vom asocia lui R o matrice booleană $M_R = (m_{ij})_{i,j \in \{1,2,\ldots,n\}}$ astfel:

$$m_{ij} == \begin{cases} 1, & \text{dacă } (x_i, x_j) \in R\ ((i,j) \in R) \\ 0, & \text{dacă } (x_i, x_j) \notin R\ ((i,j) \notin R). \end{cases}$$

Se observă că mulţimea relaţiilor binare pe o mulţime finită cu n elemente este în corespondenţă biunivocă cu mulţimea matricilor booleene de ordinul n. Deci, o relaţie binară pe o mulţime finită cu n elemente poate fi dată, alternativ, printr-o matrice booleană de ordin n.

De exemplu, relaţia R, definită mai sus pe mulţimea $A = \{a, b, c, d\}$, are următoarea matrice booleană asociată:

$$M_R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Condiţiile (O_1) - (O_4) din Definiţiile 1, verificate de o relaţie binară R pe o mulţime A finită cu n elemente, pot fi reformulate echivalent pentru matricea booleană asociată, M_R, astfel:
(O'_1) pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $m_{ii} = 1$,
(O'_2) M_R este o matrice antisimetrică (pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $m_{ij} = 1$ implică $m_{ji} = 0$),
(O'_3) pentru orice $i, j, k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $m_{ij} = 1$ şi $m_{jk} = 1$ implică $m_{ik} = 1$,
(O'_4) pentru orice $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, $m_{ij} = 1$ sau $m_{ji} = 1$.

Exerciţiu 3.1.3
1. Să se scrie un program pentru determinarea tuturor relaţiilor de ordine pe o

mulţime finită.
2. Se dă o relaţie binară pe o mulţime finită prin matricea booleană asociată. Să se scrie un program pentru a verifica dacă relaţia este de ordine, parţială sau totală, sau este o relaţie de preordine.

3.1.3 Prim (ultim) element, minorant (majorant), infimum (supremum). Axioma lui Zorn

Fie $(A, \leq)$, $(B, \leq)$ două mulţimi ordonate. O funcţie $f : A \to B$ se numeşte *izotonă* dacă $x \leq y$ implică $f(x) \leq f(y)$, pentru orice $x, y \in A$.

Fie $(A, \leq)$ o mulţime ordonată. Un element $u \in A$ se numeşte *prim element* sau *cel mai mic element* (*ultim element* sau *cel mai mare element*) dacă $u \leq x$ (respectiv $x \leq u$) pentru orice $x \in A$.

Atât primul element, cât şi ultimul element, al unei mulţimi ordonate sunt unici (atunci când există). Primul element va fi notat de obicei cu 0, iar ultimul element cu 1.

O mulţime ordonată cu 0 şi 1 se numeşte *mărginită*.

Exemple 3.1.4 Considerăm mulţimile ordonate din Figura 3.2. In cazul a) există prim şi ultim element (este mulţime ordonată mărginită), în cazul b) există numai ultim element, iar în cazul c) există numai prim element.

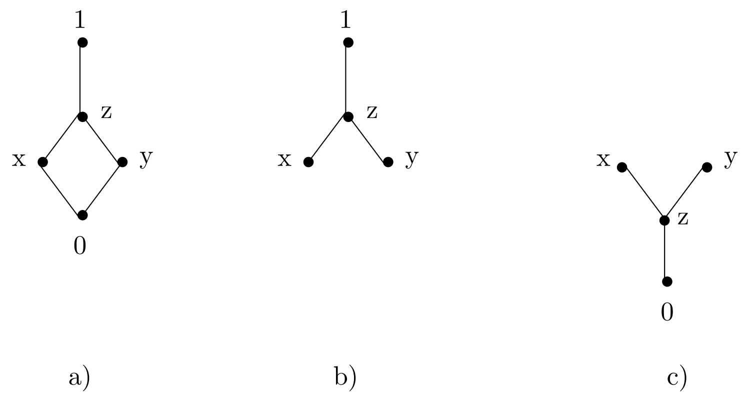


Figure 3.2: Exemple de mulţimi ordonate cu prim şi/sau ultim element

Definiţii 3.1.5 Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată.

Fie X o submulţime a lui A. Un element $a \in A$ este un *minorant* (*majorant*) al lui X dacă $a \leq x$ (respectiv $x \leq a$) pentru orice $x \in X$.

Sau, echivalent, fie $(x_i)_{i \in I}$ o familie oarecare de elemente din A indexată de I, I o mulţime oarecare, eventual infinită (adică un element al lui A^I (adică o funcţie $f : I \to A$)). Se ştie că familiei $(x_i)_{i \in I}$ îi corespunde submulţimea $\{x_i \in A \mid i \in I\}$ a lui A, iar submulţimii X a lui A îi corespunde familia particulară $(x = x_x)_{x \in X}$ de elemente din A. Un element $a \in A$ este un *minorant* (*majorant*) al familiei $(x_i)_{i\in I}$, dacă $a \leq x_i$ (respectiv $x_i \leq a$), pentru orice $i \in I$.

Exemplu 3.1.6 Considerăm mulţimea ordonată $(A = \{a, b, c, d, e, f\}, \leq)$ din Figura 3.3, fără prim şi ultim element. Dacă $X = \{c, d\}$, atunci mulţimea minoranţilor lui X este $\{a, b, c\}$, iar mulţimea majoranţilor lui X este $\{d, e, f\}$.

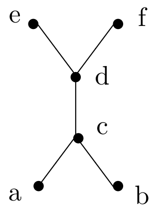


Figure 3.3: Mulţime ordonată

Atât mulţimea minoranţilor, cât şi mulţimea majoranţilor, pot fi vide.

Definiţie 3.1.7 Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată.

Fie X o submulţime a lui A. *Infimumul* lui X este cel mai mare minorant al lui X şi se notează $\inf X$. Atunci relaţia $a = \inf X (\in A)$ este caracterizată de proprietăţile:
(i) a este un minorant al lui X (adică $a \leq x$ pentru orice $x \in X$),
(ii) a este cel mai mare minorant al lui X, adică, dacă b este un minorant al lui X (dacă $b \leq x$ pentru orice $x \in X$), atunci $b \leq a$.

Echivalent, fie $(x_i)_{i\in I}$ o familie oarecare de elemente din A, indexată de I (I o mulţime oarecare, eventual infinită). *Infimumul* familiei $(x_i)_{i\in I}$ este cel mai mare minorant al ei şi se notează $\inf_{i\in I} x_i$. Deci, un element $a \in A$ este *infimumul* familiei $(x_i)_{i\in I}$ dacă verifică proprietăţile:

(i) a este un minorant al familiei $(x_i)_{i\in I}$ (adică $a \leq x_i$, pentru orice $i \in I$);

(ii) a este *cel mai mare minorant* al familiei $(x_i)_{i\in I}$, adică dacă b este un minorant al familiei $(x_i)_{i\in I}$ (dacă $b \leq x_i$ pentru orice $i \in I$), atunci $b \leq a$.

Dual, avem următoarea definiţie a *supremumului*:

Definiţie 3.1.8 Fie $(A, \leq)$ o mulţime parţial ordonată.

Fie X o submulţime a lui A. *Supremumul* lui X este cel mai mic majorant al lui X şi se notează $\sup X$. Atunci relaţia $a = \sup X (\in A)$ este caracterizată de proprietăţile:
(i) a este un majorant al lui X (adică $x \leq a$ pentru orice $x \in X$),
(ii) a este cel mai mic majorant al lui X, adică, dacă b este un majorant al lui X (dacă $x \leq b$ pentru orice $x \in X$), atunci $a \leq b$.

Echivalent, fie $(x_i)_{i \in I}$ o familie oarecare de elemente din A, indexată de I, I o mulţime oarecare, eventual infinită. *Supremumul* familiei $(x_i)_{i \in I}$ este cel mai mic majorant al ei şi se notează $\sup_{i \in I} x_i$. Deci, un element $a \in A$ este *supremumul* familiei $(x_i)_{i \in I}$ dacă verifică proprietăţile:

(i) a este un majorant al familiei $(x_i)_{i \in I}$ (adică $x_i \leq a$, pentru orice $i \in I$);

(ii) a este *cel mai mic majorant* al familiei $(x_i)_{i \in I}$, adică dacă b este un majorant al familiei $(x_i)_{i \in I}$ (dacă $x_i \leq b$ pentru orice $i \in I$), atunci $a \leq b$.

Observaţii 3.1.9
1) Deci, elementul $\inf_{i \in I} x_i$ al lui A este caracterizat de:
(i) $\inf_{i \in I} x_i \leq x_i$, pentru orice $i \in I$ şi
(ii) pentru orice $b \in A$ care verifica $b \leq x_i$ pentru orice $i \in I$, avem $b \leq \inf_{i \in I} x_i$,
iar elementul dual, $\sup_{i \in I} x_i$, al lui A este caracterizat de:
(i) $x_i \leq \sup_{i \in I} x_i$, pentru orice $i \in I$ şi
(ii) pentru orice $b \in A$ care verifica $x_i \leq b$ pentru orice $i \in I$, avem $\sup_{i \in I} x_i \leq b$.
2) Infimumul mulţimii finite (familiei finite) $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = (x_i)_{i \in \{1,2,\ldots,n\}}$ va fi notat $\inf(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sau $\inf_{i=\overline{1,n}} x_i$, iar supremumul ei va fi notat $\sup(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sau $\sup_{i=\overline{1,n}} x_i$. Dacă $n = 2$, infimumul familiei (mulţimii) $\{x, y\}$ va fi notat $\inf(x, y)$, iar supremumul ei va fi notat $\sup(x, y)$.

Fie $(A, \leq)$ o mulţime ordonată. Un element *maximal* (*minimal*) este un element m al lui A cu proprietatea că $m \leq a$ (respectiv $a \leq m$) implică $a = m$.

O mulţime ordonată poate avea mai multe elemente maximale şi/sau mai multe elemente minimale.

Exemple 3.1.10
1) $(R, \leq)$ nu are niciun element maximal şi niciun element minimal.
2) In $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ elementele minimale sunt de forma $\{x\}$, $x \in X$, iar X este element maximal.
3) Ultimul element al unei mulţimi ordonate este şi element maximal, iar primul element este şi element minimal. Reciproca nu este adevărată.

O mulţime ordonată $(A, \leq)$ se numeşte *inductivă* dacă orice parte total ordonată a sa admite un majorant.

Axioma lui Zorn: Orice mulţime ordonată inductivă admite un element maximal.

3.2 Latici

3.2.1 Latici Ore şi latici Dedekind. Echivalenţa lor

Definiţie 3.2.1
O mulţime ordonată $\mathcal{L} = (L, \leq)$ se numeşte *latice Ore* dacă pentru orice două elemente x, y din L există $\inf(x, y)$ şi $\sup(x, y)$.

Propoziţia 3.2.2 *Intr-o latice Ore $\mathcal{L}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente: pentru orice $x, y \in L$,*
(i) $x \leq y$,
(ii) $\sup(x, y) = y$,
(iii) $\inf(x, y) = x$.

Dem.
(i) $\Rightarrow$ (ii): Intr-adevăr, presupunând că $x \leq y$, atunci deoarece avem şi $y \leq y$, conform reflexivităţii lui $\leq$, rezultă că y este majorant al $\{x, y\}$. Fie z un majorant oarecare al $\{x, y\}$, deci $x \leq z$ şi $y \leq z$. Deci $y \leq z$, adică y este cel mai mic majorant al $\{x, y\}$, deci $\sup(x, y) = y$.
(ii) $\Rightarrow$ (i): Intr-adevăr, $\sup(x, y) = y$ înseamnă printre altele că $x \leq y$ şi $y \leq y$; deci $x \leq y$.
Similar se demonstrează că (i) $\Leftrightarrow$ (iii). $\square$

Propoziţia 3.2.3 *Fie $\mathcal{L}$ o latice Ore. Următoarele proprietăţi sunt verificate: pentru orice $x, y, z \in L$,*
(O1) $\inf(x, x) = x$, $\sup(x, x) = x$ *(idempotenţa lui* inf, sup*)*
(O2) $\inf(x, y) = \inf(y, x)$, $\sup(x, y) = \sup(y, x)$ *(comutativitatea lui* inf, sup*)*
(O3) $\inf(x, y, z) = \inf(x, \inf(y, z)) = \inf(\inf(x, y), z)$,
$\sup(x, y, z) = \sup(x, \sup(y, z)) = \sup(\sup(x, y), z)$ *(asociativitatea lui* inf, sup*)*
(O4) $\inf(x, \sup(x, y)) = x$, $\sup(x, \inf(x, y)) = x$ *(cele două proprietăţi de absorbţie).*

Dem.
(O1): Să demonstrăm că $\sup(x, x) = x$. Fie $a = \sup(x, x)$; deci $x \leq y$ şi pentru orice $b \in L$ care verifică $x \leq b$ avem $a \leq b$. Dar, $x \in L$ verifică $x \leq x$, conform reflexivităţii; luăm $b = x$; rezultă $a \leq x$. Deci, $a = x$, adică $\sup(x, x) = x$. La fel se demonstrează că $\inf(x, x) = x$.
(O2): Să demonstrăm că $\sup(x, y) = \sup(y, x)$. Fie $u = \sup(x, y)$ şi $v = \sup(y, x)$; deci avem: $x \leq u$, $y \leq u$ şi $y \leq v$, $x \leq v$ şi, pentru orice z care verifică $x, y \leq z$, avem $u \leq z$ şi $v \leq z$. Se observă că u, v sunt un astfel de z, deci $u \leq v$ şi $v \leq u$, de unde obţinem $u = v$. La fel se demonstrează că $\inf(x, y) = \inf(y, x)$.
(O3) Să demonstrăm că $\sup(x, y, z) = \sup(x, \sup(y, z))$. Să notăm $t = \sup(y, z)$, $u = \sup(x, y, z)$, $v = \sup(x, t)$; atunci avem:
(i) $y, z \leq t$ şi pentru orice $Z \in L$ cu $y, z \leq Z$, avem $t \leq Z$,
(ii) $x, y, z \leq u$ şi pentru orice $Z' \in L$ cu $x, y, z \leq Z'$, avem $u \leq Z'$,
(iii) $x, t \leq v$ şi pentru orice $Z'' \in L$ cu $x, t \leq Z''$, avem $v \leq Z''$.
Să arătăm că $u = v$:
Din $y, z \leq t$ şi $t \leq v$ obţinem că $y, z \leq v$; dar avem şi $x \leq v$. Rezultă că $x, y, z \leq v$; luăm $Z' = v$ în (ii) şi obţinem că $u \leq v$.

Din $y, z \leq u$, luând $Z = u$ în (i), obţinem că $t \leq u$. Dar avem şi că $x \leq u$; deci, $x, t \leq u$; luând $Z'' = u$ în (iii), obţinem că $v \leq u$. Astfel, $u = v$. Restul se demonstrează similar. □

Definiţie 3.2.4 Fie $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ structura formată din mulţimea L şi două operaţii binare definite pe L. $\mathcal{L}$ se numeşte *latice Dedekind* dacă următoarele proprietăţi (axiome) sunt verificate: pentru orice $x, y, z \in L$,

(L1) $x \wedge x = x$, $x \vee x = x$ (idempotenţa lui $\wedge$, $\vee$)
(L2) $x \wedge y = y \wedge x$, $x \vee y = y \vee x$ (comutativitatea lui $\wedge$, $\vee$)
(L3) $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$, $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ (asociativitatea lui $\wedge$, $\vee$)
(L4) $x \wedge (x \vee y) = x$, $x \vee (x \wedge y) = x$ (cele două proprietăţi de absorbţie).

Propoziţia 3.2.5 *Intr-o latice Dedekind $\mathcal{L}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente: pentru orice $x, y \in L$,*

(i) $x \wedge y = x$,
(ii) $x \vee y = y$.

Dem. Dacă $x \wedge y = x$, atunci $x \vee y = (x \wedge y) \vee y \overset{(L2)}{=} y \vee (y \wedge x) \overset{(L4)}{=} y$. Dacă $x \vee y = y$, atunci $x \wedge y = x \wedge (x \vee y) \overset{(L4)}{=} x$. □

Echivalenţa demonstrată ne permite să definim următoarea relaţie binară pe o latice Dedekind $\mathcal{L}$: pentru orice $x, y \in L$,

$$x \leq y \Leftrightarrow x \wedge y = x \Leftrightarrow x \vee y = y. \tag{3.1}$$

Vom arăta acum că cele două definiţii, Ore şi Dedekind, ale laticilor sunt echivalente.

Teorema 3.2.6

(1) Fie $(L, \leq)$ o latice Ore. Să definim

$$\Phi(\mathcal{L}) \overset{def}{=} (L, \wedge, \vee),$$

unde pentru orice $x, y \in L$,

$$x \wedge y \overset{def}{=} \inf(x, y), \quad x \vee y \overset{def}{=} \sup(x, y). \tag{3.2}$$

Atunci structura $\Phi(\mathcal{L})$ este o latice Dedekind.

(1') Fie $(L, \wedge, \vee)$ o latice Dedekind. Să definim

$$\Psi(\mathcal{L}) \overset{def}{=} (L, \leq),$$

unde pentru orice $x, y \in L$,

$$x \leq y \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad x \vee y = y. \tag{3.3}$$

Atunci relaţia $\leq$ este de ordine, iar structura $\Psi(\mathcal{L})$ este o latice Ore, unde pentru orice $x, y \in L$,

$$\inf(x, y) = x \wedge y, \quad \sup(x, y) = x \vee y. \tag{3.4}$$

(2) Cele două aplicaţii, Φ şi Ψ, sunt inverse una alteia.

Dem.
(1): Cele două operaţii sunt bine definite (adică există $x \wedge y$ şi $x \vee y$ pentru orice $x, y \in L$, conform definiţiei laticii Ore). Trebuie să demonstrăm că cele două operaţii verifică axiomele (L1)-(L4). Intr-adevăr, $x \wedge x = \inf(x, x) = x$ şi $x \vee x = \sup(x, x) = x$, conform (O1) din Propoziţia 3.2.3, deci (L1) este verificată. Similar, (L2)-(L4) rezultă respectiv din (O2)-(O4).

(1'):
• Trebuie să arătăm că relaţia $\leq$ este reflexivă, antisimetrică şi tranzitivă.
$\leq$ este reflexivă, adică pentru orice $x \in L$, $x \leq x$: fie $x \in L$ fixat, altfel arbitrar; $x \leq x \overset{def}{\Leftrightarrow} x \vee x = x$, ceea ce este adevărat, conform (L1). Rezultă, conform (**Principiului Generalizării**), că pentru orice $x \in L$, $x \leq x$. Restul se demonstrează similar. Deci, $(L, \leq)$ este o mulţime parţial ordonată.

• Trebuie să demonstrăm acum că pentru orice $x, y \in L$, $\sup(x, y) = x \vee y$. Fie $x, y \in L$, obiecte (elemente) fixate, altfel arbitrare; pentru a demonstra că $\sup(x, y) = x \vee y$, trebuie să arătăm două lucruri:

(i) $x \vee y$ este majorant al $\{x, y\}$, adică $x, y \leq x \vee y$; într-adevăr, $x \vee (x \vee y) \overset{(L3)}{=} (x \vee x) \vee y \overset{(L1)}{=} x \vee y$, deci $x \leq x \vee y$, conform (3.3), şi $y \vee (x \vee y) \overset{(L2)}{=} (x \vee y) \vee y \overset{(L3)}{=} x \vee (y \vee y) \overset{(L1)}{=} x \vee y$, deci $y \leq x \vee y$.

(ii) Fie $Z \in L$ astfel încât $x, y \leq Z$, adică $x \vee Z = Z$ şi $y \vee Z = Z$, conform (3.3); trebuie să demonstrăm că $x \vee y \leq Z$. Intr-adevăr, $(x \vee y) \vee Z = (x \vee y) \vee (x \vee Z) \overset{(L3)}{=} x \vee (y \vee x) \vee Z \overset{(L2)}{=} x \vee (x \vee y) \vee Z \overset{(L3)}{=} (x \vee x) \vee (y \vee Z) \overset{(L1)}{=} x \vee Z = Z$, deci $x \vee y \leq Z$, conform (3.3).

Rezultă, conform **Principiului Generalizării**, că pentru orice $x, y \in L$, $\sup(x, y) = x \vee y$.
Similar se demonstrează că $\inf(x, y) = x \wedge y$.

(2): Rutină. □

Observaţie 3.2.7 Relaţia de ordine din Teorema 3.2.6 poate fi definită, echivalent, prin

$$x \leq y \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad x \wedge y = x, \tag{3.5}$$

conform Propoziţiei 3.2.5.

Teorema precedentă arată că cele două definiţii ale laticilor sunt echivalente. In continuare, vom lucra în general cu definiţia Dedekind a laticii, pe care o vom numi pe scurt latice.

O latice (Ore) $\mathcal{L}$ se numeşte *completă* dacă orice familie de elemente din L (submulţime a lui L, echivalent) admite infimum şi supremum. Intr-o latice completă $\mathcal{L}$, dacă $(x_i)_{i \in I}$ este o familie de elemente din L, vom nota

$$\bigwedge_{i \in I} x_i = \inf_{i \in I} x_i, \quad \bigvee_{i \in I} x_i = \sup_{i \in I} x_i.$$

Orice latice finită este completă.

Principiul dualităţii pentru latici rezultă din principiul dualităţii pentru mulţimi ordonate:

Orice enunţ cu privire la laticea $(L, \wedge, \vee)$ rămâne valabil dacă peste tot în cuprinsul său schimbăm pe $\wedge$ cu $\vee$ şi pe $\vee$ cu $\wedge$. Structura $(L, \vee, \wedge)$ astfel obţinută este tot o latice, numită *laticea duală* a lui $(L, \wedge, \vee)$.

Diagrama Hasse a unei lattici

Diagrama Hasse permite o reprezentare grafică a unei mulţimi ordonate, şi deci a unei latici.

3.2.2 Exemple

Exemple 3.2.8 (Exemple de latici mărginite (cu 0 şi 1))

1) Mulţimea cu 2 elemente $L_2 = \{0, 1\}$ şi mulţimea cu 3 elemente $L_3 = \{0, a, 1\}$ generează laticile liniare (adică total ordonate) $\mathcal{L}_2$ (vom vedea că ea este algebră Booleană) şi respectiv $\mathcal{L}_3$ din Figura 3.4.

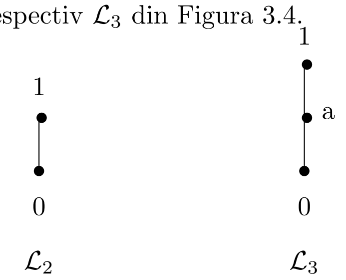


Figure 3.4: Laticile liniar ordonate $\mathcal{L}_2$ şi $\mathcal{L}_3$

2) Mulţimea cu 4 elemente $L = \{0, a, b, 1\}$ generează următoarele două latici:

• laticea liniar ordonată (total ordonată) $\mathcal{L}_4$, a cărei diagramă Hasse este prezentată în Figura 3.5;

• laticea $\mathcal{L}_{2\times 2}$, ordonată neliniar ca în diagrama Hasse din Figura 3.5 (vom vedea ca ea este o algebră Booleană):

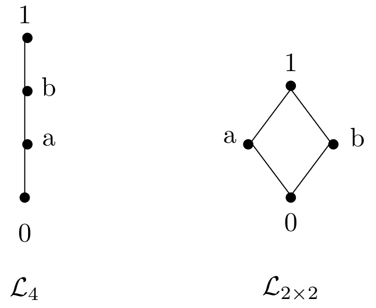


Figure 3.5: Laticea liniară $\mathcal{L}_4$ şi laticea neliniară $\mathcal{L}_{2\times 2}$

sau, echivalent, cu operaţiile $\wedge$, $\vee$ definite astfel:

$\mathcal{L}_{2\times 2}$

$\wedge$	0	a	b	1
0	0	0	0	0
a	0	a	0	a
b	0	0	b	b
1	0	a	b	1

$\vee$	0	a	b	1
0	0	a	b	1
a	a	a	1	1
b	b	1	b	1
1	1	1	1	1

3) Mulţimea cu 5 elemente $L = \{0, a, b, c, 1\}$ generează cele 5 latici din Figura 3.6, prima liniar ordonată, celelalte patru ordonate neliniar.

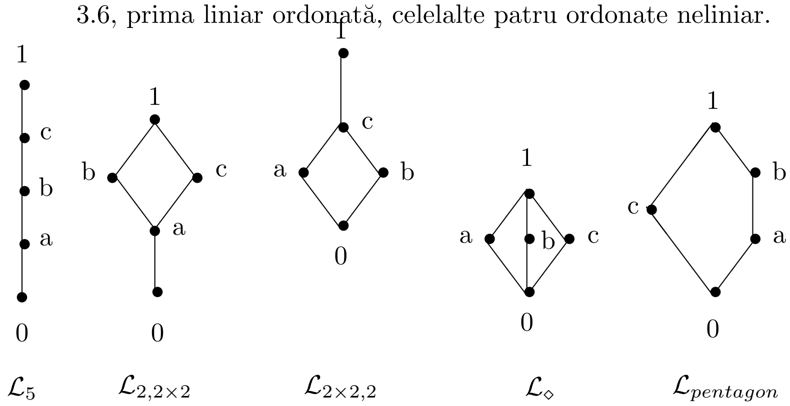


Figure 3.6: Laticile generate de 5 elemente

Exemple 3.2.9 (Exemple de latici nemărginite)

1) Mulţimea ordonată $(\mathbf{N}, \leq)$ este o latice numai cu prim element, numărul 0.

2) Dacă notăm cu $\mathbf{Z}^-$ mulţimea numerelor întregi care sunt mai mici sau egale cu 0, atunci mulţimea ordonată $(\mathbf{Z}^-, \leq)$ este o latice numai cu ultim element, numărul 0.

3) Mulţimea ordonată $(\mathbf{Z}, \leq)$ este o latice fără prim şi ultim element.

Exemple 3.2.10 (Exemple de mulţimi ordonate care nu sunt latici).

Mulţimile $L6^{0,1}$, $L5^1$ şi $L5^0$, ordonate ca în diagramele Hasse din Figura 3.7, nu sunt latici, pentru că nu există $\inf\{c, d\}$ şi $\sup(a, b)$. $L6^{0,1}$ este o mulţime ordonată mărginită, $L5^1$ este o mulţime numai cu prim element, iar $L5^0$ este o mulţime ordonată numai cu prim element.

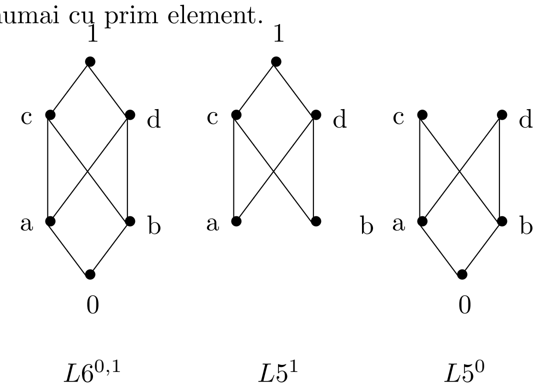


Figure 3.7: Mulţimi ordonate care nu sunt latici

Propoziţia 3.2.11 *Orice latice finită are* 0 *şi* 1 *(adică este mărginită).*

Există mulţimi ordonate finite care sunt mărginite, dar nu sunt latici. De exemplu, mulţimea ordonată $L6^{0,1}$ din Figura 3.7.

3.2.3 Latici distributive. Latici mărginite complementate

Observaţii 3.2.12 Dacă $\mathcal{L} = (L, \wedge, \vee)$ este o latice, atunci pentru orice $x, y, a, b \in L$ avem:
(i) $x \wedge y \leq x$, $x \wedge y \leq y$ şi $x \leq x \vee y$, $y \leq x \vee y$,
(ii) $x \leq y$ implică $x \wedge a \leq y \wedge a$ şi $x \vee a \leq y \vee a$,
(iii) $x \leq y$, $a \leq b$ implică $x \wedge a \leq y \wedge b$ şi $x \vee a \leq y \vee a$.

Propoziţia 3.2.13 *Intr-o latice* $\mathcal{L}$ *cu* 0 *şi* 1 *următoarele afirmaţii sunt echivalente, pentru orice* $x \in L$*:*

(1) $x \wedge 0 = 0$,

(2) $x \vee 0 = x$

şi, dual, următoarele afirmaţii sunt echivalente, pentru orice $x \in L$*:*

(1') $x \vee 1 = 1$,

(2') $x \wedge 1 = x$.

Dem. Intr-adevăr, (1) şi (2) sunt echivalente cu $0 \leq x$, iar (1') şi (2') sunt echivalente cu $x \leq 1$, pentru orice $x \in L$. $\square$

Notaţie. Conform asociativităţii operaţiilor $\wedge$, $\vee$ dintr-o latice, vom putea nota:

$$\bigwedge_{i=1}^{n} x_i = x_1 \wedge x_2 \ldots \wedge x_n = x_1 \wedge (x_2 \wedge \ldots \wedge (x_{n-1} \wedge x_n) \ldots) = \inf(x_1, \ldots, x_n),$$

$$\bigvee_{i=1}^{n} x_i = x_1 \vee x_2 \ldots \vee x_n = x_1 \vee (x_2 \vee \ldots \vee (x_{n-1} \vee x_n) \ldots) = \sup(x_1, \ldots, x_n).$$

Propoziţia 3.2.14 *Intr-o latice $\mathcal{L}$, următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$, pentru orice $x, y, z \in L$,
(ii) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$, pentru orice $x, y, z \in L$,
(iii) $(x \vee y) \wedge z \leq x \vee (y \wedge z)$, pentru orice $x, y, z \in L$.

Dem.
(i) $\Longrightarrow$ (ii):
$(a \vee b) \wedge (a \vee c) \stackrel{(i)}{=} [(a \vee b) \wedge a] \vee [(a \vee b) \wedge c] \stackrel{(L2)}{=} [a \wedge (a \vee b)] \vee [(a \vee b) \wedge c] \stackrel{(L4)}{=} a \vee [(a \vee b) \wedge c] \stackrel{(L2)}{=} a \vee [c \wedge (a \vee b)] \stackrel{(i)}{=} a \vee [(c \wedge a) \vee (c \wedge b)] \stackrel{(L3)}{=} [a \vee (c \wedge a)] \vee (c \wedge b) \stackrel{(L2)}{=} [a \vee (a \wedge c)] \vee (c \wedge b) \stackrel{(L4)}{=} a \vee (c \wedge b) \stackrel{(L2)}{=} a \vee (b \wedge c)$.
(ii) $\Longrightarrow$ (iii):
Deoarece $z \leq x \vee z$, rezultă $(x \vee y) \wedge z \leq (x \vee y) \wedge (x \vee z) \stackrel{(ii)}{=} x \vee (y \wedge z)$.
(iii) $\Longrightarrow$ (i):
• Să demonstrăm mai întâi că:

$$a \wedge (b \vee c) \leq (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \tag{3.6}$$

Pe de o parte, avem că:

$$(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \stackrel{(L2)}{=} (a \wedge b) \vee (c \wedge a) \stackrel{(iii)}{\geq} [(a \wedge b) \vee c] \wedge a. \tag{3.7}$$

Pe de altă parte, din $(a \wedge b) \vee c \stackrel{(L2)}{=} c \vee (b \wedge a) \stackrel{(iii)}{\geq} (c \vee b) \wedge a$ rezultă că:
$[(a \wedge b) \vee c] \wedge a \geq [(c \vee b) \wedge a] \wedge a \stackrel{(L3)}{=} (c \vee b) \wedge (a \wedge a) \stackrel{(L1)}{=} (c \vee b) \wedge a \stackrel{(L2)}{=} a \wedge (b \vee c)$, adică avem:

$$[(a \wedge b) \vee c] \wedge a \geq a \wedge (b \vee c). \tag{3.8}$$

Din (3.2.2) şi (3.8) rezultă (3.6).
• Să demonstrăm acum că:

$$a \wedge (b \vee c) \geq (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \tag{3.9}$$

Deoarece $a \wedge b \leq b$ şi $a \wedge c \leq c$, rezultă că $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq b \vee c$ şi de aici obţinem că:

$$a \wedge [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] \leq a \wedge (b \vee c). \tag{3.10}$$

Pe de altă parte, deoarece $a \wedge b \leq a$ şi $a \wedge c \leq a$, rezultă că $(a \wedge b) \vee (a \wedge c) \leq a \vee a \overset{(L1)}{=} a$ şi de aici obţinem că:

$$a \wedge [(a \wedge b) \vee (a \wedge c)] = (a \wedge b) \vee (a \wedge c). \tag{3.11}$$

Din (3.10) şi (3.11) rezultă (3.9). □

Definiţie 3.2.15 O latice $\mathcal{L}$ este *distributivă* dacă una din condiţiile echivalente (i) - (iii) din Propoziţia 3.2.14 are loc.

Exemple 3.2.16 (Exemple de latici distributive)
(1) Orice lanţ $(L, \leq)$ este o latice distributivă, în care:

$$x \wedge y = \begin{cases} x, & \text{dacă } x \leq y \\ y, & \text{dacă } y \leq x \end{cases} \quad \text{şi} \quad x \vee y = \begin{cases} y, & \text{dacă } x \leq y \\ x, & \text{dacă } y \leq x. \end{cases}$$

(2) Dacă X este o mulţime, atunci $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ este o latice mărginită, distributivă.

(3) Fie n un număr natural, $n \geq 2$, şi D_n mulţimea divizorilor naturali ai lui n. Definim o relaţie binară $\preceq$ pe D_n astfel: $x \preceq y \Leftrightarrow x \mid y$ (x divide pe y). Atunci $(D_n, \preceq)$ este o latice mărginită (cu prim element 1 şi ultim element n), distributivă, în care:
$x \wedge y = (x, y)$ (cel mai mare divizor comun al lui x şi y),
$x \vee y = [x, y]$ (cel mai mic multiplu comun al lui x şi y).

(4) $(\mathbf{Z}, \leq)$ este o latice distributivă, fără prim şi ultim element.

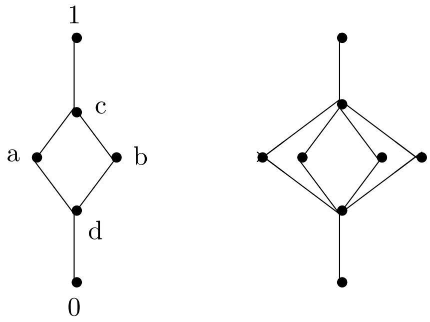
(5) Laticea mărginită $\mathcal{L}_{2\times 2}$ din Figura 3.5 şi laticile mărginite din Figura 3.8 sunt distributive.

Definiţie 3.2.17
(i) Fie $\mathcal{L}$ o latice mărginită. Un element $a \in L$ se numeşte *complementat* dacă există cel puţin un element $b \in L$, numit *complementul* lui a, astfel încât $a \wedge b = 0$ şi $a \vee b = 1$.

(ii) O latice mărginită este *complementată* dacă orice element al său este complementat (admite un complement).

Lema 3.2.18 *Intr-o latice mărginită, distributivă, orice element poate avea cel mult un complement (altfel spus, complementul unui element, dacă există, este unic).*

Dem. Fie $a \in L$ şi să presupunem că are doi complemenţi, b şi c, adică:
$a \wedge b = 0,\ a \vee b = 1$ şi $a \wedge c = 0,\ a \vee c = 1$.



$\mathcal{L}_{2,2\times 2,2}$ $\mathcal{L}8$

Figure 3.8: Latici distributive

Atunci $b = b \wedge 1 = b \wedge (a \vee c) = (b \wedge a) \vee (b \wedge c) = 0 \vee (b \wedge c) = b \wedge c$, şi analog, $c = c \wedge b$, deci $b = c$. □

Intr-o latice distributivă cu 0 şi 1, *vom nota cu* a^- *sau cu* $\neg a$ *complementul lui* a*, atunci când există.*

Exemple 3.2.19 (Exemple de latici mărginite care nu sunt distributive)
(1) Considerăm laticea mărginită pentagon $\mathcal{L}_{pentagon}$ din Figura 3.6. Se observă că a şi b sunt complemenţii lui c, deci laticea nu este distributivă, conform Lemei 3.2.18.
(2) Considerăm laticea mărginită diamant $\mathcal{L}_{\diamond}$ din Figura 3.6. Se observă că:
a, b sunt complemenţii lui c,
a, c sunt complemenţii lui b,
b, c sunt complemenţii lui a,
deci laticea nu este distributivă, conform Lemei 3.2.18.

Propoziţia 3.2.20 *Orice latice care conţine laticile pentagon şi diamant ca sublatici nu este distributivă.*

Fie $\mathcal{L}$ o latice mărginită, distributivă, şi fie $C(L)$ mulţimea elementelor sale complementate. Evident, $\{0, 1\} \subseteq C(L)$.

Propoziţia 3.2.21 *Dacă* $a, b \in C(L)$*, atunci* $a \wedge b$, $a \vee b \in C(L)$ *şi:*

$$(a \wedge b)^- = a^- \vee b^-, \ (a \vee b)^- = a^- \wedge b^-.$$

Dem. Pentru a demonstra prima egalitate, este suficient să demonstrăm că:

$$(a \wedge b) \wedge (a^- \vee b^-) = 0, \quad (a \wedge b) \vee (a^- \vee b^-) = 1.$$

Intr-adevăr, $(a \wedge b) \wedge (a^- \vee b^-) = [(a \wedge b) \wedge a^-] \vee [(a \wedge b) \wedge b^-] = 0 \vee 0 = 0$ şi
$(a \wedge b) \vee (a^- \vee b^-) = [a \vee (a^- \vee b^-)] \wedge [b \vee (a^- \vee b^-)] = 1 \vee 1 = 1$.
A doua egalitate se demonstrează similar. □

Definiţie 3.2.22 Fie $\mathcal{L}$ şi $\mathcal{L}'$ două latici mărginite. O funcţie $f : L \to L'$ se numeşte *morfism de latici mărginite* dacă următoarele proprietăţi sunt verificate: pentru orice $x, y \in L$,
(a) $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$,
(b) $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$,
(c) $f(0) = 0$, $f(1) = 1$.

Vom nota cu **Ld(0,1)** categoria laticilor distributive mărginite şi a morfismelor de astfel de latici.

Observaţie 3.2.23 Orice morfism din **Ld(0,1)** este o funcţie izotonă: pentru orice $x, y \in L$,
$x \leq y \Rightarrow x \wedge y = x \Rightarrow f(x) \wedge f(y) = f(x) \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.

Un morfism de forma $f : L \to L$ se numeşte *endomorfism* al lui $\mathcal{L}$.
Un morfism din **Ld(0,1)** se numeşte *izomorfism* dacă este o funcţie bijectivă.
Un izomorfism de forma $f : L \to L$ se numeşte *automorfism* al lui $\mathcal{L}$.

Exemplu 3.2.24 (Exemplu de automorfism) Fie laticea mărginită $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{2,2\times 2,2}$ din Figura 3.8. Ea are două automorfisme, f_1 şi f_2: f_1 este morfismul identic 1_L, iar f_2 este dat de: $f_2(0) = 0$, $f_2(d) = d$, $f_2(a) = b$, $f_2(b) = a$, $f_2(c) = c$, $f_2(1) = 1$. Argumentul are la bază observaţia că dacă A este o latice distributivă cu 0 şi 1 şi $f : A \to A$ este un automorfism, atunci pentru orice $x, y \in A$, $x < y$ dacă şi numai dacă $f(x) < f(y)$.

Exerciţiu 3.2.25 Să se determine toate endomorfismele pentru laticea din exemplul precedent.

Chapter 4

Algebre Boole

Teoria algebrelor Boole s-a nascut ca urmare a descoperirii analogiei perfecte care există între legile logicii şi anumite reguli ale calculului algebric. Aceasta descoperire este unanim atribuita lui George Boole (*An investigation into the laws of thought*, 1854).

Dintre matematicienii care au adus contributii mari la dezvoltarea teoriei algebrelor Boole trebuie mentionati: M.H. Stone, pentru celebra sa teorema de reprezentare (1936) şi pentru teoria dualitatii algebrelor Boole (1937) şi A. Tarski, care a obtinut rezultate remarcabile atat pe linia algebrica a acestui domeniu, cât mai ales pe linia legaturilor sale cu logica.

Algebrele Boole constituie reflectarea algebrica a calculului propoziţiilor, fiind modele algebrice ale calculului propoziţiilor. Algebrele Boole monadice şi poliadice sunt modele algebrice ale calculului predicatelor.

Astazi, teoria algebrelor Boole se prezinta ca un capitol important al algebrei, de sine statător, care are puternice conexiuni cu logica şi care are aplicaţii în analiza, topologie, calculul probabilitatilor etc., cele mai spectaculoase aplicaţii fiind însă în domeniul calculatoarelor electronice, deci în informatica.

4.1 Algebre Boole: definiţie, exemple, proprietăţi

4.1.1 Definiţia algebrei Boole

Următoarea definiţie a algebrei Boole este cel mai des întâlnită.

Definiţie 4.1.1 O *algebră Boole* este o latice distributivă, cu prim şi ultim element, complementată, adică este o structură

$$\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$$

care verifică următoarele proprietăţi (axiome): oricare ar fi $x, y, z \in B$,

(B1) $x \vee x = x, \quad x \wedge x = x$ (idempotenţa lui $\vee$, $\wedge$),

(B2) $x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x$ (comutativitatea lui $\vee$, $\wedge$),

(B3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$ (asociativitatea lui $\vee$, $\wedge$),

(B4) $x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x$ (absorbţia),

(B5) $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z), \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ (distributivitatea lui $\vee$ faţă de $\wedge$ şi invers),

(B6) $x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x$ (adică $0 \leq x \leq 1$),

(B7) $x \vee x^- = 1, \quad x \wedge x^- = 0$.

Observaţie 4.1.2 Se pot da şi alte definiţii ale algebrei Boole, echivalente cu aceasta. Se observă că în definiţia dată, setul de axiome (B1)-(B7) corespunde celor 7 tautologii din sistemul $\mathcal{A}_1$ de tautologii din Capitolul "Calculul propoziţiilor (prezentare neformalizată)"; deci definiţii echivalente se obţin dacă se consideră axiomele corespunzătoare sistemelor $\mathcal{A}_2$ - $\mathcal{A}_5$ de tautologii, de exemplu.

Alte definiţii echivalente pot fi găsite în [40].

Exemple de definiţii echivalente (a se vedea în secţiunea următoare demonstraţiile):

Definiţie 4.1.3 [30], [29]

O *algebră Boole* este o algebră

$$\mathcal{B} = (B, \rightarrow, ^-, 1)$$

de tip $(2, 1, 0)$, verificând următoarele axiome: pentru toţi $x, y, z \in B$,

(A1) $x \rightarrow (y \rightarrow x) = 1$,

(A2) $[x \rightarrow (y \rightarrow z)] \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = 1$,

(A3) $(y^- \rightarrow x^-) \rightarrow (x \rightarrow y) = 1$,

(A4) $x \rightarrow y = 1$ şi $y \rightarrow x = 1$ implică $x = y$,

unde $x \rightarrow y \overset{def}{=} (x \wedge y^-)^- = x^- \vee y$ şi invers, $x \wedge y \overset{def}{=} (x \rightarrow y^-)^-$,
$x \vee y \overset{def}{=} (x^- \wedge y^-)^-$, $0 \overset{def}{=} 1^-$.

Definiţie 4.1.4 [30], [29]

O *algebră Boole* este o algebră

$$\mathcal{B} = (B, \rightarrow^R, ^-, 0)$$

de tip $(2, 1, 0)$, verificând următoarele axiome: pentru toţi $x, y, z \in B$,

(A1-R) $x \rightarrow^R (y \rightarrow^R x) = 0$,

(A2-R) $[x \rightarrow^R (y \rightarrow^R z)] \rightarrow^R [(x \rightarrow^R y) \rightarrow^R (x \rightarrow^R z)] = 0$,

(A3-R) $(y^- \rightarrow^R x^-) \rightarrow^R (x \rightarrow^R y) = 0$,

(A4-R) $x \rightarrow^R y = 0$ şi $y \rightarrow^R x = 0$ implică$x = y$, unde $x \to^R y \overset{def}{=} (x \vee y^-)^- = x^- \wedge y$ şi invers, $x \vee y \overset{def}{=} (x \to^R y^-)^-$, $x \wedge y \overset{def}{=} (x^- \vee y^-)^-$, $1 \overset{def}{=} 0^-$.

Există alte definiţii ale algebrei Boole: ca algebre $(B, \wedge, ^-, 1)$, ca algebre $(B, \vee, ^-, 0)$ etc. (see [40]).

4.1.2 Exemple de algebre Boole

Exemplul 1.
Dacă X este o mulţime, atunci $(\mathcal{P}(X), \cap, \cup, C, \emptyset, X)$ este o algebră Boole.

Exemplul 2. (Algebra Boole standard)
Algebra $\mathcal{L}_2 = (L_2 = \{0,1\} \subset \mathbf{R}, \wedge = \min, \vee = \max, ^-, 0, 1)$, cu $x^- = 1 - x$, pentru $x \in L_2$, este o algebră Boole, numită *algebra Boole standard*.

Examplul 3. (Rombul)
Mulţimea
$L_{2\times 2} = \{0, a, b, 1\} \cong L_2 \times L_2 = L_2^2 = \{0,1\} \times \{0,1\} = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$,
organizată ca latice ca în diagrama Hasse din Figura 4.1 şi cu negaţia $^-$ definită pe prima coloană a tabelei implicaţiei ($x^- = x \to 0$, pentru orice x), este o algebră Boole, notată $\mathcal{L}_{2\times 2}$, numita şi *romb*.

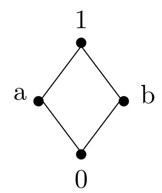


Figure 4.1: Algebra Boole $\mathcal{L}_{2\times 2}$ (rombul)

$\mathcal{L}_{2\times 2}$

$\to$	0	a	b	1
0	1	1	1	1
a	b	1	b	1
b	a	a	1	1
1	0	a	b	1

Exemplul 4. (Cubul)
Mulţimea
$L_{2\times 2\times 2} = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\} \cong L_2 \times L_2 \times L_2 = L_2^3 = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \{0,1\} =$
$\{(0,0,0),(0,0,1),(0,1,0),(0,1,1),(1,0,0),(1,0,1),(1,1,0),(1,1,1)\}$,
organizată ca latice ca în diagrama Hasse din Figura 4.2 şi cu negaţia definită ca în prima coloană a tabelei următoare a implicaţiei $\to$, este o algebră Boole, notată $\mathcal{L}_{2\times 2\times 2}$, numită şi *cub*.

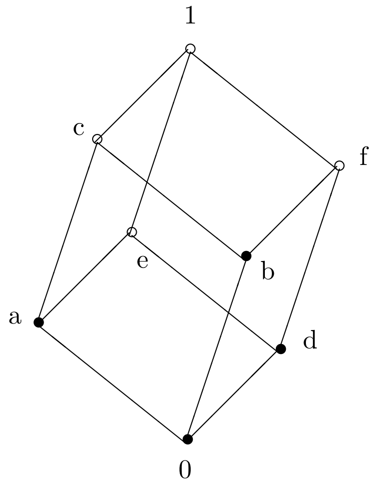


Figure 4.2: Algebra Boole $\mathcal{L}_{2\times2\times2}$ (cubul)

$\mathcal{L}_{2\times2\times2}$

$\vee$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	a	b	c	d	e	f	1
a	a	a	c	c	e	e	1	1
b	b	c	b	c	f	1	f	1
c	c	c	c	c	1	1	1	1
d	d	e	f	1	d	e	f	1
e	e	e	1	1	e	e	1	1
f	f	1	f	1	f	1	f	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

$\wedge$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0
a	0	a	0	a	0	a	0	a
b	0	0	b	b	0	0	b	b
c	0	a	b	c	0	a	b	c
d	0	0	0	0	d	d	d	d
e	0	a	0	a	d	e	d	e
f	0	0	b	b	d	d	f	f
1	0	a	b	c	d	e	f	1

$\mathcal{L}_{2\times2\times2}$

$\to$	0	a	b	c	d	e	f	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1
a	f	1	f	1	f	1	f	1
b	e	e	1	1	e	e	1	1
c	d	e	f	1	d	e	f	1
d	c	c	c	c	1	1	1	1
e	b	c	b	c	f	1	f	1
f	a	a	c	c	e	e	1	1
1	0	a	b	c	d	e	f	1

Exemplul 5.
Alte exemple de algebre Boole sunt $\mathcal{L}_{2\times2\times2\times2}$ etc.

Exemplul 6.
Mulţimea evenimentelor asociate unei experienţe aleatoare este o algebră Boole.

Exemplul 7.

Dacă X este un spaţiu topologic, atunci familia $B(X)$ a părţilor simultan închise şi deschise ale lui X formează o algebră Boole.

Exemplul 8.
Dacă $(L, \wedge, \vee, 0, 1)$ este o latice distributivă cu prim şi ultim element, atunci mulţimea $C(L)$ a elementelor complementate ale lui L este o algebră Boole.

Exemplul 9.
Orice produs direct de algebre Boole are o structură canonică de algebră Boole (operaţiile se definesc pe componente). In particular, dacă X este o mulţime nevidă, atunci $L_2^X = \{f : X \longrightarrow \{0, 1\}\}$ este o algebră Boole.

4.1.3 Proprietăţi ale algebrelor Boole

Propoziţia 4.1.5 *In orice algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ avem următoarele proprietăţi: pentru orice $x, y, x', y' \in B$,*
(B8) $(x \vee y)^- = x^- \wedge y^-$, $\quad (x \wedge y)^- = x^- \vee y^-$ (legile De Morgan),
(B9) $(x^-)^- = x$ (Principiul contradicţiei) (proprietatea de dublă negaţie (DN)),
(B10) $x \leq y \iff y^- \leq x^-$,
(B11) $x \leq y \iff x \wedge y^- = 0$,
(B12) $x \leq y$ şi $x' \leq y'$ implică $x \vee x' \leq y \vee y'$ şi $x \wedge x' \leq y \wedge y'$,
(B13) $x \leq y \iff x \wedge y^- = 0 \iff x^- \vee y = 1$.

Dem.
(B8): Pentru a demonstra prima lege De Morgan, trebuie să demonstrăm că:

$$(x \vee y) \vee (x^- \wedge y^-) = 1 \text{ şi } (x \vee y) \wedge (x^- \wedge y^-) = 0.$$

Intr-adevăr,
$(x \vee y) \vee (x^- \wedge y^-) = (x \vee y \vee x^-) \wedge (x \vee y \vee y^-) = 1 \wedge 1 = 1$ şi
$(x \vee y) \wedge (x^- \wedge y^-) = (x \wedge x^- \wedge y^-) \vee (y \wedge x^- \wedge y^-) = 0 \vee 0 = 0$. La fel se demonstrează partea a doua a lui (B8).

(B9) este o altă interpretare a lui (B7).

(B10): $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow (x \vee y)^- = y^- \Leftrightarrow x^- \wedge y^- = y^- \Leftrightarrow y^- \leq x^-$, conform (B9), (B8).

(B11) " $\Rightarrow$": $x \leq y \Leftrightarrow x \vee y = y \Leftrightarrow (x \vee y)^- = y^- \Leftrightarrow x^- \wedge y^- = y^-$; rezultă că $x \wedge y^- = x \wedge (x^- \wedge y^-) = 0$; deci $x \leq y \Rightarrow x \wedge y^- = 0$.
"$\Leftarrow$": dacă $x \wedge y^- = 0$, atunci $x = x \wedge 1 = x \wedge (y \vee y^-) = (x \wedge y) \vee (x \wedge y^-) = (x \wedge y) \vee 0 = x \wedge y$, deci $x \leq y$.

(B12): ($x \leq y$ şi $x' \leq y'$) $\Leftrightarrow$ ($x \vee y = y$ şi $x' \vee y' = y'$) $\Rightarrow (x \vee x') \vee (y \vee y') = (x \vee y) \vee (x' \vee y') = y \vee y'$, adică $x \vee x' \leq y \vee y'$. La fel se demonstrează partea a doua a lui (B12).

(B13): $x \leq y \Rightarrow x \wedge y^- \leq y \wedge y^- = 0 \Rightarrow x \wedge y^- = 0$.
$x \wedge y^- = 0 \Rightarrow y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge y^-) = (x \vee y) \wedge (y \vee y^-) = (x \vee y) \wedge 1 = x \vee y \Rightarrow x \leq y$.
A doua parte se demonstrează similar. $\Box$

4.1.4 Implicaţia şi echivalenţa booleană

Definiţie 4.1.6 Intr-o algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ se defineşte operaţia $\rightarrow$, numită *implicaţia booleană*, astfel:

$$x \rightarrow y \stackrel{def.}{=} (x \wedge y^-)^- = x^- \vee y, \quad \text{pentru orice } x, y \in B,$$

şi se defineşte operaţia $\leftrightarrow$, numită *echivalenţa booleană*, astfel:

$$x \leftrightarrow y \stackrel{def.}{=} (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x), \quad \text{pentru orice } x, y \in B.$$

Observaţie 4.1.7 *Algebra Boole, fiind o structură care are proprietatea dublei negaţii (DN), mai are o implicaţie, $\rightarrow^R$, numita duala implicaţiei $\rightarrow$, care este asociată lui $\vee$: pentru orice $x, y \in B$,*

$$x \rightarrow^R y \stackrel{def.}{=} (x \vee y^-)^- = x^- \wedge y.$$

Cele două implicaţii sunt dependente una de cealaltă:

$$x \rightarrow^R y = (x^- \rightarrow y^-)^-, \quad x \rightarrow y = (x^- \rightarrow^R y^-)^-,$$

de aceea se foloseşte doar $\rightarrow$. Avem:

$$x^- = x \rightarrow 0 = x \rightarrow^R 1.$$

Lema 4.1.8 *Pentru orice $x, y \in B$,*

$$x \wedge y = 1 \Leftrightarrow (x = 1 \text{ şi } y = 1).$$

Dem. Dacă $x \wedge y = 1$, atunci deoarece $x \wedge y \leq x, y$, rezultă că $1 \leq x, y$, deci $x = 1 = y$. Dacă $x = y = 1$, atunci evident, $x \wedge y = 1$. □

Propoziţia 4.1.9 *$x \rightarrow y = 1$ dacă şi numai dacă $x \leq y$, pentru orice $x, y \in B$.*

Dem. Dacă $x \rightarrow y = 1$, adică $x^- \vee y = 1$, atunci $y = y \vee 0 = y \vee (x \wedge x^-) = (y \vee x) \wedge (y \vee x^-) = (y \vee x) \wedge 1 = y \vee x$, adică $x \leq y$. Invers, dacă $x \leq y$, atunci $1 = x^- \vee x \leq x^- \vee y = x \rightarrow y$; rezultă că $x \rightarrow y = 1$. □

Propoziţia 4.1.10 *$x \leftrightarrow y = 1$ dacă şi numai dacă $x = y$, pentru orice $x, y \in B$.*

Dem. $x \leftrightarrow y = 1 \Leftrightarrow (x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow x) = 1 \Leftrightarrow (x \rightarrow y = 1$ şi $y \rightarrow x = 1) \Leftrightarrow (x \leq y$ şi $y \leq x) \Leftrightarrow x = y$, conform Lemei 4.1.8. □

Exerciţii 4.1.11

(1) Să se transcrie toate tautologiile din sistemele $\mathcal{A}_2$ - $\mathcal{A}_5$ de tautologii în proprietăţi ale algebrei booleene $\mathcal{B}$ şi să se demonstreze; de exemplu, (G1) devine: $x \to (y \to x) = 1$, pentru orice $x, y \in B$.

(2) De asemenea, să se demonstreze următoarele proprietăţi: pentru orice $x, y, z \in B$,
$(x \to (x \to y)) \to (x \to y) = 1$,
$(x \to y) \to ((y \to z) \to (x \to z)) = 1$,
$(x \leftrightarrow y) \to (x \to y) = 1$,
$(x \to y) \to ((y \to x) \to (x \leftrightarrow y)) = 1$,
$x^- \leftrightarrow y^- = x \leftrightarrow y$,
$(x \leftrightarrow y) \leftrightarrow z = x \leftrightarrow (y \leftrightarrow z)$.

De exemplu, a doua proprietate se demonstrează astfel: este suficient să demonstrăm că $x \to y \le (y \to z) \to (x \to z)$. Un calcul simplu arată că: $(y \to z) \to (x \to z) = (y^- \vee z)^- \vee x^- \vee z = (y \wedge z^-) \vee x^- \vee z = y \vee x^- \vee z$, de unde $x \to y = x^- \vee y \le y \vee x^- \vee z = (y \to z) \to (x \to z)$.

(3) Să se transcrie de asemenea tautologiile (P10)-(P24) în proprietăţi ale algebrei Boole $\mathcal{B}$ şi să se demonstreze; de exemplu, (P11) devine: $x \leftrightarrow x = 1$ sau, echivalent, conform Propoziţiei 4.1.9, $x = x$, pentru orice $x \in B$.

4.2 O definiţie echivalentă a algebrelor Boole

Conţinutul acestei secţiuni este preluat din [30].

In mod uzual, am văzut că algebrele Boole sunt definite ca algebre $(B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ de tip $(2, 2, 1, 0, 0)$, verificând axiomele (B1) - (B7), unde: pentru orice $x, y, z \in B$,

(B1) $x \vee x = x, \quad x \wedge x = x$,
(B2) $x \vee y = y \vee x, \quad x \wedge y = y \wedge x$,
(B3) $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z, \quad x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$,
(B4) $x \vee (x \wedge y) = x, \quad x \wedge (x \vee y) = x$,
(B5) $(x \vee y) \wedge z = (x \wedge z) \vee (y \wedge z), \quad (x \wedge y) \vee z = (x \vee z) \wedge (y \vee z)$,
(B6) $x \vee 0 = x, \quad x \wedge 1 = x$,
(B7) $x \vee x^- = 1, \quad x \wedge x^- = 0$.

Prezentăm o definiţie echivalentă, motivată de sistemul uzual de axiome al sistemului formal al calculului clasic al propoziţiilor:

(G1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$,
(G2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$,

(G3) $(\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi)$,

şi anume ca algebre $(B, \to, ^-, 1)$ de tip $(2, 1, 0)$, verificând axiomele (A1) - (A4), unde: pentru orice $x, y, z \in B$,

(A1) $x \to (y \to x) = 1$,
(A2) $[x \to (y \to z)] \to [(x \to y) \to (x \to z)] = 1$,
(A3) $(y^- \to x^-) \to (x \to y) = 1$,
(A4) dacă $x \to y = 1$ şi $y \to x = 1$, atunci $x = y$.

Vom demonstra deci în această secţiune următoarea teoremă

Teorema 4.2.1
(1) Fie $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ o algebră verificând axiomele (B1) - (B7). Să definim

$$\alpha(\mathcal{B}) = (B, \to, ^-, 1)$$

astfel: pentru orice $x, y \in B$,

$$x \to y = (x \wedge y^-)^- = x^- \vee y.$$

Atunci $\alpha(\mathcal{B})$ verifică (A1) - (A4).
(1') Invers, fie $\mathcal{B} = (B, \to, ^-, 1)$ o algebră verificând axiomele (A1) - (A4). Să definim

$$\beta(\mathcal{B}) = (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$$

astfel: pentru orice $x, y \in B$,

$$x \wedge y = (x \to y^-)^-, \quad x \vee y = (x^- \wedge y^-)^- = x^- \to y, \quad 0 = 1^-.$$

Atunci $\beta(\mathcal{B})$ verifică (B1) - (B7).
(2) Aplicaţiile α şi β sunt mutual inverse.

Demonstraţia va fi făcută în trei subsecţiuni:
1. Axiomele (B1) - (B7) implică (A1) - (A4)
2. Axiomele (A1) - (A4) implică (B1) - (B7)
3. Aplicaţiile α şi β sunt mutual inverse.

4.2.1 Axiomele (B1) - (B7) implică (A1) - (A4)

In această subsecţiune, considerăm structura de algebră Boole $(B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ cu axiomele (B1) - (B7) şi vom demonstra că (A1) - (A4) au loc. Pentru aceasta, să amintim următoarele proprietăţi.

(B8) $(x \vee y)^- = x^- \wedge y^-$, $(x \wedge y)^- = x^- \vee y^-$ (Legile De Morgan), (B9) $(x^-)^- = x$.

Să definim o relaţie binară $\leq$ pe B astfel: pentru orice $x, y \in B$,

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \wedge y = x \Longleftrightarrow x \vee y = y.$$

Atunci avem
(B10) $\leq$ este o relaţie de ordine parţială şi $(B, \leq)$ este o latice, unde $\sup(x, y) = x \vee y$ şi $\inf(x, y) = x \wedge y$.

Să definim implicaţia booleană $\rightarrow$ (asociată lui $\wedge$) astfel: pentru orice $x, y \in B$,

$$x \rightarrow y = (x \wedge y^-)^- = x^- \vee y.$$

Atunci avem
(B11) $x \leq y \Longleftrightarrow x \rightarrow y = 1$.

Suntem acum în măsură să demonstrăm că (A1) - (A4) sunt îndeplinite.

Teorema 4.2.2 *Axiomele (B1) - (B7) implică (A1) - (A4).*

Dem.
(A1): $x \rightarrow (y \rightarrow x) = x^- \vee (y^- \vee x) = (x^- \vee x) \vee y^- = 1$.
(A2): $[x \rightarrow (y \rightarrow z)] \rightarrow [(x \rightarrow y) \rightarrow (x \rightarrow z)] = [x^- \vee (y^- \vee z)]^- \vee [(x^- \vee y)^- \vee (x^- \vee z)] =$
$[x \wedge y \wedge z^-] \vee [(x \wedge y^-) \vee x^- \vee z] = [x \wedge y \wedge z^-] \vee [(x \vee x^- \vee z) \wedge (y^- \vee x^- \vee z)] =$
$[x \wedge y \wedge z^-] \vee [1 \wedge (y^- \vee x^- \vee z)] = [x \wedge y \wedge z^-] \vee [y^- \vee x^- \vee z] =$
$[x \wedge y \wedge z^-] \vee [y \wedge x \wedge z^-]^- = 1$.
(A3) $(y^- \rightarrow x^-) \rightarrow (x \rightarrow y) = (y \vee x^-)^- \vee (x^- \vee y) = (y^- \wedge x) \vee x^- \vee y =$
$(y^- \vee x^- \vee y) \wedge (x \vee x^- \vee y) = 1 \wedge 1 = 1$.
(A4) dacă $x \rightarrow y = 1$ şi $y \rightarrow x = 1$, adică $x \leq y$ şi $y \leq x$, atunci $x = y$, conform antisimetriei lui $\leq$. $\square$

4.2.2 Axiomele (A1) - (A4) implică (B1) - (B7)

In această subsecţiune, considerăm structura $(B, \rightarrow, ^-, 1)$ cu axiomele (A1) - (A4) şi vom demonstra că (B1)-(B7) au loc. Pentru aceasta, vom demonstra mai multe proprietăţi intermediare.

Lema 4.2.3
(MP) $\quad x = 1$ *şi* $x \rightarrow y = 1$ *implică* $y = 1$.

Dem. $x = 1$ şi $x \rightarrow y = 1$ implică $1 \rightarrow y = 1$.
Pe de altă parte, din (A1), avem că $y \rightarrow (1 \rightarrow y) = 1$, prin urmare $y \rightarrow 1 = 1$.
Apoi, din (A4), obţinem că $y = 1$. $\square$

Propoziţia 4.2.4 *Următoarele proprietăţi au loc, pentru orice $x, y, z \in B$:*

(A5) $x \to 1 = 1$,
(A6) $x \to x = 1$ *(reflexivitea),*
(A7) dacă $x \to y = 1$ *şi* $y \to z = 1$, *atunci* $x \to z = 1$ *(tranzitivitatea).*

Dem. (A se vedea [6], [39]):
(A5): Deoarece din (A1) avem $1 \to (x \to 1) = 1$, rezultă, din (MP), că $x \to 1 = 1$.
(A6): Conform (A1), $x \to ((x \to x) \to x) = 1$;
conform (A2), $[x \to ((x \to x) \to x)] \to [(x \to (x \to x)) \to (x \to x)] = 1$.
Atunci din (MP), $(x \to (x \to x)) \to (x \to x) = 1$.
Dar, conform (A1) din nou, $x \to (x \to x) = 1$. Rezultă, din (MP) din nou, că $x \to x = 1$.
(A7): Fie $x \to y = 1$ şi $y \to z = 1$.
Deoarece $y \to z = 1$, rezultă, conform (A5), că $x \to (y \to z) = 1$.
Dar, conform (A2), $[x \to (y \to z)] \to [(x \to y) \to (x \to z)] = 1$.
Rezultă, aplicând (MP), că $(x \to y) \to (x \to z) = 1$.
Deoarece $x \to y = 1$, rezultă, prin (MP) din nou, că $x \to z = 1$. $\Box$

Definiţie 4.2.5 Să definim pe B o relaţie binară $\leq$ astfel: pentru orice $x, y \in B$,

$$x \leq y \iff x \to y = 1. \tag{4.1}$$

Atunci din (A6), (A4) şi (A7) obţinem:

(A6') $x \leq x$, pentru orice $x \in B$, adică $\leq$ este reflexivă,
(A4') dacă $x \leq y$ şi $y \leq x$, atunci $x = y$, pentru orice $x, y \in B$, adică $\leq$ este antisimetrică,
(A7') dacă $x \leq y$ şi $y \leq z$, atunci $x \leq z$, pentru orice $x, y, z \in B$, adică $\leq$ este tranzitivă.

Observaţii 4.2.6
1) Din (A6'), (A4'), (A7'), rezultă că relaţia binară $\leq$ pe B este o relaţie de ordine parţială.
2) Proprietatea (A5) spune că:

(A5') $x \leq 1$, pentru orice $x \in B$,
adică 1 este cel mai mare element (ultimul element) al lui B.

Propoziţia 4.2.7 *Următoarele proprietăţi au loc, pentru orice $x, y, z \in B$:*

(A8) dacă $x \leq y \to z$, *atunci* $x \to y \leq x \to z$,
(A9) $x \leq y \to x$,
(A10) $x \leq y \to z \iff y \leq x \to z$,

(A11) $y \to z \leq (x \to y) \to (x \to z)$,
(A12) $x \to y \leq (y \to z) \to (x \to z)$,
(A13) dacă $x \leq y$, *atunci* $y \to z \leq x \to z$,
(A14) $x \to (y \to z) = y \to (x \to z)$,
(A15) dacă $x \leq y$, *atunci* $z \to x \leq z \to y$.

Dem. (A se vedea [6] si [39])
(A8): Conform (A2), $[x \to (y \to z)] \to [(x \to y) \to (x \to z)] = 1$;
dacă $x \leq y \to z$, adică $x \to (y \to z) = 1$, atunci aplicând (MP), obţinem $(x \to y) \to (x \to z) = 1$, adică $x \to y \leq x \to z$.
(A9): rezultă direct din (A1).
(A10): $\Longrightarrow$: dacă $x \leq y \to z$, atunci din (A8), avem $x \to y \leq x \to z$; dar din (A9), $y \leq x \to y$; atunci din (A7'), obţinem $y \leq x \to z$.
$\Longleftarrow$: rezultă prin simetrie.
(A11): Din (A2), avem $x \to (y \to z) \leq (x \to y) \to (x \to z)$.
Pe de altă parte, din (A9), avem $y \to z \leq x \to (y \to z)$.
Rezultă, aplicând (A7'), că $y \to z \leq (x \to y) \to (x \to z)$, adică (A11) are loc.
(A12) rezultă din (A11), aplicând (A10).
(A13): Din (A12), $x \to y \leq (y \to z) \to (x \to z)$. Dacă $x \leq y$, adică $x \to y = 1$, atunci din (A5'), obţinem că $(y \to z) \to (x \to z) = 1$, adică $y \to z \leq x \to z$.
(A14) Din (A2), avem că $x \to (y \to z) \leq (x \to y) \to (x \to z)$.
Pe de altă parte, deoarece din (A9) avem $y \leq x \to y$, rezultă, din (A13), că avem $(x \to y \to (x \to z) \leq y \to (x \to z)$.
Prin urmare, din (A7'), obţinem că $x \to (y \to z) \leq y \to (x \to z)$. Prin simetrie, obţinem de asemenea că $y \to (x \to z) \leq x \to (y \to z)$. Prin urmare, conform (A4'), (A14) are loc.
(A15): Dacă $x \leq y$, adică $x \to y = 1$, atunci din (A5), avem că $z \to (x \to y) = 1$.
Pe de altă parte, din (A2), avem că $[z \to (x \to y)] \to [(z \to x) \to (z \to y)] = 1$.
Prin urmare, aplicând (MP), obţinem $(z \to x) \to (z \to y) = 1$, adică $z \to x \leq z \to y$. $\square$

Propoziţia 4.2.8 *Următoarele proprietăţi au loc, pentru orice* $x, y \in B$*:*

(A16) $y^- \to x^- \leq x \to y$,
(A17) (a) $x^- \leq x \to y$, *(b)* $x \leq x^- \to y$,
(A18) $(x^-)^- \leq x$,
(A19) $x \leq (x^-)^-$,
(A20) $(x^-)^- = x$.

Dem.
(A16): Urmează direct din (A3).
(A17) (a): Din (A9), $x^- \leq y^- \to x^-$ şi, din (A16), $y^- \to x^- \leq x \to y$; prin urmare, aplicând (A7'), obţinem $x^- \leq x \to y$. (A17) (b) este echivalent cu (A17) (a), prin (A10).

(A18): Din (A9) şi (A16) avem:
$(x^-)^- \leq (((x^-)^-)^-)^- \to (x^-)^- \leq x^- \to ((x^-)^-)^- \leq (x^-)^- \to x$.
Prin urmare, prin (A7'), obţinem $(x^-)^- \leq (x^-)^- \to x$, care prin (A8) ne dă $(x^-)^- \to (x^-)^- \leq (x^-)^- \to x$. Dar, prin (A6), $(x^-)^- \to (x^-)^- = 1$, prin urmare, prin (A5'), obţinem $(x^-)^- \to x = 1$, adică $(x^-)^- \leq x$.

(A19): Din (A18), $((x^-)^-)^- \leq x^-$, adică $((x^-)^-)^- \to x^- = 1$.
Pe de altă parte, din (A3), $[((x^-)^-)^- \to x^-] \to [x \to (x^-)^-] = 1$.
Prin urmare, aplicând (MP), $x \to (x^-)^- = 1$, adică $x \leq (x^-)^-$.

(A20): Din (A18), $(x^-)^- \leq x$ şi din (A19), $x \leq (x^-)^-$; prin urmare, prin (A4'), $(x^-)^- = x$. □

Propoziţia 4.2.9 *Următoarele proprietăţi au loc, pentru toţi $x, y \in B$:*

(A21) $x \leq (x \to y) \to y$,
(A22) $1 \to x = x$.

Dem.

(A21): Din (A6'), $x \to y \leq x \to y$ este adevărată. Prin urmare, din (A10), $x \leq (x \to y) \to y$.

(A22): Conform (A4), trebuie să demonstrăm că:
(a) $x \to (1 \to x) = 1$ şi (b) $(1 \to x) \to x = 1$.
Intr-adevăr, (a) este adevarată conform (A1). Pentru a demonstra (b), să observăm că, din (A21), avem $1 \leq (1 \to x) \to x$, prin urmare, din (A5'), avem $(1 \to x) \to x = 1$, adică (b) este adevărată de asemenea. □

Să definim un nou element al lui B astfel:

$$0 = 1^- \tag{4.2}$$

şi să definim două noi operaţii $\wedge$, $\vee$ astfel: pentru orice $x, y \in B$,

$$x \wedge y = (x \to y^-)^-, \qquad x \vee y = (x^- \wedge y^-)^- = x^- \to y. \tag{4.3}$$

Propoziţia 4.2.10 *Următoarele proprietăţi au loc, pentru toţi $x, y \in B$:*

(A23) $x \to y \leq y^- \to x^-$,
(A24) $y^- \to x^- = x \to y$,
(A25) $0^- = 1$,
(A26) $x \leq y \iff y^- \leq x^-$,
(A27) $0 \leq x$,
(A28) $x^- = x \to 0$,
(A29) $x \to x^- = x^-$ *sau, echivalent,* $x^- \to x = x$,
(A30) $x^- \to y = y^- \to x$,
(A31) $x \to y^- = y \to x^-$,

(A32) $(x \to y) \to x = x$ *(condiţia implicativă),*
(A33) $x \to (y \to z) = (x \wedge y) \to z$,
(A34) $x \leq y^- \to (x \to y)^-$.

Dem.

(A23): Din (A20) şi (A16), $x \to y = (x^-)^- \to (y^-)^- \leq y^- \to x^-$.

(A24): Din (A16), $y^- \to x^- \leq x \to y$ şi din (A23), $x \to y \leq y^- \to x^-$; prin urmare, prin (A4'), $y^- \to x^- = x \to y$.

(A25): $0^- = (1^-)^- = 1$, din (A20).

(A26): Din (A3), $(y^- \to x^-) \to (x \to y) = 1$ şi din (A23), $(x \to y) \to (y^- \to x^-) = 1$.
Prin urmare, aplicând (MP), dacă $y^- \leq x^-$, adică $y^- \to x^- = 1$, atunci $x \to y = 1$, adică $x \leq y$ şi
dacă $x \leq y$, adică $x \to y = 1$, atunci $y^- \to x^- = 1$, adică $y^- \leq x^-$.

(A27): Din (A26), (A25), $0 \leq x \iff x^- \leq 0^- \iff x^- \leq 1$. Dar, din (A5'), $x^- \leq 1$ este adevărată, prin urmare $0 \leq x$.

(A28): Din (A24), (A25), (A22), avem $x \to 0 = 0^- \to x^- = 1 \to x^- = x^-$.

(A29): Din (A9), avem $x^- \leq x \to x^-$; din (A28), (A2), (A6), (A28), (A22), avem
$x \to x^- = x \to (x \to 0) \leq (x \to x) \to (x \to 0) = 1 \to x^- = x^-$, adică $x \to x^- \leq x^-$, conform (A7'). Rezultă că $x \to x^- = x^-$, prin (A4'). Atunci să înlocuim x cu x^-.

(A30): Din (A20), (A24), avem $x^- \to y = x^- \to (y^-)^- = y^- \to x$.

(A31): Din (A20), (A24), obţinem $x \to y^- = (x^-)^- \to y^- = y \to x^-$.

(A32): Conform (A4), trebuie să demonstrăm:
(a) $x \to [(x \to y) \to x] = 1$ şi (b) $[(x \to y) \to x] \to x = 1$.
Intr-adevăr, (a) rezultă din (A1). Pentru a demonstra (b), întâi să observăm că $(x \to y) \to x = x^- \to (x \to y)^-$, din (A24). Dar, prin (A17)(a), avem $x^- \leq x \to y$; din (A26), (A20), avem $x^- \leq x \to y \iff (x \to y)^- \leq (x^-)^- \iff (x \to y)^- \leq x$. Acum, prin (A15), obţinem $x^- \to (x \to y)^- \leq x^- \to x \overset{(A29)}{=} x$. Prin urmare, $(x \to y) \to x \leq x$.

(A33): $(x \wedge y) \to z = (x \to y^-)^- \to z = z^- \to (x \to y^-) = x \to (z^- \to y^-) = x \to (y \to z)$, prin (A24), (A20), (A14), (A24).

(A34): Din (A21), (A16), avem $x \leq (x \to y) \to y = y^- \to (x \to y)^-$. □

Propoziţia 4.2.11 *Următoarele proprietăţi au loc, pentru toţi* $x, y \in B$*:*

(A35) $(x \wedge y)^- = x^- \vee y^-$ *(legea De Morgan),*
(A36) $(x \vee y)^- = x^- \wedge y^-$ *(legea De Morgan).*

Dem.

(A35): $(x \wedge y)^- = ((x \to y^-)^-)^- = x \to y^-$ şi $x^- \vee y^- = (x^-)^- \to y^- = x \to y^-$, din (A20).

(A36): $(x \vee y)^- = (x^- \to y)^-$ şi $x^- \wedge y^- = (x^- \to (y^-)^-)^- = (x^- \to y)^-$, din (A20). $\square$

Suntem acum în măsură să demonstrăm că (B1) - (B7) sunt îndeplinite.

Teorema 4.2.12 *Axiomele (A1) - (A4) implică (B1) - (B7).*

Dem.
(B1): $x \vee x = x \Longleftrightarrow x^- \to x = x$, conform (A29).
$x \wedge x = x \Longleftrightarrow (x \to x^-)^- = x$ şi din (A29), (A20), $(x \to x^-)^- = (x^-)^- = x$.
(B2): $x \vee y = y \vee x \Longleftrightarrow x^- \to y = y^- \to y$, conform (A30).
$x \wedge y = y \wedge x \Longleftrightarrow (x \to y^-)^- = (y \to x^-)^-$, conform (A31).
(B3): $x \vee (y \vee z) = x \vee (y^- \to z) = x^- \to (y^- \to z)$.
$(x \vee y) \vee z = z \vee (x \vee y) = z^- \to (x \vee y) = z^- \to (x^- \to y)$, din (B2), (A30).
Dar, $x^- \to (y^- \to z) = x^- \to (z^- \to y) = z^- \to (x^- \to y)$, din (A30), (A14).
$x \wedge (y \wedge z) = x \wedge (y \to z^-)^- = (x \to (y \to z^-))^-$, din (A20).
$(x \wedge y) \wedge z = z \wedge (x \to y^-)^- = (z \to (x \to y^-))^- = (x \to (z \to y^-))^- = (x \to (y \to z^-))^-$, prin (B2), (A20), (A14), (A31).
(B4): $x \vee (x \wedge y) = (x \wedge y) \vee x = (x \to y^-) \to x = x$, din (B2), (A20), (A32).
$x \wedge (x \vee y) = (x \vee y) \wedge x = (x^- \to y) \wedge x = ((x^- \to y) \to x^-)^- = (x^-)^- = x$, din (B2), (A32).
Să observăm că din (B1) - (B4), rezultă că $(B, \leq)$ este o latice; prin urmare, $x \wedge y \leq x \leq x \vee y$, iar $a \leq b$ şi $a' \leq b'$ implică $a \wedge a' \leq b \wedge b'$, $a \vee a' \leq b \vee b'$.
(B5): Conform (A4'), trebuie să demonstrăm:
(a) $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leq (x \vee y) \wedge z$ şi (b) $(x \vee y) \wedge z \leq (x \wedge z) \vee (y \wedge z)$.
Intr-adevăr, pentru a demonstra (a): deoarece $x \wedge z \leq z$ şi $y \wedge z \leq z$, atunci $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leq z$ şi deoarece $x \wedge z \leq x$ şi $y \wedge z \leq y$, atunci $(x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leq x \vee y$; astfel, (a) are loc.
Pentru a demonstra (b), mai întâi să demonstrăm

$$x \vee y \leq z \to [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)]. \tag{4.4}$$

Intr-adevăr, deoarece $z \to [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] = z \to [(z \to x^-) \to (y \to z^-)^-] \overset{(A14)}{=} (z \to x^-) \to [z \to (y \to z^-)^-]$, atunci (4.4) este echivalent cu

$$x \vee y \leq (z \to x^-) \to [z \to (y \to z^-)^-]. \tag{4.5}$$

Din (A34), avem

$$y \leq z \to (y \to z^-)^-. \tag{4.6}$$

Din (4.6), prin (A15), obţinem că $(z \to x^-) \to y \leq (z \to x^-) \to [z \to (y \to z^-)^-]$ şi din (A9) avem $y \leq (z \to x^-) \to y$; rezultă, prin (A7'), că

$$y \leq (z \to x^-) \to [z \to (y \to z^-)^-]. \tag{4.7}$$

Din (A11), avem
$x^- \to (y \to z^-)^- \leq (z \to x^-) \to [z \to (y \to z^-)^-]$ şi din (A9), (A16), avem
$x \leq (y \to z^-) \to x = x^- \to (y \to z^-)^-$.
Rezultă, prin (A7'), că

$$x \leq (z \to x^-) \to [z \to (y \to z^-)^-]. \tag{4.8}$$

Din (4.7) şi (4.8), obţinem (4.5), deci (4.4).
Acum, deoarece (4.4) înseamnă că $(x \vee y) \to (z \to [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)]) = 1$, rezultă, prin (A33), că
$[(x \vee y) \wedge z] \to [(x \wedge z) \vee (y \wedge z)] = 1$, adică (b) are loc.

(B6): $x \vee 0 = x^- \to 0 = (x^-)^- = x$ şi $x \wedge 1 = (x \to 1^-)^- = (x \to 0)^- = (x^-)^- = x$.

(B7): $x \vee x^- = x^- \to x^- = 1$ şi $x \wedge x^- = (x \to x)^- = 1^- = 0$. □

4.2.3 Aplicaţiile α şi β sunt mutual inverse

Fie

$$(B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1) \quad \xrightarrow{\alpha} \quad (B, \to, ^-, 1) \quad \xrightarrow{\beta} \quad (B, \bigwedge, \bigvee, ^-, \mathbf{0}, 1)$$

Atunci pentru orice $x, y \in B$, avem:
$x \bigwedge y = (x \to y^-)^- = (x^- \vee y^-)^- = x \wedge y$,
$x \bigvee y = x^- \to y = (x^-)^- \vee y = x \vee y$,
$\mathbf{0} = 1^- = 0$,
deci $\beta \circ \alpha = 1_{(B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)}$.

Invers, fie

$$(B, \to {}^-, 1) \quad \xrightarrow{\beta} \quad (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1) \quad \xrightarrow{\alpha} \quad (B, \Rightarrow, ^-, 1)$$

Atunci pentru orice $x, y \in B$, avem:
$x \Rightarrow y = x^- \vee y = (x^-)^- \to y = x \to y$,
deci $\alpha \circ \beta = 1_{(B, \to, ^-, 1)}$.

Cu aceasta, demonstraţia Teoremei 4.2.1 s-a terminat. □

Observaţii 4.2.13

(i) Aceasta a fost o demonstraţie directă că o algebră $(A, \to, ^-, 1)$ cu axiomele (A1) - (A4) este o algebră Boole. Dar există şi demonstraţiile urmatoare:

(ii) Din (A1), (A2), (A3), $(B, \to, 1)$ este o algebră Hilbert [6]; din (4.2), (A27), (A20), ea este o algebră Hilbert mărginită care satisface proprietatea dublei negaţii ($(x^-)^- = x$), prin urmare este o algebră Boole, conform [4].

(iii) Din (A12), (A21), (A6'), (A5'), (A4'), (4.1), $(B, \leq, \to, 1)$ este o algebră BCK-de stânga, răsturnată [27], [28], [29]; din (A32), ea este implicativă (see [31]); prin urmare, din (4.2), (A27), $(B, \leq, \to, 0, 1)$ este o algebră BCK-de stânga, răsturnată, implicativă, mărginită, deci este o algebră Boole, conform [31].

Observaţie 4.2.14 Algebra Boole, având proprietatea dublei negaţii ($(x^-)^- = x$), este autoduală. De aceea, în afară de implicaţia $\rightarrow$, mai există şi implicaţia duală, $\rightarrow^R$, corespunzătoare lui $\vee$:

$$x \rightarrow^R y = (x \vee y^-)^- = x^- \wedge y,$$

care este legată de $\rightarrow$ prin legături asemănătoare celor dintre $\wedge$ şi $\vee$, şi anume:

$$x \rightarrow y = (x^- \rightarrow^R y^-)^-, \quad x \rightarrow^R y = (x^- \rightarrow y^-)^-.$$

In consecinţă, se poate defini algebra Boole duală a algebrei $(B, \rightarrow, ^-, 1)$, anume algebra $(B, \rightarrow^R, ^-, 0)$, având ca axiome:

(A1R) $x \rightarrow^R (y \rightarrow^R x) = 0$,
(A2R) $[x \rightarrow^R (y \rightarrow^R z)] \rightarrow^R [(x \rightarrow^R y) \rightarrow^R (x \rightarrow^R z)] = 0$,
(A3R) $(y^- \rightarrow^R x^-) \rightarrow^R (x \rightarrow^R y) = 0$,
(A4R) dacă $x \rightarrow^R y = 0$ şi $y \rightarrow^R x = 0$, atunci $x = y$.

Aşa cum noţiunea duală *filtrului* este *idealul*, aşa şi noţiunea duală *sistemului deductiv (faţă de $\rightarrow$)* este *sistemul deductiv (faţă de $\rightarrow^R$)*.

4.3 Inel Boole. Echivalenţa cu algebra Boole

Să amintim următoarele definiţii:

Se numeşte *semigrup* sau *monoid* o algebră $\mathcal{A} = (A, *)$ de tip (2), unde $A \neq \emptyset$ şi operaţia $*$ este asociativă. $(A, *)$ se numeşte *semigrup comutativ sau abelian* sau *monoid comutativ sau abelian* dacă operaţia $*$ este comutativă. Se numeşte *semigrup unitar* sau *monoid unitar* o algebră $\mathcal{A} = (A, *, e)$ de tip (2,0), unde $(A, *)$ este semigrup şi e este element neutru al operaţiei $*$, adică $x * e = e * x = x$, pentru orice $x \in A$.

Exemple:
$(\mathbf{Z}, +, 0)$, $(\mathbf{Z}, \cdot, 1)$, $(\mathbf{N}, +, 0)$, $(\mathbf{N}, \cdot, 1)$ sunt semigrupuri comutative, unitare.

Se numeşte *group* o algebră $\mathcal{G} = (G, +, -, 0)$ - în notaţie aditivă - de tip $(2, 1, 0)$, astfel că următoarele axiome sunt satisfăcute: pentru toti $x, y, z \in G$,
(g1) (asociativitatea) $x + (y + z) = (x + y) + z$,
(g2) (0 este elementul neutru) $x + 0 = x = 0 + x$,
(g3) $x + (-x) = 0 = (-x) + x$.

In notaţie multiplicativă, un grup este o algebră $\mathcal{G} = (G, \cdot, ^{-1}, 1)$.

Să observăm că în unele materiale grupul este definit, echivalent, ca o algebră $(G, +, 0)$ - în notaţia aditivă - sau o algebră $(G, \cdot, 1)$ - în notaţia multiplicativă.

Grupul se zice *commutativ sau abelian* dacă:
(g0) (comutativitatea) $x + y = y + x$, pentru toti $x, y \in G$.

Propoziţia 4.3.1 *Fie* $(G, +, -, 0)$ *un group. Atunci*
(g4) $-(-x) = x$*, pentru toţi* $x \in G$*,*
(g5) $-0 = 0$.

Se numeşte *inel* o algebră $(A, +, \cdot, -, 0)$ de tip $(2, 2, 1, 0)$, unde $A \neq \emptyset$ şi:
(a) $(A, +, -, 0)$ este grup abelian,
(b) $(A, \cdot)$ este semigrup,
(c) operaţia $\cdot$ este distributivă faţă de operaţia $+$, adică pentru orice $x, y, z \in A$,

$$x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z, \quad (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x.$$

Să observăm că în unele materiale inelul este definit, echivalent, ca o algebră $(A, +, \cdot, 0)$, deoarece se consideră definiţia echivalentă a grupului ca o algebră $(A, +, 0)$.

Un inel se numeşte *comutativ*, dacă şi operaţia de înmulţire $\cdot$ este comutativă. Un inel se numeşte *unitar*, dacă semigrupul $(A, \cdot)$ este unitar; deci, un inel unitar este o algebră $(A, +, \cdot, -, 0, 1)$.

Definiţie 4.3.2 Se numeşte *inel boolean* sau *inel Boole* orice inel unitar $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1)$ cu proprietatea că $x^2 = x$ pentru orice $x \in A$, unde $x^2 \overset{notaţie}{=} x \cdot x$.

Lema 4.3.3 *Fie* $\mathcal{A}$ *un inel Boole. Atunci pentru orice două elemente* $x, y \in A$*, avem* $x + x = 0$ *şi* $x \cdot y = y \cdot x$.

Dem. Din $x + y = (x + y)^2 = x^2 + x \cdot y + y \cdot x + y^2 = x + x \cdot y + y \cdot x + y$ rezultă $x \cdot y + y \cdot x = 0$. Luând $y = x$, se obţine $x + x = x^2 + x^2 = 0$.
Pentru orice $z \in A$, vom avea $z + z = 0$, adică $z = -z$. Luând $z = x \cdot y$, rezultă $x \cdot y = -(x \cdot y) = y \cdot x$. □

Teorema 4.3.4
1) Fie $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1)$ *un inel Boole. Să definim*

$$\beta(\mathcal{A}) = (A, \wedge, \vee, ^-, 0, 1),$$

unde:

$$x \vee y \overset{def.}{=} x + y + x \cdot y, \quad x \wedge y \overset{def.}{=} x \cdot y, \quad x^- \overset{def.}{=} x + 1.$$

Atunci $\beta(\mathcal{A})$ *este o algebră Boole.*
1') Invers, fie $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ *o algebră Boole. Să definim:*

$$\rho(\mathcal{A}) = (A, +, \cdot, -, 0, 1),$$

unde:

$$x + y \overset{def.}{=} (x \wedge y^-) \vee (x^- \wedge y), \quad x \cdot y \overset{def.}{=} x \wedge y, \quad -x \overset{def.}{=} x.$$

Atunci $\rho(\mathcal{A})$ *este un inel Boole.*
2) Aplicaţiile β *şi* ρ *sunt mutual inverse.*

Dem. (1): Să demonstrăm, de exemplu, asociativitatea operaţiei $\vee$:
$(x \vee y) \vee z = (x+y+x\cdot y)+z+(x+y+x\cdot y)\cdot z = x+y+z+x\cdot y+y\cdot x+z\cdot x+x\cdot y\cdot z = \ldots = x \vee (y \vee z)$.

Vom mai demonstra că $x+1$ verifică proprietăţile complementului:
$x \vee (x+1) = x + x + 1 + x \cdot (x+1) = 2x + 1 + x^2 + x = 0 + 1 + (x+x) = 1 + 0 = 1$,
unde $2x \overset{notaţie}{=} x + x$, şi
$x \wedge (x+1) = x \cdot (x+1) = x^2 + x = x + x = 0$.

(1'): Să verificăm asociativitatea operaţiei $+$:
$(a+b)+c = [((a \wedge b^-) \vee (a^- \wedge b)) \wedge c^-] \vee [((a \wedge b^-) \vee (a^- \wedge b))^- \wedge c]$;
calculăm separat:
$((a \wedge b^-) \vee (a^- \wedge b)) \wedge c^- = (a \wedge b^- \wedge c^-) \vee (a^- \wedge b \wedge c^-)$ şi
$((a \wedge b^-) \vee (a^- \wedge b))^- \wedge c = ((a^- \vee b) \wedge (a \vee b^-)) \wedge c =$
$[(a \wedge a^-) \vee (a^- \wedge b^-) \vee (a \wedge b) \vee (b \wedge b^-)] \wedge c =$
$((a \wedge b) \vee (a^- \wedge b^-)) \wedge c = (a \wedge b \wedge c) \vee (a^- \wedge b^- \wedge c)$.
Inlocuind mai sus, se obţine:
$(a+b)+c = (a^- \wedge b^- \wedge c) \vee (a^- \wedge b \wedge c^-) \vee (a \wedge b^- \wedge c^-) \vee (a \wedge b \wedge c)$.
Expresia obtinută este simetrică în a, b, c, deci $(a+b)+c = a+(b+c)$.

Verificarea celorlalte axiome ale inelului Boole se face similar.

(2): Prin calcule. □

Corolar 4.3.5 *Algebrele Boole şi inelele Boole sunt termen echivalente.*

Dem. Prin Teorema 4.3.4. □

Caz particular. Fie algebra Boole $\mathcal{P}(X)$ a părţilor unei mulţimi X. Adunarea $+$ a inelului Boole asociat $\rho(\mathcal{P}(X))$ este chiar diferenţa simetrică: $A \triangle B = (A - B) \cup (B - A)$, iar înmulţirea $\cdot$ este intersecţia: $A \cap B$.

Exerciţiu 4.3.6 Fie $\mathcal{A} = (A, +, \cdot, -, 0, 1)$ un inel comutativ şi unitar. Un element $e \in A$ se numeşte *idempotent* dacă $e^2 = e$. Să notăm cu $B(A)$ mulţimea elementelor idempotente ale lui $\mathcal{A}$. Pe $B(A)$, să definim operaţia următoare: pentru orice $e, f \in B(A)$,
$$e \oplus f \overset{def.}{=} e + f - 2(e \cdot f).$$
Să se arate că $(B(A), \oplus, \cdot, 0, 1)$ este inel Boole.

4.4 Subalgebre, homomorfisme

Definiţie 4.4.1 Fie $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole. O submulţime nevidă S a lui B se numeşte *subalgebră Boole* (pe scurt, *subalgebră*) a lui $\mathcal{B}$ dacă S este închisă la operaţiile din $\mathcal{B}$, adică dacă sunt verificate axiomele următoare: pentru orice $x, y \in A$,

(a) $x, y \in S$ implică $x \wedge y \in S$,
(b) $x, y \in S$ implică $x \vee y \in S$,
(c) $x \in S$ implică $x^- \in S$,
(d) $0 \in S$, $1 \in S$.

Observaţii 4.4.2

(1) Fiecare din axiomele (a), (b), (d) rezultă din celelalte trei. Axioma (c) nu rezultă din celelalte. Intr-adevăr, considerăm algebra Boole L_2^2 şi $S = \{(0,0), (1,0), (1,1)\}$. S verifică axiomele (a), (b), (d), dar nu este închisă la negaţie.

(2) Dacă S este subalgebră Boole a lui $(B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$, atunci $(S, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ este algebră Boole, unde am notat tot cu $\wedge, \vee, ^-$ restricţiile operaţiilor din B la S.

Exemple 4.4.3

(1) Dacă $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ este o algebră Boole, atunci $L_2 = \{0, 1\} \subset B$ este subalgebră a lui $\mathcal{B}$.

(2) Dacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole, atunci $L_2^{\mathbf{N}}$ este subalgebră a lui $B^{\mathbf{N}}$.

(3) Dacă X este un spaţiu topologic, atunci algebra Boole $B(X)$ a părţilor lui X care sunt simultan închise şi deschise este subalgebră a lui $\mathcal{P}(X)$.

(4) $L_2^3 = L_2 \times L_2 \times L_2 = \{0, a, b, c, d, e, f, 1\}$ are urmatoarele subalgebre:
$S_1 = \{0, 1\}$, $S_2 = \{0, c, d, 1\}$, $S_3 = \{0, b, e, 1\}$, $S_4 = \{0, a, f, 1\}$, $S_5 = L_2^3$.

Exerciţiu 4.4.4 Să se scrie un program pentru determinarea tuturor subalgebrelor lui L_2^n, $n \geq 2$.

Definiţie 4.4.5 Fie $\mathcal{A} = (A, \wedge_A, \vee_A, ^{-_A}, 0_A, 1_A)$ şi $\mathcal{B} = (B, \wedge_B, \vee_B, ^{-_B}, 0_B, 1_B)$ două algebre Boole.

Un *homomorfism*, sau *morfism*, de algebre Boole sau boolean, de la $\mathcal{A}$ la $\mathcal{B}$, este o funcţie $f : A \longrightarrow B$ care satisface proprietăţile următoare: pentru orice $x, y \in A$,
(H1) $f(x \wedge_A y) = f(x) \wedge_B f(y)$,
(H2) $f(x \vee_A y) = f(x) \vee_B f(y)$,
(H3) $f(x^{-_A}) = f(x)^{-_B}$,
(H4) $f(0_A) = 0_B$, $f(1_A) = 1_B$.

Un *izomorfism* de algebre Boole este un homomorfism de algebre Boole care este bijectiv. Dacă algebrele Boole $\mathcal{A}$ şi $\mathcal{B}$ sunt izomorfe, atunci vom nota $\mathcal{A} \cong \mathcal{B}$.

Un *endomorfism* al algebrei Boole $\mathcal{A}$ este un homomorfism $f : A \longrightarrow A$.

Un *automorfism* al algebrei Boole $\mathcal{A}$ este un izomorfism $f : A \longrightarrow A$.

Observaţii 4.4.6

(i) Fiecare din cele patru axiome (H1) - (H4) este implicată de celelalte trei. De exemplu, (H4) este implicată de (H1) - (H3): într-adevăr, $S \neq \emptyset$ înseamnă că există $x \in S$, deci $x^- \in S$ şi deci $x \wedge x^- = 0 \in S$ şi $x \vee x^- = 1 \in S$.

(ii) Un morfism boolean $f : A \longrightarrow B$ verifică următoarele proprietăţi legate de implicaţia şi echivalenţa booleană: pentru orice $x, y \in A$,
$f(x \rightarrow_A y) = f(x) \rightarrow_B f(y)$, $f(x \leftrightarrow_A y) = f(x) \leftrightarrow_B f(y)$.

(iii) Orice morfism de algebre Boole este o aplicaţie *izotonă* (păstrează ordinea), adică,

$$x \leq_A y \Rightarrow f(x) \leq_B f(y).$$

Intr-adevăr, $x \leq_A y \Leftrightarrow x \vee_A y = y$ implică $f(x \vee_A y) = f(y) = f(x) \vee_B f(y)$, adică $f(x) \leq_B f(y)$.

Propoziţia 4.4.7 *Dacă $f : A \longrightarrow B$ este un homomorfism de algebre Boole şi S este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{A}$, atunci $f(S)$ este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$. In particular, imaginea, $f(A)$, a lui A prin f este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{B}$.*

Dem. Imediat. □

Vom nota cu **Boole** categoria algebrelor Boole şi a morfismelor booleene.

Exemple 4.4.8 Exemple de morfisme booleene.

(1) Fie X, Y două mulţimi nevide şi $f : X \longrightarrow Y$ o funcţie oarecare. Funcţia $\Phi : \mathcal{P}(Y) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$, definită de $\Phi(C) = f^{-1}(C)$, pentru orice $C \subseteq Y$, este un morfism boolean.

(2) Fie $\mathcal{P}(X)$ algebra Boole a părţilor lui X. Considerăm funcţia $\Phi : \mathcal{P}(X) \longrightarrow L_2^X$, definită de $\Phi(A) = \chi_A$, pentru orice $A \subseteq X$ (unde χ_A este funcţia caracteristică a lui A). Atunci Φ este un izomorfism boolean.

(3) Rombul este izomorf cu L_2^2.

(4) Cubul este izomorf cu L_2^3.

(5) Ne propunem să determinăm automorfismele cubului.

Intâi, vom observa că dacă $f : A \longrightarrow B$ este un izomorfism boolean, atunci: pentru orice $x, y \in A$,

$$x < y \Longleftrightarrow f(x) < f(y).$$

Atunci dacă f este un automorfism al cubului, vom avea $f(\{a, b, c\}) = \{a, b, c\}$. Rezultă că numărul de automorfisme ale cubului este 8 (= numărul de permutari ale unei mulţimi cu 3 elemente). Morfismul identic este unul din cele 8. Să vedem cum se determină unul din celelalte. Presupunem că $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$. Atunci:

$f(x) = f(a \vee b) = f(a) \vee f(b) = b \vee c = z$,
$f(y) = f(a \vee c) = f(a) \vee f(c) = b \vee a = x$,
$f(z) = f(b \vee c) = f(b) \vee f(c) = c \vee a = y$.
Bineînţeles că $f(0) = 0$ şi $f(1) = 1$.

Exerciţii 4.4.9

(1) Să se determine (eventual printr-un program) toate automorfismele lui L_2^n, $n \geq 2$.

(2) Să se determine toate morfismele booleene de tipul: (a) $f : L_2^3 \longrightarrow L_2$, (b) $f : L_2^3 \longrightarrow L_2^2$, (c) $f : L_2^2 \longrightarrow L_2^3$, (d) $f : L_2^3 \longrightarrow L_2^3$.

Observaţie 4.4.10 Fie $f : L \longrightarrow L'$ un morfism din $Ld(0,1)$ (latici distributive cu prim şi ultim element). Dacă $x \in C(L)$, atunci $f(x) \in C(L')$, deci putem defini $C(f) = f\mid_{C(L)}: C(L) \longrightarrow C(L')$. Atunci $C(f)$ este un morfism boolean. Asocierea $L \rightsquigarrow C(L)$, $f \rightsquigarrow C(f)$ defineşte un functor contravariant $C : Ld(0,1) \longrightarrow$ **Boole**.

Lema 4.4.11 *Fie $f : A \longrightarrow B$ un morfism boolean. Sunt echivalente afirmaţiile:*
(1) f este injectiv,
(2) Pentru orice $x, y \in A$, avem: $x \leq y \Longleftrightarrow f(x) \leq f(y)$.

Dem.
(1) $\Rightarrow$ (2): Dacă $f(x) \leq f(y)$, atunci $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y) = f(x)$, deci $x \wedge y = x$, de unde $x \leq y$. Este evident că $x \leq y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$.
(2) $\Rightarrow$ (1): Dacă $F(x) = f(y)$, atunci $f(x) \leq f(y)$ şi $f(y) \leq f(x)$, de unde $x \leq y$ şi $y \leq x$; rezultă $x = y$. □

Lema 4.4.12 *Fie $f : A \longrightarrow B$ un morfism boolean. Sunt echivalente afirmaţiile:*
(1) f este injectiv,
(2) $f^{-1}(0) = \{0\}$,
(3) $f^{-1}(1) = \{1\}$.

Dem.
(1) $\Rightarrow$ (3): $f(x) = 1 = f(1)$ implică $x = 1$.
(3) $\Rightarrow$ (1): $f(x) \leq f(y)$ implică $f(x \rightarrow y) = f(x) \rightarrow f(y) = 1$ implică $x \rightarrow y = 1$ implică $x \leq y$. Aplicând Lema 4.4.11, rezultă că f este injectiv.
(1) $\Longleftrightarrow$ (2) se demonstrează analog. □

Observaţii 4.4.13
(i) Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două inele Boole şi $\beta(\mathcal{A})$, $\beta(\mathcal{B})$ algebrele Boole asociate. Dacă $f : A \longrightarrow B$ este un morfism de inele unitare, atunci

$$\beta(f) = f : \beta(\mathcal{A}) \longrightarrow \beta(\mathcal{B})$$

este un morfism boolean.
(i') Fie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ două algebre Boole şi $\rho(\mathcal{A})$, $\rho(\mathcal{B})$ inelele Boole asociate. Dacă $g : A \longrightarrow B$ este un morfism boolean, atunci

$$\rho(g) = g : \rho(\mathcal{A}) \longrightarrow \rho(\mathcal{B})$$

este un morfism de inele unitare.

ρ poate fi privit ca un functor de la categoria algebrelor Boole la categoria inelelor Boole, iar β un functor de la categoria inelelor Boole la categoria algebrelor Boole. Functorii ρ şi β stabilesc un izomorfism între categoria algebrelor Boole şi categoria inelelor Boole.

4.5 Filtre (ideale) şi congruenţe. Algebre Boole cât

4.5.1 Filtre (ideale) şi sisteme deductive

Definiţie 4.5.1 Fie $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole oarecare. O submulţime nevidă F a lui B se numeşte *filtru*, dacă pentru orice $x, y \in B$ avem:
(F1) $x, y \in F$ implică $x \wedge y \in F$,
(F2) $x \in F$, $x \leq y$ implică $y \in F$.

Observaţii 4.5.2
(i) Din (F2) rezultă că $1 \in F$, deoarece orice $x \in F$ verifică $x \leq 1$.
(ii) Pentru orice elemente $x, y \in B$, $x, y \in F$ dacă şi numai dacă $x \wedge y \in F$.

Dual, un *ideal* al lui $\mathcal{B}$ este o submulţime nevidă I a lui B pentru care:
(F1') $x, y \in I$ implică $x \vee y \in I$,
(F2') $x \in I$, $x \geq y$ implică $y \in I$.

Observaţii 4.5.3
(i') Din (F2') rezultă că $0 \in I$, deoarece orice $x \in I$ verifică $x \geq 0$.
(ii') Pentru orice elemente $x, y \in B$, $x, y \in I$ dacă şi numai dacă $x \vee y \in I$.

Unui filtru F i se asociază idealul $I_F = \{x^- \mid x \in F\}$, iar unui ideal I i se asociază filtrul $F_I = \{x^- \mid x \in I\}$. In acest fel, filtrele lui $\mathcal{B}$ sunt în corespondenţă biunivocă cu idealele lui $\mathcal{B}$. Conform acestei observaţii, vom studia numai filtrele unei algebre Boole; proprietăţile idealelor se vor obţine prin dualizare.

Definiţie 4.5.4 *Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole. Un $\rightarrow$-sistem deductiv sau simplu un sistem deductiv cand nu este pericol de confuzie al lui $\mathcal{B}$ este o submulţime $S \subseteq B$ care satisface proprietăţile:*
(sd1) $1 \in S$,
(sd2) $x \in S$ *şi* $x \rightarrow y \in S$ *implică* $y \in S$.

Propoziţia 4.5.5 *Filtrele lui $\mathcal{B}$ coincid cu sistemele sale deductive.*

Dem.
Fie F un filtru al lui $\mathcal{B}$. Deci $\neq F \subseteq B$. Fie $x \in F$; avem $x \leq 1$, prin urmare $1 \in F$, conform (F2). Fie acum $x, x \rightarrow y \in F$. Atunci $x \wedge (x \rightarrow y) \in F$, conform (F1); dar $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge (x^- \vee y) = 0 \vee (x \wedge y) = x \wedge y$ şi $x \wedge y \leq y$. Rezulta, aplicand (F2), că $y \in F$. Deci, F este un sistem deductiv.

Invers, fie S un sistem deductiv al lui $\mathcal{B}$. Din (sd1), avem că $1 \in S$, deci S este nevidă. Fie $x, y \in S$. We have that $y \rightarrow (x \rightarrow (x \wedge y)) = 1$. Indeed, $y \rightarrow (x \rightarrow (x \wedge y)) = y^- \vee x^- \vee (x \wedge y) = (y^- \vee x^- \vee x) \wedge (y^- \vee x^- \vee y) = 1 \wedge 1 = 1$. Dar $1 \in S$, prin urmare $y \rightarrow (x \rightarrow (x \wedge y)) \in S$. Rezultă că $x \rightarrow (x \wedge y) \in S$, din (sd2). De aici rezultă că $x \wedge y \in S$; deci (F1) are loc. Fie acum $x \in S$ şi $x \leq y$. Atunci $x \rightarrow y = 1$, conform Propoziţiei 4.1.9. Dar $1 \in S$, din (sd1), deci $x \rightarrow y \in S$. Rezultă că $y \in S$, din (sd2). Astfel, (F2) are loc de asemenea, deci S este un filtru. □

4.5.2 Congruenţe. Corespondenţa filtre - congruenţe

Definiţie 4.5.6 Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole. O relaţie de echivalenţă $\sim$ pe B se numeşte *congruenţă* a lui $\mathcal{B}$ dacă este compatibilă cu $\vee$, $\wedge$, $^-$, adică dacă: pentru orice $x, y, x', y' \in B$,
(C1) $x \sim y$, $x' \sim y'$ implică $(x \vee x') \sim (y \vee y')$,
(C2) $x \sim y$, $x' \sim y'$ implică $(x \wedge x') \sim y(\wedge y')$,
(C3) $x \sim y$ implică $x^- \sim y^-$.

Observaţii 4.5.7
(i) Condiţia (C1) sau (C2) rezultă din celelalte două.
(ii) Dacă $\sim$ este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$, atunci:
(C4) $x \sim y$, $x' \sim y'$ implică $(x \rightarrow x') \sim (y \rightarrow y')$,
(C5) $x \sim y$, $x' \sim y'$ implică $(x \leftrightarrow x') \sim (y \leftrightarrow y')$.

Dacă algebra Boole este definită echivalent ca o structură $(B, \rightarrow, ^-, 1)$, atunci congruenţa se defineşte echivalent ca o relaţie de echivalenţă compatibilă cu $\rightarrow$ şi cu $^-$.

Propoziţia 4.5.8 *Filtrele unei algebre Boole sunt în corespondenţă bijectivă cu congruenţele sale.*

Dem.
• Fiecărui filtru F al lui $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ îi asociem următoarea relaţie binară, $\sim_F$, definită astfel: pentru orice $x, y \in B$,

$$x \sim_F y \Leftrightarrow x \leftrightarrow y \in F.$$

Să observăm că $x \leftrightarrow y \in F \Leftrightarrow (x \rightarrow y \in F$ şi $y \rightarrow x \in F)$.
- Să demonstrăm că $\sim_F$ este o relaţie de echivalenţă pe B şi că este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$.
Arătăm întâi că $\sim_F$ este o relaţie de echivalenţă pe B:
Pentru orice $x \in B$, $x \sim_F x$ rezultă din $x \leftrightarrow x = 1 \in F$.
Pentru orice $x, y \in B$, $x \sim_F y$ implică $y \sim_F x$, deoarece $x \leftrightarrow y = y \leftrightarrow x$.
Pentru orice $x, y, z \in B$ care verifică $x \sim_F y$ şi $y \sim_F z$, deci $x \rightarrow y \in F$, $y \rightarrow x \in F$, $y \rightarrow z \in F$, $z \rightarrow y \in F$, trebuie să arătăm că $x \sim_F z$.
Să stabilim inegalitatea

$$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) \leq x \rightarrow z,$$

care va implica $x \rightarrow z \in F$. Intr-adevăr,
$(x \rightarrow y) \wedge (y \rightarrow z) = (x^- \vee y) \wedge (y^- \vee z) = (x^- \wedge y^-) \vee (y \wedge y^-) \vee (x \wedge z) \vee (y \wedge z) \leq$

$x^- \vee z = x \to z$.
Analog, rezultă $z \to x \in F$; deci $x \sim_F z$. Deci, $\sim_F$ este o relaţie de echivalenţă pe B.

- Să demonstrăm (C1): fie $x \sim_F y$ şi $x' \sim_F y'$, deci $x \to y \in F$, $y \to x \in F$, $x' \to y' \in F$, $y' \to x' \in F$; se observă că:
$(x \to y) \wedge (x' \to y') = (x^- \vee y) \wedge (x'^- \vee y') \leq (x^- \vee y \vee y') \wedge (x'^- \vee y \vee y') = (x^- \wedge x'^-) \vee y \vee y' = (x \vee x') \to (y \vee y')$.
Folosind această inegalitate, se obţine $(x \vee x') \to (y \vee y') \in F$ şi analog, $(y \vee y') \to (x \vee x') \in F$, deci $(x \vee x') \sim_F (y \vee y')$; astfel, (C1) este adevărată.

- (C2) se demonstrează similar.

- Să demonstrăm (C3): deoarece $x \leftrightarrow y = x^- \leftrightarrow y^-$, vom avea: $x \sim_F y$ implică $x^- \sim_F y^-$; astfel, (C3) este adevărată. Deci, $\sim_F$ este o congruenţă a lui $\mathcal{B}$.

• Invers, fiecărei congruenţe $\sim$ a lui $\mathcal{B}$ îi asociem submulţimea lui B definită astfel:

$$F^{\sim} = \{x \in B \mid x \sim 1\}.$$

Să arătăm că $F^{\sim}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.
- $F^{\sim}$ este nevidă, deorece $1 \sim 1$ implică $1 \in F$.
- Să demonstrăm (F1): $x, y \in F^{\sim}$, adică $x \sim 1$, $y \sim 1$ implică $(x \wedge y) \sim (1 \wedge 1 = 1)$, adică $x \wedge y \in F^{\sim}$;
- Să demonstrăm (F2): fie $x \in F^{\sim}$, $x \leq y$; deci $x \sim 1$ şi $x \vee y = y$, care implică $(y = x \vee y) \sim (1 \vee y = 1)$, adică $y \in F^{\sim}$. Deci, $F^{\sim}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$.

• Dacă $\mathcal{F}_B$ este mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$ şi $\mathcal{C}_B$ este mulţimea congruenţelor lui $\mathcal{B}$, atunci consideram aplicaţiile:

$$\Phi : \mathcal{F}_B \longrightarrow \mathcal{C}_B \text{ şi } \Psi : \mathcal{C}_B \longrightarrow \mathcal{F}_B,$$

definite astfel: $\Phi(F) = \sim_F$, pentru orice $F \in \mathcal{F}_B$ şi $\Psi(\sim) = F^{\sim}$, pentru orice $\sim \in \mathcal{C}_B$.
Trebuie arătat că Φ şi Ψ sunt inverse una alteia, adică că

$$\Psi(\Phi(F)) = F \text{ şi } \Phi(\Psi(\sim)) = \sim .$$

Să observăm că $F \mapsto \sim_F \mapsto F^{\sim_F}$ şi $\sim \mapsto F^{\sim} \mapsto \sim_{F^{\sim}}$.
Atunci

$$F^{\sim_F} = \{x \mid x \sim_F 1\} = \{x \mid x \leftrightarrow 1 \in F\} = \{x \mid x \in F\} = F.$$

Vom demonstra că $\sim = \sim_{F^{\sim}}$, unde pentru $x, y \in B$,
$x \sim_{F^{\sim}} y$ este echivalent cu $x \to y \in F^{\sim}$ şi $y \to x \in F^{\sim}$.
- dacă $x \sim y$, atunci $(x \to y) \sim (y \to 1)$, deci $(x \to y) \sim 1$ şi, analog, $(y \to x) \sim 1$. Rezultă $x \to y \in F^{\sim}$ şi $y \to x \in F^{\sim}$, deci $x \sim_{F^{\sim}} y$.
- dacă $x \to y \in F^{\sim}$ şi $y \to x \in F^{\sim}$, deci $(x \to y) \sim 1$ şi $(y \to x) \sim 1$, rezultă că $(x \wedge y = x \wedge (x \to y)) \sim (x \wedge 1 = x)$ şi, analog, $(x \wedge y) \sim y$, deci $x \sim y$. $\square$

Exerciţiu 4.5.9 Fie algebra Boole $\mathcal{P}(X)$, cu X infinită. Să se arate că părţile cofinite (= părţile ce au complementarele finite) formează un filtru şi să se determine congruenţa asociată.

4.5.3 Algebra Boole cât

Fie F un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$ şi $\sim_F$ relaţia de congruenţă asociată lui F prin Propoziţia precedenu a. Deoarece $\sim_F$ este o relaţie de echivalenţă pe B, să formăm clasele de echivalenţă: fie $x/_F$ clasa de echivalenţă a lui $x \in B$, adică

$$x/_F = \{y \in B \mid y \sim_F x\}.$$

Fie $B/_F = B/\!\sim_F$ *mulţimea cât*, adică mulţimea tuturor claselor de echivalenţă:

$$B/_F = \{x/_F \mid x \in B\}.$$

Dacă $x/_F \in B/_F$ şi $y/_F \in B/_F$, atunci $x/_F = y/_F \Leftrightarrow x \sim_F y$.

Să definim pe mulţimea cât, $B/_F$, următoarele operaţii, notate tot cu $\vee, \wedge, ^-$: pentru orice $x/_F,\ y/_F \in B/_F$,

$$x/_F \ \vee\ y/_F = (x \vee y)/_F, \quad x/_F \ \wedge\ y/_F = (x \wedge y)/_F, \quad (x/_F)^- = (x^-)/_F.$$

Conform proprietăţilor congruenţei $\sim_F$, cele trei operaţii sunt bine definite (adică nu depind de reprezentanţii claselor).

Să definim de asemenea elementele:

$$0/_F = \{x \in B \mid x \sim_F 0\} \in B/_F,$$

$$1/_F = \{x \in B \mid x \sim_F 1\} = \{x \in B \mid x \leftrightarrow 1 \in F\} = \{x \in B \mid x \in F\} = F \in B/_F.$$

Atunci avem următorul rezultăt:

Propoziţia 4.5.10 *Structura* $(B/_F, \vee, \wedge, ^-, 0/_F, 1/_F)$ *este o algebră Boole, numită algebra Boole cât a lui* B *prin filtrul* F.

Dem. Trebuie demonstrat că pentru orice $x/_F,\ y/_F\ \in B/_F$, avem:
(B1) $x/_F\ \vee\ x/_F = x/_F, \quad x/_F\ \wedge\ x/_F = x/_F$, etc.
Să demonstrăm prima egalitate din (B1). Fie $x/_F \in B/_F$, element fixat, altfel arbitrar; să demonstrăm că $x/_F\ \vee\ x/_F = x/_F$. Intr-adevăr, $x/_F\ \vee\ x/_F = x/_F \Leftrightarrow (x \vee x)/_F = x/_F \Leftrightarrow (x \vee x) \sim_F x \Leftrightarrow (x \vee x) \leftrightarrow x \in F$; dar $x \vee x = x$, conform (B1) din definiţia algebrei Boole $\mathcal{B}$; deci $x \leftrightarrow x \in F \Leftrightarrow 1 \in F$, ceea ce este întotdeauna adevărat. Rezultă, conform Principiului Generalizării, (**PG**), că pentru orice $x/_F \in B/_F$, $x/_F \vee x/_F = x/_F$ este adevărată. La fel se demonstrează restul proprietăţilor. □

Să observăm că dacă $F = B$, atunci $B/_F = B/_B = \{B\}$ este o algebră Boole cu un singur element.

Corolar 4.5.11 *Surjecţia canonică* $p : B \longrightarrow B/_F$, *definită astfel: pentru orice* $x \in B$,

$$p(x) = x/_F,$$

este un homomorfism de algebre Boole.

Propoziţia 4.5.12 *Fie F un filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$ şi fie $B/_F$ algebra Boole cât. Fie $\widetilde{U}$ un filtru al algebrei Boole cât şi fie*

$$U = p^{-1}(\widetilde{U}) = \{x \in B \mid p(x) \in \widetilde{U}\}.$$

Atunci U este filtru al algebrei Boole $\mathcal{B}$ şi $F \subseteq U$.

Dem.

$U \neq \emptyset$: $\widetilde{U}$ este filtru, deci $\widetilde{U} \neq \emptyset$. Atunci există $\widehat{x} = p(x) \in \widetilde{U}$, deci $x \in U$ şi deci $U \neq \emptyset$.

(F1): Fie $x, y \in U$. Atunci $p(x), p(y) \in \widetilde{U}$. Cum $\widetilde{U}$ este filtru, rezultă că $p(x) \wedge p(y) = p(x \wedge y) \in \widetilde{U}$, conform (F1). Deci, $x \wedge y \in U$.

(F2): Fie $x \in U$ şi $x \leq y$. Atunci $p(x) \in \widetilde{U}$ şi $p(x) \leq p(y)$. Cum $\widetilde{U}$ este filtru, rezultă că $p(y) \in \widetilde{U}$, din (F2). Atunci $y \in U$.

$F \subseteq U$: Fie $x \in F$, deci $x \leftrightarrow 1 \in F$, pentru că $x \leftrightarrow 1 = (x \to 1) \wedge (1 \to x) = 1 \wedge x = x$. Rezultă că $x \sim_F 1$, deci $p(x) = \widehat{x} = \widehat{1} \in \widetilde{U}$. Atunci $x \in U$. □

Observaţie 4.5.13

$$U = F \Longleftrightarrow \widetilde{U} = \{\widehat{1}\} = \{F\}.$$

Invers, avem următorul rezultat.

Propoziţia 4.5.14 *Fie F, U filtre ale algebrei Boole $\mathcal{B}$ astfel încât $F \subseteq U$. Fie $\widetilde{U} = p(U)$, unde $p : B \longrightarrow B/_F$. Atunci $\widetilde{U}$ este filtru al algebrei Boole cât $B/_F$.*

Dem.

$\widetilde{U} \neq \emptyset$: U este filtru, deci $U \neq \emptyset$; deci există $x \in U$ şi $\widehat{x} = p(x) \in p(U) = \widetilde{U}$. Rezultă că $\widetilde{U} \neq \emptyset$.

(F1): Fie $\widehat{x} = p(x)$, $\widehat{y} = p(y) \in \widetilde{U}$. Deci $x, y \in U$ şi U fiind filtru, rezultă din (F1) că $x \wedge y \in U$. Atunci $\widehat{x} \wedge \widehat{y} = p(x) \wedge p(y) = p(x \wedge y) \in \widetilde{U}$.

(F2): Fie $\widehat{x} = p(x) \in \widetilde{U}$ şi $p(x) = \widehat{x} \leq \widehat{y} = p(y)$. Deci $x \in U$ şi $x \leq y$. Cum U este filtru, rezultă din (F2) că $y \in U$. Atunci $\widehat{y} = p(y) \in \widetilde{U}$. □

Observaţie 4.5.15

Daca F este ultrafiltru, atunci $B/_F \overset{izo.}{\cong} L_2 = \{0, 1\}$.

Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole şi F, U filtre ale lui $\mathcal{B}$, cu $F \subseteq U$. Atunci

- $B/_F$ este algebra Boole cât cu $p_F : B \longrightarrow B/_F$ şi $\widetilde{U} = p_F(U)$,
- $(B/_F)/_{\widetilde{U}}$ este algebra Boole cât diferită de $\{0, 1\} \Longleftrightarrow U$ nu este ultrafiltru.

Atunci putem enunţa următoarea teoremă.

Teorema 4.5.16 *Fie F, U filtre ale algebrei Boole $\mathcal{B}$ cu $F \subseteq U$ şi fie*

$$\widetilde{U} = p_F(U) = \{p_F(x) \mid x \in U\},$$

unde $p_f : B \longrightarrow B/_F$ este surjecţia canonică, definită astfel: $p_F(x) = x/_F$.

Fie algebra Boole cât $(B/_F)_{\widetilde{U}}$ şi algebra Boole cât $B/_U$ cu $p_U : B \longrightarrow B/_U$, definită astfel: $p_U(x) = x/_U$.

Atunci

$$(B/_F)/_{\widetilde{U}} \overset{izo.}{\cong} B/_U.$$

Dem. Fie f, g două aplicaţii definite astfel:

$$(x/_F)/_{\widetilde{U}} \overset{\overset{f}{\hookrightarrow}}{\underset{}{\overset{g}{\hookleftarrow}}} x/_U.$$

Avem

$$x/_F = \{y \in B \mid y \sim_F x\} = \{y \in B \mid y \leftrightarrow x \in F\},$$

$$(x/_F)/_{\widetilde{U}} = \{y/_F \mid y/_F \sim_{\widetilde{U}} x/_F\} = \{y/_F \mid y/_F \leftrightarrow x/_F \in \widetilde{U}\} = \{y/_F \mid (y \leftrightarrow x)/_F \in \widetilde{U} = p_F(U)\}.$$

$$x/_U = \{y \in B \mid y \sim_U x\} = \{y \in B \mid y \leftrightarrow x \in U\}.$$

f este injectivă: Presupunem că $x/_U = y/_U$. Să demonstrăm că

$$(x/_F)/_{\widetilde{U}} = (y/_F)/_{\widetilde{U}}. \tag{4.9}$$

Dar $x/_U = y/_U \Longleftrightarrow x \sim_U y \Longleftrightarrow y \leftrightarrow x \in U \supseteq F$. Atunci:
- dacă $y \leftrightarrow x \in F$, atunci $y \sim_F x$, deci $y/_F = x/_F$ şi atunci (4.9) are loc.
- dacă $y \leftrightarrow x \in U \setminus F$, atunci $(y \leftrightarrow x)/_F = p_F(y \leftrightarrow x) = p_F(y) \leftrightarrow p_F(x) = y/_F \leftrightarrow x/_F \in \widetilde{U}$. Rezultă că $y/_F \sim_{\widetilde{U}} x/_F$, deci (4.9) are loc.

f este surjectivă: Fie $x/_U \in B/_U$. Există $x \in B$, astfel încât $p_U(x) = x/_U$. Deci $x/_F \in B/_F$, prin urmare există $y = (x/_F)/_{\widetilde{U}} \in (B/_F)/_{\widetilde{U}}$ şi $f(y) = f((x/_F)/_{\widetilde{U}}) = x/_U$. □

Propoziţia 4.5.17 *Fie $f : B \longrightarrow B'$ un morfism boolean.*

(1) $f^{-1}(1) = \{x \in B \mid f(x) = 1\}$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$;

(2) $f(B)$ este o subalgebră a lui B', izomorfă cu $B/f^{-1}(1)$.

Dem.

(1): Imediat.

(2): Notăm $F = f^{-1}(1)$ şi definim funcţia $g : B/_F \longrightarrow f(B)$, pentru orice $x \in B$, prin:

$$g(x/_F) = f(x).$$

Definiţia lui g nu depinde de reprezentanţi: $x/_F = y/_F$ implică $x \leftrightarrow y \in F$ implică $f(x) \leftrightarrow f(y) = f(x \leftrightarrow y) = 1$ implică $f(x) = f(y)$.
O verificare simplă arată că g este morfism boolean. Conform implicaţiilor:
$g(x/_F) = 1$ implică $f(x) = 1$ implică $x \in F$ implică $x/_F = 1/_F$,
rezultă că g este injectivă. Surjectivitatea lui g este evidentă. □

Exerciţiu 4.5.18 Fie $f : B \longrightarrow B'$ un morfism boolean surjectiv. Dacă F este un filtru al lui $\mathcal{B}$, atunci $f(F)$ este un filtru al lui $\mathcal{B}'$; dacă G este un filtru al lui $\mathcal{B}'$, atunci $f^{-1}(G)$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$. Filtrele lui $\mathcal{B}'$ sunt în corespondenţă biunivocă cu filtrele lui $\mathcal{B}$ ce includ pe $f^{-1}(1)$.

Exerciţiu 4.5.19 Fie F, G două filtre ale lui $\mathcal{B}$ astfel încât $F \subseteq G$. Atunci $G/_F = \{x/_F \mid x \in G\}$ este un filtru al lui $B/_F$ şi algebrele Boole $(B/_F)/(G/_F)$ şi B/G sunt izomorfe.

4.5.4 Filtru generat de o mulţime

Lema 4.5.20 *Orice intersecţie de filtre este un filtru.*

Dacă X este o submulţime a lui B, atunci *filtrul generat de* X este intersecţia filtrelor ce includ pe X. Cu alte cuvinte, filtrul generat de X este cel mai mic filtru (în sensul incluziunii) ce include pe X. Vom nota cu $[X)$ filtrul generat de X.

Observaţie 4.5.21 Un filtru F este filtrul generat de X dacă el verifică :
(a) $X \subseteq F$,
(b) G filtru, $X \subseteq G \Longrightarrow F \subseteq G$.
Este evident că filtrul generat de mulţimea vidă este $\{1\}$.

Propoziţia 4.5.22 *Dacă* $X \neq \emptyset$, *atunci*

$$[X) = \{a \in B \mid ex.\ n \in \mathbf{N}^* \text{ şi } x_1, \ldots, x_n \in X,\ x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a\}.$$

Dem. Fie F mulţimea din dreapta. Arătăm că F este filtru. Dacă $a, b \in F$, atunci există $x_1, \ldots, x_n$, $y_1, \ldots, y_m \in X$ astfel încât $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a$, $y_1 \wedge \ldots \wedge y_m \leq b$. Rezultă $x_1 \wedge \ldots x_n \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_m \leq a \wedge b$, deci $a \wedge b \in F$. Axioma (F2) este evident verificată. Se observă că $X \subseteq F$. Presupunem că G este un filtru ce include pe X. Dacă $a \in F$, atunci există $x_1, \ldots, x_n \in X$ astfel încât $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \leq a$. Atunci $x_1, \ldots, x_n \in G$, deci $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \in G$, de unde $a \in G$. A rezultat $F \subseteq G$. Deci, $[X) = F$. □

Vom nota cu $[x)$ filtrul generat de $\{x\}$; $[x)$ se va numi *filtrul principal* generat de x.

Corolar 4.5.23 $[x) = \{a \mid x \leq a\}$.

Corolar 4.5.24 $[\{x_1, \ldots, x_n\}) = [x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)$.

Corolar 4.5.25 *Dacă* F *este un filtru şi* $x \in B$, *atunci*

$$[F \cup \{x\}) = \{a \mid ex.\ e \in F,\ e \wedge x \leq a\}.$$

Lema 4.5.26 *Intr-o algebră Boole finită orice filtru este principal.*

Observaţie 4.5.27 Să determinăm congruenţa asociată unui filtru principal $[x)$:
$a \sim_{[x)} b \Longleftrightarrow a \to b \in [x),\ b \to a \in [x)$
$\Longleftrightarrow x \leq a \to b,\ x \leq b \to a$
$\Longleftrightarrow x \wedge a \leq b,\ x \wedge b \leq a$
$\Longleftrightarrow a \wedge x = b \wedge x.$

Exerciţiu 4.5.28 Să se determine toate filtrele cubului, congruenţele şi algebrele Boole cât corespunzătoare.

Observaţie 4.5.29 Intr-o algebră Boole definită echivalent ca o structură

$$\mathcal{B} = (B, \to, ^-, 1),$$

noţiunea naturală este de sistem deductiv, nu de filtru. Dacă S este un sistem deductiv al lui $\mathcal{B}$, atunci algebra Boole cât este definită echivalent astfel:

$$(B/_F, \to, ^-, 1/_F = F),$$

unde

$$x/_f \to y/_f \stackrel{def.}{=} (x \to y)/_F, \quad (x/_F)^- \stackrel{def.}{=} (x^-)/_F,$$
$$1/_F = \{x \in B \mid x \sim_F 1\} = 1/_F = F.$$

4.6 Teorema de reprezentare a lui Stone

Scopul acestei secţiuni este de a demonstra că orice algebră Boole este izomorfă cu o algebră Boole ale cărei elemente sunt părţi ale unei mulţimi. Acest rezultat ocupă un loc central în teoria algebrelor Boole şi are numeroase aplicaţii în logică, topologie, calculul probabilităţilor, etc. Instrumentul principal folosit în demonstraţie va fi conceptul de ultrafiltru.

Fie $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole.

Definiţie 4.6.1 Un filtru F al lui $\mathcal{B}$ este *propriu* dacă $F \neq B$.

Observaţie 4.6.2 F este propriu dacă şi numai dacă $0 \notin F$. Intr-adevăr, dacă prin absurd $0 \in F$, atunci deoarece orice element $x \in B$ verifică $0 \leq x$, ar rezulta că $x \in F$, deci $B \subseteq F$; cum avem şi $F \subseteq B$, am avea $F = B$: contradicţie.

Mulţimea filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$ este ordonată în raport cu incluziunea.

Definiţie 4.6.3 Un *ultrafiltru* sau *filtru maximal* este un element maximal al mulţimii filtrelor proprii, adică este un filtru propriu U al lui $\mathcal{B}$ cu proprietatea că pentru orice filtru propriu F, dacă $U \subseteq F$, atunci $U = F$.

Exemple 4.6.4
(1) Dacă X este o mulţime nevidă şi $x \in X$, atunci $U_x = \{A \subseteq X \mid x \in A\}$ este un ultrafiltru în $\mathcal{P}(X)$.
(2) Dacă $B = L_2^n$ şi $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, ..., $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$, atunci filtrele principale $[e_1)$, $[e_2)$, ..., $[e_n)$ sunt ultrafiltrele lui $\mathcal{B}$.

In cazul algebrelor Boole infinite, demonstrarea existenţei ultrafiltrelor (altele decât cele din exemplul (1)) impune invocarea axiomei lui Zorn. Următorul rezultat poartă numele de *Teorema de existenţă a ultrafiltrului.*

Teorema 4.6.5 *(Teorema de existenţă a ultrafiltrului)*
Pentru orice filtru propriu F, există un ultrafiltru U astfel încât $F \subseteq U$.

Dem. Fie $\sum$ mulţimea filtrelor proprii ale lui $\mathcal{B}$ ce includ pe F. Evident, $F \in \sum$. Vom arăta că $(\sum, \subseteq)$ este inductiv ordonată. Fie $(F_i)_{i \in I}$ o familie total ordonată de filtre din $\sum$: pentru orice $i, j \in I$, $F_i \subseteq F_j$ sau $F_j \subseteq F_i$. Notăm $G = \bigcup_{i \in I} F_i$. Vom demonstra că G este un filtru propriu. Dacă $x, y \in G$, atunci există $i, j \in I$, astfel încât $x \in F_i$ şi $y \in F_j$. Putem presupune, de exemplu, că $F_i \subseteq F_j$. Atunci $x, y \in F_j$, deci $x \wedge y \in F_j \subseteq G$. A doua proprietate din definiţia filtrului se verifică imediat. Atunci G este un majorant al familiei $(F_i)_{i \in I}$ şi $(\sum, \subseteq)$ este inductivă. Aplicând axioma lui Zorn, rezultă existenţa unui ultrafiltru U ce include pe F. $\Box$

Corolar 4.6.6 *Dacă $x \neq 0$, atunci există un ultrafiltru U astfel încât $x \in U$.*

Dem. Se aplică Propoziţia 4.6.5 filtrului $F = [x)$. $\Box$

Definiţie 4.6.7 Un filtru propriu F al lui $\mathcal{B}$ se numeşte *filtru prim* dacă pentru orice $x, y \in B$,

$$x \vee y \in F \text{ implică } x \in F \text{ sau } y \in F.$$

Propoziţia 4.6.8 *Fie F un filtru propriu al lui $\mathcal{B}$. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) F este ultrafiltru,
(ii) F este filtru prim,
(iii) Pentru orice $x \in B$, avem $x \in F$ sau $x^- \in F$,
(iv) Algebra Boole cât $B/_F$ este izomorfă cu algebra Boole canonică, $L_2 = \{0, 1\}$.

Dem.
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Presupunem prin absurd că F nu este prim, deci există $x, y \in B$ astfel încât $x \vee y \in F$, dar $x, y \notin F$. Atunci incluziunile stricte:

$$F \subset [F \cup \{x\}) \text{ şi } F \subset [F \cup \{y\})$$

arată că filtrele $[F \cup \{x\})$, $[F \cup \{y\})$ nu sunt proprii, deci conţin pe 0. Folosind Corolarul 4.5.25, din $0 \in [F \cup \{x\})$ rezultă existenţa unui element $a \in F$ astfel încât $a \wedge x = 0$. Analog, există $b \in F$ cu $b \wedge y = 0$. Atunci

$$0 = (a \wedge x) \vee (b \wedge y) = (a \vee b) \wedge (a \vee y) \wedge (x \vee b) \wedge (x \vee y).$$

Cum $a \vee b$, $a \vee y$, $x \vee b \in F$ (din $a, b \in F$) şi $x \vee y \in F$ (prin ipoteză), rezultă că $0 \in F$: contradicţie. Deci, F este prim.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii): Din $x \vee x^- = 1 \in F$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i): Presupunem prin absurd că există un filtru propriu G astfel încât $F \subset G$. Atunci există $x \in G$ şi $x \notin F$. Folosind ipoteza (iii), $x^- \in F \subseteq G$, deci $0 = x \wedge x^- \in G$: contradicţie. Deci, F este ultrafiltru.

Echivalenţa (i) $\Longleftrightarrow$ (iv) este lăsată ca exerciţiu. □

Exerciţiu 4.6.9 Un filtru propriu F este ultrafiltru dacă şi numai dacă pentru orice $x, y \in B$, avem $x \to y \in F$ sau $y \to x \in F$.

Suntem acum în măsură să demonstrăm *Teorema de reprezentare a lui Stone.*

Teorema 4.6.10 *(Teorema de reprezentare a lui Stone)*

Pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, există o mulţime nevidă X şi un homomorfism de algebre Boole injectiv, $d : B \longrightarrow \mathcal{P}(X)$.

Dem. Vom nota cu X mulţimea tuturor ultrafiltrelor lui $\mathcal{B}$, iar $d : B \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ este funcţia definită astfel: pentru orice $x \in B$,

$$d(x) = \{U \in X \mid x \in U\}.$$

Pentru orice $x, y \in B$ şi pentru orice ultrafiltru U, avem echivalenţele:

$$\begin{aligned} U \in d(x \vee y) &\Longleftrightarrow x \vee y \in U \\ &\Longleftrightarrow x \in U \text{ sau } y \in U \qquad (U \text{ este prim}) \\ &\Longleftrightarrow U \in d(x) \text{ sau } U \in d(y) \\ &\Longleftrightarrow U \in d(x) \cup d(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \in d(x \wedge y) &\Longleftrightarrow x \wedge y \in U \\ &\Longleftrightarrow x \in U \text{ şi } y \in U \qquad (U \text{ este filtru}) \\ &\Longleftrightarrow U \in d(x) \text{ şi } U \in d(y) \\ &\Longleftrightarrow U \in d(x) \cap d(y). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} U \in d(x^-) &\Longleftrightarrow x^- \in U \\ &\Longleftrightarrow x \notin U \qquad (\text{Propoziţia 4.6.8 (iii)}) \\ &\Longleftrightarrow U \notin d(x) \\ &\Longleftrightarrow U \in C_{d(x)}. \end{aligned}$$

Am demonstrat că:
$d(x \vee y) = d(x) \cup d(y)$; $d(x \wedge y) = d(x) \cap d(y)$; $d(x^-) = C_{d(x)}$,
ceea ce arată că d este un morfism boolean. Dacă $x \neq 0$, atunci există un ultrafiltru U astfel încât $x \in U$ (Corolarul 4.6.6), deci $U \in d(x)$ şi $d(x) \neq \emptyset$. Am arătat că $d(x) = \emptyset$ implică $x = 0$, deci $d^{-1}(\emptyset) = \{0\}$. Aplicând Lema 4.4.12, d este injectiv. □

Cum $\mathcal{P}(X)$ şi L_2^X sunt algebre Boole izomorfe, teorema de reprezentare a lui Stone capătă şi următoarea formă:

Teorema 4.6.11 *Pentru orice algebră Boole, există o mulţime nevidă şi un morfism boolean injectiv* $d : B \longrightarrow L_2^X$.

Observaţie 4.6.12 Deoarece $d : B \longrightarrow d(B) \subseteq \mathcal{P}(X)$ este o bijecţie (era injecţie şi acum este şi surjecţie), rezultă că Teorema lui Stone se poate enunţa şi astfel: "Orice algebră Boole este isomorfă cu o subalgebră a unei algebre Boole de mulţimi".

Observaţii 4.6.13

(1) Teorema 4.6.10 reduce calculul boolean într-o algebră Boole oarecare la calculul cu mulţimi.

(2) Teorema 4.6.11 reduce calculul boolean într-o algebră Boole oarecare la:
(a) întâi, la calculul în L_2^X,
(b) apoi, calculul în L_2^X se reduce la calculul în L_2 (operaţiile se fac pe componente).

4.7 Algebre Boole atomice

Fie $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole. Un element nenul a al lui B se numeşte *atom* dacă $0 \leq y \leq a$ implică $y = 0$ sau $y = a$.

Algebra Boole $\mathcal{B}$ se numeşte *atomică* dacă pentru orice element $x \neq 0$, există un atom a, astfel încât $a \leq x$.

Exemple 4.7.1

(1) In algebra Boole $\mathcal{P}(X)$, atomii sunt $\{x\}$, $x \in X$. Evident, $\mathcal{P}(X)$ este atomică.

(2) In L_2^n, atomii sunt $e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$.

Lema 4.7.2 *Orice algebră Boole finită este atomică.*

Dem. Orice şir strict descrescător $a_0 > a_1 > \ldots > a_n > \ldots > 0$ este finit. □

Propoziţia 4.7.3 *Dacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole atomică şi $(a_i)_{i\in I}$ este mulţimea atomilor săi, atunci $\vee_{i\in I} a_i = 1$.*

Dem. Presupunem prin absurd că există un majorant b al familiei $(a_i)_{i\in I}$ diferit de 1: $a_i \leq b < 1$ pentru orice $i \in I$. Atunci $b^- \neq 0$ şi cum $\mathcal{B}$ este atomică, există un atom a_j ($j \in I$) astfel încât $a_j \leq b^-$. Cum $a_j \leq b$, rezultă $a_j \leq b \wedge b^- = 0$: contradicţie. □

O familie $(e_i)_{i\in I}$ de elemente din B se numeşte *partiţie* dacă:
(1) $e_i \wedge e_j = 0$, pentru orice $i \neq j$,
(2) $\vee_{i\in I} e_i = 1$.

Exemplu 4.7.4 Dacă $\mathcal{B}$ este atomică, atunci mulţimea $\{a_i\}_{i\in I}$ a atomilor lui B formează o partiţie. Condiţia (2) este dată de Propoziţia 4.7.3, iar (1) rezultă direct din definiţia atomului.

Fie $a \neq 0$ în B. Notăm

$$B(a) = \{x \in B \mid x \leq a\}.$$

Observăm că $B(a)$ este închisă la $\vee$ şi $\wedge$. Pentru orice $x \in B(a)$, notăm $x^{\sim_a} = x^- \wedge a$, introducând astfel o operaţie unară $^\sim = {}^{\sim_a}$ pe $B(a)$.

Lema 4.7.5 *$(B(a), \wedge, \vee, ^\sim, 0, a)$ este o algebră Boole.*

Dem. Dacă $x \in B(a)$, atunci $x \wedge x^\sim = 0$ şi $x \vee x^\sim = a$. □

Propoziţia 4.7.6 *Fie $a_1, \ldots, a_n \in B$ şi $f : B \longrightarrow B(a_1) \times \ldots \times B(a_n)$ funcţia definită, pentru orice $x \in B$, de:*

$$f(x) = (x \wedge a_1, \ldots, x \wedge a_n).$$

Atunci
(a) f este injectivă $\Longleftrightarrow \vee_{i=1}^n a_i = 1$,
(b) f este surjectivă $\Longleftrightarrow a_i \wedge a_j = 0$, pentru orice $i \neq j$,
(c) f este bijectivă $\Longleftrightarrow \{a_1, \ldots, a_n\}$ este o partiţie,
(d) f este morfism boolean.

Dem.
(a) $\Longrightarrow$: Din $f(\vee_{i=1}^n a_i) = (a_1, \ldots, a_n) = f(1)$ rezultă $\vee_{i=1}^n a_i = 1$.
$\Longleftarrow$: Presupunem $\vee_{i=1}^n a_i = 1$. Atunci
$f(x) = f(y)$ implică $x \wedge a_i = y \wedge a_i$, $i = 1, \ldots, n$, implică
$x = x \wedge (\vee_{i=1}^n a_i) = \vee_{i=1}^n (x \wedge a_i) = \vee_{i=1}^n (y \wedge a_i) = y \wedge (\vee_{i=1}^n a_i) = y$,
deci f este injectivă.
(b) $\Longrightarrow$: Fie $i, j \in I$ distincţi; notăm $c = a_i \wedge a_j$ şi definim

$$x_k = \begin{cases} c, & \text{dacă} \quad k = i \\ c^- \wedge a_j, & \text{dacă} \quad k = j \\ 0, & \text{dacă} \quad k \neq i, j. \end{cases}$$

Atunci $(x_1, \ldots, x_n) \in B(a_1) \times \ldots \times B(a_n)$, deci există $x \in B$ astfel încât $f(x) = (x_1, \ldots, x_n)$. Pe componentele i şi j vom avea $a_i \wedge x = c$ şi $a_j \wedge x = c^- \wedge a_j$. Atunci $c \leq x$ şi $c \leq a_j$, de unde $c \leq x \wedge a_j = c^- \wedge a_j \leq c^-$. Rezultă $c = 0$, deci $a_i \wedge a_j = 0$ pentru orice $i \neq j$.
$\Longleftarrow$: Presupunem $a_i \wedge a_j = 0$, pentru $i \neq j$. Fie $(x_1, \ldots, x_n) \in B(a_1) \times \ldots \times B(a_n)$, deci $x_i \leq a_i$, $i = 1, \ldots, n$.
Notăm $x = x_1 \vee \ldots \vee x_n$. Pentru orice $i = 1, \ldots, n$, avem:

$$x \wedge a_i = (\vee_{j=1}^n x_j) \wedge a_i = \vee_{j=1}^n (x_j \wedge a_i) = x_i,$$

pentru că $x_j \wedge a_i = 0$ pentru $j \neq i$ (pentru că $x_j \wedge a_i \leq a_j \wedge a_i = 0$) şi $x_i \wedge a_i = x_i$.
Se deduce că $f(x) = (x \wedge a_1, \ldots, x \wedge a_n) = (x_1, \ldots, x_n)$, deci f este surjectivă.
(c): Din (a) şi (b).
(d): Exerciţiu. □

Corolar 4.7.7 *Dacă* $\{a_1, \ldots, a_n\}$ *este o partiţie, atunci morfismul* f *din Propoziţia 4.7.6 este un izomorfism boolean.*

Propoziţia 4.7.8 *Dacă* $\mathcal{B}$ *este o algebră Boole finită, atunci există un număr natural* n *astfel încât* $\mathcal{B}$ *şi* $\mathcal{L}_2^n$ *sunt izomorfe.*

Dem. Dacă B este finită, atunci B este atomică. Fie $a_1, \ldots, a_n$ atomii lui B. Cum $\{a_1, \ldots, a_n\}$ este o partiţie, avem $B \cong \prod_{i=1}^n B(a_i)$. Dacă a este un atom, atunci $B(a_i) = \{0, a\}$, deci $B(a_i) \cong L_2$, pentru orice $i = 1, \ldots, n$. Am obţinut $B \cong L_2^n$. $\square$

Corolar 4.7.9 *Două algebre Boole finite, de acelaşi ordinal, sunt izomorfe.*

Dem. Dacă $B_1 \cong B_2$ şi $B_1 \cong L_2^n$, $B_2 \cong L_2^m$, atunci $n = m$ şi $B_1 \cong B_2$. $\square$

Propoziţia 4.7.10 *Fie* $\mathcal{B}$ *o algebră Boole completă şi* $(a_i)_{i \in I}$ *o partiţie în* B. *Atunci funcţia* $f : B \longrightarrow \prod_{i \in I} B(a_i)$, *definită de* $f(x) = (x \wedge a_i)_{i \in I}$, *este un izomorfism boolean.*

Dem. Analog cu demonstraţia Propoziţiei 4.7.6 şi a Corolarului 4.7.7. $\square$

Propoziţia 4.7.11 *Afirmaţiile următoare sunt echivalente:*
(1) $\mathcal{B}$ *este o algebră Boole completă şi atomică,*
(2) $\mathcal{B}$ *este izomorfă cu o algebră Boole de forma* $\mathcal{P}(X)$.

Dem.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Analog cu demonstraţia Propoziţiei 4.7.8, aplicându-se Propoziţia 4.7.10.
(2) $\Longrightarrow$ (1): $\mathcal{P}(X)$ este completă şi atomică. $\square$

4.8 Dualitatea algebrelor Boole

Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole, $Spec(B)$ mulţimea ultrafiltrelor sale şi $d : B \longrightarrow \mathcal{P}(Spec(B))$ morfismul lui Stone: $d(x) = \{P \in Spec(B) \mid x \in P\}$.

Lema 4.8.1 *Pentru orice* $x, y \in B$, *avem:*
(i) $d(x \vee y) = d(x) \cup d(y)$,
(ii) $d(x \wedge y) = d(x) \cap d(y)$,
(iii) $d(x^-) = C_{d(x)}$,
(iv) $d(0) = \emptyset$, $d(1) = Spec(B)$.

Dem. Vezi demonstraţia Teoremei de reprezentare a lui Stone. $\square$

Fie $\mathcal{F}(B)$ mulţimea filtrelor lui $\mathcal{B}$. Pentru orice $F \in \mathcal{F}(B)$, notăm

$$d(F) = \{P \in Spec(B) \mid F \subseteq P\}.$$

Este evident că $d(x) = d([x))$, pentru orice $x \in B$.

Propoziţia 4.8.2 *$\{d(F) \mid F \in \mathcal{F}(B)\}$ este familia mulţimilor închise ale unei topologii pe $\mathcal{B}$.*

Dem. Fie $(F_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{F}(B)$ şi $F_1, F_2 \in \mathcal{F}(B)$. Atunci
(1) $\cap_{i\in I} d(F_i) = d(\bigvee_{i\in I} F_i)$, unde $\bigvee_{i\in I} F_i$ este filtrul lui $\mathcal{B}$ generat de $\cup_{i\in I} F_i$;
(2) $d(F_1) \cup d(F_2) = d(F_1 \cap F_2)$;
(3) $d(0) = \emptyset$, $d(1) = Spec(B)$.
Fie $P \in Spec(B)$. (1) rezultă din echivalenţa

$$(1') \quad F_i \subseteq P,\ i \in I \iff \bigvee_{i\in I} F_i \subseteq P,$$

iar (2) rezultă din echivalenţa

$$(2') \quad F_1 \cap F_2 \subseteq P \iff (F_1 \subseteq P \text{ sau } F_2 \subseteq P).$$

Vom demonstra (2'). Dacă $F_1, F_2 \not\subseteq P$, atunci există $x \in F_1 \setminus P$ şi $y \in F_2 \setminus P$, deci $x \vee y \notin P$ (P fiind filtru prim). Dar $x \vee y \in F_1 \cap F_2$, deci $F_1 \cap F_2 \not\subseteq P$.
Implicaţia cealaltă este evidentă.
Egalităţile (3) sunt evidente. Proprietăţile (1) - (3) nu exprimă altceva decât că $\{d(F) \mid F \in \mathcal{F}(B)\}$ sunt închise la topologia pe $Spec(B)$. □

Observaţie 4.8.3 Topologia definită de Propoziţia 4.8.2 poartă numele de *topologia lui Stone*.

Propoziţia 4.8.4
(1) Pentru orice $x \in B$, $d(x)$ este o mulţime închisă şi deschisă a lui $Spec(B)$.
(2) $\{d(x) \mid x \in B\}$ este baza de deschişi (sau de închişi).

Dem.
(1): Din $C_{d(x)} = d(x^-)$.
(2): Pentru orice filtru F, avem $F = \bigvee\{[x) \mid x \in F\}$, de unde

$$d(F) = d(\bigvee\{[x) \mid x \in F\}) = \cap_{x\in F} d(x).$$

□

Propoziţia 4.8.5 *Pentru orice $x \in B$, $d(x)$ este o mulţime compactă.*

Dem. Considerăm o acoperire deschisă a lui $d(x)$: $d(x) \subseteq \cup_{i\in I} d(x_i)$. Aşadar, pentru orice $P \in Spec(B)$, $x \in P$ implică existenţa unui $i \in I$ astfel încât $x_i \in P$. Fie $X = \{x\} \cup \{x_i^- \mid i \in I\}$ şi $F = [X)$, filtrul generat de X. Presupunem, prin absurd, că F este propriu, deci există $U \in Spec(B)$, $F \subseteq U$ (Propoziţia 4.6.5). Atunci $x_i^- \in U$ pentru orice $i \in I$ şi $x \in U$ implică existenţa unui $j \in I$ astfel încât $x_j \in U$: contradicţie, deci $0 \in F$. Tinând seama de Propoziţia 4.5.22, există $J \subseteq I$ finită, astfel încât

$$0 = x \wedge \bigwedge\{x_j^- \mid j \in J\}.$$

De aici se deduce că $x \leq \bigvee_{j \in J} x_j$, de unde

$$d(x) \subseteq d(\bigvee_{j \in J} x_j) = \bigcup_{j \in J} d(x_j).$$

Rezultă că $d(x)$ este compactă. $\square$

Propoziţia 4.8.6 *Spec*(B) *este spaţiu compact şi separat.*

Dem. Fie $P_1, P_2 \in Spec(B)$, $P_1 \neq P_2$, deci există $x \in P_1$ şi $x \notin P_2$. Conform Propoziţiei 4.6.8, $x^- \in P$, de unde $P_1 \in d(x)$, $P_2 \in d(x^-)$ şi $d(x) \cap d(x^-) = \emptyset$. Am demonstrat că $Spec(B)$ este separat.
Compacitatea rezultă din Propoziţia 4.8.5 ($Spec(B) = d(1)$). $\square$

Un spaţiu topologic este *zero-dimensional* dacă părţile sale închise şi deschise formează o bază.

Un spaţiu compact, separat şi zero-dimensional se numeşte *spaţiu boolean.*

Propoziţia 4.8.7 *Pentru orice algebră Boole* $\mathcal{B}$, *Spec*(B) *este un spaţiu boolean.*

Fie $f : A \longrightarrow B$ un morfism boolean şi $Spec(f) : Spec(B) \longrightarrow Spec(A)$ definită astfel: pentru orice $P \in Spec(B)$,

$$Spec(f)(P) = f^{-1}(P).$$

Propoziţia 4.8.8 *Spec*(f) *este o funcţie continuă.*

Dem. Pentru orice $y \in A$, avem:

$$\begin{aligned}(Spec(f))^{-1}(d_A(y)) &= \{P \in Spec(B) \mid f^{-1}(P) \in d_A(y)\} \\ &= \{P \in Spec(B) \mid y \in f^{-1}(P)\} \\ &= \{P \in Spec(B) \mid f(y) \in P\} \\ &= d_B(f(y)).\end{aligned}$$

Dacă **Boole** este categoria algebrelor Boole şi **SBoole** este categoria spaţiilor booleene şi a funcţiilor continue, atunci asocierea $\mathcal{B} \mapsto Spec(B)$, $f \mapsto Spec(f)$ defineşte un functor contravariant $Spec$: **Boole** $\longrightarrow$ **SBoole**.

Fie acum $\mathcal{X}$ un spaţiu boolean şi $\mathcal{T}(\mathcal{X})$ algebra Boole a părţilor închise şi deschise ale lui $\mathcal{X}$. Dacă $g : X \longrightarrow Y$ este un morfism din **SBoole** (= aplicaţie continuă), atunci considerăm funcţia $T(g) : T(Y) \longrightarrow T(X)$, definită de $T(g)(D) = g^{-1}(D)$, pentru orice $D \in T(Y)$. Asocierea $\mathcal{X} \mapsto \mathcal{T}(\mathcal{X})$, $g \mapsto T(g)$ defineşte un functor contravariant T : **SBoole** $\longrightarrow$ **Boole**. $\square$

Propoziţia 4.8.9 *Pentru orice* $\mathcal{B} \in$ **Boole**, *algebrele Boole* $\mathcal{B}$ *şi* $\mathcal{T}(Spec(B))$ *sunt izomorfe.*

Dem. Considerăm morfismul lui Stone $d_B : B \longrightarrow T(Spec(B))$ $(x \mapsto d_B(x))$. d_B este un morfism boolean injectiv. A rămas de arătat surjectivitatea lui d_B.

Fie $D \in T(Spec(B))$, deci D este o parte a lui $Spec(B)$ închisă şi deschisă. Cum D este închisă în spaţiul $Spec(B)$ compact şi separat, rezultă că D este compactă. D fiind deschisă şi $\{d_B(x) \mid x \in B\}$ fiind baza a lui $Spec(B)$, există o familie $(x_i)_{i\in I}$ în B astfel încât $D = \bigcup_{i\in I} d_A(x_i)$. Atunci există $J \subseteq I$ finită, astfel încât

$$D = \bigcup_{i\in J} d_A(x_i) = d_B(\bigvee_{i\in J} x_i)$$

şi d_B este surjectiv. □

Propoziţia 4.8.10 *Pentru orice $\mathcal{X} \in$ **SBoole**, spaţiile booleene $\mathcal{X}$ şi $Spec(T(X))$ sunt homeomorfe.*

Dem. Pentru orice $x \in X$, $U_x = \{D \in T(X) \mid x \in D\}$ este un ultrafiltru al lui $\mathcal{T}(\mathcal{X})$. Considerăm funcţia $\varphi_X : X \longrightarrow Spec(T(X))$ definită de $\varphi_X(x) = U_x$, pentru orice $x \in X$. Pentru a arăta că φ_X este homeomorphism, parcurgem următorii paşi:
a) φ_X este injectivă.
Dacă $x, y \in X$, $x \neq y$, atunci există $D_1, D_2 \in T(X)$, $x \in D_1$, $y \in D_2$ şi $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Atunci $D_1 \in U_x$, $D_2 \in U_y$ şi $D_2 \notin U_x$, deci $\varphi_X(x) = U_x \neq U_y = \varphi_X(y)$.
b) φ_X este surjectivă.
Fie $\mathcal{U} \in Spec(T(X))$. Dacă $\{D_1, \ldots, D_n\} \in \mathcal{U}$, atunci $\bigcap_{i=1}^n D_i \in \mathcal{U}$, deci $\bigcap_{i=1}^n D_i \neq \emptyset$ (pentru că $\mathcal{U}$ este filtru propriu în $\mathcal{T}(\mathcal{X})$). Atunci $\mathcal{U}$ are proprietatea intersecţiei finite, deci $\bigcap\{D \mid D \in \mathcal{U}\} \neq \emptyset$, deoarece $\mathcal{X}$ este compact.

Fie $x, y \in \bigcap\{D \mid D \in \mathcal{U}\}$, $x \neq y$, deci există $D_1, D_2 \in T(X)$, $x \in D_1$, $y \in D_2$, $D_1 \cap D_2 = \emptyset$. Dar $C_{D_1} \cup C_{D_2} = X \in \mathcal{U}$, deci $C_{D_1} \in \mathcal{U}$ sau $C_{D_2} \in \mathcal{U}$, pentru că $\mathcal{U}$ este un filtru prim in $\mathcal{T}(\mathcal{X})$. S-a obtinut $x \notin D_1$ sau $y \notin D_2$: contradicţie, deci mulţimea $\bigcap\{D \mid D \in \mathcal{U}\}$ are un singur element x. Atunci avem $x \in D$ dacă şi numai dacă $D \in \mathcal{U}$, de unde $U_x = \mathcal{U}$. Am demonstrat că $\varphi_X(x) = \mathcal{U}$, deci φ_X este injectivă.
c) φ_X este continuă.
Pentru orice $D \in T(X)$ avem:

$$\varphi_X^{-1}(d(D)) = \{x \mid U_x \in d(D)\} = \{x \mid D \in U_x\} = \{x \mid x \in D\} = D.$$

d) φ_X este aplicaţie deschisă.
Pentru orice $D \in T(X)$, vom demonstra că

$$\{U_x \mid x \in D\} = \{\mathcal{U} \in Spec(T(X)) \mid D \in \mathcal{U}\}.$$

Dacă $D \in \mathcal{U} \in Spec(T(X))$, atunci $\mathcal{U} = U_x$, cu $\bigcap\{D' \mid D' \in \mathcal{U}\} = \{x\}$. Rezultă $D \in U_x$ şi deci $x \in D$. Implicaţia cealaltă este evidentă. Am demonstrat că

$$\varphi_X(D) = \{U_x \mid x \in D\} = d(D),$$

deci φ_X este aplicaţie deschisă. □

Propoziţia 4.8.11 *Dacă $f : A \longrightarrow B$ este un morfism boolean, atunci următoarea diagramă este comutativă:*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\cong d_A"] \arrow[d, "f"'] & T(Spec(A)) \arrow[d, "T(Spec(f))"] \\ B \arrow[r, "\cong d_B"'] & T(Spec(B)) \end{tikzcd}$$

Dem. Pentru orice $x \in A$, au loc următoarele egalităţi:

$$\begin{aligned} T(Spec(f))(d_A(x)) &= \{P \in Spec(B) \mid Spec(f)(P) \in d_A(x)\} \\ &= \{P \in Spec(B) \mid f^{-1}(P) \in d_A(x)\} \\ &= \{P \in Spec(B) \mid x \in f^{-1}(P)\} \\ &= d_B(f(x)). \end{aligned}$$

□

Propoziţia 4.8.11 spune că $D : id_{\mathbf{Boole}} \longrightarrow T \circ Spec$ este izomorfism functorial.

Propoziţia 4.8.12 *Dacă $g : X \longrightarrow Y$ este un morfism din* **SBoole**, *atunci următoarea diagramă este comutativă:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "\cong \varphi_X"] \arrow[d, "g"'] & Spec(T(X)) \arrow[d, "Spec(T(g))"] \\ Y \arrow[r, "\cong \varphi_Y"'] & Spec(T(Y)) \end{tikzcd}$$

Dem. Pentru orice $x \in X$, următoarele egalităţi sunt adevărate:

$$\begin{aligned} Spec(T(g))(\varphi_X(x)) &= (T(g))^{-1}(\varphi_X(x)) \\ &= \{D \in T(Y) \mid T(g)(D) \in \varphi_X(x)\} \\ &= \{D \in T(Y) \mid g^{-1}(D) \in U_x\} \\ &= \{D \in T(Y) \mid x \in g^{-1}(D)\} \\ &= \varphi_Y(g(x)). \end{aligned}$$

□

Propoziţia 4.8.12 spune că $\varphi : id_{\mathbf{SBoole}} \longrightarrow Spec \circ T$ este izomorfism functorial.

Insumând toate rezultatele din acest paragraf, putem formula următoarea teoremă:

Teorema 4.8.13 *(Dualitatea Stone)*

Categoriile **Boole** *şi* **SBoole** *sunt duale.*

4.9 Algebre Boole injective

Fie $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole oarecare.

Lema 4.9.1 *Intersecţia unei familii de subalgebre ale lui $\mathcal{B}$ este o subalgebră a lui $\mathcal{B}$.*

Dem. Direct din definiţia subalgebrei. □

Dacă $X \subseteq B$, atunci *subalgebra generată de* X este intersecţia tuturor subalgebrelor lui $\mathcal{B}$ ce include pe X.

Lema 4.9.2 *Fie $\mathcal{A}$ o subalgebră a lui $\mathcal{B}$ şi $b \notin A$. Atunci*

$$A(b) = \{(a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge b^-) \mid a_1, a_2 \in A\}$$

este subalgebra lui $\mathcal{B}$ generată de $A \cup \{b\}$.

Dem. Fie $x = (a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge b^-)$ şi $y = (a_1' \wedge b) \vee (a_2' \wedge b^-)$. Atunci

$$x \vee y = [(a_1 \vee a_1') \wedge b] \vee [(a_2 \vee a_2') \wedge b^-] \in A(b).$$

Dacă $a \in A$, atunci

$$a \vee x = [a \wedge (b \wedge b^-)] \vee x = (a \wedge b) \vee (a \wedge b^-) \vee (a_1 \vee b) \vee (a_2 \vee b^-) =$$

$$[(a_1 \vee a_2) \wedge b] \vee [(a_2 \vee a) \wedge b^-] \in A(b).$$

Conform acestei observaţii,

$$x^- = (a_1^- \vee b^-) \wedge (a_2^- \vee b) = (a_1^- \wedge a_2^-) \vee [(a_1^- \wedge b) \vee (a_2^- \wedge b^-)] \in A(b),$$

deoarece $a_1^- \wedge a_2^- \in A$ şi $(a_1^- \wedge b) \vee (a_2^- \wedge b^-) \in A(b)$. Rezultă că $A(b)$ este subalgebră şi restul demonstraţiei este evident. □

Propoziţia 4.9.3 *(Sikorski)*

Fie $\mathcal{A}$ o subalgebră a lui $\mathcal{B}$, $b \notin A$, $\mathcal{C}$ o algebră Boole completă şi $h : A \longrightarrow C$ un morfism boolean. Atunci există un morfism boolean $h^\sim : A(b) \longrightarrow C$ care extinde pe h. $h^\sim(b)$ poate fi orice element $c \in C$ cu proprietatea următoare:

$$\bigvee\{h(a) \mid a \in A, a \leq b\} \leq c \leq \bigwedge\{h(a) \mid a \in A, b \leq a\} \tag{4.10}$$

Dem. Se stabileşte imediat inegalitatea

$$\bigvee\{h(a) \mid a \in A, a \leq b\} \leq \bigwedge\{h(a) \mid a \in A, b \leq a\},$$

deci există un element c cu proprietatea (4.10).

Dacă $x = (a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge b^-)$, atunci vom pune

$$h^\sim(x) = [h(a_1) \wedge c] \vee [h(a_2) \wedge c^-], \tag{4.11}$$

c fiind un element ce verifică (4.10). Arătăm că $h^\sim : A(b) \longrightarrow C$ este bine definită.

Anume, vom arăta că

$$x = (a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge b^-) = (a_1' \wedge b) \vee (a_2' \wedge b^-)$$

implică

$$[h(a_1) \wedge c] \vee [h(a_2) \wedge c^-] = [h(a_1' \wedge c] \vee [h(a_2') \wedge c^-].$$

Inegalitatea:

$$(a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge b^-) \leq (a_1' \wedge b) \vee (a_2' \wedge b^-) = (a_1' \vee a_2') \wedge (a_1' \vee b^-) \wedge (a_2' \vee b) \tag{4.12}$$

implică inegalităţile:

$$\begin{aligned} a_1 \wedge b &\leq a_1' \vee a_2',\ a_1' \vee b^-,\ a_2' \vee b \\ a_2 \wedge b^- &\leq a_1' \vee a_2',\ a_1' \vee b^-,\ a_2' \vee b. \end{aligned} \tag{4.13}$$

De aici rezultă:

$$\begin{aligned} h(a_1) \wedge c &\leq h(a_1') \vee h(a_2'),\ h(a_1') \vee c^-,\ h(a_2') \vee c \\ h(a_2) \wedge c^- &\leq h(a_1') \vee h(a_2'),\ h(a_1') \vee c^-,\ h(a_2') \vee c. \end{aligned} \tag{4.14}$$

De exemplu,

$$\begin{aligned} a_1 \wedge b \leq a_1' \vee b^- &\Longrightarrow (a_1 \wedge b) \wedge (a_1' \vee b^-)^- = 0 \\ &\Longrightarrow a_1 \wedge a_1'^- \wedge b = 0 \\ &\Longrightarrow b \leq (a_1 \wedge a_1'^-)^- \\ &\Longrightarrow c \leq h((a_1 \wedge a_1'^-)^-) = (h(a_1) \wedge h(a_1'^-))^- \\ &\Longrightarrow h(a_1) \wedge h(a_1'^-) \wedge c = 0 \\ &\Longrightarrow h(a_1) \wedge c \wedge (h(a_1') \vee c^-)^- = 0 \\ &\Longrightarrow h(a_1) \wedge c \leq h(a_1') \vee c^-. \end{aligned}$$

Inegalităţile (4.14) implică

$$[h(a_1) \wedge c] \vee [h(a_2) \wedge c^-] \leq [h(a_1') \wedge c] \wedge [h(a_2') \wedge c^-].$$

Inegalitatea inversă rezultă analog.

Arătăm acum că $h^\sim$ este morfism boolean.

Dacă $x = (a_1 \wedge b) \vee (a_2 \wedge b^-)$ şi $y = (a_1' \wedge b) \vee (a_2' \wedge b^-)$, atunci

$$x \vee y = [(a_1 \vee a_1') \wedge b] \vee [(a_2 \vee a_2') \wedge b^-],$$

deci

$h^\sim(x \vee y) = [h(a_1 \vee a_1') \wedge c] \vee [h(a_2 \vee a_2') \wedge c^-]$

$$\begin{aligned}
&= [(h(a_1) \vee h(a_1')) \wedge c] \vee [(h(a_2) \vee h(a_2')) \wedge c^-] \\
&= [(h(a_1) \wedge c) \vee (h(a_2) \wedge c^-)] \vee [(h(a_1') \wedge c) \vee (h(a_2) \wedge c^-)] \\
&= h^\sim(x) \vee h^\sim(y).
\end{aligned}$$

Rezultă că $h^\sim(x_1 \vee \ldots \vee x_n) = h^\sim(x_1) \vee \ldots \vee h^\sim(x_n)$ pentru orice $x_1, \ldots, x_n \in A(b)$. Observând că

$$x^- = (a_1^- \wedge a_2^-) \vee (a_1^- \wedge b) \vee (a_2^- \wedge b^-),$$

vom avea

$$\begin{aligned}
h^\sim(x^-) &= h^\sim(a_1^- \wedge a_2^-) \vee h^\sim(a_1^- \wedge b) \vee h^\sim(a_2^- \wedge b^-) \\
&= ((h(a_1))^- \wedge (h(a_2))^-) \vee (h(a_1^-) \wedge c) \vee (h(a_2^-) \wedge c^-) \\
&= [(h(a_1) \vee h(a_2)) \wedge (h(a_1) \vee c^-) \wedge (h(a_1) \wedge c)]^- \\
&= [(h(a_1) \wedge c) \vee (h(a_2) \wedge c^-)]^- \\
&= (h^\sim(x))^-.
\end{aligned}$$

Am demonstrat că $h^\sim$ este morfism boolean şi restul este evident. □

Definiţie 4.9.4 O algebră Boole $\mathcal{C}$ se numeşte *injectivă* dacă pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, pentru orice subalgebră $\mathcal{A}$ a lui $\mathcal{B}$ şi pentru orice morfism boolean $f : A \longrightarrow C$, există un morfism boolean $g : B \longrightarrow C$ care extinde pe f:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"'] & \subseteq & B \arrow[dl, "g"] \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Propoziţia 4.9.5 *(Sikorski)*
Orice algebră Boole completă $\mathcal{C}$ este injectivă.

Dem. Considerăm diagrama în **Boole**:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[dr, "f"'] & \subseteq & B \\
& C &
\end{tikzcd}$$

Fie $\sum$ mulţimea perechilor (D, h) astfel încât D este subalgebra a lui $\mathcal{B}$ care include pe $\mathcal{A}$ şi $h : D \longrightarrow C$ este un morfism boolean care extinde pe f:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, "f"'] & \subseteq & D \arrow[d, "h"] & \subseteq & B \\
& & C & &
\end{tikzcd}$$

Dacă (D, h), $(E, u) \in \sum$, definim $(D, h) \preceq (E, u)$ dacă următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[drr, "f"'] & \subseteq & D \arrow[d, "h"] & \subseteq & E \arrow[dll, "u"] & \subseteq & B \\
 & & C & & & &
\end{tikzcd}$$

Se demonstrează uşor că $(\sum, \preceq)$ este inductiv ordonată, deci, conform axiomei lui Zorn, admite un element maximal (D, h). Presupunem că $D \neq B$, deci există $a \in B \backslash D$. Considerăm $D(a)$ şi aplicăm Propoziţia 4.9.3: există un morfism boolean $h^{\sim} : D(a) \longrightarrow C$ care extinde pe h. Aceasta contrazice maximalitatea lui (D, h), ceea ce arată că $D = B$. □

Lema 4.9.6 *Fie in* **Boole** *diagrama comutativă:*

$$\begin{tikzcd}
C \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "1_C"'] & & B \arrow[dl, "g"] \\
 & C &
\end{tikzcd}$$

Dacă $\mathcal{B}$ este algebră Boole completă, atunci şi $\mathcal{C}$ este completă.

Dem. Pentru o familie de elemente $(x_i)_{i \in I}$, vom arata că

$$\bigvee_C x_i = g(\bigvee_B f(x_i)).$$

Este evident că $x_i = g(f(x_i)) \leq g(\bigvee_B f(x_i))$ pentru orice $i \in I$. Dacă $y \in C$ şi $x_i \leq y$, pentru orice $i \in I$, atunci $f(x_i) \leq f(y)$, $i \in I$ in B, deci $\bigvee_B f(x_i) \leq f(y)$. Se obtine

$$g(\bigvee_B f(x_i)) \leq g(f(y)) = y.$$

□

Propoziţia 4.9.7 *(Halmos)*
Orice algebră Boole injectivă $\mathcal{C}$ este completă.

Dem. Fie $d : C \longrightarrow L_2^X$ morfismul lui Stone. C se identifică cu o subalgebră a lui L_2^X. Conform injectivităţii, rezultă un morfism boolean $g : L_2^X \longrightarrow C$ astfel încât $g \circ d = 1_C$. L_2^X este completă şi se plică apoi Lema 4.9.6. □

Teorema 4.9.8 *(Sikorski-Halmos)*
O algebră Boole este injectivă dacă şi numai dacă este completă.

Dem. Din Propoziţiile 4.9.5 şi 4.9.7. □

4.10 Filtre fuzzy ale unei algebre Boole

Incepem în această secţiune discuţia asupra unui domeniu extrem de cercetat în ultimii ani: mulţimi fuzzy, structuri fuzzy, logici fuzzy. Totul a pornit de la L. Zadeh prin anii '60 [51]. A se vedea de asemenea [43].

4.10.1 Mulţimi fuzzy

Observaţii 4.10.1 Să amintim că:
(1) Structura $(\{0,1\}, \min, \max, 1-x, 0, 1)$ este o algebră Boole, anume algebra Boole canonică.
(2) Structura $([0,1], \min, \max, 0, 1)$ este o latice completă.
(3) $\{0,1\} \subset [0,1]$.

Fie $E \neq \emptyset$. Stim că $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \mathbf{C}_E, \emptyset, E)$ este o algebră Boole.
• Există o bijecţie între $\mathcal{P}(E)$ şi $\{0,1\}^E = 2^E = \{f \mid f : E \longrightarrow \{0,1\}\}$, care asociază fiecărei submulţimi $A \subseteq E$ ($A \in \mathcal{P}(E)$) *funcţia caracteristică* $\chi_A : E \longrightarrow \{0,1\}$, definită astfel: pentru orice $x \in E$,

$$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & \text{if } x \in A, \\ 0, & \text{if } x \notin A. \end{cases}$$

Vom identifica A cu χ_A, deci $\mathcal{P}(E)$ cu 2^E.

Observaţie 4.10.2 $\emptyset(x) = 0$, $E(x) = 1$ pentru orice $x \in E$.

Definiţie 4.10.3 Se numeşte *submulţime fuzzy* sau *mulţime fuzzy* a lui E orice funcţie $\mu : E \longrightarrow [0,1]$.

Vom nota submulţimile fuzzy ale lui E cu $\widetilde{A}$, $\widetilde{B}$, ... şi vom nota cu $\widetilde{\mathcal{P}}(E)$ mulţimea lor, adică $\widetilde{\mathcal{P}}(E) = [0,1]^E$.

Exemplu 4.10.4 χ_A este o submulţime fuzzy a lui E, deci $\chi_A \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$.

Prin identificarea $A \leftrightarrow \chi_A$, rezultă că

$$\{0,1\}^E = \mathcal{P}(E) \subset \widetilde{\mathcal{P}}(E) = [0,1]^E,$$

deoarece $\{0,1\} \subset [0,1]$.
Să remarcăm că $\emptyset(x) = 0$ şi $X(x) = 1$, pentru orice $x \in X$.

• Să definim o *relaţie de incluziune* $\preceq$ pe $\widetilde{\mathcal{P}}(E)$ prin: pentru orice $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{P}}(E)$,

$$\widetilde{A} \preceq \widetilde{B} \overset{def.}{\Longleftrightarrow} \widetilde{A}(x) \leq \widetilde{B}(x), \text{ pentru orice } x \in E.$$

Este uşor de verificat că această relaţie este o relaţie de ordine pe $\widetilde{\mathcal{P}}\ (E)$ şi că ea generalizează relaţia de incluziune $\subseteq$ pe $\mathcal{P}(E)$, adică:

$$\text{pentru orice } A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \preceq B \iff A \subseteq B.$$

• Să definim operaţiile $\bigcup, \bigcap$ pe $\widetilde{\mathcal{P}}\ (E)$ prin: pentru orice $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{P}}\ (E)$ si orice $x \in E$,

$$(\widetilde{A} \bigcup \widetilde{B})(x) \overset{def.}{=} \max(\widetilde{A}\ (x), \widetilde{B}\ (x)),$$

$$(\widetilde{A} \bigcap \widetilde{B})(x) \overset{def.}{=} \min(\widetilde{A}\ (x), \widetilde{B}\ (x)).$$

Se observă că $\bigcup, \bigcap$ generalizează pe $\cup, \cap$ pe $\mathcal{P}(E)$, adică:

$$\text{pentru } A, B \in \mathcal{P}(E), \quad A \bigcup B = A \cup B,\ A \bigcap B = A \cap B.$$

Observaţii 4.10.5

(i) Structura $(\widetilde{\mathcal{P}}\ (E), \bigcap, \bigcup, \emptyset, E)$ este latice distributivă, mărginită, unde pentru orice $\widetilde{A}, \widetilde{B} \in \widetilde{\mathcal{P}}\ (E)$,

$$\widetilde{A} \bigcap \widetilde{B} = \widetilde{A} \iff \widetilde{A} \preceq \widetilde{B}\ .$$

(ii) Laticea $(\widetilde{\mathcal{P}}\ (E), \bigcap, \bigcup, \emptyset, E)$ are laticea $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \emptyset, E)$ ca sublatice.

Definiţie 4.10.6 *Caracteristica* este o funcţie

$$\chi : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \widetilde{\mathcal{P}}\ (E),$$

definită astfel: pentru orice $A \in \mathcal{P}(E)$,

$$\chi(A) = \chi_A : E \longrightarrow \{0, 1\},$$

care este tocmai *funcţia caracteristică a lui* A.

Invers, avem următoarea definiţie:

Definiţie 4.10.7 Pentru orice $t \in [0, 1]$, *nivelul de fuzificare de grad* t este o funcţie

$$U_t : \widetilde{\mathcal{P}}\ (E) \longrightarrow \mathcal{P}(E),$$

definită astfel: pentru orice $\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{P}}\ (E)$,

$$U_t(\widetilde{A}) = \{x \in E \mid \widetilde{A}\ (x) \geq t\},$$

care se numeşte *submulţimea nivel a lui* $\widetilde{A}$.

4.10.2 Filtre fuzzy ale unei algebre Boole

Fie $\mathcal{B} = (B, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole în această secţiune.

Definiţie 4.10.8 O submulţime fuzzy μ a lui B se numeşte *filtru fuzzy* al lui $\mathcal{B}$ dacă verifică:
(FF1) $\min(\mu(x), \mu(y)) \leq \mu(x \wedge y)$, pentru orice $x, y \in B$,
(FF2) μ păstrează ordinea, adică:
$x \leq y$ implică $\mu(x) \leq \mu(y)$, pentru orice $x, y \in B$.

Legatura între filtrele şi filtrele fuzzy ale lui $\mathcal{B}$ este dată de următoarele două teoreme.

Teorema 4.10.9 *Fie $\emptyset \neq F \subseteq B$ o submulţime a lui B. Atunci F este un filtru al lui $\mathcal{B}$ dacă şi numai dacă funcţia caracteristică χ_F este un filtru fuzzy al lui $\mathcal{B}$.*

Dem.

$\Longrightarrow$: Presupunem că F este filtru al lui $\mathcal{B}$, deci satisface (F1), (F2). Să demonstrăm că χ_F este filtru fuzzy al lui $\mathcal{B}$, deci că satisface (FF1) şi (FF2).

(FF1): Fie $x, y \in B$:
- dacă $x, y \in F$, atunci din (F1) rezultă că $x \wedge y \in F$, deci $\chi_F(x \wedge y) = 1$; dar $x, y \in F$ implică $\chi_F(x) = 1 = \chi_F(y)$. Rezultă că $\min(\chi_F(x), \chi_F(y)) = 1 \leq \chi_F(x \wedge y) = 1$.
- dacă $x \notin F$ sau $y \notin F$, atunci $\chi_F(x) = 0$ sau $\chi_F(y) = 0$, şi prin urmare $\min(\chi_F(x), \chi_F(y)) = 0 \leq \chi_F(x \wedge y)$.
Deci, condiţia (FF1) este îndeplinită.

(FF2): Presupunem $x \leq y$:
- dacă $y \in F$, atunci $\chi_F(y) = 1$, deci $\chi_F(x) \leq \chi_F(y) = 1$.
- dacă $y \notin F$, atunci din (F2) rezultă că $x \notin F$ (căci dacă $x \in F$, din $x \leq y$ rezultă conform (F2) că $y \in F$). Deci, $\chi_F(x) = 0 = \chi_F(y)$ şi prin urmare $\chi_F(x) = 0 \leq \chi_F(y) = 0$.
Deci, condiţia (FF2) este îndeplinită.

$\Longleftarrow$: Presupunem că χ_F este filtru fuzzy al lui $\mathcal{B}$, deci satisface (FF1) şi (FF2). Să demonstrăm că F este filtru al lui $\mathcal{B}$, adică că satisface (F1) şi (F2).

(F1): Presupunem $x, y \in F$; rezultă că $\chi_F(x) = 1 = \chi_F(y)$, şi deci conform (FF1), avem $\min(\chi_F(x), \chi_F(y)) = 1 \leq \chi_F(x \wedge y)$. Rezultă că $\chi_F(x \wedge y) = 1$ adică $x \wedge y \in F$. Deci, condiţia (F1) este îndeplinită.

(F2): Presupunem $x \in F$ (adică $\chi_F(x) = 1$) şi $x \leq y$. Conform (FF2), obţinem că $\chi_F(x) = 1 \leq \chi_F(y)$, deci $\chi_F(y) = 1$ adică $y \in F$. Astfel, condiţia (F2) este îndeplinită. $\square$

Teorema 4.10.10 *Fie $\mu : B \longrightarrow [0, 1]$ o submulţime fuzzy a lui $\mathcal{B}$. Atunci μ este un filtru fuzzy al lui $\mathcal{B}$ dacă şi numai dacă submulţimea sa de nivel $U_t(\mu)$ este un filtru al lui $\mathcal{B}$ sau este vidă, pentru orice $t \in [0, 1]$.*

Dem.

$\Longrightarrow$: Fie μ un filtru fuzzy al lui $\mathcal{B}$, adică (FF1) şi (FF2) au loc. Fie $t \in [0,1]$ astfel încât $U_t(\mu) \neq \emptyset$. Să arătăm că $U_t(\mu)$ este filtru al lui $\mathcal{B}$, adică (F1) şi (F2) sunt îndeplinite.

(F1): Fie $x, y \in U_t(\mu)$; deci $\mu(x), \mu(y) \geq t$. Din (FF1) rezultă că $t \leq \min(\mu(x), \mu(y)) \leq \mu(x \wedge y)$, deci $\mu(x \wedge y) \geq t$; prin urmare $x \wedge y \in U_t(\mu)$. Deci (F1) este îndeplinită.

(F2): Fie $x \in U_t(\mu)$ şi $x \leq y$. Deci $\mu(x) \geq t$. Rezultă din (FF2) că $t \leq \mu(x) \leq \mu(y)$, şi de aici avem $\mu(y) \geq t$, adică $y \in U_t(\mu)$. Astfel, (F2) are loc.

$\Longleftarrow$: Presupunem că pentru orice $t \in [0,1]$, $U_t(\mu)$ este filtru al lui $\mathcal{B}$, adică (F1), (F2) au loc, sau $U_t(\mu) = \emptyset$. Să arătăm că μ este filtru fuzzy al lui $\mathcal{B}$, adică că (FF1) şi (FF2) au loc.

(FF1): Să presupunem prin absurd că există $x, y \in B$ astfel încât $\min(\mu(x), \mu(y)) > \mu(x \wedge y)$. Să luăm atunci

$$t_0 = \frac{\mu(x \wedge y) + \min(\mu(x), \mu(y))}{2} \in [0,1].$$

Deci $\mu(x \wedge y) < t_0 < \min(\mu(x), \mu(y)) \leq \mu(x), \mu(y)$. Rezultă că $x, y \in U_{t_0}(\mu)$ si $x \wedge y \notin U_{t_0}(\mu)$, de unde din (F1) rezultă că $U_{t_0}(\mu)$ nu este filtru: contradicţie. Deci, (FF1) are loc.

(FF2): Să presupunem prin absurd că există $x, y \in B$ astfel încât $x \leq y$ şi $\mu(x) > \mu(y)$. Să luăm atunci

$$t_1 = \frac{\mu(y) + \mu(x)}{2} \in [0,1].$$

Deci $\mu(y) < t_1 < \mu(x)$. Rezultă $x \in U_{t_1}(\mu)$ şi $y \notin U_{t_1}(\mu)$, de unde conform (F2) obţinem că $U_{t_1}(\mu)$ nu este filtru: contradicţie. Deci (FF2) are loc. $\square$

Chapter 5

Mulţimi. Operaţii cu mulţimi. Algebra Boole a mulţimilor

5.1 Conceptele fundamentale ale teoriei mulţimilor: clasa şi apartenenţa; mulţimea

Am folosit în această secţiune lucrarile [46] şi [**?**].

In consideraţiile matematice, ca şi în viaţa de toate zilele, intervin frecvent diverse *colecţii (ansmbluri) de obiecte* grupate la un loc pe baza anumitor proprietăţi comune. In matematică, asemenea colecţii (ansambluri, grupuri, totalităţi) de obiecte sunt numite *clase*, sau în situaţii speciale *mulţimi*.

Obiectele care compun o clasă se numesc *elementele* clasei respective.

Dacă obiectul A este un element al clasei B, spunem că A *aparţine* lui B (sau că B *conţine* pe A) şi notăm:

$$A \in B \quad \text{(sau, dual,} \quad B \ni A, \quad \text{respectiv).}$$

In caz contrar, spunem că A *nu aparţine* lui B (sau, dual, că B *nu conţine* pe A) şi notăm:

$$A \notin B \quad \text{(sau} \quad B \not\ni A, \quad \text{respectiv),}$$

sau, folosind simbolul negaţiei logice:

$$\neg(A \in B) \quad \text{(sau} \quad \neg(B \ni A), \quad \text{respectiv).}$$

Semnul "$\in$" a fost introdus în matematică de matematicianul şi logicianul Giuseppe Peano (1858 - 1932), ca scriere stilizată a primei litere "ϵ" (epsilon) din cuvântul grecesc "$\epsilon\sigma\tau\iota$" (este) şi se numeşte *simbolul relaţiei de apartenenţă.*

Elementele unei clase se găsesc deci în relaţie de apartenenţă cu clasa respectivă.

Noţiunile de *clasă* şi *apartenenţă* au devenit conceptele fundamentale ale matematicii contemporane. Matematicianul Georg Cantor (1845 - 1918), de la universitatea din Halle, este creatorul teoriei mulţimilor.

In această teorie, ideea de "element" comportă o anumită *relativitate*: fiecare obiect, în funcţie de context, poate fi privit atât ca element al unei clase, cât şi ca o clasă, formată, la rândul ei, din alte elemente. Totul depinde de "poziţia" pe care o ocupă obiectul respectiv în relaţia de apartenenţă. Dacă, de exemplu, $B \in C$ şi $A \in B$, atunci în primul context *B este un element* al clasei C, iar în cel de-al doilea context, *B este o clasă* care conţine elementul A.

Exemplu 5.1.1 Clasa $\mathcal{N}$ a tuturor naţiunilor din Europa este formată din obiecte numite "naţiuni". La rândul ei, fiecare naţiune este o clasă formată din indivizi umani, având anumite caracteristici comune; un român, de exemplu, este un element al clasei numită "naţiunea română", care la rândul ei este un element al clasei $\mathcal{N}$.

Observaţie 5.1.2 Un român *nu este* un element al clasei $\mathcal{N}$, deoarece nu este naţiune.

Având în vedere *relativismul* atributului de "element", este natural să gândim toate obiectele ca fiind clase.

Vom accepta că există o clasă, şi numai una, care *prin definiţie* nu conţine nici un element. Această clasă se numeşte *clasa vidă* şi se notează cu $\emptyset$. Clasa $\emptyset$ este deci unica clasă caracterizată de proprietatea:

$$x \notin \emptyset, \quad \text{oricare ar fi clasa } x$$

sau, în limbaj simbolic,

$$(\forall x)[\neg(x \in \emptyset)].$$

Libertatea fără margini de a concepe clase poate să conducă la nişte "totalităţi" abstracte extrem de "mari". Putem concepe, de exemplu, clasa $\mathcal{P}$ a *tuturor claselor posibile.* Aceasta clasă prezinta "extravaganţa" (proprietatea) că *se conţine şi pe sine ca element*, adică $\mathcal{P} \in \mathcal{P}$, deoarece $\mathcal{P}$ este o clasă.

Pe de altă parte, clasele cu care în mod curent avem de-a face nu prezintă asemenea "extravaganţe".

Exemplu 5.1.3 Clasa $\mathcal{N}$ a naţiunilor Europei nu se conţine ca element:

$$\mathcal{N} \notin \mathcal{N}$$

deoarece $\mathcal{N}$ nu este o naţiune.

Există deci clase care se conţin ca element (cum este clasa $\mathcal{P}$) şi există clase care nu se conţin ca element (cum este clasa $\mathcal{N}$ - şi acesta este cazul frecvent).

Această constatare a permis lui Bertrand Russel să construiască celebrul paradox din teoria mulţimilor, care îi poartă numele, şi pe care l-a publicat în 1903. (Un *pardox* este o opinie (absurdă), contrară adevărului îndeobşte acceptat.) *Paradoxul lui Russel* (numit şi *paradoxul mulţimilor*) constă în următorul raţionament:

Să notăm cu $\mathcal{R}$ clasa formată din toate clasele ne-"extravagante" (adică care nu se conţin pe sine ca element). Dacă acceptăm că $\mathcal{R}$ (clasa lui Russel) este un "obiect logic", atunci în mod obligatoriu clasa $\mathcal{R}$, la rândul ei, trebuie să fie "extravagantă" sau ne-"extravagantă", adică avem alternativa:

$$\text{a)} \quad \mathcal{R} \in \mathcal{R} \qquad \text{sau} \quad \text{b)} \quad \mathcal{R} \notin \mathcal{R};$$

- dacă se realizează (a), atunci conform definiţiei lui $\mathcal{R}$, avem $\mathcal{R} \notin \mathcal{R}$; deci am demonstrat implicaţia:

$$\text{dacă} \quad \mathcal{R} \in \mathcal{R}, \quad \text{atunci} \quad \mathcal{R} \notin \mathcal{R};$$

- dacă se realizează (b), înseamnă că $\mathcal{R}$ este o clasă ne-"extravagantă" şi, prin urmare, conform definiţiei clasei $\mathcal{R}$, avem $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$; deci am demonstrat implicaţia:

$$\text{dacă} \quad \mathcal{R} \notin \mathcal{R}, \quad \text{atunci} \quad \mathcal{R} \in \mathcal{R}.$$

Această dublă implicaţie contradictorie se numeşte *paradoxul lui Russel*.

Ulterior, multe alte paradoxuri au fost construite.

Teoria mulţimilor concepută de Cantor a fost deci subminată de descoperirea paradoxurilor. "Criza paradoxurilor", declanşată la începutul secolului 20 de noţiunile de *clasă* şi *apartenenţă* a declanşat marea criză a fundamentelor matematicii, problemele căreia nu sunt rezolvate complet nici în zilele noastre.

Investigaţiile legate de fundamentarea riguroasă a logicii, teoriei mulţimilor, aritmeticii, geometriei au fost puternic impulsionate. In deceniile următoare, logica şi matematica s-au imbogatit cu idei şi rezultate noi. In particular, a devenit clar tuturor, că, pentru a salva teoria mulţimilor (şi implicit fundamentarea matematicii pe această bază), obiectele primitive - *clasele* - şi relaţia primitivă - *apartenenţa* - trebuie supuse anumitor îngrădiri. Astfel, au apărut diversele sisteme axiomatice ale teoriei mulţimilor, menite să confere teoriei create de Cantor o bază logică corespunzătoare exigenţelor moderne şi să soluţioneze, între altele, problema paradoxurilor.

Cel mai important sistem axiomatic este sistemul *Newman - Gödel - Bernays* (GB), elaborat esenţialmente de P. Bernays între 1937 - 1954, dupa sistemul propus în 1925 de John von Neuman şi perfectionat în 1940 de Kurt Gödel. Preluând ideea lui von Neuman, Bernays introduce *distincţia* între *clasele generale* şi o categorie particulară de clase, pe care le numeşte *mulţimi*, şi anume:

Definiţie 5.1.4 Se numesc *mulţimi*, clasele particulare caracterizate de proprietatea că sunt elemente ale altor clase (pot figura în partea stangă a relaţiei "$\in$").

Cu alte cuvinte, o clasă A este mulţime dacă există o altă clasă B, astfel încât $A \in B$.

Totalitatea mulţimilor formează o clasă, notată $\mathcal{M}$ şi numită *univers* (= clasa tuturor mulţimilor), *care nu este mulţime*. Orice mulţime A verifică $A \in \mathcal{M}$.

Prin urmare, *orice mulţime este o clasă, dar nu orice clasă este mulţime*, deoarece nu despre orice clasă se poate arăta că este element al unei clase. Fiecare clasă este formată din mulţimi (elementele sale), dar clasa însăşi nu este obligatoriu mulţime.

Aceasta distincţie simplă, dar decisivă, asigură eliminarea tuturor paradoxurilor cunoscute. In particular, despre clasa $\mathcal{R}$ a lui Russel se arată că *nu este mulţime*, ci o clasă propriu-zisă, şi ca urmare posibilitatea (a): $\mathcal{R} \in \mathcal{R}$ este eliminată.

In sistemul axiomatic (GB), clasa vidă, $\emptyset$, este o mulţime, *mulţimea vidă*. Deci avem:
(i) $\mathcal{M} \neq \emptyset$,
(ii) $\emptyset \in \mathcal{M}$.

5.2 Relaţia de incluziune şi relaţia de egalitate între clase (mulţimi)

Pornind de la *obiectele primitive* (iniţiale): *clasa* şi *mulţimea* şi de la relaţia primitivă între clase: *relaţia de apartenenţă*, se obţin şi alte relaţii între clase (mulţimi), numite *relaţii derivate*:

- relaţia de incluziune,
- relaţia de egalitate.

5.2.1 Relaţia de incluziune între clase (mulţimi)

Definiţie 5.2.1 Dacă A si B sunt două clase (mulţimi) cu proprietatea că orice element al clasei A este şi element al clasei B, von spune că clasa (mulţimea) A *este inclusă* în clasa (mulţimea) B sau, dual, că clasa (mulţimea) B *include* clasa (mulţimea) A şi vom nota:

$$A \subseteq B \quad \text{sau} \quad B \supseteq A.$$

Prin urmare,

$$A \subseteq B \overset{def.}{\leftrightarrow} (\forall x)[(x \in A) \to (x \in B)].$$

Dacă $A \subseteq B$, spunem că A este o *subclasă (submulţime) sau parte* a lui B sau, dual, că B este o *supraclasă (supramulţime)* a lui A.

Observaţii 5.2.2
1. Relaţia "$\subseteq$" a fost definită cu ajutorul relaţiei "$\in$" şi al operatorilor logici $\rightarrow$ şi $\forall$.
2. Mulţimea vidă, $\emptyset$, este parte a oricărei mulţimi sau clase: oricare ar fi mulţimea A, avem $\emptyset \subseteq A$.
3. Oricare ar fi mulţimea A, avem $A \subseteq \mathcal{M}$ si $A \in \mathcal{M}$.
4. Incluziunea nu este singura relaţie matematică reductibilă la apartenenţă. In matematică, există o varietate infinită de relaţii: egalitatea obiectelor matematice, diversele relaţii de echivalenţă, ordonarea numerelor, divizibilitatea numerelor întregi, ordonările obiectelor nenumerice, morfismele, izomorfismele etc. Contribuţia revoluţionară a lui Cantor în dezvoltarea matematicii moderne constă tocmai în descoperirea faptului că *toate relaţiile matematice sunt reductibile la relaţia de apartenenţă.*

5.2.2 Relaţia de egalitate între clase (mulţimi)

Relaţia de egalitate între clase (mulţimi) se defineşte pornind de la noţiunea generală de egalitate în matematică. Relaţia de egalitate se notează cu semnul "$=$" şi intervine în aproape toate teoriile matematice.

Definiţie 5.2.3 Spunem că două obiecte matematice x şi y, aparţinând unei teorii matematice date, *sunt egale* (şi scriem $x = y$) dacă în cadrul teoriei respective nu putem face nici o distincţie între obiectele x şi y, adică din punctul de vedere al acelei teorii ele coincid.

Fiecare teorie matematică dispune de propria sa relaţie de "egalitate":
- egalitatea numerelor întregi, reale etc.
- egalitatea polinoamelor,
- egalitatea funcţiilor,
- egalitatea punctelor geometrice etc.

Toate aceste "egalităţi" au proprietatea de a fi:
- reflexive (orice x, x = x),
- simetrice (orice x,y, dacă $x = y$, atunci $y = x$,
- tranzitive (orice x,y,z, dacă $x = y$ si $y = z$, atunci $x = z$,

adică sunt *relaţii de echivalenţă.* Deci, în fiecare teorie matematică, egalitatea apare ca *cea mai fină* relaţie de echivalenţă a teoriei respective (adică relaţia de egalitate implică orice altă relaţie de echivalenţă).

Să definim egalitatea claselor.

Definiţie 5.2.4 Dacă A şi B sunt două clase (mulţimi) cu proprietăţile:
(i) un element oarecare x aparţine lui A dacă şi numai dacă el aparţine lui B şi
(ii) o clasă oarecare K conţine pe A dacă şi numai dacă ea conţine şi pe B,
atunci spunem că ele sunt *egale* şi notăm aceasta

$$A = B.$$

Deci,

$$A = B \overset{def.}{\leftrightarrow} (i) \wedge (ii),$$

unde:
(i) $(\forall x)[(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)]$,
(ii) $(\forall K)[(K \ni A) \leftrightarrow (K \ni B)]$.

- Condiţia (i) spune că cele două clase (mulţimi) trebuie să fie formate din aceleaşi elemente, adică cele doua clase trebuie să aibă aceeaşi *extensiune*.

- Condiţia (ii) spune că cele două clase (mulţimi) nu pot intra, una fără alta, în componenţa altei clase, adică cele două clase trebuie să aibă aceeaşi *intensiune*.

Observaţii 5.2.5

1) Practic, $A = B \ \leftrightarrow \ (i)$.

2) Relaţia de egalitate este definită cu ajutorul relaţiei de apartenenţă şi cu ajutorul operatorilor logici $\leftrightarrow$ şi $\forall$.

3) $A = B \ \leftrightarrow \ [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$.

Intr-adevăr,

$$\begin{array}{lll} A = B & \leftrightarrow & (\forall x)[(x \in A) \leftrightarrow (x \in B)] \\ & \leftrightarrow & (\forall x)[((x \in A) \rightarrow (x \in B)) \wedge ((x \in B) \rightarrow (x \in A))] \\ & \leftrightarrow & [(\forall x)[((x \in A) \rightarrow (x \in B))] \wedge [(\forall x)((x \in B) \rightarrow (x \in A))] \\ & \leftrightarrow & [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)], \end{array}$$

conform tautologiei cuantificate VII (1).

4) $\subseteq$ este o relaţie de ordine (parţială).

Din acest punct se poate trece la construirea treptată a teoriei mulţimilor, introducând mulţimea cu un element, $\{a\}$ (singleton-ul), mulţimea cu două elemente, $\{a, b\}$, perechea ordonată (a, b), reuniunea şi intersecţia claselor (mulţimilor), complementara unei clase (mulţimi), produsul cartezian, relaţiile binare, funcţiile etc.

5.3 Operaţii cu mulţimi. Algebra Boole a mulţimilor

Definiţie 5.3.1 Vom numi *mulţime totală* mulţimea tuturor obiectelor cu care avem de-a face la un moment dat. Vom nota cu E mulţimea totală.

Deci $E \in \mathcal{M}$.

Fie acum A şi B două submulţimi (părţi) ale lui E.

Definiţie 5.3.2 A este *inclusă strict* dacă şi numai dacă A este inclusă în B şi $A \neq B$. Deci, dacă notăm incluziunea strictă: $A \subset B$, atunci avem:

$$A \subset B \overset{def.}{\leftrightarrow} (A \subseteq B \text{ şi } A \neq B).$$

5.3.1 Reuniunea şi intersecţia a două mulţimi. Complementara unei mulţimi

Definiţie 5.3.3 Se numeşte *reuniunea mulţimilor* A, B, şi se notează: $A \cup B$, mulţimea elementelor care apartin cel putin uneia din mulţimile A, B:

$$A \cup B = \{x \in E \mid (x \in A) \vee (x \in B)\} \subseteq E.$$

Deci $x \in A \cup B \leftrightarrow (x \in A) \vee (x \in B)$.

Definiţie 5.3.4 Se numeşte *intersecţia mulţimilor* A, B, şi se notează: $A \cap B$, mulţimea elementelor comune lui A şi B (care aparţin atât lui A cât şi lui B):

$$A \cap B = \{x \in E \mid (x \in A) \wedge (x \in B)\} \subseteq E.$$

Deci $x \in A \cap B \leftrightarrow (x \in A) \wedge (x \in B)$.

Două mulţimi se zic *disjuncte* dacă $A \cap B = \emptyset$.

Definiţie 5.3.5 Se numeşte *complementara* mulţimii A în raport cu E, şi se notează: $\mathbf{C}_E A$, mulţimea elementelor lui E care nu aparţin lui A:

$$\mathbf{C}_E A = \{x \in E \mid x \notin A\} = \{x \in E \mid \neg(x \in A)\}.$$

Să notăm cu $\mathcal{P}(E)$ mulţimea tuturor submulţimilor (părţilor) mulţimii E:

$$\mathcal{P}(E) = \{A \mid A \subseteq E\}.$$

Observaţii 5.3.6
(1) $A \subseteq E \leftrightarrow A \in \mathcal{P}(E)$.
(2) $\emptyset \in \mathcal{P}(E)$.
(3) $E \in \mathcal{P}(E)$.

Teorema 5.3.7 *Structura*

$$(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, \mathbf{C}_E, \emptyset, E)$$

este o algebră Boole, numită **algebra Boole a mulţimilor**.

Dem. Trebuie să demonstrăm că pentru orice $A, B, C \in \mathcal{P}(E)$, avem:
(M1) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$ (idempotenţa lui $\cup, \cap$),
(M2) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$ (comutativitatea lui $\cup, \cap$),
(M3) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$ (asociativitatea lui $\cup, \cap$),
(M4) $A \cup (A \cap B) = A$, $A \cap (A \cup B) = A$ (absorbţia),

(M5) $A \cup (B \cap C) = (A \cup b) \cap (A \cup C)$, $A \cap (B \cup C) = (A \cap b) \cup (A \cap C)$ (distributivitatea),
(M6) $A \cup \emptyset = A$, $A \cap E = A$,
(M7) $A \cup \mathbf{C}_E A = E$, $A \cap \mathbf{C}_E A = \emptyset$.

Să demonstrăm de exemplu prima egalitate din (M1): pentru orice $A \in \mathcal{P}(E)$, $A \cup A = A$.
Fie $A \in \mathcal{P}(E)$ mulţime fixată, altfel arbitrară. Să notăm $Q(A) \equiv$ "$A \cup A = A$" (am notat cu $Q(A)$ propoziţia $A \cup A = A$) şi să arătăm că propoziţia $Q(A)$ este adevărată.

Dar $A \cup A = A \overset{def.=}{\leftrightarrow} (\forall x)[x \in A \cup A \leftrightarrow x \in A]$. Să notăm

$$R(x) \equiv "[x \in A \cup A \leftrightarrow x \in A]".$$

Deci

$$A \cup A = A \overset{def.=}{\leftrightarrow} (\forall x)R(x).$$

Propoziţia $Q(A)$ (din calculul propoziţiilor de ordinul II) este adevărată dacă şi numai dacă propoziţia $(\forall x)R(x)$ (din calculul propoziţiilor de ordinul I) este adevărată dacă şi numai dacă predicatul $R(x)$ este adevărat dacă şi numai dacă pentru orice obiect $a \in D_R$, propoziţia $R(a)$ (din calculul propoziţiilor de ordinul I) este adevărată.

Intr-adevăr, fie $a \in D_R$ obiect (element) fixat, altfel arbitrar. Să demonstrăm că $R(a)$ este o propoziţie adevărată:
$R(a)$ este propoziţie adevărată dacă şi numai dacă "$a \in A \cup A \leftrightarrow a \in A$" este propoziţie adevărată dacă şi numai dacă, din definiţia lui $\cup$, "$(a \in A \vee a \in A) \leftrightarrow a \in A$" este propoziţie adevărată dacă şi numai dacă "$(p \vee p) \leftrightarrow p$" este propoziţie adevărată, unde $p \equiv$ "$a \in A$" (am notat cu "p" propoziţia "$a \in A$"). Dar "$(p \vee p) \leftrightarrow p$" este prima tautologie din (P1) a sistemului de tautologii $\mathcal{A}_1$ a calculului propoziţiilor, deci este adevărată. Rezultă că propoziţia $R(a)$ este adevărată. Conform **PG** (Principiul generalizării), rezultă că pentru orice $a \in D_R$, propoziţia $R(a)$ este adevărată, adica propoziţia $Q(A)$ este adevărată.

Aplicând încă odată **PG**, rezultă că pentru orice $A \in \mathcal{P}(E)$, propoziţia $Q(A)$ este adevărată.

La fel se demonstrează (M2) - (M7), folosind respectiv tautologiile (P2) - (P7) din sistemul de tautologii $\mathcal{A}_1$. □

Corolar 5.3.8 *Submulţimea $\mathcal{P}_2 = \{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{P}(E)$ este închisă la $\cup, \cap, \mathbf{C}_E$, deci structura*

$$(\mathcal{P}_2, \cap, \cup, \mathbf{C}_E, \emptyset, E)$$

este o subalgebră Boole a algebrei Boole $\mathcal{P}(E)$, deci este o subalgebră Boole (cu două elemente).

Următoarele proprietăţi sunt de asemenea adevărate:
(M8) $\mathbf{C}_E(A \cup B) = \mathbf{C}_E A \cap \mathbf{C}_E B$, $\mathbf{C}_E(A \cap B) = \mathbf{C}_E A \cup \mathbf{C}_E B$ (legile De Morgan),

(M9) $\mathbf{C}_E(\mathbf{C}_E A) = A$,
(M10) $\mathbf{C}_E\emptyset = E$, $\mathbf{C}_E E = \emptyset$,
(M11) $A \subseteq B \Leftrightarrow (\mathbf{C}_E A) \cup B = E$, $A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap (\mathbf{C}_E B) = \emptyset$.

Exerciţii Să se scrie echivalenţele celorlalte tautologii din sistemele $\mathcal{A}_3$ - $\mathcal{A}_5$.

• Mai general, avem următoarea definiţie:

Definiţie 5.3.9 Se numeşte *câmp de mulţimi* orice mulţime nevidă $\mathcal{C}$ de submulţimi ale unei mulţimi fixate E (mulţimea totală) astfel încât $\mathcal{C}$ este închisă faţă de reuniunea, intersecţia şi complementara de mulţimi, adică:
a) dacă $A, B \in \mathcal{C}$, atunci $A \cup B \in \mathcal{C}$,
b) dacă $A, B \in \mathcal{C}$, atunci $A \cap B \in \mathcal{C}$,
c) dacă $A \in \mathcal{C}$, atunci $\mathbf{C}_E A \in \mathcal{C}$.

Observaţie 5.3.10 Din regulile de Morgan pentru mulţimi, rezultă că (a) şi (c) implică (b), şi că (b) şi (c) implică (a). De aceea, în definiţia unui câmp de mulţimi este suficient să luăm condiţia (c) împreună cu una din condiţiile (a), (b).

Exemple 5.3.11

(1) $\mathcal{P}(E)$ este un câmp de mulţimi, pentru orice E.

(2) Pentru orice mulţime E, clasa compusă din toate submulţimile finite ale lui E şi din complementarele acestora este un câmp de mulţimi.

Propoziţia 5.3.12 *Orice câmp de mulţimi $\mathcal{C}$ este o algebră Boole, anume*

$$(\mathcal{C}, \cap, \cup, \mathbf{C}_E, \emptyset, E).$$

Să remarcăm că algebra Boole $\mathcal{C}$ este o subalgebră a algebrei Boole $\mathcal{P}(E)$.

5.3.2 Generalizare: reuniunea şi intersecţia a n mulţimi

Dacă $A_1, A_2, \ldots, A_n \subseteq E$, atunci prin definiţie:

$$\cup_{i=1}^n A_i = A_1 \cup \ldots \cup A_n \stackrel{def.}{=} \{x \in E \mid (x \in A_1) \vee \ldots \vee (x \in A_n)\} = \{x \in E \mid (\exists i) x \in A_i\}$$

$$\cap_{i=1}^n A_i = A_1 \cap \ldots \cap A_n \stackrel{def.}{=} \{x \in E \mid (x \in A_1) \wedge \ldots \wedge (x \in A_n)\} = \{x \in E \mid (\forall i) x \in A_i\}.$$

Propoziţia 5.3.13 *Reuniunea şi intersecţia finită au următoarele proprietăţi:*
(1) $(\cup_{i=1}^n A_i) \cap B = \cup_{i=1}^n (A_i \cap B)$, $(\cap_{i=1}^n A_i) \cup B = \cap_{i=1}^n (A_i \cup B)$ *(distributivitatea generalizată (finită)),*
(2) $\mathbf{C}_E(\cup_{i=1}^n A_i) = \cap_{i=1}^n \mathbf{C}_E A_i$, $\mathbf{C}_E(\cap_{i=1}^n A_i) = \cup_{i=1}^n \mathbf{C}_E A_i$ *(legile De Morgan generalizate (finite)).*

5.3.3 Generalizare: reuniunea şi intersecţia unei familii de mulţimi

Definiţie 5.3.14 Fie E mulţimea totală şi fie I o mulţime nevidă, eventual infinită. Dacă fiecărui $i \in I$ îi este asociată o singură mulţime $A_i \subseteq E$, atunci spunem că avem o *familie de mulţimi (submulţimi ale lui E) indexată de mulţimea I* şi notăm cu:

$$(A_i)_{i \in I}.$$

Dacă $(A_i)_{i \in I}$ este o familie de mulţimi, atunci prin definiţie:

$$\cup_{i \in I} A_i \stackrel{def.}{=} \{x \in E \mid \text{există } i \in I, \text{ astfel încât } x \in A_i\} = \{x \in E \mid (\exists i) x \in A_i\},$$

$$\cap_{i \in I} A_i \stackrel{def.}{=} \{x \in E \mid \text{pentru orice } i \in I, x \in A_i\} = \{x \in E \mid (\forall i) x \in A_i\}.$$

Propoziţia 5.3.15 *Reuniunea şi intersecţia oarecare au următoarele proprietăţi:*
(1) $(\cup_{i \in I} A_i) \cap B = \cup_{i \in I}(A_i \cap B)$, $(\cap_{i \in I} A_i) \cup B = \cap_{i \in I}(A_i \cup B)$ *(distributivitatea generalizată (oarecare)),*
(2) $\mathbf{C}_E(\cup_{i \in I} A_i) = \cap_{i \in I} \mathbf{C}_E A_i$, $\mathbf{C}_E(\cap_{i \in I} A_i) = \cup_{i \in I} \mathbf{C}_E A_i$ *(legile De Morgan generalizate (oarecare)).*

Dem. Vom demonstra succint, pentru exemplificare, ultima proprietate:
$x \in \mathbf{C}_E(\cap_{i \in I} A_i) \leftrightarrow x \notin \cap_{i \in I} A_i \leftrightarrow \neg(x \in \cap_{i \in I} A_i) \leftrightarrow \neg((\forall i) x \in A_i) \leftrightarrow (\exists i) \neg(x \in A_i) \leftrightarrow (\exists i)(x \notin A_i) \leftrightarrow (\exists i)(x \in \mathbf{C}_E A_i) \leftrightarrow x \in \cup_{i \in I} \mathbf{C}_E A_i$,
conform tautologiei cuantificate I (3).

Similar se demonstrează restul proprietăţilor. □

5.3.4 Exemple

Vom încheia acest capitol cu câteva exemple ilustrative de utilizare a simbolismului logic (fără a ne preocupa de valoarea de adevăr a enunţurilor) [46].

Exemplul 1. Enunţul:
$E \equiv$" Dacă clasa x aparţine clasei y şi clasa y nu aparţine clasei x, atunci clasele x şi y sunt distincte"
se scrie simbolic: $E \equiv$ "$[(x \in y) \wedge (y \notin x)] \rightarrow (x \neq y)$".

Exemplul 2. Enunţul:
$F \equiv$ " Dacă clasele x şi y sunt distincte, atunci: fie există o clasă u, astfel încât u nu este element al lui x şi este element al lui y, fie există u, astfel încât u este element al lui x şi nu este element al lui y"
se scrie simbolic astfel:
$F \equiv$ "$(x \neq y) \rightarrow \{(\exists u)[(u \notin x) \wedge (u \in y)] \vee (\exists u)[(u \in x) \wedge (u \notin y)]\}$.

Exemplul 3. Enunţul:
$G \equiv$ "Oricare ar fi clasele x şi y, există o clasă z, astfel încât oricare ar fi clasa u,

avem: $u \in z$ dacă şi numai dacă $u \in x$ sau $u \in y$”
se scrie simbolic:
$G \equiv$ ”$(\forall x)(\forall y)(\exists z)(\forall u)[(u \in z) \leftrightarrow (u \in x) \vee (u \in y)]$”.

Exemplul 4. Invers, să se scrie în limbaj uzual enunţurile următoare scrise sub forma simbolică:
$K \equiv$ ”$(\exists x)(\forall y)\neg(y \in x)$”,
$L \equiv$ ”$(\forall x)(\exists y)(\forall u)[(u \in y) \leftrightarrow (u = x)]$”,
$M \equiv$ ”$(u = r \cup \{r\}) \leftrightarrow (\forall z)[(z \in u) \leftrightarrow (z \in r) \vee (z = r)]$.

$K \equiv$ ”Există o clasă x, care nu conţine niciun element”
$L \equiv$ ”Pentru orice clasă x, există o clasă y, cu proprietatea că orice element al lui y este egal cu x”,
$M \equiv$ ” Clasele u şi $r \cup \{r\}$ sunt egale dacă şi numai dacă oricare ar fi z, avem: $z \in u$ dacă şi numai dacă $z \in r$ sau $z = r$”.

Chapter 6

Relaţii. Operaţii cu relaţii. Algebra Boole a relaţiilor. Algebra relaţională a relaţiilor. Baze de date relaţionale

In matematică, o anumită categorie de enunţuri joacă un rol important; aceste enunţuri se numesc relaţii, cele mai utilizate fiind relaţiile binare. Vom începe cu o categorie de relaţii particulare, cu o structură foarte simplă şi care se numesc produse carteziene (sau produse directe). Secţiunea are 5 părţi:
5.1 Produs cartezian a două mulţimi. Relaţii binare
5.2 Generalizare: Produs cartezian a n mulţimi ($n \geq 2$). Relaţii n-are
5.3 Operaţii cu relaţii. Algebra Boole a relaţiilor
5.4 Algebra relaţională a relaţiilor
5.5 Baze de date relaţionale

6.1 Produs cartezian a două mulţimi. Relaţii binare

6.1.1 Produs cartezian a două mulţimi

Definiţie 6.1.1
(i) Fie D_1, D_2 două mulţimi, distincte sau nu. Se numeşte *produs cartezian* al mulţimilor D_1, D_2 mulţimea, notată $D_1 \times D_2$, care are drept elemente toate perechile ordonate (x, y), cu $x \in D_1$ şi $y \in D_2$, şi numai pe acestea:

$$D_1 \times D_2 = \{(x, y) \mid (x \in D_1) \wedge (y \in D_2)\}.$$

(i') Dacă $D_1 = D_2 = D$, atunci $D \times D$ se mai notează D^2.

Definiţie 6.1.2
(i) Se numeşte *diagonala* produsului cartezian $D_1 \times D_2$, mulţimea notată $\Delta_{D_1 \times D_2}$ definită astfel:

$$\Delta_{D_1 \times D_2} = \{(x, y) \mid (x \in D_1) \wedge (y \in D_2) \wedge (x = y)\}$$

$$= \{(x, x) \mid (x \in D_1) \wedge (x \in D_2)\} = \{(x, x) \mid x \in D_1 \cap D_2\} \subseteq D_1 \times D_2.$$

(i') Se numeşte *diagonala* produsului cartezian $D \times D$ (sau *relaţia identică* din D), mulţimea notată Δ_D definită astfel:

$$\Delta_D = \{(x, x) \mid x \in D\} \subseteq D \times D.$$

Propoziţia 6.1.3 *Dacă $Card(D_1)$ şi $Card(D_2)$ sunt finite, atunci*

$$Card(D_1 \times D_2) = Card(D_1) \cdot Card(D_2),$$

unde $Card(D)$ este numărul elementelor mulţimii D (cardinalul lui D).

• **Proprietăţi ale produsului cartezian a două mulţimi**

1. Dacă $D_1 = \emptyset$ sau $D_2 = \emptyset$, atunci $D_1 \times D_2 = \emptyset$.
2. Dacă D_1, D_1', D_2, D_2' sunt nevide, atunci

$$D_1 \times D_2 = D_1' \times D_2' \leftrightarrow (D_1 = D_1') \wedge (D_2 = D_2').$$

3. $(D_1 \cup D_1') \times D_2 = (D_1 \times D_2) \cup (D_1' \times D_2)$,
$D_1 \times (D_2 \cup D_2') = (D_1 \times D_2) \cup (D_1 \times D_2')$.
4. $(D_1 \cap D_1') \times D_2 = (D_1 \times D_2) \cap (D_1' \times D_2)$,
$D_1 \times (D_2 \cap D_2') = (D_1 \times D_2) \cap (D_1 \times D_2')$.
5. $(D_1 \cup D_1') \times (D_2 \cup D_2') = (D_1 \times D_2) \cup (D_1 \times D_2') \cup (D_1' \times D_2) \cup (D_1' \times D_2')$.
6. $(D_1 \cap D_1') \times (D_2 \cap D_2') = (D_1 \times D_2) \cap (D_1 \times D_2') \cap (D_1' \times D_2) \cap (D_1' \times D_2')$.

6.1.2 Relaţii binare

Definiţie 6.1.4
(i) Fie D_1 şi D_2 două mulţimi oarecare, distincte sau nu. Se numeşte *relaţie binară* (sau simplu *relaţie*) *între* D_1 *şi* D_2 orice submulţime R a produsului cartezian $D_1 \times D_2$. D_1 şi D_2 se numesc *domeniile* lui R.
(i') Dacă $D_1 = D_2 = D$, se numeşte *relaţie binară* (sau relaţie) *între elementele mulţimii* D (sau *pe mulţimea* D) orice submulţime R a produsului cartezian D^2.

Observaţii 6.1.5
1. Diagonala $\Delta_{D_1 \times D_2}$ este o relaţie binară între D_1 si D_2, iar Δ_D este o relaţie binară pe D.
2. Dacă x, y sunt in relaţia binară R, atunci vom scrie echivalent:

$$xRy, \quad (x,y) \in R, \quad R(x,y) \ - \text{ predicat binar}$$

3. Toate elementele unei mulţimi A au o proprietate comună, P, şi anume aceea de a aparţine acelei mulţimi; propoziţia "$a \in A$" afirmă proprietatea P a lui a (a are proprietatea P). Scriem, echivalent:

$$a \in A \ \leftrightarrow \ P(a)$$

• **Funcţii (aplicaţii) unare (de o variabilă)**

Definiţie 6.1.6 Fie A, B doua mulţimi oarecare.
(i) O *funcţie definită pe* A *cu valori în* B este o relaţie binară Γ între A şi B (adică $\Gamma \subseteq A \times B$), cu proprietatea că pentru orice $x \in A$, există un element $y \in B$ şi numai unul, astfel încât $(x, y) \in \Gamma$.
O funcţie $\Gamma \subseteq A \times B$ se notează prin $f : A \longrightarrow B$, $x \longmapsto f(x)$, simbolul f avand semnificaţia următoare: fiecărui element $x \in A$ îi corespunde un singur element, $f(x) \in B$, astfel încât $(x, f(x)) \in \Gamma$.
A se numeşte *domeniul de definiţie* al funcţiei $f : A \longrightarrow B$, B se numeşte *domeniul valorilor* lui f.
(i') Dacă $A = B$ si $f : A \longrightarrow A$, atunci f se numeşte *operaţie unară* pe A.

6.2 Generalizare: Produs cartezian a n mulţimi ($n \geq 2$). Relaţii n-are

6.2.1 Produs cartezian a n mulţimi

Definiţie 6.2.1
(i) Fie D_1, D_2, …, D_n n mulţimi, distincte sau nu ($n \geq 2$). Se numeşte *produs cartezian* al mulţimilor D_i, $i = \overline{1,n}$ mulţimea, notată $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ sau

încă $\prod_{i=1}^{n} D_i$, care are drept elemente toate n-uplele ordonate $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cu proprietatea $x_i \in D_i$, $i = \overline{1,n}$:

$$\prod_{i=1}^{n} D_i = D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid (x_1 \in D_1) \wedge \ldots \wedge (x_n \in D_n)\}$$

$$= \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ \underbrace{x_i \in D_i}_{P(i)}\}.$$

(i') Dacă $D_1 = D_2 = \ldots = D_n = D$, atunci $D \times D \times \ldots \times D$ se mai notează D^n, numindu-se *puterea naturală* a mulţimii D.

Produsul cartezian a n mulţimi (finit) mai poate fi definit echivalent astfel:

Definiţie 6.2.2 Fie D_1, D_2, $\ldots$, D_n n mulţimi, distincte sau nu ($n \geq 2$). Se numeşte *produs cartezian* al mulţimilor D_i, $i = \overline{1,n}$ mulţimea, notată $D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n$ sau încă $\prod_{i=1}^{n} D_i$, care are drept elemente toate funcţiile $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, cu proprietatea că avem $f(i) \in D_i$, pentru orice $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$:

$$\prod_{i=1}^{n} D_i = \{f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} D_i \mid \forall i \in \{1, 2, \ldots, n\},\ f(i) \in D_i\}.$$

Observaţii 6.2.3

1. In această secţiune, scrierea $i = \overline{1,n}$ este echivalentă cu scrierea $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$.
2. Cele două definiţii 6.2.1 si 6.2.2 sunt echivalente, pentru că tuplurile (n-uplele) $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, cu $x_i \in D_i$, $i = \overline{1,n}$, sunt în corespondenţă bijectivă cu funcţiile $f : \{1, 2, \ldots, n\} \longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} D_i$, cu $f(i) = x_i \in D_i$, $i = \overline{1,n}$.
3. $(D_1 \times D_2) \times D_3 \simeq D_1 \times (D_2 \times D_3) \simeq D_1 \times D_2 \times D_3$, unde $\simeq$ înseamnă că mulţimile respective sunt izomorfe (adică există o bijecţie între ele).

Propoziţia 6.2.4 *Pentru orice* $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, *funcţia* $\pi_j : \prod_{i=1}^{n} D_i \longrightarrow D_j$, *definită de:*

$$\pi_j((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = x_j$$

este surjectivă, şi se numeşte **proiecţia canonică** *a lui* $\prod_{i=1}^{n} D_i$.

6.2.2 Relaţii n-are ($n \geq 2$)

Definiţie 6.2.5

(i) Fie D_1, D_2, $\ldots, D_n$ o listă finită de mulţimi oarecare, distincte sau nu, $n \geq 2$. Se numeşte *relaţie n-ară între mulţimile* D_1, $\ldots, D_n$ orice submulţime R a produsului cartezian $\prod_{i=1}^{n} D_i$. Mulţimile D_1, $\ldots$, D_n se numesc *domeniile* lui R. n se numeşte *aritatea* lui R.

(i') Dacă $D_1 = D_2 = \ldots = D_n = D$, se numeşte *relaţie n-ară între elementele mulţimii* D (sau *pe mulţimea* D) orice submulţime R a produsului cartezian D^n.

Observaţii 6.2.6
1. Elementele unei relaţii sunt *tupluri (n-upluri)* sau, echivalent, sunt funcţii.
2. Dacă x, y, z sunt în relaţia ternară R, vom scrie echivalent:

$$(x, y, z) \in R, \quad R(x, y, z) \; - \; \text{predicat ternar}$$

Exemple de relaţii ternare
1) $S(x, y, z) \equiv$ "$x + y = z$"
2) $P(x, y, z) \equiv$ "$x \cdot y = z$"

• **Funcţii de n variabile** ($n \geq 1$)

Definiţie 6.2.7 Fie D_1, D_2, $\ldots$, D_n şi B $n+1$ mulţimi, distincte sau nu, $n \geq 1$.

(i) O *funcţie de n variabile* este o funcţie unară $f : \prod_{i=1}^{n} D_i \longrightarrow B$, adică este o relaţie binară Γ, $\Gamma \subseteq (D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n) \times B$ cu proprietatea că pentru orice $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} D_i$, există un element $y = f(X) \in B$ şi numai unul astfel încât

$$(X, y) = ((x_1, x_2, \ldots, x_n), y) \in \Gamma.$$

(i') Dacă $D_1 = D_2 = \ldots = D_n = B = D$, atunci o funcţie $f : D^n \longrightarrow D$ se numeşte *operaţie n-ară* pe D.

(i") *Operaţiile zero-are* sau *nulare* pe $D \neq \emptyset$ se definesc ca fiind elementele mulţimii D.

Observaţie 6.2.8 Echivalent, o *funcţie de n variabile* este o relaţie $(n+1)$-ară Γ, $\Gamma \subseteq D_1 \times D_2 \times \ldots \times D_n \times B$ cu proprietatea că pentru orice $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} D_i$, există un element $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B$ şi numai unul astfel încât

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n, y) \in \Gamma.$$

6.3 Operaţii cu relaţii. Algebra Boole a relaţiilor

In cele ce urmează, vom lucra numai cu relaţii binare pe E, generalizarea la alte relaţii binare sau la relaţii n-are fiind evidentă.

6.3.1 Disjuncţia, conjuncţia şi negaţia unei relaţii binare

Fie R si S două relaţii binare pe E (adică $R, S \subseteq E \times E$).

Definiţie 6.3.1 Numim *disjuncţia (reuniunea)* relaţiilor R, S, şi notăm $R \bigvee S$, relaţia care corespunde reuniunii lor luate ca mulţimi:

$$R \bigvee S = \{(x, y) \in E \times E \mid (x, y) \in R \vee (x, y) \in S\}.$$

Definiţie 6.3.2 Numim *conjuncţia (intersecţia)* relaţiilor R, S, şi notăm $R \bigwedge S$, relaţia care corespunde intersecţiei lor luate ca mulţimi:

$$R \bigwedge S = \{(x, y) \in E \times E \mid (x, y) \in R \wedge (x, y) \in S\}.$$

Definiţie 6.3.3 Numim *negaţia (complementara)* relaţiei R, şi notăm $\overline{R}$, relaţia care corespunde complementarei ei în raport cu $E \times E$ luată ca mulţime:

$$\overline{R} = \{(x, y) \in E \times E \mid (x, y) \notin R\} = \{(x, y) \in E \times E \mid \neg((x, y) \in R)\}.$$

6.3.2 Implicaţia şi echivalenţa relaţiilor binare

Fie R şi S două relaţii binare pe E.

Definiţie 6.3.4 Spunem că relaţia R *implică* relaţia S, şi notăm $R \Longrightarrow S$, dacă ori de câte ori avem xRy, avem şi xRy, deci dacă $R \subseteq S$ ca mulţimi.

Definiţie 6.3.5 Spunem că relaţia R este *echivalentă* cu relaţia S, şi notăm $R \Longleftrightarrow S$, dacă $R \Longrightarrow S$ şi $S \Longrightarrow R$, deci dacă $R = S$ ca mulţimi.

Observaţii 6.3.6
1. Implicaţia relaţiilor este o relaţie de ordine parţială pe mulţimea relaţiilor binare pe E.
2. Echivalenţa relaţiilor este o relaţie de echivalenţă pe mulţimea relaţiilor binare pe E.

Exemple 6.3.7
• Pentru numere:
$"<" \bigvee "=" \Longleftrightarrow "\leq"$,
$">" \bigvee "=" \Longleftrightarrow "\geq"$,
$"\leq" \bigwedge "\geq" \Longleftrightarrow "="$,
$"\geq" \bigwedge "\neq" \Longleftrightarrow ">"$,
$"\leq" \bigwedge "\neq" \Longleftrightarrow "<"$.

$"\overline{<}" \Longleftrightarrow "\geq"$ (negaţia relaţiei $<$ este $\geq$),
$"\overline{>}" \Longleftrightarrow "\leq"$ (negaţia relaţiei $>$ este $\leq$),
$"\overline{=}" \Longleftrightarrow "\neq"$ (negaţia relaţiei $=$ este $\neq$).

$"=" \Longrightarrow "\leq"$,
$"=" \Longrightarrow "\geq"$,
$"<" \Longrightarrow "\leq"$,
$">" \Longrightarrow "\geq"$,
$"<" \Longrightarrow "\neq"$,
$">" \Longrightarrow "\neq"$.

• Pentru mulţimi:
$"\subseteq" \bigwedge "\supseteq" \iff "="$.

$"\overline{\in}" \iff "\notin"$ (negaţia lui $\in$ este $\notin$),
$"\overline{\notin}" \iff "\in"$ (negaţia lui $\notin$ este $\in$),
$"\overline{=}" \iff "\neq"$ (negaţia lui $=$ este $\neq$).

$"=" \Longrightarrow "\subseteq"$.

6.3.3 Algebra Boole a relaţiilor

Definiţie 6.3.8 Se numeşte *relaţia vidă*, şi se noteaza V, relaţia care corespunde mulţimii vide, $\emptyset \subseteq E \times E$, adică relaţia cu proprietatea că oricare x, y din E, *nu avem* xVy.

Definiţie 6.3.9 Se numeşte *relaţia totală*, şi se notează T, relaţia care corespunde mulţimii totale, $E \times E \subseteq E \times E$, adică este relaţia cu proprietatea că oricare x, y din E, *avem* xTy.

Propoziţia 6.3.10 *Fie $\mathcal{R}_E$ mulţimea tuturor relaţiilor binare pe E (adică $\mathcal{R}_E = \mathcal{P}(E \times E)$). Atunci structura $(\mathcal{R}_E, \bigwedge, \bigvee, ^-, V, T)$ este o algebră Boole, numită algebra Boole a relaţiilor.*

Proof. Trebuie să demonstrăm că pentru orice $R, S, Q \in \mathcal{R}_E$, avem:
(R1) $R \bigvee R \iff R$, $R \bigwedge R \iff R$ (idempotenţa lui $\bigvee$, $\bigwedge$),
(R2) $R \bigvee S \iff S \bigvee R$, $R \bigwedge S \iff S \bigwedge R$ (comutativitatea lui $\bigvee$, $\bigwedge$),
(R3) $R \bigvee (S \bigvee Q) \iff (R \bigvee S) \bigvee Q$, $R \bigwedge (S \bigwedge Q) \iff (R \bigwedge S) \bigwedge Q$ (asociativitatea lui $\bigvee$, $\bigwedge$),
(R4) $R \bigvee (R \bigwedge S) \iff R$, $R \bigwedge (R \bigvee S) \iff R$ (absorbţia),
(R5) $R \bigvee (S \bigwedge Q) \iff (R \bigvee S) \bigwedge (R \bigvee Q$, $R \bigwedge (S \bigvee Q) \iff (R \bigwedge S) \bigvee (R \bigwedge Q$ (distributivitatea),
(R6) $R \bigvee V \iff R$, $R \bigwedge T \iff R$ (V este prim element, T este ultim element: $V \Longrightarrow R \Longrightarrow T$),
(R7) $R \bigvee \overline{R} \iff T$, $R \bigwedge \overline{R} \iff V$ ($\overline{R}$ este complementul lui R),
ceea ce se demonstrează similar cu modul cum am demonstrat că $(\mathcal{P}(E), \cap, \cup, C_E, \emptyset, E)$ este o algebră Boole (algebra Boole a mulţimilor), de data aceasta folosind predicate binare, nu unare. □

Următoarele proprietăţi sunt de asemenea adevărate, pe lângă multe altele: pentru orice două relaţii binare R, S pe E,
(R8) $\overline{R \bigvee S} \iff \overline{R} \bigwedge \overline{S}$, $\overline{R \bigwedge S} \iff \overline{R} \bigvee \overline{S}$ (legile De Morgan),
(R9) $\overline{\overline{R}} \iff R$ (legea dublei negaţii).

Observaţie 6.3.11 Echivalenţa relaţiilor joacă, în algebra Boole a relaţiilor, acelaşi rol pe care-l joacă egalitatea mulţimilor în algebra Boole a mulţimilor.

6.4 Algebra relaţională a relaţiilor

6.4.1 Compunerea şi inversarea relaţiilor binare

Fie R şi S două relaţii binare pe E.

Definiţie 6.4.1 Se numeşte *compusa (produsul)* relaţiilor R, S, şi se notează $R \circ S$, relaţia binară care are drept elemente toate acele (şi numai acele) perechi ordonate (x, y) pentru care există cel puţin un t astfel încât $(x, t) \in R$ si $(t, y) \in S$:

$$R \circ S = \{(x, y) \in E \times E \mid (\exists t)((x, t) \in R \wedge (t, y) \in S)\}.$$

Definiţie 6.4.2 Se numeşte *inversa (transpusa) (simetrica)* relaţiei R, şi se notează R^{-1}, relaţia binară care are drept elemente toate perechile ordonate obţinute prin "inversarea" perechilor din R, adică $(x, y) \in R^{-1} \leftrightarrow (y, x) \in R$:

$$R^{-1} = \{(x, y) \in E \times E \mid (y, x) \in R\}.$$

Exemple 6.4.3
• Pentru numere:
$"=" \circ "\leq" \Longleftrightarrow "\leq"$,
$"\leq" \circ "=" \Longleftrightarrow "\leq"$,
$"\geq" \circ "=" \Longleftrightarrow "\geq"$,
$"<" \circ "<" \Longleftrightarrow "<"$.

• Pentru mulţimi:
$"=" \circ "\in" \Longleftrightarrow "\in"$,
$"\in" \circ "=" \Longleftrightarrow "\in"$,
$"=" \circ "=" \Longleftrightarrow "="$,
$"\subseteq" \circ "\subseteq" \Longleftrightarrow "\subseteq"$,
$"=" \circ "\subseteq" \Longleftrightarrow "\subseteq"$,
$"\subseteq" \circ "=" \Longleftrightarrow "\subseteq"$.

Să demonstrăm, de exemplu, că $"=" \circ "\in" \Longleftrightarrow "\in"$ pentru mulţimi:
$(X, Y) \in "=" \circ "\in" \leftrightarrow (\exists T)[X = T \wedge T \in Y] \leftrightarrow (\exists T)[X \in Y] \leftrightarrow X \in Y \leftrightarrow (X, Y) \in "\in"$.

Propoziţia 6.4.4 *Produsul are următoarele proprietăţi: pentru orice R, S, Q relaţii binare pe E,*

0) $R \circ \Delta_E \Longleftrightarrow R \Longleftrightarrow \Delta_E \circ R$ (Δ_E este element neutru pentru compunerea relaţiilor),
1) $(R \circ S) \circ Q \Longleftrightarrow R \circ (S \circ Q)$ (asociativitatea compunerii),
2) $R \circ (S \bigvee Q) \Longleftrightarrow (R \circ S) \bigvee (R \circ Q)$,
3) $R \circ (S \bigwedge Q) \Longleftrightarrow (R \circ S) \bigwedge (R \circ Q)$,

4) $(R \bigvee S) \circ Q \Longleftrightarrow (R \circ Q) \bigvee (S \circ Q)$,
5) $(R \bigwedge S) \circ Q \Longleftrightarrow (R \circ Q) \bigwedge (S \circ Q)$.

Dem.

0): $R \circ \Delta_E \Longleftrightarrow R$ înseamnă, conform definiţiei lui $\Longleftrightarrow$, că $R \circ \Delta_E = R$, iar $R \circ \Delta_E = R \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)[(x,y) \in R \circ \Delta_E \leftrightarrow (x,y) \in R] \equiv (\forall x)(\forall y)P(x,y)$, unde am făcut notaţia $P(x,y) \equiv [(x,y) \in R \circ \Delta_E \leftrightarrow (x,y) \in R]$.
Dar Propoziţia $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ este adevărată dacă şi numai dacă predicatul $P(x,y)$ este adevărat, iar $P(x,y)$ este un predicat adevărat dacă şi numai dacă pentru orice pereche de obiecte $(a,b) \in D_P$, propoziţia $P(a,b)$ este adevărată.
Dar $P(a,b) \equiv [(a,b) \in R \circ \Delta_E \leftrightarrow (a,b) \in R]$.
Fie perechea de obiecte $(a,b) \in D_P$, fixată, altfel arbitrară; să demonstrăm că $P(a,b)$ este o propoziţie adevărată:
într-adevăr, $(a,b) \in R \circ \Delta_E \leftrightarrow$
$(\exists t)[(a,t) \in R \wedge (t,b) \in \Delta_E] \leftrightarrow [(a,b) \in R \wedge (b,b) \in \Delta_E] \leftrightarrow (a,b) \in R$,
pentru că din definiţia lui Δ_E rezultă că $t = b$, pentru că propoziţia "$(b,b) \in \Delta_E$" este adevărată (este **I**) şi deoarece $p \wedge \mathbf{I} \leftrightarrow p$, unde $p \equiv (a,b) \in R$, conform (P6) din sistemul $\mathcal{A}_1$ de tautologii. Rezultă că $(a,b) \in R \circ \Delta_E \leftrightarrow (a,b) \in R$, deoarece dacă $p \leftrightarrow q$ şi $q \leftrightarrow r$, atunci $p \leftrightarrow r$, pentru orice p,q,r propoziţii. Deci, $P(a,b)$ este propoziţie adevărată.
Rezultă, conform Principiului Generalizării, că pentru orice obiecte a,b, $P(a,b)$ este propoziţie adevărată. Deci, $R \circ \Delta_E \Longleftrightarrow R$ este adevărată.
Remarcă. O demonstraţie mai scurtă este următoarea (să lucrăm doar cu predicate):
$(x,y) \in R \circ \Delta_E \leftrightarrow (\exists t)[(x,t) \in R \wedge (t,y) \in \Delta_E] \leftrightarrow (x,y) \in R$.

La fel se demonstrează că $\Delta_E \circ R \Longleftrightarrow R$ este adevărată.

1): $(R \circ S) \circ Q \Longleftrightarrow R \circ (S \circ Q)$ înseamnă $(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q)$ şi
$(R \circ S) \circ Q = R \circ (S \circ Q) \leftrightarrow (\forall x)(\forall y)[(x,y) \in (R \circ S) \circ Q \leftrightarrow (x,y) \in R \circ (S \circ Q)] \equiv$
$(\forall x)(\forall y)P(x,y)$,
unde am făcut notaţia $P(x,y \equiv [(x,y) \in (R \circ S) \circ Q \leftrightarrow (x,y) \in R \circ (S \circ Q)]$.
Propoziţia $(\forall x)(\forall y)P(x,y)$ este adevărată dacă şi numai dacă pentru orice obiecte a,b, propoziţia $P(a,b)$ este adevărată.
Fie a,b obiecte fixate, altfel arbitrare; să demonstrăm că propoziţia $P(a,b)$ este adevărată, adică că propoziţia $(a,b) \in (R \circ S) \circ Q \leftrightarrow (a,b) \in R \circ (S \circ Q)$ este adevărată:
într-adevăr, $(a,b) \in (R \circ S) \circ Q \leftrightarrow$ (din definiţia lui $\circ$)
$(\exists t)[(a,t) \in R \circ S \wedge (t,b) \in Q] \leftrightarrow$ (din definiţia lui $\circ$)
$(\exists t)[(\exists z)[(a,z) \in R \wedge (z,t) \in S] \wedge (t,b) \in Q] \leftrightarrow$ (pentru că (t,b) nu depinde de z)
$(\exists t)(\exists z)[[(a,z) \in R \wedge (z,t) \in S] \wedge (t,b) \in Q] \leftrightarrow$ (din tautologia cuantificată VIII.2 şi (P3), asociativitatea lui $\wedge$)
$(\exists z)(\exists t)[(a,z) \in R \wedge [(z,t) \in S \wedge (t,b) \in Q]] \leftrightarrow$ (pentru că (a,z) nu depinde de t)

$(\exists z)[(a,z) \in R \wedge (\exists t)[(z,t) \in S \wedge (t,b) \in Q]] \leftrightarrow$ (din definiţia lui $\circ$)
$(\exists z)[(a,z) \in R \wedge (z,b) \in S \circ Q] \leftrightarrow$ (din definiţia lui $\circ$)
$(a,b) \in R \circ (S \circ Q)$.
Deci, $P(a,b)$ este propoziţie adevărată. Rezultă, conform Principiului Generalizării, că pentru orice a, b, propoziţia $P(a,b)$ este adevărată, deci $(R \circ S) \circ Q \Longleftrightarrow R \circ (S \circ Q)$.
Remarcă. O demonstraţie mai scurtă este următoarea (să lucrăm doar cu predicate):
$(x,y) \in (R \circ S) \circ Q \leftrightarrow (\exists t)[(x,t) \in R \circ S \wedge (t,y) \in Q] \leftrightarrow \ldots \leftrightarrow (x,y) \in R \circ (S \circ Q)$.

La fel se demonstrează (2) - (3).

4): $(x,y) \in (R \bigvee S) \circ Q \leftrightarrow$ (din definiţia lui $\circ$ şi $\bigvee$)
$(\exists t)[(x,t) \in R \cup S \wedge (t,y) \in Q] \leftrightarrow$ (din definiţia lui $\cup$)
$(\exists t)[[(x,t) \in R \vee (x,t) \in S] \wedge (t,y) \in Q] \leftrightarrow$ (din distributivitate)
$(\exists t)[[(x,t) \in R \wedge (t,y) \in Q] \vee [(x,t) \in S \wedge (t,y) \in Q]] \leftrightarrow$ (din tautologia cuantificată VII.2)
$(\exists t)[(x,t) \in R \wedge (t,y) \in Q] \vee (\exists t)[(x,t) \in S \wedge (t,y) \in Q] \leftrightarrow$ (din definiţia lui $\circ$)
$[(x,y) \in R \circ Q] \vee [(x,y) \in S \circ Q] \leftrightarrow$ (din definiţia lui $\cup$)
$(x,y) \in (R \circ Q) \cup (S \circ Q) \leftrightarrow$ (din definiţia lui $\bigvee$)
$(x,y) \in (R \circ Q) \bigvee (S \circ Q)$.

(5) se demonstrează similar. $\Box$

Corolar 6.4.5 *Fie $\mathcal{R}_E$ mulţimea tuturor relaţiilor binare pe E. Atunci structura*

$$(\mathcal{R}_E, \circ, \Delta_E)$$

este semigrup cu unitate (monoid), adică:
- $\circ$ este asociativă şi
- $R \circ \Delta_E \Longleftrightarrow \Delta_E \circ R \Longleftrightarrow R$, pentru orice $R \in \mathcal{R}_E$.

Dem. Evident, conform Propoziţiei 6.4.4,(0), (1). $\Box$

Propoziţia 6.4.6 *Inversa are următoarele proprietăţi: pentru orice R, S relaţii binare pe E,*

0) $\overline{(R^{-1})} \Longleftrightarrow (\overline{R})^{-1}$,
1) $(R^{-1})^{-1} \Longleftrightarrow R$,
2) $(R \bigwedge S)^{-1} \Longleftrightarrow R^{-1} \bigwedge S^{-1}$,
3) $(R \bigvee S)^{-1} \Longleftrightarrow R^{-1} \bigvee S^{-1}$,
4) Dacă $R \Longleftrightarrow S$, *atunci* $R^{-1} \Longleftrightarrow S^{-1}$,
5) $(R \circ S)^{-1} \Longleftrightarrow S^{-1} \circ R^{-1}$.

Dem.

0): $(x, y) \in \overline{(R^{-1})} \leftrightarrow$ (din definiţia lui $^{-}$)
$\neg[(x, y) \in R^{-1}] \leftrightarrow$ (din definiţia lui $^{-1}$)
$\neg[(y, x) \in R] \leftrightarrow$ (din definiţia lui $^{-}$)
$(y, x) \in \overline{R} \leftrightarrow$ (din definiţia lui $^{-1}$
$(x, y) \in (\overline{R})^{-1}$.

1): $(x, y) \in (R^{-1})^{-1} \leftrightarrow (y, x) \in R^{-1} \leftrightarrow (x, y) \in R$.

2): $(x, y) \in (R \bigwedge S)^{-1} \leftrightarrow (y, x) \in R \bigwedge S \leftrightarrow (y, x) \in R \cap S \leftrightarrow (y, x) \in R \wedge (y, x) \in S \leftrightarrow$
$(x, y) \in R^{-1} \wedge (x, y) \in S^{-1} \leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \cap S^{-1} \leftrightarrow (x, y) \in R^{-1} \bigwedge S^{-1}$.

3), 4) se demonstrează similar.

5): $(x, y) \in (R \circ S)^{-1} \leftrightarrow (y, x) \in R \circ S \leftrightarrow (\exists t)[(y, t) \in R \wedge (t, x) \in S] \leftrightarrow$
$(\exists t)[(t, y) \in R^{-1} \wedge (x, t) \in S^{-1}] \leftrightarrow (\exists t)[(x, t) \in S^{-1} \wedge (t, y) \in R^{-1}] \leftrightarrow (x, y) \in S^{-1} \circ R^{-1}$. □

Urmează un rezultăt care conţine în el definiţia algebrei relaţionale.

Propoziţia 6.4.7 *Fie $\mathcal{R}_E$ mulţimea tuturor relaţiilor binare pe E. Atunci structura*

$$Relb = (\mathcal{R}_E, \bigwedge, \bigvee, ^{-}, V, T, \circ, ^{-1}, \Delta_E)$$

de tipul $(2, 2, 1, 0, 0, 2, 1, 0)$ *este o algebră relaţională, adică:*

(rel1) $(\mathcal{R}_E, \bigwedge, \bigvee, ^{-}, V, T)$ *este o algebră Boole,*
(rel2) $(\mathcal{R}_E, \circ, \Delta_E)$ *este semigrup cu unitate (monoid),*
(rel3) $(R \bigvee S) \circ Q \Longleftrightarrow (R \circ Q) \bigvee (S \circ Q)$, *pentru orice* $R, S \in \mathcal{R}_E$,
(rel4) $(R \bigvee S)^{-1} \Longleftrightarrow R^{-1} \bigvee S^{-1}$, *pentru orice* $R, S \in \mathcal{R}_E$,
(rel5) $(R \circ S)^{-1} \Longleftrightarrow S^{-1} \circ R^{-1}$, *pentru orice* $R, S \in \mathcal{R}_E$,
(rel6) $(R^{-1})^{-1} \Longleftrightarrow R$, *pentru orice* $R \in \mathcal{R}_E$,
(rel7) $R \circ \overline{(R^{-1} \circ \overline{S})} \Longrightarrow S$, *pentru orice* $R, S \in \mathcal{R}_E$.

Dem.
(rel1): rezultă din Propoziţia 6.3.10;
(rel2): rezultă din Corolarul 6.4.5;
(rel3): rezultă din Propoziţia 6.4.4 (4);
(rel4): rezultă din Propoziţia 6.4.6 (3);
(rel5): rezultă din Propoziţia 6.4.6 (5);
(rel6): rezultă din Propoziţia 6.4.6 (1);
(rel7): $(x, y) \in R \circ \overline{(R^{-1} \circ \overline{S})} \leftrightarrow$ (prin definiţia lui $\circ$)
$(\exists t)[(x, t) \in R \wedge (t, y) \in \overline{(R^{-1} \circ \overline{S})}] \leftrightarrow$ (prin definiţia lui $^{-}$)
$(\exists t)[(x, t) \in R \wedge \neg[(t, y) \in R^{-1} \circ \overline{S}]] \leftrightarrow$ (prin definiţia lui $\circ$)
$(\exists t)[(x, t) \in R \wedge \neg[(\exists z)((t, z) \in R^{-1} \wedge (z, y) \in \overline{S})]] \leftrightarrow$ (prin tautologia cuantificată

I.4)
$(\exists t)[(x,t) \in R \wedge (\forall z)(\neg[(t,z) \in \overline{R^{-1}} \wedge \neg((z,y) \in S)])] \leftrightarrow$ (prin legile De Morgan)
$(\exists t)[(x,t) \in R \wedge (\forall z)[(t,z) \in \overline{(R^{-1})} \vee (z,y) \in S]] \leftrightarrow$
$(\exists t)(\forall z)[(x,t) \in R \wedge [(t,z) \in \overline{(R^{-1})} \vee (z,y) \in S]] \rightarrow$ (prin tautologia cuantificată VIII.3)
$(\forall z)(\exists t)[(x,t) \in R \wedge [(t,z) \in \overline{(R^{-1})} \vee (z,y) \in S]] \leftrightarrow$ (conform distributivităţii lui $\vee$, $\wedge$)
$(\forall z)(\exists t)[[(x,t) \in R \wedge (t,z) \in \overline{(R^{-1})}] \vee [(x,t) \in R \wedge (z,y) \in S]] \rightarrow$ (conform (G4): $p \wedge q \rightarrow p$)
$(\forall z)(\exists t)[[(x,t) \in R \wedge (t,z) \in \overline{(R^{-1})}] \vee (z,y) \in S] \leftrightarrow$
$(\forall z)[(\exists t)[(x,t) \in R \wedge (t,z) \in \overline{(R^{-1})}] \vee (z,y) \in S] \leftrightarrow$ (prin definiţia lui $\circ$)
$(\forall z)[(x,z) \in R \circ \overline{(R^{-1})} \vee (z,y) \in S]$.

Dar, $(x,z) \in R \circ \overline{(R^{-1})} \leftrightarrow (\exists m)[(x,m) \in R \wedge (m,z) \in \overline{R^{-1}}] \leftrightarrow$
$(\exists m)[(x,m) \in R \wedge \neg((m,z) \in R^{-1})] \leftrightarrow$
$(\exists m)[(x,m) \in R \wedge \neg((z,m) \in R)] \leftrightarrow$
$(\exists m)[(x,m) \in R \wedge (z,m) \in \overline{R}]$.
Atunci dacă $z = x$, rezultă că $[(x,m) \in R \wedge (x,m) \in \overline{R}] \leftrightarrow [(x,m) \in R \bigwedge \overline{R} = V]$ si $(x,m) \in V$ este un predicat întotdeauna fals, adică (x,z) nu aparţine lui $R \circ \overline{(R^{-1})}$.

Rezultă că $(\forall z)[(x,z) \in R \circ \overline{(R^{-1})} \vee (z,y) \in S]$ implică că $(x,y) \in S$, deci am demonstrat că:
$(x,y) \in R \circ \overline{(R^{-1} \circ \overline{S})} \rightarrow (x,y) \in S$, adică (rel7) este adevărată. $\square$

6.5 Baze de date relaţionale

Am folosit în această secţiune [3].

6.5.1 Reprezentarea relaţiilor. Definiţii

• Uneori (în teoria bazelor de date relaţionale), relaţiile sunt reprezentate sub forma unor tabele, în care fiecare rând (linie) reprezintă un n-uplu, iar fiecare coloană reprezintă un domeniu din cele n ale produsului cartezian (definiţia 1 (6.2.1) a produsului cartezian finit). In acest caz, coloanelor $1, 2, \ldots, n$, respectiv domeniilor corespunzătoare $D_1, D_2, \ldots, D_n$, li se asociază nume: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, numite *atribute*:

$A_1 \quad A_2 \quad \ldots \quad A_j \quad \ldots \quad A_n$

	x_{11}	x_{12}	$\ldots$	x_{1j}	$\ldots$	x_{1n}
	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
i	x_{i1}	x_{i2}	$\ldots$	x_{ij}	$\ldots$	x_{in}
	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$
	x_{m1}	x_{m2}	$\ldots$	x_{mj}	$\ldots$	x_{mn}

j

Definiţie 6.5.1

(i) O relaţie R împreună cu mulţimea atributelor sale se numeşte *schemă relaţională*.

(ii) Mulţimea tuturor schemelor relaţionale corespunzătoare unei aplicaţii se numeşte *schema bazei de date relaţionale*.

(iii) Conţinutul curent al relaţiilor la un moment dat se numeşte *bază de date relaţională*.

Dacă relaţia n-ară este R, cu atributele $A_1, A_2, \ldots, A_n$, atunci schema relaţională se notează: $R(A_1, A_2, \ldots, A_n)$.

Exemplu 6.5.2 Schema relaţională $R(A, B, C)$, unde $R = \{(a, b, c), (d, a, f)\}$ se reprezintă astfel:

	A	B	C
i	a	b	c
	d	a	f

j

• Alteori, relaţiile sunt reprezentate, echivalent, printr-o mulţime de funcţii definite pe mulţimea atributelor, cu valori în reuniunea domeniilor, cu proprietatea că valoarea corespunzătoare fiecărui atribut să aparţină domeniului asociat acelui atribut (definiţia a 2-a (6.2.2) a produsului cartezian finit):

$$R = \{f : \{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \to \bigcup_{j=1}^{n} D_j \mid \forall j \in \{1, 2, \ldots, n\}, f(A_j) \in D_j\}.$$

Exemplu 6.5.3 Pentru relaţia R din Exemplul precedent, avem, echivalent:

$$R = \{f_1, f_2\}, \quad \text{cu} \quad f_1 : \{A, B, C\} \to \bigcup_{j=1}^{3} D_j,\ f_2 : \{A, B, C\} \to \bigcup_{j=1}^{3} D_j,$$

$$f_1(A) = a,\ f_1(B) = b,\ f_1(C) = c,$$

$$f_2(A) = d,\ f_2(B) = a,\ f_2(C) = f.$$

• Trecerea de la un mod de definire a relaţiei la celălalt se face relaţiv simplu:
- O relaţie în sensul *mulţime de tupluri* se transformă într-o relaţie în sensul *mulţime de funcţii* asociind fiecărui domeniu $D_1, D_2, \ldots, D_n$ al produsului cartezian $\prod_{j=1}^{n} D_j$ câte un nume (= atribut): $A_1, A_2, \ldots, A_n$ respectiv şi definind pentru fiecare tuplu:

$$t_i = (x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ij}, \ldots, x_{in}) \in \prod_{j=1}^{n} D_j$$

funcţia

$$f_i : \{A_1, A_2, \ldots, A_j, \ldots, A_n\} \to \bigcup_{j=1}^{n} D_j$$

care verifică:

$$f_i(A_j) = x_{ij} \in D_j, \quad \text{pentru orice } j \in \{1, 2, \ldots, n\}, \quad i \in \{1, 2, \ldots, m\},$$

unde m este numărul tuplurilor (n-uplelor).
- O relaţie în sensul *mulţime de funcţii* se transformă într-o relaţie în sensul *mulţime de tupluri* impunand o relaţie de ordine *totală* pe mulţimea atributelor (printr-o corespondenţă cu mulţimea $\{1, 2, \ldots, n\}$) şi asociind apoi fiecărei funcţii tuplul obţinut din valorile funcţiei respective în ordinea $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a atributelor.

Din punctul de vedere al bazelor de date, cea de-a doua definiţie, ca *mulţime de funcţii*, este de preferat, deoarece permite prelucrarea informaţiilor corespunzătoare unui atribut *fără a cunoaşte* poziţia acelui atribut în relaţie, aceasta permiţând o mai mare independenţă de reprezentare a datelor.

6.5.2 Limbajele de prelucrare a datelor

Pentru acest model de bază de date, cel relaţional, limbajele de prelucrare a datelor se pot împărţi în două mari categorii:
I - *limbaje algebrice*, în care *cererile* sunt exprimate prin operaţiile ce trebuie aplicate relaţiilor existente în baza de date pentru a obţine *răspunsul*;
II - *limbaje cu calculul predicatelor*, în care *cererile* sunt exprimate sub forma unor mulţimi de tupluri - sau de funcţii - pentru care se specifică proprietăţile pe care trebuie să le îndeplinească sub forma unor predicate. Această categorie de limbaje se divide în două subcategorii, în funcţie de obiectele cu care lucrează predicatele, şi anume:
- limbaje cu *calcul pe tupluri*, adică obiectele sunt tupluri (Calcul de ordinul I);
- limbaje cu *calcul pe domenii*, adică obiectele sunt domeniile diferitelor atribute ale relaţiilor (Calcul de ordinul II).

Chapter 7

Sistemul formal al calculului propoziţional (L)

In acest capitol este studiat calculul propoziţional clasic (L) prin trei dintre dimensiunile sale: sintaxa, semantică şi algebra. Fiecare dintre cele trei componente este analizată atât în sine cât şi în relaţie cu celelalte două. La nivelul acestui material, cunoaşterea logicii propoziţionale este realizată prin relaţia ternară stabilită între sintaxă, semantică şi algebră.

Prima secţiune a capitolului conţine câteva exemple de descompunere ale unor texte în propoziţii elementare şi reprezentarea lor simbolică cu ajutorul conectorilor propoziţionali "şi", "sau" , "non" şi "implică". Acest exerciţiu de reprezentare simbolică este o primă sugestie asupra trecerii de la limbajul natural la limbajul formal al logicii propoziţionale.

Secţiunea 2 începe cu definirea limbajului lui L. Construcţia re la bază un alfabet în care apar numai doi conectori primari: implicaţia ($\rightarrow$) şi negaţia ($\neg$).

Prin inductie, sunt definite enunţurile lui L: ele sunt formaţiuni de simboluri ce traduc propoziţii din limbajul natural. Conjuncţia ($\wedge$), disjuncţia ($\vee$) şi echivalenţa logică ($\leftrightarrow$) sunt conectori derivaţi, definiţi cu ajutorul implicaţiei şi negaţiei.

Pasul următor este îmbogăţirea limbajului L cu o structură logică. Pornind de la trei axiome şi o singură regulă de deducţie (modus ponens), se definesc demonstraţiile formale şi deducţia din ipoteze. La capătul demonstraţiilor formale stau teoremele formale.

Subsecţiunea 1 cuprinde unele proprietăţi sintactice ale lui L. Teorema deducţiei este folosită ca instrument principal în stabilirea celor mai importante teoreme formale.

In Subsectiunea 2 este descris modul cum se realizează trecerea de sintaxa lui L la algebra Boole. Factorizând mulţimea enunţurilor lui L printr-o relaţie de echivalenţă canonică (definită in termenii echivalenţei logice), se obţine o algebră Boole, numita algebra Lindenbaum-Tarski asociată lui L. Prin această construcţie, conectorii sunt convertiţi în operaţii booleene, iar stabilirea teoremelor formale se reduce la un calcul algebric. Din acest moment, se poate urmări cum, pas cu pas, se trasează o paralelă algebrică la sintaxa lui L.

Semantica lui L este tratată in Secţiunea 3. Se defineşte noţiunea de interpretare şi valoarea de adevăr a unui enunţ într-o interpretare. Prin Teorema de completitudine, enunţurile universal adevărate (= enunţurile adevărate în orice interpretare) sunt puse faţă în faţă cu teoremele formale. Demonstraţia Teoremei de completitudine este de natură algebrică. Ideea acestei demonstraţii este folosirea Teoremei de reprezentare a lui Stone pentru a obţine interpretări.

In Subsecţiunea 1 este reluată sintaxa lui L, prin studiul mulţimilor consistente de enunţuri. Sunt definite noţiunile de model şi de deducţie semantică. Teorema de completitudine extinsă, demonstrată în această secţiune, stabileşte echivalenţa dintre deducţia formală şi deducţia semantică. Demonstraţia Teoremei de completitudine extinsă se bazează pe proprietăţile mulţimilor maximal consistente de enunţuri.

Sectiunea 4 conţine o demonstraţie a Teoremei de reprezentare a lui Stone pe baza Teoremei de completitudine.

Sectiunea 5 conţine exemple de deducţii formale.

7.1 Introducere

Calculul propoziţional studiază următorii conectori:
- conjuncţia (şi), notată $\wedge$,
- disjuncţia (sau), notată $\vee$,
- negaţia (non), notată $\neg$,
- implicaţia (dacă ... atunci ...), notată $\rightarrow$,
- echivalenţa logică (dacă şi numai dacă), notată $\leftrightarrow$.

In exemplele următoare, vom prezenta descompunerea unor texte în unităţi logice şi reprezentarea lor simbolică cu ajutorul acestori conectori.

Exemplul 1.
De te-ating, să feri în lături
De hulesc, să taci din gură,
Ce mai vrei cu-a tale sfaturi
Dacă ştii a lor măsură ?
(M. Eminescu, Glossa)

Dacă notăm:
$p_1 \equiv$ "te-ating"
$p_2 \equiv$ "să feri în lături"
$q_1 \equiv$ "hulesc"
$q_2 \equiv$ "să taci din gură"

$r_1 \equiv$ "ce mai vrei cu-a tale sfaturi"
$r_2 \equiv$ "stii a lor măsură"

atunci strofa de mai sus se va scrie simbolic:

$$(p_1 \to p_2) \wedge (q_1 \to q_2) \wedge (r_2 \to r_1)$$

Exemplul 2.
Imbracă-te în doliu, frumoasă Bucovină
Cu cipru verde-ncinge antică fruntea ta
C-acum din pleiada-ţi auroasă şi senină
Se stinse un luceafăr, se stinse o lumină,
Se stinse-o dalbă stea !
(M. Eminescu, La mormântul lui Aron Pumnul)

Dacă notăm:
$p_1 \equiv$ "îmbracă-te în doliu, frumoasă Bucovină"
$p_2 \equiv$ "cu cipru verde-ncinge antică fruntea ta"
$q_1 \equiv$ "acum din pleiada-ţi auroasă şi senină se stinse un luceafăr"
$q_2 \equiv$ "(acum din pleiada-ţi auroasă şi senină) se stinse o lumină"
$q_3 \equiv$ "(acum din pleiada-ţi auroasă şi senină) se stinse-o dalbă stea"

atunci se obţine scrierea simbolică a textului precedent:

$$(q_1 \wedge q_2 \wedge q_3) \to (p_1 \wedge p_2)$$

Exemplul 3.
Nu era azi, nici mâine, nici ieri, nici totdeauna
Căci unul erau toate şi totul era una.
(M. Eminescu, Rugăciunea unui dac)

Cu notaţiile:
$p_1 \equiv$ "era azi"
$p_2 \equiv$ "(era) mâine"
$p_3 \equiv$ "(era) ieri"
$p_4 \equiv$ "(era) dintotdeauna"
$q_1 \equiv$ "unul erau toate"
$q_2 \equiv$ "totul era una"

strofa capată forma simbolică:

$$(q_1 \wedge q_2) \to (\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg p_3 \wedge \neg p_4)$$

Exemplul 4.
Că de-i vreme rea sau bună
Vântu-mi bate, frunza-mi sună

Si de-i vreamea bună, rea
Mie-mi curge Dunărea.
(M. Eminescu, Revedere)

Notăm:
$p \equiv$ "vremea era rea"
$q \equiv$ "(vremea) era bună"
$p_1 \equiv$ "vântu-mi bate"
$q_1 \equiv$ "frunza-mi sună"
$r \equiv$ " mie-mi curge Dunărea"

Atunci strofa se reprezintă simbolic prin:

$$((p \vee q) \rightarrow (p_1 \wedge q_1)) \wedge ((q \vee p) \rightarrow r)$$

Exemplul 5.
Timpul mort şi-ntinde trupul şi devine veşnicie
Căci nimic nu se întamplă în întinderea pustie
Si în noaptea nefiinţei totul cade, totul tace
Căci înşine împăcătă reîncep-eterna pace.
(M. Eminescu, Scrisoarea I)

In acest caz, vom nota:
$p_1 \equiv$ "timpul mort şi-ntinde trupul"
$p_2 \equiv$ "devine veşnicie"
$p_3 \equiv$ "se întamplă în întinderea pustie"
$q_1 \equiv$ "înnoaptea nefiintei totul cade"
$q_2 \equiv$ "(în noaptea nefiinţei) totul tace"
$q_3 \equiv$ "înşine împacătă reîncepe-eterna pace"

Rezultă următoarea scriere simbolică a strofei:

$$(\neg p_3 \rightarrow (p_1 \wedge p_2)) \wedge (q_3 \rightarrow (q_1 \wedge q_2))$$

Exemplele de mai sus ne dau o idee despre modul în care un text scris în limbaj natural poate căpăta o înfăţişare simbolică în calculul propoziţional.

Teza fundamentală a calculului propoziţional este existenţa a două valori de adevăr: 1 (= adevărul) şi 0 (= falsul). Conectorilor $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ le corespund operaţiile algebrice pe mulţimea $L_2 = \{0, 1\}$, notate tot $\wedge, \vee, \neg, \rightarrow, \leftrightarrow$ şi definite prin tabele.

Se observă că am considerat pe L_2 structura canonică de algebră Boole.

Atunci teza bivalenţei valorilor de adevăr este completată prin ipoteza că acţiunea conectorilor calculului propoziţional se face conform regulilor calculului boolean.

De aici se poate începe formalizarea calculului propoziţional. Limbajul său formal trebuie să conţină simboluri pentru cei cinci conectori, iar enunţurile vor fi construite prin aplicarea unor reguli de combinare a simbolurilor în raport cu conectorii.

Unii conectori vor fi aleşi ca simboluri primare şi vor fi incluşi în alfabetul sistemului formal. Ceilalţi conectori vor fi definiţi cu ajutorul primilor.

Alegerea axiomelor şi regulilor de deducţie este un act capital. In primul rând, ele trebuie să asigure corectitudinea sistemului formal şi, dacă este posibil, completitudinea sa. Pentru calculul propoziţional, aceste deziderate vor fi îndeplinite.

In secţiunea următoare, vom construi limbajul calculului propoziţional cu implicaţia şi negaţia drept conectori primari. Axiomatizarea aleasă va pune în evidenţă rolul implicaţiei în definirea mecanismului inferenţial al sintaxei calculului propoziţional.

7.2 Sintaxa şi algebra calculului propoziţional

In această secţiune, vom studia sintaxa şi algebra calculului propoziţional L. Intâi este prezentată construcţia limbajului lui L: pornind de la o listă de simboluri primitive (= alfabet), sunt definite prin recurenţă enunţurile. Acestea sunt reprezentări formalizate ale propoziţiilor din limbajul natural. Urmează introducerea structurii logice a limbajului lui L. Trei axiome şi o regulă de deducţie (modus ponens) asigură definirea prin inducţie a teoremelor formale şi a deducţiei formale. Cu aceasta este pus la punct mecanismul inferenţial al lui L.

In subsecţiunea 2.1, sunt demonstrate unele proprietăţi sintactice. Teorema deducţiei este folosită în stabilirea unor teoreme formale şi a unor reguli de deducţie derivate.

Subsectiunea 2.2 conţine construcţia unei algebre Boole asociate sistemului formal L (algebra Lindenbaum-Tarski). Algebra Lindenbaum-Tarski este definită pornind de la structura logică a lui L. Proprietăţile sintaxei lui L sunt traduse în termeni booleeni, ceea ce permite prelucrarea lor algebrică. Cititorul este îndemnat să urmărească paralelismul perfect între noţiunile şi rezultatele din sintaxă şi corespondenţii lor algebrici (obtinuţi prin trecerea la algebra Lindenbaum-Tarski). Această relaţie între cele două dimensiuni ale lui L (sintaxă şi algebră) va fi completată în secţiunile următoare prin adăugarea componentei semantice.

Definiţie 7.2.1 *Alfabetul* sistemului formal al calculului propoziţional este format din următoarele simboluri:
1) variabile propoziţionale, notate: u, v, w, ... (eventual cu indici); mulţimea lor, notată V, este presupusă a fi infinită,
2) simboluri logice (conectori):
$\neg$: simbolul de negaţie (va fi citit "non"),
$\rightarrow$: simbolul de implicaţie (va fi citit "implică"),
3) parantezele (,), [,].

Pornind de la aceste simboluri primitive, vom construi cuvintele (asamblajele):

Definiţie 7.2.2 Un *cuvant* este un şir finit de simboluri primitive, scrise unul după altul.

Exemplu $u \to \neg v$, $\neg(u \to \neg v) \to w$, $u \to uv\neg$

Intuiţia ne spune că primele două cuvinte "au sens", pe când cel de-al treilea nu. Din mulţimea cuvintelor le vom selecta pe acelea care "au sens", "sunt bine formate", noţiune precizată astfel:

Definiţie 7.2.3 Se numeşte *enunţ* orice cuvânt φ care verifică una din condiţiile următoare:
(i) φ este o variabilă propoziţională,
(ii) există un enunţ ψ astfel încât $\varphi = \neg\psi$,
(iii) există enunţurile ψ, χ astfel încât $\varphi = \psi \to \chi$.

Variabilele propoziţionale se vor numi enunţuri *atomice* sau *elementare*.

Vom nota cu E mulţimea enunţurilor.

Observaţie 7.2.4 Definiţia conceptului de enunţ este dată prin inducţie. Momentul iniţial al definiţiei prin inducţie este dat de condiţia (i), iar trecerea "de la k la $k + 1$" este asigurată de (ii) şi (iii).

Pentru φ, $\psi \in E$, introducem abrevierile:
$\varphi \vee \psi = \neg\varphi \to \psi$ (disjuncţia lui φ şi ψ),
$\varphi \wedge \psi = \neg(\varphi \to \neg\psi)$ (conjuncţia lui φ şi ψ),
$\varphi \leftrightarrow \psi = (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$ (echivalenţa logică a lui φ şi ψ).

Observaţii 7.2.5

(1) In prezentarea sistemului formal al calculului propoziţional am considerat negaţia şi implicaţia drept conectori primitivi (iniţiali). Conectorii derivaţi $\vee$ (sau), $\wedge$ (şi), $\leftrightarrow$ (echivalent) au fost introduşi prin prezentările de mai sus.

(2) Există prezentări ale sistemului formal al calculului propoziţional (echivalente cu cea de mai sus) care folosesc alţi conectori primitivi.

In continuare, vom îmbogăţi limbajul calculului formal cu o structură logică: teoremele formale şi deducţia formală. Aceste două componente ale structurii logice a lui L sunt definite pe baza axiomelor lui L şi a unei reguli de deducţie (modus ponens).

Definiţie 7.2.6 O *axiomă* a sistemului formal al calculului propoziţional este un enunţ care are una din formele următoare:
(G1) $\varphi \to (\psi \to \varphi)$
(G2) $(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \chi))$
(G3) $(\neg\varphi \to \neg\psi) \to (\psi \to \varphi)$,
unde φ, ψ, χ sunt enunţuri arbitrare.

Definiţie 7.2.7 O *teoremă formală* sau pe scurt *teoremă* este un enunţ φ care verifică una din condiţiile următoare:

(T1) φ este o axiomă,
(T2) există un enunţ ψ astfel încât ψ şi $\psi \to \varphi$ sunt teoreme.

Conditia (T2) se scrie prescurtat:

$$\frac{\psi,\ \psi \to \varphi}{\varphi}$$

şi se numeşte regula de deducţie *modus ponens* (m.p.).

Vom nota cu T mulţimea teoremelor, iar faptul că φ este o teoremă va fi notat cu

$$\vdash \varphi.$$

Observaţii 7.2.8

(i) Deci, $T \subseteq E$.

(ii) Deci, mulţimea T a teoremelor este obţinută din axiome, prin aplicarea regulii de deducţie m.p..

(iii) Deci, avem:

$$\vdash (a1), \quad \vdash (a2), \quad \vdash (a3).$$

Definiţia conceptului de teoremă formală fost dată prin inducţie: axiomele (G1) - (G3) corespund momentului zero al inducţiei, iar "trecerea de la k la $k+1$" este realizată prin modus ponens.

Definiţie 7.2.9 O *demonstraţie formală* a unui enunţ φ este un şir finit de enunţuri $\psi_1, \ldots, \psi_n$ astfel încât $\psi_n = \varphi$ şi pentru orice $1 \leq i \leq n$ se verifică una din condiţiile următoare:
(1) ψ_i este o axiomă,
(2) există doi indici $k, j < i$ astfel încât $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$.

Condiţia (2) se mai scrie:

$$\frac{\psi_j,\ \psi_k = \psi_j \to \psi_i}{\psi_i}$$

şi se numeşte tot modus ponens.

Se observă că proprietăţile (1), (2) nu exprimă altceva decât condiţiile (T1), (T2), deci $\vdash \varphi$ dacă şi numai dacă există o demonstraţie formală $\psi_1, \ldots, \psi_n$ a lui φ. n se numeşte *lungimea* demonstraţiei formale. O teoremă poate avea demonstraţii formale de lungimi diferite.

• **Generalizare** Deducţia formala din ipoteze este introdusă prin definiţia următoare:

Definiţie 7.2.10 Fie Σ o mulţime de enunţuri ($\Sigma \subseteq E$) şi φ un enunţ ($\varphi \in E$).
Vom spune că enunţul φ este *dedus din ipotezele* Σ, şi vom nota

$$\Sigma \vdash \varphi,$$

dacă una din condiţiile următoare este verificată:
(D1) φ este o axiomă,
(D2) $\varphi \in \Sigma$,
(D3) există un enunţ ψ astfel încât ψ şi $\psi \to \varphi$ sunt deduse din ipotezele Σ.
Condiţia (D3) se mai scrie:

$$\frac{\Sigma \vdash \psi,\ \psi \to \varphi}{\Sigma \vdash \varphi}$$

şi se numeşte tot modus ponens.
Definiţia de mai sus este tot de tip inductiv: (D1) si (D2) constituie momentul zero al inducţiei, iar (D3) constituie trecerea "de la k la $k+1$".

Definiţie 7.2.11 O Σ-*demonstraţie formală* a lui φ este un şir de enunţuri $\psi_1, \ldots, \psi_n$ astfel încât $\psi_n = \varphi$ şi pentru orice $1 \leq i \leq n$ este verificată una din condiţiile:
(1) ψ_i este o axiomă,
(2) $\psi_i \in \Sigma$,
(3) există doi indici $k, j < i$ astfel încât $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$.

Prin compararea condiţiilor (D1) - (D3) din Definiţia 7.2.10 cu conditiile (1) - (3) din Definiţia 7.2.11, rezultă că $\Sigma \vdash \varphi$ dacă şi numai dacă există o Σ-demonstraţie formală a lui φ.

Observaţii 7.2.12
(i) Dacă $\Sigma = \emptyset$, atunci $\emptyset \vdash \varphi \iff \vdash \varphi$.
(ii) Dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$ pentru orice $\Sigma \subseteq E$.

Cu aceasta, descrierea sintactică a sistemului formal al calculului propoziţional este încheiată. *Vom nota cu L acest sistem logic.*
Observăm că toată prezentarea s-a desfăşurat la nivel simbolic: pornind de la o mulţime de simboluri, am definit enunţurile, după care am introdus structura logică a lui L: axiomele şi teoremele, şi apoi deducţia sintactică (inferenţa sintactică).

7.2.1 Proprietăţi sintactice ale lui L

In această subsecţiune, vom prezenta unele proprietăţi sintactice ale lui L, cea mai importantă dintre ele fiind *teorema deducţiei*. Folosind acest rezultat, vom stabili cele mai semnificative teoreme formale ale lui L.

Propoziţia 7.2.13 *Fie* $\Sigma, \Delta \subseteq E$ *şi* $\varphi \in E$.
(i) dacă $\Sigma \subseteq \Delta$ *şi* $\Sigma \vdash \varphi$*, atunci* $\Delta \vdash \varphi$*,*
(ii) dacă $\Sigma \vdash \varphi$*, atunci există* $\Gamma \subseteq \Sigma$ *finita, astfel încât* $\Gamma \vdash \varphi$*,*
(iii) dacă $\Sigma \vdash \chi$ *pentru orice* $\chi \in \Delta$ *şi* $\Delta \vdash \varphi$*, atunci* $\Sigma \vdash \varphi$*.*

Dem.
(i): Demonstraţia se face prin inducţie asupra conceptului $\Sigma \vdash \varphi$. Dacă $\Sigma \vdash \varphi$, atunci este verificată una din condiţiile (D1) - (D3). Le vom lua pe rând:
- dacă φ este o axiomă, atunci $\Delta \vdash \varphi$,
- dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci $\varphi \in \Delta$, deci $\Delta \vdash \varphi$,
- dacă $\Sigma \vdash \psi$ şi $\Sigma \vdash (\psi \to \varphi)$, atunci conform ipotezei inducţiei, $\Delta \vdash \psi$ şi $\Delta \vdash (\psi \to \varphi)$, deci $\Delta \vdash \varphi$.
(ii): Demonstraţia se face tot prin inducţie:
- dacă φ este axiomă, atunci $\emptyset \vdash \varphi$ şi $\emptyset \subseteq \Sigma$ este finită,
- dacă $\varphi \in \Sigma$, atunci luăm $\Gamma = \{\varphi\}$,
- dacă $\Sigma \vdash \psi$ şi $\Sigma \vdash (\psi \to \varphi)$, atunci conform ipotezei inducţiei, există Γ_1, $\Gamma_2 \subseteq \Gamma$ finite, astfel încât $\Gamma_1 \vdash \psi$, $\Gamma_2 \vdash (\psi \to \varphi)$; luăm $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ şi aplicăm (i).
(iii): Exerciţiu. □

Propoziţia 7.2.14 *(Principiul identităţii)*
Pentru orice enunţ φ, $\vdash (\varphi \to \varphi)$.

Dem. Următoarea listă de enunţuri este o demonstraţie formală a lui $\vdash (\varphi \to \varphi)$:

$\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)$	(G1)
$[\varphi \to ((\varphi \to \varphi) \to \varphi)] \to [(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)]$	(G2)
$(\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\varphi \to \varphi)$	m.p.
$\varphi \to (\varphi \to \varphi)$	(G1)
$\varphi \to \varphi$	m.p.

□

Observaţie 7.2.15 Principiul identitatii in forma $\vdash \neg\varphi \to \neg\varphi$ conduce la $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ (Principiul terţului exclus).

Propoziţia 7.2.16 *(Principiul terţului exclus)*
Pentru orice φ*,*

$$\vdash (\varphi \vee \neg\varphi).$$

Dem. $\varphi \vee \neg\varphi = \neg\varphi \to \neg\varphi$ şi $\vdash (\neg\varphi \to \neg\varphi)$, conform Principiului identităţii. □

Teorema 7.2.17 *(Teorema deducţiei)*
Dacă $\Sigma \subseteq E$ *şi* φ, $\psi \in E$*, atunci:*

$$\Sigma \vdash (\varphi \to \psi) \iff \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Dem.
($\Longrightarrow$): Se aplică Propoziţia 7.2.13, (i) şi modus ponens.
($\Longleftarrow$): Prin inducţie, după modul cum este definit $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Considerăm următoarele cazuri:
- (1) ψ este o axiomă.
Cum $\vdash \varphi$ şi $\psi \to (\varphi \to \psi)$, conform (G1), atunci $\vdash (\varphi \to \psi)$ prin m.p., deci $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$.
- (2) $\psi \in \Sigma \cup \{\varphi\}$, cu două subcazuri:
  (a) $\psi \in \Sigma$: din $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$ se deduce $\Sigma \vdash \varphi \to \psi$,
  (b) $\psi \in \{\varphi\}$: se aplică Principiul identităţii: $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$.
- (3) Există $\alpha \in E$ astfel încât $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$ şi $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha \to \psi$. Aplicând ipoteza inducţiei, rezultă $\Sigma \vdash (\varphi \to \alpha)$ şi $\Sigma \vdash (\varphi \to (\alpha \to \psi))$. De asemenea,

$$\Sigma \vdash (\varphi \to (\alpha \to \psi)) \to ((\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \psi)) \quad \text{(G2)}$$

Aplicând de două ori m.p., se obţine $\Sigma \vdash (\varphi \to \psi)$.

In demonstraţia de mai sus a implicaţiei ($\Longleftarrow$), cazurile (1) şi (2) reprezintă momentul zero al inducţiei, iar cazul (3) constituie trecerea "de la k la $k+1$". $\square$

Observaţie 7.2.18 In demonstrarea Principiului identităţii şi a Teoremei deducţiei, nu au intervenit decât axiomele (G1), (G2) şi m.p.. Aceasta arată că cele două rezultate sunt valabile în orice sistem logic în care apar (G1), (G2) şi modus ponens.

Teorema deducţiei este un instrument eficace în stabilirea teoremelor formale. Această afirmaţie va fi probată prin demonstraţiile propoziţiilor următoare.

Propoziţia 7.2.19

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)).$$

Dem. Vom aplica succesiv m.p. şi apoi Teorema deducţiei:

$$\begin{array}{lcll}
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} & \vdash & \varphi & \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} & \vdash & \varphi \to \psi & \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} & \vdash & \psi & \text{m.p.} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} & \vdash & \psi \to \chi & \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} & \vdash & \chi & \text{m.p.} \\
\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi\} & \vdash & \varphi \to \chi & \text{Teorema deducţiei} \\
\{\varphi \to \psi\} & \vdash & (\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi) & \text{Teorema deducţiei} \\
 & \vdash & (\varphi \to \psi) \to & \\
 & & ((\psi \to \chi) \to (\varphi \to \chi)) & \text{Teorema deducţiei.}
\end{array}$$

$\square$

Privind ultimele cinci rânduri ale demonstraţiei precedente, ideea ei devine transparentă. Prin aplicarea repetată a Teoremei deducţiei, totul se reduce la a stabili deducţia formală

$$\{\varphi \to \psi, \psi \to \chi, \varphi\} \vdash \chi,$$

ceea ce este foarte uşor. Această observaţie este utilă şi în obţinerea demonstraţiilor propoziţiilor următoare.

Corolar 7.2.20

$$\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \chi \quad \textit{implică} \quad \vdash \varphi \to \chi.$$

Dem. Din Propoziţia 7.2.19, aplicând de două ori modus ponens. □

Observaţie 7.2.21 Din Corolarul 7.2.20, se deduce următoarea regulă de deducţie derivată:

$$\text{(R1)} \qquad \frac{\varphi \to \psi,\ \psi \to \chi}{\varphi \to \chi}$$

In stabilirea teoremelor formale, este mai eficient să aplicăm (R1) în loc de Propoziţia 7.2.19. Acelaşi lucru este valabil şi în cazul regulilor de deducţie derivate din alte teoreme formale.

Propoziţia 7.2.22

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\psi \to (\varphi \to \chi)).$$

Dem. Aplicăm m.p. şi apoi Teorema deducţiei:

$$\begin{array}{lcll}
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} & \vdash & \varphi & \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} & \vdash & \varphi \to (\psi \to \chi) & \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} & \vdash & \psi \to \chi & \text{m.p.} \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} & \vdash & \psi & \\
\{\varphi, \psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} & \vdash & \chi & \text{m.p.} \\
\{\psi, \varphi \to (\psi \to \chi)\} & \vdash & \varphi \to \chi & \text{Teorema deducţiei} \\
\{\varphi \to (\psi \to \chi)\} & \vdash & \psi \to (\varphi \to \chi) & \text{Teorema deducţiei} \\
 & \vdash & (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to & \\
 & & (\psi \to (\varphi \to \chi)) & \text{Teorema deducţiei.}
\end{array}$$

□

Observaţie 7.2.23 Propoziţia 7.2.22 corespunde următoarei reguli de deducţie derivată:

$$\text{(R2)} \qquad \frac{\varphi \to (\psi \to \chi)}{\psi \to (\varphi \to \chi)}$$

Propoziţia 7.2.24

$$\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \psi).$$

Dem. Aplicăm m.p. şi apoi Teorema deducţiei:

$$\begin{array}{lll r}
\{\varphi, \neg\varphi\} & \vdash & \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg\varphi) & \text{(G1)} \\
\{\varphi, \neg\varphi\} & \vdash & \neg\varphi & \\
\{\varphi, \neg\varphi\} & \vdash & \neg\psi \to \neg\varphi & \text{m.p.} \\
\{\varphi, \neg\varphi\} & \vdash & (\neg\psi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \psi) & \text{(G3)} \\
\{\varphi, \neg\varphi\} & \vdash & \varphi \to \psi & \text{m.p.} \\
\{\varphi, \neg\varphi\} & \vdash & \varphi & \\
\{\varphi, \neg\varphi\} & \vdash & \psi & \text{m.p.} \\
\{\varphi\} & \vdash & \neg\varphi \to \psi & \text{Teorema deducţiei} \\
 & \vdash & \varphi \to (\neg\varphi \to \psi) & \text{Teorema deducţiei.}
\end{array}$$

□

Propoziţia 7.2.25

$$\vdash \neg\varphi \to (\varphi \to \psi).$$

Dem. Din Propoziţia 7.2.24, conform (R2). □

Exerciţiu 7.2.26 Să se demonstreze Propoziţia 7.2.25 în acelaşi mod ca Propoziţia 7.2.24, folosind Teorema deducţiei.

Propoziţia 7.2.27

$$\vdash \neg\neg\varphi \to \varphi.$$

Dem. Aplicăm m.p. şi apoi Teorema deducţiei:

$$\begin{array}{lll r}
\{\neg\neg\varphi\} & \vdash & \neg\neg\varphi \to (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) & \text{(G1)} \\
\{\neg\neg\varphi\} & \vdash & \neg\neg\varphi & \\
\{\neg\neg\varphi\} & \vdash & \neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi & \text{m.p.} \\
\{\neg\neg\varphi\} & \vdash & (\neg\neg\neg\neg\varphi \to \neg\neg\varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) & \text{(G3)} \\
\{\neg\neg\varphi\} & \vdash & \neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi & \text{m.p.} \\
\{\neg\neg\varphi\} & \vdash & (\neg\varphi \to \neg\neg\neg\varphi) \to (\neg\neg\varphi \to \varphi) & \text{(G3)} \\
\{\neg\neg\varphi\} & \vdash & \neg\neg\varphi \to \varphi & \text{m.p.} \\
\{\neg\neg\varphi\} & \vdash & \varphi & \text{m.p.} \\
 & \vdash & \neg\neg\varphi \to \varphi & \text{Teorema deducţiei.}
\end{array}$$

□

Propoziţia 7.2.28

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Dem. Aplicăm m.p. şi Teorema deductiei:

$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	Propoziţia 7.2.27
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\varphi$	
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash$	φ	m.p.
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash$	$\varphi \to \psi$	
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash$	ψ	m.p.
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash$	$\neg\psi$	
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash$	$\neg\psi \to (\psi \to \neg\neg\psi)$	Propoziţia 7.2.25
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi, \neg\neg\varphi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\psi$	m.p. de două ori
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi$	Teorema deducţiei
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$	$\vdash$	$(\neg\neg\varphi \to \neg\neg\psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	(G3)
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$	$\vdash$	$\neg\psi \to \neg\varphi$	m.p.
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$	$\vdash$	$\neg\psi$	
$\{\varphi \to \psi, \neg\psi\}$	$\vdash$	$\neg\varphi$	m.p.
$\{\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\neg\psi \to \neg\varphi$	Teorema deducţiei
	$\vdash$	$(\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$	Teorema deducţiei.

□

Propoziţia 7.2.29

$$\vdash \varphi \to \neg\neg\varphi.$$

Dem.

$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	Propoziţia 7.2.27
$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\neg\varphi$	
$\{\varphi, \neg\neg\neg\varphi\}$	$\vdash$	$\neg\varphi$	m.p.
$\{\varphi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi$	Teorema deducţiei
$\{\varphi\}$	$\vdash$	$(\neg\neg\neg\varphi \to \neg\varphi) \to (\varphi \to \neg\neg\varphi)$	(G3)
$\{\varphi\}$	$\vdash$	$\varphi \to \neg\neg\varphi$	m.p.
$\{\varphi\}$	$\vdash$	φ	
$\{\varphi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\varphi$	m.p.
	$\vdash$	$\varphi \to \neg\neg\varphi$	Teorema deducţiei.

□

Propoziţia 7.2.30

$$\vdash (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi.$$

Dem.

$$\begin{array}{lll r}
\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} & \vdash & \neg\neg\varphi \to \varphi & \text{Propoziţia 7.2.27} \\
\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} & \vdash & \neg\neg\varphi & \\
\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} & \vdash & \varphi & \text{m.p.} \\
\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} & \vdash & \varphi \to \neg\varphi & \\
\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} & \vdash & \neg\varphi & \text{m.p.} \\
\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} & \vdash & \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)) & \text{Propoziţia 7.2.24} \\
\{\varphi \to \neg\varphi, \neg\neg\varphi\} & \vdash & \neg(\varphi \to \varphi) & \text{m.p. de două ori} \\
\{\varphi \to \neg\varphi\} & \vdash & \neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi) & \text{Teorema deducţiei} \\
\{\varphi \to \neg\varphi\} & \vdash & (\neg\neg\varphi \to \neg(\varphi \to \varphi)) \to & \\
 & & ((\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi) & \text{(G3)} \\
\{\varphi \to \neg\varphi\} & \vdash & (\varphi \to \varphi) \to \neg\varphi & \text{m.p.} \\
\{\varphi \to \neg\varphi\} & \vdash & \varphi \to \varphi & \text{Propoziţia 7.2.13} \\
\{\varphi \to \neg\varphi\} & \vdash & \neg\varphi & \text{m.p.} \\
 & \vdash & (\varphi \to \neg\varphi) \to \neg\varphi & \text{Teorema deducţiei.}
\end{array}$$

□

Propoziţia 7.2.31

$$\vdash \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)).$$

Dem.

$$\begin{array}{lll r}
\{\varphi, \varphi \to \psi\} & \vdash & \psi & \text{m.p.} \\
\{\varphi\} & \vdash & (\varphi \to \psi) \to \psi & \text{Teorema deducţiei} \\
\{\varphi\} & \vdash & ((\varphi \to \psi) \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi)) & \text{Propoziţia 7.2.28} \\
\{\varphi\} & \vdash & \neg\psi \to \neg(\varphi \to \varphi) & \text{m.p.} \\
 & \vdash & \varphi \to (\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi)) & \text{Teorema deducţiei.}
\end{array}$$

□

Propoziţia 7.2.32

$$\vdash \varphi \to (\varphi \vee \psi).$$

Dem. Este transcrierea Propoziţiei 7.2.24. □

Propoziţia 7.2.33

$$\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi).$$

Dem. $\vdash \psi \to (\varphi \vee \psi)$ se scrie echivalent $\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \psi)$, pentru care avem demonstraţia formală:

$$\begin{array}{lll l}
\{\psi, \neg\varphi\} & \vdash & \psi & \\
\{\psi\} & \vdash & \neg\varphi \to \psi & \text{Teorema deducţiei} \\
 & \vdash & \psi \to (\neg\varphi \to \psi) & \text{Teorema deducţiei.}
\end{array}$$

□

Propoziţia 7.2.34

$$\vdash (\varphi \to \chi) \to [(\psi \to \chi) \to ((\varphi \vee \psi) \to \chi)].$$

Dem.

$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\neg\varphi \to \psi$	
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\varphi \to \chi$	
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\neg\varphi \to \chi$	(R1)
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\neg\chi \to \neg\neg\varphi$	Prop. 7.2.28
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	Prop. 7.2.27
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\neg\chi \to \varphi$	(R1)
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\varphi \to \chi$	
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\neg\chi \to \chi$	(R1)
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$(\neg\chi \to \chi) \to (\neg\chi \to \neg\neg\chi)$	Prop. 7.2.28
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\neg\chi \to \neg\neg\chi$	m.p.
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$(\neg\chi \to \neg\neg\chi) \to \neg\neg\chi$	Prop. 7.2.30
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\chi$	m.p.
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\chi \to \chi$	Prop. 7.2.27
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi, \neg\varphi \to \psi\}$	$\vdash$	χ	m.p.
$\{\varphi \to \chi, \psi \to \chi\}$	$\vdash$	$(\neg\varphi \to \psi) \to \chi$	T. deducţiei
$\{\varphi \to \chi\}$	$\vdash$	$(\psi \to \chi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \chi)$	T. deducţiei
	$\vdash$	$(\varphi \to \chi) \to$ $[(\psi \to \chi) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to \chi)]$	T. deducţiei.

□

Observaţie 7.2.35 Propoziţia 7.2.34 implică regula deducţiei derivată:

$$\text{(R3)} \qquad \frac{\varphi \to \chi,\ \psi \to \chi}{(\varphi \vee \psi) \to \chi}$$

Propoziţia 7.2.36

$$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi.$$

Dem.

$\vdash$	$\varphi \to (\neg\varphi \to \neg\psi$	Propoziţia 7.2.24
$\vdash$	$\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(R2)
$\vdash$	$(\neg\varphi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi)$	Propoziţia 7.2.28
$\vdash$	$\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\varphi$	m.p.
$\vdash$	$\neg\neg\varphi \to \varphi$	Propoziţia 7.2.27
$\vdash$	$\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \varphi$	(R1).

Am obţinut exact $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \varphi$. □

Propoziţia 7.2.37

$$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \psi.$$

Dem.

$\vdash$	$\neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)$	(G1)
$\vdash$	$(\neg\psi \to (\varphi \to \neg\psi)) \to (\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\psi)$	Propoziţia 7.2.28
$\vdash$	$\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \neg\neg\psi)$	m.p.
$\vdash$	$\neg\neg\psi \to \psi$	Propoziţia 7.2.27
$\vdash$	$\neg(\varphi \to \neg\psi) \to \psi$	(R1).

Ultima teoremă formală este chiar $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to \psi$. □

Propoziţia 7.2.38

$$\vdash (\chi \to \varphi) \to [(\chi \to \psi) \to (\chi \to (\varphi \wedge \psi))].$$

Dem.

$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi, \chi\}$	$\vdash$	χ	
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi, \chi\}$	$\vdash$	$\chi \to \varphi$	
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi, \chi\}$	$\vdash$	φ	m.p.
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi, \chi\}$	$\vdash$	ψ	analog
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi, \chi\}$	$\vdash$	$\psi \to \neg\neg\psi$	Prop. 7.2.29
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi, \chi\}$	$\vdash$	$\neg\neg\psi$	m.p.
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi, \chi\}$	$\vdash$	$\varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg(\varphi \to \psi))$	Prop. 7.2.25
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi, \chi\}$	$\vdash$	$\neg(\varphi \to \psi)$	m.p. de două ori
$\{\chi \to \varphi, \chi \to \psi\}$	$\vdash$	$\chi \to \neg(\varphi \to \psi)$	T. deducţiei
$\{\chi \to \varphi\}$	$\vdash$	$(\chi \to \psi) \to (\chi \to \neg(\varphi \to \psi))$	T. deducţiei
	$\vdash$	$(\chi \to \varphi) \to$ $[(\chi \to \psi) \to (\chi \to \neg(\varphi \to \psi))]$	T. deducţiei.

□

Observaţie 7.2.39 Propoziţiei 7.2.38 îi este asociată următoarea regulă de deducţie derivată:

$$\text{(R4)} \qquad \frac{\chi \to \varphi,\ \chi \to \psi}{\chi \to (\varphi \wedge \psi)}$$

Propoziţia 7.2.40

$$\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi).$$

Dem.

$\vdash$	$(\varphi \wedge \psi) \to \chi$	Propoziţia 7.2.37
$\vdash$	$(\varphi \wedge \psi) \to \varphi$	Propoziţia 7.2.36
$\vdash$	$(\varphi \wedge \psi) \to (\psi \wedge \varphi)$	(R4).

□

Propoziţia 7.2.41

$$\vdash \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)).$$

Dem.

$$\begin{array}{lcll}
\{\varphi,\psi\} & \vdash & \varphi & \\
\{\varphi,\psi\} & \vdash & \psi & \\
\{\varphi,\psi\} & \vdash & \psi \to \neg\neg\psi & \text{Propoziţia 7.2.29} \\
\{\varphi,\psi\} & \vdash & \neg\neg\psi & \text{m.p.} \\
\{\varphi,\psi\} & \vdash & \varphi \to (\neg\neg\psi \to \neg(\varphi \to \neg\psi)) & \text{Propoziţia 7.2.31} \\
\{\varphi,\psi\} & \vdash & \neg(\varphi \to \neg\psi) & \text{m.p. de două ori} \\
 & \vdash & \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi)) & \text{Teorema deducţiei de două ori.}
\end{array}$$

□

Propoziţia 7.2.42

$$\vdash [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)] \to ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi).$$

Dem.

$$\begin{array}{cll}
\vdash & (\varphi \wedge \chi) \to \varphi & \text{Propoziţia 7.2.36} \\
\vdash & \psi \to (\varphi \vee \psi) & \text{Propoziţia 7.2.33} \\
\vdash & (\varphi \wedge \chi) \to (\varphi \vee \psi) & \\
\vdash & (\varphi \wedge \chi) \to \chi & \text{(R1)} \\
\vdash & (\varphi \wedge \chi) \to (\varphi \vee \psi) \wedge \chi & \text{(R4)} \\
\vdash & (\psi \wedge \chi) \to (\varphi \vee \psi) \wedge \chi & \text{analog} \\
\vdash & [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)] \to ((\varphi \vee \psi) \wedge \chi) & \text{(R3).}
\end{array}$$

□

Propoziţia 7.2.43

$$\vdash (\chi \to \theta) \to [(\varphi \to (\psi \to \chi)) \to (\varphi \to (\psi \to \theta))].$$

Dem.

$$\begin{array}{lcll}
\{\chi \to \theta, \varphi \to (\psi \to \chi), \varphi, \psi\} & \vdash & \varphi \to (\psi \to \chi) & \\
\{\chi \to \theta, \varphi \to (\psi \to \chi), \varphi, \psi\} & \vdash & \varphi & \\
\{\chi \to \theta, \varphi \to (\psi \to \chi), \varphi, \psi\} & \vdash & \psi \to \chi & \text{m.p.} \\
\{\chi \to \theta, \varphi \to (\psi \to \chi), \varphi, \psi\} & \vdash & \psi & \\
\{\chi \to \theta, \varphi \to (\psi \to \chi), \varphi, \psi\} & \vdash & \chi & \text{m.p.} \\
\{\chi \to \theta, \varphi \to (\psi \to \chi), \varphi, \psi\} & \vdash & \chi \to \theta & \\
\{\chi \to \theta, \varphi \to (\psi \to \chi), \varphi, \psi\} & \vdash & \theta & \text{m.p.}
\end{array}$$

Se aplică apoi Teorema deducţiei de patru ori. □

Propoziţia 7.2.44

$$\vdash (\varphi \to (\psi \to \chi)) \to ((\varphi \wedge \psi) \to \chi).$$

Dem.

$$\begin{array}{lcll}
\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} & \vdash & \varphi \wedge \psi & \\
\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} & \vdash & (\varphi \wedge \psi) \to \varphi & \\
\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} & \vdash & \varphi & \text{m.p.} \\
\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} & \vdash & \psi & \text{analog} \\
\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} & \vdash & \varphi \to (\psi \to \chi) & \\
\{\varphi \to (\psi \to \chi), \varphi \wedge \psi\} & \vdash & \chi & \text{m.p. de două ori.}
\end{array}$$

Se aplică apoi Teorema deducţiei de două ori. □

Propoziţia 7.2.45

$$\vdash [(\varphi \wedge \psi) \to \chi] \to [\varphi \to (\psi \to \chi)].$$

Dem.

$\{(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \varphi, \psi\}$	$\vdash$	φ	
$\{(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \varphi, \psi\}$	$\vdash$	ψ	
$\{(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \varphi, \psi\}$	$\vdash$	$\varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$	Propoziţia 7.2.41
$\{(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \varphi, \psi\}$	$\vdash$	$\varphi \wedge \psi$	m.p. de două ori
$\{(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \varphi, \psi\}$	$\vdash$	$(\varphi \wedge \psi) \to \chi$	
$\{(\varphi \wedge \psi) \to \chi, \varphi, \psi\}$	$\vdash$	χ	m.p.

Se aplică apoi Teorema deducţiei de trei ori. □

Propoziţia 7.2.46

$$\vdash (\varphi \vee \psi) \to (\chi \to [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)]).$$

Dem. Conform Teoremei deducţiei, se reduce la a demonstra:

$$\{\varphi \vee \psi, \chi\} \vdash \neg(\varphi \wedge \chi) \to (\psi \wedge \chi),$$

ceea ce este totuna cu

$$\{\varphi \vee \psi, \chi\} \vdash \neg\neg(\varphi \to \neg\chi) \to \neg(\psi \to \neg\chi).$$

Aplicând Teorema deductiei, se reduce la a demonstra:

$$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\} \vdash \neg(\psi \to \neg\chi).$$

$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\}$	$\vdash$	$\neg\neg(\varphi \to \neg\chi)$	
$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\}$	$\vdash$	$\varphi \to \neg\chi$	Prop. 7.2.27, m.p.
$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\}$	$\vdash$	$\chi \to \neg\varphi$	(G3), m.p.
$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\}$	$\vdash$	$\neg\varphi \to \psi$	
$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\}$	$\vdash$	$\chi \to \psi$	(R1)
$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\}$	$\vdash$	χ	
$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\}$	$\vdash$	ψ	m.p.
$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\}$	$\vdash$	$\psi \to (\chi \to \neg(\psi \to \neg\chi))$	Prop. 7.2.31
$\{\neg\varphi \to \psi, \chi, \neg\neg(\varphi \to \neg\chi)\}$	$\vdash$	$\neg(\psi \to \neg\chi)$	m.p. de două ori.

□

Propoziţia 7.2.47

$$\vdash [(\varphi \vee \psi) \wedge \chi] \to [(\varphi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi)].$$

Dem. Din Propoziţia 7.2.46, cu ajutorul Propoziţiilor 7.2.44 şi 7.2.45. □

Propoziţia 7.2.48 *Pentru orice enunţuri φ şi ψ, avem:*

$$(1)\ \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi \quad \text{şi} \quad (2)\ \vdash \psi \to (\varphi \vee \neg\varphi)$$

Dem. Pentru (1) avem următoarea demonstraţie formală:

$\vdash$	$\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)$	Propoziţia 7.2.24
$\vdash$	$(\varphi \to (\neg\varphi \to \psi)) \to ((\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi)$	Propoziţia 7.2.44
$\vdash$	$(\varphi \wedge \neg\varphi) \to \psi$	m.p.

Conform Principiului identitatii, $\{\psi\} \vdash \neg\varphi \to \neg\varphi$, de unde, prin Teorema deducţiei, $\vdash \psi \to (\neg\varphi \to \neg\varphi)$, adică (2). □

Propoziţia 7.2.49

$$\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi).$$

Propoziţia 7.2.50

$$\vdash (\varphi \to \varphi') \to [(\psi \to \psi') \to ((\varphi' \to \psi) \to (\varphi \to \psi'))].$$

Dem.

$\{\varphi \to \varphi', \psi \to \psi', \varphi' \to \psi\}$	$\vdash$	$(\varphi \to \varphi') \to [(\varphi' \to \psi) \to (\varphi \to \psi)]$	P. 7.2.19
$\{\varphi \to \varphi', \psi \to \psi', \varphi' \to \psi\}$	$\vdash$	$\varphi \to \varphi'$	
$\{\varphi \to \varphi', \psi \to \psi', \varphi' \to \psi\}$	$\vdash$	$(\varphi' \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$	m.p.
$\{\varphi \to \varphi', \psi \to \psi', \varphi' \to \psi\}$	$\vdash$	$\varphi' \to \psi$	
$\{\varphi \to \varphi', \psi \to \psi', \varphi' \to \psi\}$	$\vdash$	$\varphi \to \psi$	m.p.
$\{\varphi \to \varphi', \psi \to \psi', \varphi' \to \psi\}$	$\vdash$	$(\varphi \to \psi) \to [(\psi \to \psi') \to (\varphi \to \psi')]$	P. 7.2.19
$\{\varphi \to \varphi', \psi \to \psi', \varphi' \to \psi\}$	$\vdash$	$(\psi \to \psi') \to (\varphi \to \psi')$	m.p.
$\{\varphi \to \varphi', \psi \to \psi', \varphi' \to \psi\}$	$\vdash$	$\psi \to \psi'$	
$\{\varphi \to \varphi', \psi \to \psi', \varphi' \to \psi\}$	$\vdash$	$\varphi \to \psi'$	m.p.
$\{\varphi \to \varphi', \psi \to \psi'\}$	$\vdash$	$(\varphi' \to \psi) \to (\varphi \to \psi')$	T.d.
$\{\varphi \to \varphi'\}$	$\vdash$	$(\psi \to \psi') \to ((\varphi' \to \psi) \to (\varphi \to \psi'))$	T.d.
$\{\emptyset\}$	$\vdash$	$(\varphi \to \varphi') \to [(\psi \to \psi') \to ((\varphi' \to \psi) \to (\varphi \to \psi'))]$	T.d.

□

Corolar 7.2.51

$$\vdash (\varphi \to \varphi'),\ \vdash (\psi \to \psi') \quad \textit{implică} \quad \vdash (\varphi' \to \psi) \to (\varphi \to \psi').$$

Dem. Din Propoziţia 7.2.50, aplicând de două ori modus ponens. □

Observaţie 7.2.52 Din Corolarul 7.2.51, se deduce următoarea regulă de deducţie derivată:

$$\text{(RX)} \qquad \frac{\varphi \to \varphi',\ \psi \to \psi'}{(\varphi' \to \psi) \to (\varphi \to \psi')}$$

Propoziţia 7.2.53 *Fie $\Gamma \subseteq E$ şi $\varphi \in E$. Atunci*
$\Gamma \vdash \varphi$ dacă şi numai dacă există $\gamma_1, \ldots \gamma_n \in \Gamma$, astfel încât

$$\vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \gamma_i \to \varphi. \tag{7.1}$$

Dem.
$\Longrightarrow$: Dacă $\Gamma \vdash \varphi$, atunci conform Propoziţie 7.2.13 (ii), există $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, astfel încât

$$\{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\} \vdash \varphi \tag{7.2}$$

Aplicând de n ori Teorema deducţiei, obţinem:

$$\vdash \gamma_1 \to (\gamma_2 \to \ldots \to (\gamma_n \to \varphi) \ldots). \tag{7.3}$$

Tinând cont de Propoziţia 7.2.44, obţinem (7.1).
$\Longleftarrow$: Dacă (7.1) are loc, cu $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, atunci conform Propoziţiei 7.2.45, deducem (7.3). Din Teorema deducţiei aplicată în sens invers, obţinem (7.2), deci $\Gamma \vdash \varphi$. □

Propoziţia precedentă arată cum deducţia formală poate fi exprimată în termenii unor teoreme formale. In cazul unor sisteme logice (de exemplu, logica modală), este convenabil ca noţiunea de deducţie să fie introdusă prin condiţia din Propoziţia 7.2.53.

Definiţie 7.2.54 O mulţime nevidă Σ de enunţuri se numeşte *sistem deductiv* dacă, pentru orice enunţ φ, $\Sigma \vdash \varphi$ implică $\varphi \in \Sigma$.
Cu alte cuvinte, un sistem deductiv este o mulţime de enunţuri închisă la deducţii.

Lema 7.2.55 *Dacă Σ este o mulţime de enunţuri, atunci sunt echivalente următoarele:*
(a) Σ este un sistem deductiv,
(b) Σ contine mulţimea teoremelor formale şi α, $\alpha \to \beta \in \Sigma$ implică $\beta \in \Sigma$.

Dem.
(a) $\Longrightarrow$ (b): Dacă $\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \vdash \varphi$, deci $\varphi \in \Sigma$. Presupunem că α, $\alpha \to \beta \in \Sigma$, deci $\Sigma \vdash \alpha$, $\Sigma \vdash \alpha \to \beta$, de unde $\Sigma \vdash \beta$, conform m.p. Rezultă $\beta \in \Sigma$.
(b) $\Longrightarrow$ (a): Σ este o mulţime nevidă. Presupunem $\Sigma \vdash \varphi$. Conform Propoziţiei 7.2.13 (ii), există $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$ astfel încât $\{\sigma_1, \ldots, \sigma_n\} \vdash \varphi$. Aplicând Teorema deducţiei, obţinem:

$$\vdash \sigma_1 \to (\ldots \to (\sigma_n \to \varphi) \ldots).$$

Cum $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma$, rezultă $\varphi \in \Sigma$. □

Vom nota cu $D(\Sigma)$ *sistemul deductiv generat de* Σ, adică intersecţia sistemelor deductive ce includ pe Σ. Se poate arăta că

$$D(\Sigma) = \{\varphi \in \Sigma \mid \Sigma \vdash \varphi\}.$$

Exerciţiu 7.2.56 Fie $\Sigma, \Sigma_1, \Sigma_2 \subseteq E$. Să se arate că:
(a) $D(\Sigma) = \{\varphi \in E \mid$ există $\sigma_1, \ldots, \sigma_n \in \Sigma, \vdash \bigwedge_{i=1}^{n} \sigma_i \to \varphi\}$.
(b) $\Sigma \subseteq D(\Sigma)$.
(c) $\Sigma_1 \subseteq \Sigma_2$ implică $D(\Sigma_1) \subseteq D(\Sigma_2)$.
(d) $D(D(\Sigma)) = D(\Sigma)$.
(e) $D(\Sigma) = \bigcup\{D(\Gamma) \mid \Gamma \subseteq E,\ \Gamma$ finită$\}$.

Considerăm funcţia $D(\cdot) : \mathcal{P}(E) \longrightarrow \mathcal{P}(E)$, definită de asocierea $\Sigma \longmapsto D(\Sigma)$. Conform proprietăţilor (b) - (d) din Exerciţiul 7.2.56, $D(\cdot)$ este un operator de închidere. Pentru orice familie $(\Sigma_i)_{i\in I}$ de părţi ale lui E, notăm

$$\prod_{i\in I} \Sigma_i = \bigcap_{i\in I} \Sigma_i, \quad \coprod_{i\in I} \Sigma_i = D(\bigcup_{i\in I} \Sigma_i).$$

Familia sistemelor deductive ale lui L este o latice completă în raport cu operaţiile infinite $\prod$ şi $\coprod$ introduse mai sus.

Lema 7.2.57 *Fie $\Gamma \subseteq E$ şi $\varphi, \psi \in E$. Atunci:*

$$\Gamma \vdash (\varphi \wedge \psi) \Longleftrightarrow \Gamma \vdash \varphi \text{ şi } \Gamma \vdash \psi.$$

Dem. Prezentăm demonstraţia pentru cazul particular $\Gamma = \emptyset$.

$\Longrightarrow$: Presupunem $\vdash \varphi$ şi $\vdash \psi$. Conform Propoziţiei 7.2.41, avem $\vdash \varphi \to (\psi \to (\varphi \wedge \psi))$, de unde rezultă, aplicând m.p. de două ori, că $\vdash (\varphi \wedge \psi)$.

$\Longleftarrow$: Rezultă din Propoziţiile 7.2.36 şi 7.2.40. □

7.2.2 Algebra Lindenbaum-Tarski - varianta 1

Algebra Lindenbaum-Tarski a calculului propoziţional L este o algebră Boole asociată în mod canonic lui L. Ca mulţime, ea se obţine prin factorizarea lui E la o relaţie de echivalenţă definită prin conectorul $\leftrightarrow$. Conectorii $\vee, \wedge$ şi $\neg$ definesc pe mulţimea cât operaţii booleene. Proprietăţile sintactice ale lui L se reflectă în proprietăţi ale algebrei Lindenbaum-Tarski, realizându-se trecerea de la sintaxă la algebră. Urmând această cale, o problemă de sintaxă poate fi convertită într-o problemă de algebră; pe drumul invers, o soluţie a problemei algebrice poate fi transportată într-o soluţie a problemei sintactice.

Să definim, pe mulţimea E a enunţurilor lui L, o relaţie binară $\sim$ astfel:

$$\varphi \sim \psi \overset{def.}{\Leftrightarrow} \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi).$$

Observaţie 7.2.58 Conform Lemei 7.2.57, $\varphi \sim \psi$ dacă şi numai dacă ($\vdash \varphi \to \psi$ şi $\vdash \psi \to \varphi$).

Lema 7.2.59 *Relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe E.*

Dem. Vor trebui verificate următoarele condiţii:
(1) $\vdash \alpha \leftrightarrow \alpha$, pentru orice $\alpha \in E$,
(2) $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \Longleftrightarrow \vdash \beta \leftrightarrow \alpha$, pentru orice $\alpha, \beta \in E$,
(3) $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta, \vdash \beta \leftrightarrow \gamma \Longrightarrow \vdash \alpha \leftrightarrow \gamma$, pentru orice $\alpha, \beta, \gamma \in E$.

(1) rezultă din Principiul identităţii şi observaţia precedentă;
(2) rezultă din observaţia precedentă;
(3) rezultă din (R1) şi observaţia precedentă. □

Considerăm mulţimea cât $E/_{\sim}$. Clasa de echivalenţă a lui $\varphi \in E$ va fi notată $\widehat{\varphi}$.

Fie φ si ψ două enunţuri ale lui L. Dacă $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, atunci spunem că φ şi ψ sunt *echivalente logic*. Echivalenţa logică a două enunţuri este traducerea în limbajul formal a ideii de echivalenţă a două propoziţii din limbajul natural. In alţi termeni, conectorul $\leftrightarrow$ este corespondentul formal al lui $\Leftrightarrow$ ("dacă şi numai dacă").

Definiţia relaţiei de echivalenţă $\sim$ porneşte tocmai de la această observaţie: două enunţuri echivalente logic vor fi identificate prin $\sim$. O clasă de echivalenţă strânge la un loc toate enunţurile echivalente logic.

Definim relaţia binară $\leq$ pe $E/_{\sim}$:

$$\widehat{\varphi} \leq \widehat{\psi} \overset{def.}{\Leftrightarrow} \vdash \varphi \to \psi.$$

Este necesar să verificăm independenţa de reprezentanţi:

$$(\vdash \varphi \to \varphi', \vdash \varphi' \to \varphi, \vdash \psi \to \psi', \vdash \psi' \to \psi) \Longrightarrow (\vdash \varphi \to \psi \Longleftrightarrow \vdash \varphi' \to \psi').$$

$\Longrightarrow$: Presupunem că $\vdash \varphi \to \psi$. Din $\vdash \varphi' \to \varphi$, $\vdash \varphi \to \psi$ şi $\vdash \psi \to \psi'$ rezultă, aplicând (R1), că $\varphi' \to \psi'$.
$\Longleftarrow$: Similar.

Lema 7.2.60 *Relaţia $\leq$ este o relaţie de ordine pe $E/_{\sim}$.*

Dem. Este necesar să verificăm condiţiile următoare:
(1) $\vdash \varphi \to \varphi$, oricare $\varphi \in E$,
(2) $\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \varphi \Longrightarrow \vdash \varphi \sim \psi$, pentru orice $\varphi, \psi \in E$,
(3) $\vdash \varphi \to \psi, \vdash \psi \to \chi \Longrightarrow \vdash \varphi \to \chi$, pentru orice $\varphi, \psi, \chi \in E$.
Ele rezultă din Principiul identităţii şi din (R1). □

Chiar prin definiţie, relaţia de ordine $\leq$ din Lema 7.2.60 este o reflectare algebrică a conectorului $\to$. In acest fel, stabilirea unoe teoreme formale ale lui L revine la verificarea unor inegalităţi booleene.

Propoziţia 7.2.61 $(E/_{\sim}, \leq)$ *este o latice distributivă, în care pentru orice $\varphi, \psi \in E$:*

$$(1)\ \inf(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = \widehat{\varphi \wedge \psi}, \quad (2)\ \sup(\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}) = \widehat{\varphi \vee \psi}.$$

Dem.

Demonstrăm întâi (1), ceea ce revine la a verifica condiţiile următoare:
(i) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$, $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \psi$,
(ii) dacă $\vdash \chi \rightarrow \varphi$ şi $\vdash \chi \rightarrow \psi$, atunci $\chi \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$.
Condiţia (i) rezultă din Propoziţiile 7.2.36, 7.2.37, iar (ii) din (R4).

Demonstrăm acum (2), ceea ce revine la a verifica condiţiile următoare:
(iii) $\vdash \varphi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$, $\vdash \psi \rightarrow (\varphi \vee \psi)$,
(iv) dacă $\vdash \varphi \rightarrow \chi$ şi $\vdash \psi \rightarrow \chi$, atunci $\vdash (\varphi \vee \psi) \rightarrow \chi$.
Se folosesc Propoziţiile 7.2.32, 7.2.33 şi (R3). Rezultă că $(E/_{\sim}, \leq)$ este o latice, în care

$$\widehat{\varphi} \wedge \widehat{\psi} = \widehat{\varphi \wedge \psi}, \quad \widehat{\varphi} \vee \widehat{\psi} = \widehat{\varphi \vee \psi}.$$

Distributivitatea rezultă din Propoziţiile 7.2.42, 7.2.46. □

Observaţii 7.2.62

(1) Să punem

$$\neg\widehat{\varphi} \stackrel{def.}{=} \widehat{\neg\varphi}.$$

Atunci definiţia operaţiei $\neg$ nu depinde de reprezentanţi.

(2) Conform Propoziţiei 7.2.48, avem

$$\widehat{\varphi \wedge \neg\varphi} \leq \widehat{\psi} \leq \widehat{\varphi \vee \neg\varphi},$$

pentru orice $\varphi, \psi \in E$. Atunci $\widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}$ este primul element al laticii $E/_{\sim}$, iar $\widehat{\varphi \vee \neg\varphi}$ este ultimul element. Vom nota

$$\mathbf{0} = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}, \quad \mathbf{1} = \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}$$

(este evident că definiţiile nu depind de reprezentanţi).

Propoziţia 7.2.63 *Structura* $(E/_{\sim}, \wedge, \vee, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ *este o algebră Boole, numită algebra Lindenbaum-Tarski asociată sistemului formal L.*

Dem. Conform Propoziţiei 7.2.61, $(E/_{\sim}, \wedge, \vee)$ este o latice distributivă. Conform observaţiilor precedente, $\widehat{\varphi} \wedge \neg\widehat{\varphi} = \mathbf{0}$ şi $\widehat{\varphi} \vee \neg\widehat{\varphi} = \mathbf{1}$, deci orice element $\widehat{\varphi}$ al lui $E/_{\sim}$ admite pe $\neg\widehat{\varphi}$ drept complement. □

Observaţie 7.2.64 Dacă notăm $p : E \longrightarrow E/_{\sim}$ surjecţia canonică ($p(\varphi) = \widehat{\varphi}$, pentru orice $\varphi \in E$), atunci pentru orice $\varphi, \psi \in E$, sunt verificate condiţiile următoare:
(a) $p(\varphi \vee \psi) = p(\varphi) \vee p(\psi)$,
(b) $p(\varphi \wedge \psi) = p(\varphi) \wedge p(\psi)$,
(c) $p(\neg\varphi) = \neg p(\varphi)$,
(d) $p(\varphi \rightarrow \psi) = p(\varphi) \rightarrow p(\psi)$,
(e) $p(\varphi \leftrightarrow \psi) = p(\varphi) \leftrightarrow p(\psi)$,
unde

$$\widehat{\varphi} \rightarrow \widehat{\psi} \stackrel{def.}{=} \widehat{\varphi \rightarrow \psi}, \quad \widehat{\varphi} \leftrightarrow \widehat{\psi} \stackrel{def.}{=} \widehat{\varphi \leftrightarrow \psi}.$$

Egalităţile (a) - (c) sunt chiar definiţiile operaţiilor din $E/_{\sim}$. (d) revine la a arată că $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\neg\varphi \vee \psi)$ (exerciţiu), iar (e) rezultă din (b) şi (d). Cele cinci egalităţi de mai sus arată modul în care conectorii sunt convertiţi în operaţii booleene.

Lema 7.2.65 *Pentru orice $\varphi \in E$,*

$$\vdash \varphi \iff \widehat{\varphi} = \mathbf{1}.$$

Dem. Trebuie să demonstrăm:

$$\vdash \varphi \iff \vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\varphi).$$

$\Longrightarrow$: Presupunem că $\vdash \varphi$. Cum $\vdash \varphi \to ((\varphi \vee \neg\varphi) \to \varphi)$, conform (G1), rezultă $\vdash (\varphi \vee \neg\varphi) \to \varphi$; totodată, are loc $\vdash \varphi \to (\varphi \vee \neg\varphi)$, deci $\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)$.
$\Longleftarrow$: Presupunem că $\varphi \leftrightarrow (\varphi \vee \neg\varphi)$. Conform $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ (Principiul terţului exclus), rezultă, aplicând m.p., că $\vdash \varphi$. □

Observaţie 7.2.66 Lema 7.2.65 oferă o metodă algebrică pentru a verifica dacă un enunţ este teoremă formală.
Exemplu. Să se arate că:

$$\vdash [\alpha \to (\beta \to \gamma)] \to [(\alpha \to (\gamma \to \delta)) \to (\alpha \to (\beta \to \delta))].$$

Notând $a = \widehat{\alpha}$, $b = \widehat{\beta}$, $c = \widehat{\gamma}$, $d = \widehat{\delta}$, conform Lemei 7.2.65, este suficient să stabilim identitatea booleană:

$$[a \to (b \to c)] \to [(a \to (c \to d)) \to (a \to (b \to d))] = \mathbf{1},$$

ceea ce este echivalent cu

$$a \to (b \to c) \leq (a \to (c \to d)) \to (a \to (b \to d)).$$

Dar, un calcul boolean în algebra Lindenbaum-Tarski $E/_{\sim}$ ne dă:

$$(a \to (c \to d)) \to (a \to (b \to d)) = (a^- \vee c^- \vee d)^- \vee a^- \vee b^- \vee d =$$

$$(a \wedge c \wedge d^-) \vee a^- \vee b^- \vee d = a^- \vee b^- \vee c = a \to (b \to c),$$

ceea ce termină verificarea.

- **Generalizare.**

Vom generaliza construcţia de mai sus, pornind cu o mulţime Σ de enunţuri şi definind algebra Lindenbaum-Tarski asociată lui Σ.

Fie Σ o mulţime de enunţuri ale lui L ($\Sigma \subseteq E$). Să definim pe E următoarea relaţie binară:

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \overset{def.}{\Leftrightarrow} \Sigma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$
$$\Leftrightarrow (\Sigma \vdash \varphi \to \psi \quad \text{şi} \quad \Sigma \vdash \psi \to \varphi).$$

Procedând analog ca mai sus, se poate arată că $\sim_\Sigma$ este o relaţie de echivalenţă pe E şi că $E/_{\sim_\Sigma}$ are o structură canonică de algebră Boole (= algebra Lindenbaum-Tarski a lui Σ). Notăm cu φ/Σ clasa de echivalenţă a lui $\varphi \in E$. Atunci:

$$\varphi/\Sigma \vee \psi/\Sigma \overset{def.}{=} (\varphi \vee \psi)/\Sigma, \quad \varphi/\Sigma \wedge \psi/\Sigma \overset{def.}{=} \varphi \wedge \psi)/\Sigma,$$

$$\neg(\varphi/\Sigma) \stackrel{def.}{=} (\neg\varphi)/\Sigma,$$

$$\varphi/\Sigma \to \psi/\Sigma \stackrel{def.}{=} (\varphi \to \psi)/\Sigma, \quad \varphi/\Sigma \leftrightarrow \psi/\Sigma \stackrel{def.}{=} (\varphi \leftrightarrow \psi)/\Sigma,$$

$$\varphi/\Sigma \leq \psi/\Sigma \Leftrightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \psi,$$

$$\mathbf{0} = (\varphi \wedge \neg\varphi)/\Sigma, \quad \mathbf{1} = (\varphi \vee \neg\varphi)/\Sigma,$$

$$\varphi/\Sigma = \mathbf{1} \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \varphi.$$

Dacă $\Sigma = \emptyset$, atunci $\sim_\Sigma = \sim$ şi obţinem algebra Lindenbaum-Tarski $E/_\sim$ a lui L.

7.2.3 Algebra Lindenbaum-Tarski - varianta 2

Această subsecţiune conţine construcţia unei algebre Boole echivalente asociate canonic sistemului formal L. Construcţia în această variantă este preluată din [30].

• Să definim, pe multimea E a enunţurilor lui L, o relaţie binară $\sim$ astfel:

$$\varphi \sim \psi \stackrel{def.}{\Leftrightarrow} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Lema 7.2.67

$$(\vdash \varphi \quad şi \quad \vdash \psi) \Longrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi.$$

Dem.
$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \stackrel{def. \leftrightarrow}{\Longleftrightarrow} \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \stackrel{Lema\ 4.1.8}{\Longleftrightarrow} \vdash \varphi \to \psi$ şi $\vdash \psi \to \varphi$.
Prin ipoteză, avem $\vdash \varphi$ şi, conform (a1), avem $\vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$; atunci aplicând modus ponens, rezultă $\vdash \psi \to \varphi$. Similar, prin ipoteză avem $\vdash \psi$ şi, conform (a1), avem $\vdash \psi \to (\varphi \to \psi)$; atunci aplicând modus ponens, rezultă $\vdash \varphi \to \psi$.
Deci, rezultă $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$. □

Observaţii 7.2.68
(i) Conform Lemei 4.1.8,

$$\varphi \sim \psi \quad \text{dacă şi numai dacă} \quad (\vdash \varphi \to \psi \text{ şi } \vdash \psi \to \varphi),$$

deoarece $\varphi \sim \psi \Longleftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Longleftrightarrow \vdash (\varphi \to \psi \wedge \psi \to \varphi) \Longleftrightarrow (\vdash \varphi \to \psi$ şi $\vdash \psi \to \varphi)$.
(ii) Avem $\vdash (\varphi \wedge \psi) \to (\varphi \leftrightarrow \psi)$.

Amintim că relaţia $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe E, conform Propoziţiei 7.2.59. Clasa de echivalenţă a lui $\varphi \in E$ va fi notată $\widehat{\varphi}$, deci

$$\widehat{\varphi} = \{\psi \in E \mid \psi \sim \varphi\}.$$

Fie mulţimea cât $E/\sim$, adică :

$$E/\sim = \{\widehat{\varphi} \mid \varphi \in E\}.$$

Propoziţia 7.2.69

$$\widehat{\varphi} = \widehat{\psi} \Longleftrightarrow \varphi \sim \psi.$$

Dem.

$\Longrightarrow$: Deoarece $\varphi \in \widehat{\varphi}$ şi $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$, rezultă că $\varphi \in \widehat{\psi}$, deci $\varphi \sim \psi$.

$\Longleftarrow$: Fie $\chi \in \widehat{\varphi}$, adică $\chi \sim \varphi$; dar, prin ipoteză, $\varphi \sim \psi$; rezultă, prin tranzitivitatea lui $\sim$, că $\chi \sim \psi$, adică $\chi \in \widehat{\psi}$. Deci, $\widehat{\varphi} \subseteq \widehat{\psi}$. Similar se demonstrează că $\widehat{\psi} \subseteq \widehat{\varphi}$. Deci, $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$. □

Propoziţia 7.2.70 *Pentru orice $\varphi, \psi, \varphi', \psi' \in E$,*

(i) dacă $\varphi \sim \varphi'$ şi $\psi \sim \psi'$, atunci $(\varphi \to \psi) \sim (\varphi' \to \psi')$,
(ii) dacă $\varphi \sim \psi$, atunci $\neg\varphi \sim \neg\psi$,
(iii) $(\varphi \to \varphi) \sim (\psi \to \psi)$.

Dem.

(i): Ipoteza este următoarea: $(\varphi \sim \varphi'$ şi $\psi \sim \psi') \overset{def.\sim}{\Longleftrightarrow}$
$(\vdash \varphi \leftrightarrow \varphi'$ şi $\vdash \psi \leftrightarrow \psi') \overset{def.\leftrightarrow}{\Longleftrightarrow}$
$(\vdash (\varphi \to \varphi') \wedge (\varphi' \to \varphi)$ şi $\vdash (\psi \to \psi') \wedge (\psi' \to \psi) \overset{Lema\ 4.1.8}{\Longleftrightarrow}$
$(\vdash \varphi \to \varphi'$ si $\vdash \varphi' \to \varphi)$ şi $(\vdash \psi \to \psi'$ si $\vdash \psi' \to \psi)$, iar concluzia ce trebuie demonstrată este următoarea:

$(\varphi \to \psi) \sim (\varphi' \to \psi') \overset{def.\sim}{\Longleftrightarrow}$
$\vdash (\varphi \to \psi) \leftrightarrow (\varphi' \to \psi') \overset{def.\leftrightarrow}{\Longleftrightarrow}$
$\vdash [(\varphi \to \psi) \to (\varphi' \to \psi')] \wedge [(\varphi' \to \psi') \to (\varphi \to \psi)] \overset{Lema\ 4.1.8}{\Longleftrightarrow}$
(a) $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi' \to \psi')$ şi (b) $\vdash (\varphi' \to \psi') \to (\varphi \to \psi)$.

Conform ipotezei, din $\vdash \varphi' \to \varphi$ şi $\vdash \psi \to \psi'$, rezultă, aplicând regula (RX), că $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\varphi' \to \psi')$, adică (a).
Similar, conform restului ipotezei, adică din $\vdash \varphi \to \varphi'$ şi $\vdash \psi' \to \psi$, rezultă, aplicând (RX), că $\vdash (\varphi' \to \psi') \to (\varphi \to \psi)$, adică (b).
Rezultă că $(\varphi \to \psi) \sim (\varphi' \to \psi')$.

(ii): $\varphi \sim \psi \overset{def.\sim}{\Longleftrightarrow} \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \overset{def.\leftrightarrow}{\Longleftrightarrow} \vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \overset{Lema\ 4.1.8}{\Longleftrightarrow} \vdash \varphi \to \psi$ şi $\vdash \psi \to \varphi$ şi
$\neg\varphi \sim \neg\psi \overset{def.\sim}{\Longleftrightarrow} \vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi \overset{def.\leftrightarrow}{\Longleftrightarrow} \vdash (\neg\varphi \to \neg\psi) \wedge (\neg\psi \to \neg\varphi) \overset{Lema\ 4.1.8}{\Longleftrightarrow} \vdash \neg\varphi \to \neg\psi$ şi $\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$.
Conform Propoziţiei 7.2.49, avem $\vdash (\varphi \to \psi) \to (\neg\psi \to \neg\varphi)$; deoarece avem prin ipoteză $\vdash \varphi \to \psi$, rezultă, aplicând modus ponens, că $\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$.
Similar, conform Propoziţiei 7.2.49, avem $\vdash (\psi \to \varphi) \to (\neg\varphi \to \neg\psi)$; deoarece avem prin ipoteză $\vdash \psi \to \varphi$, rezultă, aplicând modus ponens, că $\vdash \neg\varphi \to \neg\psi$.
Rezultă că $\neg\varphi \sim \neg\psi$.

(iii): Conform Propoziţiei 7.2.14, avem $\vdash \varphi \to \varphi$ şi $\vdash \psi \to \psi$. De aici, aplicând Lema 7.2.67, rezultă $\vdash (\varphi \to \varphi) \leftrightarrow (\psi \to \psi)$ adică $(\varphi \to \varphi) \sim (\psi \to \psi)$, conform definiţiei lui $\sim$. □

Definim pe $E/_\sim$ operaţia binară $\to$, operaţia unară $\neg$ şi constanta $\mathbf{1}$ astfel:

$$\widehat{\varphi} \to \widehat{\psi} \overset{def.}{=} \widehat{\varphi \to \psi}, \quad \neg\widehat{\varphi} \overset{def.}{=} \widehat{\neg\varphi}, \quad \mathbf{1} \overset{def.}{=} \widehat{\varphi \to \varphi}.$$

Atunci conform Lemei 7.2.70, definiţiile nu depind de reprezentanţi (adică dacă $\psi \in \widehat{\varphi} \Longleftrightarrow \psi \sim \varphi$, atunci $\neg\psi \sim \neg\varphi$ şi deci $\widehat{\neg\psi} = \widehat{\neg\varphi}$, etc.).

Amintim următorul rezultat cu o altă demonstraţie.

Lema 7.2.71

$$\vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \widehat{\varphi} = \mathbf{1}.$$

Dem. Avem:
$\widehat{\varphi} = \mathbf{1} \Longleftrightarrow$
$\widehat{\varphi} = \widehat{\varphi \to \varphi} \Longleftrightarrow$
$\varphi \sim (\varphi \to \varphi) \Longleftrightarrow$
$\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \to \varphi) \overset{Def.\leftrightarrow}{\Longleftrightarrow}$
$\vdash (\varphi \to (\varphi \to \varphi)) \wedge ((\varphi \to \varphi) \to \varphi) \overset{Lema\ 4.1.8}{\Longleftrightarrow}$
(a) $\vdash \varphi \to (\varphi \to \varphi)$ şi (b) $\vdash (\varphi \to \varphi) \to \varphi$.

$\Longrightarrow$: Deoarece, prin ipoteză, avem $\vdash \varphi$ şi, conform Propoziţiei 7.2.14, avem $\vdash \varphi \to \varphi$, rezultă, aplicând Lema 7.2.67, că $\vdash \varphi \leftrightarrow (\varphi \to \varphi)$, adică $\widehat{\varphi} = \mathbf{1}$.

$\Longleftarrow$: Prin ipoteză, avem $\widehat{\varphi} = \mathbf{1}$; dar, conform Propoziţiei 7.2.14, avem (c) $\vdash \varphi \to \varphi$; aplicând modus ponens lui (b) şi (c), rezultă $\vdash \varphi$. □

Corolar 7.2.72

$$\widehat{\varphi \vee \neg\varphi} = \mathbf{1}.$$

Dem. Din Propoziţia 7.2.16 şi Lema 7.2.71. □

Teorema 7.2.73 *Structura*

$$(E/\sim, \to, \neg, \mathbf{1})$$

este o algebră Boole, numită algebra Lindenbaum-Tarski asociată sistemului formal L.

Dem. Trebuie să verificăm: pentru orice $\widehat{\varphi}, \widehat{\psi}, \widehat{\chi} \in E/\sim$,
(A1') $\widehat{\varphi} \to (\widehat{\psi} \to \widehat{\varphi}) = \mathbf{1}$,
(A2') $(\widehat{\varphi} \to (\widehat{\psi} \to \widehat{\chi})) \to ((\widehat{\varphi} \to \widehat{\psi}) \to (\widehat{\varphi} \to \widehat{\chi})) = \mathbf{1}$,
(A3') $(\neg\widehat{\varphi} \to \neg\widehat{\psi}) \to (\widehat{\psi} \to \widehat{\varphi}) = \mathbf{1}$,
(A4') $\widehat{\varphi} \to \widehat{\psi} = \mathbf{1} = \widehat{\psi} \to \widehat{\varphi}$ implica $\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$.

(A1'): $\widehat{\varphi} \to (\widehat{\psi} \to \widehat{\varphi}) = \mathbf{1} \Longleftrightarrow \widehat{\varphi \to (\psi \to \varphi)} = \mathbf{1} \overset{Lema\ 7.2.71}{\Longleftrightarrow} \vdash \varphi \to (\psi \to \varphi)$, ceea ce este adevarat, conform Observaţiei 7.2.8 referitoare la (a1).

(A2'), (A3'): se demonstrează similar, folosind axiomele (a2), (a3) respectiv.

(A4'): $\widehat{\varphi} \to \widehat{\psi} = \mathbf{1} = \widehat{\psi} \to \widehat{\varphi} \Longleftrightarrow$
$\widehat{\varphi \to \psi} = \mathbf{1} = \widehat{\psi \to \varphi} \overset{Lema\ 7.2.71}{\Longleftrightarrow}$
$\vdash \varphi \to \psi$ si $\vdash \psi \to \varphi \overset{Lema\ 4.1.8}{\Longleftrightarrow}$
$\vdash (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi) \Longleftrightarrow$
$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Longleftrightarrow$
$\varphi \sim \psi \overset{Prop.\ 7.2.69}{\Longrightarrow}$ (dar de fapt sunt echivalente)
$\widehat{\varphi} = \widehat{\psi}$. □

Observaţie 7.2.74 Dacă notăm $p : E \longrightarrow E/\sim$ surjecţia canonică ($p(\varphi) = \widehat{\varphi}$, pentru orice $\varphi \in E$), atunci pentru orice $\varphi, \psi \in E$, sunt verificate condiţiile următoare:
(a) $p(\varphi \vee \psi) = p(\varphi) \vee p(\psi)$,
(b) $p(\varphi \wedge \psi) = p(\varphi) \wedge p(\psi)$,
(c) $p(\neg\varphi) = \neg p(\varphi)$,
(d) $p(\varphi \to \psi) = p(\varphi) \to p(\psi)$,
(e) $p(\varphi \leftrightarrow \psi) = p(\varphi) \leftrightarrow p(\psi)$,
(f) $p(0) = \mathbf{0}$, $\quad p(1) = \mathbf{1}$,

unde

$$\widehat{\varphi} \vee \widehat{\psi} \overset{def.}{=} \widehat{\varphi \vee \psi}, \quad \widehat{\varphi} \wedge \widehat{\psi} \overset{def.}{=} \widehat{\varphi \wedge \psi}, \quad \widehat{\varphi} \leftrightarrow \widehat{\psi} \overset{def.}{=} \widehat{\varphi \leftrightarrow \psi}, \quad \mathbf{0} \overset{def.}{=} \neg\mathbf{1} = \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi}.$$

Cele cinci egalităţi de mai sus arată modul în care conectorii sunt convertiţi în operaţii booleene.

• **Generalizare**
Fie Σ o mulţime de enunţuri ale lui L ($\Sigma \subseteq E$). Să definim pe E următoarea relaţie binară:

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \overset{def.}{\Leftrightarrow} \Sigma \vdash (\varphi \leftrightarrow \psi)$$
$$\Leftrightarrow (\Sigma \vdash \varphi \to \psi \quad \text{şi} \quad \Sigma \vdash \psi \to \varphi).$$

Procedând analog ca mai sus, se poate arăta că $\sim_\Sigma$ este o relaţie de echivalenţă pe E. Dacă notăm cu φ/Σ clasa de echivalenţă a lui $\varphi \in E$ şi cu $E/\sim_\Sigma = \{\varphi/\Sigma \mid \varphi \in E\}$ şi dacă definim următoarele operaţii pe $E/\sim_\Sigma$:

$$\varphi/\Sigma \to \psi/\Sigma \overset{def.}{=} (\varphi \to \psi)/\Sigma, \quad \neg(\varphi/\Sigma) \overset{def.}{=} (\neg\varphi)/\Sigma, \quad \mathbf{1} \overset{def.}{=} (\varphi \to \varphi)/\Sigma,$$

atunci structura

$$(E/\sim_\Sigma, \to, \neg, \mathbf{1})$$

este o algebră Boole, numită *algebra Lindenbaum-Tarski a lui* Σ.

Dacă $\Sigma = \emptyset$, atunci $\sim_\Sigma = \sim$ şi obţinem algebra Lindenbaum-Tarski $E/\sim$ a lui L.

Generalizarea Lemei 7.2.71 este:

$$\Sigma \vdash \varphi \quad \Longleftrightarrow \quad \varphi/\Sigma = \mathbf{1}.$$

7.2.4 Prealgebre Boole. Algebrele Boole ca prealgebre Boole cât

Conţinutul acestei subsecţiuni este preluat din [30].

Studiul mulţimilor prebooleene (preboolean sets) [41], [44], al prealgebrelor Nelson şi Łukasiewicz [38], al $\mathcal{S}$-prealgebrelor [26] şi al prealgebrelor Hilbert [6], a condus la introducerea [30] noţiunii de prealgebră Boole, asociată definiţiei echivalente a algebrei Boole, cu axiomele (A1) - (A4), prezentata anterior, şi la factorizarea prealgebrei Boole pentru a obţine algebra Boole, urmâ nd îndeaproape lucrarea [6].

Prealgebre Boole

Definiţie 7.2.75 Structura $\mathcal{X} = (X, \to, ^-, D)$ este numită o *prealgebră Boole* dacă $\emptyset \neq D \subseteq X$ şi $\to$ este o operaţie binară pe X, $^-$ este o operaţie unară pe X, astfel încât pentru orice $x, y, z \in X$ avem:

(1) $x \to (y \to x) \in D$,
(2) $[x \to (y \to z)] \to [(x \to y) \to (x \to z)] \in D$,
(3) $(y^- \to x^-) \to (x \to y) \in D$,
(4) dacă $x \in D$ şi $x \to y \in D$, atunci $y \in D$.

Observaţii 7.2.76

1) Structura $(X, \to, D)$ cu axiomele (1), (2), (4) este o prealgebră Hilbert (a se vedea [6]).

2) Axioma (4) este corespondentul algebric al regulii de deducţie logică *modus ponens*.

3) Calculul propoziţional clasic $\mathcal{L} = (E, \to, \neg, T)$ este un exemplu de prealgebră Boole, unde E este mulţimea enunţurilor, T este mulţimea teoremelor formale.

4) Algebrele Boole, definite ca algebre $(B, \to, ^-, 1)$ satisfăcând axiomele (A1) - (A4), definesc prealgebra Boole $(B, \to, ^-, D)$, unde luăm $D = \{1\}$, conform (MP).

5) Dată o algebră Boole $\mathcal{B} = (B, \to, ^-, 1)$ şi un sistem deductiv (= filtru) F al lui $\mathcal{B}$, atunci $(B, \to, ^-, F)$ este o prealgebră Boole (a se vedea [26]).

Fie $(X, \to, ^-, D)$ o prealgebră Boole în această secţiune.

Propoziţia 7.2.77 *Următoarele proprietăţi au loc, pentru toţi* $x, y, z \in X$*:*

(5) dacă $y \in D$, atunci $x \to y \in D$,
(6) $x \to x \in D$ (reflexivitatea),
(7) dacă $x \to y \in D$ si $y \to z \in D$, atunci $x \to z \in D$ (tranzitivitatea).

Dem. (A se vedea [6], [39]):
(5): Fie $y \in D$; deoarece din (1) $y \to (x \to y) \in D$, rezultă din (4) că $x \to y \in D$.
(6): Din (1), $x \to ((x \to x) \to x) \in D$; din (2), $[x \to ((x \to x) \to x)] \to [(x \to (x \to x)) \to (x \to x)] \in D$.
Atunci din (4), $(x \to (x \to x)) \to (x \to x) \in D$.
Dar, din (1) din nou, $x \to (x \to x) \in D$. Rezultă, din (4) că $x \to x \in D$.
(7): Fie $x \to y \in D$ si $y \to z \in D$.
Deoarece $y \to z \in D$, atunci din (5) obţinem $x \to (y \to z) \in D$.
Dar, din (2), $[x \to (y \to z)] \to [(x \to y) \to (x \to z)] \in D$.
Rezultă, din (4), că $(x \to y) \to (x \to z) \in D$.
Deoarece $x \to y \in D$, atunci din (4) din nou, obţinem că $x \to z \in D$. □

Definiţie 7.2.78 Să definim pe X o relaţie binară $\leq$ astfel: pentru toţi $x, y \in X$,

$$x \leq y \iff x \to y \in D.$$

Atunci din (6) şi (7) obţinem:

(6') $x \leq x$, pentru orice x, adică $\leq$ este reflexivă,
(7') dacă $x \leq y$ şi $y \leq z$, atunci $x \leq z$, adică $\leq$ este tranzitivă.

Observaţii 7.2.79
1) Din (6'), (7'), rezultă că relaţia binară $\leq$ pe X este o cvasi-ordine (preordine).
2) Proprietatea (5) spune:

(5') Dacă $y \in D$, atunci $x \leq y$, pentru toţi $x \in X$,
adică fiecare element al lui X precede toate elementele lui D.

Propoziţia 7.2.80 *Următoarele proprietăti au loc, pentru toţi $x, y, z \in X$:*

(8) dacă $x \leq y \to z$, atunci $x \to y \leq x \to z$,
(9) $x \leq y \to x$,
(10) $x \leq y \to z \iff y \leq x \to z$,
(11) $y \to z \leq (x \to y) \to (x \to z)$,
(12) $x \to y \leq (y \to z) \to (x \to z)$,
(13) dacă $x \leq y$, atunci $y \to z \leq x \to z$,
(14) $x \to (y \to z) \leq y \to (x \to z)$,
(15) dacă $x \leq y$, atunci $z \to x \leq z \to y$.

Dem. (A se vedea [6] si [39])

(8): Din (2), $[x \to (y \to z)] \to [(x \to y) \to (x \to z)] \in D$;
dacă $x \leq y \to z$, adică $x \to (y \to z) \in D$, atunci din (4), obţinem $(x \to y) \to (x \to z) inD$, adică $x \to y \leq x \to z$.

(9): Rezultă direct din (1).

(10): $\Longrightarrow$: dacă $x \leq y \to z$, atunci din (8), avem $x \to y \leq x \to z$; dar din (9), $y \leq x \to y$; atunci aplicând (7'), obţinem $y \leq x \to z$.
$\Longleftarrow$: rezultă prin simetrie.

(11): Din (2), avem $[x \to (y \to z)] \leq [(x \to y) \to (x \to z)]$.
Pe de altă parte, din (9), avem $y \to z \leq x \to (y \to z)$.
Prin urmare, aplicând (7'), obţinem $y \to z \leq (x \to y) \to (x \to z)$, adică (11) are loc.

(12): rezultă din (11), aplicând (10).

(13): Din (12), $x \to y \leq [(y \to z) \to (x \to z)]$, adică $(x \to y) \to [(y \to z) \to (x \to z)] \in D$. Dacă $x \leq y$, adică $x \to y \in D$, atunci din (4), obţinem că $(y \to z) \to (x \to z) \in D$, adică $y \to z \leq x \to z$.

(14): Din (2), avem $[x \to (y \to z)] \leq [(x \to y) \to (x \to z)]$.
Pe de altă parte, deoarece conform (9), $y \leq x \to y$, atunci din (13), avem $(x \to y \to (x \to z) \leq y \to (x \to z)$.
Prin urmare, aplicând (7'), obţinem că $[x \to (y \to z)] \leq y \to (x \to z)$.

(15): Dacă $x \leq y$, adică $x \to y \in D$, atunci din (5), avem $z \to (x \to y) \in D$.
Pe de altă parte, din (2), avem $[z \to (x \to y)] \to [(z \to x) \to (z \to y)] \in D$.
Prin urmare, aplicând (4), obţinem $(z \to x) \to (z \to y) \in D$, adică $z \to x \leq z \to y$.
$\square$

Propoziţia 7.2.81 *Următoarele proprietăţi au loc, pentru toţi $x, y \in X$:*

(16) $y^- \to x^- \leq x \to y$,
(17) (a) $x \leq x^- \to y$, *(b)* $x^- \leq x \to y$,
(18) $(x^-)^- \leq x$,
(19) $x \leq (x^-)^-$,
(20) $x \to y \leq y^- \to x^-$.

Dem.

(16): Rezultă direct din (3).

(17) (a): Din (9), $x^- \leq y^- \to x^-$ şi, din (16), $y^- \to x^- \leq x \to y$; prin urmare, aplicând (7'), obţinem $x^- \leq x \to y$.
(17) (b) este echivalent cu (17) (a), din (10).

(18): Din (9) şi (16), avem:

$(x^-)^- \leq (((x^-)^-)^-)^- \to (x^-)^- \leq x^- \to ((x^-)^-)^- \leq (x^-)^- \to x$.
Prin urmare, aplicând (7'), obţinem $(x^-)^- \leq (x^-)^- \to x$ care, aplicând (8), ne dă $[(x^-)^- \to (x^-)^-] \leq [(x^-)^- \to x]$, adică $[(x^-)^- \to (x^-)^-] \to [(x^-)^- \to x] \in D$.
Dar, din (6), $(x^-)^- \to (x^-)^- \in D$, prin urmare, aplicând (4), obţinem $(x^-)^- \to x \in D$, adică $(x^-)^- \leq x$.

(19): Din (18), $((x^-)^-)^- \leq x^-$, adică $((x^-)^-)^- \to x^- \in D$.
Pe de altă parte, din (3), $[((x^-)^-)^- \to x^-] \to [x \to (x^-)^-] \in D$.
Prin urmare, aplicând (4), $x \to (x^-)^- \in D$, adică $x \leq (x^-)^-$.

(20): Deoarece, din (19), $y \leq (y^-)^-$, atunci din (13), avem $x \to y \leq x \to (y^-)^-$.
Pe de altă parte, deoarece, din (18), $(x^-)^- \leq x$, atunci din (11), avem $x \to (y^-)^- \leq (x^-)^{\to}(y^-)^-$.
Prin urmare, aplicând (7'), obţinem $x \to y \leq (x^-)^- \to (y^-)^-$.
Dar, din (16), $(x^-)^- \to (y^-)^- \leq y^- \to x^-$.
Prin urmare, aplicând (7') din nou, obţinem $x \to y \leq y^- \to x^-$. □

Algebrele Boole ca prealgebre Boole cât,
adică ca algebre "tip Lindenbaum-Tarski"

Definiţie 7.2.82 Fie $\mathcal{X} = (X, \to, ^-, D)$ o prealgebră Boole.
Să definim o relaţie binară $\sim$ pe X astfel: pentru toţi $x, y \in X$,

$$x \sim y \iff x \leq y \text{ şi } y \leq x \iff x \to y \in D \text{ şi } y \to x \in D.$$

Propoziţia 7.2.83 *Relaţia binară $\sim$ pe X este o relaţie de echivalenţă.*

Dem.
· relexivitatea: pentru toţi $x \in X$, $x \sim x \iff x \leq x$, care este adevarată din (6').
· simetria: pentru toţi $x, y \in X$, $x \sim y$ implică $y \sim x$; este evident.
· tranzitivitatea: fie $x, y, z \in X$ astfel încât $x \sim y$ şi $y \sim z$, adică
($x \to y \in D$ şi $y \to x \in D$) şi ($y \to z \in D$ şi $z \to y \in D$), sau, echivalent,
($x \to y \in D$ şi $y \to z \in D$) şi ($z \to y \in D$ şi $y \to x \in D$), care implică, conform (7), că $x \to z \in D$ şi $z \to x \in D$, adică $x \sim z$. □

Lema 7.2.84 *Următoarele proprietăţi ale lui $\sim$ au loc: pentru orice $x, y, x', y' \in X$,*

(a) $x \sim x'$ şi $y \sim y'$ implică $(x \to y) \sim (x' \to y')$,
(b) $x \sim y$ implică $x^- \sim y^-$,
(c) D este o clasă de echivalenţă.

Dem.
(a): Fie $x \sim x'$ şi $y \sim y'$, adică ($x \leq x'$ şi $x' \leq x$) şi ($y \leq y'$ şi $y' \leq y$).
Dar, $y \leq y'$ implică, prin (13), $x \to y \leq x \to y'$ şi $x' \leq x$ implică, prin (11), $x \to y' \leq x' \to y'$. Prin urmare, aplicând (7'), $x \to y \leq x' \to y'$. Similar, $x' \to y' \leq x \to y$. Prin urmare, $(x \to y) \sim (x' \to y')$.
(b): Fie $x \sim y$, adică $x \to y \in D$ şi $y \to x \in D$.
Deoarece $x \to y \in D$ şi, din (20), $(x \to y) \to (y^- \to x^-) \in D$, rezultă, din (4), că $y^- \to x^- \in D$.

Similar, $y \to x \in D$ şi $(y \to x) \to (x^- \to y^-) \in D$ implică, prin (4), ca $x^- \to y^- \in D$. Prin urmare, $x^- \sim y^-$.

(c): Este suficient să demonstrăm că $x, y \in D$ implică $x \sim y$. Intr-adevăr, $x \in D$ implică, prin (5), că $y \to x \in D$ şi similar, $y \in D$ implică $x \to y \in D$. Prin urmare, $x \sim y$. □

Deoarece $\sim$ este o relaţie de echivalenţă pe X, fie $\mid x \mid$ clasa de echivalenţă a lui $x \in X$:

$$\mid x \mid = \{y \in X \mid y \sim x\}$$

şi fie $B = X/\sim$ *mulţimea cât*, adică mulţimea tuturor claselor de echivalenţă:

$$B = X/\sim = \{\mid x \mid \mid x \in X\}.$$

Lema 7.2.85 *Pentru toţi $x, y \in X$,*

$$\mid x \mid = \mid y \mid \iff x \sim y.$$

Dem.

$\Longrightarrow$: Deoarece $x \in \mid x \mid$ şi $\mid x \mid = \mid y \mid$, rezultă că $x \in \mid y \mid$, adică $x \sim y$.

$\Longleftarrow$: Fie $z \in \mid x \mid$, adică $z \sim x$; deoarece $x \sim y$, din tranzitivitate obţinem că $z \sim y$, adica $z \in \mid y \mid$. Prin urmare, $\mid x \mid \subseteq \mid y \mid$. Similar, $\mid y \mid \subseteq \mid x \mid$. Prin urmare, $\mid x \mid = \mid y \mid$. □

Definiţie 7.2.86 *Să definim pe mulţimea cât $B = X/\sim$ de mai sus o relaţie binară $\leq$ astfel: pentru toţi $\mid x \mid, \mid y \mid \in B$,*

$$\mid x \mid \leq \mid y \mid \iff x \leq y \iff x \to y \in D.$$

Lema 7.2.87 *Relaţia binară $\leq$ pe mulţimea cât $B = X/\sim$ este o relaţie de ordine.*

Dem.

· reflexivitatea: pentru toţi $\mid x \mid \in B$, $\mid x \mid \leq \mid x \mid \iff x \leq x$, care are loc conform (6').

· antisimetria: fie $\mid x \mid, \mid y \mid \in A$ astfel încât $\mid x \mid \leq \mid y \mid$ şi $\mid y \mid \leq \mid x \mid$, adică $x \to y \in D$ şi $y \to x \in D$, adică $x \sim y$; prin urmare, din Lema 7.2.85, $\mid x \mid = \mid y \mid$.

· tranzitivitatea: fie $\mid x \mid, \mid y \mid, \mid z \mid \in B$ astfel încât $\mid x \mid \leq \mid y \mid$ şi $\mid y \mid \leq \mid z \mid$, adică $x \leq y$ şi $y \leq z$. Atunci aplicând (7'), $x \leq z$, adică $\mid x \mid \leq \mid z \mid$. □

Sa definim pe mulţimea cât $B = X/\sim$ operaţia binară $\to$, operaţia unară $^-$ şi constanta 1 astfel: pentru orice $\mid x \mid, \mid y \mid \in B$,

$$\mid x \mid \to \mid y \mid \overset{def.}{=} \mid x \to y \mid, \quad \mid x \mid^- \overset{def.}{=} \mid x^- \mid, \quad 1 \overset{def.}{=} D.$$

Din Lema 7.2.84, definiţiile sunt bune (adică nu depind de reprezentanţi).

Lema 7.2.88

$$| x | = 1 \iff | x | = D \iff x \in D.$$

Dem. Să observăm că $| x | = D$ înseamnă $x \sim y$ for all $y \in D$, adică ($x \to y \in D$ şi $y \to x \in D$), pentru toţi $y \in D$.

$\Longrightarrow$: $y \in D$ şi $y \to x \in D$ implică, prin (4), că $x \in D$.

$\Longleftarrow$: Fie $x \in D$; trebuie să demonstrăm că $| x |= D$.

$\cdot$ $| x |\subseteq D$: fie $y \in| x |$, adică $y \sim x$, adică ($y \to x \in D$ şi $x \to y \in D$). Deoarece $x \in D$, rezultă, din (4), că $y \in D$.

$\cdot$ $D \subseteq| x |$: fie $y \in D$; atunci din (5), $x \to y \in D$. Dar, $x \in D$ implică, prin (5), că $y \to x \in D$ de asemenea. Prin urmare, $x \sim y$, care implică $y \in| x |$. □

Teorema 7.2.89 *Algebra cât* $(B = X/\sim, \to, ^-, 1)$ *este o algebră Boole, pe care o numim algebra "tip Lindenbaum-Tarski" a lui* $\mathcal{X}$*.*

Dem. Trebuie să verificăm că pentru toţi $| x |, | y |, | z |\in B$,

(A1) $| x |\to (| y |\to| x |) = 1$,
(A2) $[| x |\to (| y |\to| z |)] \to [(| x |\to| y |) \to (| x |\to| z)] = 1$,
(A3) $(| y |^-\to| x |^-) \to (| x |\to| y |) = 1$,
(A4) dacă $| x |\to| y |= 1 =| y |\to| x |$, atunci $| x |=| y |$.
Intr-adevăr,

(A1): $| x |\to (| y |\to| x |) =| x \to (y \to x) |= 1$, din (1) şi din Lema 7.2.88.

(A2): rezultă similar din (2) şi Lema 7.2.88.

(A3): rezultă similar din (3) şi Lema 7.2.88.

(A4): Fie $| x |\to| y |= 1 =| y |\to| x |$, adică $| x \to y |= D$ şi $| y \to x |= D$, sau, equivalent, prin Lema 7.2.88, $x \to y \in D$ şi $y \to x \in D$, adică $x \sim y$, care înseamnă, prin Lema 7.2.85, $| x |=| y |$. □

Observaţii

(i) La nivel de *logică algebrică*, avem calculul propoziţional clasic $\mathcal{L}$, din care, prin factorizarea $Fac1$, obţinem algebra Lindenbaum-Tarski, care este o algebra Boole. O altă factorizare, $Fac2$, printr-un sistem deductiv (filtru) de data aceasta, a algebrei Lindenbaum-Tarski, ne conduce la o altă algebră Boole, algebra Boole cât.

La nivel de *algebra logicii*, avem prealgebra Boole, care modelează calculul propoziţional clasic $\mathcal{L}$, din care, prin factorizarea $Fac1'$, obţinem algebra "tip Lindenbaum-Tarki", care este o algebră Boole. Prin altă factorizare, să o numim $Fac2'$, a acestei algebre Boole printr-un sistem deductiv (filtru), obţinem o algebră Boole cât. Prin urmare, putem scrie:

Logica algebrică: $\mathcal{L} \stackrel{Fac1}{\Longrightarrow}$ $algebra\ Lindenbaum{-}Tarski \stackrel{Fac2}{\Longrightarrow} algebra\ Lindenbaum{-}Tarski$ cât

Algebra logicii: *prealgebra Boole* $\stackrel{Fac1'}{\Longrightarrow}$ *algebra Boole* $\stackrel{Fac2'}{\Longrightarrow}$ *algebra Boole* cât

(ii) Următoarele probleme deschise apar:
a) Să se studieze factorizarea $Fac1'$ similar cu $Fac1$.
b) Să se studieze în paralel compunerea celor două factorizări la cele doua nivele: $Fac2 \circ Fac1$ şi $Fac2' \circ Fac1'$.
c) Să se definească şi să se studieze pe prealgebra Boole noţiunile corespunzătoare noţiunilor din calculul propoziţional clasic $\mathcal{L}$.
d) Să se definească noţiunea analoagă de prealgebră Boole pentru calculul cu predicate clasic.

7.3 Semantica calculului propoziţional L

Până acum am dezvoltat sistemul L la nivel sintactic, fără a atribui enunţurilor valori de adevăr. Acest lucru va fi realizat în secţiunea de faţă prin noţiunea de interpretare.

Definiţie 7.3.1 O *interpretare* a lui L este o funcţie oarecare $h : V \longrightarrow L_2$.

Propoziţia 7.3.2 *Pentru orice interpretare $h : V \longrightarrow L_2$, există o funcţie unică $h^\sim : E \longrightarrow L_2$, care satisface proprietăţile următoare:*
(a) $h^\sim(x) = h(x)$, pentru orice $x \in V$,
(b) $h^\sim(\neg\varphi) = \neg h^\sim(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$,
(c) $h^\sim(\varphi \to \psi) = h^\sim(\varphi) \to h^\sim(\psi)$, pentru orice $\varphi, \psi \in E$.

Dem. Definiţia lui $h^\sim$ se face prin inducţie, urmărind clauzele (a) - (c). Demonstrarea unicităţii lui $h^\sim$ se face tot prin inducţie. Fie $g : E \longrightarrow L_2$, astfel încât:
(a') $g(x) = h(x)$, pentru orice $x \in V$,
(b') $g(\neg\varphi) = \neg g(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$,
(c') $g(\varphi \to \psi) = g(\varphi) \to g(\psi)$, pentru orice $\varphi, \psi \in E$.
Vom arată că pentru orice $\alpha \in E$,

$$h^\sim(\alpha) = g(\alpha).$$

Distingem trei cazuri pentru α:
- $\alpha \in V$: $g(\alpha) = h(\alpha) = h^\sim(\alpha)$.
- $\alpha = \neg\varphi$: $g(\alpha) = \neg g(\varphi) = \neg h^\sim(\varphi) = h^\sim(\neg\varphi) = h^\sim(\alpha)$, pentru că $g(\varphi) = h^\sim(\varphi)$ (ipoteza inducţiei).

- $\alpha = \varphi \to \psi$: $g(\alpha) = g(\varphi) \to g(\psi) = h^{\sim}(\varphi) \to h^{\sim}(\psi) = h^{\sim}(\alpha)$, pentru că $g(\varphi) = h^{\sim}(\varphi)$ şi $g(\psi) = h^{\sim}(\psi)$ (ipoteza inducţiei). $\square$

Consecinţe imediate. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$,
(d) $h^{\sim}(\varphi \vee \psi) = h^{\sim}(\varphi) \vee h^{\sim}(\psi)$,
(e) $h^{\sim}(\varphi \wedge \psi) = h^{\sim}(\varphi) \wedge h^{\sim}(\psi)$,
(f) $h^{\sim}(\varphi \leftrightarrow \psi) = h^{\sim}(\varphi) \leftrightarrow h^{\sim}(\psi)$.

Observaţie 7.3.3 Dacă $h : V \longrightarrow L_2$ este o interpretare, atunci există un unic morfism boolean $\overline{h} : E/_{\sim} \longrightarrow L_2$ care face comutativă diagrama următoare:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[r, hook] \arrow[dr, "h"'] & E \arrow[r, "p"] \arrow[d, "h^{\sim}"] & E/_{\sim} \arrow[dl, "\overline{h}"] \\
& L_2 &
\end{tikzcd}$$

$\overline{h}$ este definit de: $\overline{h}(\widehat{\varphi}) = h^{\sim}(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$.

O interpretare asociază variabilelor propoziţionale valori în algebra Boole $L_2 = \{0, 1\}$. Conform Propoziţiei 7.3.2, o interpretare h se extinde în mod unic la o funcţie $h^{\sim}$ definită pe E astfel încât conectorii $\neg, \to, \vee, \wedge, \leftrightarrow$ sunt pransportaţi în operaţiile booleene corespunzătoare (în termeni algebrici, funcţia $\overline{h}$ din Observaţia 7.3.3 este un morfism boolean). Putem spune că $h^{\sim}$ transformă structura logică a lui L în structura logică a lui L_2.

Definiţie 7.3.4
Enunţul φ este *adevărat* în interpretarea $h : V \longrightarrow L_2$ dacă $h^{\sim}(\varphi) = 1$.
Enunţul φ este *fals* în interpretarea h dacă $h^{\sim}(\varphi) = 0$.
Un enunţ φ este *universal adevărat* dacă este adevărat în orice interpretare; acest lucru se noteaza

$$\models \varphi.$$

Observaţie 7.3.5 Interpretarea unui enunţ este valoarea 0 sau 1 obţinută atunci când tuturor variabilelor propoziţionale ce intră în componenţa sa le atribuim valori din L_2. Un enunţ universal adevărat φ va avea valoarea 1 pentru orice valori din L_2 luate de variabilele propoziţionale ce apar în φ.

• **Generalizare**

Definiţie 7.3.6 O interpretare $h : V \longrightarrow L_2$ este un *model* al lui $\Sigma \subseteq E$ dacă $h^{\sim}(\sigma) = 1$ pentru orice $\sigma \in \Sigma$. Notăm faptul că h este un model al lui Σ astfel:

$$h \models \Sigma.$$

Definiţie 7.3.7 Fie $\Sigma \subseteq E$ şi $\varphi \in E$. Spunem că φ se *deduce semantic din ipotezele* Σ dacă $h^{\sim}(\varphi) = 1$, pentru orice model h al lui Σ. Se notează acest lucru astfel:

$$\Sigma \models \varphi.$$

Propoziţia 7.3.8 *Pentru orice enunţ φ al lui L, are loc următoarea proprietate:*

$$\vdash \varphi \implies \models \varphi.$$

Dem. Vom arată că dacă $\vdash \varphi$, atunci $h^{\sim}(\varphi) = 1$ pentru orice interpretare $h : V \longrightarrow L_2$. Se procedează prin inducţie asupra modului în care a fost definit $\vdash \varphi$.

Considerăm întâi cazul axiomelor:
(G1): φ este de forma $\alpha \to (\beta \to \alpha)$.

$$h^{\sim}(\varphi) = h^{\sim}(\alpha) \to (h^{\sim}(\beta) \to h^{\sim}(\alpha)) = \neg h^{\sim}(\alpha) \vee \neg h^{\sim}(\beta) \vee h^{\sim}(\alpha) = 1.$$

(G2): φ este de forma $(\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to ((\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \gamma))$.
Dacă notăm $a = h^{\sim}(\alpha)$, $b = h^{\sim}(\beta)$, $c = h^{\sim}(\gamma)$, atunci
$h^{\sim}(\varphi) = (a \to (b \to c)) \to ((a \to b) \to (a \to c)) = 1$,
dupa cum arată o simplă verificare în L_2.
(G3): φ este de forma $(\neg\alpha \to \neg\beta) \to (\beta \to \alpha)$.
Este suficient să probăm că $(a^- \to b^-) \to (b \to a) = 1$ in L_2.

Presupunem acum că $\vdash \varphi$ a fost obţinut prin m.p. din $\vdash \psi$, $\vdash \psi \to \varphi$. Ipoteza inducţiei conduce la $h^{\sim}(\psi) = 1$ şi $h^{\sim}(\psi \to \varphi) = 1$. Atunci

$$1 = h^{\sim}(\psi) \to h^{\sim}(\psi) = 1 \to h^{\sim}(\varphi) = h^{\sim}(\varphi)$$

şi demonstraţia s-a încheiat. □

Corolar 7.3.9 *Pentru orice enunţ φ, nu putem avea $\vdash \varphi$ şi $\vdash \neg\varphi$.*

Dem. Dacă ar exista un enunţ φ astfel încât $\vdash \varphi$ şi $\vdash \neg\varphi$, atunci pentru orice interpretare h am avea $h^{\sim}(\varphi) = 1$ şi $\neg h^{\sim}(\varphi) = h^{\sim}(\neg\varphi) = 1$: contradicţie. □

Conform Lemei 7.2.57 şi Corolarului 7.3.9, pentru niciun enunţ φ, nu putem avea $\vdash \varphi \wedge \neg\varphi$. Atunci Corolarul 7.3.9 exprimă *noncontradicţia sistemului formal L*: prin demonstraţii formale nu se poate ajunge la contradicţii.

Teorema 7.3.10 *(Teorema de completitudine a lui L)*
Pentru orice enunţ φ, avem:

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi.$$

Dem.
$\Longrightarrow$: Conform Propoziţiei 7.3.8.
$\Longleftarrow$: Presupunem că $\not\vdash \varphi$ (φ nu este teoremă formală). Trecând la algebra Lindenbaum-Tarski $E/_\sim$ şi aplicând Lemma 7.2.65, rezultă $\widehat{\varphi} \neq 1$. Aplicăm

Teorema de reprezentare a lui Stone pentru algebra Boole $E/_{\sim}$. Atunci există o mulţime nevidă X şi un morfism boolean injectiv $d : E/_{\sim} \longrightarrow L_2^X$. Din injectivitatea lui d rezultă că $d(\widehat{\varphi}) \neq 1$ in L_2^X, deci există $x \in X$ astfel încât $d(\widehat{\varphi})(x) \neq 1$ in L_2.

Considerăm proiecţia $\pi_x : L_2^X \longrightarrow L_2$ definita prin $\pi_x(f) = f(x)$, pentru orice $f \in L_2^X$. π_x este morfism boolean. Să luăm interpretarea h dată de compunerea următoarelor morfisme booleene:

$$V \subseteq E \xrightarrow{p} E/_{\sim} \xrightarrow{d} L_2^X \xrightarrow{\pi_x} L_2$$

adică $h = \pi_x \circ d \circ p$.
Vom stabili că pentru orice $\alpha \in E$:

$$h^{\sim}(\alpha) = d(\widehat{\alpha})(x). \tag{7.4}$$

Demonstrăm (7.4) prin inducţie asupra enunţului α:
- $\alpha \in V$:
$h^{\sim}(\alpha) = h(\alpha) = \pi_x(d(p(\alpha)) = d(\widehat{\alpha})(x)$.
- $\alpha = \neg\beta$:
Ipoteza inducţiei funcţionează pentru β, deci $h^{\sim}(\beta) = d(\widehat{\beta})(x)$. Atunci

$$h^{\sim}(\alpha) = \neg h^{\sim}(\beta) = \neg d(\widehat{\beta})(x) = (\neg d(\widehat{\beta}))(x) = d(\neg\widehat{\beta})(x) = d(\widehat{\neg\beta})(x) = d(\widehat{\alpha})(x).$$

- $\alpha = \beta \rightarrow \gamma$:
Ipoteza inducţiei funcţionează pentru β şi γ, deci $h^{\sim}(\beta) = d(\widehat{\beta})(x)$ şi $h^{\sim}(\gamma) = d(\widehat{\gamma})(x)$. Atunci

$$h^{\sim}(\alpha) = h^{\sim}(\beta) \rightarrow h^{\sim}(\gamma) = d(\widehat{\beta})(x) \rightarrow d(\widehat{\gamma})(x) =$$

$$(d(\widehat{\beta}) \rightarrow d(\widehat{\gamma}))(x) = d(\widehat{\beta} \rightarrow \widehat{\gamma})(x) = d(\widehat{\beta \rightarrow \gamma})(x) = d(\widehat{\alpha})(x).$$

Proprietatea (7.4) a fost demonstrată.

Aplicând (7.4) pentru $\alpha = \varphi$, rezultă $h^{\sim}(\varphi) = d(\widehat{\varphi})(x) \neq 1$, deci $\not\models \varphi$. □

Comentarii

(i) De fapt, completitudinea lui L este exprimată numai prin implicaţia "$\models \varphi \Longrightarrow \vdash \varphi$". In cele mai importante texte de logică, prin teorema de completitudine a lui L, este desemnată echivalenţa din Teorema 7.3.10.

(ii) Studierea unei teorii ştiinţifice are ca scop determinarea propoziţiilor valabile ale teoriei. La nivelul sistemului logic, propoziţiile din teorie sunt reprezentate de enunţuri. Pentru sistemul logic L, au fost definite două clase remarcabile de enunţuri: teoremele formale (noţiune sintactică) şi enunţurile universal adevărate (noţiune semantică). Ambele noţiuni candidează la a reprezenta în sistemul logic propoziţiile valabile (adevărate) din logica propoziţională neformalizată. Enunţurile universal adevărate sunt mai aproape de ceea ce înţelegem noi în mod obişnuit prin propoziţie adevărată. Teorema formală este un concept mai sofisticat; ea traduce în plan formal ideea de propoziţie a cărei valabilitate a fost stabilită printr-o demonstraţie.

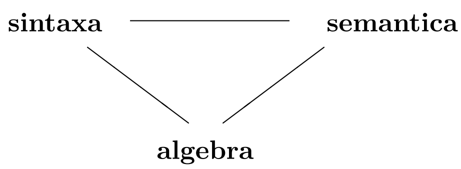
Compararea teoremelor formale şi a enunţurilor universal adevărate apare ca o problemă naturală. Teorema de completitudine stabileşte echivalenţa celor două tipuri de enunţuri. Luate separat, fiecare din cele două implicaţii ce compun Teorema de completitudine are o semnificaţie profundă.

Implicaţia "$\vdash \varphi \Longrightarrow \models \varphi$" ne arată că demonstraţiile formale produc enunţuri universal adevărate. In particular, de aici rezultă noncontradicţia lui L.

Implicaţia reciprocă "$\models \varphi \Longrightarrow \vdash \varphi$" ne arată că structura logică a lui L (definită de cele trei axiome şi de regula de deducţie m.p.) este capabilă să asigure demonstraţii formale pentru toate enunţurile universal adevărate.

De asemenea, Teorema de completitudine ne dă un procedeu comod de verificare a faptului că un enunţ este o teoremă formală (procedeu ce poate fi programat).

(iii) Demonstraţia prezentată mai sus este de natură algebrică. Ideea fundamentală este trecerea la algebra Lindenbaum-Tarski şi invocarea Teoremei lui Stone pentru găsirea interpretării necesare în demonstraţie. Această trecere prin algebră aruncă o lumină mai completă asupra relaţiei dintre sintaxă şi semnatică, care are de fapt şi un substrat algebric. Pe scurt, sistemul formal L a fost analizat din perspectiva relaţiei tripartite:



7.3.1 Mulţimi consistente. Teorema de completitudine extinsă (tare)

Teorema de completitudine, demonstrată în secţiunea precedentă, exprimă o relaţie profundă între sintaxă şi semantică. Un al doilea mod de a pune faţă în faţă sintaxa şi semantica lui L, îl reprezintă problema comparării deducţiei formale (sintactice) cu deducţia semantică. Teorema de completitudine extinsă, prezentată în această secţiune, este un răspuns definitiv la această problemă. Stabilind echivalenţa dintre deducţia sintactică şi deducţia semantică, ea întăreşte considerabil relaţia dintre cele două dimensiuni ale lui L.

Teorema de completitudine extinsă poate fi obţinută printr-o metodă algebrică asemănătoare ce cea din cazul Teoremei 7.3.10. Ideea principală este aplicarea Teoremei de reprezentare a lui Stone pentru algebra Lindenbaum-Tarski asociată unei mulţimi de enunţuri.

In secţiunea de faţă, vom prezenta o demonstraţie directă, bazată pe mulţimile maximal consistente.

Studiul mulţimilor consistente are un interes *în sine*. Ele sunt acele mulţimi de enunţuri din care nu se pot deduce contradicţii. Mulţimile maximal consistente sunt contrapartea sintactică a ultrafiltrelor din algebra Boole. Ele au proprietăţi sintactice remarcabile, ceea ce permite construcţia unor interpretări prin care se demonstrează Teorema de completitudine extinsă.

Definiţie 7.3.11

O mulţime Σ de enunţuri este *inconsistentă* dacă $\Sigma \vdash \varphi$, pentru orice enunţ φ al lui L.

O mulţime Σ de enunţuri este *consistentă* dacă nu este inconsistentă.

Propoziţia următoare arată că mulţimile consistente sunt acele mulţimi de enunţuri din care nu se deduc formal contradicţii.

Propoziţia 7.3.12 *Fie Σ o mulţime de enunţuri. Sunt echivalente următoarele:*
(1) Σ este inconsistentă,
(2) există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi)$,
(3) există $\varphi \in E$, astfel încât ($\Sigma \vdash \varphi$ şi $\Sigma \vdash \neg\varphi$),
(4) pentru orice $\varphi \in E$, $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$,
(5) există $\varphi \in E$, astfel încât $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.

Dem.

(1) $\Longrightarrow$ (2): Evident.

(2) $\Longrightarrow$ (3): Rezultă din $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \varphi$, $\Sigma \vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \to \neg\varphi$ şi m.p. (Propoziţiile 7.2.36, 7.2.37).

(3) $\Longrightarrow$ (4): Conform Propoziţiei 7.2.31, avem $\vdash \varphi \to (\neg\varphi \to \neg(\psi \to \psi))$ pentru orice $\psi \in E$. Presupunând $\Sigma \vdash \varphi$ şi $\Sigma \vdash \neg\varphi$, rezultă $\Sigma \vdash \neg(\psi \to \psi)$, prin aplicarea de două ori a m.p..

(4) $\Longrightarrow$ (5): Evident.

(5) $\Longrightarrow$ (1): Fie $\varphi \in E$ cu $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$ şi $\psi \in E$. Conform (G1),

$$\Sigma \vdash (\varphi \to \varphi) \to (\neg\psi \to (\varphi \to \varphi)).$$

Dar $\Sigma \vdash \varphi \to \varphi$, deci $\Sigma \vdash \neg\psi \to (\varphi \to \varphi)$. Conform Propoziţiei 7.2.28,

$$\Sigma \vdash (\neg\psi \to (\varphi \to \varphi)) \to (\neg(\varphi \to \varphi) \to \neg\neg\psi).$$

Aplicând de două ori m.p., $\Sigma \vdash \neg\neg\psi$. Insă $\Sigma \vdash \neg\neg\psi \to \psi$ (Propoziţia 7.2.27), deci $\Sigma\psi$ pentru orice $\psi \in E$. Atunci Σ este inconsistentă. □

Propoziţia 7.3.13 *Fie $\Sigma \subseteq E$ şi $\varphi \in E$.*

$\Sigma \cup \{\varphi\}$ *este inconsistentă dacă şi numai dacă* $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Dem.

Dacă $\Sigma \cup \{\varphi\}$ este inconsistentă, atunci $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$, deci prin Teorema deducţiei, $\Sigma \vdash \varphi \rightarrow \neg\varphi$. Aplicând Propoziţia 7.2.30 şi m.p., rezultă $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Reciproc, presupunem că $\Sigma \vdash \neg\varphi$, de unde $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \neg\varphi$ şi $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi$. Conform Propoziţiei 7.2.27, avem $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \varphi \rightarrow (\neg\varphi \rightarrow \psi)$, de unde prin m.p. obţinem $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$ pentru orice $\psi \in E$. □

Corolar 7.3.14 $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ *este inconsistentă* $\Longleftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$.

Dem. Se foloseşte faptul că $\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \neg\neg\varphi$. □

Corolarul precedent caracterizează deducţia formală din ipoteze în termeni de mulţimi inconsistente.

Exemplu 7.3.15 $\emptyset$ este o mulţime consistentă (conform Corolarului 7.3.9), iar E este inconsistentă.

Observaţie 7.3.16 Dacă Σ este consistentă, atunci sistemul deductiv $D(\Sigma)$ generat de Σ este consistent.

Definiţie 7.3.17 O mulţime consistentă Δ este *maximal consistentă* dacă pentru orice mulţime consistentă Σ avem: $\Delta \subseteq \Sigma$ implică $\Delta = \Sigma$.

Cu alte cuvinte, mulţimile maximal consistente sunt elementele maximale ale familiei mulţimilor consistente.

Propoziţia 7.3.18 *Pentru orice mulţime consistentă* Σ*, există o mulţime maximal consistentă* Δ*, astfel încât* $\Sigma \subseteq \Delta$.

Dem. Fie familia de mulţimi $\mathcal{A} = \{\Gamma \subseteq E \mid \Gamma \text{consistentă şi } \Sigma \subseteq \Gamma\}$. Evident că $\Sigma \in \mathcal{A}$. Vom arata că $(\mathcal{A}, \subseteq)$ este inductiv ordonată.
Fie $(\Gamma_i)_{i\in I}$ o familie total ordonată de mulţimi din $\mathcal{A}$: pentru orice $i, j \in I$, $\Gamma_i \subseteq \Gamma_j$ sau $\Gamma_j \subseteq \Gamma_i$. Vom arata că $\Gamma_0 = \bigcup_{i\in I} \Gamma_i$ este un majorant al familiei $(\Gamma_i)_{i\in I}$. In primul rând trebuie demonstrat că $\Gamma_0 \in \mathcal{A}$.
Presupunem prin absurd că Γ_0 este inconsistentă, deci există $\varphi \in E$ astfel încât $\Gamma_0 \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$. Conform Propoziţiei 7.2.13 (ii), există o mulţime finită $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma_0$, astfel încât
$$\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \vdash \varphi.$$
Observăm că există indicii $i_1, \ldots, i_n \in I$, astfel încât $\psi_1 \in \Gamma_{i_1}, \ldots, \psi_n \in \Gamma_{i_n}$. Cum $(\Gamma_i)_{i\in I}$ este total ordonată, va exista $k \in \{i_1, \ldots, i_n\}$, astfel încât toţi $\Gamma_{i_1}, \ldots, \Gamma_{i_n}$ sunt incluşi in Γ_k. Atunci $\{\psi_1, \ldots, \psi_n\} \subseteq \Gamma_k$, deci $\Gamma_k \vdash \neg(\varphi \rightarrow \varphi)$: aceasta contrazice consistenţa lui Γ_k, deci Γ_0 este consistentă. Cum $\Sigma \subseteq \Gamma_0$, rezultă că $\Gamma_0 \in \mathcal{A}$. Este evident că Γ_0 este majorant al familiei $(\Gamma_i)_{i\in I}$.
Aplicarea axiomei lui Zorn asigură existenţa unui element maximal Δ al lui $(\mathcal{A}, \subseteq)$, deci a unei mulţimi maximal consistente Δ ce include pe Σ. □

Observaţie 7.3.19 Se va observa o asemănare între demonstraţia propoziţiei precedente şi demonstraţia următorului rezultat de la algebre Boole: "orice filtru propriu se scufundă într-un ultrafiltru". Ambele demonstraţii fac apel la axioma lui Zorn.

Propoziţia 7.3.20 *Orice mulţime maximal consistentă Δ are următoarele proprietăţi:*
(i) Δ este sistem deductiv ($\Delta \vdash \psi \Longrightarrow \psi \in \Delta$),
(ii) dacă $\varphi \vee \psi \in \Delta$, atunci $\varphi \in \Delta$ sau $\psi \in \Delta$,
(iii) pentru orice $\psi \in E$, $\psi \in \Delta$ sau $\neg\psi \in \Delta$,
(iv) pentru orice $\psi, \chi \in E$, are loc echivalenţa:

$$\psi \to \chi \in \Delta \Longleftrightarrow (\neg\psi \in \Delta \text{ sau } \chi \in \Delta).$$

Dem.
(i): Presupunem prin absurd că există $\psi \in E$ astfel încât ($\Delta \vdash \psi$ şi $\psi \notin \Delta$). Atunci $\Delta \subset \Delta \cup \{\psi\}$, de unde, conform maximalităţii lui Δ, rezultă că $\Delta \cup \{\psi\}$ este inconsistentă. Aplicând Propoziţia 7.3.13, rezultă $\Delta \vdash \neg\varphi$, ceea ce contrazice consistenţa lui Δ.

(ii) Presupunem prin absurd că există $\varphi, \psi \in \Delta$, astfel încât $\varphi \vee \psi \in \Delta$, $\varphi \notin \Delta$ şi $\psi \notin \Delta$. Ca mai sus, se deduce că $\Delta \cup \{\varphi\}$, $\Delta \cup \{\psi\}$ sunt inconsistente, deci $\Delta \vdash \neg\varphi$ şi $\Delta \vdash \neg\psi$ (conform Propoziţiei 7.3.13). Conform Propoziţiei 7.2.31, avem

$$\vdash \neg\varphi \to (\neg\psi \to \neg(\neg\varphi \to \psi)),$$

de unde prin m.p. obţinem că $\Delta \vdash \neg(\neg\varphi \to \psi)$. Această ultimă proprietate spune că $\Delta \vdash \neg(\varphi \vee \psi)$, ceea ce contrazice consistenţa lui Δ.

(iii) Rezultă din (ii) şi din $\vdash \psi \vee \neg\psi$.

(iv) Rezultă din (iii) şi din: $\vdash \varphi \to \psi \Longleftrightarrow \vdash \neg\varphi \vee \psi$. □

Propoziţia precedentă pune în evidenţă proprietăţi remarcabile ale mulţimilor maximal consistente (analoge cu cele ale ultrafiltrelor din algebra Boole). Aceste proprietăţi vor fi folosite în construcţia modelului din propoziţia următoare.

Propoziţia 7.3.21 *Orice mulţime consistentă Σ admite un model.*

Dem. Fie Δ o mulţime maximal consistentă astfel încât $\Sigma \subseteq \Delta$. Considerăm interpretarea h definită, pentru orice $x \in V$, prin:

$$h(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x \in \Delta, \\ 0, & \text{dacă} \quad x \notin \Delta. \end{cases}$$

Pentru orice $\varphi \in E$, avem echivalenţa

$$h^{\sim}(\varphi) = 1 \Longleftrightarrow \varphi \in \Delta. \tag{7.5}$$

Demonstrarea lui (7.5) se face prin inducţie relativ la φ:
- dacă $\varphi \in V$: (7.5) este chiar definiţia lui h.
- dacă $\varphi = \neg\alpha$: folosind ipoteza inducţiei şi Propoziţia 7.3.20 (iii),

$$h^{\sim}(\varphi) = 1 \Longleftrightarrow h^{\sim}(\alpha) = 0 \Longleftrightarrow \alpha \notin \Delta \Longleftrightarrow \varphi \in \Delta.$$

- dacă $\varphi = \alpha \to \beta$: din ipoteza inducţiei şi Propoziţia 7.3.20 (iii) şi (iv), obţinem:
$h^{\sim}(\varphi) = 1 \iff h^{\sim}(\alpha) \to h^{\sim}(\beta) = 1$
$\iff h^{\sim}(\alpha) = 0$ sau $h^{\sim}(\beta) = 0$ (suntem in L_2)
$\iff \alpha \notin \Delta$ sau $\beta \in \Delta$
$\iff \neg\alpha \in \Delta$ sau $\beta \in \Delta$
$\iff \alpha \to \beta \in \Delta$
$\iff \varphi \in \Delta$.
Folosind (7.5) şi $\Sigma \subseteq \Delta$, rezultă că $h^{\sim}(\sigma) = 1$, pentru orice $\sigma \in \Sigma$. $\square$

Teorema 7.3.22 *(Teorema de completitudine extinsă)*
Fie $\Sigma \subseteq E$ şi $\varphi \in E$.

$$\Sigma \vdash \varphi \iff \Sigma \models \varphi.$$

Dem.
$\Longrightarrow$: Prin inducţie asupra modului de definire a noţiunii $\Sigma \vdash \varphi$.
$\Longleftarrow$: Dacă $\Sigma \not\vdash \varphi$, atunci $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ este consistentă (Corolarul 7.3.14). Aplicând Propoziţia 7.3.20, $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ admite un model h. Atunci h este un model al lui Σ şi $h^{\sim}(\varphi) = 0$, deci $\Sigma \not\models \varphi$. $\square$

Observaţii 7.3.23
(1) Teorema de completitudine extinsă stabileşte echivalenţa între inferenţa sintactică şi cea semantică.
(2) Pentru $\Sigma = \emptyset$, se obţine Teorema de completitudine

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi,$$

demonstrată intr-o secţiune precedentă.
(3) Teorema de completitudine este un caz particular al Teoremei de completitudine extinse, iar aceasta s-a obţinut aplicând Propoziţia 7.3.21. La rândul ei, Propoziţia 7.3.21 poate fi demonstrată plecând de la Teorema de completitudine. Pentru a proba această afirmaţie, să considerăm o mulţime consistentă Σ. Fie $\varphi \in \Sigma$. Atunci $\{\varphi\}$ este o mulţime consistentă, deci conform Propozitiei 7.3.13, $\not\vdash \neg\varphi$. Aplicând Teorema de completitudine, rezultă $\not\models \neg\varphi$, deci există o structură de ordinul I $\mathcal{A}$ astfel încât $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$. Prin urmare, $\mathcal{A} \models \varphi$, pentru orice $\varphi \in \Sigma$, deci $\mathcal{A} \models \Sigma$.

7.4 Teorema de completitudine versus Teorema lui Stone

Am văzut că Teorema de completitudine (extinsă) poate fi dedusă folosind Teorema lui Stone.

Vom da acum o demonstraţie a Teoremei de reprezentare a lui Stone folosind Teorema de completitudine extinsă. Amintim întâi Teorema de reprezentare a lui Stone în următoarea formă:

Teorema 7.4.1 *(Teorema de reprezentare a lui Stone)*
Pentru orice algebră Boole $\mathcal{B}$, există o mulţime nevidă X şi un morfism boolean injectiv $d : B \longrightarrow L_2^X$.

Dem.
(a) Considerăm sistemul formal al calculului propoziţional L, în care mulţimea V a variabilelor este B:

$$V = B.$$

Cu notaţia uzuală, E este mulţimea enunţurilor, $E/_\sim$ este algebra Lindenbaum-Tarski asociată lui L şi $p : E \longrightarrow E/_\sim$ este surjecţia canonică.

Se poate arăta, imitând demonstraţia Propoziţiei 7.3.2, că există un morfism boolean surjectiv $f : E/_\sim \longrightarrow B$, astfel încât următoarea diagramă este comutativă:

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "p\mid_B"] \arrow[dr, "1_B"'] & & E/_\sim \arrow[dl, "f"] \\ & B & \end{tikzcd}$$

Atunci

$$F = f^{-1}(1) = \{\widehat{\varphi} \mid f(\widehat{\varphi}) = 1\}$$

este un filtru propriu în $E/_\sim$, deci putem considera algebra Boole cât $(E_\sim)/_F$. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, are loc echivalenţa următoare:

$$\widehat{\varphi}/_F = \widehat{\psi}/_F \iff f(\widehat{\varphi}) = f(\widehat{\psi}).$$

Atunci funcţia $\lambda : (E/_\sim)/_F \longrightarrow B$ definită de

$$\lambda(\widehat{\varphi}/_F) = f(\widehat{\varphi}), \quad \text{pentru orice } \varphi \in E$$

este un izomorfism boolean.

(b) Fie F un filtru propriu în $E/_\sim$ (eventual cel de la (a)) şi fie $\Delta = p^{-1}(F)$. Δ este un sistem deductiv consistent în L şi pentru orice $\varphi, \psi \in E$ au loc echivalenţele:

$$\widehat{\varphi}/_F = \widehat{\psi}/_F \iff \widehat{\varphi} \leftrightarrow \widehat{\psi} \in F \iff \widehat{\varphi \leftrightarrow \psi} \in F \iff$$

$$\varphi \leftrightarrow \psi \in \Delta \iff \Delta \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \iff \varphi/\Delta = \psi/\Delta,$$

unde φ/Δ este clasa de echivalenţă a lui φ în raport cu $\sim_\Delta$.
Dacă $E/_\Delta = E/_{\sim_\Delta}$ este algebra Lindenbaum-Tarski asociată lui Δ, atunci echivalenţele de mai sus spun că funcţia $\Phi : (E/_\sim)/_F \longrightarrow E/_\Delta$, definită prin $\Phi(\widehat{\varphi}/_F) = \varphi/\Delta$ pentru orice $\varphi \in E$, este un izomorfism boolean.

(c) Presupunem că Δ este o mulţime consistentă (eventual cea de la punctul (b)) şi X este mulţimea modelelor lui Δ:

$$X = \{h : V \longrightarrow L_2 \mid h \models \Delta\}.$$

Conform Teoremei de completitudine extinsă (presupusă anterior demonstrată), $X \neq \emptyset$. Pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem echivalenţele:

$$\begin{aligned}\varphi/\Delta = \psi/\Delta &\Longleftrightarrow \Delta \vdash \varphi \leftrightarrow \psi\\ &\Longleftrightarrow \Delta \models \varphi \leftrightarrow \psi\\ &\Longleftrightarrow h^{\sim}(\varphi \leftrightarrow \psi) = 1, \text{ pentru orice } h \in X,\\ &\Longleftrightarrow h^{\sim}(\varphi) \leftrightarrow h^{\sim}(\psi) = 1, \text{ pentru orice } h \in X,\\ &\Longleftrightarrow h(\varphi) = h(\psi), \text{ pentru orice } h \in X.\end{aligned}$$

Definim funcţia $\lambda : E/_{\Delta} \longrightarrow L_2^X$ prin: $\lambda(\varphi/\Delta)(h) = h^{\sim}(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$ şi $h \in X$. Echivalenţele de mai sus arată că funcţia λ este bine definită şi că ea este injectivă. Este uşor de văzut că λ este morfism boolean. In consecinţă, λ este un morfism boolean injectiv.

Asamblând paşii (a), (b), (c), vom obţine Teorema lui Stone.

Considerăm compunerea morfismelor booleene (toate injective) de la aceşti trei paşi:

$$B \stackrel{\cong}{\longrightarrow} (E/_{\sim})/_{F} \stackrel{\Phi}{\hookrightarrow} E/_{\Delta} \stackrel{\lambda}{\hookrightarrow} L_2^X.$$

Am obţinut un morfism boolean injectiv $d : B \hookrightarrow L_2^X$. □

Observaţie 7.4.2 In demonstraţia Teoremei lui Stone şi cea a Teoremei de completitudine extinsă, s-a folosit axioma lui Zorn. Intr-o axiomatizare a teoriei mulţimilor fără axioma lui Zorn, enunţurile celor două teoreme apar ca proprietăţi echivalente.

7.5 Exemple de deducţii formale

Exemplele prezentate în această secţiune vor avea ca punct de plecare propoziţii formulate în limbajul natural. Acestea vor fi trecute în limbajul formal şi apoi vor fi prelucrate conform mecanismului inferenţial al lui L.

Exemplu 7.5.1 Se consideră propoziţiile:
(a) Cuget, deci exist.
(b) Cuget, deci dacă exist, nu mă duc la cursul de logică.
(c) Cuget, deci nu mă duc la cursul de logică.
Vrem să arătăm că din primele două propoziţii se deduce a treia.

Vom nota:
$p \equiv$ "cuget"
$q \equiv$ "exist"
$r \equiv$ "nu mă duc la cursul de logică".

Atunci cele trei propoziţii (a) - (c) se vor scrie simbolic astfel:
(a): $p \to q$
(b): $p \to (q \to r)$
(c): $p \to r$
Dacă $\Sigma = \{p \to q, p \to (q \to r)\}$, atunci trebuie să arată m că $\Sigma \vdash p \to r$. Prezentăm mai jos demonstraţia formală a lui $\Sigma \vdash p \to r$:

(1) Σ	$\vdash$	$p \to (q \to r)$	
(2) Σ	$\vdash$	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	(G2)
(3) Σ	$\vdash$	$(p \to q) \to (p \to r)$	m.p., (1), (2)
(4) Σ	$\vdash$	$p \to q$	
(5) Σ	$\vdash$	$p \to r$	m.p., (3), (4).

Exemplu 7.5.2 Se consideră propoziţiile:
(a) Dacă are mintea limpede, atunci studentul Tică va ajunge un informatician bun, prin urmare el merge des la plimbare.
(b) Dacă studentul Tică nu va ajunge un informatician bun, atunci el nu are mintea limpede.
(c) El merge des la plimbare.
Aratăm că din (a) şi (b) se deduce (c).

Să notăm:
$p \equiv$ ”el merge des la plimbare”
$q \equiv$ ”are mintea limpede”
$r \equiv$ ”studentul Tică va ajunge un informatician bun”.
Cele trei propoziţii (a) - (c) se reprezintă atunci simbolic astfel:
(a): $(q \to r) \to p$
(b): $\neg r \to \neg q$
(c): p
Dacă $\Sigma = \{(q \to r) \to p, \neg r \to \neg q\}$, atunci trebuie să arată m că $\Sigma \vdash p$. Aceasta decurge din Σ-demonstraţia următoare:

(1) Σ	$\vdash$	$\neg r \to \neg q$	
(2) Σ	$\vdash$	$(\neg r \to \neg q) \to (q \to r)$	(G2)
(3) Σ	$\vdash$	$q \to r$	m.p., (1), (2)
(4) Σ	$\vdash$	$(q \to r) \to p$	
(5) Σ	$\vdash$	p	m.p., (3), (4).

Exemplu 7.5.3 Se consideră propoziţiile:
(a) *Iar în lumea cea comună a visa e un pericul*
Căci de ai cumva iluzii, eşti pierdut şi eşti ridicul.
(M. Eminescu, Scrisoarea a II-a)
(b) Dacă nu eşti pierdut, atunci nu ai iluzii.
(c) Dacă nu eşti ridicul, atunci nu ai iluzii.
(d) In lumea cea comună a visa e un pericul.

Vrem să arătăm că din propoziţiile (a) - (c) se deduce (d).

Notăm:
$q \equiv$ "în lumea cea comună a visa e un pericul"
$r \equiv$ "ai (cumva) iluzii"
$s_1 \equiv$ "esti pierdut"
$s_2 \equiv$ "esti ridicul".
Atunci (a) - (d) au scrierea simbolică:
(a): $(r \to (s_1 \wedge s_2)) \to q$
(b): $\neg s_1 \to \neg r$
(c): $\neg s_2 \to \neg r$
(d): q
Dacă $\Sigma = \{(r \to (s_1 \wedge s_2)) \to q, \neg s_1 \to \neg r, \neg s_2 \to \neg r\}$, atunci Σ-demonstraţia următoare va stabili că $\Sigma \vdash q$:

(1) Σ	$\vdash$	$(r \to (s_1 \wedge s_2)) \to q$	
(2) Σ	$\vdash$	$(r \to s_1) \to ((r \to s_2) \to (r \to (s_1 \wedge s_2)))$	lista
(3) Σ	$\vdash$	$\neg s_1 \to \neg r$	
(4) Σ	$\vdash$	$(\neg s_1 \to \neg r) \to (r \to s_1)$	(G3)
(5) Σ	$\vdash$	$r \to s_1$	m.p., (3), (4)
(6) Σ	$\vdash$	$\neg s_2 \to \neg r$	
(7) Σ	$\vdash$	$(\neg s_2 \to \neg r) \to (r \to s_2)$	(G3)
(8) Σ	$\vdash$	$r \to s_2$	m.p., (6), (7)
(9) Σ	$\vdash$	$(r \to s_2) \to (r \to (s_1 \wedge s_2))$	m.p., (2), (5)
(10) Σ	$\vdash$	$r \to (s_1 \wedge s_2)$	m.p., (8), (9)
(11) Σ	$\vdash$	q	m.p., (1), (10).

Exemplu 7.5.4 Se consideră propoziţiile:
(a) Dacă nu dau pe la curs, deoarece explicaţiile nu mă conving, atunci nu ştiu ce s-a predat ora trecută.
(b) Sunt sigur pe ce ştiu, căci dau pe la curs şi explicaţiile profesorului nu mă conving.
(c) Dacă ştiu ce s-a predat ora trecută, atunci sunt sigur pe ce ştiu.
Vrem să arătăm că ultima propoziţie se deduce din primele două.

Notăm:
$p \equiv$ "ştiu ce s-a predat ora trecută"
$q \equiv$ "dau pe la curs"
$r \equiv$ "explicaţiile profesorului mă conving"
$s \equiv$ "sunt sigur pe ce ştiu".

Atunci propoziţiile (a) - (c) se scriu astfel:
(a): $(\neg r \to \neg q) \to \neg p$
(b): $(q \wedge \neg r) \to s$
(c): $p \to s$.

Vom nota $\Sigma = \{(\neg r \to \neg q) \to \neg r, (q \wedge \neg r) \to s\}$ şi vom demonstra că $\Sigma \vdash p \to s$.

(1) Σ	$\vdash$	$(\neg r \to \neg q) \to \neg p$	
(2) Σ	$\vdash$	$((\neg r \to \neg q) \to \neg p) \to (\neg\neg p \to \neg(\neg r \to \neg q))$	lista
(3) Σ	$\vdash$	$\neg\neg p \to \neg(\neg r \to \neg q)$	m.p., (1), (2)
(4) Σ	$\vdash$	$p \to \neg\neg p$	lista
(5) Σ	$\vdash$	$p \to \neg(\neg r \to \neg q)$	(3), (4)
(6) Σ	$\vdash$	$p \to (\neg r \wedge q)$	idem (5)
(7) Σ	$\vdash$	$(\neg r \wedge q) \to (q \wedge \neg r)$	lista
(8) Σ	$\vdash$	$p \to (q \wedge \neg r)$	(6), (7)
(9) Σ	$\vdash$	$(q \wedge \neg r) \to s$	
(10) Σ	$\vdash$	$p \to s$	(8), (9)

Exemplu 7.5.5 Se consideră propoziţiile:
(a) Dacă nu plouă, atunci în cazul când ies la plimbare, nu trec pe la cafenea.
(b) Dacă nu plouă, atunci ies la plimbare.
(c) Trec pe la cafenea.
(d) Plouă.
Vom demonstra că din primele trei propoziţii se deduce (d).

Notăm:
$\varphi \equiv$ "plouă"
$\psi \equiv$ "ies la plimbare"
$\chi \equiv$ "trec pe la cafenea".
Atunci propoziţiile (a) - (d) se scriu astfel:
(a): $\neg\varphi \to (\psi \to \neg\chi)$
(b): $\neg\varphi \to \psi$
(c): χ
(d): φ
şi mulţimea de ipoteze este $\Sigma = \{\neg\varphi \to (\psi \to \neg\chi), \neg\varphi \to \psi, \chi\}$. Prezentăm o Σ-demonstraţie că $\Sigma \vdash \varphi$.

(1) Σ	$\vdash$	$\neg\varphi \to (\psi \to \neg\chi)$	
(2) Σ	$\vdash$	$\neg\varphi \to \psi$	
(3) Σ	$\vdash$	χ	
(4) Σ	$\vdash$	$(\neg\varphi \to (\psi \to \neg\chi)) \to ((\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \neg\chi))$	(G2)
(5) Σ	$\vdash$	$(\neg\varphi \to \psi) \to (\neg\varphi \to \neg\chi)$	m.p., (1), (4)
(6) Σ	$\vdash$	$\neg\varphi \to \neg\chi$	m.p., (2), (5)
(7) Σ	$\vdash$	$(\neg\varphi \to \neg\chi) \to (\chi \to \varphi)$	(A3)
(8) Σ	$\vdash$	$\chi \to \varphi$	m.p., (6), (7)
(9) Σ	$\vdash$	φ	m.p., (3), (8)

Exemplu 7.5.6 Fie X atacantul echipei de fotbal U ce joacă în Cupa U.E.F.A. şi Y finanţatorul lui U.

Se consideră propoziţiile următoare:
(a) X îşi va cumpăra un castel în Scoţia, pentru că Y îi va da un milion de dolari,

deoarece U va câştiga Cupa U.E.F.A..
(b) Dacă U va câştiga Cupa U.E.F.A., atunci X va locui în Scoţia, deoarece îşi va cumpăra un castel în Scoţia.
(c) Dacă Y nu îi va da un milion de dolari, atunci U nu va câştiga Cupa U.E.F.A..
(d) X nu va locui în Scoţia.
Vrem să demonstrăm că propoziţiile (a) - (d) constituie o mulţime de premize din care poate fi dedusă propoziţia ”U nu va câştiga Cupa U.E.F.A.”.

Notăm:
$p \equiv$ ”U va câştiga Cupa U.E.F.A.”
$q \equiv$ ”Y îi va da un milion de dolari”
$r \equiv$ ”X îşi va cumpăra un castel în Scoţia”
$s \equiv$ ”X va locui în Scoţia”.
Atunci cele patru propoziţii (a) - (d) se reprezintă simbolic astfel:
(a): $p \to (q \to r)$
(b): $p \to (r \to s)$
(c): $\neg q \to \neg p$
(d): $\neg s$.
Notând $\Sigma = \{p \to (q \to r), p \to (r \to s), \neg q \to \neg p, \neg s\}$, rezolvarea problemei revine la a stabili că $\Sigma \vdash \neg p$. Pentru aceasta, avem nevoie de următoarea lemă:

Lema 7.5.7 *Dacă $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ sunt enunţuri oarecare ale lui L, atunci*

$$\vdash (\alpha \to (\beta \to \gamma)) \to [(\alpha \to (\gamma \to \delta)) \to (\alpha \to (\beta \to \delta))].$$

Dem. Aplicând de mai multe ori Teorema deducţiei, aceasta este echivalent cu a arată că

$$\Delta = \{\alpha \to (\beta \to \gamma), \alpha \to (\gamma \to \delta), \alpha, \beta\} \vdash \delta.$$

Prezentăm mai jos o demonstraţie a lui $\Delta \vdash \delta$:

$$\begin{array}{llll}
\Delta & \vdash & \alpha & \\
\Delta & \vdash & \alpha \to (\beta \to \gamma) & \\
\Delta & \vdash & \beta \to \gamma & \text{m.p.} \\
\Delta & \vdash & \beta & \\
\Delta & \vdash & \gamma & \text{m.p.} \\
\Delta & \vdash & \alpha \to (\gamma \to \delta) & \\
\Delta & \vdash & \gamma \to \delta & \text{m.p.} \\
\Delta & \vdash & \delta & \text{m.p..}
\end{array}$$

□

Demonstraţia lemei fiind terminată, trecem la a stabili că $\Sigma \vdash \neg p$. Prezentăm mai jos o Σ-demonstraţie:

(1) Σ	$\vdash$	$p \to (q \to r)$	
(2) Σ	$\vdash$	$p \to (r \to s)$	
(3) Σ	$\vdash$	$(p \to (q \to r)) \to$ $[(p \to (r \to s)) \to (p \to (q \to s))]$	Lema
(4) Σ	$\vdash$	$(p \to (r \to s)) \to (p \to (q \to s))$	m.p., (1), (3)
(5) Σ	$\vdash$	$p \to (q \to s)$	m.p., (2), (4)
(6) Σ	$\vdash$	$(p \to (q \to s)) \to ((p \to q) \to (p \to s))$	(G2)
(7) Σ	$\vdash$	$(p \to q) \to (p \to s)$	m.p., (5), (6)
(8) Σ	$\vdash$	$\neg q \to \neg p$	
(9) Σ	$\vdash$	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$	(G3)
(10) Σ	$\vdash$	$p \to q$	m.p., (8), (9)
(11) Σ	$\vdash$	$p \to s$	m.p., (7), (10)
(12) Σ	$\vdash$	$(p \to s) \to (\neg s \to \neg p)$	lista
(13) Σ	$\vdash$	$\neg s \to \neg p$	m.p., (11), (12)
(14) Σ	$\vdash$	$\neg s$	
(15) Σ	$\vdash$	$\neg p$	m.p., (13), (14).

Exemplu 7.5.8 Se consideră propoziţiile următoare:
(a) In cazul că iau examenul de logică, mă voi duce la munte, fiindcă merit.
(b) Dacă iau examenul de logică şi merit, atunci voi fi fericit.
(c) Dacă nu merit, atunci nu iau examenul sau nu mă duc la munte.
(d) Mă voi duce la munte.
Fie Σ mulţimea de premize formată din propoziţiile (a) - (d). Vom demonstra că $\Sigma \vdash$ "Dacă iau examenul, atunci voi fi fericit."
Pentru aceasta, vom nota:
$p \equiv$ "iau examenul"
$q \equiv$ "merit"
$r \equiv$ "mă voi duce la munte"
$s \equiv$ "voi fi fericit"
şi obţinem următoarea reprezentare simbolică:
(a): $p \to (q \to r)$
(b): $(p \wedge q) \to s$
(c): $\neg q \to (\neg p \vee \neg r)$
(d): r

Va trebui să arătăm că $\Sigma \vdash p \to s$. Pentru aceasta, avem nevoie de următorul rezultat.

Lema 7.5.9 *Pentru orice enunţuri α, β, avem*

$$\vdash (\neg\alpha \vee \neg\beta) \to \neg(\alpha \wedge \beta)$$

Prezentăm o Σ-demonstraţie pentru $\Sigma \vdash p \to s$.

(1) Σ	$\vdash$	$p \to (q \to r)$	
(2) Σ	$\vdash$	$(p \to (q \to r)) \to ((p \to q) \to (p \to r))$	(G2)
(3) Σ	$\vdash$	$(p \to q) \to (p \to r)$	m.p., (1), (2)
(4) Σ	$\vdash$	$\neg q \to (\neg p \vee \neg r)$	
(5) Σ	$\vdash$	$(\neg p \vee \neg r) \to \neg(p \wedge r)$	Lema
(6) Σ	$\vdash$	$\neg q \to \neg(p \wedge r)$	(R1), (4), (5)
(7) Σ	$\vdash$	$(\neg q \to \neg(p \wedge r)) \to ((p \wedge r) \to q)$	(G3)
(8) Σ	$\vdash$	$(p \wedge r) \to q$	m.p., (6), (7)
(9) Σ	$\vdash$	$((p \wedge r) \to q) \to (r \to (p \to q))$	lista
(10) Σ	$\vdash$	$r \to (p \to q)$	m.p., (8), (9)
(11) Σ	$\vdash$	r	
(12) Σ	$\vdash$	$p \to q$	m.p., (10), (11)
(13) Σ	$\vdash$	$(p \wedge q) \to s$	
(14) Σ	$\vdash$	$((p \wedge q) \to s) \to (p \to (q \to s))$	lista
(15) Σ	$\vdash$	$p \to (q \to s)$	m.p., (13), (14)
(16) Σ	$\vdash$	$(p \to (q \to s)) \to ((p \to q) \to (p \to s))$	(G2)
(17) Σ	$\vdash$	$(p \to q) \to (p \to s)$	m.p., (15), (16)
(18) Σ	$\vdash$	$p \to s$	m.p., (12), (17)

Exemplu 7.5.10 Considerăm propoziţiile următoare:
(a) Dacă nu am chef şi îmi displace materia predată, atunci nu mă duc la curs.
(b) Nu îmi displace materia predată, pentru că am chef.
(c) Mă duc la curs, dacă ni se dau subiectele de examen.
(d) Dacă nu mă duc la curs, atunci ni se dau subiectele de examen.
(e) Imi displace materia predată.
Vrem să aratăm că textul format din aceste cinci propoziţii este inconsistent.

Vom nota:
$p \equiv$ "îmi displace materia predată"
$q \equiv$ "am chef"
$r \equiv$ "mă duc la curs"
$s \equiv$ "ni se dau subiectele de examen".
Atunci propoziţiile (a) - (e) se reprezintă simbolic astfel:
(a): $(\neg q \wedge p) \to \neg r$
(b): $q \to \neg p$
(c): $s \to r$
(d): $\neg r \to s$
(e): p.
Vrem să aratăm că următoarea mulţime de enunţuri este inconsistentă:

$$\{(\neg q \wedge p) \to \neg r, q \to \neg p, s \to r, \neg r \to s, p\}.$$

Acest lucru este echivalent cu a arată că $\Sigma \vdash \neg p$, unde:

$$\Sigma = \{(\neg q \wedge p) \to \neg r, q \to \neg p, s \to r, \neg r \to s\}.$$

Prezentăm mai jos o Σ-demonstraţie pentru $\Sigma \vdash \neg p$:

(1)	Σ	$\vdash$	$(\neg q \wedge p) \to \neg r$	
(2)	Σ	$\vdash$	$((\neg q \wedge p) \to \neg r) \to (p \to (\neg q \to r))$	lista
(3)	Σ	$\vdash$	$p \to (\neg q \to r)$	m.p., (1), (2)
(4)	Σ	$\vdash$	$q \to \neg p$	
(5)	Σ	$\vdash$	$(q \to \neg p) \to (p \to \neg q)$	lista
(6)	Σ	$\vdash$	$p \to \neg q$	m.p., (4), (5)
(7)	Σ	$\vdash$	$(p \to (\neg q \to r)) \to [(p \to \neg q) \to (p \to \neg r)]$	(G2)
(8)	Σ	$\vdash$	$(p \to \neg q) \to (p \to \neg r)$	m.p., (3), (7)
(9)	Σ	$\vdash$	$p \to \neg r$	m.p., (6), (8)
(10)	Σ	$\vdash$	$(p \to \neg r) \to (r \to \neg p)$	lista
(11)	Σ	$\vdash$	$r \to \neg p$	m.p., (9), (10)
(12)	Σ	$\vdash$	$s \to r$	
(13)	Σ	$\vdash$	$s \to \neg p$	(R1), (11), (12)
(14)	Σ	$\vdash$	$(r \to \neg p) \to [(s \to \neg p) \to ((r \vee s) \to \neg p)]$	lista
(15)	Σ	$\vdash$	$(s \to \neg p) \to ((r \vee s) \to \neg p)$	m.p., (13), (14)
(16)	Σ	$\vdash$	$(r \vee s) \to \neg p$	m.p., (13), (15)
(17)	Σ	$\vdash$	$\neg r \to s$	
(18)	Σ	$\vdash$	$r \vee s$	este chiar (17)
(19)	Σ	$\vdash$	$\neg p$	m.p., (16), (18)

Exemplu 7.5.11 U si V sunt două echipe de fotbal din campionatul intern, iar X este antrenorul lui U.

Să se arate că textul format din următoarele propoziţii este inconsistent.
(a) Dacă U bate V, atunci merge în cupele europene pentru că va avea mai multe puncte.
(b) Dacă U bate V, atunci X va fi bucuros, pentru că U va merge în cupele europene.
(c) Dacă portarul lui U se va însănatoşi, atunci U va bate V.
(d) Dacă portarul se va însănatoşi, atunci U va avea mai multe puncte.
(e) Portarul lui U se va însănatoşi.
(f) X nu va fi bucuros.

Notăm:
$\alpha \equiv$ "U bate V"
$\beta \equiv$ "U va merge în cupele europene"
$\gamma \equiv$ "U va avea mai multe puncte"
$\delta \equiv$ "X va fi bucuros"
$\varepsilon \equiv$ "Portarul lui U se va însănatoşi"
Atunci propoziţiile date au următoarea reprezentare simbolică:
(a): $\alpha \to (\gamma \to \beta)$
(b): $\alpha \to (\beta \to \delta)$
(c): $\varepsilon \to \alpha$
(d): $\varepsilon \to \gamma$

(e): ε
(f): $\neg\delta$.
Fie

$$\Sigma = \{\alpha \to (\gamma \to \beta), \alpha \to (\beta \to \delta), \varepsilon \to \alpha, \varepsilon \to \gamma, \varepsilon\}.$$

Dacă demonstrăm că $\Sigma \vdash \delta$, atunci propoziţiile (a) - (f) sunt contradictorii. Prezentăm mai jos o demonstraţie pentru $\Sigma \vdash \delta$:

(1)	Σ	$\vdash$	ε	
(2)	Σ	$\vdash$	$\varepsilon \to \alpha$	
(3)	Σ	$\vdash$	$\varepsilon \to \gamma$	
(4)	Σ	$\vdash$	α	m.p., (1), (2)
(5)	Σ	$\vdash$	γ	m.p., (1), (3)
(6)	Σ	$\vdash$	$\alpha \to (\gamma \to \beta)$	
(7)	Σ	$\vdash$	$\gamma \to \beta$	m.p., (4), (6)
(8)	Σ	$\vdash$	$\alpha \to (\beta \to \delta)$	
(9)	Σ	$\vdash$	$\beta \to \delta$	m.p., (4), (8)
(10)	Σ	$\vdash$	$\gamma \to \delta$	(R1), (7), (9)
(11)	Σ	$\vdash$	δ	m.p., (5), (10).

Chapter 8

Sistemul formal al calculului cu predicate

Teoriile matematice studiază proprietăţi ale structurilor matematice.

O structură este definită ca o mulţime nevidă (universul structurii), înzestrată cu operaţii, relaţii şi constante verificând anumite axiome. Elementele universului structurii vor fi numite *indivizi.* Dacă operaţiile şi relaţiile acţionează asupra indivizilor, iar constantele desemnează anumiţi indivizi privilegiaţi, atunci este vorba de o structură de ordinul I.

Atunci când există şi operaţii şi relaţii ce acţionează asupra mulţimilor de indivizi, iar unele constante sunt mulţimi de indivizi, avem de-a face cu structuri de ordinul II. Analog, putem avea structuri de ordinul III, IV, etc. Există cazuri când trebuie să considerăm structuri formate din mai multe universuri, cu operaţii şi relaţii ce operează cu indivizi din universuri diferite. Asemenea structuri, numite *mulţisortate*, sunt folosite îndeosebi în informatică teoretică.

In acest capitol, sunt considerate numai structuri de ordinul I. Două structuri sunt *de acelaşi tip* τ (= similare) (de aceeaşi signatură τ), dacă există o corespondenţă bijectivă între operaţiile, relaţiile şi constantele lor, iar acestea operează în acelaşi mod asupra indivizilor celor două structuri. Proprietăţile structurilor (de ordinul I), ce se pot exprima în termeni de indivizi, de operaţii, de relaţii şi de constante, folosind conectorii propoziţionali şi cuantificatorii "există" şi "oricare", se numesc *proprietăţi de ordinul I.*

Unei clase formate din structuri de acelaşi tip τ îi vom asocia un limbaj formal (L_τ = limbajul calculului cu predicate), în care proprietăţile de ordinul I sunt traduse prin formule şi enunţuri. O listă de axiome şi de reguli de deducţie defineşte structura logică a lui L_τ.

Teoremele formale şi deducţia formală sunt definite recursiv, plecând de la axiome şi aplicând, cu fiecare pas, câte o regulă de deducţie.

Inşiruirea acestor paşi defineşte o construcţie simbolică numită demonstraţie formală. Tot la nivel formal, se defineşte şi un concept de deducţie din ipoteze. Considerând la start axiomele şi o mulţime de enunţuri (ipoteze formale) şi aplicând apoi succesiv câte o regula de deducţie, obţinem niste enunţuri numite *concluzii formale.* Procedeul recursiv de trecere de la ipoteze formale la concluzii formale este tocmai *deducţia formală din ipoteze.* Limbajul şi structura logică constituie *sintaxa* lui L_τ.

Intuitiv, o *teorie* este o mulţime de aserţiuni ce pot fi valabile sau nu în structurile considerate. La nivel formal, o teorie (de ordinul I) este o mulţime de enunţuri ale lui L_τ.

Semantica lui L_τ începe cu noţiunea de interpretare, pe baza căreia este definită validitatea enunţurilor lui L_τ într-o structură de ordinul I. Se ajunge la noţiunile tarskiene de *model al unui enunţ* şi de *model al unei teorii.* De aici se obţine conceptul de *deducţie semantică*, introdus tot de Tarski. O teoremă centrală asupra calculului cu predicate arată că orice teorie consistentă într-un limbaj numărabil admite un model cel mult numărabil. Rezultatul, demonstrat de Henkin în [21], are drept consecinţă Teorema de completitudine extinsă: deducţia sintactică este echivalentă cu deducţia semantică. Ca un caz particular, se obţine Teorema de completitudine a lui Gödel [19]: teoremele formale ale lui L_τ coincid cu enunţurile universal adevărate.

Echivalenţele exprimate prin cele două teoreme de completitudine:

teoreme formale $\Longleftrightarrow$ enunţuri universal adevărate

deducţia formală $\Longleftrightarrow$ deducţia semantică

stabilesc o legătură puternică între sintaxa şi semantica lui L_τ. Aceasta permite un transfer de proprietăţi între sintaxă şi semantică, având drept rezultat un plus de cunoaştere pentru ambele planuri. Această idee ne dă o sugestie sumară asupra subiectelor de studiu în teoria modelelor, una din principalele ramuri ale logicii matematice [2], [5].

Scopul acestui capitol este de a prezenta sintaxa şi semantica lui L_τ şi de a demonstra cele două teoreme de completitudine menţionate mai sus.

In Secţiunea 1, este definită noţiunea de structură de ordinul I şi este construit limbajul formal L_τ, asociat clasei structurilor de ordinul I ce au aceeaşi signatură.

Secţiunea 2 se ocupă cu semantica lui L_τ. Sunt definite interpretările lui L_τ în structuri de ordinul I, valorile formulelor şi enunţurilor lui L_τ relative la interpretare, enunţurile universal adevărate, etc. şi sunt demonstrate unele proprietăţi ale deducţiei semantice.

Secţiunea 3 conţine unele exemple de enunţuri universal adevărate.

In Secţiunea 4, este continuată construcţia sintaxei lui L_τ, prin precizarea axiomelor şi regulilor de deducţie şi prin definirea teoremelor formale şi a deducţiei formale. Sunt prezentate unele exemple de teoreme formale şi unele proprietăţi sintactice ale lui L_τ.

O analiză sumară a algebrei Lindenbaum-Tarski asociată lui L_τ se găseşte în Secţiunea 5.

Secţiunea 6 este consacrată celor două rezultate principale ale capitolului: Teorema de completitudine (Gödel) şi Teorema de completitudine extinsă (Henkin). Este expusă în detaliu metoda constantelor, prin care Henkin a demonstrat în [21] aceste două teoreme.

Capitolul se încheie cu o secţiune 7 asupra unor exemple.

Conţinutul acestui capitol este preluat din [15], [16].

8.1 Structuri şi limbaj

In această secţiune vom introduce structurile de ordinul I şi vom construi un limbaj formal L_τ asociat clasei structurilor de ordinul I ce au signatură fixată. Pornind de la un alfabet format din variabile, simboluri de operaţii, de relaţii şi de constante, simboluri logice (conectori şi cuantificatori), simbolul de egalitate şi din paranteze, sunt definite prin inducţie termenii, formulele şi enunţurile lui L_τ. Alegerea simbolurilor de operaţii, de relaţii şi de constante reflectă signatura structurilor fixate.

Incepem cu câteva exemple de structuri.

Exemplu 8.1.1 Noţiunea de *latice* se poate defini în două moduri:
(i) ca o structură parţial ordonată $(L, \leq)$, în care există $\sup(x, y)$ şi $\inf(x, y)$ pentru orice $x, y \in L$;
(ii) ca o structură algebrică $(L, \vee, \wedge)$, în care $\vee, \wedge$ sunt două operaţii binare (pe L), asociative, comutative, idempotente şi care verifică proprietatea de absorbţie.

Exemplu 8.1.2 *Laticea cu prim şi ultim element* este structura algebrică de forma $(L, \vee, \wedge, 0, 1)$, unde $(L, \vee, \wedge)$ este o latice, iar 0 şi 1 sunt două constante din L desemnând primul, respectiv ultimul element.

Exemplu 8.1.3 *Graful* este o structură de forma $G = (X, R)$, unde X este mulţimea nodurilor, iar R este o relaţie binară pe X ce defineşte arcele: $x \to y$ dacă xRy.

Exemplu 8.1.4 *Inelul unitar* este o structură de forma $(A, +, \cdot, 0, 1)$, în care $+, \cdot$ sunt operaţii binare, iar $0, 1$ sunt constante, ce verifică anumite axiome.

Se observă că la aceste structuri apare o *mulţime de bază* (= universul structurii), împreună cu *operaţii*, *relaţii* sau constante. Pornind de la această observaţie, se degajă noţiunea generală de *structură de ordinul I*.

Definiţie 8.1.5 O *structură de ordinul I* este de forma:

$$\mathcal{A} = (A, (f_i)_{i\in I}, (R_j)_{j\in J}, (c_k)_{k\in K}),$$

unde:
- A este o mulţime nevidă, numită *universul structurii*,
- $f_i : A^{n_i} \longrightarrow A$ este o operaţie n_i-ară, pentru orice $i \in I$ ($n_i \geq 1$ este *ordinul* sau *aritatea* lui f_i),
- $R_j \subseteq A^{m_j}$ este o relaţie m_j-ara pe A, pentru orice $j \in J$ ($m_j \geq 1$ este *ordinul* sau *aritatea* lui R_j),
- $c_k \in A$ este o constantă, pentru orice $k \in K$.

O structură de *acelasi tip* cu $\mathcal{A}$ are forma:

$$\mathcal{B} = (B, (f_i')_{i\in I}, (R_j')_{j\in J}, (c_k')_{k\in K}),$$

unde: - B este o mulţime nevidă, numita *universul structurii*,
- $f_i' : B^{n_i} \longrightarrow B$ este o operaţie n_i-ară,
- $R_j' \subseteq B^{m_j}$ este o relaţie m_j-ara pe B,
- $c_k' \in B$ este o constantă,
pentru orice $i \in I$, $j \in J$, $k \in K$.

Tipul sau *signatura* structurilor $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ este:

$$\tau = ((n_i)_{i\in I}; (m_j)_{j\in J}; (0)_{k\in K}).$$

Structura $\mathcal{A}$ va fi notată de acum înainte

$$\mathcal{A} = (A, (f_i^{\mathcal{A}})_{i\in I}, (R_j^{\mathcal{A}})_{j\in J}, (c_k^{\mathcal{A}})_{k\in K}).$$

Observaţii 8.1.6

(1) In forma (i), laticile sunt structuri de tipul $(\emptyset; 2; \emptyset)$, iar în forma (ii), de tipul $(2, 2; \emptyset; \emptyset)$.
(2) Laticile cu prim şi ultim element au tipul $(2, 2; \emptyset; 0, 0)$.
(3) Grafurile sunt de tipul $(\emptyset; 2; \emptyset)$.
(4) Inelele unitare au tipul $(2, 2; \emptyset; 0, 0)$.
(5) In mod obişnuit, $\emptyset$ nu se mai scrie şi se foloseşte doar separatorul virgulă.

Vom considera acum şi alte exemple de structuri. [1]

Exemplu 8.1.7 *Spaţiul vectorial peste un corp* K este o structură de forma $(E, +, 0, \cdot)$, unde $+$ este o operaţie (internă) pe E, 0 este o constantă, iar $\cdot$ este o operaţie *externă*: $\cdot : K \times E \longrightarrow E$ ($(\alpha, x) \in K \times E \mapsto \alpha \cdot x \in E$), verificând axiomele cunoscute (nu amintim axiomele spaţiului vectorial).

Exemplu 8.1.8 *Spaţiul metric* este o pereche (X, d), unde $X \neq \emptyset$ şi $d : X^2 \longrightarrow \mathbf{R}_+$, astfel încât pentru orice $x, y, z \in X$, următoarele condiţii sunt îndeplinite:
(i) $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,
(ii) $d(x, y) = d(y, x)$,
(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

[1] Vom folosi $\Longrightarrow$ şi $\Longleftrightarrow$ ca prescurtare pentru "dacă ... atunci", respectiv pentru "dacă şi numai dacă".

Exemplu 8.1.9 *Spaţiul topologic* este o pereche $(X, \mathcal{D})$, unde $X \neq \emptyset$ şi $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{P}(X)$, astfel încât:
(i) $\emptyset, X \in \mathcal{D}$,
(ii) $(A_i)_{i\in I} \subseteq \mathcal{D} \Longrightarrow \bigcup_{i\in I} A_i \in \mathcal{D}$,
(iii) $A, B \in \mathcal{D} \Longrightarrow A \cap B \in \mathcal{D}$.

Observaţii 8.1.10 Structurile din Exemplele 8.1.1 - 8.1.4 se încadrează în definiţia structurilor de ordinul I, în timp ce structurile din Exemplele 8.1.7, 8.1.8, 8.1.9 nu se încadrează în această definiţie.

In structurile din Exemplele 8.1.7, 8.1.8, avem operaţii externe, iar în structura din Exemplul 8.1.9, $\mathcal{D}$ este o relaţie unară pe $\mathcal{P}(X)$.

Structurile din Exemplele 8.1.7, 8.1.8 conduc la ideea de *structură multisortată*, iar cea din Exemplul 8.1.9 la ideea de *structură de ordinul II*.

Toate structurile considerate de noi în continuare vor fi de ordinul I.

Fiecărei clase de structuri de un tip fixat τ îi vom asocia un *limbaj de ordinul I*, în care să poată fi exprimate (la nivel simbolic) proprietăti ale structurilor considerate.

Să considerăm clasa structurilor de ordinul I, de o signatură fixată

$$\tau = ((n_i)_{i\in I}; (m_j)_{j\in J}; (0)_{k\in K}).$$

Alfabetul limbajului de ordin I L_τ, asociat acestor structuri, este format din următoarele *simboluri primitive*:
(1) o mulţime infinită de variabile: $x, y, z, v, w, \ldots$; notăm cu V mulţimea variabilelor,
(2) simboluri de operaţii: f_i, pentru orice $i \in I$ (fiecărui f_i îi este ataşat numărul natural n_i, numit *ordinul* lui f_i),
(3) simboluri de relaţii (predicate): R_j, pentru orice $j \in J$ (fiecarui R_j îi este ataşat numărul natural m_j, numit *ordinul* lui R_j),
(4) simboluri de constante: c_k, pentru orice $k \in K$,
(5) simbolul de egalitate: $=$,
(6) conectorii: $\to$, $\neg$,
(7) cuantificatorul universal: $\forall$,
(8) paranteze: (,),[,].

Pentru comoditate, vom spune uneori:
- "operaţii" în loc de "simboluri de operaţii",
- "relaţii", în loc de "simboluri de relaţii",
- "constante", în loc de "simboluri de constante".

Definiţie 8.1.11 *Termenii* lui L_τ se definesc prin inducţie astfel:
(t1) variabilele şi simbolurile de constante sunt termeni,

(t2) dacă f este un simbol de operaţie n-ară şi $t_1, \ldots, t_n$ sunt termeni, atunci $f(t_1, \ldots, t_n)$ este termen.

Definiţie 8.1.12 *Formulele atomice* ale lui L_τ se definesc prin următoarele două condiţii:
(fa1) dacă t_1, t_2 sunt termeni, atunci $t_1 = t_2$ este o formulă atomică,
(fa2) dacă R este un predicat m-ar şi $t_1, \ldots, t_m$ sunt termeni, atunci $R(t_1, \ldots, t_m)$ este o formulă atomică.

Definiţie 8.1.13 *Formulele* lui L_τ se definesc prin inducţie astfel:
(f1) formulele atomice sunt formule,
(f2) dacă φ este formulă, atunci $\neg\varphi$ este formulă,
(f3) dacă φ, ψ sunt formule, atunci $\varphi \to \psi$ este formulă,
(f4) dacă φ este formulă şi x este variabilă, atunci $\forall x\varphi$ este formulă.

Fie $Form(L_\tau)$ mulţimea formulelor lui L_τ.

Pentru orice formule φ şi ψ, introducem abrevierile (*formulele derivate*) următoare:
$\varphi \vee \psi$: pentru $\neg\varphi \to \psi$,
$\varphi \wedge \psi$: pentru $\neg(\varphi \to \neg\psi)$,
$\varphi \leftrightarrow \psi$: pentru $(\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi)$,
$\exists x\varphi$: pentru $\neg\forall x\neg\varphi$.

Notaţie 8.1.14
$t \in L_\tau$: t este un termen al lui L_τ,
$\varphi \in L_\tau$: φ este o formulă a lui L_τ.

Exemple 8.1.15
(i) In cazul structurii din Exemplul 8.1.1 (i):
- limbajul asociat are un singur predicat binar, $\leq$, iar o structură are forma $\mathcal{A} = (A, \leq^{\mathcal{A}})$,
- termenii sunt daţi numai de variabile, iar formulele atomice sunt de forma:
$x = y,\ x \leq y, \ldots$
(ii) In cazul structurii din Exemplul 8.1.1 (ii):
- limbajul asociat are două simboluri de operaţii binare, $\bigvee$, $\bigwedge$, iar o structură este de forma $\mathcal{A} = (A, \bigvee^{\mathcal{A}}, \bigwedge^{\mathcal{A}})$,
- termenii sunt de forma:
· $x, y, z, \ldots$ (variabilele),
· $x \bigvee y,\ x \bigwedge y, \ldots, (x \bigvee y) \bigvee z, \ldots, (x \bigwedge y) \bigwedge z, \ldots,$
· $(x \bigvee y) \bigwedge z, \ldots, (x \bigwedge y) \bigvee z, \ldots,$
· ....
- formulele atomice sunt de forma:
· $x = y$,
· $x \bigvee y = z,\ x \bigwedge y = z$,
· $(x \bigvee y) \bigvee z = ((x \bigwedge z) \bigvee z) \bigwedge y$, etc.

Vom defini acum prin inducţie:
$FV(t)$ = mulţimea variabilelor termenului t,
$FV(\varphi)$ = mulţimea variabilelor *libere* ale formulei φ.

$FV(t)$ se defineşte prin inducţie astfel:
- dacă t este variabila x, [2] atunci $FV(t) = \{x\}$,
- dacă t este constanta c, atunci $FV(t) = \emptyset$,
- dacă t este $f(t_1, \ldots, t_n)$, atunci $FV(t) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i)$.

$FV(\varphi)$ se defineşte prin inducţie astfel:
- dacă φ este $t_1 \boldsymbol{=} t_2$, atunci $FV(\varphi) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$,
- dacă φ este $R(t_1, \ldots, t_m)$, atunci $FV(\varphi) = \bigcup_{j=1}^{m} FV(t_j)$,
- dacă φ este $\neg\psi$, atunci $FV(\varphi) = FV(\psi)$,
- dacă φ este $\alpha \to \beta$, atunci $FV(\varphi) = FV(\alpha) \cup FV(\beta)$,
- dacă φ este $\forall x \psi$, atunci $FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$.

Consecinte imediate.
- dacă φ este $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$, $\alpha \leftrightarrow \beta$, atunci $FV(\varphi) = FV(\alpha) \cup FV(\beta)$,
- dacă φ este $\exists x \psi$, atunci $FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$.

Observaţii 8.1.16

(1) Când scriem $FV(t) = \{x\}$, etc. a nu se confunda $=$ cu simbolul de egalitate (notat bolduit, $\boldsymbol{=}$).

(2) $FV(t) \subseteq V$, $FV(\varphi) \subseteq V$.

Definiţii 8.1.17

Dacă $x \in FV(\varphi)$, atunci x se va numi *variabilă liberă* a lui φ; în caz contrar, x se va numi *variabilă legată*.

O formulă fără variabile libere se va numi *enunţ*.

Observaţie 8.1.18 Există cazuri când o variabilă are unele apariţii libere, iar altele legate. Fie $\varphi(x, y, u)$ formula $(\forall x(x \cdot y \boldsymbol{=} y + u)) \to (\exists y(x \cdot y \leq y + u))$. Vom înlătura excesul de paranteze, scriind această formulă astfel:

$$\forall x(x \cdot y \boldsymbol{=} y + u) \to \exists y(x \cdot y \leq y + u)$$

Prima subformulă, $\forall x(x \cdot y \boldsymbol{=} y + u)$, conţine pe x ca variabilă legată, în timp ce a doua subformulă, $\exists y(x \cdot y \leq y + u)$, conţine pe x ca variabilă liberă. Deci, în formula $\varphi(x, y, u)$, x este variabilă liberă.

[2] Vom folosi "este", sau ":", sau "=" pentru notaţii, ca de exemplu
t este x, sau
t: x, sau
$t = x$.

Notaţie 8.1.19 Dacă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$, atunci vom nota $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$.

Definiţie 8.1.20 Fie φ o formulă, x o variabilă, astfel încat $\varphi(x)$, şi t un termen.

Formula $\varphi(t)$, obţinută din φ prin *substituţia lui x cu t*, se defineşte astfel:
- dacă y este o variabilă a lui t, se înlocuieşte y cu o variabilă v ce nu apare în $\varphi(x)$ sau în t în toate apariţiile *legate* ale lui y în φ,
- se înlocuieşte apoi x cu t.

Exemplu 8.1.21 Fie formula $\varphi(x)$: $\exists y(x = y)$ şi termenul t: $y + z$, unde ":" înseamnă "notaţie pentru". Atunci:
- $\exists y(x = y) \leftrightarrow \exists v(x = v)$,
- $\varphi(t)$: $\exists v(y + z = v)$.

Proprietăţile structurilor ce se pot exprima în limbajul L_τ se numesc *proprietăţi de ordinul I*.

Exemple 8.1.22 Fie L_τ un limbaj cu un singur predicat binar R. Structurile sunt de forma $\mathcal{A} = (A, R^{\mathcal{A}})$, cu $R^{\mathcal{A}}$ relaţie binară pe A. Următoarele proprietăţi sunt de ordinul I:

(a) R este *reflexivă*: $\forall x R(x, x)$
(b) R este *simetrică*: $\forall x \forall y(R(x, y) \leftrightarrow R(y, x))$
(c) R este *antisimetrică*: $\forall x \forall y(R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y)$
(d) R este *tranzitivă*: $\forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$
(e) R este *relaţie de echivalenţă*:
$\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y(R(x, y) \leftrightarrow R(y, x)) \wedge \forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$
(f) R este *relaţie de ordine parţială*:
α: $\forall x R(x, x) \wedge \forall x \forall y(R(x, y) \wedge R(y, x) \rightarrow x = y) \wedge \forall x \forall y \forall z(R(x, y) \wedge R(y, z) \rightarrow R(x, z))$
(g) R este *relaţie de ordine totală* (= $\mathcal{A}$ este lanţ) (notând cu α enunţul de la (f)):
$\alpha \wedge \forall x \forall y(R(x, y) \vee R(y, x))$
(h) $\mathcal{A}$ este o *latice*:
Considerăm enunţurile:
β_1: $\forall x \forall y \exists z[(R(x, z) \wedge R(y, z)) \wedge \forall u[(R(x, u) \wedge R(y, u)) \rightarrow R(z, u)]]$,
β_2: $\forall x \forall y \exists z[(R(z, x) \wedge R(z, y)) \wedge \forall u[(R(u, x) \wedge R(u, y)) \rightarrow R(u, z)]]$.
β_1 exprimă faptul că orice pereche de elemente admite supremum, iar β_2 exprimă faptul că orice pereche de elemente admite infimum.
Atunci proprietatea de a fi latice este dată de enunţul: $\alpha \wedge \beta_1 \wedge \beta_2$
(i) $\mathcal{A}$ este o *latice cu prim element*:
$\alpha \wedge \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \exists x \forall y R(x, y)$
(j) $\mathcal{A}$ este o *latice cu ultim element*:
$\alpha \wedge \beta_1 \wedge \beta_2 \wedge \exists x \forall y R(y, x)$
(k) Orice lanţ este o latice:
$\alpha \wedge \forall x \forall y(R(x, y) \vee R(y, x)) \rightarrow (\alpha \wedge \beta_1 \wedge \beta_2)$
(l) Intr-o latice cu 0, 1, orice element este complementat (proprietate de ordinul I

falsă):
$(\alpha \wedge \beta_1 \wedge \beta_2) \rightarrow \forall x \exists y[(x \bigvee y = 1) \wedge (x \bigwedge y = 0)]$
Intrebare: Ce este în neregulă la exemplul (l)?

8.2 Semantica calculului cu predicate

Formulele şi enunţurile sunt formaţiuni simbolice, construite din alfabetul lui L_τ. In această secţiune, vom defini validitatea formulelor şi enunţurilor prin intermediul noţiunii de interpretare. Vrem să vedem ce înseamnă a interpreta limbajul L_τ într-o structură dată. Prin alegerea alfabetului lui L_τ, există o corespondenţă biunivocă între simbolurile de operaţii, de relaţii şi de constante şi operaţiile, relaţiile şi constantele acestei structuri. Atunci putem considera că operaţiile, relaţiile şi constantele unei structuri $\mathcal{A}$ reprezintă interpretarea simbolurilor de operaţii, de relaţii şi de constante în $\mathcal{A}$. Până aici totul este deja conţinut în modul cum a fost construit limbajul. A rămas să interpretăm variabilele lui L_τ în $\mathcal{A}$. Prin definiţie, variabilele vor fi interpretate prin elemente ale lui A. Atunci o interpretare va fi o funcţie de la mulţimea variabilelor la universul structurii. Prin inducţie, sunt definite: valoarea unei formule relativ la o interpretare, valoarea unui enunţ într-o structură, noţiunea de enunţ universal adevărat, model al unei teorii, etc. Pe lângă validitatea formulelor şi enunţurilor, semantica lui L_τ mai studiază şi deducţia semantică, definită cu ajutorul noţiunii de model. In cele ce urmează vom formula în termeni precişi aceste noţiuni şi idei.

Fie $\mathcal{A}$ o structură corespunzătoare limbajului L_τ. Dacă f (respectiv R, respectiv c) este un simbol de operaţie (respectiv un simbol de relaţie, respectiv un simbol de constantă), atunci vom nota cu $f^\mathcal{A}$ (respectiv $R^\mathcal{A}$, respectiv $c^\mathcal{A}$) operaţia (respectiv relaţia, respectiv constanta) corespunzătoare din $\mathcal{A}$.

Definiţie 8.2.1 O *interpretare* (sau *evaluare*) a lui L_τ în $\mathcal{A}$ este o funcţie $s : V \longrightarrow A$. Astfel, o variabilă $v \in V$ este *interpretată* prin elementul $s(v)$ al lui A.

Definiţie 8.2.2 Pentru orice termen t şi pentru orice interpretare s, definim prin inducţie elementul $t^\mathcal{A}(s) \in A$:
· dacă t este variabila v, atunci $t^\mathcal{A}(s) = s(v)$,
· dacă t este constanta c, atunci $t^\mathcal{A}(s) = c^\mathcal{A}$,
· dacă t este $f(t_1, \ldots, t_n)$, atunci $t^\mathcal{A}(s) = f^\mathcal{A}(t_1^\mathcal{A}(s), \ldots, t_n^\mathcal{A}(s))$.
Elementul $t^\mathcal{A}(s)$ al lui A se numeşte *valoarea de adevăr a termenului t în interpretarea s*.

Definiţie 8.2.3 Pentru orice formulă φ şi pentru orice interpretare s, vom defini *valoarea de adevăr a lui φ în interpretarea s*

$$\|\varphi(s)\| = \|\varphi(s)\|_\mathcal{A} \in L_2 = \{0, 1\} :$$

- pentru *formule atomice*:
· dacă φ este $t_1 = t_2$, atunci

$$\|\varphi(s)\| = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad t_1^{\mathcal{A}}(s) = t_2^{\mathcal{A}}(s), \\ 0, & \text{dacă} \quad t_1^{\mathcal{A}}(s) \neq t_2^{\mathcal{A}}(s). \end{cases}$$

· dacă φ este $R(t_1, \ldots, t_m)$, atunci

$$\|\varphi(s)\| = 1 \Longleftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}(s), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(s)) \in R^{\mathcal{A}}.$$

- pentru *formule oarecare*, prin inducţie:
· pentru formule atomice a fost definit,

· dacă φ este $\neg\psi$, atunci $\|\varphi(s)\| = \neg\|\psi(s)\|$,

· dacă φ este $\alpha \to \beta$, atunci $\|\varphi(s)\| = \|\alpha(s)\| \to \|\beta(s)\|$,

· dacă φ este $\forall x\psi$, atunci $\|\varphi(s)\| = \bigwedge_{a\in A} \|\psi(s[^x_a])\|$,

unde $s[^x_a] : V \longrightarrow L_2$ este interpretarea definită de:

$$s[^x_a](v) = \begin{cases} a, & \text{dacă} \quad v = x, \\ s(v), & \text{dacă} \quad v \neq x. \end{cases}$$

Consecinţă imediată:
· dacă φ este $\alpha \vee \beta$, atunci $\|\varphi(s)\| = \|\alpha(s)\| \vee \|\beta(s)\|$,
· dacă φ este $\alpha \wedge \beta$, atunci $\|\varphi(s)\| = \|\alpha(s)\| \wedge \|\beta(s)\|$,
· dacă φ este $\alpha \leftrightarrow \beta$, atunci $\|\varphi(s)\| = \|\alpha(s)\| \leftrightarrow \|\beta(s)\|$,
· dacă φ este $\exists x\psi$, atunci $\|\varphi(s)\| = \bigvee_{a\in A} \|\psi(s[^x_a])\|$.

In secţiunea precedentă, prin construcţia lui L_τ s-a trecut de la structuri la limbaj: proprietăţile de ordinul I ale structurilor sunt reprezentate simbolic prin formule şi enunţuri. Conform definiţiilor precedente, drumul invers, de la limbaj la structuri, este realizat prin corespondenţele următoare:

$f \mapsto f^{\mathcal{A}}$	:	de la simboluri de operaţii la operaţii ale lui $\mathcal{A}$
$R \mapsto R^{\mathcal{A}}$	:	de la simboluri de relaţii la relaţii ale lui $\mathcal{A}$
$c \mapsto c^{\mathcal{A}}$	:	de la simboluri de constante la constante ale lui $\mathcal{A}$
$v \mapsto s(v)$	:	de la variabile la indivizi ai lui $\mathcal{A}$
$t \mapsto t^{\mathcal{A}}(s)$	:	de la termeni la indivizi ai lui $\mathcal{A}$
$\varphi \mapsto \|\varphi(s)\|$	:	de la formule la valori de adevăr.

Prin funcţia $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, conectorii $\to$, $\neg$, $\vee$, $\wedge$, $\leftrightarrow$ sunt transformaţi în operaţiile booleene corespunzătoare, iar cuantificatorii $\forall$ şi $\exists$ în operaţiile *infimum* şi *supremum* (cu A ca mulţime de indici).

Lema 8.2.4 *Fie s_1, s_2 două interpretări. Pentru orice termen t, avem:*

$$s_1 \mid_{FV(t)} = s_2 \mid_{FV(t)} \Longrightarrow t^{\mathcal{A}}(s_1) = t^{\mathcal{A}}(s_2).$$

Demonstraţie. Prin inducţie, după modul de definire al termenului t:
· dacă t este variabilă sau constantă, atunci afirmaţia este imediată,
· dacă t este $f(t_1, \ldots, t_n)$, atunci
$FV(t) = \bigcup_{i=1}^{n} FV(t_i),\ s_1 |_{FV(t)} = s_2 |_{FV(t)}$
$\Longrightarrow s_1 |_{FV(t_i)} = s_2 |_{FV(t_i)},\ i = 1, \ldots, n$
$\Longrightarrow t_i^{\mathcal{A}}(s_1) = t_i^{\mathcal{A}}(s_2),\ i = 1, \ldots, n$
$\Longrightarrow t^{\mathcal{A}}(s_1) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(s_1), \ldots, t_n^{\mathcal{A}}(s_1)) = f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(s_2), \ldots, t_n^{\mathcal{A}}(s_2)) = t^{\mathcal{A}}(s_2).$ □

Lema precedentă arată că valoarea $t^{\mathcal{A}}(s)$ a termenului t în interpretarea s depinde numai de restricţia lui s la $FV(t)$.

Propoziţia 8.2.5 *Pentru orice formulă φ şi pentru orice interpretări s_1, s_2, avem:*

$$s_1 |_{FV(\varphi)} = s_2 |_{FV(\varphi)} \Longrightarrow \|\varphi(s_1)\| = \|\varphi(s_2)\|.$$

Demonstraţie. Prin inducţie după φ:

· dacă φ este de forma $t_1 = t_2$, atunci $FV(\varphi) = FV(t_1) \cup FV(t_2)$,
$s_1 |_{FV(\varphi)} = s_2 |_{FV(\varphi)}$
$\Longrightarrow s_1 |_{FV(t_j)} = s_2 |_{FV(t_j)},\ j = 1, 2,$
$\Longrightarrow t_j^{\mathcal{A}}(s_1) = t_j^{\mathcal{A}}(s_2),\ j = 1, 2$ (conform Lemei 8.2.4).
Rezultă
$\|\varphi(s_1)\| = 1 \Longleftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}(s_1) = t_2^{\mathcal{A}}(s_1) \Longleftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}(s_2) = t_2^{\mathcal{A}}(s_2) \Longleftrightarrow \|\varphi(s_2)\| = 1,$
de unde $\|\varphi(s_1)\| = \|\varphi(s_2)\|$.

· dacă φ este de forma $R(t_1, \ldots, t_m)$, atunci $FV(\varphi) = \bigcup_{j=1}^{m} FV(t_j)$, deci
$s_1 |_{FV(\varphi)} = s_2 |_{FV(\varphi)}$
$\Longrightarrow s_1 |_{FV(t_j)} = s_2 |_{FV(t_j)},\ j = 1, \ldots, m,$
$\Longrightarrow t_j^{\mathcal{A}}(s_1) = t_j^{\mathcal{A}}(s_2),\ j = 1, \ldots, m.$
Rezultă
$\|\varphi(s_1)\| = 1 \Longleftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}(s_1), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(s_1)) \in R^{\mathcal{A}}$

$\Longleftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}(s_2), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(s_2)) \in R^{\mathcal{A}}$

$\Longleftrightarrow \|\varphi(s_2)\| = 1.$

· dacă φ este de forma $\alpha \to \beta$, atunci $FV(\varphi) = FV(\alpha) \cup FV(\beta)$,
$s_1 |_{FV(\varphi)} = s_2 |_{FV(\varphi)}$

$\Longrightarrow s_1 |_{FV(\alpha)} = s_2 |_{FV(\alpha)},\ s_1 |_{FV(\beta)} = s_2 |_{FV(\beta)}$

$\Longrightarrow \|\alpha(s_1)\| = \|\alpha(s_2)\|,\ \|\beta(s_1)\| = \|\beta(s_2)\|$ (ipoteza inducţiei)

$\Longrightarrow \|\varphi(s_1)\| = \|\varphi(s_2)\|.$

· dacă φ este de forma $\neg\psi$, atunci se procedează analog.

· dacă φ este de forma $\forall x\psi$, atunci $FV(\varphi) = FV(\psi) \setminus \{x\}$.
Fie $a \in A$.
Dacă $s_1 \mid_{FV(\varphi)} = s_2 \mid_{FV(\varphi)}$, atunci $s_1[^x_a] \mid_{FV(\psi)} = s_2[^x_a] \mid_{FV(\psi)}$.

Conform ipotezei inducţiei, $\|\psi(s_1[^x_a])\| = \|\psi(s_2[^x_a])\|$, deci

$\|\varphi(s_1)\| = \bigwedge_{a\in A} \|\psi(s_1[^x_a])\| = \bigwedge_{a\in A} \|\psi(s_2[^x_a])\| = \|\varphi(s_2)\|$. □

Conform lemei precedente, valoarea de adevăr a unei formule φ într-o interpretare s depinde numai de restricţia lui s la $FV(\varphi)$.

Notaţie 8.2.6 Dacă $\{x_1, \ldots, x_n\}$ conţine variabilele ce apar într-un termen t, atunci notăm $t(x_1, \ldots, x_n)$. Reamintim că $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ înseamnă $FV(\varphi) \subseteq \{x_1, \ldots, x_n\}$.

Definiţie 8.2.7 Fie $t(x_1, \ldots, x_n)$ un termen, $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ o formulă şi $a_1, \ldots, a_n \in A$. Definim

$$t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = t^{\mathcal{A}}(s) \in A, \quad \|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\| = \|\varphi(s)\| \in L_2,$$

unde $s : V \longrightarrow A$ este o interpretare ce verifică $s(x_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$.

Conform Lemei 8.2.4 şi Propoziţiei 8.2.5, definiţiile lui $t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$ şi $\|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\|$ sunt corecte (depind numai de condiţia $s(a_i) = a_i$, $i = 1, \ldots, n$).

Notaţie 8.2.8

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \overset{def.}{\Leftrightarrow} \|\varphi(a_1, \ldots, a_n)\| = 1.$$

Folosind această notaţie, transcriem unele proprietăţi din definiţia $\|\cdot\|$.
· dacă $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este $t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n)$, atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = t_2^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n).$$

· dacă $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este $R(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_n))$, atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \in R^{\mathcal{A}}.$$

· dacă $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este $\neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$, atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \not\models \psi[a_1, \ldots, a_n].$$

· dacă $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este $\alpha(x_1, \ldots, x_n) \rightarrow \beta(x_1, \ldots, x_n)$, atunci

$$\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow (\mathcal{A} \models \alpha[a_1, \ldots, a_n] \Leftrightarrow \mathcal{A} \models \beta[a_1, \ldots, a_n]).$$

· dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $\alpha(x_1,\ldots,x_n)\vee\beta(x_1,\ldots,x_n)$, atunci

$$\mathcal{A}\models\varphi[a_1,\ldots,a_n]\Leftrightarrow(\mathcal{A}\models\alpha[a_1,\ldots,a_n]\text{ sau }\mathcal{A}\models\beta[a_1,\ldots,a_n]).$$

· dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $\alpha(x_1,\ldots,x_n)\wedge\beta(x_1,\ldots,x_n)$, atunci

$$\mathcal{A}\models\varphi[a_1,\ldots,a_n]\Leftrightarrow(\mathcal{A}\models\alpha[a_1,\ldots,a_n]\text{ şi }\mathcal{A}\models\beta[a_1,\ldots,a_n]).$$

· dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $\alpha(x_1,\ldots,x_n)\leftrightarrow\beta(x_1,\ldots,x_n)$, atunci

$$\mathcal{A}\models\varphi[a_1,\ldots,a_n]\Leftrightarrow(\mathcal{A}\models\alpha[a_1,\ldots,a_n]\Leftrightarrow\mathcal{A}\models\beta[a_1,\ldots,a_n]).$$

· dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $\forall x\psi(x,x_1,\ldots,x_n)$, atunci

$$\mathcal{A}\models\varphi[a_1,\ldots,a_n]\Leftrightarrow\text{ pentru orice }a\in A,\ \mathcal{A}\models\psi[a_1,\ldots,a_n].$$

· dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este $\exists x\psi(x,x_1,\ldots,x_n)$, atunci

$$\mathcal{A}\models\varphi[a_1,\ldots,a_n]\Leftrightarrow\text{ există }a\in A,\ \mathcal{A}\models\psi[a_1,\ldots,a_n].$$

Noţiunea "$\mathcal{A}\models\varphi[a_1,\ldots,a_n]$" poate fi definită în mod direct, fără a face apel la $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$. Definiţia este prin inducţie, constând în echivalenţele de mai sus.

Observaţie 8.2.9 Dacă φ este un enunţ, atunci $\|\varphi(s)\|$ nu depinde de interpretarea s; în acest caz, notăm $\|\varphi\|=\|\varphi(s)\|$. De asemenea,

$$\mathcal{A}\models\varphi\Leftrightarrow\|\varphi\|=1.$$

Definiţii 8.2.10

Dacă $\mathcal{A}\models\varphi$, spunem că enunţul φ este *adevărat* în $\mathcal{A}$ sau că $\mathcal{A}$ este *model pentru* φ.

Dacă Γ este o mulţime de enunţuri, atunci spunem că $\mathcal{A}$ este *model al lui* Γ, dacă $\mathcal{A}$ este model pentru orice $\varphi\in\Gamma$; notăm aceasta cu

$$\mathcal{A}\models\Gamma.$$

Dacă $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$ este o formulă, atunci $\mathcal{A}$ este *model* al lui $\varphi(x_1,\ldots,x_n)$, şi notăm aceasta scriind:

$$\mathcal{A}\models\varphi(x_1,\ldots,x_n),$$

dacă

$$\mathcal{A}\models\forall x_1\ldots\forall x_n\varphi(x_1,\ldots,x_n).$$

Prin definiţie, o *teorie* este o mulţime de formule ale lui L_τ. Dacă Σ este o teorie, atunci $\mathcal{A}$ este *model* [3] al lui Σ, şi notăm aceasta scriind

$$\mathcal{A}\models\Sigma,$$

[3] In matematică, noţiunea de *model* are mai multe sensuri. Prin *model matematic* al unei situaţii concrete se înţelege, de obicei, un ansamblu de noţiuni şi de relaţii ce dau o reprezentare matematică a acelei situaţii. In acest caz, este realizată o trecere de la concret la abstract. Noţiunea de *model al unei teorii* este asociată unui traseu invers. Teoria este un concept al unei lumi simbolice (sintaxa), iar un model al său aparţine lumii reale a structurilor.

dacă $\mathcal{A}$ este model pentru fiecare $\varphi \in \Sigma$.

Convenţie: Pentru orice structură $\mathcal{A}$,

$$\mathcal{A} \models \emptyset.$$

Definiţia noţiunii "$\mathcal{A} \models \Sigma$" a fost dată de A. Tarski. Ea stă la baza *teoriei modelelor*, una din principalele ramuri ale logicii matematice.

In rezolvarea unor probleme din logica predicatelor, se impune să lărgim limbajul L_τ, prin adăugarea unor constante noi. Vom prezenta în continuare câteva rezultate simple legate de acest procedeu.

Fie C o mulţime de constante noi (distincte de constantele lui L_τ). Considerăm limbajul $L_\tau(C)$, obţinut din L_τ prin adăugarea constantelor din C. O structură a lui $L_\tau(C)$ este de forma $(\mathcal{A}, a_c)_{c\in C}$, unde $\mathcal{A}$ este o structură corespunzătoare lui $\mathcal{A}$ şi $a_c \in A$, pentru orice $c \in C$ (a_c este interpretarea constantei $c \in C$). Dacă $c = \{c_1, \ldots, c_n\}$, atunci o structură pentru $L(c_1, \ldots, c_n)$ va fi de forma $(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)$, unde a_i este interpretarea lui c_i, $i = 1, \ldots, n$.

Lema 8.2.11 *Pentru orice termen $t(x_1, \ldots, x_n)$ al lui L_τ şi pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in A$,*

$$t(c_1, \ldots, c_n)^{(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)} = t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n).$$

Demonstraţie. Prin inducţie asupra lui t:
· t este x: $t(c)^{(\mathcal{A},a)} = a = t^{\mathcal{A}}(a)$,
· t este o constantă d din L_τ: $t(c)^{(\mathcal{A},a)} = d^{\mathcal{A}} = t^{\mathcal{A}}(a)$,
· t este $f(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_n))$:
$t(c_1, \ldots, c_n)^{(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)} = f(t_1(c_1, \ldots, c_n), \ldots, t_m(c_1, \ldots, c_n))$
$= f^{(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)}(t_1(c_1, \ldots, c_n)^{(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)}, \ldots, t_m(c_1, \ldots, c_n)^{(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)})$
$= f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n))$
$= t^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$,
ipoteza inducţiei fiind: $t_j(c_1, \ldots, c_n)^{(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)} = t_j^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$, $j = 1, \ldots, m$. □

Propoziţia 8.2.12 *Pentru orice formulă $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ a lui L_τ şi pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in A$,*

$$(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(c_1, \ldots, c_n) \Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Demonstraţie. Prin inducţie după φ:
· dacă φ este $t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n)$, atunci:
$(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(c_1, \ldots, c_n) \Longleftrightarrow t_1(c_1, \ldots, c_n)^{(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)} = t_2(c_1, \ldots, c_n)^{(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)}$
$\Longleftrightarrow t_1^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n) = t_2^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)$
$\Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.
· dacă φ este $R(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_n))$, atunci:
$(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(c_1, \ldots, c_n)$
$\Longleftrightarrow (t_1(c_1, \ldots, c_n)^{(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)}, \ldots, t_m(c_1, \ldots, c_n)^{(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)}) \in R^{(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n)}$
$\Longleftrightarrow (t_1^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(a_1, \ldots, a_n)) \in R^{\mathcal{A}}$

$\Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$.
· dacă φ este $\neg\alpha$: (exerciţiu, folosind inducţia).
· dacă φ este $\alpha \to \beta$: (exerciţiu, folosind inducţia).
· dacă $\varphi(x_1, \ldots, x_b)$ este $\forall x\psi(x, x_1, \ldots, x_n)$.
Ipoteza inducţiei: pentru orice constante $c, c_1, \ldots, c_n$ şi pentru orice $a, a_1, \ldots, a_n \in A$:

$$(\mathcal{A}, a, a_1, \ldots, a_n) \models \psi(c, c_1, \ldots, c_n) \Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \psi[a, a_1, \ldots, a_n].$$

Atunci
$(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \varphi(c_1, \ldots, c_n)$
$\Longleftrightarrow$ pentru orice $a \in A$, $(\mathcal{A}, a_1, \ldots, a_n) \models \psi(x, c_1, \ldots, c_n)[a]$ (ipoteza inducţiei)
$\Longleftrightarrow$ pentru orice $a \in A$, $\mathcal{A} \models \psi(a, a_1, \ldots, a_n)$ (ipoteza inducţiei)
$\Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$. □

Un caz special îl constituie extinderea limbajului L_τ cu simboluri de constante pentru elementele unei structuri date.

Fie $\mathcal{A}$ o structură şi $C = \{c_a \mid a \in A\}$ cu $c_a \neq c_b$ pentru $a \neq b$. O structură pentru $L_\tau(C)$ este de forma $(B, b_a)_{a \in A}$, cu $b_a \in B$, pentru orice $a \in A$. In particular, $(\mathcal{A}, a)_{a \in A}$ este o structură pentru $L_\tau(C)$.

Vom *identifica* constanta c_a cu a, deci pe C cu A. Atunci limbajul $L_\tau(C)$ se va nota cu $L_\tau(A)$. Conform Propoziţiei 8.2.12, pentru $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ şi $a_1, \ldots, a_n \in A$, avem

$$(\mathcal{A}, a)_{a \in A} \models \varphi(c_{a_1}, \ldots, c_{a_n}) \Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Cu identificarea $c_a \leftrightarrow a$, echivalenţa se scrie

$$(\mathcal{A}, a)_{a \in A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n) \Longleftrightarrow \mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n].$$

Conform acestei echivalenţe, este natural să scriem $\mathcal{A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$ *în loc de* $\mathcal{A} \models \varphi[a_1, \ldots, a_n]$ *sau de echivalentul său* $(\mathcal{A}, a)_{a \in A} \models \varphi(a_1, \ldots, a_n)$.

Definiţie 8.2.13

Enunţul φ este *universal adevărat* (şi notăm aceasta cu: $\models \varphi$) dacă $\mathcal{A} \models \varphi$, pentru orice structură $\mathcal{A}$ (de un tip fixat τ).

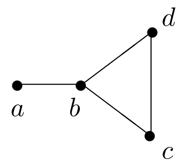
Formula $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este *universal adevărată* dacă enunţul $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este universal adevărat.

Exemplu 8.2.14 Fie L_τ *limbajul egalităţii*: fără operaţii, predicate şi constante. Structurile corespunzătoare sunt exact mulţimile.
- pentru $n \geq 1$, considerăm enunţul σ_n definit de:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n [\bigwedge_{1 \leq i < j \leq n} \neg(x_i = x_j) \wedge \forall y (\bigvee_{i=1}^{n} y = x_i)].$$

Atunci pentru orice mulţime A:
$A \models \sigma_n \Longleftrightarrow$ cardinalul lui A este n ($\mid A \mid = n$).
- A are cel mult n elemente $\Longleftrightarrow A \models \bigvee_{k=1}^{n} \sigma_k$.
- A are cel puţin n elemente $\Longleftrightarrow A \models \neg \bigvee_{k=1}^{n-1} \sigma_k$ ($n \geq 2$).

Exemplu 8.2.15 Fie L_τ *limbajul teoriei grafurilor*: cu un singur predicat binar, R. Fie următorul graf simetric $G = (X, R)$:



$$X = \{a, b, c, d\},\ R = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, b), (b, d), (d, b), (c, d), (d, c)\}.$$

Vrem să vedem dacă

$$G \models \forall x \exists y \forall z (R(x, z) \vee R(y, z)).$$

Aceasta este echivalent cu a arăta că următoarele patru afirmaţii sunt adevărate:
(1) $G \models \exists y \forall z (R(a, z) \vee R(y, z))$
(2) $G \models \exists y \forall z (R(b, z) \vee R(y, z))$
(3) $G \models \exists y \forall z (R(c, z) \vee R(y, z))$
(4) $G \models \exists y \forall z (R(d, z) \vee R(y, z))$.
Analizăm (1): are loc dacă una din următoarele afirmaţii este adevărată:
(1a) $G \models \forall z (R(a, z) \vee R(a, z))$
(1b) $G \models \forall z (R(a, z) \vee R(b, z))$
(1c) $G \models \forall z (R(a, z) \vee R(c, z))$
(1d) $G \models \forall z (R(a, z) \vee R(d, z))$.
De exemplu, (1b) are loc dacă următoarele patru afirmaţii sunt adevărate:
(1ba) $G \models (R(a, a) \vee R(b, a))$
(1bb) $G \models (R(a, b) \vee R(b, b))$
(1bc) $G \models (R(a, c) \vee R(b, c))$
(1bd) $G \models (R(a, d) \vee R(b, d))$.
Se observă că toate aceste afirmaţii sunt adevărate.

Exemplu 8.2.16 Fie $G = (X, R)$ un graf simetric. Pentru $x \in X$, *gradul* lui x este

$$deg(x) = \mid \{y \in X \mid xRy\} \mid .$$

Pentru orice $n \geq 1$, notăm cu $\varphi_n(x)$ următoarea formulă:

$$\exists x_1 \ldots \exists x_n [\bigwedge_{i=1}^{n} xRx_i \ \wedge \ \forall y (\bigwedge_{i=1}^{n} \neg(y = x_i) \rightarrow \neg R(x, y))].$$

Formula $\varphi_n(x)$ exprimă faptul că "x are gradul n". Iată şi alte trei exemplificări de formalizare a unor proprietăţi de ordinul I:

- gradul lui x este cel mult n: $\bigvee_{k=1}^{n} \varphi_k(x)$.

- gradul lui x este cel puţin $n+2$: $\neg \bigvee_{k=1}^{n+1} \varphi_k(x)$.

- există un x astfel încât gradul său să fie mai mare ca 5 şi mai mic ca 8:

$$\exists x(\varphi_6(x) \vee \varphi_7(x)).$$

Exemplu 8.2.17 Un *monoid* este o structură de forma $\mathcal{A} = (A, +, 0)$, unde $+$ este o operaţie binară, asociativă şi 0 este element neutru.

Limbajul monoizilor va avea un simbol de operaţie binară, $+$, şi o constantă, 0.

$$\mathcal{A} \text{ monoid } \iff \mathcal{A} \models \forall x \forall y \forall z (x+(y+z) = (x+y)+z) \wedge \forall x (x+0 = 0+x = x).$$

Ordinul unui element $a \in A$ este cel mai mic n astfel încât $na = 0$; dacă nu există un asemenea n, atunci ordinul lui a este ∞.

Formula

$$ord_n(x): \quad \neg(x = 0) \wedge \neg(2x = 0) \wedge \ldots \wedge \neg((n-1)x = 0) \wedge (nx = 0)$$

exprimă faptul că ordinul lui x este n.

Observăm că "ordinul lui x este finit" nu este proprietate de ordinul I. Ea s-ar putea exprima ca o "disjuncţie infinită": $\bigvee_{n=1}^{\infty} ord_n(x)$. O asemenea formulă ar presupune un limbaj ce admite disjuncţii şi conjuncţii infinite.

- Vom defini acum noţiunea de *deducţie semantică* (în sensul lui Tarski).

Definiţie 8.2.18 Fie Σ o mulţime de formule şi φ o formulă a lui L_τ.
Spunem că φ se *deduce semantic din ipotezele* Σ (şi notăm: $\Sigma \models \varphi$) dacă φ este adevărată în orice model $\mathcal{A}$ al lui Σ:

$$\mathcal{A} \models \Sigma \Longrightarrow \mathcal{A} \models \varphi.$$

Observaţie 8.2.19 Cum $\mathcal{A} \models \emptyset$ pentru orice structură $\mathcal{A}$ (prin convenţie), rezultă că:

$$\emptyset \models \varphi \Longleftrightarrow \models \varphi.$$

Observaţie 8.2.20

$$\Sigma \subseteq \Delta,\ \Sigma \models \varphi \Longrightarrow \Delta \models \varphi.$$

Propoziţia 8.2.21

$$\frac{\Sigma \models \varphi(x_1,\ldots,x_n),\ \Sigma \models \varphi(x_1,\ldots,x_n) \to \psi(x_1,\ldots,x_n)}{\Sigma \models \psi(x_1,\ldots,x_n)}$$

Demonstraţie. Fie $\mathcal{A} \models \Sigma$. Conform ipotezei,

$$\mathcal{A} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n),\ \mathcal{A} \models \varphi(x_1,\ldots,x_n) \to \psi(x_1,\ldots,x_n).$$

Fie $a_1,\ldots,a_n \in A$. Atunci $\mathcal{A} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n)$ şi $\mathcal{A} \models \varphi(a_1,\ldots,a_n) \to \psi(a_1,\ldots,a_n)$, deci $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n)$. Am demonstrat că $\mathcal{A} \models \psi(x_1,\ldots,x_n)$. $\square$

Propoziţia 8.2.22

$$\frac{\Sigma \models \varphi(x_1,\ldots,x_n)}{\Sigma \models \forall x_1 \ldots \forall x_n\, \varphi(x_1,\ldots,x_n)}$$

Teorema 8.2.23 (Teorema deducţiei semantice)
Fie Σ o mulţime de formule, φ un enunţ şi ψ o formulă. Atunci are loc următoarea echivalenţă:

$$\Sigma \models \varphi \to \psi \iff \Sigma \cup \{\varphi\} \models \psi.$$

Demonstraţie.
$\Longrightarrow$: Din $\Sigma \models \varphi \to \psi$ avem $\Sigma \cup \{\varphi\} \models \varphi \to \psi$. Cum $\Sigma \models \varphi$, rezultă $\Sigma \models \psi$ (cf. Propoziţiei 8.2.12).
$\Longleftarrow$: Vom presupune $\psi = \psi(x_1,\ldots,x_n)$. Trebuie să arătăm că:

$$\mathcal{A} \models \Sigma \Longrightarrow \mathcal{A} \models \varphi \to \psi(x_1,\ldots,x_n).$$

Fie $\mathcal{A} \models \Sigma$. Vrem sa aratăm ca $\mathcal{A} \models \varphi \to \psi(x_1,\ldots,x_n)$, adică

$$\mathcal{A} \models \forall x_1 \ldots \forall x_n\, (\varphi \to \psi(x_1,\ldots,x_n)).$$

Fie $a_1,\ldots,a_n \in A$; arătăm că

$$\mathcal{A} \models \varphi \to \psi(a_1,\ldots,a_n).$$

Aceasta este echivalent cu

$$\mathcal{A} \models \varphi \Longrightarrow \mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n).$$

Presupunem $\mathcal{A} \models \varphi$, de unde $\mathcal{A} \models \Sigma \cup \{\varphi\}$. Conform ipotezei, $\mathcal{A} \models \psi(x_1,\ldots,x_n)$, deci $\mathcal{A} \models \psi(a_1,\ldots,a_n)$. $\square$

Observaţie 8.2.24 Implicaţia $\Longrightarrow$ este adevărată pentru cazul când φ este o formulă arbitrară. Implicaţia $\Longleftarrow$ nu este adevărată în general:
$\emptyset \cup \{x = y\} \models (x = z)$: pentru că $\mathcal{A} \models (x = y) \Longrightarrow \mathcal{A} \models (x = z)$.
Nu avem însă $\emptyset \models (x = y) \rightarrow (x = z)$. Intr-adevăr, dacă ar fi aşa, atunci am avea $\mathcal{A} \models (x = y) \Longrightarrow x = z$ pentru orice structură $\mathcal{A}$. Atunci

$$\mathcal{A} \models \forall x \forall y \forall z (x = y \rightarrow x = z),$$

ceea ce nu este adevărat.

Exerciţii 8.2.25

(1) $$\frac{\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi}{\Sigma \models \forall x\, \varphi \rightarrow \forall x\, \psi}$$

(2) $$\frac{\Sigma \models \varphi \rightarrow \psi}{\Sigma \models \exists x\, \varphi \rightarrow \exists x\, \psi}$$

(3) $$\frac{\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi}{\Sigma \models \forall x\, \varphi \leftrightarrow \forall x\, \psi}$$

(4) $$\frac{\Sigma \models \varphi \leftrightarrow \psi}{\Sigma \models \exists x\, \varphi \leftrightarrow \exists x\, \psi}$$

Exerciţiu 8.2.26 *Fie $C_S(\Sigma) = \{\varphi \mid \varphi \text{ formula}, \ \Sigma \models \varphi\}$. Atunci pentru orice formulă α,*

$$\Sigma \models \alpha \iff C_S(\Sigma) \models \alpha.$$

8.3 Exemple de enunţuri universal adevărate

In această secţiune vom prezenta o listă de enunţuri universal adevărate, precum şi unele enunţuri ce nu sunt universal adevărate. Atunci când nu se precizează, se va presupune că $\| \cdot \| = \| \cdot \|_{\mathcal{A}}$, unde $\mathcal{A}$ este o structură oarecare.

Exemplu 8.3.1

$$\models \forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x)).$$

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:
- $\|\forall x\, (\varphi(x) \rightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x \varphi(x) \rightarrow \forall x \psi(x))\| = 1$
- $\|\forall x (\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\| \rightarrow (\|\forall x \varphi(x)\| \rightarrow \|\forall x \psi(x)\|) = 1$

- $\|\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\| \leq \|\forall x\varphi(x)\| \rightarrow \|\forall x\psi(x)\|$
- $\|\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\| \wedge \|\forall x\varphi(x)\| \leq \|\forall x\psi(x)\|$
- $\bigwedge_{a\in A} \|\varphi(a) \rightarrow \psi(a)\| \wedge \bigwedge_{a\in A} \|\varphi(a)\| \leq \bigwedge_{a\in A} \|\psi(a)\|$
- $\bigwedge_{a\in A}(\|\varphi(a)\| \wedge (\|\varphi(a)\| \rightarrow \|\psi(a)\|)) \leq \bigwedge_{a\in A} \|\psi(a)\|$.

Pentru a stabili această ultimă inegalitate, este suficient să arătăm că pentru orice $a \in A$ avem

$$\|\varphi(a)\| \wedge (\|\varphi(a)\| \rightarrow \|\psi(a)\|) \leq \|\psi(a)\|.$$

Ori, în orice algebră Boole avem: $x \wedge (x \rightarrow y) = x \wedge y \leq y$.

Exemplu 8.3.2

$$\not\models (\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x)) \rightarrow \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)).$$

Considerăm un limbaj cu un singur predicat, $<$, şi cu două constante, 2, 3.
Fie structura $\mathcal{A} = (\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}, <, 2, 3)$ şi formulele:
$\varphi(x): \quad x = 2$,
$\psi(x): \quad x \geq 3$, ($x \geq 3$ este *abrevierea* lui $\neg(x < 3)$).
Considerând interpretări în structura $\mathcal{A}$ menţionată, avem:
$\| \forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x)\| = \|\forall x\varphi(x)\| \rightarrow \|\forall x\psi(x)\| =$

$(\bigwedge_{n=1}^{\infty} \|n = 2\|) \rightarrow (\bigwedge_{n=1}^{\infty} \|n \geq 3\|) = 0 \rightarrow 0 = 1.$

$\|\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\| = \bigwedge_{n=1}^{\infty} \|n = 2 \rightarrow n \geq 3\| = \bigwedge_{n=1}^{\infty}(\|n = 2\| \rightarrow \|n \geq 3\|) = 0.$
Rezultă:
$\|(\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x)) \rightarrow \forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\| =$
$\|\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x)\| \rightarrow \|\forall x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x))\| = 1 \rightarrow 0 = 0.$

Exemplu 8.3.3

$$\models (\forall x\varphi(x) \rightarrow \forall x\psi(x)) \rightarrow \exists x(\varphi(x) \rightarrow \psi(x)).$$

Este echivalent cu a demonstra:
$(\bigwedge_{a\in A} \|\varphi(a)\|) \rightarrow (\bigwedge_{b\in A} \|\psi(b)\|) \leq \bigvee_{a\in A}(\|\varphi(a)\| \rightarrow \|\psi(a)\|)$

ceea ce este echivalent cu:
$(\bigvee_{a\in A} \neg\|\varphi(a)\|) \vee (\bigwedge_{b\in A} \|\psi(b)\|) \leq \bigvee_{a\in A}(\neg\|\varphi(a)\| \vee \|\psi(a)\|)$

ceea ce este echivalent cu:
$\bigvee_{a\in A}(\neg\|\varphi(a)\| \vee \bigwedge_{b\in A} \|\psi(b)\|) \leq \bigvee_{a\in A}(\neg\|\varphi(a)\| \vee \|\psi(a)\|)$.

Această din urmă inegalitate este evidentă.

Exemplu 8.3.4

$$\not\models \exists x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x \varphi(x) \to \forall x \psi(x)).$$

Considerăm limbajul cu un singur predicat binar $<$ şi cu constantele 1, 2.
Luăm tot structura $\mathcal{A} = (\{1, 2, \ldots, n, \ldots\}, <, 1, 2)$ şi formulele:
$\varphi(x): \quad x \geq 1,$
$\psi(x): \quad x = 2.$
$\|\exists x\ (\varphi(x) \to \psi(x))\| = \bigvee_{n\geq 1}(\|n \geq 1\| \to \|n = 2\|) = 1;$

$\|\forall x \varphi(x)\| = \bigwedge_n \|n \geq 1\| = 1;$ $\|\forall x \psi(x)\| = \bigwedge_n \|n = 2\| = 0;$

$\|\forall x \varphi(x) \to \forall x \psi(x)\| = \|\forall x \varphi(x)\| \to \|\forall x \psi(x)\| = 1 \to 0 = 0;$
$\|\exists x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\forall x \varphi(x) \to \forall x \psi(x))\| =$
$\|\exists x\ (\varphi(x) \to \psi(x))\| \to \|\forall x \varphi(x) \to \forall x \psi(x)\| = 1 \to 0 = 0.$

Exemplu 8.3.5

$$\models (\exists x \varphi(x) \to \exists x \psi(x)) \to \exists x\ (\varphi(x) \to \psi(x)).$$

$\|\exists x \varphi(x) \to \exists x \psi(x)\| = (\bigvee_{a\in A} \|\varphi(a)\|) \to (\bigvee_{b\in A} \|\psi(b)\|) =$

$(\bigwedge_{a\in A} \neg\|\varphi(a)\|) \vee \bigvee_{b\in A} \|\psi(b)\| = \bigvee_{b\in A}((\bigwedge_{a\in A} \neg\|\varphi(a)\|) \vee \|\psi(b)\|) \leq$

$\bigvee_{b\in A}(\neg\|\varphi(b)\| \vee \|\psi(b)\|) = \|\exists x(\varphi(x) \to \psi(x))\|.$

Exemplu 8.3.6

$$\not\models \exists x\ (\varphi(x) \to \psi(x)) \to (\exists x \varphi(x) \to \exists x \psi(x)).$$

Considerăm limbajul ce are o operaţie binară, $+$, un predicat binar, $<$, şi o constantă, 1.
Structura este $\mathcal{A} = (\mathbf{N}^*, +, <, 1)$, iar formulele:
$\varphi(x): \quad \exists y(x = y + y)$ (x este par),
$\psi(x): \quad x < 1.$
$\|\exists x\ (\varphi(x) \to \psi(x))\| = \bigvee_n(\neg\|n\ este\ par\| \vee \|n < 1\|) = 1;$

$\|\exists x \varphi(x) \to \exists x \psi(x)\| = \|\exists x(x\ este\ par)\| \to \|\exists x(x < 1)\| = 1 \to 0 = 0;$
$\|\exists x\ (\varphi(x) \to \psi(x))\| \to \|\exists x \varphi(x) \to \exists x \psi(x)\| = 1 \to 0 = 0.$

Exemplu 8.3.7

$$\models \exists x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \to (\forall x \varphi(x) \to \exists x \psi(x)).$$

Următoarele afirmaţii sunt echivalente:

- $\|\exists x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (\forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \psi(x))\| = 1$,
- $\|\exists x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))\| \leq \|\forall x \varphi(x)\| \rightarrow \|\exists x \psi(x)\|$,
- $\|\forall x \varphi(x)\| \wedge \|\exists x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))\| \leq \|\exists x \psi(x)\|$.

Demonstrăm ultima inegalitate:
$\|\forall x \varphi(x)\| \wedge \|\exists x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x))\| = \bigwedge_{a\in A} \|\varphi(a)\| \wedge (\bigvee_{b\in A}(\|\varphi(b)\| \leftrightarrow \|\psi(b)\|)) =$

$\bigvee_{b\in A}[(\bigwedge_{a\in A} \|\varphi(a)\|) \wedge (\|\varphi(b)\| \leftrightarrow \|\psi(b)\|)] \leq$

$\bigvee_{b\in A}[\|\varphi(b)\| \wedge (\|\varphi(b)\| \rightarrow \|\psi(b)\|)] = \bigvee_{b\in A}(\|\varphi(b)\| \wedge \|\psi(b)\|) \leq$

$\bigvee_{b\in A} \|\psi(b)\| = \|\exists x \psi(x)\|$.

Exemplu 8.3.8

$$\not\models (\forall x \varphi(x) \rightarrow \exists x \psi(x)) \rightarrow \exists x\ (\varphi(x) \leftrightarrow \psi(x)).$$

Fie L_τ limbajul egalităţii, îmbogăţit cu constantele 1, 2 şi $A = \mathbf{N}$.
Considerăm formulele:
$\varphi(x): \quad x = 1$,
$\psi(x): \quad x = 2$.
$\|\forall x(x = 1) \rightarrow \exists x(x = 2)\| = \|\forall x(x = 1)\| \rightarrow \|\exists x(x = 2)\| = 0 \rightarrow 1 = 1$;
$\|\exists x(x = 1 \leftrightarrow x = 2)\| = 0$.

Exemplu 8.3.9

$$\models (\forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x)) \rightarrow \forall x\ (\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

$\|\forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x)\| = \|\forall x \varphi(x)\| \vee \|\forall x \psi(x)\| =$

$(\bigwedge_{a\in A} \|\varphi(a)\|) \vee (\bigwedge_{b\in A} \|\psi(b)\|) = \bigwedge_{a,b\in A}(\|\varphi(a)\| \vee \|\psi(b)\|) \leq$

$\bigwedge_{a\in A}(\|\varphi(a)\| \vee \|\psi(a)\|) = \|\forall x(\varphi(x) \vee \psi(x))\|$.

Exemplu 8.3.10

$$\not\models \forall x\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \rightarrow (\forall x \varphi(x) \vee \forall x \psi(x)).$$

Se consideră un limbaj cu o operaţie binară, $+$, $\mathcal{A} = (\mathbf{N}, +)$.
Considerăm formulele:
$\varphi(x): \quad x = 2x$, ($2x$ este termenul $x + x$)

$\psi(x): \quad \neg(x = 2x)$.
$\|\forall x[(x = 2x) \vee (x \neq 2x)]\| = 1$;
$\|\forall x(x = 2x)\| = 0$, $\|\forall x(x{\neq}2x)\| = 0$.
Deci,
$\|\forall x[(x = 2x) \vee (x{\neq}2x)] \to [\forall x(x = 2x) \vee \forall x(x{\neq}2x)]\| = 1 \to (0 \vee 0) = 1 \to 0 = 0$.

Exemplu 8.3.11

$$\models \forall x\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \to (\exists x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)).$$

$\|\forall x\ (\varphi(x) \vee \psi(x))\| = \bigwedge_{a\in A}(\|\varphi(a)\| \wedge \|\psi(a)\|) \leq \bigwedge_{a\in A}[\bigvee_{b\in A}(\|\varphi(b)\| \wedge \|\psi(a)\|)] =$

$\bigwedge_{a\in A}[(\bigvee_{b\in A} \|\varphi(b)\|) \wedge \|\psi(a)\|] = (\bigvee_{b\in A} \|\varphi(b)\|) \vee (\bigwedge_{a\in A} \|\psi(a)\|) =$

$\|\exists x\varphi(x)\| \vee \|\forall x\psi(x)\| = \|\exists x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)\|$.

Exemplu 8.3.12

$$\not\models (\exists x\varphi(x) \vee \forall x\psi(x)) \to \forall x\ (\varphi(x) \vee \psi(x)).$$

Luăm un limbaj cu un predicat binar, $<$, şi două constante, 2, 3. $\mathcal{A} = (\mathbf{N}, <, 2, 3)$.
$\|\exists x(x = 2) \vee \forall x(x < 3)\| = \|\exists x(x = 2)\| \vee \|\forall x(x < 3)\| = 1 \vee 0 = 1$.
$\|\forall x[(x = 2) \vee (x < 3)]\| = 0$.
Rezultă:
$\not\models (\exists x(x = 2) \vee \forall x(x < 3)) \to \forall x((x = 2) \vee (x < 3))$.

Exemplu 8.3.13

$$\models \exists x\ (\varphi(x) \vee \psi(x)) \leftrightarrow (\exists x\varphi(x) \vee \exists x\psi(x)).$$

Exemplu 8.3.14

$$\models \exists x\ (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to (\exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x)).$$

Exemplu 8.3.15

$$\not\models (\exists x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x)) \to \exists x\ (\varphi(x) \wedge \psi(x)).$$

$\not\models (\exists x(x = 2) \wedge \exists x(x = 3)) \to \exists x\ ((x = 2) \wedge (x = 3))$
(se ia limbajul egalităţii, îmbogăţit cu două constante, 2, 3 şi $\mathcal{A} = (\mathbf{N}, 2, 3)$).

Exemplu 8.3.16

$$\models \forall x\ (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \to (\forall x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x)).$$

Revine la inegalitatea:
$\bigwedge_{a\in A}(\|\varphi(a)\|\wedge\|\psi(a)\|) \leq (\bigwedge_{a\in A} \|\varphi(a)\|)\wedge(\bigvee_{b\in A} \|\psi(b)\|) = \bigwedge_{a\in A}(\|\varphi(a)\|\wedge\bigvee_{b\in A} \|\psi(b)\|)$.

Exemplu 8.3.17

$$\not\models (\forall x\varphi(x) \wedge \exists x\psi(x)) \to \forall x\ (\varphi(x) \wedge \psi(x)).$$

Se consideră un limbaj cu un predicat binar, $<$, şi cu constantele 2, 3. $\mathcal{A} = (\mathbf{N}^*, <, 2, 3)$.
$\not\models (\forall x(x \geq 1) \wedge \exists x(x = 2)) \to \forall x\ ((x \geq 1) \wedge (x = 2))$.

Exemplu 8.3.18

$$\models \forall x\ (\varphi(x) \wedge \psi(x)) \leftrightarrow (\forall x\varphi(x) \wedge \forall x\psi(x)).$$

Exemplu 8.3.19

$$\models \forall x_1 \ldots \forall x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m\ [\varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi(y_1, \ldots, y_m)] \leftrightarrow$$
$$[\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \forall y_1 \ldots \forall y_m \psi(y_1, \ldots, y_m)].$$

Exemplu 8.3.20

$$\models \exists x_1 \ldots \exists x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m\ [\varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi(y_1, \ldots, y_m)] \leftrightarrow$$
$$[\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \exists y_1 \ldots \exists y_m \psi(y_1, \ldots, y_m)].$$

Exemplu 8.3.21

$$\models \forall x_1 \ldots \forall x_n \exists y_1 \ldots \exists y_m\ [\varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \psi(y_1, \ldots, y_m)] \leftrightarrow$$
$$[\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \vee \exists y_1 \ldots \exists y_m \psi(y_1, \ldots, y_m)].$$

Exemplu 8.3.22

$$\models \exists x_1 \ldots \exists x_n \forall y_1 \ldots \forall y_m\ [\varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \psi(y_1, \ldots, y_m)] \leftrightarrow$$
$$[\exists x_1 \ldots \exists x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \forall y_1 \ldots \forall y_m \psi(y_1, \ldots, y_m)].$$

8.4 Sintaxa calculului cu predicate

In prima secţiune a acestui capitol a fost definit limbajul formal al lui L_τ (asociat structurilor de ordinul I având o signatură fixată). Formulele şi enunţurile lui L_τ sunt expresia simbolică a proprietăţilor de ordinul I. Această secţiune continuă construcţia sintaxei lui L_τ: sunt precizate axiomele şi regulile sale de deducţie şi apoi se definesc teoremele formale şi deducţia formală din ipoteze. Sunt prezentate mai multe exemple de demonstraţii formale în L_τ şi câteva proprietăţi sintactice.

Axiomele calculului cu predicate sunt:
(G1) - (G3): axiomele calculului propoziţional,
(G4): $\forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \forall x\psi)$, dacă $x \notin FV(\varphi)$,
(G5): $\forall x\varphi(x, y_1, \ldots, y_n) \to \varphi(t, y_1, \ldots, y_n)$, unde t este un termen oarecare,
(G6): $x = x$,
(G7): $x = y \to (t(v_1 \ldots x \ldots v_n) = t(v_1 \ldots y \ldots v_n))$,
(G8): $x = y \to (\varphi(v_1 \ldots x \ldots v_n) \to \varphi(v_1 \ldots y \ldots v_n))$.

(G6) - (G8) se numesc *axiomele egalităţii*.
Calculul cu predicate are două *reguli de deducţie*:

$$\frac{\psi,\ \psi \to \varphi}{\varphi} \quad : \text{m.p.}$$

$$\frac{\varphi}{\forall x\varphi} \quad : \text{Principiul generalizării } \mathbf{PG}$$

• Vom defini acum *teoremele formale*.

Definiţie 8.4.1 *Teoremele formale* ale lui L_τ se definesc prin inducţie astfel:
· axiomele sunt teoreme formale,
· dacă ψ, $\psi \to \varphi$ sunt teoreme formale, atunci φ este teoremă formală (m.p.),
· dacă φ este teoremă formală, atunci $\forall x\varphi$ este teoremă formală **PG**.

Momentul zero al acestei definiţii prin inducţie este precizat de axiome, iar pasul inducţiei este asigurat de cele două reguli de deducţie (m.p. şi **PG**).

Faptul că φ este o teoremă formală va fi notat astfel:

$$\vdash \varphi.$$

Aşadar, teoremele formale se obţin plecând de la axiome şi aplicând de un numar finit de ori m.p. sau **PG**.
Pentru comoditate, vom spune *teoremă* în loc de *teoremă formală*.

• Vom defini acum *demonstraţiile formale*.

Definiţii 8.4.2
O *demonstraţie formală a lui* φ este un şir finit de formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$, astfel încât $\psi_n = \varphi$ şi, pentru orice $1 \leq i \leq n$, avem una din situaţiile:
· φ_i este axiomă,

· există $j, k < i$, astfel încât $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$,
· există $j < i$ şi $x \in V$, astfel încât $\psi_i = \forall x \psi_j$.

Numărul n se numeşte *lungimea demonstraţiei formale.*

Comparând definiţiile teoremelor formale şi ale demonstraţiilor formale, se observă că:

$$\vdash \varphi \iff (\varphi \text{ admite o demonstraţie formală}).$$

Observaţie 8.4.3 Axiomele calculului propoziţional şi regula de deduçtie modus ponens sunt prezente şi la calculul cu predicate. Atunci orice teoremă formală a calculului propoziţional va fi şi teoremă formală a calculului cu predicate.

Urmează exemple de demonstraţii formale.

Propoziţia 8.4.4

$$\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \to \forall y \forall x \varphi(x, y).$$

Demonstraţie. Scriem demonstraţia formală a formulei de mai sus:

$\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \to \forall y \varphi(x, y)$	(G5)
$\vdash \forall y \varphi(x, y) \to \varphi(x, y)$	(G5)
$\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \to \varphi(x, y)$	calc. prop.
$\vdash \forall x(\forall x \forall y \varphi(x, y) \to \varphi(x, y))$	**PG**
$\vdash \forall x(\forall x \forall y \varphi(x, y) \to \varphi(x, y)) \to (\forall x \forall y \varphi(x, y) \to \forall x \varphi(x, y))$	(G4)
$\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \to \forall x \varphi(x, y)$	m.p.
$\vdash \forall y(\forall x \forall y \varphi(x, y) \to \forall x \varphi(x, y))$	**PG**
$\vdash \forall y(\forall x \forall y \varphi(x, y) \to \forall x \varphi(x, y)) \to (\forall x \forall y \varphi(x, y) \to \forall y \forall x \varphi(x, y))$	(G4)
$\vdash \forall x \forall y \varphi(x, y) \to \forall y \forall x \varphi(x, y)$	m.p.

□

Propoziţia 8.4.5

$$\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi).$$

Demonstraţie.

(1) $\vdash \forall x \varphi \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \to \forall x \varphi$	calc. prop.
(2) $\vdash \forall x \varphi \to \varphi$	(G5)
(3) $\vdash \forall x \varphi \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \to \varphi$	calc. prop.
(4) $\vdash \forall x \varphi \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \to (\varphi \to \psi)$	analog cu (3)
(5) $\vdash \forall x \varphi \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \to \psi$	(3), (4) + calc. prop.
(6) $\vdash \forall x[\forall x \varphi \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \to \psi]$	**PG**
(7) $\vdash \forall x[\forall x \varphi \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \to \psi] \to$ $[\forall x \varphi \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \to \forall x \psi]$	(G4)
(8) $\vdash \forall x \varphi \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \to \forall x \psi$	m.p., (6), (7)
(9) $\vdash [\forall x \varphi \wedge \forall x(\varphi \to \psi) \to \forall x \psi] \to$ $[\forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)]$	calc. prop.
(10) $\vdash \forall x(\varphi \to \psi) \to (\forall x \varphi \to \forall x \psi)$	m.p., (8), (9).

□

Propoziţia 8.4.6

$$\vdash \ \forall x\varphi \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi.$$

Demonstraţie.

$\vdash \varphi \rightarrow \neg\neg\varphi$	calc. prop.
$\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi)$	**PG**
$\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \neg\neg\varphi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\neg\neg\varphi)$	Propoziţia 8.4.5
$\vdash \forall x\varphi \rightarrow \forall x\neg\neg\varphi$	m.p.
$\vdash \forall x\neg\neg\varphi \rightarrow \forall x\varphi$	analog
$\vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\neg\neg\varphi$	din ultimele două
$\vdash \forall x\neg\neg\varphi \leftrightarrow \neg\neg\forall x\neg\neg\varphi$	calc. prop.
$\vdash \forall x\varphi \leftrightarrow \neg\neg\forall x\neg\neg\varphi$	din ultimele două.

Prin definiţie, $\neg\exists x\neg\varphi$ este chiar $\neg\neg\forall x\neg\neg\varphi$. □

Propoziţia 8.4.7

$$\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \leftrightarrow \forall x\psi).$$

Demonstraţie.

$\vdash (\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	calc. prop.
$\vdash \forall x[(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)]$	**PG**
$\vdash \forall x[(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow [\forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)]$	Propoziţia 8.4.5
$\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$	m.p.
$\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$	Propoziţia 8.4.5
$\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi)$	m.p.
$\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow (\forall x\psi \rightarrow \forall x\varphi)$	analog
$\vdash \forall x(\varphi \leftrightarrow \psi) \rightarrow [(\forall x\varphi \rightarrow \forall x\psi) \wedge (\forall x\psi \rightarrow \forall x\varphi)]$	din ultimele două,

care este exact ceea ce trebuia demonstrat. □

Propoziţia 8.4.8

$$\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi), \quad \textit{dacă } x \notin FV(\varphi).$$

Demonstraţie.

$\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\psi) \wedge \varphi \rightarrow \forall x\psi$	calc. prop.
$\vdash \forall x\psi \rightarrow \psi$	(G5)
$\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\psi) \wedge \varphi \rightarrow \psi$	m.p.
$\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	calc. prop.
$\vdash \forall x[(\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)]$	**PG**
$\vdash \forall x[(\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow [(\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)]$	(G4)
$\vdash (\varphi \rightarrow \forall x\psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$	m.p..

□

Propoziţia 8.4.9

$$\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \psi), \quad \textit{dacă } x \notin FV(\psi).$$

Demonstraţie.

(1) $\vdash (\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	calc. prop.
(2) $\vdash \forall x[(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)]$	**PG**
(3) $\vdash \forall x[(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)] \rightarrow$ $[\forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \forall x(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)]$	Propoziţia 8.4.5
(4) $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \forall x(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	m.p.
(5) $\vdash \forall x(\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \forall x\neg\varphi)$	(G4)
(6) $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \forall x\neg\varphi)$	din (4), (5), calc. prop.
(7) $\vdash (\neg\psi \rightarrow \forall x\neg\varphi) \rightarrow (\neg\forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$	calc. prop.
(8) $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\neg\psi)$	din (6), (7)
(9) $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \exists x\varphi \rightarrow \neg\neg\psi$	din (8)
(10) $\vdash \neg\neg\psi \rightarrow \psi$	
(11) $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \wedge \exists x\varphi \rightarrow \psi$	din (10)
(12) $\vdash \forall x(\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \psi)$	din (11)
(13) $\vdash (\exists x\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \forall x\neg\varphi)$	calc. prop. + def. lui $\exists x\varphi$
(14) $\vdash (\exists x\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi \rightarrow \forall x\neg\varphi$	calc. prop.
(15) $\vdash \forall x\neg\varphi \rightarrow \neg\varphi$	(G5)
(16) $\vdash (\exists x\varphi \rightarrow \psi) \wedge \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$	calc. prop.
(17) $\vdash (\exists x\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi)$	calc. prop.
(18) $\vdash (\neg\psi \rightarrow \neg\varphi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	
(19) $\vdash (\exists x\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)$	din (17), (18)
(20) $\vdash \forall x[(\exists x\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)] \rightarrow$ $[(\exists x\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)]$	(G4)
(21) $\vdash \forall x[(\exists x\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow (\varphi \rightarrow \psi)]$	din (19), prin **PG**
(22) $\vdash (\exists x\varphi \rightarrow \psi) \rightarrow \forall x(\varphi \rightarrow \psi)$	m.p..

Din (12) şi (22), rezultă Propoziţia 8.4.9. □

Corolar 8.4.10

$$\vdash \ \forall x(\varphi \rightarrow \exists x\psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \exists x\psi),$$

$$\vdash \ \forall x(\varphi \rightarrow \forall x\psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \rightarrow \forall x\psi).$$

Demonstraţie. Din Propoziţia 8.4.9, pentru că x nu apare liberă în $\exists x\psi$ şi $\forall x\psi$.
□

Propoziţia 8.4.11

$$\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \leftrightarrow (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi).$$

Demonstraţie.

(1) $\vdash \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \rightarrow \forall x\varphi$	calc. prop.
(2) $\vdash \forall x\varphi \rightarrow \varphi$	(G5)
(3) $\vdash \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \rightarrow \varphi$	(1) şi (2)
(4) $\vdash \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \rightarrow \psi$	analog
(5) $\vdash \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi$	calc. prop.
(6) $\vdash \forall x[\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi]$	**PG**
(7) $\vdash \forall x[\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \rightarrow \varphi \wedge \psi] \rightarrow [\forall x\varphi \wedge \forall x\psi \rightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)]$	(G4)
(8) $\vdash \forall x\varphi \wedge \forall x\psi \rightarrow \forall x(\varphi \wedge \psi)$	m.p.
(9) $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\varphi \wedge \psi)$	calc. prop.
(10) $\vdash (\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	
(11) $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi$	din (9), (10)
(12) $\vdash \forall x[\forall x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi]$	**PG**
(13) $\vdash \forall x[\forall x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \varphi] \rightarrow [\forall x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \forall x\varphi]$	(G4)
(14) $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \forall x\varphi$	m.p.
(15) $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow \forall x\psi$	analog
(16) $\vdash \forall x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\forall x\varphi \wedge \forall x\psi)$	din (14), (15).

Din (8), (16), rezultă Propoziţia 8.4.11. □

Propoziţia 8.4.12

$$\vdash \varphi(t) \rightarrow \exists x\varphi(x).$$

Demonstraţie.

$\vdash \forall x\neg\varphi(x) \rightarrow \neg\varphi(t)$	(G5)
$\vdash \neg\neg\varphi(t) \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi(x)$	calc. prop.
$\vdash \varphi(t) \rightarrow \neg\neg\varphi(t)$	calc. prop.
$\vdash \varphi(t) \rightarrow \neg\forall x\neg\varphi(x)$	calc. prop..

□

Propoziţia 8.4.13
(i) $\vdash x = y \rightarrow y = x$,
(ii) $\vdash (x = y) \wedge (y = z) \rightarrow (x = z)$,
(iii) $\vdash (x = y) \rightarrow (\varphi(x) \leftrightarrow \varphi(y))$.

Demonstraţie.
(i):

$\vdash x = y \rightarrow (x = z \rightarrow y = z)$	(G8)
$\vdash x = z \rightarrow (x = y \rightarrow y = z)$	calc. prop.
$\vdash x = x \rightarrow (x = y \rightarrow y = x)$	luând mai sus $z = x$
$\vdash x = x$	(G6)
$\vdash x = y \rightarrow y = x$	m.p..

(ii):

$\vdash x = y \rightarrow y = x$	(i)
$\vdash y = x \rightarrow (y = z \rightarrow x = z)$	(G6)
$\vdash x = y \rightarrow (y = z \rightarrow x = z)$	calc. prop.
$\vdash (x = y) \wedge (y = z) \rightarrow x = z$	calc. prop..

(iii):

$\vdash x = y \to y = x$	(i)
$\vdash y = x \to (\varphi(y) \to \varphi(x))$	(G8)
$\vdash x = y \to (\varphi(y) \to \varphi(x))$	calc. prop.
$\vdash x = y \to (\varphi(x) \to \varphi(y))$	(G8)
$\vdash x = y \to [(\varphi(x) \to \varphi(y)) \wedge (\varphi(y) \to \varphi(x))]$	calc. prop..

□

Propoziţia 8.4.14

$$\vdash \forall x\varphi(x) \to \exists x\varphi(x).$$

Demonstraţie.

$\vdash \forall x\varphi(x) \to \varphi(x)$	(G6)
$\vdash \varphi(x) \to \exists x\varphi(x)$	Propoziţia 8.4.12
$\vdash \forall x\varphi(x) \to \exists x\varphi(x)$	calc. prop..

□

Propoziţia 8.4.15

$$\forall x\exists y(x = y).$$

Demonstraţie.

$\vdash x = y \to \exists y(x = y)$	Propoziţia 8.4.12
$\vdash x = x \to \exists y(x = y)$	punând termenul x în loc de y
$\vdash x = x$	(G6)
$\vdash \exists y(x = y)$	m.p..

□

Propoziţia 8.4.16

$$\vdash\ \forall x\forall y\exists z\ [(x = z) \wedge (z = y)].$$

Demonstraţie.

$\vdash (x = z) \wedge (z = y) \to \exists z\ [(x = z) \wedge (z = y)]$	Propoziţia 8.4.12
$\vdash (x = z) \wedge (z = z) \to \exists z\ [(x = z) \wedge (z = y)]$	luăm termenul z
$\vdash (x = z) \wedge (z = z)$	
$\vdash \exists z\ [(x = z) \wedge (z = y)]$	m.p..

□

Propoziţia 8.4.17

$$\frac{\varphi \to \psi}{\forall x\varphi \to \forall x\psi}$$

Demonstraţie. Din Propoziţia 8.4.5. □

Propoziţia 8.4.18

$$\frac{\varphi \to \psi}{\exists x\varphi \to \exists x\psi}$$

Demonstraţie.

$\vdash \varphi \to \psi$	ipoteză
$\vdash \neg\psi \to \neg\varphi$	calc. prop.
$\vdash \forall x\neg\psi \to \forall x\neg\varphi$	Propoziţia 8.4.17
$\vdash \neg\forall x\neg\varphi \to \neg\forall x\neg\psi$	calc. prop.

Ultima formulă este chiar $\vdash \exists x\varphi \to \exists x\psi$. □

• Vom defini acum *deducţia formală din ipoteze.*

Definiţie 8.4.19 Fie Σ o mulţime de formule şi φ o formulă. Definim noţiunea

$\Sigma \vdash \varphi$: formula φ se deduce (formal) din ipotezele Σ

prin următoarele clauze:
(a) φ este axiomă,
(b) $\varphi \in \Sigma$,
(c) există o formulă ψ, astfel încât $\Sigma \vdash \psi$, $\Sigma \vdash \psi \to \varphi$, adică:

$$\frac{\Sigma \vdash \psi, \psi \to \varphi}{\Sigma \vdash \varphi} \quad \text{m.p.}$$

(d) există ψ şi x, astfel încât $\Sigma \vdash \psi$ şi φ este $\forall x\psi$, adică:

$$\frac{\Sigma \vdash \psi}{\Sigma \vdash \forall x\psi} \quad \textbf{PG}$$

Noţiunea "$\Sigma \vdash \varphi$" a fost definită prin inducţie:
- momentul zero al inducţiei este precizat de (a) şi (b),
- pasul inducţiei (trecerea de la k la $k+1$) este realizat prin aplicarea condiţiilor (c) şi (d).

Observaţie 8.4.20

$$\emptyset \vdash \varphi \Longleftrightarrow \vdash \varphi.$$

• Vom defini acum Σ-*demonstraţiile formale.*

Definiţii 8.4.21

O Σ-*demonstraţie formală a lui* φ este un şir finit de formule $\psi_1, \ldots, \psi_n$, astfel încât $\psi_n = \varphi$ şi, pentru orice $1 \leq i \leq n$, avem una din situaţiile:
· φ_i este axiomă,
· $\varphi_i \in \Sigma$,
· există $j, k < i$, astfel încât $\psi_k = \psi_j \to \psi_i$,
· există $j < i$ şi $x \in V$, astfel încât $\psi_i = \forall x \psi_j$.
Numărul n se numeşte *lungimea* Σ-*demonstraţiei formale.*

Comparând definiţiile deducţiilor formale şi ale Σ-demonstraţiilor formale, se observă că:

$$\Sigma \vdash \varphi \iff (\varphi \text{ admite o } \Sigma - \text{demonstraţie formală}).$$

Definiţie 8.4.22 Dacă $\varphi(_1, \ldots, x_n)$ este o formulă, atunci $\forall x_1 \ldots \forall x_n \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ se numeste *închiderea sa universală.*

Propoziţia 8.4.23

$$\Sigma \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n) \iff \Sigma \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n).$$

Demonstraţie.
$\Longrightarrow$: Se aplică **PG** de n ori.
$\Longleftarrow$:
$\Sigma \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \to \forall x_2 \ldots \forall x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$
$\Sigma \vdash \forall x_2 \ldots \forall x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \to \forall x_3 \ldots \forall x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$
...
$\Sigma \vdash \forall x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.
Conform calculului propoziţiilor, rezultă:
$\Sigma \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(x_1, \ldots, x_n)$.
Atunci

$\Sigma \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n)$	prin ipoteza
$\Sigma \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n \, \varphi(x_1, \ldots, x_n) \to \varphi(x_1, \ldots, x_n)$	mai sus
$\Sigma \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n)$	m.p..

□

Conform propoziţiei precedente, studiul deducţiei formale din ipoteze poate fi redus la enunţuri.

Propoziţia 8.4.24
(a) $\Sigma \vdash \varphi, \Sigma \subseteq \Delta \Longrightarrow \Delta \vdash \varphi$,
(b) $\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow$ *există* $\Sigma_0 \subseteq \Sigma$, Σ_0 *finita,* $\Sigma_0 \vdash \varphi$.

Demonstraţie. Prin inducţie după φ. □

Teorema 8.4.25 *(Teorema deducţiei)*
Fie Σ *o mulţime de formule,* φ *un enunţ şi* ψ *o fomulă. Atunci*

$$\Sigma \vdash \varphi \to \psi \Longleftrightarrow \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi.$$

Demonstraţie.
$\Longrightarrow$: Aplicând Propoziţia 8.4.24, (a) şi m.p..
$\Longleftarrow$: Prin inducţie asupra modului cum este definit $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \psi$. Totul decurge ca în cazul calculului propoziţional, adăugându-se situaţia: $\psi = \forall x\alpha$, $\Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha$:

$$\begin{array}{lcll} \Sigma \cup \{\varphi\} \vdash \alpha & \Longrightarrow & \Sigma \vdash \varphi \to \alpha & \text{ipoteza inducţiei} \\ & \Longrightarrow & \Sigma \vdash \forall x(\varphi \to \alpha) & \textbf{PG} \\ & \Longrightarrow & \Sigma \vdash \forall x(\varphi \to \alpha) \to (\varphi \to \forall x\alpha) & \text{(G4), } \varphi \text{ fiind enunţ} \\ & \Longrightarrow & \Sigma \vdash \varphi \to \forall x\alpha & \text{m.p.} \\ & \Longrightarrow & \Sigma \vdash \varphi \to \psi & \text{conform notaţiei.} \end{array}$$

□

Definiţie 8.4.26 O mulţime Σ de formule (teorie) se numeşte *inconsistentă*, dacă $\Sigma \vdash \varphi$, pentru orice formulă φ. In caz contrar, Σ se numeşte *consistentă*.

Următoarele rezultate asupra teoriilor consistente şi teoriilor maximal consistente se demonstrează la fel ca analoagele lor din cazul calculului propoziţional.

Propoziţia 8.4.27 *Pentru orice teorie* Σ*, sunt echivalente următoarele afirmaţii:*
(1) Σ *este inconsistentă,*
(2) există o formulă φ*, astfel încât* $\Sigma \vdash \varphi \wedge \neg\varphi$,
(3) există o formulă φ*, astfel încât* $\Sigma \vdash \varphi$ *şi* $\Sigma \vdash \neg\varphi$,
(4) pentru orice formulă φ, $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$,
(5) există o formulă φ*, astfel încât* $\Sigma \vdash \neg(\varphi \to \varphi)$.

Propoziţia 8.4.28 *Fie* Σ *o teorie şi* φ *o formulă a lui* L_τ*. Atunci*
(a) $\Sigma \cup \{\varphi\}$ *este inconsistentă* $\Longleftrightarrow \Sigma \vdash \neg\varphi$,
(b) $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ *este inconsistentă* $\Longleftrightarrow \Sigma \vdash \varphi$.

Definiţie 8.4.29 O teorie Δ se numeşte *maximal consistentă* dacă este un element maximal în mulţimea teoriilor consistente ale lui L_τ (ordonată de incluziune).

Cu alte cuvinte, o teorie consistentă Δ este maximal consistentă dacă prin adăugarea unor formule noi la Δ se obţine o teorie inconsistentă.

Propoziţia 8.4.30 *Orice teorie consistentă se poate scufunda într-o teorie maximal consistentă.*

Propoziţia 8.4.31 *Fie Σ o teorie maximal consistentă. Atunci*
(1) $\Sigma \vdash \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in \Sigma$,
(2) $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi \Longleftrightarrow (\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \psi)$,
(3) Pentru orice formulă φ, avem: $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

Observaţie 8.4.32 Fie Σ o teorie şi φ, ψ două formule ale lui L_τ. Atunci

$$\Sigma \vdash \varphi \wedge \psi \Longleftrightarrow (\Sigma \vdash \varphi \text{ şi } \Sigma \vdash \psi).$$

Propoziţia 8.4.33 *Dacă Σ este o teorie consistentă, atunci sunt echivalente:*
(1) Σ este maximal consistentă,
(2) pentru orice formule φ, ψ, $\Sigma \vdash \varphi \vee \psi \Longleftrightarrow (\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \psi)$,
(3) pentru orice formulă φ, $\Sigma \vdash \varphi$ sau $\Sigma \vdash \neg\varphi$.

8.5 Algebra Lindenbaum-Tarski a calculului cu predicate

Secţiunea 5 studiază algebra Lindenbaum-Tarski asociată calculului cu predicate. Mulţimea formulelor lui L_τ este factorizată printr-o relaţie de echivalenţă canonică, iar mulţimea cât obţinută este înzestrată cu o structură de algebră Boole. Operaţiile acestei algebre Boole se obţin din conectorii propoziţionali ai lui L_τ: disjuncţia, conjuncţia şi negaţia. Implicaţia şi echivalenţa logică din sintaxa lui L_τ sunt traduse algebric prin implicaţia booleană, respectiv prin echivalenţa booleană din algebra Lindenbaum-Tarski. Până aici totul se produce în mod analog algebrei Lindenbaum-Tarski a calculului propoziţional. In secţiune se analizează modul în care cuantificatorii lui L_τ acţioneaza în algebra Lindenbaum-Tarski. Astfel, se degajă noţiunile de cuantificator existenţial şi de cuantificator universal într-o algebră Boole, apoi noţiunea de algebră Boole monadică şi de algebră Boole cilindrică. Algebrele Boole cilindrice sunt structurile algebrice asociate calculului cu predicate. Multe din proprietăţile sintactice şi semantice ale lui L_τ pot fi formulate şi demonstrate în contextul algebrelor Boole cilindrice (vezi monografia [23]).

Fie $Form(L_\tau)$ mulţimea formulelor lui L_τ. Următoarea relaţie binară, $\sim$, pe $Form(L_\tau)$:

$$\varphi \sim \psi \Longleftrightarrow \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Longleftrightarrow (\vdash \varphi \rightarrow \psi \text{ şi } \vdash \psi \rightarrow \varphi)$$

este o relaţie de echivalenţă (se demonstrează exact ca la calculul propoziţional).

Fie $B = Form(L_\tau)/\sim$ mulţimea cât; pentru $\varphi \in Form(L_\tau)$, notăm cu $\widehat{\varphi}$ clasa sa de echivalenţă. Definim următoarele operaţii pe mulţimea B:

$$\widehat{\varphi} \vee \widehat{\psi} \overset{def.}{=} \widehat{\varphi \vee \psi},\ \widehat{\varphi} \wedge \widehat{\psi} \overset{def.}{=} \widehat{\varphi \wedge \psi}, \neg\widehat{\varphi} \overset{def.}{=} \widehat{\neg\varphi},\ \mathbf{0} \overset{def.}{=} \widehat{\varphi \wedge \neg\varphi},\ \mathbf{1} \overset{def.}{=} \widehat{\varphi \vee \neg\varphi}.$$

La fel ca în cazul calculului propoziţiilor, se poate arăta că definiţiile acestor operaţii nu depind de reprezentanţi şi că structura

$$\mathcal{B} = (B = Form(L_\tau)/\sim, \vee, \wedge, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1})$$

este o algebră Boole, numită *algebra Lindenbaum-Tarski a lui* L_τ.

La fel ca în cazul calculului propoziţional, sunt valabile echivalenţele următoare:
· $\vdash \varphi \rightarrow \psi \Longleftrightarrow \widehat{\varphi} \leq \widehat{\psi}$,
· $\vdash \varphi \Longleftrightarrow \widehat{\varphi} = \mathbf{1}$.

Considerăm funcţia surjectivă $p : Form(L_\tau) \longrightarrow B$, $p(\varphi) = \widehat{\varphi}$, pentru orice $\varphi \in Form(L_\tau)$. Funcţia p are proprietăţile următoare:
· $p(\varphi \vee \psi) = p(\varphi) \vee p(\psi)$, $p(\varphi \wedge \psi) = p(\varphi) \wedge p(\psi)$, $p(\neg\varphi) = \neg p(\varphi)$,
· $p(\varphi \rightarrow \psi) = p(\varphi) \rightarrow p(\psi)$, $p(\varphi \leftrightarrow \psi) = p(\varphi) \leftrightarrow p(\psi)$,
· $p(\varphi) \leq p(\psi) \Longleftrightarrow \vdash \varphi \rightarrow \psi$,
· $p(\varphi) = \mathbf{1} \Longleftrightarrow \vdash \varphi$.

Funcţia p duce operaţiile logice în operaţii booleene. In mod natural, se pune problema care este comportamentul funcţiei p faţă de cuantificatori.

Propoziţia 8.5.1

$$\widehat{\forall x\varphi}(x) = \bigwedge_{v\in V} \widehat{\varphi(v)}, \quad \widehat{\exists x\varphi}(x) = \bigvee_{v\in V} \widehat{\varphi(v)}.$$

Demonstraţie. A proba prima formulă este echivalent cu:

(a) $\widehat{\forall x\varphi}(x) \leq \widehat{\varphi(v)}$, pentru orice $v \in V$,

(b) dacă $\widehat{\psi} \leq \widehat{\varphi(v)}$, pentru orice $v \in V$, atunci $\widehat{\psi} \leq \widehat{\forall x\varphi}$.

Avem:
(a): rezultă folosind axioma (G5): $\vdash \forall x\varphi \rightarrow \varphi(v)$, pentru orice $v \in V$.

(b): Presupunem $\widehat{\psi} \leq \widehat{\varphi(v)}$, $v \in V$, deci $\vdash \psi \rightarrow \varphi(v)$, $v \in V$. Alegem o variabilă v ce nu apare în ψ sau în $\forall x\varphi(x)$.

$$\begin{array}{lll}
 & \vdash \psi \to \varphi(v) & \\
 & \vdash \forall v(\psi \to \varphi(v)) & \textbf{PG} \\
 & \vdash \forall v(\psi \to \varphi(v)) \to (\psi \to \forall v\varphi(v)) & \text{(G4)} \\
\text{(i)} & \vdash \psi \to \forall v\varphi(v) & \text{m.p..}
\end{array}$$

De asemenea,

$$\begin{array}{lll}
 & \vdash \forall v\varphi(v) \to \varphi(x) & \text{(G5)} \\
 & \vdash \forall x[\forall v\varphi(v) \to \varphi(x)] & \textbf{PG} \\
 & \vdash \forall x[\forall v\varphi(v) \to \varphi(x)] \to (\forall v\varphi(v) \to \forall x\varphi(x)) & \text{(G4)} \\
\text{(ii)} & \vdash \forall v\varphi(v) \to \forall x\varphi(x) & \text{m.p..}
\end{array}$$

Din (i) şi (ii) rezultă: $\vdash \psi \to \forall x\varphi(x)$, adică $\widehat{\psi} \leq \widehat{(\forall x\varphi(x))}$.

A doua relaţie rezultă din prima, folosind egalitaţile de Morgan:

$$\widehat{(\exists x\varphi)} = \widehat{(\neg\forall x\neg\varphi)} = \neg\widehat{(\forall x\neg\varphi)} = \neg\bigwedge_{v\in V}\widehat{(\neg\varphi(v))} = \bigvee_{v\in V}\widehat{(\varphi(v))}.$$

□

Observaţie 8.5.2 Folosind funcţia p, egalităţile din Propoziţia precedentă se scriu:

$$p(\forall x\varphi) = \bigwedge_{v\in V} p(\varphi(v)), \quad p(\exists x\varphi) = \bigvee_{v\in V} p(\varphi(v)).$$

Notăm $Sent(L_\tau)$ mulţimea enunţurilor lui L_τ. Atunci

$$Sent(L_\tau)/\sim = \{\widehat{\varphi} \mid \varphi \in Sent(L_\tau)\}$$

este o *subalgebră Boole* a lui $B = Form(L_\tau)/\sim$.

Definiţie 8.5.3 O submulţime Σ a lui $Form(L_\tau)$ se numeşte *teorie* a lui L_τ.

Vom generaliza acum construcţia de mai sus, definind algebra Lindenbaum-Tarski a unei teorii.

Fie Σ o teorie a lui L_τ. Considerăm relaţia binară $\sim_\Sigma$ pe $Form(L_\tau)$ definită astfel:

$$\varphi \sim_\Sigma \psi \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Longleftrightarrow (\Sigma \vdash \varphi \to \psi,\ \Sigma \vdash \psi \to \varphi).$$

Atunci $\sim_\Sigma$ este o relaţie de echivalenţă. Fie $B_\Sigma = Form(L_\tau)/\sim_\Sigma$ mulţimea cât. Notăm cu φ/Σ clasa de echivalenţă a lui $\varphi \in Form(L_\tau)$. B_Σ devine algebră Boole faţă de operaţiile:

$$\varphi/\Sigma \vee \psi/\Sigma \stackrel{def.}{=} (\varphi \vee \psi)/\Sigma, \quad \varphi/\Sigma \wedge \psi/\Sigma \stackrel{def.}{=} (\varphi \wedge \psi)/\Sigma,$$

$$\neg(\varphi/\Sigma) \stackrel{def.}{=} (\neg\varphi)/\Sigma, \quad \mathbf{1} \stackrel{def.}{=} (\varphi \vee \neg\varphi)/\Sigma, \quad \mathbf{0} \stackrel{def.}{=} (\varphi \wedge \neg\varphi)/\Sigma.$$

$\mathcal{B}_\Sigma = (B_\Sigma, \vee, \wedge, \neg, \mathbf{0}, \mathbf{1})$ se numeşte *algebra Lindenbaum-Tarski a teoriei* Σ.

Observaţie 8.5.4

$$\mathcal{B} = \mathcal{B}_{\emptyset}$$

Propoziţia 8.5.1 se poate extinde cu uşurinţă la algebra Lindenbaum-Tarski $\mathcal{B}_{\Sigma}$. In algebra Lindenbaum-Tarski $\mathcal{B}_{\Sigma}$, au loc echivalenţele următoare:

$$\varphi/\Sigma \leq \psi/\Sigma \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \varphi \to \psi,$$

$$\varphi/\Sigma = \mathbf{1} \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \varphi.$$

Aceste echivalenţe traduc în limbaj algebric proprietăţi ale deducţiei formale. Prin cea de a doua echivalenţă, a demonstra că $\Sigma \vdash \varphi$ se reduce la un calcul boolean.

8.5.1 Algebre Boole monadice. Algebre Boole cilindrice

In mod natural, se pune acum problema definirii algebrelor corespunzătoare calculului cu predicate. Ele vor avea ca prototip algebra Lindenbaum-Tarski a lui L_τ. Primul pas va fi obţinerea unei noţiuni de cuantificator (existenţial şi universal) pe o algebră Boole oarecare.

Fie $\mathcal{A} = (A, \vee, \wedge, \neg, 0, 1)$ o algebră Boole oarecare.

Definiţie 8.5.5
Un *cuantificator existenţial* pe $\mathcal{A}$ este o funcţie $\exists : A \longrightarrow A$, astfel încât:
· $\exists(0) = 0$,
· $x \leq \exists(x)$,
· $\exists(x \wedge \exists(y)) = \exists(x) \wedge \exists(y)$.

Dual, un *cuatificator universal* pe $\mathcal{A}$ este o funcţie $\forall : A \longrightarrow A$, astfel încât:
· $\forall(1) = 1$,
· $x \geq \forall(x)$,
· $\forall(x \vee \forall(y)) = \forall(x) \vee \forall(y)$.

Dacă $\exists$ este un cuantificator existenţial pe $\mathcal{A}$, atunci $\forall(x) = \neg\exists(\neg x)$ defineşte un cuantificator universal pe $\mathcal{A}$; dacă $\forall$ este un cuantificator universal pe $\mathcal{A}$, atunci $\exists(x) = \neg\forall(\neg x)$ defineşte un cuantificator existenţial pe $\mathcal{A}$.

Definiţie 8.5.6 O *algebră Boole monadică* este o structură $(\mathcal{A}, \exists)$, unde $\mathcal{A}$ este o algebră Boole şi $\exists$ este un cuantificator existenţial pe $\mathcal{A}$.

Considerăm algebra Lindenbaum-Tarski $\mathcal{B}$ şi o variabilă oarecare $x \in V$. Definim operaţia unară $\exists_x : B \longrightarrow B$ prin:

$$\exists_x(\widehat{\varphi}) \stackrel{def.}{=} \widehat{\exists x \varphi}, \quad \text{pentru orice } \varphi \in Form(L_\tau).$$

Observaţie 8.5.7 Operaţia $\exists_x$ este bine definită:

$$\vdash \varphi \leftrightarrow \psi \Longrightarrow \vdash \exists x\varphi \leftrightarrow \exists x\psi.$$

Propoziţia 8.5.8 *$\exists_x$ este un cuantificator existenţial pe $\mathcal{B}$.*

Demonstraţie. Cele trei relaţii:
· $\exists_x(0) = 0$,
· $\widehat{\varphi} \leq \exists_x(\widehat{\varphi})$,
· $\exists_x(\widehat{\varphi} \wedge \exists_x(\widehat{\psi})) = \exists_x(\widehat{\varphi}) \wedge \exists_x(\widehat{\psi})$

sunt echivalente cu :
· $\vdash (\varphi \wedge \neg\varphi) \leftrightarrow \exists x(\varphi \wedge \neg\varphi)$, (putem lua pe φ = enunţ)
· $\vdash \varphi \to \exists x\varphi$,
· $\vdash \exists x(\varphi \wedge \exists x\psi) \leftrightarrow (\exists x\varphi \wedge \exists x\psi$. □

Observaţie 8.5.9 Cuantificatorul universal $\forall_x$ asociat lui $\exists_x$ este:

$$\forall_x(\widehat{\varphi}) \stackrel{def.}{=} \widehat{\forall x\varphi}.$$

Definiţia cuantificatorului existenţial (respectiv universal) pe o algebră Boole oarecare a fost obţinută în mod independent de A. Tarski şi de P. Halmos. Cele trei axiome simple ce definesc cuantificatorul existenţial (respectiv universal) pornesc din analiza proprietăţilor operaţiilor unare $\exists_x$ (respectiv $\forall_x$) ale algebrei Lindenbaum-Tarski $\mathcal{B}$.

Acţiunea cuantificatorului existenţial asupra formulelor lui L_τ este reflectată în algebra Lindenbaum-Tarski $\mathcal{B}$ prin operaţiile unare $(\exists_x)_{x\in V}$. Atunci structurile algebrice ale lui L_τ vor fi algebre Boole înzestrate cu familii de cuantificatori existenţiali.

Definiţie 8.5.10 Fie I o mulţime nevidă. Se numeşte *I-algebră Boole cilindrică* o structură

$$(\mathcal{A}, (\exists_i)_{i\in I}, E)$$

unde:
· $\mathcal{A}$ este o algebră Boole,
· $\exists_i$ este cuantificator existenţial pe $\mathcal{A}$, pentru orice $i \in I$,
· E este o funcţie $E : I^2 \longrightarrow A$, numită *egalitate* pe A,
astfel încât următoarele condiţii sunt îndeplinite:

(C_1) $\exists_i \circ \exists_j = \exists_j \circ \exists_i$, pentru orice $i, j \in I$,
(C_2) $E(i, i) = 1$, $i \in I$,
(C_3) $E(i, j) = \exists_k[E(i, k) \wedge E(k, j)]$, pentru $k \neq i, j$ din I,
(C_4) $\exists_i[E(i, j) \wedge x] \wedge \exists_i[E(i, j) \wedge \neg x] = 0$, pentru $i \neq j$ în I.

Exemplu 8.5.11 Fie $E_0 : V \longrightarrow B$, dată de $E_0(x,y) = \widehat{(x=y)}$, pentru orice $x, y \in V$. Atunci

$$(\mathcal{B}, (\exists_x)_{x\in V}, E_0)$$

este o V-algebră Boole cilindrică.

Noţiunea de I-algebră Boole cilindrică este generalizarea structurii din Exemplul 8.5.11. In interpretare, I reprezintă mulţimea variabilelor, $(\exists_i)_{i\in I}$ familia cuantificatorilor existenţiali, iar E reflectă predicatul de egalitate.

Exemplul următor îndepartează noţiunea de algebră cilindrică de sintaxa lui L_τ.

Exemplu 8.5.12 Fie X, I două mulţimi nevide şi $F(X^I, L_2)$ mulţimea funcţiilor $p : X^I \longrightarrow L_2$.

Pentru $i \in I$ şi $p : X^I \longrightarrow L_2$, definim funcţia $\exists_i(p) : X^I \longrightarrow L_2$ prin:

$$\exists_i(p)(x) = \bigvee\{p(y) \mid y \in X^I, y\mid_{I\setminus\{i\}} = x\mid_{I\setminus\{i\}}\}, \text{ pentru orice } x \in X^I.$$

In felul acesta, obţinem o funcţie $\exists_i : F(X^I, L_2) \longrightarrow F(X^I, L_2)$. $\exists_i$ este un cuantificator existenţial pe algebra Boole $\mathcal{F}(X^I, L_2)$.

De asemenea, definim $E_0(i,j) : X^I \longrightarrow L_2$ prin:

$$E_0(i,j)(x) = \begin{cases} 1, & \text{dacă} \quad x_i = x_j, \\ 0, & \text{dacă} \quad x_i \neq x_j. \end{cases}$$

Se obţine o funcţie $E_0 : I^2 \longrightarrow F(X^I, L_2) : (i,j) \mapsto E_0(i,j)$.
Atunci

$$(\mathcal{F}(X^I, L_2), (\exists_i)_{i\in I}, E_0)$$

este o I-algebră Boole cilindrică.

Observaţie 8.5.13 Algebrele cilindrice sunt structuri algebrice ce provin din sintaxa calculului cu predicate. Ele au fost definite şi studiate de A. Tarski, de elevii săi L. Henkin şi J.D. Monk şi de numeroşi alţi cercetători [23]. Algebrele poliadice, introduse de P. R. Halmos [20], constituie un al doilea tip de structuri algebrice ce au ca prototip algebra Lindenbaum-Tarski a lui L_τ. Intre algebrele cilindrice şi algebrele poliadice există o legatură puternică (vezi [12]), multe din proprietăţile unora putând fi transferate celorlalte structuri. Cu toate acestea, teoriile lor s-au dezvoltat separat şi, cel mai adesea, cu tehnici diferite.

8.6 Teorema de completitudine. Modele Henkin

Completitudinea calculului cu predicate apare ca problemă în monografia lui Hilbert şi Ackermann din 1928 [24]. Prima demonstraţie a teoremei de completitudine pentru calculul cu predicate a fost obţinută de Gödel în teza sa de doctorat din 1929 şi publicată apoi în [19]. Gödel a demonstrat întâi completitudinea calculului cu predicate fără egalitate, apoi a extins rezultatul şi pentru limbaje cu egalitate. Limbajele considerate de Gödel erau numărabile şi nu conţineau simboluri de operaţii. In [19], este obţinută şi teorema de compacitate, ca un corolar al teoremei de completitudine. Demonstraţia originară a teoremei de completitudine (bazată pe aducerea enunţurilor la forma normală Skolem) are în prezent mai mult un interes istoric. Teorema de completudine a lui Gödel stabileşte echivalenţa teoremelor formale cu enunţurile universal adevărate. In lucrarea [21], Henkin demonstrează (pentru limbaje de orice cardinal) următorul rezultat: orice teorie consistentă a lui L_τ admite un model. O consecinţă imediată a sa este teorema de completitudine extinsă, ce afirmă echivalenţa deducţiei formale în L_τ cu deducţia semantică. Teorema de completitudine a lui Gödel este un caz particular al teoremei de completitudine extinsă.

In această secţiune, prezentăm în detaliu demonstraţia dată de Henkin pentru teorema de completitudine extinsă. Metoda folosită de Henkin în demonstraţie (cunoscută sub numele de metoda constantelor) este un instrument eficace pentru construcţii de modele ale teoriilor consistente (vezi discuţia din [22]). Ea a fost folosită apoi cu succes în demonstrarea unor teoreme de completitudine pentru alte sisteme logice (intuiţionist, modal, temporal, etc.), ca şi a unor teoreme importante ale teoriei modelelor (teorema de omitere a tipurilor, teoreme de interpolare de tip Craig, teoreme ale celor doi cardinali, etc.) (vezi [2], [5], [37]).

Fie L_τ un limbaj de ordinul I. Prin definiţie, cardinalul lui L_τ este:

$$\mid L_\tau \mid = \mid Form(L_\tau) \mid = \mid Sent(L_\tau) \mid .$$

Observaţie 8.6.1 Presupunem că V este numărabilă şi că mulţimile de operaţii, de relaţii şi de constante sunt cel mult numărabile. Atunci

$$\mid L_\tau \mid = \mid Form(L_\tau) \mid = \mid Sent(L_\tau) \mid = \omega,$$

unde ω este cardinalul mulţimilor numărabile. Spunem că L_τ este *limbaj numărabil.*

Fie C o mulţime de constante noi şi $L_\tau(C)$ limbajul obţinut din L_τ prin adăugarea constantelor din C.

Observaţie 8.6.2 Dacă $\mid L_\tau \mid = \mid C \mid$, atunci $\mid L_\tau(C) \mid = \mid L_\tau \mid = \mid C \mid$.

Lema 8.6.3 *Fie $\varphi(x)$ o formulă în L_τ, c o constantă din C şi $\varphi(c)$ enunţul din $L_\tau(C)$ obţinut prin înlocuirea lui x cu c. Atunci pentru orice teorie T a lui L_τ, avem:*

$$T \vdash \varphi(c) \text{ în } L_\tau(C) \Longleftrightarrow T \vdash \forall x \varphi(x) \text{ în } L_\tau.$$

Demonstraţie.
$\Longrightarrow$: Dacă $\alpha_1(c), \ldots, \alpha_n(c) = \varphi(c)$ este o demonstraţie formală a lui $\varphi(c)$ din T în $L_\tau(C)$, atunci $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ este o demonstraţie formală a lui $\varphi(x)$ din T în L_τ. Atunci $T \vdash \varphi(x)$ în L_τ, deci $T \vdash \forall x\varphi(x)$.
$\Longleftarrow$: Dacă $T \vdash \forall x\varphi(x)$ în L_τ, atunci $T \vdash \forall x\varphi(x)$ în $L_\tau(C)$. Cum $\vdash \forall\varphi(x) \to \varphi(c)$, rezultă $T \vdash \varphi(c)$ în $L_\tau(C)$. $\square$

Lema 8.6.4 *Dacă T este o teorie consistentă în L_τ, atunci T este consistentă şi în $L_\tau(C)$.*

Demonstraţie. Presupunem că T nu este consistentă în $L_\tau(C)$, deci există $\varphi(c_1, \ldots, c_n) \in L_\tau(C)$, astfel încât

$$T \vdash \varphi(c_1, \ldots, c_n) \wedge \neg\varphi(c_1, \ldots, c_n), \quad c_1, \ldots, c_n \in C.$$

Conform Lemei 8.6.3,

$$T \vdash \forall x_1 \ldots \forall x_n(\varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n)),$$

deci:

$$T \vdash \varphi(x_1, \ldots, x_n) \wedge \neg\varphi(x_1, \ldots, x_n) \text{ în } L_\tau,$$

ceea ce contrazice consistenţa lui T. $\square$

O *teorie închisă* este formată numai din enunţuri.
In continuare, vom considera numai teorii închise.

Definiţie 8.6.5 Fie T o teorie consistentă în $L_\tau(C)$. T se numeşte *teorie Henkin*, dacă pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui $L_\tau(C)$, cu cel mult o variabilă liberă x, există $c \in C$, astfel încât

$$T \vdash \exists x\varphi(x) \to \varphi(c).$$

Observaţie 8.6.6 Implicaţia

$$T \vdash \varphi(c) \to \exists x\varphi(x)$$

are loc întotdeauna.

Pentru a da o interpretare noţiunii de teorie Henkin, vom gândi o formulă $\varphi(x)$ ca pe o "ecuaţie" în x. Atunci enunţul $\exists x\varphi(x)$ va semnifica existenţa "soluţiilor" lui $\varphi(x)$, iar $\varphi(c)$ va însemna că "c este o soluţie" a lui $\varphi(x)$.

Atunci condiţia $T \vdash \exists x\varphi(x) \to \varphi(x)$ din definiţia teoriei Henkin se interpretează astfel: dacă în ipotezele T ecuaţia $\varphi(x)$ admite soluţie, atunci o soluţie a sa poate fi aleasă din mulţimea C.

Lema 8.6.7 *Fie L_τ un limbaj de ordinul I şi C o mulţime de constante, astfel încât $\mid L_\tau \mid = \mid C \mid$. Dacă T este o teorie consistentă în L_τ, atunci există o teorie Henkin $\overline{T}$ în $L_\tau(C)$, cu $T \subseteq \overline{T}$.*

Demonstraţie. Vom face demonstraţia numai pentru limbaje numărabile:

$$| LPC |=| C |=| L_\tau(C) |= \omega.$$

Fie $C = (c_n)_{n<\omega}$ o enumerare a lui C, cu $n \neq m \Longrightarrow c_n \neq c_m$.

Fie $(\varphi_n(x_n))_{n<\omega}$ o enumerare a formulelor lui $L_\tau(C)$ cu cel mult o variabilă liberă. Construim prin inducţie:
· un şir de teorii $(T_n)_{n<\omega}$ ale lui $L_\tau(C)$, cu $T_0 = T$,
· un şir de constante din C: $(e_n)_{n<\omega}$,
cu proprietăţile:
(i) T_n este consistentă în $L_\tau(C)$,
(ii) $T_{n+1} = T_n \cup \{\exists x_n \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(e_n)\}$,
unde e_n este o constantă din C ce nu apare în T_n şi

$$x_n = \begin{cases} \text{variabila liberă a lui } \varphi_n, & \text{dacă} \quad \text{există,} \\ \text{orice variabilă,} & \text{dacă} \quad \varphi_n \text{ nu are variabile libere.} \end{cases}$$

Vom lua definiţia prin recurenţă a teoriilor T_n ca fiind dată de (ii). Rămâne să arătăm că dacă T_n este consistentă, atunci şi T_{n+1} este consistentă.

Presupunem prin absurd că teoria

$$T_n \cup \{\exists x_n \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(e_n)\}$$

este inconsistentă în $L_\tau(C)$, deci, aplicând Propoziţia 8.4.28, rezultă

$$T_n \vdash \neg(\exists x_n \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(e_n)).$$

Atunci

$$T_n \vdash \exists x_n \varphi_n(x_n) \wedge \neg\varphi_n(e_n),$$

deci $T_n \vdash \exists x_n \varphi_n(x_n)$ şi $T_n \vdash \neg\varphi_n(e_n)$.
Lema 8.6.3 implică $T_n \vdash \forall x_n \neg\varphi_n(x_n)$, deci $T_n \vdash \neg\exists x_n \varphi_n(x_n)$: contradicţie cu faptul că T_n este consistentă.

Construcţia prin inducţie s-a terminat. Fie $\overline{T} = \bigcup_{n<\omega} T_n$. Se verifică uşor că $\overline{T}$ este consistentă. Să arătăm că $\overline{T}$ este teorie Henkin.

Fie $\varphi(x) \in L_\tau(C)$ cu cel mult o variabilă liberă x, deci există n cu $\varphi(x) = \varphi_n(x_n)$:

$$\exists x \varphi(x) \to \varphi(e_n) = \exists x_n \varphi_n(x_n) \to \varphi_n(e_n) \in T_{n+1} \subseteq \overline{T}.$$

Atunci $\overline{T} \vdash \exists x \varphi(x) \to \varphi(e_n)$ şi $\overline{T}$ este o teorie Henkin. □

Lema 8.6.8 *Fie $T \subseteq T'$, T este teorie Henkin, T' este consistentă. Atunci T' este teorie Henkin.*

Demonstraţie. Direct din definiţie. □

Fie C o mulţime de constante de acelaşi cardinal cu limbajul L_τ şi $L_\tau(C)$ limbajul obţinut din L_τ prin adjuncţionarea constantelor din C.

Fixăm o teorie Henkin maximal consistentă în $L_\tau(C)$.

Pe mulţimea C, considerăm relaţia binară:

$$c \approx d \overset{def.}{\Leftrightarrow} (c = d) \in \Sigma \Leftrightarrow \Sigma \vdash (c = d).$$

Lema 8.6.9 $\approx$ *este o relaţie de echivalenţă.*

Demonstraţie. Arătăm că relaţia $\approx$ este reflexivă, simetrică şi tranzitivă.
$\cdot\ c \approx c$: $\Sigma \vdash c = c$.
$\cdot\ c \approx d \Longrightarrow\ d \approx c$:
Dacă $c \approx d$, atunci $\Sigma \vdash c = d$. Deoarece $\vdash c = d \to d = c$, se obţine $\Sigma \vdash d = c$, deci $d \approx c$.
$\cdot\ c \approx d,\ d \approx e \Longrightarrow\ c \approx e$:
Intr-adevăr, $(c \approx d,\ d \approx e)$ implică $(\Sigma \vdash c = d,\ \Sigma \vdash d = e)$ implică $\Sigma \vdash (c = d) \wedge (d = e)$; dar avem şi $\vdash [(c = d) \wedge (d = e)] \to (c = e)$; rezultă $\Sigma \vdash (c = e)$, deci $c \approx e$. $\Box$

Vom considera mulţimea cât $A = C/\approx$; $c^{\approx}$ va fi clasa de echivalenţă a lui $c \in C$.

Lema 8.6.10 *Fie* $t(x_1, \ldots, x_n)$ *un termen al lui* L_τ *şi* $c_1, \ldots, c_n \in C$. *Atunci*

$$\vdash \exists x(t(c_1, \ldots, c_n) = x).$$

Demonstraţie. Fie $\varphi(x)$ formulă din $L_\tau(C)$: $t(c_1, \ldots, c_n) = x$.
$\vdash \varphi(t(c_1, \ldots, c_n)) \to \exists x \varphi(x)$
$\vdash t(c_1, \ldots, c_n) = t(c_1, \ldots, c_n) \to \exists x(t(c_1, \ldots, c_n) = x)$
$\vdash t(c_1, \ldots, c_n) = t(c_1, \ldots, c_n)$
$\vdash \exists x(t(c_1, \ldots, c_n) = x)$. $\Box$

Lema 8.6.11 *Fie* $t(x_1, \ldots, x_n)$ *un termen al lui* L_τ *şi* $c_1, \ldots, c_n \in C$ *constante. Atunci există* $d \in C$, *astfel încât:*

$$\Sigma \vdash t(c_1, \ldots, c_n) = d.$$

Demonstraţie. Conform Lemei 8.6.10, $\vdash \exists x(t(c_1, \ldots, c_n) = x)$.
Σ este o teorie Henkin, deci există $d \in C$ astfel încât:

$$\Sigma \vdash \exists x(t(c_1, \ldots, c_n) = x) \to (t(c_1, \ldots, c_n) = d).$$

Prin m.p., rezultă:

$$\Sigma \vdash t(c_1, \ldots, c_n) = d.$$ $\Box$

Vom organiza acum A *ca o structură pentru* L_τ.

Fie f un simbol de operaţie n-ară. Definim operaţia n-ară $f^{\mathcal{A}}$ pe A astfel:

$f^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}) = d^{\approx} \stackrel{def.}{\Leftrightarrow} \Sigma \vdash f(c_1, \ldots, c_n) = d.$

Pentru orice $c_1, \ldots, c_n \in C$, există $d \in C$, astfel încât $\Sigma \vdash f(c_1, \ldots, c_n) = d$ (conform Lemei 8.6.11). □

Lema 8.6.12 $f^{\mathcal{A}}$ *este bine definită.*

Demonstraţie. Trebuie să arătăm că:

$(c_i \approx d_i,\ i = 1, \ldots, n)$ şi $c \approx d) \Longrightarrow (\Sigma \vdash f(c_1, \ldots, c_n) = c \Leftrightarrow \Sigma \vdash f(d_1, \ldots, d_n) = d)$.

Anume vom arăta că:
$(c_i \approx d_i,\ i = 1, \ldots, n)$ şi $(c \approx d\ )$ şi $(\Sigma \vdash f(c_1, \ldots, c_n) = c)$ implică $\Sigma \vdash f(d_1, \ldots, d_n) = d$.
Intr-adevăr,
$(\Sigma \vdash c_i = d_i,\ i = 1, \ldots, n)$ şi $(\Sigma \vdash (c = d))$ şi $(\Sigma \vdash f(c_1, \ldots, c_n) = c)$ implică:

$\Sigma \vdash (f(c_1, \ldots, c_n) = c) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}(c_i = d_i) \wedge (c = d)$.

Dar,

$\vdash (f(c_1, \ldots, c_n) = c) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}(c_i = d_i) \wedge (c = d) \rightarrow (f(d_1, \ldots, d_n) = d)$,

deci, prin m.p., rezultă

$\Sigma \vdash f(d_1, \ldots, d_n) = d$. □

Fie R un simbol de relaţie n-ară. Definim relaţia n-ară $R^{\mathcal{A}}$ pe A astfel:

$$R^{\mathcal{A}} \stackrel{def.}{=} \{(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}) \mid \Sigma \vdash R(c_1, \ldots, c_n)\}.$$

Lema 8.6.13 $R^{\mathcal{A}}$ *este bine definită.*

Trebuie să arătăm că:

$$c_i \approx d_i,\ i = 1, \ldots, n \Longrightarrow\ (R(c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma \Leftrightarrow R(d_1, \ldots, d_n) \in \Sigma).$$

Anume vom arăta că:
$(\Sigma \vdash c_i = d_i,\ i = 1, \ldots, n$ şi $\Sigma \vdash R(c_1, \ldots, c_n))$ implică $\Sigma \vdash R(c_1, \ldots, c_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}(c_i = d_i)$.

Dar,

$R(c_1, \ldots, c_n) \wedge \bigwedge_{i=1}^{n}(c_i = d_i) \rightarrow R(d_1, \ldots, d_n)$, de unde, prin m.p., rezultă

$$\vdash R(d_1, \ldots, d_n).$$

$\square$

Fie d o constantă a lui L_τ. Conform Lemei 8.6.11, există $c \in C$, cu $\Sigma \vdash d = c$. Definim

$d^{\mathcal{A}} = c^{\approx} \overset{def.}{\Leftrightarrow} (d = c) \in \Sigma.$

Lema 8.6.14 *Definiţia lui $d^{\mathcal{A}}$ este corectă.*

Demonstraţie. Dacă $c_1, c_2 \in C$, $\Sigma \vdash d = c_1$, $\Sigma \vdash d = c_2$, atunci $\Sigma \vdash (d = c_1) \wedge (d = c_2)$. Cum
$\vdash (d = c_1) \wedge (d = c_2) \rightarrow (c_1 = c_2)$, rezultă $\Sigma \vdash (c_1 = c_2)$, deci $c_1^{\approx} = c_2^{\approx}$. $\square$

Dacă $c \in C$, atunci punem $c^{\mathcal{A}} = c^{\approx}$.
In acest fel, am obţinut o structură $\mathcal{A}$ a limbajului $L_\tau(C)$.

Lema 8.6.15 *Dacă $t(x_1, \ldots, x_n)$ este un termen şi $c, c_1, \ldots, c_n \in C$, atunci:*

$t^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}) = c^{\approx} \Longleftrightarrow \Sigma \vdash t(c_1, \ldots, c_n) = c.$

Demonstraţie. Prin inducţie, dupa modul de formare a termenului t.
Tratăm numai pasul inducţiei.
Fie $t = f(t_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, t_m(x_1, \ldots, x_n))$ şi presupunem că echivalenţa are loc pentru termenii $t_1, \ldots, t_m$. Conform Lemei 8.6.11, există $d_1, \ldots, d_m \in C$, $\Sigma \vdash t_i(c_1, \ldots, c_n) = d_i$, pentru $i = 1, \ldots, m$. Din ipoteza inducţiei,

$$t_i^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}) = d_i^{\approx},\ i = 1, \ldots, m.$$

Atunci

$$\begin{array}{rcll} t^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}) = c^{\approx} & \Longleftrightarrow & f^{\mathcal{A}}(t_1^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx})) = c^{\approx} & \\ & \Longleftrightarrow & f^{\mathcal{A}}(d_1^{\approx}, \ldots, d_m^{\approx}) = c^{\approx} & \\ & \Longleftrightarrow & \Sigma \vdash (d_1, \ldots, d_m) = c \qquad \text{(conform definiţiei lui } f^{\mathcal{A}}) & \\ & \Longleftrightarrow & \Sigma \vdash f(t_1(c_1, \ldots, c_n), \ldots, t_m(c_1, \ldots, c_n)) = c & (\alpha) \\ & \Longleftrightarrow & \Sigma \vdash t(c_1, \ldots, c_n) = c, & \end{array}$$

unde (α) rezultă astfel:
$\Sigma \vdash t_i(c_1, \ldots, c_n) = d_i,\ i = 1, \ldots, m$ implică echivalenţa următoare
$\Sigma \vdash f(t_1(c_1, \ldots, c_n), \ldots, t_m(c_1, \ldots, c_n)) = c \Longleftrightarrow \Sigma \vdash f(d_1, \ldots, d_m) = c.$ $\square$

Lema 8.6.16 *Pentru orice formulă $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ şi pentru orice $c_1, \ldots, c_n \in C$, avem:*

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}] \Longleftrightarrow \varphi(c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma \Longleftrightarrow \Sigma \vdash \varphi(c_1, \ldots, c_n).$$

Demonstraţie. După modul de formare a formulei φ.

· φ este de forma $t_1(x_1, \ldots, x_n) = t_2(x_1, \ldots, x_n)$:
Conform Lemei 8.6.11, există $d_i \in C$, cu $\Sigma \vdash t_i(c_1, \ldots, c_n) = d_i$, $i = 1, 2$. Aplicând Lema 8.6.15, obţinem:

$$d_i^{\approx} = t_i^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}),\ i = 1, 2.$$

In acest caz,

$$\begin{array}{lcl} \mathcal{A} \models \varphi[c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}] & \Longleftrightarrow & t_1^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}) = t_2^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}) \\ & \Longleftrightarrow & d_1^{\approx} = d_2^{\approx} \\ & \Longleftrightarrow & \Sigma \vdash d_1 = d_2 \\ & \Longleftrightarrow & \Sigma \vdash t_1(c_1, \ldots, c_n) = t_2(c_1, \ldots, c_n). \end{array}$$

Ultima echivalenţă rezultă din $\Sigma \vdash d_i = t_i(c_1, \ldots, c_n)$, $i = 1, 2$ şi din axiomele egalităţii.

· φ este de forma $R(t_1, \ldots, t_m)$, cu $t_i = t_i(x_1, \ldots, x_n)$, $i = 1, \ldots, m$:
Conform Lemei 8.6.11, există $d_1, \ldots, d_m \in C$, cu

(*) $\Sigma \vdash t_i(c_1, \ldots, c_n) = d_i,\ 1 = 1, \ldots, m.$

Aplicând Lemma 8.6.15, obţinem:

$$d_i^{\approx} = t_i^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}),\ i = 1, \ldots, m.$$

Atunci

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{A} \models \varphi[c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}] & \Longleftrightarrow & (t_1^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}), \ldots, t_m^{\mathcal{A}}(c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx})) \in R^{\mathcal{A}} & \\ & \Longleftrightarrow & (d_1^{\approx}, \ldots, d_m^{\approx}) \in R^{\mathcal{A}} & \\ & \Longleftrightarrow & R(d_1, \ldots, d_m) \in \Sigma \qquad \text{(conform definiţiei lui } R^{\mathcal{A}}\text{)} & \\ & \Longleftrightarrow & R(t_1(c_1, \ldots, c_n), \ldots, t_m(c_1, \ldots, c_n)) \in \Sigma & \text{conform (*)} \\ & \Longleftrightarrow & \varphi(c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma. & \end{array}$$

· φ este de forma $\neg\psi(x_1, \ldots, x_n)$:
Ipoteza inductiei este:

$$\mathcal{A} \models \psi[c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}] \Longleftrightarrow \psi(c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma.$$

Atunci

$$\begin{array}{lcll} \mathcal{A} \models \varphi[c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}] & \Longleftrightarrow & \mathcal{A} \not\models \psi[c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}] & \\ & \Longleftrightarrow & \psi(c_1, \ldots, c_n) \notin \Sigma & \\ & \Longleftrightarrow & \neg\psi(c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma & (\Sigma \text{ este maximal consistentă}) \\ & \Longleftrightarrow & \psi(c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma. & \end{array}$$

· φ este de forma $\psi_1 \vee \psi_2$: exerciţiu !

· $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ este $\exists x \psi(x, x_1, \ldots, x_n)$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} \models \varphi[c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}] &\iff \text{există } c^{\approx} \in A,\ \mathcal{A} \models \psi[c^{\approx}, c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}] \\
&\iff \text{există } c \in C,\ \psi(c, c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma \qquad \text{(ipoteza inducţiei)} \\
&\iff \Sigma \vdash \exists x \psi(x, c_1, \ldots, c_n) \qquad (\Sigma \text{ este teorie Henkin}) \\
&\iff \varphi(c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma.
\end{aligned}$$

$\square$

Observaţie 8.6.17 Conform Propoziţiei 8.6.16, pentru orice enunţ $\varphi \in L_\tau(C)$, are loc echivalenţa

$$\mathcal{A} \models \varphi \iff \varphi \in \Sigma,$$

de unde rezultă

$$\mathcal{A} \models \Sigma.$$

$\mathcal{A}$ se numeşte *modelul Henkin asociat teoriei* Σ. Il vom mai nota şi $\mathcal{A}_\Sigma$.

Teorema 8.6.18 *Dacă T este o teorie consistentă, atunci ea admite un model.*

Demonstraţie. Fie T o teorie consistentă a lui L_τ. Fie C o mulţime de constante noi, cu $\mid C \mid = \mid L_\tau \mid$. Conform Lemei 8.6.7, există o teorie Henkin $\overline{T}$, astfel încât $T \subseteq \overline{T}$. Fie Σ o teorie maximal consistentă a lui $L_\tau(C)$, cu $\overline{T} \subseteq \Sigma$. Σ este o teorie Henkin (conform Lemei 8.6.8).

Considerăm modelul Henkin $\mathcal{A}$, asociat lui Σ. Conform Propoziţiei 8.6.16, pentru orice formulă $\varphi(x_1, \ldots, x_n) \in L$ şi $c_1, \ldots, c_n \in C$:

$$\mathcal{A} \models \varphi[c_1^{\approx}, \ldots, c_n^{\approx}] \iff \varphi(c_1, \ldots, c_n) \in \Sigma.$$

Cum $T \subseteq \Sigma$, rezultă de aici că $\mathcal{A} \models T$. $\square$

Teorema 8.6.18 este valabilă pentru limbaje de orice cardinal infinit. Cu excepţia Lemei 8.6.7, toţi paşii necesari obţinerii Teoremei 8.6.18 au fost demonstraţi în cazul general. Lema 8.6.7 a fost demonstrată numai pentru limbaje numărabile, pentru a evita folosirea inducţiei transfinite.

Teorema 8.6.19 *(Teorema de completitudine extinsă)*
Fie Σ o teorie şi φ o formulă a lui L_τ. Atunci

$$\Sigma \vdash \varphi \iff \Sigma \models \varphi.$$

Demonstraţie.
$\Longrightarrow$: Prin inducţie, în raport cu definiţia noţiunii "$\Sigma \vdash \varphi$".
$\Longleftarrow$: Presupunem $\Sigma \nvdash \varphi$, deci $\Sigma \cup \{\neg\varphi\}$ este consistentă. Fie $\mathcal{A} \models \Sigma \cup \{\neg\varphi\}$; atunci $\mathcal{A} \models \Sigma$ şi $\mathcal{A} \not\models \varphi$. Rezultă $\Sigma \not\models \varphi$. $\square$

Corolar 8.6.20 *(Teorema de completitudine)*
Pentru orice formulă φ a lui L_τ, are loc echivalenţa următoare:

$$\vdash \varphi \iff \models \varphi.$$

Demonstraţie. Luăm $\Sigma = \emptyset$. $\square$

Observaţie 8.6.21 Se verifică uşor că reciproca Teoremei 8.6.18 este adevărată: dacă o teorie admite un model, atunci ea este consistentă.

Observaţie 8.6.22 Dacă Σ este o teorie Henkin şi $\mathcal{A}_\Sigma$ este modelul său Henkin, atunci

$$| A_\Sigma | \leq | C | = | L_\tau(C) | = | L_\tau | .$$

Corolar 8.6.23 *(Teorema Lövenheim-Skolem) Orice teorie consistentă T într-un limbaj numărabil admite un model cel mult numărabil.*

Demonstraţie. Din Teorema 8.6.18 şi din observaţia precedentă. $\square$

Corolar 8.6.24 *(Teorema de compacitate)*

O teorie T admite un model dacă şi numai dacă orice parte finită a sa admite un model.

Demonstraţie. Se aplică Teorema 8.6.18, plus observatia: T este consistentă dacă şi numai dacă orice parte finită a sa este consistentă. $\square$

Corolar 8.6.25 *Dacă T are modele finite suficient de mari, atunci T admite un model infinit.*

Demonstraţie. Fie $C = \{c_n \mid n < \omega\}$ o mulţime numarabilă de constante noi. Considerăm teoria lui $L_\tau(C)$:

$$\Sigma = T \cup \{\neg(c_n = c_m) \mid n < m < \omega\}.$$

Orice submulţime finită Σ' a lui Σ are un număr finit de constante din C; fie ele continute în $\{c_0, \ldots, c_m\}$. Fie $\mathcal{A}' \models T$ cu $| A' | \geq m+1$. Atunci există $a_0, \ldots, a_m \in A'$, distincte, deci $(\mathcal{A}', a_0, \ldots, a_m) \models \Sigma'$. Punând $a_{m+1}, a_{m+2}, \ldots$ arbitrare, este evident că

$$(\mathcal{A}', a_0, \ldots, a_m, a_{m+1}, \ldots) \models \Sigma'.$$

Conform Teoremei de compacitate, Σ admite un model

$$(\mathcal{B}, b_0, \ldots, b_m, \ldots) \models \Sigma,$$

cu (b_m) distincte două câte două.
Deci, $\mathcal{B} \models T$ şi $| B | \geq \omega$. $\square$

Observaţie 8.6.26 Teorema de completitudine extinsă (Teorema 8.6.19) a fost demonstrată pe baza Teoremei 8.6.18, iar Teorema de completitudine a rezultat ca un caz particular al Teoremei 8.6.19. La rândul ei, Teorema 8.6.18 poate fi obţinută din Teorema de completitudine.

Pentru a proba această afirmaţie, să considerăm un enunţ φ al unei teorii consistente T. Atunci $\{\varphi\}$ este o mulţime consistentă, deci, aplicând Propoziţia 8.4.28,

$\not\vdash \neg\varphi$. Conform Teoremei de completitudine, $\not\models \neg\varphi$, deci există o structură $\mathcal{A}$ astfel încât $\mathcal{A} \not\models \neg\varphi$. Rezultă $\mathcal{A} \models \varphi$ pentru orice $\varphi \in T$, deci $\mathcal{A} \models T$.

In demonstraţia celor trei rezultate (Teorema 8.6.18, Teorema 8.6.19 şi Corolarul 8.6.20) a fost invocată axioma alegerii (în forma sa echivalentă, cunoscută sub numele de axioma lui Zorn). Intr-o axiomatizare a teoriei mulţimilor (de exemplu, Zermelo-Fraenkel) fără axioma alegerii, aceste trei rezultate devin enunţuri echivalente logic.

8.7 Cum se stabileşte dacă o formulă este teoremă formală

Există trei moduri în care putem stabili că o formulă este teoremă formală:
· pe cale *sintactică*: construind o demonstraţie formală a formulei;
· pe cale *algebrică*: prin trecerea la algebra Lindenbaum-Tarski;
· pe cale *semantică*: calculând $\|\varphi\|$ într-o structură $\mathcal{A}$ oarecare.

Vom exemplifica pe câteva cazuri:

1. Care din următoarele enunţuri este teoremă formală ?
(a) $\exists x \forall y \varphi(x,y) \rightarrow \forall y \exists x \varphi(x,y)$,
(b) $\forall y \exists x \varphi(x,y) \rightarrow \exists x \forall y \varphi(x,y)$.

Soluţie: Vom arăta că (a) este o teoremă formală.
· *sintactic*:

$\vdash \forall y \varphi(x,y) \rightarrow \varphi(x,y)$	axioma
$\vdash \exists x \forall y \varphi(x,y) \rightarrow \exists x \varphi(x,y)$	(Exerciţiul 8.2.25(2))
$\vdash \forall y[\exists x \forall y \varphi(x,y) \rightarrow \exists x \varphi(x,y)]$	**PG**
$\vdash \forall y[\exists x \forall y \varphi(x,y) \rightarrow \exists x \varphi(x,y)] \rightarrow$ $[\exists x \forall y \varphi(x,y) \rightarrow \forall y \exists x \varphi(x,y)]$	axioma
$\vdash \exists x \forall y \varphi(x,y) \rightarrow \forall y \exists x \varphi(x,y)$	m.p..

· *algebric*:
$p(\exists x \forall y \varphi(x,y) \rightarrow \forall y \exists x \varphi(x,y)) = p(\exists x \forall y \varphi(x,y)) \rightarrow p(\forall y \exists x \varphi(x,y)) =$

$[\bigvee_{u\in V} \bigwedge_{v\in V} p(\varphi(u,v))] \rightarrow [\bigwedge_{w\in V} \bigvee_{z\in V} p(\varphi(w,z))] =$

$\bigwedge_u [(\bigwedge_v p(\varphi(u,v))) \rightarrow \bigwedge_w \bigvee_z p(\varphi(w,z))] =$

$\bigwedge_u \bigwedge_w [(\bigwedge_v p(\varphi(u,v))) \rightarrow (\bigvee_z p(\varphi(w,z))] =$

$\bigwedge_{u,w} [(\neg \bigwedge_v p(\varphi(u,v))) \vee \bigvee_z p(\varphi(w,z))] =$

$\bigwedge_{u,w} [\bigvee_v \neg p(\varphi(u,v)) \vee \bigvee_z p(\varphi(w,z))] =$

$\bigwedge_{u,w} \bigvee_{v,z}[\neg p(\varphi(u,v)) \vee p(\varphi(w,z))] = 1$,

deoarece $\bigvee_{v,z}[\neg p(\varphi(u,v)) \vee p(\varphi(w,z))] = 1$.

· *semantic*:
Fie $\mathcal{A}$ o structură în care calculăm $\| \cdot \|$.
$\|\exists x\forall y\varphi(x,y) \to \forall y\exists x\varphi(x,y)\| = \|\exists x\forall y\varphi(x,y)\| \to \|\forall y\exists x\varphi(x,y)\| = 1$
$\Longleftrightarrow$
$\|\exists x\forall y\varphi(x,y)\| \leq \|\forall y\exists x\varphi(x,y)\|$
$\Longleftrightarrow$
$\bigvee_{a\in A} \bigwedge_{b\in A} \|\varphi(a,b)\| \leq \bigwedge_{d\in A} \bigvee_{c\in A} \|\varphi(c,d)\|$
$\Longleftrightarrow$
$\bigwedge_{b\in A} \|\varphi(a,b)\| \leq \bigvee_{c\in A} \|\varphi(c,d)\|$, pentru orice $a, d \in A$.
Ultima inegalitate este evidentă.

Soluţie: Vom arăta că (b) nu este teoremă formală.
Fie L_τ limbajul egalităţii, $\mathcal{A}$ structura: $A = \{\alpha, \beta\}$, cu $\alpha \neq \beta$ şi $\varphi(x,y)$ formula: $x = y$. Atunci
$\|\forall y\exists x(x = y)\| = \bigwedge_{b\in A} \bigvee_{a\in A} \|a = b\| =$

$(\|\alpha = \alpha\| \vee \|\alpha = \beta\|) \wedge (\|\beta = \alpha\| \vee \|\beta = \beta\|) = (1 \vee 0) \wedge (0 \vee 1) = 1.$

$\|\exists x\forall y(x = y)\| = \bigvee_{a\in A} \bigwedge_{b\in A} \|a = b\| =$

$(\|\alpha = \alpha\| \wedge \|\alpha = \beta\|) \vee (\|\beta = \alpha\| \wedge \|\beta = \beta\|) = (1 \wedge 0) \vee (0 \wedge 1) = 0.$
Atunci
$\|\forall y\exists x\varphi(x,y) \to \exists x\forall y\varphi(x,y)\| = \|\forall y\exists x(x = y)\| \to \|\exists x\forall y(x = y)\| = 1 \to 0 = 0.$
Rezultă că (b) nu este teoremă formală.

2. Care din următoarele enunţuri este teoremă formală ?
(a) $\forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z) \to \forall y\forall z\exists x\varphi(x,y,z)$,
(b) $\forall y\forall z\exists x\varphi(x,y,z) \to \forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z)$.

Soluţie: Demonstrăm că (a) este teoremă formală.

· *sintactic*:

$\vdash \forall y\varphi(x,y,z) \rightarrow \varphi(x,y,z)$	axioma
$\vdash \exists x\forall y\varphi(x,y,z) \rightarrow \exists x\varphi(x,y,z)$	(Exerciţiul 8.2.25(2))
$\vdash \forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z) \rightarrow \forall z\exists x\varphi(x,y,z)$	(Exerciţiul 8.2.25(1))
$\vdash \forall y[\forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z) \rightarrow \forall z\exists x\varphi(x,y,z)]$	**PG**
$\vdash \forall y[\forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z) \rightarrow \forall z\exists x\varphi(x,y,z)] \rightarrow$	
$[\forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z) \rightarrow \forall y\forall z\exists x\varphi(x,y,z)]$	axioma
$\vdash \forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z) \rightarrow \forall y\forall z\exists x\varphi(x,y,z)$	m.p..

· *algebric*:
$p(\forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z) \rightarrow \forall y\forall z\exists x\varphi(x,y,z)) =$
$p(\forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z)) \rightarrow p(\forall y\forall z\exists x\varphi(x,y,z)) =$
$[\bigwedge_w \bigvee_u \bigwedge_v p(\varphi(u,v,w))] \rightarrow [\bigwedge_{v'} \bigwedge_{w'} \bigvee_{u'} p(\varphi(u',v',w'))] =$
$\bigwedge_{v',w'}[(\bigwedge_w \bigvee_u \bigwedge_v p(\varphi(u,v,w)) \rightarrow \bigvee_{u'} p(\varphi(u',v',w'))] = \ldots = 1.$

· *semantic*:
$\|\forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z) \rightarrow \forall y\forall z\exists x\varphi(x,y,z)\| =$
$\|\forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z)\| \rightarrow \|\forall y\forall z\exists x\varphi(x,y,z)\| =$

$(\bigwedge_{c\in A} \bigvee_{a\in A} \bigwedge_{b\in A} \|\varphi(a,b,c)\| \rightarrow (\bigwedge_{b'\in A} \bigwedge_{c'\in A} \bigvee_{a'\in A} \|\varphi(a',b',c')\|).$

Trebuie să arătăm că:
$\bigwedge_c \bigvee_a \bigwedge_b \|\varphi(a,b,c)\| \leq \bigwedge_{b'} \bigwedge_{c'} \bigvee_{a'} \|\varphi(a',b',c')\|,$

ceea ce este echivalent cu

$\bigwedge_c \bigvee_a \bigwedge_b \|\varphi(a,b,c)\| \leq \bigvee_{a'} \|\varphi(a',b',c')\|$, pentru orice $b', c' \in A$.

Această ultimă inegalitate este uşor de probat.

Soluţie: Demonstrăm că (b) nu este teoremă formală.
Considerăm un limbaj cu un singur predicat n-ar, $+$, unde $\varphi(x,y,z)$ este $x+y=z$ şi $\mathcal{A} = (\mathbf{N}, +)$. Atunci

$\|\forall y\forall z\exists x\varphi(x,y,z) \rightarrow \forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z)\| =$
$\|\forall y\forall z\exists x\varphi(x,y,z)\| \rightarrow \|\forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z)\|.$

Dar,
$\|\forall y\forall z\exists x\varphi(x,y,z)\| = \bigwedge_{n,p\in\mathbf{N}} \bigvee_{m\in\mathbf{N}} \|m+p=n\| = 1$ şi

$\|\forall z\exists x\forall y\varphi(x,y,z)\| = \bigwedge_p \bigvee_n \bigwedge_m \|m+p=n\|.$
Facem $p=0$ şi calculăm termenul corespunzător din intersecţia "după p":

$\bigvee_n \bigwedge_m \|m+0=n\| = \bigvee_n \bigwedge_m \|m=n\| = 0,$
deoarece pentru orice n, $\bigwedge_m \|m=n\| = 0.$
Prin urmare, $1 \rightarrow 0 = 0$, deci (b) nu este teoremă formală.

Exerciţiu 8.7.1 Fie $Q_1,\ Q_2,\ Q_3 \in \{\exists,\ \forall\}$ şi τ o permutare a $\{1, 2, 3\}$. Să se determine care din enunţurile:

$$Q_1 x\, Q_2 y\, Q_3 z\, \varphi(x, y, z) \to Q_{\tau(1)} x\, Q_{\tau(2)} y\, Q_{\tau(3)} z\, \varphi(x, y, z)$$

este teorema formală.

Chapter 9

Dimensiunea probabilistă a logicii clasice

Evenimentul şi probabilitatea sunt noţiunile pe care este construită teoria probabilităţilor. Este acceptată ipoteza că mulţimea evenimentelor asociate unei experienţe aleatoare are o structură de algebră Boole. Atunci probabilităţile vor fi funcţii definite pe algebra Boole şi luând valori în intervalul [0,1] (le vom numi probabilităţi *algebrice*).

Un alt punct de vedere este identificarea unui eveniment cu enunţul ce-l descrie. In această situaţie, probabilităţile vor fi funcţii definite pe mulţimi de enunţuri (le vom numi probabilităţi *logice*). Probabilitatea logică apare ca un nou tip de semantică: în loc să considerăm valorea de adevăr a unui enunţ, vom evalua probabilitatea sa. Axiomele probabilităţii exprimă un "comportament" în raport cu operaţiile logice ale sistemului logic considerat. Pentru calculul propoziţional, axiomele probabilităţii logice sunt inspirate din cunoscuta definiţie a probabilităţii a lui Kolmogorov şi au în vedere conectorii propoziţionali. In cazul calculului cu predicate, este necesar ca axiomele probabilităţii să fie îmbogăţite cu cerinţe referitoare la comportamentul faţă de cuantificatori. O definiţie satisfacătoare a probabilităţii logice pentru calculul predicatelor a fost dată de Gaifman în lucrarea [11]. Printre alte rezultate, această lucrare conţine şi o importantă teoremă de completitudine. Teorema de completitudine a lui Gaifman a deschis calea către o teorie a modelelor probabiliste. Contribuţii remarcabile la dezvoltarea teoriei modelelor probabiliste au adus Scott şi Krauss în lucrarea [48]. Modelarea mulţimilor de evenimente prin structura de algebră Boole presupune considerarea experienţelor aleatoare ce urmează legile logicii clasice. Schimbând sistemul logic, vom avea alte structuri algebrice pentru mulţimile de evenimente. Tipul de algebră va fi dat de algebra Lindenbaum-Tarski a logicii considerate. Pentru fiecare caz în parte, este necesară definirea unei noţiuni adecvate de probabilitate. Aşadar, fiecărui sistem de logică îi corespunde o "teorie a probabilităţilor".

Următoarele două secţiuni reprezintă o introducere în teoria probabilităţilor pentru calcul propoziţional, respectiv pentru calculul cu predicate. Pe lângă definiţiile şi proprietăţile fundamentale ale probabilităţilor definite pe algebre Boole, în Secţiunea 1, sunt demonstrate două teoreme clasice: teorema lui Carathéodory şi teorema Horn-Tarski. Ele vor fi folosite în Secţiunea 2 în demonstrarea unor rezultate importante asupra structurilor Gaifman probabiliste. Cele câteva rezultate asupra structurilor probabiliste demonstrate în Secţiunea 2 constituie o introducere într-o teorie a modelelor probabiliste, un domeniu de mare adâncime al logicii.

In acest capitol am folosit bibliografia [1], [10], [11], [14], [18], [25], [32], [48], [50].

9.1 Probabilităţi pe algebre Boole

In această secţiune sunt introduse două noţiuni de probabilitate:
- probabilitatea *logică*, definită pe mulţimea enunţurilor logicii propoziţionale clasice,
- probabilitatea *algebrică*, definită pe o algebră Boole oarecare.

Prin trecere la algebra Lindenbaum-Tarski, o probabilitate logică se transformă într-o probabilitate algebrică. Astfel, studiul probabilităţilor logice se reduce la studiul probabilităţilor algebrice. Acesta este motivul pentru care în această secţiune ne ocupăm numai de probabilităţi definite pe algebre Boole. Subsecţiunea 1 conţine unele identităţi satisfăcute de aceste probabilităţi, în timp ce Subsecţiunea 2 conţine câteva proprietăţi simple ale σ-algebrelor şi σ-probabilităţilor. In subsecţiunile următoare sunt demonstrate două teoreme de prelungire: teorema lui Carathéodory şi teorema Horn-Tarski.

9.1.1 Evenimente şi probabilităţi

Construcţia teoriei probabilităţilor porneşte cu două noţiuni fundamentale: **evenimentul** şi **probabilitatea**. Evenimentele sunt asociate unor experienţe aleatoare. Vom face ipoteza că experienţele aleatoare considerate urmează legile logicii clasice. In tratarea celor două noţiuni fundamentale pot fi adoptate două puncte de vedere.

(I) **Mulţimea B a evenimentelor asociate unei experienţe aleatoare are o structură de algebră Boole**. In cest caz, a evalua "probabilitatea" realizării unui eveniment din B revine la a da o funcţie de la B în $\mathbf{R}^+$. Aceasta funcţie, numită **probabilitate**, va fi supusă unor condiţii ce exprimă comportamentul său faţă de operaţiile booleene ale lui B. Mai general, vom considera probabilităţi definite pe algebre Boole oarecare.

Fie $\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole oarecare. Elementele lui B se vor numi **evenimente**.

Definiţie 9.1.1 O *probabilitate* pe algebra Boole $\mathcal{B}$ este o funcţie $\mathbf{m} : B \longrightarrow \mathbf{R}^+$ cu proprietăţile următoare:
(P1) $\mathbf{m}(1) = 1$,
(P2) pentru orice $x, y \in B$, dacă $x \wedge y = 0$, atunci $\mathbf{m}(x \vee y) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(y)$.

Probabiliatea $\mathbf{m}$ este **strict pozitivă** dacă $\mathbf{m}(x) > 0$ pentru orice $x \in B \setminus \{0\}$.

Observaţie 9.1.2 Conform teoremei de reprezentare a lui Stone, există o mulţime nevidă X şi un morfism boolean injectiv $d : B \longrightarrow \mathcal{P}(X)$. Atunci evenimentele se identifică cu părţi ale lui X. Pe această cale, se ajunge la modelul ansamblist al teoriei probabilităţilor.

(II) **Evenimentele sunt identificate cu enunţuri în logica propoziţiilor clasică, iar probabilităţile vor fi funcţii definite pe mulţimi de enunţuri**.

Fie L sistemul formal al calculului propoziţional şi E mulţimea enunţurilor sale.

Definiţie 9.1.3 O *probabilitate* pe L este o funcţie $\mu : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ cu proprietatea că pentru orice $\varphi, \psi \in E$, următoarele condiţii sunt satisfăcute:
(i) $\vdash \varphi$ implică $\mu(\varphi) = 1$,
(ii) $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$ implică $\mu(\varphi \vee \psi) = \mu(\varphi) + \mu(\psi)$.

O funcţie $\mathbf{m} : B \longrightarrow [0, 1]$ ce verifică axioma (P2) se numeşte **masură** pe B.

O probabilitate pe L se mai numeşte şi **probabilitate logică**, în timp ce o probabilitate pe o algebră Boole se mai numeşte *probabilitate algebrică*.

Lema 9.1.4 *Dacă μ este o probabiliate logică, atunci*
(a) $\mu(\neg\varphi) = 1 - \mu(\varphi)$,
(b) $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$ *implică* $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$.

Dem.

(a): In L, avem următoarele teoreme formale: $\vdash \varphi \vee \neg\varphi$ şi $\vdash \neg(\varphi \wedge \neg\varphi)$. Conform axiomelor (i) şi (ii), $\mu(\varphi \vee \neg\varphi) = 1$ şi $\mu(\varphi \vee \neg\varphi) = \mu(\varphi) + \mu(\neg\varphi)$, de unde $\mu(\neg\varphi) = 1 - \mu(\varphi)$.

(b): Presupunem $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, deci $\vdash \varphi \rightarrow \psi$ şi $\vdash \psi \rightarrow \varphi$. Atunci $\vdash \neg\varphi \vee \psi$ si $\vdash \neg(\neg\varphi \wedge \psi)$, de unde $1 = \mu(\neg\varphi \vee \psi) = \mu(\neg\varphi) + \mu(\psi) = 1 - \mu(\varphi) + \mu(\psi)$, deci $\mu(\varphi) = \mu(\psi)$. $\square$

Fie $E/_\sim = \{\widehat{\varphi} \mid \varphi \in E\}$ algebra Lindenbaum-Tarski asociată lui L. Vom stabili o relaţie între probabilităţile logice şi probabilităţile definite pe algebra Boole $E/_\sim$.

Fie $\mu : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ o probabilitate logică. Considerăm funcţia $\mathbf{m}_\mu : E/_\sim \longrightarrow \mathbf{R}^+$ definită prin $\mathbf{m}_\mu(\widehat{\varphi}) = \mu(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E$. Lema 9.1.4(b) ne asigură că $\mathbf{m}_\mu$ este bine definită. Este uşor de observat că $\mathbf{m}_\mu$ este o probabilitate pe $E/_\sim$.

Reciproc, fie $\mathbf{m} : E/_\sim \longrightarrow \mathbf{R}^+$ o probabilitate pe algebra Boole $E/_\sim$. Putem defini o funcţie $\mu_\mathbf{m} : E \longrightarrow \mathbf{R}^+$ prin $\mu_\mathbf{m}(\varphi) = \mathbf{m}(\widehat{\varphi})$, pentru orice $\varphi \in E$. Atunci $\mu_\mathbf{m}$ o probabilitate logică.

Funcţiile $\mu \mapsto \mathbf{m}_\mu$ şi $\mathbf{m} \mapsto \mu_\mathbf{m}$ sunt inverse una celeilalte. Prin urmare, studiul probabilităţilor logice se reduce la studiul probabilităţilor definite pe algebre Boole.

9.1.2 Proprietăţi ale probabilităţilor

Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole şi $\mathbf{m} : B \longrightarrow \mathbf{R}^+$ o probabilitate pe $\mathcal{B}$.

Notaţie 9.1.5 Pentru $x, y \in B$, vom nota

$$x - y \overset{notatie}{=} x \wedge y^- = (x^-)^- \wedge y^- = (y \vee x^-)^- = y \to^R x.$$

Propoziţia 9.1.6 *Pentru orice $x, y \in B$, următoarele proprietăţi sunt verificate:*
(1) $\mathbf{m}(x^-) = 1 - \mathbf{m}(x)$,
(2) $\mathbf{m}(0) = 0$,
(3) $\mathbf{m}(x - y) = \mathbf{m}(x) - \mathbf{m}(x \wedge y)$,
(4) dacă $y \leq x$, *atunci* $\mathbf{m}(x - y) = \mathbf{m}(x) - \mathbf{m}(y)$,
(5) dacă $y \leq x$, *atunci* $\mathbf{m}(y) \leq \mathbf{m}(x)$,
(6) $0 \leq \mathbf{m}(x) \leq 1$,
(7) $\mathbf{m}(x \vee y) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(y) - \mathbf{m}(x \wedge y)$ *şi* $\mathbf{m}(x \wedge y) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(y) - \mathbf{m}(x \vee y)$,
(8) $\mathbf{m}(x \to y) = 1 - \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(x \wedge y)$,
(9) $\mathbf{m}(x \leftrightarrow y) = 1 - \mathbf{m}(x) - \mathbf{m}(y) + 2\mathbf{m}(x \wedge y)$.

Dem.
(1): Din $x \vee x = 1$, $x \wedge x^- = 0$ rezultă $1 = \mathbf{m}(x \vee x^-) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(x^-)$.
(2): Din (1).
(3): Din $x = (x - y) \vee (x \wedge y)$ şi $x - y) \wedge (x \wedge y) = 0$.
(4): Din (3).
(5): Din (4).
(6): Din (5).
(7): Observăm că $x \vee y = x \vee (y - x)$ şi $x \wedge (y - x) = 0$. Atunci $\mathbf{m}(x \vee y) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(y - x) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(y) - \mathbf{m}(x \wedge y)$. Partea a doua urmează imediat.
(8): Aplicand succesiv (7), (1) si (3), obţinem: $\mathbf{m}(x \to y) = \mathbf{m}(x^- \vee y) = \mathbf{m}(x^-) + \mathbf{m}(y) - \mathbf{m}(x^- \wedge y) = 1 - \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(y) - \mathbf{m}(y - x) = 1 - \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(y) - (\mathbf{m}(y) - \mathbf{m}(x \wedge y)) = 1 - \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(x \wedge y)$.
(9): Se aplică (7), (8) şi proprietatea $(x \to y) \vee (y \to x) = 1$: $\mathbf{m}(x \leftrightarrow y) = \mathbf{m}((x \to y) \wedge (y \to x)) = \mathbf{m}(x \to y) + \mathbf{m}(y \to x) - \mathbf{m}((x \to y) \vee (y \to x)) = [1 - \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(x \wedge y)] + [1 - \mathbf{m}(y) + \mathbf{m}(x \wedge y)] - 1 = 1 - \mathbf{m}(x) - \mathbf{m}(y) + 2\mathbf{m}(x \wedge y)$.
□

Propoziţia 9.1.7 *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$. Atunci*

(1) $\mathbf{m}(\vee_{i=1}^n x_i) = \Sigma_{i=1}^n \mathbf{m}(x_i) - \Sigma_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{m}(x_i \wedge x_j) + \Sigma_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbf{m}(x_i \wedge x_j \wedge x_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathbf{m}(x_1 \wedge x_2 \wedge \ldots \wedge x_n)$,

(2) $\mathbf{m}(\wedge_{i=1}^n x_i) = \Sigma_{i=1}^n \mathbf{m}(x_i) - \Sigma_{1 \leq i < j \leq n} \mathbf{m}(x_i \vee x_j) + \Sigma_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbf{m}(x_i \vee x_j \vee x_k) - \ldots + (-1)^{n-1} \mathbf{m}(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)$.

Corolar 9.1.8 *Fie $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$ astfel încât $x_i \wedge x_j = 0$ pentru orice $i \neq j$. Atunci*

$$\mathbf{m}(\vee_{i=1}^n x_i) = \Sigma_{i=1}^n \mathbf{m}(x_i).$$

Propoziţia 9.1.9 *Fie* $\mathbf{m} : B \longrightarrow [0,1]$ *o funcţie oarecare. Atunci sunt echivalente afirmaţiile următoare:*
(1) $\mathbf{m}$ *este o probabilitate,*
(2) $\mathbf{m}$ *verifică următoarele condiţii:*
(a) $\mathbf{m}(0) = 0$, $\mathbf{m}(1) = 1$,
(b) pentru orice $x, y \in B$, $\mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(x \to y) = \mathbf{m}(y) + \mathbf{m}(y \to x)$.

Dem.
(1) $\Longrightarrow$ (2): Egalitatea $\mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(x \to y) = \mathbf{m}(y) + \mathbf{m}(y \to x)$ rezultă din Propoziţia 9.1.6(8).
(2) $\Longrightarrow$ (1): Ţinând cont că $x \to (x \wedge y) = x \to y = (x \vee y) \to y$, prin aplicarea lui (b) rezultă

$$\mathbf{m}(x \wedge y) + 1 = \mathbf{m}(x \wedge y) + \mathbf{m}((x \wedge y) \to x) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(x \to (x \wedge y)) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(x \to y),$$

$$\mathbf{m}(y) + 1 = \mathbf{m}(y) + \mathbf{m}(x \to (x \vee y)) = \mathbf{m}(x \vee y) + \mathbf{m}((x \vee y) \to y) = \mathbf{m}(x \vee y) + \mathbf{m}(x \to y).$$

Deducem că $\mathbf{m}(x \vee y) + \mathbf{m}(x \wedge y) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(y)$, deci $\mathbf{m}$ este o probabilitate pe $\mathcal{B}$. □

Observaţie 9.1.10 Propoziţia precedentă arată că probabilităţile pe algebra Boole pot fi definite folosind numai implicaţia $\to$. Egalitatea (b) din Propoziţia 9.1.9 poate fi folosită pentru introducerea unui concept de probabilitate pentru alte sisteme logice (intuiţionism, logici fuzzy, etc.)

Amintim operaţiile de inel boolean ale lui $\mathcal{B}$: $x + y = (x - y) \vee (y - x)$ şi $x \cdot y = x \wedge y$.

Propoziţia 9.1.11 *Fie* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in B$. *Atunci*

$$\mathbf{m}(x_1 + \ldots + x_n) = \Sigma_{i=1}^n \mathbf{m}(x_i) - 2\Sigma_{1 \le i < j \le n} \mathbf{m}(x_i \cdot x_j) + 2^2 \Sigma_{1 \le i < j < k \le n} \mathbf{m}(x_i \cdot x_j \cdot x_k) - \ldots + (-2)^{n-1} \mathbf{m}(x_1 \cdot \ldots \cdot x_n).$$

Dem. Pentru $n = 2$, avem $\mathbf{m}(x+y) = \mathbf{m}((x-y)+(y-x)) = \mathbf{m}(x-y)+\mathbf{m}(y-x) = \mathbf{m}(x) - \mathbf{m}(x \wedge y) + \mathbf{m}(y) - \mathbf{m}(x \wedge y) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m}(y) - 2\mathbf{m}(x \cdot y)$. Se procedează apoi prin inducţie. □

Presupunem că algebra Boole $\mathcal{B}$ este finită şi că $At(B) = \{a_1, \ldots, a_n\}$ este mulţimea atomilor lui $\mathcal{B}$. Orice element $x \in B$ se scrie sub forma

$$x = \vee\{a \in At(B) \mid a \le x\}.$$

Cum orice doi atomi distincţi sunt disjuncţi, aplicând Corolarul 9.1.8, rezultă

$$\mathbf{m}(x) = \Sigma\{\mathbf{m}(a) \mid a \in At(B), a \le x\}.$$

Atunci probabilitatea $\mathbf{m}$ este determinată de restricţia sa $\mathbf{m}\mid_{At(B)}$ la mulţimea atomilor lui $\mathcal{B}$.

Presupunem că atomii $a_1, \ldots, a_n$ sunt "egal probabili": $\mathbf{m}(a_1) = \ldots = \mathbf{m}(a_n)$. Atunci

$$1 = \mathbf{m}(1) = \mathbf{m}(\vee_{i=1}^{n} a_i) = \Sigma_{i=1}^{n} \mathbf{m}(a_i),$$

deci $\mathbf{m}(a_i) = \frac{1}{n}$, pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

Dacă $x \in B$ şi $card\{a \in At(B) \mid a \leq x\} = m$, atunci $\mathbf{m}(x) = \frac{m}{n}$. Se obţine definiţia probabilităţii în sens clasic.

9.1.3 σ-algebre şi σ-probabilităţi

Lema 9.1.12 *Fie $\mathcal{B}$ o algebră Boole. Sunt echivalente afirmaţiile următoare:*
(i) Pentru orice $X \subseteq B$ numărabilă, există $\sup X$*,*
(ii) Pentru orice $X \subseteq B$ numărabilă, există $\inf X$*.*

O *σ-algebră* este o algebră Boole ce verifică condiţiile echivalente din Lema 9.1.12.

Fie F un filtru al unei algebre Boole $\mathcal{B}$ şi $p : B \longrightarrow B/_F$ morfismul canonic. F se numeşte *σ-filtru* dacă pentru orice submulţime numărabila X a lui B, $X \subseteq F$ implică $\sup X \in F$.

Dacă $\mathcal{B}$ este o σ-algebra şi F este un σ-filtru, atunci $B/_F$ este o σ-algebră.

Fie $\mathcal{B}_1$ şi $\mathcal{B}_2$ două σ-algebre. Un morfism boolean $f : B_1 \longrightarrow B_2$ se numeşte *σ-morfism* dacă pentru orice submulţime numărabilă X a lui B_1, avem $f(\sup X) = \sup f(X)$. Dacă $f : B_1 \longrightarrow B_2$ este σ-morfism, atunci $f(\inf X) = \inf f(X)$, pentru orice $X \subseteq B_1$ numărabilă. Dacă F este un σ-filtru al unei σ-algebre $\mathcal{B}$, atunci $p : B \longrightarrow B/_F$ este un σ-morfism.

Exemple 9.1.13

(a) Fie $L_{\omega_1\omega}$ logica infinitară ce admite disjuncţii şi conjuncţii cel mult numărabile. Algebra Lindenbaum-Tarski a logicii $L_{\omega_1\omega}$ este o σ-algebră.

(b) Dacă $(X, \mathcal{O})$ este un spaţiu topologic, atunci σ-corpul de părţi generat de familia $\mathcal{O}$ a mulţimilor deschise este σ-algebra mulţimilor boreliene.

O mulţime E a unei algebre Boole $\mathcal{B}$ se numeşte *disjunctă* dacă orice două elemente diferite ale sale sunt disjuncte. O algebră Boole $\mathcal{B}$ satisface *condiţia lanţului numărabil* dacă orice submulţime disjunctă a sa formată din elemente nenule este cel mult numărabilă.

Propoziţia 9.1.14 *Dacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole, atunci sunt echivalente afirmaţiile următoare:*
(a) $\mathcal{B}$ satisface condiţia lanţului numărabil;
(b) Pentru orice $E \subseteq B$, există $D \subseteq E$ cel mult numărabilă astfel încât D şi E au aceeaşi mulţime de majoranţi.

Dem.
(a) $\Longrightarrow$ (b): Fie $E \subseteq B$ şi I idealul generat de E:

$$I = \{b \in B \mid \text{ există } b_1, \ldots, b_n \in E,\ b \leq b_1 \vee \ldots \vee b_n\}.$$

Se observă că E şi I au aceiaşi majoranţi. Aplicând axioma lui Zorn, putem găsi o mulţime $F \subseteq I$ maximală în raport cu următoarele proprietăţi: F este disjunctă şi $0 \notin F$. Este evident că orice majorant al lui I este şi majorant al lui F.

Vom demonstra şi afirmaţia reciprocă. Presupunem prin absurd că există un majorant b_0 al lui F care nu este majorant al lui I. Atunci există $b_1 \in I$, $b_1 \not\leq b_0$, de unde rezultă $b_1 - b_0 = b_1 \wedge b_0^- \in I$ şi $b_1 - b_0 \neq 0$. Pentru orice $b \in F$, $b \leq b_0$, deci $b \wedge (b_1 - b_0) = 0$. De asemenea, $b_1 - b_0 \notin F$ (altfel, $b_1 - b_0 = (b_1 - b_0) \wedge (b_1 - b_0) = 0$). Prin urmare, $F \cup \{b_1 - b_0\}$ este disjunctă şi $F \subset F \cup \{b_1 - b_0\} \subseteq I$, ceea ce contrazice maximalitatea lui F. Rezultă că I şi F au aceiaşi majoranţi.

Conform (a), F este cel mult numărabilă: $F = \{f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots\}$. Cum $F \subseteq I$, pentru orice n există $b_1^n, \ldots, b_{j_n}^n \in E$ astfel încât

$$f_n \leq b_1^n \vee \ldots \vee b_{j_n}^n.$$

Mulţimea $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{b_1^n, \ldots, b_{j_n}^n\} \subseteq E$ este numărabilă şi D, F au aceiaşi majoranţi. Rezultă că mulţimile E, I, F şi D au aceiaşi majoranţi.

(b) $\Longrightarrow$ (a): Fie E o mulţime disjunctă de elemente nenule. Conform (b), există $D \subseteq E$ cel mult numărabilă având aceiaşi majoranţi ca E. Presupunem că există $x \in E \setminus D$. Pentru orice $a \in D$, $a \wedge x = 0$, deci $a \leq x^-$. Atunci x^- este un majorant al lui D, dar nu al lui E. Contradicţia obţinută ne arată că $E = D$. □

Corolar 9.1.15 *Orice σ-algebră $\mathcal{B}$ ce satisface condiţia lanţului numărabil este completă.*

Dem. Fie $E \subseteq B$. Atunci există $D \subseteq E$ cel mult numărabilă astfel încât D şi E au aceeaşi mulţime de majoranţi. Cum $\sup D$ există în B, este clar că $\sup E = \sup D$. □

Propoziţia 9.1.16 *Fie $\mathbf{m}$ o probabilitate strict pozitivă pe algebra Boole $\mathcal{B}$. Atunci $\mathcal{B}$ satisface condiţiile lanţului numărabil.*

Dem. Fie $E \subseteq B$ o mulţime disjunctă. Putem presupune că $0 \notin E$. Pentru orice număr natural $n \geq 1$, notăm

$$E_n = \{x \in E \mid \mathbf{m}(x) \geq \frac{1}{n}\}.$$

Cum $\mathbf{m}$ este strict pozitivă, rezultă $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$. De asemenea, $card(E_n) \leq n$ pentru orice $n \geq 1$. Intr-adevăr, dacă ar exista $n+1$ elemente distincte $x_1, \ldots, x_{n+1} \in E_n$, atunci

$$\mathbf{m}(\vee_{i=1}^{n+1} x_i) = \Sigma_{i=1}^{n+1} \mathbf{m}(x_i) \geq \frac{n+1}{n} > 1.$$

Aşadar, fiecare mulţime E_n este finită, deci $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$ este cel mult numărabilă. □

Corolar 9.1.17 *Fie* $\mathbf{m}$ *o probabilitate strict pozitivă pe* σ*-algebra* $\mathcal{B}$*. Atunci* $\mathcal{B}$ *este o algebră Boole completă.*

Dem. Se aplică Propoziţia 9.1.16 şi Corolarul 9.1.15. □

Notaţie 9.1.18 Fie (x_n) un şir în algebra Boole $\mathcal{B}$ si $x \in B$. Atunci notăm:
$(x_n) \uparrow$ atunci când şirul (x_n) este crescător,
$(x_n) \downarrow$ atunci când şirul (x_n) este descrescător,
$x_n \uparrow x$ atunci când şirul (x_n) este crescător şi $\vee_{n=1}^{\infty} x_n = x$,
$x_n \downarrow x$ atunci când şirul (x_n) este descrescător şi $\wedge_{n=1}^{\infty} x_n = x$.

Un şir (x_n) se numeşte *disjunct* dacă $\{x_n \mid n \geq 1\}$ este o mulţime disjunctă.

Definiţie 9.1.19 Fie $\mathcal{B}$ o σ-algebră. O funcţie $\mathbf{m} : B \longrightarrow \mathcal{R}^+$ se numeşte σ-*probabilitate* dacă:
(1) $\mathbf{m}(\vee_{n=1}^{\infty} x_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty}(x_n)$, pentru orice şir disjunct (x_n) din B,
(2) $\mathbf{m}(1) = 1$.

Orice σ-probabilitate este o probabilitate. Dacă $\mathcal{B}$ este o algebră Boole finită, atunci cele două noţiuni sunt echivalente.

Propoziţia 9.1.20 *Fie* $\mathbf{m}$ *o probabilitate pe* σ*-algebra* $\mathcal{B}$*. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(a) $\mathbf{m}$ *este o* σ*-probabilitate,*
(b) Pentru orice şir crescător (x_n) *din* B*,*

$$\mathbf{m}(\vee_{n=1}^{\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n),$$

(c) Pentru orice şir descrescător (x_n) *din* B*,*

$$\mathbf{m}(\wedge_{n=1}^{\infty} x_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n),$$

(d) Pentru orice şir (x_n) *din* B*, dacă* $x_n \uparrow 1$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n) = 1,$$

(e) Pentru orice şir (x_n) *din* B*, dacă* $x_n \downarrow 0$*, atunci*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n) = 0.$$

Dem.
(a) $\Longrightarrow$ (b): Fie (x_n) un şir crescător. Formăm şirul (y_n) punând:
$y_1 = x_1$, $y_2 = x_2 - x_1$, ..., $y_{n+1} = x_{n+1} - x_n$, ...
Se observă că (y_n) este un şir disjunct şi că $\vee_{n=1}^{\infty} x_n = \vee_{n=1}^{\infty} y_n$. $\mathbf{m}$ este o σ-probabilitate, deci

$$\mathbf{m}(\vee_{n=1}^{\infty} x_n) = \mathbf{m}(\vee_{n=1}^{\infty} y_n) = \Sigma_{n=1}^{\infty} \mathbf{m}(y_n) = \lim_{n\to\infty} [\mathbf{m}(y_1) + \ldots + \mathbf{m}(y_n)] =$$

$$\lim_{n\to\infty}[\mathbf{m}(x_1)+\mathbf{m}(x_2)-\mathbf{m}(x_1)+\ldots+\mathbf{m}(x_n)-\mathbf{m}(x_{n-1})]=\lim_{n\to\infty}\mathbf{m}(x_n).$$

(b) $\Longrightarrow$ (a): Fie (x_n) un şir disjunct. Considerăm şirul: $y_n=\vee_{i=1}^n x_i$, $n=1,2,\ldots$. $\mathbf{m}$ fiind probabilitate, $\mathbf{m}(y_n)=\Sigma_{i=1}^n\mathbf{m}(x_i)$, pentru orice număr natural $n\geq 1$. Se observă că (y_n) este un şir crescător şi $\vee_{n=1}^\infty\mathbf{m}(y_n)=\vee_{n=1}^\infty\mathbf{m}(x_n)$, deci

$$\mathbf{m}(\vee_{n=1}^\infty x_n)=\mathbf{m}(\vee_{n=1}^\infty y_n)=\lim_{n\to\infty}\mathbf{m}(y_n)=\lim_{n\to\infty}\Sigma_{i=1}^n\mathbf{m}(x_i)=\Sigma_{n=1}^\infty\mathbf{m}(x_n).$$

Demonstrarea echivalenţelor (b) $\Longleftrightarrow$ (c) $\Longleftrightarrow$ (d) $\Longleftrightarrow$ (e) nu ridică probleme.
$\Box$

Exerciţiu 9.1.21 Fie $\mathbf{m}$ o σ-probabilitate definită pe σ-algebra $\mathcal{B}$.
(i) $F=\{x\in B\mid \mathbf{m}(x)=1\}$ este un σ-filtru propriu al lui $\mathcal{B}$.
(ii) Dacă $p:B\longrightarrow B/_F$ este σ-morfismul canonic, atunci există o unică σ-probabilitate μ pe $B/_F$ astfel încât $\mu\circ p=\mathbf{m}$.

9.1.4 Teorema lui Carathéodory

Fie $\mathcal{A}$ o σ-algebră. O mulţime nevidă $M\subseteq A$ se numeşte *monotonă* dacă pentru orice şir (x_n) de elemente ale lui M, au loc proprietăţile următoare:
$(x_n)\uparrow$ implică $\vee_{n=1}^\infty x_n\in M$,
$(x_n)\downarrow$ implică $\wedge_{n=1}^\infty x_n\in M$.

Lema 9.1.22
(i) Orice intersecţie de σ-subalgebre ale lui $\mathcal{A}$ este o σ-subalgebră.
(ii) Orice intersecţie de mulţimi monotone este monotonă.

Fie $X\subseteq A$. Vom nota:
$S(X)$= intersecţia σ-subalgebrelor lui $\mathcal{A}$ ce includ pe X;
$M(X)$= intersecţia mulţimilor monotone ce includ pe X.

$S(X)$ se numeşte *σ-subalgebra a lui $\mathcal{A}$ generată de X*, iar $M(X)$ se numeşte *mulţimea monotonă generată de X*.

Propoziţia 9.1.23 *Dacă $\mathcal{B}$ este o subalgebră Boole a σ-algebrei $\mathcal{A}$, atunci $S(B)=M(B)$.*

Dem. Este evident că $B\subseteq M(B)\subseteq S(B)$. Dacă notăm

$$M'=\{x\in A\mid x\in M(B),x^-\in M(B)\},$$

atunci M' este monotonă şi $B\subseteq M'\subseteq M(B)$, deci $M'=M(B)$, de unde rezultă că $M(B)$ este inchisă la complement. Pentru $a\in M(B)$,

$$M_a=\{x\mid x\in M(B),a\wedge x\in M(B)\}$$

este monotonă şi $B \subseteq M_a \subseteq M(B)$, deci $M_a = M(B)$. Rezultă că $M(B)$ este inchisă la $\wedge$. Am arătat că $M(B)$ este subalgebră Boole a lui $\mathcal{A}$. Cum $M(B)$ este şi monotonă, rezultă că este o σ-subalgebră a lui $\mathcal{A}$. Atunci $S(B) \subseteq M(B)$, deci $S(B) = M(B)$. □

Lema 9.1.24 *Fie $\mathcal{B}$ o subalgebră Boole a unei σ-algebre $\mathcal{A}$ şi fie $\mathbf{m}$ o probabilitate pe $\mathcal{B}$. Sunt echivalente afirmaţiile următoare:*
(a) Pentru orice $(x_n) \subseteq B$, $(x_n) \uparrow$ şi $x = \vee_A x_n \in B$ implică $\mathbf{m}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n)$.
(b) Pentru orice $(x_n) \subseteq B$, $(x_n) \downarrow$ şi $x = \wedge_A x_n \in B$ implică $\mathbf{m}(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n)$.
(c) Pentru orice $(x_n) \subseteq B$, $(x_n) \uparrow 1$ implică $\lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n) = 1$.
(d) Pentru orice $(x_n) \subseteq B$, $(x_n) \downarrow 0$ implică $\lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n) = 0$.

O probabilitate $\mathbf{m} : B \longrightarrow [0,1]$ ce verifică proprietăţile echivalente (a)-(d) se numeşte *continuă* pe $\mathcal{B}$.

Observaţie 9.1.25 Fie $\mathbf{m}$ o probabilitate definită pe o σ-algebră $\mathcal{B}$. Conform Propoziţiei 9.1.20, $\mathbf{m}$ este o σ-probabilitate dacă şi numai dacă $\mathbf{m}$ este continuă pe $\mathcal{B}$.

In această secţiune vom prezenta o demonstraţie a următoarei teoreme a lui Carathéodory.

Teorema 9.1.26 *(Teorema lui Carathéodory)*
Fie $\mathcal{B}$ o subalgebră Boole a unei σ-algebre $\mathcal{A}$ şi $\mathbf{m} : B \longrightarrow [0,1]$ o probabilitate continuă. Atunci există o unică σ-probabilitate $\overline{\mathbf{m}} : S(B) \longrightarrow [0,1]$ astfel încât $\overline{\mathbf{m}}\mid_B = \mathbf{m}$.

Demonstraţia Teoremei 9.1.26 se bazează pe o serie de leme, prezentate în continuare.

In cele ce urmează, $\mathcal{B}$ este o subalgebră Boole a σ-algebrei $\mathcal{A}$ şi $\mathbf{m} : B \longrightarrow [0,1]$ este o probabilitate continuă pe $\mathcal{B}$.

Lema 9.1.27 *Fie două şiruri (a_n), (b_n) în B şi $c \in A$ astfel încât $a_n \uparrow c$ şi $b_n \uparrow c$ în A. Atunci* $\lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(a_n) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(b_n)$.

Dem. Din $c = \vee_{n=1}^{\infty} a_n = \vee_{n=1}^{\infty} b_n$ rezultă $a_k = \vee_{n=1}^{\infty}(a_k \wedge b_n)$, pentru orice $k \geq 1$. Atunci $(a_k \wedge b_n)_n \uparrow a_k$, deci

$$\mathbf{m}(a_k) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(a_k \wedge b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(b_n).$$

Această inegalitate are loc pentru orice $n \geq 1$, deci

$$\lim_{k\to\infty} \mathbf{m}(a_k) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(b_n).$$

□

Considerăm mulţimea

$$F = \{\vee_{n=1}^{\infty} a_n \mid (a_n) \subseteq B\}.$$

F este o sublatice a lui $\mathcal{A}$ şi $B \subseteq F$. Pentru orice $x \in F$, putem găsi un şir $(a_n) \subseteq B$ astfel încât $a_n \uparrow x$. Definim funcţia $\pi : F \longrightarrow [0,1]$ prin

$$\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(a_n), \quad \text{dacă } x \in F \text{ şi } (a_n) \subseteq B \quad \text{astfel încât } a_n \uparrow x.$$

Lema 9.1.28 *Funcţia π are proprietăţile următoare:*
(e) Pentru orice $a \in B$, $\pi(a) = \mathbf{m}(a)$.
(f) Pentru orice $x, y \in F$, $\pi(x \vee y) = \pi(x) + \pi(y) - \pi(x \wedge y)$.
(g) Dacă $x, y \in F$ şi $x \leq y$, atunci $\pi(x) \leq \pi(y)$.
(h) Dacă $(x_n) \subseteq F$, $x \in F$ şi $x_n \uparrow x$, atunci $\lim_{n\to\infty} \pi(x_n) = \pi(x)$.

Dem. Vom demonstra numai (f) şi (h).

(f): Fie $x, y \in F$ şi (a_n), (b_n) în B astfel încât $a_n \uparrow x$ şi $b_n \uparrow y$. Atunci $(a_n \vee b_n) \uparrow (x \vee y)$ şi $(a_n \wedge b_n) \uparrow (x \wedge y)$, deci

$$\pi(x\vee y) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(a_n\vee b_n) = \lim_{n\to\infty}[\mathbf{m}(a_n)+\mathbf{m}(b_n)-\mathbf{m}(a_n\wedge b_n)] = \pi(x)+\pi(y)-\pi(x\wedge y).$$

(h): Fie $(x_n) \subseteq F$ şi $x \in F$ astfel încât $x_n \uparrow x$. Pentru orice $n \geq 1$, considerăm şirul $(a_{mn})_n \subseteq B$ astfel încât $a_{mn} \uparrow x_m$. Dacă $m \leq n$, atunci $a_{mn} \leq x_m \leq x_n$, deci $\vee_{m=1}^{n} a_{mn} \leq \vee_{m=1}^{n} x_m \leq x_n$. Notând $b_n = \vee_{m=1}^{\infty} a_{mn}$, avem $\vee_{m=1}^{n} a_{mn} \leq b_n \leq x_n$. Se observă că şirul $(b_n) \subseteq B$ este crescător.
Fie $m \leq n$. Atunci $a_{mn} \leq b_m \leq x_n$. Rezultă

$$\vee_{n=m}^{\infty} a_{mn} \leq \vee_{n=m}^{\infty} b_n \leq \vee_{n=m}^{\infty} x_n,$$

de unde se obţine $x_m \leq \vee_{n=1}^{\infty} b_n \leq x$. Ultima inegalitate este valabilă pentru orice $m \geq 0$, deci

$$x = \vee_{m=1}^{\infty} x_m \leq \vee_{n=1}^{\infty} b_n \leq x.$$

Atunci $x = \vee_{n=1}^{\infty} b_n$, rezultând $b_n \uparrow x$. Am arătat că $\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(b_n)$.
Pentru $m \leq n$, avem $a_{mn} \leq b_n \leq x_n$, de unde $\mathbf{m}(a_{mn}) \leq \mathbf{m}(b_n) \leq \mathbf{m}(x_n)$. Din aceste inegalităţi rezultă, pentru orice $m \geq 1$:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(a_{mn}) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(b_n) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n).$$

Aceste ultime inegalităţi se mai scriu:

$$\pi(x_m) \leq \pi(x) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n),$$

de unde, prin trecerea la limită după m:

$$\lim_{m\to\infty} \pi(x_m) \leq \pi(x) \leq \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n).$$

S-a obţinut că $\pi(x) = \lim_{n\to\infty} \mathbf{m}(x_n)$. □

Considerăm funcţia $\pi^* : A \longrightarrow [0,1]$ definită astfel:

$$\pi^*(u) = \inf\{\pi(x) \mid x \in F,\ u \leq x\}.$$

Lema 9.1.29 *Funcţia* π^* *are proprietăţile următoare:*
(i) Pentru orice $x \in F$, $\pi^*(x) = \pi(x)$.
(j) Pentru orice $u_1, u_2 \in A$, $u_1 \leq u_2$ *implică* $\pi^*(u_1) \leq \pi^*(u_2)$.
(k) Dacă $u_1, u_2 \in A$, *atunci* $\pi^*(u_1 \vee u_2) + \pi^*(u_1 \wedge u_2) \leq \pi^*(u_1) + \pi^*(u_2)$
(în particular $\pi^*(u) + \pi^*(u^-) \geq 1$, *pentru orice* $u \in A$*).*
(l) Dacă $(u_n) \subseteq A$, $u \in A$ *şi* $u_n \uparrow u$, *atunci* $\lim_{n\to\infty} \pi^*(u_n) = \pi^*(u)$.

Dem. Vom trata numai punctele (k) şi (l).

(k): Fie $\varepsilon > 0$. Din definiţia operaţiei inf, există $x_1, x_2 \in F$, astfel încât $x_1 \geq u_1$, $x_2 \geq u_2$ şi

$$\pi^*(u_1) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \pi(x_1), \quad \pi^*(u_2) + \frac{\varepsilon}{2} \geq \pi(x_2).$$

Adunând aceste inegalităţi şi ţinând cont de Lema 9.1.28 (f), (g), vom avea

$$\pi^*(u_1)+\pi^*(u_2)+\varepsilon \geq \pi(x_1)+\pi(x_2) = \pi(x_1 \vee x_2)+\pi(x_1 \wedge x_2) \geq \pi^*(u_1 \vee u_2)+\pi^*(u_1 \wedge u_2).$$

Cum $\varepsilon > 0$ este arbitrar, $\pi^*(u_1) + \pi^*(u_2) \geq \pi^*(u_1 \vee u_2)$, $\pi^*(u_1 \wedge u_2)$.

(l): Fie $\varepsilon > 0$. Considerăm un şir de numere reale strict pozitive (ε_n) astfel încât $\Sigma_{n\to\infty}\varepsilon_n = \varepsilon$. Conform definiţiei operaţiei inf, pentru orice număr natural $n \geq 1$ există $x_n \in F$ astfel încât $x_n \geq u_n$ şi $\pi^*(u_n) + \varepsilon_n \geq \pi(x_n) = \pi^*(x_n)$. Prin inducţie după n, vom demonstra următoarea inegalitate:

$$\pi(\vee_{k=1}^n x_k) \leq \pi^*(u_n) + \Sigma_{k=1}^n \varepsilon_k. \tag{9.1}$$

Pentru $n = 1$, se aplică definiţia lui π^*.
Presupunem inegalitatea adevarată pentru n; să demonstrăm că este adevărată pentru $n + 1$; într-adevăr,
ţinând cont de Lema 9.1.28(f) şi de ipoteza inducţiei, obţinem:

$$\pi(\vee_{k=1}^{n+1} x_k) = \pi(\vee_{k=1}^n x_k) + \pi(x_{n+1}) - \pi(x_{n+1} \wedge \vee_{k=1}^n x_k) \leq$$

$$\leq \pi^*(u_n) + \Sigma_{k=1}^n \varepsilon_k + \pi^*(u_{n+1}) + \varepsilon_{n+1} - \pi(x_{n+1} \wedge \vee_{k=1}^n x_k).$$

Dar $u_n \leq u_{n+1} \leq x_{n+1}$ şi $u_n \leq x_n \leq \vee_{k=1}^n x_k$, deci $u_n \leq x_{n+1} \wedge \vee_{k=1}^n x_k \in B$, de unde rezultă $\pi^*(u_n) \leq \pi(x_{n+1} \wedge \vee_{k=1}^n x_k)$. Se obţine

$$\pi(\vee_{k=1}^{n+1} x_k) \leq \pi^*(u_n) + \vee_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k + \pi^*(u_{n+1}) - \pi^*(u_n) = \pi^*(u_{n+1}) + \Sigma_{k=1}^{n+1} \varepsilon_k,$$

ceea ce termină inducţia.
Trecând la limită în inegalitatea (9.1) şi ţinând cont de Lema 9.1.28 (h), vom avea

$$\pi^*(\vee_{n=1}^\infty u_n) \leq \pi^*(\vee_{n=1}^\infty x_n) = \pi(\vee_{n=1}^\infty x_n) = \lim_{n\to\infty} \pi(\vee_{k=1}^n x_k) \leq \lim_{n\to\infty} \pi^*(u_n) + \varepsilon.$$

Cum $\varepsilon > 0$ a fost ales arbitrar, $\pi^*(\vee_{n=1}^\infty u_n) \leq \lim_{n\to\infty} \pi^*(u_n)$. Insă $u = \vee_{n=1}^\infty u_n$, deci are loc inegalitatea

$$\pi^*(u) \leq \lim_{n\to\infty} \pi^*(u_n).$$

Pentru orice $n \geq 1$, $u_n \leq u$ implică $\pi^*(u_n) \leq \pi^*(u)$, de unde $\lim_{n\to\infty} \pi^*(u_n) \leq \pi^*(u)$. Atunci

$$\pi^*(u) = \lim_{n\to\infty} \pi^*(u_n).$$

□

Notăm

$$C = \{u \in A \mid \pi^*(u) + \pi^*(u^-) = 1\}.$$

Se observă că $0, 1 \in C$ şi că C este închisă la complement.

Lema 9.1.30 *C este o σ-subalgebră a lui $\mathcal{A}$ şi $\pi^* |_C$ este o σ-probabilitate pe C.*

Dem. Fie $u_1, u_2 \in A$. Conform Lemei 9.1.29(k), avem:

$$\pi^*(u_1 \vee u_2) + \pi^*(u_1 \wedge u_2) \leq \pi^*(u_1) + \pi^*(u_2), \tag{9.2}$$

$$\pi^*((u_1 \vee u_2)^-) + \pi^*((u_1 \wedge u_2)^-) \leq \pi^*(u_1^-) + \pi^*(u_2^-). \tag{9.3}$$

Presupunem că $u_1, u_2 \in C$, deci $\pi^*(u_1) = \pi^*(u_1^-) = 1$ and $\pi^*(u_2) + \pi^*(u_2^-) = 1$. Adunând (9.2) şi (9.3), se obţine:

$$[\pi^*(u_1 \vee u_2) + \pi^*((u_1 \vee u_2)^-)] + [\pi^*(u_1 \wedge u_2) + \pi^*((u_1 \wedge u_2)^-)] \leq 2.$$

Conform Lemei 9.1.29(k), $\pi^*(u_1 \vee u_2) + \pi^*((u_1 \vee u_2)^-) \geq 1$ şi $\pi^*(u_1 \wedge u_2) + \pi^*((u_1 \wedge u_2)^-) \geq 1$, deci $\pi^*(u_1 \vee u_2) + \pi^*((u_1 \vee u_2)^-) = 1$ şi $\pi^*(u_1 \wedge u_2) + \pi^*((u_1 \wedge u_2)^-) = 1$. Aceste egalităţi arată că $u_1 \vee u_2$, $u_1 \wedge u_2 \in C$. Până acum, am arătat că C este o subalgebră Boole a lui $\mathcal{A}$.
Fie (u_n) un şir crescător în C. Aplicând Lema 9.1.29(h), $\pi^*(\vee_{n=1}^{\infty} u_n) = \lim_{n\to\infty} \pi^*(u_n)$. Fie $k \geq 1$. Atunci $(\vee_{n=1}^{\infty} u_n)^- \leq u_k$, deci

$$\pi^*((\vee_{n=1}^{\infty} u_n)^-) \leq \pi^*(u_k^-) = 1 - \pi^*(u_k).$$

Trecând la limită în această inegalitate, rezultă

$$\pi^*((\vee_{n=1}^{\infty} u_n)^-) \leq 1 - \lim_{k\to\infty} \pi^*(u_k) = 1 - \pi^*(\vee_{k=1}^{\infty} u_k).$$

A rezultat

$$\pi^*((\vee_{n=1}^{\infty} u_n)^-) + \pi^*(\vee_{n=1}^{\infty} u_n) \leq 1.$$

Cum inegalitatea inversă este valabilă întotdeauna, rezultă:

$$\pi^*(\vee_{n=1}^{\infty} u_n) + \pi^*((\vee_{n=1}^{\infty} u_n)^-) = 1.$$

Deci, $\vee_{n=1}^{\infty} u_n \in C$, ceea ce arată că C este o σ-algebră.
Dacă $u_1, u_2 \in C$, atunci (9.2) devine egalitate. Intr-adevăr, dacă (9.2) ar fi o inegalitate strictă, atunci prin adunarea termen cu termen a inegalităţilor (9.2) şi

(9.3) am obţine în partea dreaptă un numar real > 1. Aceasta este o absurditate, deci

$$\pi^*(u_1 \vee u_2) + \pi^*(u_1 \wedge u_2) = \pi^*(u_1) + \pi^*(u_2).$$

Rezultă că $\pi^* \mid_C$ este o probabilitate pe σ-algebra C. Conform Lemei 9.1.29 (1), $\pi^* \mid_C$ este continuă. Aplicând Propoziţia 9.1.20, rezultă că $\pi^* \mid_C$ este o σ-probabilitate. $\square$

Demonstraţia Teoremei 9.1.26

Păstrând notaţiile de mai sus, $B \subseteq C$ şi C este o σ-subalgebră a lui $\mathcal{A}$, deci $S(B) \subseteq C$. Atunci $\pi^* \mid_{S(B)}$ este o σ-probabilitate pe $S(B)$, ce extinde pe $\mathbf{m}$.

A rămas să demonstrăm unicitatea lui $\pi^* \mid_{S(B)}$. Fie $\mathbf{m_1}, \mathbf{m_2}$ două σ-probabilităţi pe $S(B)$ astfel încât $\mathbf{m_1} \mid_B = \mathbf{m_2} \mid_B = \mathbf{m}$. Considerăm mulţimea

$$K = \{a \in S(B) \mid \mathbf{m_1}(a) = \mathbf{m_2}(a)\}.$$

Fie $(a_n) \subseteq K$ şi $a \in A$ astfel încât $a_n \uparrow a$. Atunci $\mathbf{m_1}(a_k) = \mathbf{m_2}(a_k)$, pentru orice număr natural $k \geq 1$. $\mathbf{m_1}, \mathbf{m_2}$ fiind continue, rezultă

$$\mathbf{m_1}(a) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{m_1}(a_k) = \lim_{k\to\infty} \mathbf{m_2}(a_k) = \mathbf{m_2}(a),$$

ceea ce arată că $a \in K$. Deci K este monotonă şi $B \subseteq K$, ceea ce implică $S(B) = M(B) \subseteq K$. Rezultă $K = S(B)$ şi $\mathbf{m_1} = \mathbf{m_2}$. $\square$

9.1.5 Teorema Horn-Tarski

In această subsecţiune vom demonstra următoarea teoremă a lui Horn-Tarski [25].

Teorema 9.1.31 *Fie $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole şi $\mathcal{B}$ o subalgebră a sa. Orice probabilitate pe $\mathcal{B}$ se poate extinde la o probabilitate pe $\mathcal{A}$.*

Pentru a demonstra această teoremă, vom stabili o serie de leme.

Fie $\mathcal{A} = (A, \wedge, \vee, ^-, 0, 1)$ o algebră Boole. Fixăm o subalgebră $\mathcal{B}$ a lui $\mathcal{A}$ şi o probabilitate $\mathbf{m} : B \longrightarrow [0, 1]$.

• Definim două funcţii $\mathbf{m_i} : B \longrightarrow [0, 1]$ şi $\mathbf{m_e} : B \longrightarrow [0, 1]$ astfel: pentru orice $a \in A$,

$$\mathbf{m_i}(a) \stackrel{def.}{=} \sup\{\mathbf{m}(x) \mid x \in B, x \leq a\}, \quad \mathbf{m_e}(a) \stackrel{def.}{=} \inf\{\mathbf{m}(y) \mid y \in B, y \geq a\}.$$

Dacă $a \in B$, atunci $\mathbf{m_i}(a) = \mathbf{m_e}(a) = \mathbf{m}(a)$.

Lema 9.1.32 *Dacă $x, y \in A$ şi $x \wedge y = 0$, atunci*

$$\mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m_i}(y) \leq \mathbf{m_i}(x \vee y) \leq \mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m_e}(y) \leq \mathbf{m_e}(x \vee y) \leq \mathbf{m_e}(x) + \mathbf{m_e}(y).$$

Dem. Vom demonstra succesiv aceste patru inegalităţi.

(a) $\mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m_i}(y) \leq \mathbf{m_i}(x \vee y)$:
Fie $a, b \in B$ cu $a \leq x, b \leq y$. Deci, $a \vee b \in B$, $a \wedge b = 0$ şi $a \vee b \leq x \vee y$, de unde rezultă

$$\mathbf{m}(a) + \mathbf{m}(b) = \mathbf{m}(a \vee b) \leq \mathbf{m_i}(x \vee y).$$

Prin urmare,

$$\mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m_i}(y) = \sup\{\mathbf{m}(a) \mid a \in B, a \leq x\} + \sup\{\mathbf{m}(b) \mid b \in B, b \leq y\} =$$

$$= \sup\{\mathbf{m}(a) + \mathbf{m}(b) \mid a, b \in B, a \leq x, b \leq y\} \leq \mathbf{m_i}(x \vee y).$$

(b) $\mathbf{m_i}(x \vee y) \leq \mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m_e}(y)$:
Fie $a, t \in B$, cu $a \leq x \vee y$ şi $y \leq t$. Atunci $a \leq x \vee t = t^- \to y$, deci $a \wedge t^- \leq x$, ceea ce conduce la

$$\mathbf{m}(a) = \mathbf{m}((a \wedge t^-) \vee (a \wedge t)) = \mathbf{m}(a \wedge t^-) + \mathbf{m}(a \wedge t) \leq \mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m}(t),$$

de unde deducem

$$\mathbf{m}(a) \leq \inf\{\mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m}(t) \mid t \in B, t \geq y\} =$$

$$= \mathbf{m_i}(x) + \inf\{\mathbf{m}(t) \mid t \in B, t \geq y\} = \mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m_e}(y).$$

In concluzie,

$$\mathbf{m_i}(x \vee y) = \sup\{\mathbf{m}(a) \mid a \in B, a \leq x \vee y\} \leq \mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m_e}(y).$$

(c) $\mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m_e}(y) \leq \mathbf{m_e}(x \vee y)$:
Fie $u, v \in B$ cu $u \leq x$ şi $v \geq x \vee y$. Din $x \wedge y = 0$, rezultă $y \leq x^- \leq u^-$, deci $y \leq v \wedge u^-$. Cum $v \wedge u^- \in B$, se obţine

$$\mathbf{m}(u) + \mathbf{m_e}(y) \leq \mathbf{m}(u) + \mathbf{m}(v \wedge u^-) = \mathbf{m}(u \vee (v \wedge u^-)) = \mathbf{m}(v),$$

ceea ce implică

$$\mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m_e}(y) = \sup\{\mathbf{m}(u) \mid u \in B, u \leq x\} + \mathbf{m_e}(y) =$$

$$\sup\{\mathbf{m}(u) + \mathbf{m_e}(y) \mid u \in B, u \leq x\} \leq \inf\{\mathbf{m}(v) \mid v \in B, v \geq x \vee y\} = \mathbf{m_e}(x \vee y).$$

(d) $\mathbf{m_e}(x \vee y) \leq \mathbf{m_e}(x) + \mathbf{m_e}(y)$:
Pentru orice $u, t \in B$ cu $u \geq x, t \geq y$, au loc inegalităţile $\mathbf{m_e}(x \vee y) \leq \mathbf{m}(u \vee t) \leq \mathbf{m}(u) + \mathbf{m}(t)$, deci

$$\mathbf{m_e}(x \vee y) \leq \inf\{\mathbf{m}(u) + \mathbf{m}(t) \mid u, t \in B, u \geq x, t \geq y\} =$$

$$= \inf\{\mathbf{m}(u) \mid u \in B, u \geq x\} + \inf\{\mathbf{m}(t) \mid t \in B, t \geq y\} = \mathbf{m_e}(x) + \mathbf{m_e}(y).$$

□

Corolar 9.1.33 *Dacă $x \in B$, $y \in A$ şi $x \wedge y = 0$, atunci*

$$\mathbf{m_i}(x \vee y) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m_i}(y), \quad \mathbf{m_e}(x \vee y) = \mathbf{m}(x) + \mathbf{m_e}(y).$$

Corolar 9.1.34 *Dacă $x, y \in A$, $x \vee y \in B$ şi $x \wedge y = 0$, atunci*

$$\mathbf{m}(x \vee y) = \mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m_e}(y).$$

Corolar 9.1.35 *Dacă $x \in A$, atunci*

$$\mathbf{m_i}(x) + \mathbf{m_e}(x^-) = \mathbf{m_e}(x) + \mathbf{m_i}(x^-) = 1.$$

Lema 9.1.36 *Fie $a, b \in A$ şi $x, y \in B$ astfel încât $a \leq x$, $b \leq y$ şi $x \wedge y = 0$. Atunci*

$$(i)\ \mathbf{m_i}(a \vee b) = \mathbf{m_i}(a) + \mathbf{m_i}(b), \quad (ii)\ \mathbf{m_e}(a \vee b) = \mathbf{m_e}(a) + \mathbf{m_e}(b).$$

Dem.
(i): Fie $u \in B$ cu $u \leq a \vee b$. Din $x \wedge y = 0$, rezultă $b \leq y \leq x^-$, deci $u \leq a \vee b \leq a \vee x^- = x \to a$. Atunci $u \wedge x \leq a$, deci $u \wedge x \leq u \wedge a$. Cum $a \leq x$, rezultă $u \wedge x = u \wedge a$.
Analog se arată că $u \wedge y = u \wedge b$.
Se observă că $u = (u \wedge x) \vee (u \wedge y)$ şi că $u \wedge x, u \wedge y \in B$, deci

$$\mathbf{m}(u) = \mathbf{m}(u \wedge x) + \mathbf{m}(u \wedge y) \leq \mathbf{m_i}(a) + \mathbf{m_i}(b).$$

Atunci

$$\mathbf{m_i}(a \vee b) = \sup\{\mathbf{m}(u) \mid u \in B, u \leq a \vee b\} \leq \mathbf{m_i}(a) + \mathbf{m_i}(b).$$

Inegaliatea inversă a fost stabilită în Lema 9.1.32, deci (i) este adevarată.
(ii): Demonstraţie similară. □

• Pentru orice $z \in A$, fie $B[z]$ subalgebra lui $\mathcal{A}$ generată de $B \cup \{z\}$. Este uşor de observat că:

$$B[z] = B[z^-] = \{x \in A \mid \text{există } a, b \in B, \text{ astfel încât } \quad x = (a \wedge z) \vee (b \wedge z^-)\}.$$

Lema 9.1.37 *Fie $e_1, e_2 \in B[z]$ cu proprietatea că $e_1 \wedge e_2 = 0$. Atunci există $a_j, b_j \in B$ ($j = 1, 2$), astfel încât $e_j = (a_j \wedge z) \vee (b_j \wedge z^-)$ ($j = 1, 2$) şi $a_1 \wedge a_2 = b_1 \wedge b_2 = 0$.*

Dem. Conform ipotezei, există $c_j, d_j \in B$ astfel încât $e_j = (c_j \wedge z) \vee (d_j \wedge z^-)$ ($j = 1, 2$). Din $e_1 \wedge e_2 = 0$, se deduce $c_1 \wedge c_2 \wedge z = d_1 \wedge d_2 \wedge z^- = 0$. Notăm

$$a_1 \overset{nota\c{t}ie}{=} c_1 \wedge c_2^-, \quad a_2 \overset{nota\c{t}ie}{=} c_1^- \wedge c_2, \quad b_1 \overset{nota\c{t}ie}{=} d_1 \wedge d_2^-, \quad b_2 \overset{nota\c{t}ie}{=} d_1^- \wedge d_2.$$

Atunci $a_1 \wedge z = (c_1 \wedge c_2 \wedge z) \vee (c_1 \wedge c_2^- \wedge z) = c_1 \wedge (c_1 \vee c_2^-) \wedge z = c_1 \wedge z$. Analog, $b_1 \wedge z^- = d_1 \wedge z^-$. Rezultă $e_1 = (c_1 \wedge z) \vee (d_1 \wedge z^-) = (a_1 \wedge z) \vee (b_1 \wedge z^-)$. In mod analog, se arată că $e_2 = (a_2 \wedge z) \vee (b_2 \wedge z^-)$. Egalităţile $a_1 \wedge a_2 = b_1 \wedge b_2 = 0$ sunt evidente. $\square$

• Fixăm $z \in A$ şi definim funcţiile $\nu_* : A \longrightarrow [0,1]$ şi $\nu^* : A \longrightarrow [0,1]$ astfel: pentru orice $e \in A$,

$$\nu_*(e) \stackrel{def.}{=} \mathbf{m_i}(e \wedge z), \quad \nu^*(e) \stackrel{def.}{=} \mathbf{m_e}(e \wedge z).$$

Lema 9.1.38 $\nu_* \mid_{B[z]}$ *si* $\nu^* \mid_{B[z]}$ *sunt măsuri pe algebra Boole* $B[z]$.

Dem.

(i) $\nu^* \mid_{B[z]}$ este o masură pe algebra Boole $B[z]$:
Fie $e_1, e_2 \in B[z]$ cu $e_1 \wedge e_2 = 0$. Conform Lemei 9.1.37, există $a_j, b_j \in B$ astfel încât $e_j = (a_j \wedge z) \vee (b_j \wedge z^-)$ $(j = 1, 2)$ şi $a_1 \wedge a_2 = b_1 \wedge b_2 = 0$. Atunci $e_j \wedge z = a_j \wedge z$ $(j = 1, 2)$. Aplicând Lema 9.1.36, rezultă:

$$\nu_*(e_1 \vee e_2) = \mathbf{m_i}((e_1 \vee e_2) \wedge z) = \mathbf{m_i}((e_1 \wedge z) \vee (e_2 \wedge z)) = \mathbf{m_i}((a_1 \wedge z) \vee (a_2 \wedge z)) =$$

$$= \mathbf{m_i}(a_1 \wedge z) + \mathbf{m_i}(a_2 \wedge z) = \mathbf{m_i}(e_1 \wedge z) + \mathbf{m_i}(e_2 \wedge z) = \nu_*(e_1) + \nu_*(e_2).$$

(ii) Se demonstrează similar că $\nu^* \mid_{B[z]}$ este o masură pe $B[z]$. $\square$

• Considerăm funcţiile $\underline{\mathbf{m}} : B[z] \longrightarrow [0,1]$ şi $\overline{\mathbf{m}} : B[z] \longrightarrow [0,1]$ definite astfel: pentru orice $e \in B[z]$,

$$\underline{\mathbf{m}}(e) \stackrel{def.}{=} \mathbf{m_i}(e \wedge z) + \mathbf{m_e}(e \wedge z^-), \quad \overline{\mathbf{m}}(e) \stackrel{def.}{=} \mathbf{m_e}(e \wedge z) + \mathbf{m_i}(e \wedge z^-).$$

Lema 9.1.39 *Următoarele afirmaţii sunt adevărate:*
(i) $\underline{\mathbf{m}}$ *şi* $\overline{\mathbf{m}}$ *sunt probabilităţi pe algebra Boole* $B[z]$*;*
(ii) $\underline{\mathbf{m}} \mid_B = \overline{\mathbf{m}} \mid_B = \mathbf{m}$*;*
(iii) $\underline{\mathbf{m}}(z) = \mathbf{m_i}(z)$ *şi* $\overline{\mathbf{m}}(z) = \mathbf{m_e}(z)$.

Dem.

(i): Amintim că $B[z] = B[z^-]$. Conform Lemei 9.1.38, $\underline{\mathbf{m}}$ şi $\overline{\mathbf{m}}$ sunt măsuri pe algebra Boole $B[z]$. Aplicând Corolarul 9.1.35, obţinem:
$\underline{\mathbf{m}}(1) = \mathbf{m_i}(z) + \mathbf{m_e}(z^-) = 1$ şi $\overline{\mathbf{m}}(1) = \mathbf{m_e}(z) + \mathbf{m_i}(z^-) = 1$, deci $\underline{\mathbf{m}}$ şi $\overline{\mathbf{m}}$ sunt probabilităţi.

(ii): Fie $a \in B$. Conform Corolarului 9.1.34, $\underline{\mathbf{m}}(a) = \mathbf{m_i}(a \wedge z) + \mathbf{m_e}(a \wedge z^-) = \mathbf{m}(a)$ şi, analog, $\overline{\mathbf{m}}(a) = \mathbf{m}(a)$.

(iii): Evident. $\square$

Demonstraţia Teoremei 9.1.31:
Considerăm mulţimea $\mathcal{F}$ a perechilor $(\mathcal{C}, \mu)$, unde $\mathcal{C}$ este o subalgebra a lui $\mathcal{A}$ astfel încât $B \subseteq C \subseteq A$ şi $\mu : C \longrightarrow [0,1]$ este o probabilitate.

Să definim o relaţie binară $\preceq$ pe $\mathcal{F}$ astfel: pentru orice două perechi $(\mathcal{C}_1, \mu_1)$, $(\mathcal{C}_2, \mu_2) \in \mathcal{F}$,

$$(\mathcal{C}_1, \mu_1) \preceq (\mathcal{C}_2, \mu_2) \stackrel{def.}{\Longleftrightarrow} C_1 \subseteq C_2 \text{ şi } \mu_2 \mid_{C_1} = \mu_1.$$

$\preceq$ este o relaţie de ordine pe $\mathcal{F}$. Se poate arăta uşor că mulţimea ordonată $(\mathcal{F}, \preceq)$ este inductivă, deci conform axiomei lui Zorn, există un element (C_0, μ_0) maximal în $(\mathcal{F}, \preceq)$. Dacă $C_0 = A$, atunci μ_0 este o probabilitate pe A ce extinde pe $\mathbf{m}$. Dacă există $z \in A \setminus C_0$, atunci conform Lemei 9.1.39, există o probabilitate $\mu_0' : C[z] \longrightarrow [0,1]$ ce extinde pe μ_0. Datorită maximalităţii lui (C_0, μ_0), rezultă $C[z] = A$, μ_0' este o probabilitate pe $\mathcal{A}$ şi $\mu_0' \mid_A = \mathbf{m}$. $\square$

Propoziţia 9.1.40 *Fie $\mathcal{B}$ o subalgebră a lui $\mathcal{A}$ şi $z \in A$. Dacă $\mathbf{m}$ este o probabilitate pe $\mathcal{B}$ şi $r \in [0,1]$, atunci afirmaţiile următoare sunt echivalente:*
(i) $\mathbf{m}$ se poate extinde la o probabilitate $\mathbf{m}'$ pe $B[z]$ astfel încât $\mathbf{m}'(z) = r$;
(ii) $\underline{\mathbf{m}}(z) \leq r \leq \overline{\mathbf{m}}(z)$.

Dem.
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Imediat.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Dacă $\underline{\mathbf{m}}(z) \leq r \leq \overline{\mathbf{m}}(z)$, atunci există $\theta \in [0,1]$ astfel încât

$$r = (1-\theta) \cdot \mathbf{m_i}(z) + \theta \cdot \mathbf{m_e}(z).$$

Considerăm funcţia $\mathbf{m}' : B[z] \longrightarrow [0,1]$ definită astfel: pentru orice $a \in B[z]$,

$$\mathbf{m}'(a) \stackrel{def.}{=} (1-\theta) \cdot \underline{\mathbf{m}}(a) + \theta \cdot \overline{\mathbf{m}}(a).$$

Conform Lemei 9.1.39, $\mathbf{m}'$ este o probabilitate pe $B[z]$, $\mathbf{m}'$ extinde pe $\mathbf{m}$ şi

$$\mathbf{m}'(z) = (1-\theta) \cdot \underline{\mathbf{m}}(z) + \theta \cdot \overline{\mathbf{m}}(z) = (1-\theta) \cdot \mathbf{m_i}(z) + \theta \cdot \mathbf{m_e}(z) = r.$$

$\square$

9.2 Modele probabiliste ale calculului cu predicate

In această secţiune sunt considerate probabilităţi definite pe mulţimi de enunţuri ale calculului cu predicate (= probabilităţi logice). Ele extind noţiunea de teorie consistentă a calculului cu predicate. Condiţia lui Gaifman permite definirea noţiunii de structură probabilistă şi de model al unei probabilităţi logice. Teorema de completitudine a lui Gaifman (orice probabilitate logică admite un model probabilist) reprezintă varianta probabilistă a teoremei de completitudine a lui Henkin (orice teorie admite un model). Ultima subsecţiune conţine versiuni probabiliste ale unor rezultate din teoria clasică a modelelor (teorema lanţului elementar, prezervarea substructurilor, teorema de consistenţă a lui Robinson).

9.2.1 Structuri probabiliste

Fie L calculul cu predicate de ordinul I şi C mulţimea constantelor sale. Notăm cu E mulţimea enunţurilor lui L şi cu E_0 mulţimea enunţurilor fără cuantificatori.

Fie U o mulţime nevidă astfel încât $C \subseteq U$. Atunci $L(U)$ va fi limbajul obţinut din L prin adăugarea constantelor din $U \setminus C$. Vom nota cu $E(U)$ mulţimea constantelor lui $L(U)$ şi cu $E_0(U)$ mulţimea enunţurilor lui $L(U)$ ce nu au cuantificatori.

Fie $D \subseteq E$ cu proprietăţile următoare:
- D conţine teoremele formale ale lui L,
- D este închisă la conectorii $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$.

Dacă $E/_\sim = \{\widehat{\varphi} \mid \varphi \in E\}$ este algebra Lindenbaum-Tarski asociată lui L, atunci $D/_\sim = \{\widehat{\varphi} \mid \varphi \in D\}$ este o subalgebră Boole a lui $E/_\sim$.

Definiţie 9.2.1 O funcţie $\mathbf{m} : D \longrightarrow [0, 1]$ se numeşte *probabilitate* pe D dacă pentru orice $\varphi, \psi \in E$ sunt satisfăcute următoarele condiţii:
(P1) $\vdash \varphi$ implică $\mathbf{m}(\varphi) = 1$,
(P2) dacă $\vdash \neg(\varphi \wedge \psi)$, atunci $\mathbf{m}(\varphi \vee \psi) = \mathbf{m}(\varphi) + \mathbf{m}(\psi)$.

Următorul rezultat este o variantă a Lemei 9.1.4:

Lema 9.2.2 *Fie* $\mathbf{m}$ *o probabilitate pe* D *şi* $\varphi, \psi \in D$. *Atunci*
(a) $\mathbf{m}(\neg\varphi) = 1 - \mathbf{m}(\varphi)$;
(b) Dacă $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi$, *atunci* $\mathbf{m}(\varphi) = \mathbf{m}(\psi)$.

Fie $\mathbf{m}$ o probabilitate pe D. Conform Lemei 9.2.2, putem defini o funcţie $\widetilde{\mathbf{m}}$: $D/_\sim \longrightarrow [0, 1]$ astfel: pentru orice $\varphi \in D$,

$$\widetilde{\mathbf{m}}\,(\widehat{\varphi}) \stackrel{def.}{=} \mathbf{m}(\varphi).$$

Atunci $\widetilde{\mathbf{m}}$ este o probabilitate pe algebra Booloe $D/_\sim$.

Propoziţia 9.2.3 *Orice probabilitate* $\mathbf{m} : D \longrightarrow [0, 1]$ *se poate extinde la o probabilitate* $\mu : E \longrightarrow [0, 1]$.

Dem. Conform Teoremei Horn-Tarski, probabilitatea $\widetilde{\mathbf{m}}$: $D/_\sim \longrightarrow [0, 1]$ se poate extinde la o probabilitate $\mu' : E/_\sim \longrightarrow [0, 1]$. Daca $p : E \longrightarrow E/_\sim$ este surjecţia canonică, atunci $\mu = \mu' \circ p$ este o probabilitate pe E şi $\mu\,|_D = \mathbf{m}$. □

O funcţie $f : E \longrightarrow L_2$ se numeşte *interpretare booleană* a lui L dacă pentru orice $\varphi, \psi \in E$, avem

$$f(\varphi\vee\psi) = f(\varphi)\vee f(\psi),\ f(\varphi\wedge\psi) = f(\varphi)\wedge f(\psi),\ f(\neg\varphi) = \neg f(\varphi),\ f(\varphi \rightarrow \psi) = f(\varphi) \rightarrow f(\psi).$$

Lema 9.2.4 *Fie* $T \subseteq E$ *şi* $h = \mathbf{1} : T \longrightarrow L_2$ *funcţia constantă* ($h(\varphi) = 1$, *pentru orice* $\varphi \in T$). *Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) T *este consistentă,*
(ii) Există o interpretare booleană $\widetilde{h}$: $E \longrightarrow L_2$ *a lui* L *astfel încât* $\widetilde{h}|_T = h$.

Observaţie 9.2.5 Lema 9.2.4 arată că o teorie consistentă poate fi gândită ca o interpretare booleană a lui L. Atunci noţiunea de probabilitate introdusă de Definiţia 9.2.1 este o variantă probabilistă a noţiunii de teorie consistentă.

Fie $\mathcal{M}$ o structură de ordinul I pentru limbalul L. Amintim că o interpretare a lui L in $\mathcal{M}$ poate fi considerată ca o funcţie $\|\cdot\|_{\mathcal{M}} : E(M) \longrightarrow L_2$ cu proprietăţile următoare:
- $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ duce operaţiile logice $\vee, \wedge, \neg, \rightarrow$ ale lui $E(M)$ în operaţiile algebrice corespunzătoare din L_2;
- pentru orice enunţ al lui $E(M)$ de forma $\exists x\varphi(x)$, avem

$$\|\exists x\varphi(x)\|_{\mathcal{M}} = \bigvee_{a\in M} \|\varphi(a)\|_{\mathcal{M}}.$$

Aceasta ne sugerează conceptul de *structură probabilistă în sensul lui Gaifman* [11]:

Definiţie 9.2.6 O *structură probabilistă* este o pereche $(U, \mathbf{m})$, unde U este o mulţime nevidă astfel încât $C \subseteq U$ şi $\mathbf{m} : E(U) \longrightarrow [0, 1]$ este o probabilitate ce satisface următoarea condiţie, numită *condiţia lui Gaifman*:

(G) Pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui $L(U)$,

$$\mathbf{m}(\exists x\varphi(x)) = \sup\{\mathbf{m}(\vee_{i=1}^{n}\varphi(a_i)) \mid a_1, \ldots, a_n \in U\}.$$

Lema 9.2.7 *Condiţia lui Gaifman (G) este echivalentă cu fiecare din următoarele trei proprietăţi:*
(G1) Pentru orice formulă $\varphi(x)$ a lui $L(U)$,

$$\mathbf{m}(\forall x\varphi(x)) = \inf\{\mathbf{m}(\wedge_{i=1}^{n}\varphi(a_i)) \mid a_1, \ldots, a_n \in U\}.$$

(G2) Pentru orice formulă $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$ a lui $L(U)$,

$$\mathbf{m}(\exists \vec{x}\varphi(\vec{x})) = \sup\{\mathbf{m}(\vee_{i=1}^{n}\varphi(\vec{a_i})) \mid \vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n} \in U^m\}.$$

(G3) Pentru orice formulă $\varphi(\vec{x}) = \varphi(x_1, \ldots, x_m)$ a lui $L(U)$,

$$\mathbf{m}(\forall \vec{x}\varphi(\vec{x})) = \inf\{\mathbf{m}(\wedge_{i=1}^{n}\varphi(\vec{a_i})) \mid \vec{a_1}, \ldots, \vec{a_n} \in U^m\}.$$

Dem. Vom demonstra numai că (G) $\Longrightarrow$ (G1):
Este cunoscut că $\vdash \forall x\varphi(x) \leftrightarrow \neg\exists x\neg\varphi(x)$. Aplicând Lema 9.2.2, rezultă:

$$\mathbf{m}(\forall x\varphi(x)) = \mathbf{m}(\neg\exists x\neg\varphi(x)) = 1 - \mathbf{m}(\exists x\neg\varphi(x)) =$$

$$= 1 - \sup\{\mathbf{m}(\vee_{i=1}^{n}\neg\varphi(a_i)) \mid a_1, \ldots, a_n \in U\} =$$
$$= \inf\{1 - \mathbf{m}(\vee_{i=1}^{n}\neg\varphi(a_i)) \mid a_1, \ldots, a_n \in U\} =$$
$$= \inf\{\mathbf{m}(\wedge_{i=1}^{n}\varphi(a_i)) \mid a_1, \ldots, a_n \in U\}.$$

$\square$

O interpretare $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ într-o structură de ordinul I $\mathcal{M}$ este determinată în mod unic de restricţia sa la mulţimea $E_0(M)$. Un rezultat similar se poate stabili şi în cazul structurilor probabiliste.

Teorema 9.2.8 *Considerăm o pereche* $(U, \mathbf{m})$*, unde* U *este o mulţime nevidă şi* $\mathbf{m} : E_0(U) \longrightarrow [0,1]$ *este o probabilitate. Atunci există o unică probabilitate* $\mathbf{m}' : E(U) \longrightarrow [0,1]$*, ce extinde pe* $\mathbf{m}$*, şi verifică condiţia lui Gaifman.*

Dem. Pentru orice $V \subseteq U$, notăm cu $\sum_n(V)$ (respectiv $\prod_n(V)$) mulţimea formulelor lui $L(V)$ în forma normală prenex cu cel mult n blocuri de cuantificatori astfel încât primul bloc este $\exists$ (respectiv $\forall$). Dacă $\varphi \in \sum(V)$, atunci $\neg\varphi$ este echivalentă cu o formulă din $\prod_n(V)$. Este cunoscut că orice formulă din $L(V)$ este logic echivalentă cu o formulă dintr-un $\sum_n(V)$ sau $\prod_n(V)$ (pentru un $n \geq 0$).

Vom demonstra teorema numai în cazul când limbajul $L(U)$ este numarabil.

• Vom demonstra mai întâi **unicitatea** lui $\mathbf{m}'$:
Fie $\mathbf{m_1'}, \mathbf{m_2'}$ două extensii ale lui $\mathbf{m}$ ce verifică condiţia (G). Vom demonstra că pentru orice $n \geq 0$, următoarele egalităţi sunt adevărate:

$$\mathbf{m_1'} \mid_{\sum_n(V)\cap E(U)} = \mathbf{m_2'} \mid_{\sum_n(V)\cap E(U)},$$
$$\mathbf{m_1'} \mid_{\prod_n(V)\cap E(U)} = \mathbf{m_2'} \mid_{\prod_n(V)\cap E(U)} .$$

Procedăm prin inducţie după n.
- Pentru $n = 0$, avem $\sum_0(V) = \prod_0(V) = E_0(V)$ şi $\mathbf{m_1'} \mid_{E_0(V)} = \mathbf{m_2'} \mid_{E_0(V)} = \mathbf{m}$.
- Vom arăta cum se face trecerea de la n la $n+1$. Fie $\varphi = \exists\vec{x}\psi(\vec{x}) \in \sum_{n+1}(V) \cap E(U)$, cu $\psi(\vec{x}) \in \prod_n(V)$ şi $\vec{x} = (x_1, \ldots, x_k)$. Ipoteza inducţiei ne spune că pentru orice $\vec{a_j} \in U^k$, $j = 1, \ldots, s$,

$$\mathbf{m_1'}(\vee_{j=1}^s \psi(\vec{a_j})) = \mathbf{m_1'}(\vee_{j=1}^s \psi(\vec{a_j})).$$

Atunci prin aplicarea condiţiei (G2), rezultă:

$$\mathbf{m_1'}(\varphi) = \sup\{\mathbf{m_1'}(\vee_{j=1}^s \psi(\vec{a_j})) \mid \vec{a_1}, \ldots, \vec{a_s} \in U^k\} =$$
$$= \sup\{\mathbf{m_2'}(\vee_{j=1}^s \psi(\vec{a_j})) \mid \vec{a_1}, \ldots, \vec{a_s} \in U^k\} = \mathbf{m_2'}(\varphi).$$

Mai sus am folosit faptul că o disjuncţie de formule din $\prod_n(V)$ este logic echivalentă cu o formulă din $\prod_n(V)$.

• Acum vom demonstra **existenţa** lui $\mathbf{m}'$:
Notăm cu $\mathcal{U}$ mulţimea structurilor de ordinul I ale lui L care au pe U ca univers. Pentru orice $\varphi \in E(U)$, notăm

$$M(\varphi) \stackrel{notaţie}{=} \{\mathcal{A} \in \mathcal{U} \mid \mathcal{A} \models \varphi\}.$$

Atunci pentru orice $\varphi, \psi \in E(U)$, avem:

$$M(\varphi \vee \psi) = M(\varphi) \cup M(\psi),\ M(\varphi \wedge \psi) = M(\varphi) \cap M(\psi),\ M(\neg\varphi) = \mathcal{U} \setminus M(\varphi).$$

Prin urmare, $\mathcal{B} = \{M(\varphi) \mid \varphi \in E_0(U)\}$ este o subalgebră a algebrei Boole $\mathcal{P}(\mathcal{U})$.

Familia $\mathcal{B} = \{M(\varphi)\}_{\varphi \in E_0(U)}$ formează o bază de deschişi ai unei topologii pe $\mathcal{U}$. Spaţiul topologic obţinut este homeomorf cu spaţiul Boole asociat algebrei Boole $E_0(U)/_\sim$. Mulţimile $M(\varphi)$, $\varphi \in E_0(U)$ sunt simultan închise şi deschise.

Funcţia $\mu : \mathcal{B} \longrightarrow [0,1]$, definită de $\mu(M(\varphi)) = \mathbf{m}(\varphi)$, pentru orice $\varphi \in E_0(U)$, este o probabilitate pe algebra Boole $\mathcal{B}$.

Vom arăta că μ este o probabilitate continuă pe $\mathcal{B}$. Considerăm în $\mathcal{B}$ un şir (X_n) astfel încât $X_n \downarrow \emptyset$. Mulţimile X_n fac parte din baza $\{M(\varphi) \mid \varphi \in E_0(U)\}$ a spaţiului $\mathcal{U}$, deci sunt simultan închise şi deschise. Din compacitatea lui $\mathcal{U}$ şi din $\bigcap_{i=1}^{\infty} X_i = \emptyset$ rezultă existenţa unui $n_0 \geq 1$ astfel încât $\bigcap_{i=1}^{n_0} X_i = \emptyset$, deci $X_n = \emptyset$ pentru orice $n \geq n_0$. Atunci $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$, deci μ este continuă.

Fie $\overline{\mathcal{B}}$ σ-algebra de părţi ale lui $\mathcal{U}$ generată de algebra Boole $\mathcal{B}$. Aplicând teorema lui Carathédory, rezultă existenţa unei σ-probabilităţi $\mu^* : \overline{\mathcal{B}} \longrightarrow [0,1]$, ce extinde pe μ.

Vom arăta că $M(\varphi) \in \overline{\mathcal{B}}$, pentru orice $\varphi \in E(U)$. Procedăm prin inducţie după complexitatea enunţului φ:
- dacă $\varphi \in E_0(U)$, atunci $M(\varphi) \in \mathcal{B} \subseteq \overline{\mathcal{B}}$.
- Presupunem că $\varphi = \varphi_1 \vee \varphi_2$ si $M(\varphi_1), M(\varphi_2) \in \overline{\mathcal{B}}$. Atunci $M(\varphi) = M(\varphi_1) \cup M(\varphi_2) \in \overline{\mathcal{B}}$.
- Cazul $\varphi = \neg\psi$ şi $M(\psi) \in \mathcal{B}$ este evident.
- Presupunem că $\varphi = \exists x \psi(x)$ şi $M(\psi(a)) \in \overline{\mathcal{B}}$, pentru orice $a \in U$. Ţinând cont că U este numărabil, rezultă

$$M(\varphi) = \cup_{a\in U} M(\psi(a)) \in \overline{\mathcal{B}}.$$

Pentru orice $\varphi \in E(U)$, vom defini

$$\mathbf{m}^*(\varphi) = \mu^*(M(\varphi)).$$

Atunci funcţia $\mathbf{m}^* : E(U) \longrightarrow [0,1]$ este o probabilitate ce extinde pe $\mathcal{M}$.

A ramas să mai arătăm că $\mathbf{m}^*$ satisface condiţia (G). Considerăm enunţul $\exists x \varphi(x)$ in $L(U)$. Atunci

$$M(\exists x \varphi(x)) = \cup_{a\in U} M(\varphi(a)).$$

Mulţimea $M(\exists x \varphi(x))$ este compactă în $\mathcal{U}$, deci există $a_1, \ldots, a_n \in U$ astfel încât

$$M(\exists x \varphi(x)) = \cup_{i=1}^{n} M(\varphi(a_i)).$$

Ultima egalitate implică:

$$\mathbf{m}^*(\exists x \varphi(x)) = \mu^*(M(\exists x \varphi(x))) = \mu^*(\cup_{i=1}^{n} M(\varphi(a_i))) =$$

$$= \mu^*(M(\vee_{i=1}^{n} \varphi(a_i)) = \mathbf{m}^*(\vee_{i=1}^{n} \varphi(a_i)).$$

De aici rezultă:

$$\mathbf{m}^*(\exists x \varphi(x)) = \sup\{\mathbf{m}^*(\vee_{i=1}^{n} \varphi(b_i)) \mid b_1, \ldots, b_n \in U\}.$$

□

Observaţie 9.2.9 Am văzut că orice probabiliate $\mu : D \longrightarrow [0,1]$ induce o probabilitate $\widetilde{\mu}$: $D/_\sim \longrightarrow [0,1]$. Funcţia $\mu \mapsto \widetilde{\mu}$ stabileşte o corespondenţă biunivoca între probabilităţile definite pe mulţimea de enunţuri D şi probabilităţile definite pe algebra Boole $D/_\sim$.

Pe baza Observaţiei 9.2.9, teoria modelelor probabiliste poate fi dezvoltată folosind numai probabilităţi definite pe algebra Boole.

9.2.2 Teorema de completitudine a lui Gaifman

Fie L un limbaj de ordinul I, C mulţimea constantelor sale, E mulţimea enunţurilor, E_0 mulţimea enunţurilor fără cuantificatori, etc.

Noţiunile de probabilitate $\mu : D \longrightarrow [0,1]$ şi de structură probabilistă $(U, \mathbf{m})$, introduse în secţiunea precedentă, reprezintă contrapartea probabilistă a noţiunilor de teorie a lui L şi de structură de ordinul I. In mod natural, se pune problema traducerii în limbaj probabilistic a altor concepte şi proprietăţi ale logicii predicatelor.

Să începem cu noţiunea de model al unei teorii. Fie $T \subseteq E$ o teorie a lui L şi $f : T \longrightarrow L_2$ funcţia $f(\varphi) = 1$ pentru orice $\varphi \in T$. Atunci o structură de ordinul I $\mathcal{M}$ este un model al lui T dacă şi numai dacă restricţia lui $\|\cdot\|_{\mathcal{M}}$ la T coincide cu f. Această observaţie conduce la următoarea definiţie.

Definiţie 9.2.10 Fie $\mu : D \longrightarrow [0,1]$ o probabilitate pe $D \subseteq E$. O structură probabilistă $(U, \mathbf{m})$ este un *model* al lui μ dacă $\mathbf{m}\mid_D = \mu$. In acest caz, vom scrie

$$(U, \mathbf{m}) \models \mu.$$

Teorema 9.2.11 *(Teorema de completitudine a lui Gaifman [11])*
Orice probabilitate $\mu : D \longrightarrow [0,1]$ admite un model.

Dem. Fie $C_0 = C$. Pentru orice enunţ $\varphi \in E$ de forma $\exists x\psi(x)$, vom considera o noua constantă a_φ, astfel încât, dacă $\varphi \neq \chi$, atunci $a_\varphi \neq a_\chi$. Notăm cu C_1 mulţimea acestor constante noi. Procedând la fel pentru limbajul $L(C_1)$, se obţine o nouă mulţime C_2, astfel încât $C_2 \cap C_0 = \emptyset$, $C_2 \cap C_1 = \emptyset$. Prin inducţie, se obţine un şir de mulţimi

$$C_0, C_1, \ldots, C_n, \ldots,$$

disjuncte două câte două. Notăm

$$U = \cup_{n=0}^{\infty} C_n.$$

In limbajul $L(U)$, luăm următoarea mulţime de enunţuri

$$E' = \{\exists x\psi(x) \to \psi(a_\varphi) \mid \varphi = \exists x\psi(x) \in E(U)\}.$$

Considerăm algebra Lindenbaum-Tarski $B = E(U)/_\sim$ şi subalgebra B' a lui B generată de mulţimea $X = \{\widehat{\sigma} \mid \sigma \in D \cup E'\}$.

Teorema 9.2.11 va fi demonstrată prin însumarea următorilor paşi.

(1) Elementele lui B' au forma $(\widehat{\sigma_1} \wedge \widehat{\psi_1}) \vee \ldots \vee (\widehat{\sigma_n} \wedge \widehat{\psi_n})$, unde, pentru orice $i = 1, \ldots, n$, $\sigma_i \in D$ şi $\psi_i = \wedge_{j \in J} \psi_{ij}$, astfel încât fiecare enunţ ψ_{ij} este în E' sau este negaţia unui element al lui E'.

Fie F filtrul lui B generat de mulţimea $\{\widehat{\varphi} \mid \varphi \in E'\}$.

(2) Dacă $\sigma \in E$ şi $\widehat{\sigma} \in F$, atunci $\widehat{\sigma} = 1$.
Din $\widehat{\sigma} \in F$, rezultă existenţa enunţurilor $\tau_1, \ldots, \tau_n \in E'$ astfel încât $\wedge_{i=1}^n \widehat{\tau_i} \leq \widehat{\sigma}$. Atunci există numerele naturale $k_1, \ldots, k_n \geq 1$, constantele $a_1 \in C_{k_1}, \ldots, a_n \in C_{k_n}$ şi enunţurile $\varphi_i = \exists x_i \psi(x_i)$, $i = 1, \ldots, n$ astfel încât $\tau_i = \exists x_i \psi(x_i) \rightarrow \psi_i(a_i)$ şi $a_i = a_{\varphi_i}$, pentru orice $i = 1, \ldots, n$.

Putem presupune $k_i \leq k_n$, $i = 1, \ldots, n$ (eventual printr-o renumerotare), deci constanta a_n nu apare în σ şi nici în $\tau_1, \ldots, \tau_{n-1}$.

Din inegalitatea $\wedge_{i=1}^n \widehat{\tau_i} \leq \widehat{\sigma}$, se obţine $\vdash \wedge_{i=1}^n \tau_i \rightarrow \sigma$, deci $\{\tau_1, \ldots, \tau_n\} \vdash \sigma$. Rezultă că $\{\neg\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_n\}$ este o mulţime inconsistentă, deci $\Delta \vdash \neg\tau_n$, unde $\Delta = \{\neg\sigma, \tau_1, \ldots, \tau_{n-1}\}$.

Atunci $\Delta \vdash \neg(\exists x_n \psi_n(x_n) \rightarrow \psi_n(a_n)$, de unde rezultă $\Delta \vdash \exists x_n \psi_n(x_n) \wedge \neg\psi_n(a_n)$, deci $\Delta \vdash \exists x_n \psi_n(x_n)$ şi $\Delta \vdash \neg\psi_n(a_n)$. Cum constanta a_n nu apare în enunţurile teoriei Δ, din $\Delta \vdash \neg\psi_n(a_n)$ rezultă $\Delta \vdash \forall x_n \neg\psi_n(x_n)$. Prin urmare, $\Delta \vdash \neg\exists x_n \psi_n(x_n)$, ceea ce arată că Δ este inconsistentă. Procedând analog din aproape în aproape, în final rezultă că $\{\neg\sigma\}$ este inconsistentă, deci $\vdash \sigma$. In concluzie, $\widehat{\sigma} = 1$.

(3) Pentru orice $\sigma_1, \sigma_2 \in E$, $\widehat{\sigma_1}/_F = \widehat{\sigma_2}/_F$ dacă şi numai dacă $\widehat{\sigma_1} = \widehat{\sigma_2}$.
Afirmatia (3) rezultă astfel:
$\widehat{\sigma_1}/_F = \widehat{\sigma_2}/_F \Longleftrightarrow (\widehat{\sigma_1} \leftrightarrow \widehat{\sigma_2}) \in F \Longleftrightarrow \widehat{\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2} \in F \Longleftrightarrow \widehat{\sigma_1 \leftrightarrow \sigma_2} = 1 \Longleftrightarrow \widehat{\sigma_1} = \widehat{\sigma_2}$, conform (2).

(4) Dacă $\sigma \in E'$, atunci $\widehat{\sigma}/_F = 1/_F$ (în algebra Boole $B/_F$).
Intr-adevăr, dacă $\sigma \in E'$, atunci $\widehat{\sigma} \in F$, deci $\widehat{\sigma}/_F = 1/_F$.

Aplicând (1) şi (4), rezultă că pentru orice $\widehat{\varphi} \in B'$ există un enunţ $\psi \in D$ astfel încât $\widehat{\sigma}/_F = \widehat{\psi}/_F$.

Definim funcţia $\mu' : B'/_F \longrightarrow [0,1]$ prin $\mu'(\widehat{\varphi}/_F) = \mu(\varphi)$, unde $\widehat{\varphi} \in B'$ şi $\psi \in D$ cu $\widehat{\varphi}/_F = \widehat{\psi}/_F$.

Să arătăm că funcţia μ' este bine definită. Dacă $\widehat{\varphi_i}/_F = \widehat{\psi_i}/_F$ cu $\widehat{\varphi_i} \in B'$ şi $\psi_i \in D$ pentru $i = 1, 2$, atunci

$$\widehat{\varphi_1}/_F = \widehat{\varphi_2}/_F \Longrightarrow \widehat{\psi_1}/_F = \widehat{\psi_2}/_F \Longrightarrow \widehat{\psi_1} = \widehat{\psi_2} \Longrightarrow \vdash \psi_1 \leftrightarrow \psi_2 \Longrightarrow \mu(\psi_1) = \mu(\psi_2),$$

conform (3) şi conform Lemei 9.2.2(b).

Se observă că mu' este o probabilitate pe subalgebra B' a lui B. Conform Teoremei Horn-Tarski, μ' se poate extinde la o probabilitate $\mu^* : B/_F \longrightarrow [0,1]$.

Definim funcţia $\mathbf{m}^* : E(U) \longrightarrow [0,1]$ punând, pentru orice $\psi \in E(U)$,

$$\mathbf{m}^*(\psi) = \mu^*(\widehat{\psi}/_F).$$

Este evident că $\mathbf{m}^*$ este o probabilitate pe $E(U)$.

Arătăm că $\mathbf{m}^*$ verifică condiţia (G). Fie $\varphi = \exists x\psi(x) \in E(U)$ şi $\tau = \exists x\psi(x) \rightarrow \psi(a_\varphi) \in E'$. Atunci

$$\mathbf{m}^*(\tau) = \mathbf{m}^*(\exists x\psi(x) \rightarrow \psi(a_\varphi)) = \mu^*(\widehat{\tau}/_F) = \mu^*(1/_F) = 1,$$

de unde rezultă

$$\mathbf{m}^*(\exists x\psi(x)) \leq \mathbf{m}^*(\psi(a_\varphi)).$$

Atunci

$$\mathbf{m}^*(\exists x\psi(x)) = \mathbf{m}^*(\psi(a_\varphi)) = \sup\{\mathbf{m}^*(\vee_{i=1}^n \psi(a_i)) \mid a_1, \ldots, s_n \in U\},$$

deci $\mathbf{m}^*$ satisface condiţia lui Gaifman.

Dacă $\varphi \in D$, atunci $\mathbf{m}^*(\varphi) = \mu^*(\widehat{\varphi}/_D) = \mu'(\widehat{\varphi}/_F) = \mu(\varphi)$. In concluzie, $(U, \mathbf{m}^*)$ este un model al lui μ. □

9.2.3 Către o teorie a modelelor probabiliste

In această subsecţiune, vom prezenta câteva elemente ale teoriei modelelor probabiliste. Noţiuni şi rezultate ale teoriei modelelor vor fi traduse în noţiuni şi rezultate ale teoriei modelelor probabiliste.

Fie L un limbaj de ordinul I şi C mulţimea constantelor sale. Dacă U este o mulţime de constante astfel încât $C \subseteq U$, atunci $L(U)$ va fi limbajul obţinut din L prin adăugarea constantelor din $U \setminus C$. Vom nota cu E (respectiv $E(U)$) mulţimea enunţurilor lui L (respectiv $L(U)$) şi cu B (respectiv $B(U)$) algebra Lindenbaum-Tarski $E/_\sim$ (respectiv $E(U)/_\sim$). Clasa de echivalenţă a unui enunţ φ va fi notată cu $[\varphi]$.

Pentru a evita unele complicaţii de scriere, în această secţiune vom lucra numai cu probabilităţi pe algebre Boole (conform Observaţiei 9.2.9, acest lucru este posibil). Atunci o probabilitate pe L este o probabilitate μ pe o subalgebră a lui B. Vom nota cu $dom(\mu)$ domeniul de definiţie al lui μ. In contextul precizat, o structură probabilistă este o pereche (U, u), unde $C \subseteq U$ si u este o probabilitate pe algebra Boole $B(U)$ ce satisface condiţia lui Gaifman:

(G) Pentru orice enunţ $\exists x\varphi(x)$ al lui $L(U)$,

$$u([\exists x\varphi(x)]) = \sup\{u(\vee_{i=1}^n [\varphi(a_i)]) \mid a_1, \ldots, a_n \in U\}.$$

Condiţiile (G1) - (G3) din Lema 9.2.7 se rescriu într-un mod evident.

Dacă μ este o probabilitate pe L şi (U, u) este o structură probabilistă, atunci (U, u) este un model al lui μ dacă $u \mid_{dom(\mu)} = \mu$. In acest caz, vom nota

$$(U, u) \models \mu.$$

Fie (U, u) o structură probabilistă, φ un enunţ al lui $L(U)$ şi $r \in [0,1]$. Vom spune că (U, u) *satisface* perechea (φ, r) şi notăm

$$(U, u) \models (\varphi, r)$$

dacă $u([\varphi]) = r$. O pereche (φ, r), cu $\varphi \in E$ şi $r \in [0,1]$, este *consistentă cu o probabilitate* μ pe L dacă există un model al lui μ ce satisface (φ, r).

Lema 9.2.12 *Presupunem că μ este o probabilitate pe L, $\varphi \in E$ şi $r \in [0,1]$. Atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) (φ, r) este consistentă cu μ;
(ii) $\mu_i([\varphi]) \leq r \leq \mu_e([\varphi])$.

Dem.
(i) $\Longrightarrow$ (ii): Presupunem că există un model (U, u) al lui μ astfel încât $(U, u) \models (\varphi, r)$. Atunci pentru orice $\psi \in E$, din $[\psi] \in dom(\mu)$ şi $\vdash \psi \to \varphi$ rezultă $\mu([\psi]) = u([\psi]) \leq u([\varphi]) = r$. Aceasta arată că $\mu_i([\varphi]) \leq r$ şi, în mod analog, se arată că $r \leq \mu_e([\varphi])$.
(ii) $\Longrightarrow$ (i): Conform Propoziţiei 9.1.40, există o probabilitate η pe L cu proprietatea că η extinde pe μ, $[\varphi] \in dom(\eta)$ şi $\eta([\varphi]) = r$. Teorema de completitudine a lui Gaifman asigură existenţa unui model $U, u)$ al lui η, deci $u([\varphi]) = \eta([\varphi]) = r$. Prin urmare, $(U, u) \models (\varphi, r)$. $\square$

Fie (U, u) şi (V, v) două structuri probabiliste astfel încât $U \subseteq V$. Spunem că (U, u) este o *substructură* a lui (V, v) şi notăm

$$(U, u) \subseteq (V, v),$$

dacă pentru orice $\varphi \in E_0(U)$ avem $u([\varphi]) = v([\varphi])$. (U, u) este o *substructură elementară* a lui (V, v) dacă pentru orice $\varphi \in E(U)$ avem $u([\varphi]) = v([\varphi])$; în acest caz, notăm

$$(U, u) \prec (V, v).$$

Lema 9.2.13 *Fie (U, u) o substructură a lui (V, v). Atunci:*
(i) pentru orice enunţ existenţial φ al lui $L(U)$, $u([\varphi]) \leq v([\varphi])$;
(ii) pentru orice enunţ universal φ al lui $L(U)$, $v([\varphi]) \leq u([\varphi])$.

Dem. Se aplică condiţiile (G) şi (G1). $\square$

Fie $\lambda \geq 1$ un ordinal. Considerăm o familie $(U_\alpha, u_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ de structuri probabiliste indexată de ordinalii $\alpha < \lambda$. Spunem că $(U_\alpha, u_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ este:
- un *lanţ* de structuri probabiliste, dacă $(U_\alpha, u_\alpha) \subseteq (U_\beta, u_\beta)$, pentru orice ordinali $\alpha < \beta < \lambda$,
- un *lanţ elementar* de structuri probabiliste, dacă $(U_\alpha, u_\alpha) \prec (U_\beta, u_\beta)$, pentru orice ordinali $\alpha < \beta < \lambda$.

Dacă U este o mulţime de constante cu $C \subseteq U$, atunci vom nota

$$B_0(U) = \{[\varphi] \mid \varphi \in E_0(U)\}.$$

$B_0(U)$ este o subalgebră a lui $B(U)$.

Fie $(U_\alpha, u_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ un lanţ de structuri probabiliste şi

$$U = \cup_{\alpha<\lambda} U_\alpha. \tag{9.4}$$

Considerăm funcţia $\mathbf{m} : B_0(U) \longrightarrow [0,1]$ definită prin

$$\mathbf{m}([\varphi]) = u_\alpha([\varphi]),$$

dacă $\varphi \in E_0(U) \cap E(U_\alpha) = E_0(U_\alpha)$, cu $\alpha < \lambda$. $\mathbf{m}$ este unica probabilitate pe $B_0(U)$ cu proprietatea că $\mathbf{m} \mid_{B_0(U_\alpha)} = u_\alpha \mid_{B_0(U_\alpha)}$, pentru orice $\alpha < \lambda$. Conform Teoremei 9.2.8, există o unică probabilitate $\mathbf{m}^*$ pe $B(U)$ ce satisface condiţia lui Gaifman şi extinde pe $\mathbf{m}$. Notăm $u = \mathbf{m}^*$. Atunci u este unica probabilitate pe $B(U)$ ce satisface condiţia lui Gaifman şi $u \mid_{B(U_\alpha)} = u_\alpha$, pentru orice $\alpha < \lambda$. Structura probabilistă (U, u) se numeşte *reuniunea* lanţului $(U_\alpha, u_\alpha)_{\alpha<\lambda}$.

Propoziţia 9.2.14 *Fie $(U_\alpha, u_\alpha)_{\alpha<\lambda}$ un lanţ elementar de structuri probabiliste şi (U, u) reuniunea sa. Atunci pentru orice ordinal $\alpha < \lambda$,*

$$(U_\alpha, u_\alpha) \prec (U, u).$$

Dem. Este suficient să demonstrăm că pentru orice ordinal $\alpha < \lambda$ şi pentru orice număr natural $m \geq 1$ sunt adevărate următoarele proprietăţi:
(a) Dacă $\varphi \in \sum_m(U_\alpha) \cap E(U_\alpha)$, atunci $u([\varphi]) = u_\alpha([\varphi])$;
(b) Dacă $\varphi \in \prod_m(U_\alpha) \cap E(U_\alpha)$, atunci $u([\varphi]) = u_\alpha([\varphi])$.

Procedăm prin inducţie după m:
- Pentru $m = 0$, avem $\sum_0(U_\alpha) = \prod_0(U_\alpha) = E_0(U_\alpha)$ şi proprietăţile (a), (b) rezultă chiar din definiţia reuniunii unui lanţ de structuri probabiliste.
- Să arătăm cum se realizează pasul $m \to m+1$. Presupunem că $\varphi \in \sum_{m+1}(U_\alpha) \cap E(U_\alpha)$, deci $\varphi = \exists x_1 \ldots \exists x_k \psi(x_1, \ldots, x_k)$, cu $\psi(x_1, \ldots, x_k) \in \prod_m(U_\alpha)$. Pentru simplitatea argumentaţiei, vom trata numai cazul $k = 1$, deci $\varphi = \exists x \psi(x)$, cu $\psi(x) \in \prod_m(U_\alpha)$. u şi u_α satisfac condiţia lui Gaifman, deci

$$u([\varphi]) = \sup\{u(\vee_{i=1}^n [\psi(a_i)]) \mid a_1, \ldots, a_n \in U\},$$

$$u_\alpha([\varphi]) = \sup\{u_\alpha(\vee_{i=1}^n [\psi(a_i)]) \mid a_1, \ldots, a_n \in U_\alpha\}.$$

Pentru orice $a_1, \ldots, a_n \in U_\alpha$, enunţul $\vee_{i=1}^n [\psi(a_i)])$ este logic echivalent cu un enunţ din $\prod_m(U_\alpha) \cap E(U_\alpha)$, deci, conform ipotezei inducţiei,

$$u_\alpha(\vee_{i=1}^n [\psi(a_i)]) = u(\vee_{i=1}^n [\psi(a_i)]).$$

Deoarece $U_\alpha \subseteq U$, se obţine inegalitatea

$$u_\alpha([\varphi]) \leq u([\varphi]).$$

Fie $\varepsilon > 0$. Conform definiţiei operaţiei sup, există $a_1, \ldots, a_n \in U$ astfel încât

$$u([\varphi]) \leq u(\vee_{i=1}^{n}[\psi(a_i)]) + \varepsilon.$$

Insă, conform (9.4), există un ordinal β cu proprietatea că $\alpha \leq \beta < \lambda$ şi $a_1, \ldots, a_n \in U_\beta$. Din ipoteza inducţiei, rezultă

$$(U_\alpha, u_\alpha) \prec (U_\beta, u_\beta),$$

deci

$$u([\varphi]) \leq u(\vee_{i=1}^{n}[\psi(a_i)]) + \varepsilon = u_\beta(\vee_{i=1}^{n}[\psi(a_i)]) + \varepsilon \leq u_\beta([\varphi]) + \varepsilon = u_\alpha([\varphi]) + \varepsilon.$$

Cum ε a fost arbitrar, $u([\varphi]) \leq u_\alpha([\varphi])$, deci $u([\varphi]) = u_\alpha([\varphi])$ şi demonstraţia lui (a) este terminată.

Cazul (b) se tratează în mod analog. □

Fie (U, u) o substructură a lui (V, v). Spunem că (V, v) este o *extensie existenţială* a lui (U, u) şi notăm

$$(U, u) \prec_\forall (V, v)$$

dacă $u([\varphi]) = v([\varphi])$ pentru orice enunţ existenţial φ al lui $L(U)$. Se observă că (V, v) este o extensie existenţială a lui (U, u) dacă şi numai dacă $u([\varphi]) = v([\varphi])$ pentru orice enunţ universal φ al lui $L(U)$.

Un *enunţ bazic* este un enunţ atomic sau negaţia unui enunţ atomic. Vom nota cu $D(U)$ mulţimea enunţurilor bazice ale lui $L(U)$.

Propoziţia 9.2.15 *Dacă* $(U, u) \subseteq (V, v)$*, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) $(U, u) \prec_\forall (V, v)$*;*
(ii) Există o extensie (W, w) *a lui* (V, v) *astfel încât* $(U, u) \prec (W, w)$.

Dem.

(i) $\Longrightarrow$ (ii): Presupunem că $(U, u) \prec_\forall (V, v)$. Vom demonstra că există o probabilitate η pe $L(V)$ astfel încât:
(a) $B(U) \subseteq \{[\varphi] \mid \varphi \in D(V)\} \subseteq dom(\eta)$;
(b) η extinde pe u;
(c) $\eta([\varphi]) = v([\varphi])$, pentru orice $\varphi \in D(V)$.

Fie $\varphi \in E(U)$, $a_1, \ldots, a_n \in V \setminus U$ şi $\psi(a_1, \ldots, a_n) \in D(V)$ astfel încât $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi(a_1, \ldots, a_n)$. Rezultă $\vdash \varphi \leftrightarrow \forall x_1 \ldots \forall x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)$. Cum $\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)$ este un enunţ universal în $L(U)$, au loc următoarele egalităţi:

$$u([\varphi]) = u([\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)]) = v([\forall x_1 \ldots \forall x_n \psi(x_1, \ldots, x_n)]) = u([\psi(a_1, \ldots, a_n)]).$$

Considerăm un enunţ $\varphi \in D(V)$ astfel încât $[\varphi] \notin B(U)$. Vom demonstra inegalităţile următoare:

$$u_i([\varphi]) \leq v([\varphi]) \leq u_e([\varphi]). \tag{9.5}$$

Enunţul $\varphi \in D(V)$ este de forma $\varphi(a_1, \dots, a_n)$, cu $a_1, \dots, a_n \in V \setminus U$. Fie $\psi \in E(U)$ astfel încât $\vdash \psi \to \varphi(a_1, \dots, a_n)$. Rezultă $\vdash \psi \to \forall x_1 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n)$ şi $\vdash \forall x_1 \dots \forall x_n \varphi(x_1, \dots, x_n) \leftrightarrow \varphi(a_1, \dots, a_n)$, deci

$$u([\varphi]) \leq u([\forall x_1 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n)]) = v([\forall x_1 \dots \forall x_n \psi(x_1, \dots, x_n)]) = v([\varphi]).$$

Rezultă prima din inegalităţile (9.5); a doua se demonstrează în mod analog.

Conform Propoziţiei 9.1.40, există o probabilitate μ pe subalgebra $B(U)[[z]]$ generată de $B(U) \cup \{[z]\}$ astfel încât μ extinde pe u şi $u([\varphi]) = v([\varphi])$.

Folosind consideraţiile precedente, printr-un proces de inducţie transfinită, se obţine construcţia unei probabilităţi ce satisface condiţiile (a) - (c).

Aplicând teorema de completitudine a lui Gaifman, rezultă existenţa unei structuri probabiliste (W, w) cu proprietăţile din (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i): Evident. $\square$

Considerăm o structură probabilistă (U, u), un enunţ $\varphi \in E(U)$ şi un număr real $r \in [0, 1]$. Definim

$$(U, u) \models^* (\varphi, r) \stackrel{def.}{\Longleftrightarrow} u([\varphi]) \geq r,$$

$$\mu_\forall \stackrel{def.}{=} \{(\psi, \mu_i([\psi])) \mid \psi \text{ este un enunţ universal în } L\}.$$

Teorema 9.2.16 *Fie μ o probabilitate pe L şi (U, u) o structură probabilistă. Atunci (U, u) poate fi scufundată într-un model (V, v) al lui μ dacă şi numai dacă $(U, u) \models^* \mu_\forall$.*

Dem. Presupunem $(U, u) \subseteq (V, v)$ şi $(V, v) \models \mu$. Fie φ un enunţ universal în L. Pentru orice enunţ ψ cu proprietatea că $[\psi] \in dom(\mu)$ si $\vdash \psi \to \varphi$, avem

$$\mu([\psi]) = v([\psi]) \leq u([\psi]) \leq u([\varphi]).$$

Rezultă $\mu_i([\varphi]) \leq u([\varphi])$, deci $(U, u) \models^* \mu_\forall$.

Reciproc, presupunem că $(U, u) \models^* \mu_\forall$. Fie $[\varphi] \in dom(\mu)$ şi $\psi \in D(U)$ astfel încât $\vdash \psi \leftrightarrow \varphi$. Vom demonstra că

$$\mu([\varphi]) = u([\psi]). \tag{9.6}$$

Fie $\vec{a} = (a_1, \dots, a_n)$ vectorul constantelor din $U \setminus C$ ce apar în ψ. Din $\vdash \varphi \leftrightarrow \psi(\vec{a})$, rezultă $\vdash \neg\varphi \leftrightarrow \neg\psi(\vec{a})$, deci $\vdash \varphi \leftrightarrow \forall \vec{x} \psi(\vec{x})$ şi $\vdash \neg\varphi \leftrightarrow \forall \vec{x} \neg\psi(\vec{x})$.

Insă $\forall \vec{x} \psi(\vec{x})$ este un enunţ universal, deci

$$(U, u) \models^* (\forall \vec{x} \psi(\vec{x}), \mu_i([\forall \vec{x} \psi(\vec{x})])),$$

ceea ce se mai scrie

$$u([\forall\vec{x}\psi(\vec{x})]) \geq \mu_i([\forall\vec{x}\psi(\vec{x})]).$$

Din condiţia (G1), se obţine

$$u([\psi(\vec{a})]) \geq u([\forall\vec{x}\psi(\vec{x})]),$$

deci

$$u([\psi(\vec{a})]) \geq \mu_i([\forall\vec{x}\psi(\vec{x})]) = \mu_i([\varphi]).$$

Analog, din

$$(U, u) \models^* (\forall\vec{x}\neg\psi(\vec{x}), \mu_i([\forall\vec{x}\neg\psi(\vec{x})])),$$

rezultă

$$u([\neg\psi(\vec{a})]) \geq \mu_i([\neg\psi]).$$

Se ştie că $\mu_i([\neg\varphi]) + \mu_e([\varphi]) = 1$, deci $1 - u([\psi(\vec{a})]) \geq 1 - \mu_e([\varphi])$.

Am stabilit inegalitatea:

$$\mu_i([\varphi]) \leq u([\psi(\vec{a})]) \leq \mu_e([\varphi]).$$

Dar $[\varphi] \in dom(\mu)$, deci

$$\mu_i([\varphi]) = \mu([\varphi]) = \mu_e([\varphi]),$$

deci

$$\mu([\varphi]) = u([\psi]).$$

Fie acum $\varphi \in D(U)$ astfel încât $[\varphi] \notin dom(\mu)$. Vom demonstra că μ poate fi extinsă la o probabilitate η astfel încât $[\varphi] \in dom(\eta)$ şi $\eta([\varphi]) = u([\varphi])$. Conform Propoziţiei 9.1.40, este suficient să arătăm că

$$\mu_i([\varphi]) \leq u([\varphi]) \leq \mu_e([\varphi]). \tag{9.7}$$

Dacă $\varphi = \varphi(\vec{a})$, cu $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ din $U \setminus C$, atunci $\varphi(\vec{a}), \neg\varphi(\vec{a}) \in D(U)$ şi $\vdash \varphi(\vec{a}) \leftrightarrow \forall\vec{x}\varphi(\vec{x})$, $\vdash \neg\varphi(\vec{a}) \leftrightarrow \forall\vec{x}\neg\varphi(\vec{x})$.

Observăm că

$$(U, u) \models^* (\forall\vec{x}\varphi(\vec{x}), \mu_i([\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})])),$$

deci

$$u([\varphi]) = u([\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})]) \geq \mu_i([\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})]) = \mu_i([\varphi]).$$

Analog, avem $u([\neg\varphi]) \geq \mu_i([\neg\varphi])$, deci $u([\varphi]) \leq \mu_e([\varphi])$.

Folosind cele demonstrate mai sus, prin inducţie transfinită, putem defini o probabilitate ε pe $L(U)$ astfel încât:

· $dom(\mu) \cup \{[\varphi] \mid \varphi \in D(U)\} \subseteq dom(\varepsilon)$;

· ε extinde pe μ;

· $\varepsilon([\varphi]) = u([\varphi])$, pentru orice $\varphi \in D(U)$.

In final, aplicând Teorema de completitudine a lui Gaifman, găsim un model (V, v) al lui ε, deci $(V, v) \models \mu$ si $(U, u) \subseteq (V, v)$. □

O probabilitate μ pe L este *păstrată* de substructurile probabiliste dacă $U, u) \subseteq (V, v)$ si $V, v) \models \mu$ implică $(U, u) \models \mu$.

Corolar 9.2.17 *Fie μ o probabilitate pe L. Următoarele afirmaţii sunt echivalente:*
(i) μ este păstrată de substructurile probabiliste;
(ii) Pentru orice structură probabilistă (U, u), $(U, u) \models^* \mu_\forall$ implică $(U, u) \models \mu$.

Fie (U, u) si (V, v) două structuri probabiliste. Spunem că (U, u) şi (V, v) sunt *echivalente elementar* dacă $u \mid_B = v \mid_B$. In acest caz, vom nota

$$(U, u) \equiv (V, v).$$

Propoziţia 9.2.18 *Dacă $(U, u) \equiv (V, v)$, atunci există o structură probabilistă (W, w) astfel încât $(U, u) \prec (W, w)$ şi $(V, v) \prec (W, w)$.*

Dem. Prin definiţia noţiunii de structură probabilistă, $C \subseteq U$ şi $C \subseteq V$. Putem presupune $U \cap V = C$. $B(U)$ şi $B(V)$ sunt subalgebre ale lui $B(U \cup V)$.

Considerăm $\varphi(\vec{a}) \in E(U)$, $\psi(\vec{b}) \in E(V)$, cu $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ în $U \setminus C$ şi $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_m)$ în $V \setminus C$. Presupunem că $\vdash \varphi(\vec{a}) \leftrightarrow \psi(\vec{b})$ în $L(U \cup V)$. Se observă că $\vdash \varphi(\vec{a}) \leftrightarrow \forall\vec{x}\varphi(\vec{x})$ în $L(U)$ şi $\vdash \psi(\vec{b}) \leftrightarrow \forall\vec{y}\psi(\vec{y})$ in $L(V)$, deci
$\vdash \forall\vec{x}\varphi(\vec{x}) \leftrightarrow \forall\vec{y}\psi(\vec{y})$ în $L(U \cup V)$.
Insă, $\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})$ şi $\forall\vec{y}\psi(\vec{y})$ sunt enunţuri în L, deci $\vdash \forall\vec{y}\psi(\vec{y}) \leftrightarrow \forall\vec{y}\psi(\vec{y})$ in L.
Deoarece $(U, u) \equiv (V, v)$, rezultă

$$u([\varphi(\vec{a})]) = u([\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})]) = v([\forall\vec{y}\psi(\vec{y})]) = v([\psi(\vec{b})]).$$

Fie $[\varphi] \notin B(U)$, cu $\varphi = \varphi(\vec{a})$, unde $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ este format cu elemente din $U \setminus C$. Vom arăta că există o probabilitate μ pe $L(U \cup V)$ astfel încât $B(U) \cup \{[\varphi]\} \subseteq dom(\mu) \subseteq B(U \cup V)$.

Conform Propoziţiei 9.1.40, este suficient să stabilim următoarea inegalitate în algebra Boole $B(U \cup V)$:

$$u_i([\varphi]) \leq v([\varphi]) \leq u_e([\varphi]). \tag{9.8}$$

Fie $\vdash \psi \to \varphi(\vec{a})$ in $L(U)$, cu $\psi \in E(U)$. Deoarece $\vdash \varphi(\vec{a}) \leftrightarrow \forall\vec{x}\varphi(\vec{x})$ si $\forall\vec{x}\varphi(\vec{x}) \in E$, avem

$$u([\psi]) \leq u([\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})]) = v([\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})]) = v([\varphi]),$$

de unde rezultă $u_i([\varphi]) \leq v([\varphi])$.

Inegalitatea a doua din (9.8) se demonstrează analog.

Folosind consideraţiile de mai sus, prin inducţie transfinită se construieşte o probabilitate μ' pe $L(U \cup V)$ astfel încât următoarele proprietăţi sunt îndeplinite:
$\cdot$ $B(U) \cup B(V) \subseteq dom(\mu') \subseteq B(U \cup V)$,

· $\mu' \mid_{B(U)} = u$ si $\mu' \mid_{B(V)} = v$.
Aplicând Teorema de completitudine a lui Gaifman, se obţine o structură probabilistă (W, w) astfel încât $(U, u) \prec (W, w)$ şi $(V, v) \prec (W, w)$.

Fie L' o expansiune a limbajului L. Atunci $B(L)$ este o subalgebră a lui $B(L')$.
Dacă $(U', \mathbf{m}')$ este o structură probabilistă pentru limbajul L', atunci notăm

$$(U', \mathbf{m}')\flat_L \overset{notaţie}{=} (U', \mathbf{m}' \mid_{B(U)}).$$

$(U', \mathbf{m}')\flat_L$ este o structură probabilistă pentru limbajul L.

Considerăm trei limbaje de ordinul I: L, L_1, L_2 cu $L = L_1 \cap L_2$. Dacă C, C_1, C_2 sunt mulţimile de constante ale celor trei limbaje, atunci $C = C_1 \cap C_2$.

Vom nota cu $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ algebrele Lindenbaum-Tarski ale limbajelor L, L_1, L_2 respectiv. Dacă U este o mulţime astfel încât C, C_1, $C_2 \subseteq U$, atunci $B(U)$, $B_1(U)$, $B_2(U)$ vor fi algebrele Lindenbaum-Tarski corespunzătoare limbajelor $L(U)$, $L_1(U)$, $L_2(U)$, iar $\mathcal{B}_1^0$, $\mathcal{B}_2^0$ vor fi subalgebrele lui $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$, formate din clasele de echivalenţă ale enunţurilor fără cuantificatori din L_1, L_2 respectiv.

Teorema 9.2.19 *Fie μ, μ_1, μ_2 trei probabilităţi pe limbajele L, L_1, L_2 respectiv, astfel încât $\mu_i \mid_{dom(\mu_i) \cap B} = \mu$, pentru $i = 1, 2$. Atunci există o structură probabilistă $(A, \mathbf{m})$ pentru limbajul $L_1 \cup L_2$ astfel încât, pentru $i = 1, 2$,*

$$(A, \mathbf{m})\flat_{L_i} = \mu_i.$$

Dem. Conform Teoremei de completitudine a lui Gaifman, există două structuri probabiliste (U_0, u_0) şi (V_0, v_0), pentru L_1 şi L_2 respectiv, astfel încât $(U_0, u_0) \models \mu_1$ şi $(V_0, v_0) \models \mu_2$. De aici rezultă

$$(U_0, u_0)\flat_L \equiv (V_0, v_0)\flat_L.$$

Vom arăta că există o probabilitate μ' pe $L(U \cup V)$ astfel încât următoarele două condiţii sunt verificate:
· $B(U_0) \cup B_2(V_0) \subseteq dom(\mu') \subseteq B_2(U_0 \cup V_0)$,
· $\mu' \mid_{B(U_0)} = v_0$ şi $\mu' \mid_{B_2(V_0)} = v_1$.

Intâi, vom demonstra:

$$u_0 \mid_{B(U_0) \cap B_2(V)} = v_0 \mid_{B(U_0) \cap B_2(V)} . \tag{9.9}$$

Considerăm enunţurile $\alpha(\vec{a})$ şi $\beta(\vec{b})$ astfel încât :
· $\alpha(\vec{a})$ este un enunţ în $L(U_0)$ şi $\vec{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ este un vector cu elemente în $U_0 \setminus C$;
· $\beta(\vec{b})$ este un enunţ în $L_2(V_0)$ şi $\vec{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ este un vector cu elemente în $V_0 \setminus C$;

$\cdot \vdash \alpha(\vec{a}) \leftrightarrow \beta(\vec{b})$ în $L_2(U_0 \cup V_0)$.

Observăm că $\vdash \alpha(\vec{a}) \leftrightarrow \forall\vec{x}\alpha(\vec{x})$ în $L(U_0)$ şi $\vdash \beta(\vec{b}) \leftrightarrow \forall\vec{y}\beta(\vec{y})$ în $L_2(V)$, deci $\vdash \forall\vec{x}\alpha(\vec{x}) \leftrightarrow \forall\vec{y}\beta(\vec{y})$ în L_2. Insă $\forall\vec{x}\alpha(\vec{x}) \in E$, de unde rezultă

$$[\forall\vec{y}\beta(\vec{y})] = [\forall\vec{x}\alpha(\vec{x})] \in B.$$

Tinând cont că

$$(U_0, u_0)\flat_L \equiv (V_0, v_0)\flat_L,$$

au loc următoarele egalităţi:

$$u_0([\alpha(\vec{a})]) = u_0([\forall\vec{x}\alpha(\vec{x})]) = v_0([\forall\vec{y}\beta(\vec{y})]) = v_0(\beta(\vec{y})]).$$

In acest fel, am demonstrat egalitatea (9.9).

Fie $[\varphi] \in B(U_0) \subseteq B_2(U_0 \cup V_0)$ astfel încât $[\varphi] \notin B_2(V_0) \subseteq B_2(U_0 \cup V_0)$. Vom demonstra că în algebra Boole $B_2(U_0 \cup V_0)$ au loc inegalităţile următoare:

$$(v_0)_i([\varphi]) \leq u_0([\varphi]) \leq (v_0)_e([\varphi]). \tag{9.10}$$

Fie ψ un enunţ în $L_2(V_0)$ astfel încât $\vdash \psi \to \varphi$ în $L_2(U_0 \cup V_0)$. Atunci $\varphi = \varphi(\vec{a})$, $\psi = \psi(\vec{b})$, unde $\vec{a}$ este un vector cu elemente din $U_0 \setminus C$ şi $\vec{b}$ este un vector cu elemente din $V_0 \setminus C$. Atunci $\vdash \varphi \leftrightarrow \forall\vec{x}\varphi(\vec{x})$, $\vdash \psi \leftrightarrow \forall\vec{y}\psi(\vec{y})$, $\forall\vec{x}\varphi(\vec{x}) \in E$ şi $\forall\vec{y}\psi(\vec{y})$ este un enunt din L_2. Rezultă:

$$v_0([\psi(\vec{b})]) = v_0([\forall\vec{y}\psi(\vec{y})]) \leq v_0([\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})]) = u_0([\forall\vec{x}\varphi(\vec{x})]) = u_0(\varphi(\vec{a}0]).$$

De aici se obţine prima inegalitate din (9.10). A doua inegalitate se demonstrează în mod analog.

Aplicând Propoziţia 9.1.40, rezultă existenta unei probabilităţi μ_1 ce verifică proprietăţile următoare:

$\cdot$ $B_2(V_0) \cup \{[\varphi]\} \subseteq dom(\mu_1) \subseteq B_2(U_0) \cup V_0)$,

$\cdot$ $\mu_1 \mid_{B_2(V_0)} = v_0$,

$\cdot$ $\mu_1([\varphi]) = u_0([\varphi])$.

Folosind acest rezultat şi aplicând inducţia transfinită, se obţine probabilitatea μ'.

Aplicând lui μ' Teorema de completitudine a lui Gaifman, se obţine o structură probabilistă (V_1, v_1) astfel încât $U_0 \cup V_0 \subseteq V_1$, $v_1 \mid_{B(U_0)} = u_0 \mid_{B(U_0)}$ şi $v_1 \mid_{B_2(V_0)} = v$.

Atunci $(V_1, v_1)\flat_{B(U_0)} \equiv (U_0, u_0)$. Aplicând din nou procedeul de mai sus, găsim o structură probabilistă (U_1, u_1) astfel încât $V_1 \subseteq U_1$, $u_1 \mid_{B_1(U_0)} = u_0$ şi $u_1 \mid_{B(V_1)} = v_1 \mid_{B(V_1)}$.

Prin inducţie, se construiesc două lanţuri elementare de modele probabiliste:

$$(U_0, u_0) \prec (U_1, u_1) \prec \ldots \prec (U_n, u_n) \prec \ldots$$

$$(V_0, v_0) \prec (V_1, v_1) \prec \ldots \prec (V_n, v_n) \prec \ldots$$

pentru L_1 şi L_2 respectiv, astfel încât următoarele proprietăţi sunt îndeplinite:
· $V_1 \subseteq U_1 \subseteq V_2 \subseteq U_2 \subseteq \ldots \subseteq U_n \subseteq V_{n+1} \subseteq U_{n+1} \subseteq \ldots$,
· $v_{n+1}([\varphi]) = u_n([\varphi])$, pentru orice $\varphi \in E(U_n)$,
· $u_{n+1}([\varphi]) = v_{n+1}([\psi])$, pentru orice $\psi \in E(V_{n+1})$.

Fie $A = \bigcup_{n=0}^{\infty} U_n = \bigcup_{n=0}^{\infty} V_n$ şi $(A,u) = \bigcup_{n=0}^{\infty}(U_n,u_n)$, $(B,v) = \bigcup_{n=0}^{\infty}(V_n,v_n)$. Conform Propoziţiei 9.2.14, pentru orice $n \geq 0$ avem

$$(U_n,u_n) \prec (A,u), \quad (V_n,v_n) \prec (B,v),$$

deci

$$(A,u)\flat_L \equiv (B,v)\flat_L.$$

Fie $\widetilde{B}$ algebra Lindenbaum-Tarski a limbajului $(L_1 \cup L_2)(A)$ şi $\widetilde{B}_0$ subalgebra sa formată din clasele enunţurilor fără cuatificatori. Atunci putem defini o probabilitate $w : \widetilde{B}_0 \longrightarrow [0,1]$ astfel încât $w\mid_{B_1^0} = u\mid_{B_1^0}$ şi $w\mid_{B_2^0} = v\mid_{B_2^0}$. Aplicând Teorema 9.2.8, există o probabilitate $\mathbf{m} : \widetilde{B} \longrightarrow [0,1]$ ce extinde pe w şi verifică condiţia lui Gaifman. Conform părţii de unicitate din Teorema 9.2.8, $\mathbf{m}\mid_{B_1} = u\mid_{B_1}$ şi $\mathbf{m}\mid_{B_2} = v\mid_{B_2}$.

Structura probabilistă $(A,\mathbf{m})$ satisface condiţiile cerute. □

Rezultatul precedent este corespondentul probabilistic al teoremei de consistenţă a lui Robinson din teoria clasică a modelelor.

Bibliography

[1] M.A. Amer, Probability, logic and measures on epimorphic images of coproducts of measurable spaces, *Reports Math. Logic*, 28, 1994, 29-52.

[2] J. Barwise (Editor), Handbook of Mathematical logic, North-Holland, 1977.

[3] O. Bâscă, Baze de date, Editura All, 1997.

[4] D. Buşneag, Contributions to the study of Hilbert algebras (in Romanian), Ph.D. Thesis, Univ. of Bucharest, 1985.

[5] C.C. Chang, H.J. Keisler, Model Theory (editia a treia), 1990.

[6] A. Diego, Sur les algèbres de Hilbert, Ph. D. Thesis, Collection de Logique math., Serie A, XXI, Gauthier-Villars, 1966 (traduction faites d'après la Thèse édi'ee en langue espagnole sous le titre: Sobre Algebras de Hilbert, parue dans la Collection *Notas de Logica Matematica*, Univ. Nacional del Sur, Bahia Blanca, 1961).

[7] A. Dumitriu, Logica polivalentă, Ed. enciclopedică Română, 1971.

[8] Gh. Enescu, Logică şi Adevăr, Ed. politică, 1967.

[9] Gh. Enescu, Teoria sistemelor logice, Ed. ştiinţ. şi encicl., 1976.

[10] J.E. Fenstad, Representation of probabilities defined on first order languages, in J.N. Crosley (ed.), *Set, Models and Recursion Theory*, North Holland, 1967.

[11] H. Gaifman, Concerning measures on first order calculi, *Israel J. Math.*, 2, 1964, 1-18.

[12] B.A. Galler, Cylindric and polyadic algebras, Proc. Amer. Math. Soc., 8, 1959, 176-183.

[13] G. Georgescu, Elemente de Logică Matematică, Academia militară, 1978.

[14] G. Georgescu, Some model theory for probability structures, *Reports Math. Logic*, 35, 2001, 103-113.

[15] G. Georgescu, Sistemul formal al calculului cu predicate (I), *Revista de logică* http://egovbus.net/rdl, 20.10.2008, 1-33.

[16] G. Georgescu, Sistemul formal al calculului cu predicate (II), *Revista de logică* http://egovbus.net/rdl, 20.10.2008, 1-19.

[17] G. Georgescu, Un semestru de logică, *Revista de logică* http://egovbus.net/rdl, 19.11.2007, 1-5.

[18] S. Givant, P. Halmos, Introduction to Boolean Algebras, Springer, 2008.

[19] K. Gödel, Die Vollstandigkeit der Axiome des logish Functionenkalkuls, Monat. fur Mathematik und Physik, 37, 1930, 349-330.

[20] P.R. Halmos, Algebraic logic, Chelsea Publ. Comp., New York, 1962.

[21] L. Henkin, The Completeness of First-order Functional Calculus, J. Symb. Logic, 14, 1949, 159-166.

[22] L. Henkin, The Discovery of My Completeness Proofs, Bull. Symb. Logic, vol.2, no. 2, 1996, 127-158.

[23] L. Henkin, J.D. Monk, A. Tarski, Cylindric Algebras, I, II, North-Holland, 1971, 1985.

[24] D. Hilbert, W. Ackermann, Grundzugen der theoretischen Logik, Heidelberg, Springer-Verlag, 1928.

[25] A. Horn, A. Tarski, Measures in Boolean algebras, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 64, 1948, 467-497.

[26] A. Iorgulescu, $\mathcal{S}$-prealgebras, *Discrete Mathematics*, 126, 1994, 415-419.

[27] A. Iorgulescu, On BCK algebras - Part I.a: An attempt to treat unitarily the algebras of logic. New algebras, *J. of Universal Computer Science*, Vol. 13, 11, 2007, 1628-1654.

[28] A. Iorgulescu, On BCK algebras - Part I.b: An attempt to treat unitarily the algebras of logic. New algebras, *J. of Universal Computer Science*, to appear.

[29] A. Iorgulescu, Algebras of logic as BCK algebras, Editura Academiei de Studii Economice, Bucureşti, 2008.

[30] A. Iorgulescu, Asupra algebrelor Booleene, *Revista de logică* http://egovbus.net/rdl, 25.01.2009, 1-25.

[31] K. Iséki, S. Tanaka, An introduction to the theory of BCK-algebras, *Math. Japonica* 23, No.1, 1978, 1-26.

[32] J. Łos, E. Marczewski, Extensions of measures, *Fund. Math.*, 36, 1949, 267-276.

[33] R.C. Lynden, Notes on Logic, D. Van Nostrand, 1967.

[34] Mihaela Maliţa, Mircea Maliţa, Bazele inteligenţei artificiale, Ed. tehnică, 1987.

[35] Gr.C. Moisil Incercări vechi şi noi de logică neclasică, Ed. ştiinţ., 1965.

[36] Gr.C. Moisil, Elemente de logică matematică şi de teoria mulţimilor, Ed. ştiinţ., 1968.

[37] J.D. Monk, Mathematical Logic, Springer-Verlag, 1978.

[38] A. Monteiro, Construction des algèbres de Łukasiewicz trivalentes dans les algèbres de Boole Monadiques-I, Notas de Logica Mat. 11, 1974.

[39] T. Ogasawara, Relation between intuitionistic logic and lattice, *Journal of the Hiroshima University*, Serie A, Vol. 9, 1939, 157-164.

[40] R. Padmanabhan, Sergiu Rudeanu, Axioms for lattices and Boolean algebras, World Scientific, Singapore, 2008.

[41] D. Ponasse, Problémes d'universalité s'introduissant dans l'algebrisation de la logique mathématique, Thése présenté á la Faculté des Sciences de l'Université de Clermont Ferrand, 1961.

[42] D. Ponasse, Logique mathématique, O.C.D.L., Paris, 1967.

[43] D. Ponasse, Algébres floues et algébres de Lukasiewicz, *Rev. Roum. Math. Pures Appl.*, Tome XXIII, No. 1, 1978, 103-111.

[44] D. Ponasse, J.C. Carrega, Algébre et topologie booléennes, Masson, Paris, 1979.

[45] C. Popovici, S. Rudeanu, H. Georgescu, Bazele informaticii, Vol. II, Univ. Bucureşti, Fac. de matematică, 1991.

[46] M. Reghiş, Elemente de teoria mulţimilor şi de logică matematică, Ed. Facla, 1981.

[47] S. Rudeanu, Elemente de logică matematică, *Revista de logică* http://egovbus.net/rdl, 1-23.

[48] D. Scott, P. Krauss, Asigning probabilities to logical formules, in: Hintakka and Suppes (eds), *Aspects of Inductive Logic*, North Holland, 1966.

[49] N. Tăndăreanu, Introducere în programarea logică, Limbajul PROLOG, Ed. INTARF, Craiova, 1994.

[50] D.A. Vladimirov, Boolean Algebras in Analysis, Kluwer, 2002.

[51] L.A. Zadeh, Fuzzy sets, Inform. Control 8, 1965, 338-353.

[52] H. Wang, Studii de Logică matematică, Ed. ştiinţ., 1972.

Index

List of Figures