



Programare logică

Terminare. Confluență. Completare

Logica ecuațională și rescrierea

- Terminarea unui sistem de rescriere este nedecidabilă.
- Pentru sisteme de rescriere particulare putem decide asupra terminării.
- Dacă E este o mulțime de ecuații a.î. R_E este un sistem de rescriere **complet** atunci deducția ecuațională $E \vdash (\forall X)t \dot{=} _s t'$ este decidabilă:
 - $t \xrightarrow{*} fn(t)$
 - $t' \xrightarrow{*} fn(t')$
 - $E \vdash (\forall X)t \dot{=} _s t' \Leftrightarrow fn(t) = fn(t')$
- Pentru sisteme de rescriere noetheriene, confluența este decidabilă.

Terminarea

(S, Σ) semnătură, R un sistem de rescriere (TRS)

Propoziție. Dacă fiecărui termen t îi poate fi asociat un număr natural $t \mapsto \mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât
$$t \rightarrow_R t' \Rightarrow \mu(t) > \mu(t')$$
oricare t și t' , atunci R este noetherian.

■ $R = \{x - 0 \rightarrow x, succ(x) - succ(y) \rightarrow x - y\}$ noetherian

$\mu(t) :=$ lungimea lui t

(nr. de simboluri din scrierea lui t în forma prefix)

■ $R = \{f(g(x), y) \rightarrow f(y, y)\}$ nu este noetherian

$f(g(x), g(x)) \rightarrow_R f(g(x), g(x)) \rightarrow_R \dots$

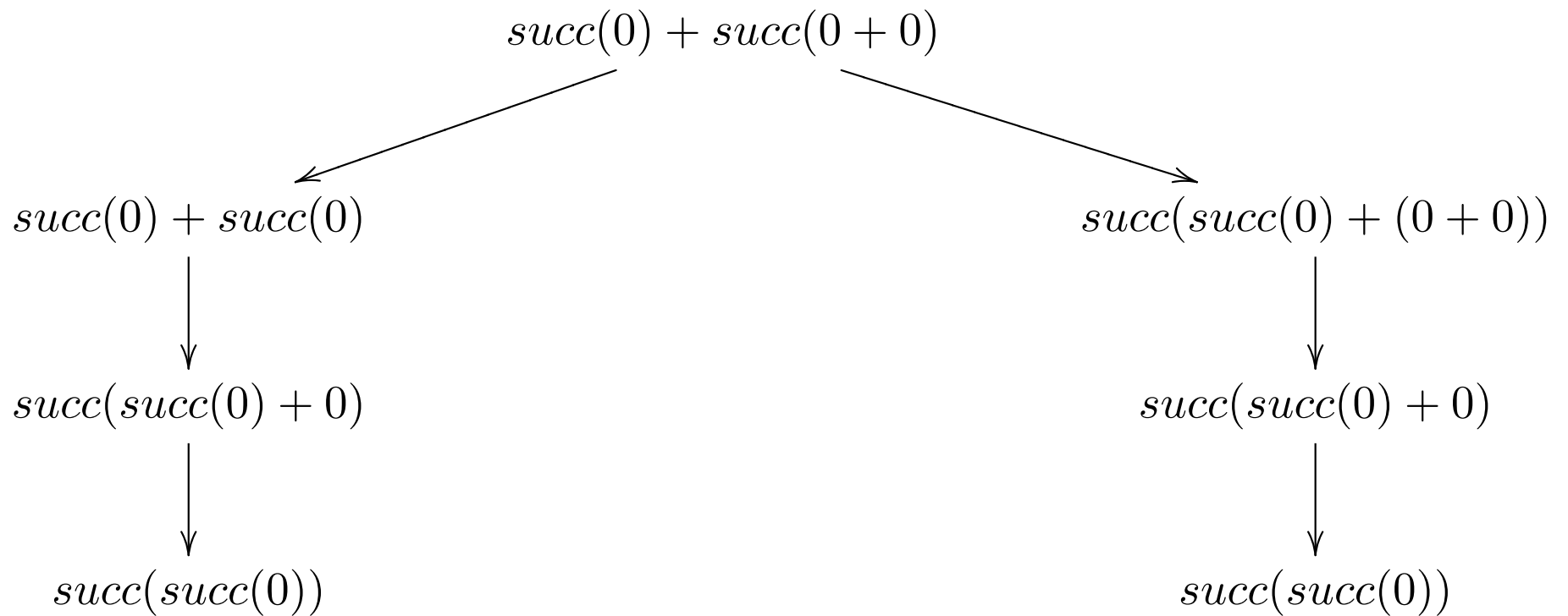
Arborele de reducere

(S, Σ) semnătură, R un sistem de rescriere (TRS)

- **Arborele de reducere** al termenului t este definit astfel:
 - rădăcina arborelui are eticheta t ,
 - descendenții nodului cu eticheta u sunt etichetați cu termenii u' care verifică $u \rightarrow_R u'$.
- Orice nod al unui arbore de reducere are un număr finit de descendenți deoarece R este o mulțime finită.
- Dacă R se termină atunci
$$\mu(t) := \text{înălțimea arborelui de reducere asociat lui } t.$$
$$t \rightarrow_R t' \Rightarrow \mu(t) > \mu(t')$$

Arbore de reducere

$$R = \{x + 0 \rightarrow x, x + \text{succ}(y) \rightarrow \text{succ}(x + y)\}$$



Terminare

(S, Σ) semnătură, R un sistem de rescriere (TRS)

Lema lui König. Dacă R este noetherian atunci orice termen are un arbore de reducere finit.

- Sunt echivalente

- R este noetherian

- oricărui termen t îi poate fi asociat un număr natural

- $\mu(t) \in \mathbb{N}$ astfel încât $t \rightarrow_R t'$ implică $\mu(t) > \mu(t')$

- $(\mu(t))$ este o măsură strict descrescătoare în raport cu relația de rescriere).

Terminare

(S, Σ) semnătură, R un sistem de rescriere (TRS)

Propoziție. Fie A o (S, Σ) -algebră astfel încât:

- $A_s = \mathbb{N}$ or. $s \in S$,
- or. $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$, dacă $k_i > k'_i$ atunci
 $A_\sigma(k_1, \dots, k_i, \dots, k_n) > A_\sigma(k_1, \dots, k'_i, \dots, k_n)$,
- $\tilde{a}(l) > \tilde{a}(r)$ or. $l \rightarrow r \in R$ or. $a : Var(l) \rightarrow A$.

Atunci R este noetherian

$$\blacksquare R = \{x + 0 \rightarrow 0, x + succ(y) \rightarrow succ(x + y)\}$$

$$A_0 := 1, A_{succ}(k) := k + 1,$$

$$A_+(k, m) := k + 2 * m$$

$$(k +_A m := k + 2 * m) \text{ or. } k, m \in \mathbb{N}.$$

Confluență. Perechi critice

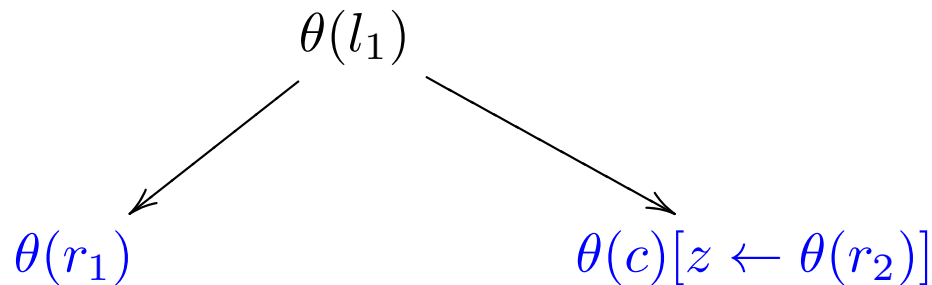
(S, Σ) semnătură, R un sistem de rescriere (TRS)

Fie $l_1 \rightarrow r_1, l_2 \rightarrow r_2 \in R$ astfel încât:

- $Var(l_1) \cup Var(l_2) = \emptyset$,
- $l_1 = c[z \leftarrow t]$ unde $nr_z(c) = 1$, t nu este variabilă (t este subtermen al lui l_1 care nu este variabilă),
- θ c.g.u pentru t și l_2 ($\Rightarrow \theta(t) = \theta(l_2)$).

Atunci $(\theta(r_1), \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)])$ este **pereche critică**.

Confluență. Perechi critice



$$l_1 \rightarrow r_1, l_2 \rightarrow r_2 \in R,$$

$$\text{Var}(l_1) \cup \text{Var}(l_2) = \emptyset,$$

$$l_1 = c[z \rightarrow t],$$

$$\theta(t) = \theta(l_2) \text{ c.g.u}$$

Teorema Perechilor Critice.

Dacă R este noetherian atunci sunt echivalente:

- R este confluent,
- $t_1 \downarrow_R t_2$ oricare (t_1, t_2) pereche critică.

Exemplu

$R = \{f(f(x)) \rightarrow x\}$ este confluent.

Determinăm perechile critice:

- $l_1 := f(f(x)), r_1 := x, l_2 := f(f(y)), r_2 := y$
- Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $f(f(x))$ și $f(x)$.

(1) $t := f(f(x)), c = z, \theta := \{x \leftarrow y\}$

$$\theta(r_1) = y, \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y$$

(2) $t := f(x), c = f(z), \theta := \{x \leftarrow f(y)\}$

$$\theta(r_1) = f(y), \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = f(y)$$

Perechile critice sunt (y, y) și $(f(y), f(y))$. Deoarece $y \downarrow y$ și $f(y) \downarrow f(y)$, sistemul de rescriere R este confluent.

Completarea unui TRS

(S, Σ) semnătură

Intrare. R un sistem de rescriere (TRS) noetherian.

Inițializare. $T := R$

Se execută următorii pași, cât timp este posibil:

(1) $CP := CP(T) = \{(t_1, t_2) \mid (t_1, t_2) \text{ pereche critică în } T\}$

(2) Dacă $t_1 \downarrow t_2$ oricare $(t_1, t_2) \in CP$,

atunci STOP (T este completarea lui R).

(3) Dacă $(t_1, t_2) \in CP$, $t_1 \not\downarrow t_2$, atunci

dacă $T \cup \{fn(t_1) \rightarrow fn(t_2)\}$ e noetherian, atunci

$T := T \cup \{fn(t_1) \rightarrow fn(t_2)\}$,

altfel dacă $T \cup \{fn(t_2) \rightarrow fn(t_1)\}$ e noetherian, atunci

$T := T \cup \{fn(t_2) \rightarrow fn(t_1)\}$,

altfel STOP (R nu are completare).

Ieșire. T completarea lui R (T este noetherian și confluent)

sau faptul că R nu are completare.

Exemplu

$S := \{s\}, \Sigma := \{* : ss \rightarrow s\}, E := \{\forall\{x, y, a\}(x * y) * (y * a) \doteq y)\}$

$R_E := \{(x * y) * (y * a) \rightarrow y\}, \mu(t) := \text{lungimea termenului } t$

Determinăm perechile critice:

- $l_1 := (x * y) * (y * a), r_1 := y, l_2 := (x' * y') * (y' * a'), r_2 := y'$
- Subtermenii lui l_1 care nu sunt variabile sunt $(x * y)$ și $y * a$.

(1) $t := x * y, c = z * (y * a), \theta := \{x \leftarrow x' * y', y \rightarrow y' * a'\}$

$\theta(r_1) = y' * a', \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = y' * ((y' * a') * a)$

(2) $t := y * a, c = (x * y) * z, \theta := \{y \rightarrow x' * y', a \rightarrow y' * a'\}$

$\theta(r_1) = x' * y', \theta(c)[z \leftarrow \theta(r_2)] = (x * (x' * y')) * y'$

$CP = \{(y * a, y * ((y * a) * a)), (x * y, (x * (x * y)) * y)\}$

$R_E \cup \{y * ((y * a) * a) \rightarrow y * a, (x * (x * y)) * y \rightarrow x * y\}$ este complet