Programare logică

Semantica logicii ecuaţionale
Specificaţii

Ecuaţiile şi semantica lor

(S, Σ) signatură multisortată

- O (S, Σ)-ecuaţie este formată dintr-o mulţime de variabile X şi din doi termeni t şi t' de acelaşi sort din $T_\Sigma(X)$. Vom nota o ecuaţie prin
$$(\forall X) t \doteq_s t'.$$

Ecuaţiile şi semantica lor

(S, Σ) signatură multisortată

- O (S, Σ)-ecuaţie este formată dintr-o mulţime de variabile X şi din doi termeni t şi t' de acelaşi sort din $T_\Sigma(X)$. Vom nota o ecuaţie prin
$$(\forall X)t \doteq_s t'.$$
- Spunem că o (S, Σ)-algebră A satisface o ecuaţie $e := (\forall X)t \doteq_s t'$ (A este model al lui e) dacă $\tilde{\boldsymbol{a}}_s(t) = \tilde{\boldsymbol{a}}_s(t')$ pentru orice atribuire $\boldsymbol{a} : X \to A$. În acest caz, vom nota
$$A \models (\forall X)t \doteq_s t'.$$

Ecuaţiile şi semantica lor

(S, Σ) signatură multisortată

- O (S, Σ)-ecuaţie este formată dintr-o mulţime de variabile X şi din doi termeni t şi t' de acelaşi sort din $T_\Sigma(X)$. Vom nota o ecuaţie prin
$$(\forall X)t \doteq_s t'.$$
- Spunem că o (S, Σ)-algebră A satisface o ecuaţie $e := (\forall X)t \doteq_s t'$ (A este model al lui e) dacă $\tilde{\boldsymbol{a}}_s(t) = \tilde{\boldsymbol{a}}_s(t')$ pentru orice atribuire $\boldsymbol{a} : X \to A$. În acest caz, vom nota
$$A \models (\forall X)t \doteq_s t'.$$

$\doteq$ egalitate formală, $=$ egalitate efectivă

Necesitatea cuantificării

- $S = \{s, bool\}$, $\Sigma := \{T :\to bool, F :\to bool, g : s \to bool\}$
- $T_{\Sigma,s} = \emptyset$, $T_{\Sigma,bool} = \{T, F\}$
- $T_\Sigma \not\models (\forall\emptyset) T \doteq_{bool} F$
- $T_\Sigma \models (\forall X) T \doteq_{bool} F$,
  unde $X_s := \{x\}$, $X_{bool} := \emptyset$

Ecuaţiile condiţionate

- O (S, Σ)-ecuaţie condiţionată este notată prin
$$(\forall X)t \doteq_s t' \; if \; H.$$
şi este formată din:
  - o mulţime de variabile X,
  - o mulţime H de ecuaţii $u \doteq_{s'} v$, cu u,$v \in T_\Sigma(X)_{s'}$,
    - ecuaţiile $u \doteq_{s'} v \in H$ sunt cuantificate cu X
  - doi termeni t şi t' de acelaşi sort din $T_\Sigma(X)$.
- În practică H este finită $H = \{u_1 \doteq_{s_1} v_1, \ldots, u_n \doteq_{s_n} v_n\}$
- O ecuaţie $(\forall X)t \doteq_s t'$ este ecuaţie condiţionată în care mulţimea condiţiilor H este vidă $(\forall X)t \doteq_s t' \; if \; \emptyset$.

Ecuaţiile condiţionate

- Spunem că o (S,Σ)-algebră A satisface o ecuaţie $\gamma := (\forall X)t \doteq_s t' \; if \; H$ (A este model al lui γ) dacă, pentru orice atribuire $\boldsymbol{a} : X \to A$

$$\tilde{\boldsymbol{a}}_s(u) = \tilde{\boldsymbol{a}}_s(v) \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{a}}_s(t) = \tilde{\boldsymbol{a}}_s(t').$$

  În acest caz, vom nota

$$A \models (\forall X)t \doteq_s t' \; if \; H.$$

- $A \models (\forall X)t \doteq_s t' \Leftrightarrow A \models (\forall X)t \doteq_s t' \; if \; \emptyset$

Exemplu

- $STIVA = (S, \Sigma)$, $X_{elem} := \{E\}$, $X_{stiva} := \{S, Q\}$
  $\gamma := (\forall X) top(S) \doteq_{elem} E\ if\ \{S \doteq_{stiva} push(E, Q)\}$
- $STIVA$-algebra A: $A_{elem} := \mathbb{N}$, $A_{stiva} := \mathbb{N}^*$
  $A_0 := 0$, $A_{empty} := \lambda$, $A_{push}(n, n_1 \cdots n_k) := n\, n_1 \cdots n_k$,
  $A_{pop}(\lambda) = A_{pop}(n) := \lambda$,
  $A_{pop}(n_1 n_2 \cdots n_k) := n_2 \cdots n_k$ pt. $k \geq 2$,
  $A_{top}(\lambda) := 0$, $A_{top}(n_1 \cdots n_k) := n_1$ pt. $k \geq 1$.
- $STIVA$-algebra B: $B_{elem} := \{0\}$, $B_{stiva} := \mathbb{N}$
  $B_0 := 0$, $B_{empty} := 0$, $B_{push}(0, n) := n + 1$ or. n,
  $B_{pop}(0) := 0$, $B_{pop}(n) := n - 1$ pt. $n \geq 1$, $B_{top}(n) := 0$ or. n.
- $A \models \gamma$ şi $B \models \gamma$

Γ-algebre

Γ mulţime de ecuaţii condiţionate, γ' ecuaţie condiţionată

- O algebră A este Γ-algebră (A este model pentru Γ) dacă $A \models \gamma$ oricare $\gamma \in \Gamma$. În acest caz, vom nota $A \models \Gamma$.
- Vom nota cu $Alg(S, \Sigma, \Gamma)$ clasa Γ-algebrelor $Alg(S, \Sigma, \Gamma) := \{A \in Alg(S, \Sigma) \mid A \models \Gamma\}$
- Teoremă. $Alg(S, \Sigma, \Gamma)$ este un ADT polimorfic.
    - dacă $A \models \Gamma$ şi $A \simeq B$ atunci $B \models \Gamma$

Specificaţii

- O specificaţie este un triplet (S, Σ, Γ), unde (S, Σ) este o signatură multisortată şi Γ este o mulţime de ecuaţii condiţionate. Specificaţia (S, Σ, Γ) defineşte clasa modelelor $Alg(S, \Sigma, \Gamma)$, care reprezintă semantica ei.
- În CafeObj modulele `mod*` specifică tipul abstract de date polimorfic $Alg(S, \Sigma, \Gamma)$, unde S este mulţimea sorturilor, Σ este mulţimea simbolurilor de operaţii, Γ este mulţimea ecuaţiilor definite în modul, iar fiecare ecuaţie
  `ceq t = t' if H`
  este cuantificată de variabilele care apar în `t` şi `t'`.

Specificaţii echivalente

- Două specificaţii (S, Σ, Γ_1) şi (S, Σ, Γ_2) sunt echivalente dacă definesc aceeaşi clasă de modele:

$$A \models \Gamma_1 \Leftrightarrow A \models \Gamma_2$$

O teorie este o clasă de specificaţii echivalente. Un modul `mod*` in CafeObj defineşte o teorie.

```
mod* GROUP{ [Element]
op e : -> Element
op  _+_  : Element Element -> Element { assoc }
op -_  : Element -> Element
vars x y : Element
eq e + x = x .
eq x + e = x .
eq (- x) + x = e .
eq x + (- x)  = e . }
```

Γ-algebre

(S, Σ, Γ) specificaţie,
A algebră şi $\equiv$ o congruenţă pe A

- Spunem că $\equiv$ satisface proprietatea CS(Γ,A) dacă

  CS(Γ,A)

  $$\boxed{\begin{array}{l}\text{or. } (\forall X)t \doteq_s t' \; if \; H \in \Gamma\text{, or. } \boldsymbol{a} : X \to A \\ \tilde{\boldsymbol{a}}_{s'}(u) \equiv_{s'} \tilde{\boldsymbol{a}}_{s'}(v) \text{ or. } u \doteq_{s'} v \in H \Rightarrow \tilde{\boldsymbol{a}}_s(t) \equiv_s \tilde{\boldsymbol{a}}_s(t').\end{array}}$$

  ($\equiv$ este închisă la substituţie)

- Teoremă. Dacă A este o algebră şi $\equiv$ este o congruenţă pe A care satisface CS(Γ,A) atunci $A/_{\equiv} \models \Gamma$.

Echivalenţa semantică $\equiv_\Gamma$

(S, Σ, Γ) specificaţie, Y mulţime de variabile

- Pe $T_\Sigma(Y)$ definim relaţia de echivalenţa semantică
  $\equiv_\Gamma := \bigcap\{Ker(h) \mid h : T_\Sigma(Y) \to A,\ A \models \Gamma\}$
- $\equiv_\Gamma$ este o congruenţă
- Propoziţie. $\equiv_\Gamma$ verifică CS(Γ,$T_\Sigma(Y)$).
- Corolar. $T_\Sigma(Y)/_{\equiv_\Gamma}$ este Γ-algebră.

Γ-algebra iniţială

(S, Σ, Γ) specificaţie

- Pe T_Σ definim congruenţa $\equiv_\Gamma := \bigcap\{Ker(f) \mid f : T_\Sigma \to A,\ A \models \Gamma\}$
- Teoremă: pentru orice $A \in Alg(s, \Sigma, \Gamma)$ există un unic morfism $\overline{h} : T_\Sigma/_{\equiv_\Gamma} \to A$.
- Teoremă: $\equiv_\Gamma$ verifică CS(Γ,T_Σ), deci $T_\Sigma/_{\equiv_\Gamma} \models \Gamma$.
- Teoremă. $T_\Sigma/_{\equiv_\Gamma}$ este Γ-algebră iniţială.

Γ-algebra iniţială

(S, Σ, Γ) specificaţie

- $\mathcal{I}_{\Sigma,\Gamma} := \{A | A \in Alg(S, \Sigma, \Gamma), A \simeq T_\Sigma/_{\equiv_\Gamma}\} = [T_\Sigma/_{\equiv_\Gamma}]$ este un tip abstract de date monomorfic.

- $\mathcal{I}_{\Sigma,\Gamma}$ reprezintă semantica unui modul `mod!` în CafeOBj, unde S este mulţimea sorturilor, Σ este mulţimea simbolurilor de operaţii, iar Γ este mulţimea ecuaţiilor definite în modul. Fiecare ecuaţie
  `ceq t = t' if H`
  este cuantificată de variabilele care apar în `t` şi `t'`.

Consecinţe semantice

(S, Σ, Γ) specificaţie, θ ecuaţie, Θ mulţime de ecuaţii

- Ecuaţia θ este o consecinţă semantică a lui Γ dacă
$$A \models \Gamma \text{ implică } A \models \theta$$
pentru orice algebră A. În acest caz, vom nota $\Gamma \models \theta$.

- $\Gamma \models \Theta \Leftrightarrow \Gamma \models \theta$ or. $\theta \in \Theta$

- Fie Γ şi Θ mulţimi de ecuaţii. Dacă $\Gamma \models \Theta$ atunci (S, Σ, Γ) şi $(S, \Sigma, \Gamma \cup \Theta)$ sunt specificaţii echivalente.

- Y mulţime de variabile, t, $t' \in T_\Sigma(Y)_s$
  - $t \equiv_\Gamma t' \Leftrightarrow \Gamma \models (\forall Y) t \doteq_s t'$

Teoria grupurilor

```
mod* GROUP{ [Element]
op e : -> Element
op  _+_  : Element Element -> Element { assoc }
op -_  : Element -> Element
vars x y : Element
eq e + x = x .
eq x + e = x .
eq (- x) + x = e .
eq x + (- x)  = e . }
```

$(S = \{Element\}, \Sigma := \{e, -, +\}, \Gamma)$

$\Gamma := \Big\{(\forall\{x, y, z\})(x + y) + z \doteq x + (y + z), (\forall\{x\})e + x \doteq x,$

$(\forall\{x\})x + e \doteq x, (\forall\{x\})(-x) + x \doteq e, (\forall\{x\})x + (-x) \doteq e\Big\}$

- $\theta_1 := (\forall\{x, y, z\})x \doteq y \ if \ \{x + z \doteq y + z\},$

  $\theta_2 := (\forall\{x, y\})x + y \doteq y + x$

  $\Gamma \models \theta_1, \Gamma \not\models \theta_2$