8 Funcţii de repartiţie cu rata căderilor monotonă

Fie $X \geq 0$ o variabilă aleatoare ce reprezintă o durată de funcţionare şi a cărei funcţie de repartiţie este $F(x)$. Dacă există densitatea de repartiţie $f(x) = F'(x)$ şi notăm cu $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ funcţia fiabilitate (sau de *supravieţuire*), atunci se ştie că

$$h(x) = \frac{f(x)}{\overline{F}(x)},\ x \geq 0$$

este *funcţia rata căderilor sau rata de hazard.* Funcţiile de repartiţie cu *rata căderilor monotonă* sunt acelea pentru care $h(t)$ este monotonă; dacă $h(t), t > 0$ este monoton crescătoare atunci funcţia de repartiţie F este de tip IFR. Dacă $h(t)$ este descrescătoare, atunci funcţia de repartiţie F este de tip DFR. Repartiţiile IFR sunt specifice sistemelor tehnice sau fiinţelor biologice, in timp ce repartiţiile DFR sunt specifice sistemelor software sau sistemelor ce descriu durata neîntreruptă a forţei de muncă intr-o companie.

O definiţie generală a funcţiilor de repartiţie cu rata că derilor monotonă este următoarea [4].

Definiţia 8.1.*Funcţia de repartiţie F are rata căderilor monotonă dacă şi numai dacă funcţia*

$$\frac{F(t+x) - F(t)}{\overline{F}(t)} \tag{8.1}$$

este crescătoare (descrescătoare) in t, pentru orice $x > 0$, $t \geq 0, 0 < \overline{F}(f) < 1$.

Legătura cu definiţia cunoscută a funcţiilor de repartiţia IFR (DFR) este dată de următoarea lemă [4].

Lema 8.1.*Dacă F are densitate şi $F(0-0) = 0$ atunci F este IFR (DFR) dacă şi numai dacă funcţia $h(t)$ este crescătoare (des crescătoare).*

Demonstraţie. (In cazul IFR, deoarece cazul DFR se deduce prin dualitate). Dacă in (8.1) impărţim cu x şi facem $x \to 0$ atunci rezultă implicaţia $\mapsto$. Implicaţia inversă se demonstrează in cazul IFR plecând de la relaţia $h(x_1) \leq h(x_2)$, *daca* $x_1 \leq x_2$ şi tinând seama că

$$\overline{F}(t) = e^{-\int_0^t h(x)dx}.$$

In cele ce urmează vom preciza câteva proprietăţi ale funcţiilor IFR. Proprietăţile repartiţiilor DFR se vor obţine *prin dualitate* astfel: dacă intr-un enunţ apare IFR acesta va fi inlocuit cu DFR, iar dacă apar $<, \leq$, acestea vor fi inlocuite cu $>, \geq$.

Definiţia 8.2. *Funcţia $p(x)$ se numeşte funcţie de frecvenţă Pólia de ordinul 2, (notată PF_2), dacă $p(x) \geq 0$ şi pentru orice x_1, x_2, $-\infty < x_1 < x_2 < \infty$,*

y_1, y_2, $-\infty < y_1 < y_2 < \infty$ *are loc relaţia*

$$\begin{vmatrix} p(x_1 - y_1) & p(x_1 - y_2) \\ p(x_2 - y_1) & p(x_2 - y_2) \end{vmatrix} \geq 0. \tag{8.2}$$

(In formula (8.2) este vorba de un determinant!).

Observaţie. Funcţia $p(x) \geq 0$ este PF_2 dacă $\frac{p(x-\Delta)}{p(x)}$ este o funcţie crescătoare in x pentru orice $\Delta \geq 0$.

Definiţia 8.3. *(Extensie a definiţiei 8.2). Funţia $P(x,y)$, $x \in R, y \in R$ este total pozitivă de ordinul 2 (notată TP_2) dacă $p(x,y) \geq 0$ şi pentru orice $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ are loc relaţia*

$$\begin{vmatrix} p(x_1, y_1) & p(x_1, y_2) \\ p(x_2, y_1) & p(x_2, y_2) \end{vmatrix} \geq 0. \tag{8.3}$$

Observaţie. *Dacă F este PF_2 stunci $p(x,y) = F(x-y)$ este TP_2.*

Pornind de la definiţiile de mai sus se stabileşte teorema următoare.

Teorema 8.1. Dacă $F, (F(0-0) = 0)$, este o funcţie de repartiţie, atunci următoarele afirmaţii sunt echivalente:
a. F este IFR (DFR);
b. $log\overline{F}(t)$ este concavă (convexă) când $0 < F(t) < 1$;
c. $F(t)$ este PF_2,$(p(x,y) = \overline{F}(x+y)$ este $TP_2, x+y > 0)$.

Demonstraţie. Vom stabili pe rând echivalenţele $a. \equiv b.$ şi $a. \equiv c$, numai pentru cazul IFR.

Echivalenţa $a. \equiv b$. Pornim de la relaţia

$$\overline{F}(t) = e^{-H(t)},\ H(t) = \int_0^t h(u)du.$$

Dacă F este IFR, atunci, conform definiţiei 8.1 avem

$$\frac{F(t+\Delta) - F(t)}{\overline{F}(t)} = \frac{\overline{F}(t) - \overline{F}(t+\Delta)}{\overline{F}(t)} = 1 - e^{-[H(t+\Delta)-H(t)]}$$

şi ultima expresie este o funcţie crescătoare in t oricare ar fi Δ. De aici rezultă că $H(t+\delta) - H(t)$ este crescătoare in t oricare ar fi δ adică $H(t)$ este convexă. De aici rezulta că $-H(t) = log\overline{F}(t)$este concavă, adică $a. \equiv b$.

Echivalenţa $a. \equiv c$. Dacă F este IFR atunci conform definiţiei 8.1 avem pentru $\forall t_1 < t_2,\ x > 0$, că

$$\frac{\overline{F}(t_1) - \overline{F}(t_1+x)}{\overline{F}(t_1)} \leq \frac{\overline{F}(t_2) - \overline{F}(t_2+x)}{\overline{F}(t_2)}$$

ceea ce este echivalent cu

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\overline{F}(t_1) - \overline{F}(t_1+x)}{\overline{F}(t_1)} & \dfrac{\overline{F}(t_2) - \overline{F}(t_2+x)}{\overline{F}(t_2)} \end{vmatrix} \geq 0.$$

Scăzând in determinantul precedent linia a doua din linia intâia si inlocuind $\overline{F}(x)$ cu $1 - F(x)$ se obţine faptul că F este PF_2.

Pentru cele ce urmează este importantă echivalenţa $a. \equiv b.$

Să mai observăm că in cazul repartiţiei exponenţiale $Exp(0, \lambda)$ cu $\lambda = \frac{1}{\mu_1}$ unde μ_1 este media corespunzătoare lui F, avem $\overline{G}(x) = e^{-\lambda x}$, de unde se deduce că pentru o funcţie de repartiţie a căderilor oarecare F avem $\overline{F}(0) = \overline{G}(0)$, iar graficul lui $\overline{F}$ mai taie graficul lui $\overline{G}$ cel mult incă odată. De asemenea rezultă că in cazul repartiţiei exponenţiale avem $h(t) = \lambda = const.$, deci repartiţia exponenţială este la *graniţa* dintre repartiţiile IFR şi DFR.

Lema 8.2. *Dacă F este IFR atunci*

$$[\overline{F}(t)]^{\frac{1}{t}} \tag{8.4}$$

este descrescătoare in t.

Demonstraţie. Dacă F este IFR atunci $log\overline{F}(t)$ este concavă in t deci (deoarece $\overline{F}(0-0) = 1$) avem că

$$\frac{log\overline{F}(t) - log\overline{F}(0)}{t-0}$$

este descrescătoare. Deci antilogaritmând avem că $[\overline{F}(t)]^{\frac{1}{t}}$ este descrescătoare in t.

O lemă *duală* se poate enunţa pentru cazul DFR.

Consecinţă. Din lema 8.2 rezultă că o repartiţie IFR *are momente de orice ordin.* Intr-adevăr, dacă fixăm un $t_0 > 0$ oarecare, conform lemei 2, pentru $t > t_0$ avem $\overline{F}(t) < [\overline{F}(t_0)]^{\frac{t}{t_0}}$. Pe de-altă parte pentru un $r \in \mathcal{R}^+$ oarecare, momentul de ordinul r este dat de integrala Stieltjes

$$\mu_r = \int_0^\infty x^r dF(x) = \int_0^\infty x^r d[-\overline{F}(x)] = r\int_0^\infty x^{r-1}\overline{F}(x)dx,$$

ultima parte rezultând din integrarea prin părţi. Dar ţinând seama de inegalitatea precedentă (pentru t_0 fixat) avem

$$\mu_r = r\int_0^\infty x^{r-1}\overline{F}(x)dx = r\int_0^{t_0} x^{r-1}\overline{F}(x)dx + r\int_{t_0}^\infty x^{r-1}\overline{F}(x)dx \leq$$

$$\leq r\int_0^{t_0} x^{r-1}\overline{F}(x)dx + r\int_{t_0}^\infty x^{r-1}[\overline{F}(t_0)]^{\frac{x}{t_0}}dx.$$

Notând $\alpha = -log[\overline{F}(t_0)]^{\frac{1}{t_0}}$ rezultă că ultima integrală devine

$$r\int_{t_0}^\infty x^{r-1}e^{-\alpha x}dx$$

care este finită. Se observă că şi prima integrală există şi este finită deoarece funcţia $x^{r-1}\overline{F}(x)$ este mărginită pe intervalul $(0, t_0)$, de unde reazultă in final că μ_r există şi este finit.

Teorema 8.2. *Dacă F esteIFR şi ξ_p satisface relaţia $F(\xi_p) = p$ (adică ξ_p este p-quantila inferioară a lui F), atunci*

$$\overline{F}(t) \begin{cases} \geq e^{-\alpha t} & dac \;\; t \leq \xi_p \\ \leq e^{-\alpha t} & daca \; t \geq \xi_p \end{cases} \tag{8.5}$$

unde

$$\alpha = -\frac{log(1-p)}{\xi_p}. \tag{8.5'}$$

Demonstraţie. Din $F(\xi_p) = p$ deducem $\overline{F}(\xi_p) = 1 - p$. Dar pentru $t \leq \xi_p$ avem din lema 8.2 că

$$\{\overline{F}(t)\}^{\frac{1}{t}} \geq \{\overline{F}(\xi_p)\}^{\frac{1}{\xi_p}} = (1-p)^{\frac{1}{\xi_p}}.$$

Notând

$$(1-p)^{\frac{1}{\xi_p}} = e^{-\alpha}, \; adica \;\; \alpha = -\frac{log(1-p)}{\xi_p}$$

atunci avem

$$\{\overline{F}(t)\}^{\frac{1}{t}} \geq e^{-\alpha t}, \; adica \;\; \overline{F}(t) \geq e^{-\alpha t},$$

şi prima inegalitate (8.5) este demosntrată. La fel se demonstrează şi cea de-a doua inegalitate din (8.5). Desigur se poate formula o teoremă duală pentru cazul când F este DFR.

Teorema 8.3. *Dacă F este IFR cu media μ_1 atunci*

$$\overline{F}(t) \geq \begin{cases} e^{-\frac{t}{\mu_1}} & daca \; t < \mu_1 \\ 0 & daca \;\; t \geq \mu_1. \end{cases} \tag{8.6}$$

Demonstraţie. Fie X variabila aleatoare care are funcţia de repartiţie F continuă. (Daca F nu este continuă, se poate arăta că deoarece este IFR, ea se poate aproxima cu o funcţie continuă). Intrucât, conform teoremei 8.1, $log\overline{F}(t)$ este concavă, din inegalitatea lui Jensen rezultăcă

$$E[log\overline{F}(X)] \leq log\overline{F}[E(X)] = log\overline{F}(\mu_1), \tag{8.7}$$

unde E desemnează valoarea medie. Deoarece F este continuă,rezultă (conform teoremei lui Hincin) că variabila aleatoare $\overline{F}(X)$ este repartizată uniform pe $(0,1)$ şi deci

$$E[log\overline{F}(X)] = \int_0^1 log(u)du = -1.$$

Din (8.7) avem $log\overline{F}(\mu_1) \geq -1$ adică $\overline{F}(\mu_1) \geq e^{-1}$. Din lema 8.2, rezulta in continuare că

$$\left[\overline{F}(t)\right]^{\frac{1}{t}} \geq \left[\overline{F}(\mu_1)\right]^{\frac{1}{\mu_1}} \geq (e^{-1})^{\frac{1}{\nu_1}},$$

adică pentru $t < \mu_1$ avem

$$\overline{F}(t) \geq e^{-\frac{t}{\mu_1}}$$

şi teorema este demonstrată.

Observăm că inegalitatea este strictă pentru $0 < t < \mu_1$ dacă $\overline{F}(t) \neq e^{-\frac{t}{\mu_1}}$.

Teorema 8.3 spune in fapt că funcţia de supravieţuire $\overline{F}(t)$, in cazul unei repartiţii IFR, este limitată inferior de fiabilitatea data de repartiţia exponenţială de aceaşi medie μ_1.

Aplicaţii. **1.** Dacă un sistem are n componente independente conectate in serie, iar componenta i are funcţia de repartiţie $F_i, 1 \leq i \leq n$ de tip IFR, atunci fiabilitatea sistemului $\overline{F}(t)$ satisface relaţia

$$\overline{F}(t) = \prod_{i=1}^{n} \overline{F}_i(t) \geq \begin{cases} e^{-\sum_{i=1}^{n} \frac{t}{\mu_i}}, & daca \;\; t < min\{\mu_1, ..., \mu_n\} \\ 0, & in \;\; rest \end{cases}. \tag{8.7'}$$

2. In acesleaşi ipoteze referitoare la F_i, fiabilitatea $\overline{F}(t)$ a unui sistem cu componente indepensente conectate in paralel satisface relaţia

$$\overline{F}(t) \geq \begin{cases} 1 - \prod_{i=1}^{n}(1 - e^{-\frac{t}{\mu_i}}), & daca \;\; t \leq min\{\mu_1, .., \mu_n\} \\ 0, & in \;\; rest. \end{cases} \tag{8.7”}$$

Demonstraţiile aplicaţiilor **1,2** rezultă uşor din formulele de calcul a fiabilităţii sistemelor cu componente conectate in serie sau paralel (Cap.1).

Teorema 8.4, care urmează, dă o limitare superioară funcţiei $\overline{F}(t)$.

Teorema 8.4. *Dacă F este IFR cu media μ_1 atunci*

$$\overline{F}(t) \leq \begin{cases} 1 & daca \;\; t \leq \mu_1 \\ e^{-\omega t} & daca \;\; t > \mu_1, \end{cases} \tag{8.8}$$

unde ω depinde de t şi satisface relaţie $1 - \mu_1 \omega = e^{-\omega t}$.

Demonstraţie. Să notăm

$$\overline{G}(x) = \begin{cases} e^{-\omega t} & daca \;\; x < t \\ 0 & daca \;\; x \geq t \end{cases}$$

şi să observăm că graficul lui $\overline{F}(x)$ taie graficul lui $\overline{G}(x)$ cel mult odată şi il taie de sus in jos.

Pentru $t \leq \mu_1$ formula (8.8) este evidentă. Să o demonstrăm pentru $t > \mu_1$. In acest caz notăm cu ω soluţia ecuaţiei

$$\int_0^t e^{-\omega x} dx = \mu_1.$$

De aici se observă că

$$\int_0^\infty e^{-\omega x} dx - \int_t^\infty e^{-\omega x} dx = \mu_1$$

de unde prin integrare se deduce

$$\frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega} e^{-\omega t} - \mu_1 \;\; sau \;\; 1 - \mu_1 \omega = e^{-\omega t}$$

care este tocmai relaţia din enunţul teoremei.

Acum, pentru a demonstra inegalitatea din (8.8) pentru $t > \mu_1$, să presupunem că pentru ω definit mai sus avem $\overline{F}(x) \neq \overline{G}(x)$. (Dacă ar fi identitate atunci (8.8) ar fi satisfăcuta). Deci presupunem ca avem neegalitatea menţionată. Dacă din neegalitate ar rezulta $\overline{F}(x) > \overline{G}(x)$ atunci ar rezulta

$$\mu_1 = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx > \int_0^t \overline{G}(x)dx = \mu_1$$

ceeace ar fi o contradictie. Deci putem avea numai $\overline{F}(x) < \overline{G}(x)$ ceeace demonstrează teorema.

Observăm că teoremele 8.2-8.4 dau limitări inferioare/superioare ale funcţiilor de fiabilitate de tip IFR. In cele ce urmează vom prezenta teoreme care dau limitări pentru cuantile sau pentru medii in cazul repartiţiilor IFR.

Teorema 8.5. *Dacă F este IFR şi dacă p este o probabilitate astfel incât $p < 1 - e^{-1}$, atunci*

$$[-log(1-p)]\mu_1 \leq \xi_p \leq [-\frac{log(1-p)}{p}]\mu_1 \tag{8.9}$$

iar dacă $p \geq 1 - e^{-1}$ atunci

$$\mu_1 \leq \xi_p \leq [-\frac{log(1-p)}{p}]\mu_1 \tag{8.9'}$$

unde ξ_p este $p-$cuantila lui F, adică $F(\xi_p) = p$.

Demonstraţie. Să obţinem mai intâi majorantele din (8.9),(8.9'). Conform lemei 8.2 avem

$$\mu_1 = \int_0^\infty \overline{f}(x)dx \geq \int_0^{\xi_p} \left[\overline{F}(\xi_p)\right]^{\frac{x}{\xi_p}} dx \geq -\frac{p\xi_p}{log(1-p)}$$

de unde

$$\xi_p \leq \mu_1[\frac{-log(1-p)}{p}], \quad 1 > p > 0.$$

Să ne concentrăm asupra termenilor minoranţi din stânga formulelor (8.9),(8.9').

Fie $p \leq 1 - e^{-1}$; dacă $\xi_p < \mu_1$ atunci conform teoremei 8.4 avem $1 - p = \overline{F}(\xi_p) \geq e^{-\frac{\xi_p}{\mu_1}}$, de unde $\xi_p \geq \mu_1[-log(1-p)]$. Dacă $\xi_p \geq \mu_1$ atunci $\overline{F}(\xi_p) \geq 1 - p \geq e^{-1} \geq e^{-\frac{\xi_p}{\mu_1}}$ de unde de asemenea $\xi_p \geq \mu_1[-log(1-p)]$, adică (8.9) este demonstrată.

Fie acum $p > 1 - e^{-1}$ şi să presupunem prin absurd că $\xi_p < \mu_1$; atunci $F(\xi_p) = p$ deoarece F nu poate avea niciun salt la stânga lui μ_1. Deci

$$\overline{F}(\mu_1) \geq e^{-1} \geq 1 - p = \overline{F}(\xi_p)$$

ceea ce implică $\xi_p > \mu_1$, adică contradicţie. Contradicţia a plecat de la prersupunerea $\xi_p < \mu_1$, deci trebuie ca $\xi_p > \mu_1$, adica este valabilă relaţia (8.9').

Teorema 8.5 permite determinarea unor limite ale mediei μ_1 in funcţie de mediana M (care satisface relaţia $F(M) = 0.5 = p = \frac{1}{2}$). In acest caz din (8.9),(8.9') se deduce

$$\frac{M}{2log(2)} \leq \mu_1 \leq \frac{M}{log(2)}. \qquad (8.9")$$

Teorema 8.6. *Presupunem următoarele:*

(a). F este IFR cu media μ_1 *şi notăm* $\overline{G}(x) = e^{-\frac{x}{\mu_1}}$ *funcţia fiabilitate exponenţială de aceaşi medie;*

(b). Presupunem că $\varphi(x)$ *este o funcţie monoton crescătoare.*

Atunci:

$$\int_0^\infty \varphi(x)\overline{F}(x)dx \leq \int_0^\infty \varphi(x)\overline{G}(x)dx \qquad (8.10).$$

Demonstraţie. Presupunem că $F \neq G$ (F nu este identic cu G). Intrucât F e IFR şi G este exponenţială, graficul lui $\overline{F}$ taie graficul lui $\overline{G}$ o singură dată pe $(0,\infty)$ şi il taie *de sus in jos!*. Fie t_0 abscisa punctului in care se taie cele 2 grafice ,adică $\overline{F}(t_0) = \overline{G}(t_0)$. Atunci avem

$$\int_0^\infty \varphi(x)\overline{F}(x)dx - \int_0^\infty \varphi(x)\overline{G}(x)dx =$$

$$\int_0^\infty \varphi(x)\overline{f}(x)dx - \mu_1\varphi(t_0) + \mu_1\varphi(t_0).$$

Dar deoarece

$$\mu_1 = \int_0^\infty \overline{F}(x)dx = \int_0^\infty \overline{G}(x)dx$$

deducem in final că

$$\int_0^\infty \varphi(x)\overline{F}(x)dx - \int_0^\infty \varphi(x)\overline{G}(x)dx = \int_0^\infty [\varphi(x) - \varphi(t_0)][\overline{F}(x) - \overline{G}(x)]dx. \qquad (8.10')$$

Dacă descompunem ultima integrală pe $(0, t_0)$ si pe $[t_0, \infty)$ atunci avem:

$$pe\ \ (0, t_0)\ \ \varphi(x) - \varphi(t_0) < 0,\ \ \overline{F}(x) - \overline{G}(x) > 0$$

$$pe\ \ [t_0, \infty)\ \ \varphi(x) - \varphi(t_0) > 0,\ \ \overline{F}(x) - \overline{G}(x) < 0.$$

De aici rezultă că ultima integrală din (8.10') este ≤ 0, adică teorema este demonstrată.

Să observăm că se poate enunţa o teoremă duală pentru repartiţii F de tip IFR şi φ descreescătoare.

Ca o consecinţă imediată a teoremei 8.6 rezultă următorul

Corolar. *Dacă F este IFR atunci momemtul de ordinul r,* μ_r *(care ştim că exiasâ pentru orice* $r \in \mathcal{R}^+$*) satisface condiţiile*

$$\mu_r \begin{cases} \leq \Gamma(r+1)\mu_1^r, & daca\ \ r \geq 1 \\ \geq \Gamma(r+1)\mu_1^r, & daca\ \ 0 < r \leq 1 \end{cases} \qquad (8.11)$$

şi

$$\int_0^\infty e^{-sx} dF(x) \le \frac{1}{1+s\mu_1},\ \ s>0. \qquad (8.11')$$

unde Γ *este funcţia specială Gamma.*

Demonstraţie. Formula (8.11) se demonstrează aplicând teorema 8.6 pentru $\varphi(x) = x^{r-1}$ care conduce la

$$\mu_r = \int_0^\infty x^r dF(x) = r\int_0^\infty x^{r-1}\overline{F}(x)dx \le r\int_0^\infty x^{r-1}\overline{G}(x)dx = \Gamma(r+1)\mu_1^r,\ r\ge 1.$$

Cazul $0<r<1$ se tratează in mod asemănător.

Formula (8.11') se demonstrează astfel. Se consideră $\varphi(x) = e^{-sx}$ care este descrescătoare pentru $s>0$. Avem deci

$$\int_0^\infty \frac{1-e^{-sx}}{s} dF(x) = \int_0^\infty e^{-sx}\overline{F}(x) \ge \int_0^\infty e^{-sx}\overline{G}(x)dx =$$

$$= \frac{\mu_1}{1+s\mu_1} = \frac{1-\frac{1}{1+s\mu_1}}{s}.$$

Considerând primul şi ultimul termen din relaţiile precedente deducem

$$-\frac{1}{s}\int_0^\infty e^{-sx}dF(x) \ge -\frac{1}{s}(\frac{1}{1+s\mu_1})$$

şi corolarul este demonstrat.

Teorema care urmează se referă la repartiţii care au rata de hazard $h(t)$ oarecare.

Teorema 8.7.*Dacă* $0 < \frac{1}{\alpha} < h(h) < \frac{1}{\beta} < \infty$, *atunci avem*

$$\mu_s = \int_0^\infty x^s\overline{F}(x)dx < \infty,\ \ s>1 \qquad (8.12)$$

$$e^{-\frac{t}{\beta}} \le \overline{F}(t) \le e^{-\frac{t}{\alpha}} \qquad (8.13)$$

$$\frac{e^{-\frac{t}{\beta}}}{\alpha} \le \overline{F}(t) \le \frac{e^{-\frac{t}{\alpha}}}{\beta} \qquad (8.14)$$

$$\beta^s \le \mu_s \le \alpha^s,\ \ s>-1 \qquad (8.15)$$

$$\inf_t h(t) \le \frac{1}{\mu_1} \le \sup_t h(t). \qquad (8.16)$$

Demonstraţie. Formula (8.12) a fost deja demonstrată. Dacă integrăm relatia din ipoteză şi ţinem seama de faptul că $\overline{F}(t) = e^{-\int_0^t h(u)du}$ rezultă (8.13). Din (8.13) rezultă (8.14). Formula (8.15) rezultă din (8.14) prin integrare, iar (8.16) este consecinţa lui (8.15) pentru $s=1$.

Teorema 8.7 este importantă deoarece dă un interval pentru evaluarea fiabilităţii când se cunoaşte un interval de valori ale ratei căderiolor $h(t)$. Ca şi in alte treoreme precedente se pune in evidenţă de asemenea importanţa repartiţiei exponenţiale pentru fiabilitate.