Programare logică

Substituţii. Unificare

F. Baader, T. Nipkow,
Terms Rewriting and All That,
Cambridge University Press, 1998.

Substituţie

(S, Σ) signatură multisortată, X şi Y mulţimi de variabile

O substituţie a variabilelor din X cu termeni din $T_\Sigma(Y)$ este o funcţie $\nu : X \to T_\Sigma(Y)$.

Substituţia ν se extinde la o funcţie $\tilde{\nu} : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(Y)$ după cum urmează:

- $\tilde{\nu}_s(x) := \nu(x)$ or. $x \in X_s$,
- $\tilde{\nu}_s(\sigma) := \sigma$ or. $\sigma :\to s$,
- $\tilde{\nu}_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) := \sigma(\tilde{\nu}_{s_1}(t_1), \ldots, \tilde{\nu}_{s_n}(t_n))$ or. $\sigma : s_1 \ldots s_n \to s$, or. $t_1 \in T_\Sigma(X)_{s_1}$, …, $t_n \in T_\Sigma(X)_{s_n}$.

Observaţie: $\tilde{\nu} : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(Y)$ morfism de (S, Σ)-algebre.

Substituţie

X, Y şi Z mulţimi de variabile

- Dacă $\nu : X \to T_\Sigma(Y)$, $\mu : X \to T_\Sigma(Y)$ atunci

$$\nu = \mu \Leftrightarrow \tilde{\nu} = \tilde{\mu}.$$

  - vom identifica frecvent $\tilde{\nu}$ cu ν

Substituţie

X, Y şi Z mulţimi de variabile

- Dacă $\nu : X \to T_\Sigma(Y)$, $\mu : X \to T_\Sigma(Y)$ atunci

$$\nu = \mu \Leftrightarrow \tilde{\nu} = \tilde{\mu}.$$

  - vom identifica frecvent $\tilde{\nu}$ cu ν

- $\{x_1 \leftarrow t_1, \cdots, x_n \leftarrow t_n\}$ e notaţie pt. $\sigma : X \to T_\Sigma(X)$, $\sigma(x_i) := t_i$ or. $i = 1, \ldots, n$ şi $\sigma(x) := x$ pt. $x \neq x_i$

Substituţie

X, Y şi Z mulţimi de variabile

- Dacă $\nu : X \to T_\Sigma(Y)$, $\mu : X \to T_\Sigma(Y)$ atunci

$$\nu = \mu \Leftrightarrow \tilde{\nu} = \tilde{\mu}.$$

  - vom identifica frecvent $\tilde{\nu}$ cu ν

- $\{x_1 \leftarrow t_1, \cdots, x_n \leftarrow t_n\}$ e notaţie pt. $\sigma : X \to T_\Sigma(X)$, $\sigma(x_i) := t_i$ or. $i = 1, \ldots, n$ şi $\sigma(x) := x$ pt. $x \neq x_i$
- compunerea substituţiilor $\nu : X \to T_\Sigma(Y)$, $\mu : Y \to T_\Sigma(Z)$ $\nu; \mu : X \to T_\Sigma(Z)$, $(\nu; \mu)_s(x) := \nu; \tilde{\mu}$

Substituţie

X, Y şi Z mulţimi de variabile

- Dacă $\nu : X \to T_\Sigma(Y)$, $\mu : X \to T_\Sigma(Y)$ atunci

$$\nu = \mu \Leftrightarrow \tilde{\nu} = \tilde{\mu}.$$

  - vom identifica frecvent $\tilde{\nu}$ cu ν

- $\{x_1 \leftarrow t_1, \cdots, x_n \leftarrow t_n\}$ e notaţie pt. $\sigma : X \to T_\Sigma(X)$, $\sigma(x_i) := t_i$ or. $i = 1, \ldots, n$ şi $\sigma(x) := x$ pt. $x \neq x_i$

- compunerea substituţiilor $\nu : X \to T_\Sigma(Y)$, $\mu : Y \to T_\Sigma(Z)$ $\nu;\mu : X \to T_\Sigma(Z)$, $(\nu;\mu)_s(x) := \nu;\tilde{\mu}$

- compunerea substituţiilor este asociativă,

Substituţie

X, Y şi Z mulţimi de variabile

- Dacă $\nu : X \to T_\Sigma(Y)$, $\mu : X \to T_\Sigma(Y)$ atunci

$$\nu = \mu \Leftrightarrow \tilde{\nu} = \tilde{\mu}.$$

  - vom identifica frecvent $\tilde{\nu}$ cu ν
- $\{x_1 \leftarrow t_1, \cdots, x_n \leftarrow t_n\}$ e notaţie pt. $\sigma : X \to T_\Sigma(X)$, $\sigma(x_i) := t_i$ or. $i = 1, \ldots, n$ şi $\sigma(x) := x$ pt. $x \neq x_i$
- compunerea substituţiilor $\nu : X \to T_\Sigma(Y)$, $\mu : Y \to T_\Sigma(Z)$ $\nu;\mu : X \to T_\Sigma(Z)$, $(\nu;\mu)_s(x) := \nu;\tilde{\mu}$
- compunerea substituţiilor este asociativă,
- compunerea substituţiilor nu este în general comutativă,

Exemple

$S = \{s\}$, $\Sigma = \{a :\to s, p : sssss \to s, f : s \to s, g : s \to s\}$,
$X = \{x, y, z, u, v\}$

$\boxed{t \;=\; p(u, v, x, y, z)}$

$\nu = \{x \leftarrow f(y), y \leftarrow f(a), z \leftarrow u\}$

$\mu = \{y \leftarrow g(a), u \leftarrow z, v \leftarrow f(f(a))\}$

$\boxed{\nu(t) \;=\; p(u, v, f(y), f(a), u)}$

$\nu;\mu = \{x \leftarrow f(g(a)), y \leftarrow f(a), u \leftarrow z, v \leftarrow f(f(a))\}$

$\boxed{(\nu;\mu)(t) \;=\; p(z, f(f(a)), f(g(a)), f(a), z)}$

$(S = \{s\}, \Sigma)$ signatură, X mulţime de variabile

- O ecuaţie este o pereche de termeni $\langle t, t' \rangle$, unde t, $t' \in T_\Sigma(X)$.
  Ecuaţia $\langle t, t' \rangle$ o vom nota $t \doteq t'$.

$\doteq$ egalitate formală, $=$ egalitate efectivă

Unificare. Cazul monosortat.

$(S = \{s\}, \Sigma)$ signatură, X mulţime de variabile

- O ecuaţie este o pereche de termeni $\langle t, t' \rangle$, unde t, $t' \in T_\Sigma(X)$.
  Ecuaţia $\langle t, t' \rangle$ o vom nota $t \doteq t'$.

  $\doteq$ egalitate formală, $=$ egalitate efectivă

- O problemă de unificare este o mulţime finită de ecuaţii

$$U = \{t_1 \doteq t'_1, \ldots, t_n \doteq t'_n\}$$

Unificare. Cazul monosortat.

$(S = \{s\}, \Sigma)$ signatură, X mulţime de variabile
$U = \{t_1 \doteq t'_1, \ldots, t_n \doteq t'_n\}$ problemă de unificare

- Un unificator (o soluţie) pentru U este o substituţie $\nu : X \to T_\Sigma(X)$ a.î. $\nu(t_i) = \nu(t'_i)$ or. $i = 1, \ldots, n$. Notăm cu $Unif(U)$ mulţimea unificatorilor lui U.

Unificare. Cazul monosortat.

$(S = \{s\}, \Sigma)$ signatură, X mulţime de variabile
$U = \{t_1 \doteq t'_1, \ldots, t_n \doteq t'_n\}$ problemă de unificare

- Un unificator (o soluţie) pentru U este o substituţie $\nu : X \to T_\Sigma(X)$ a.î. $\nu(t_i) = \nu(t'_i)$ or. $i = 1, \ldots, n$. Notăm cu $Unif(U)$ mulţimea unificatorilor lui U.
- Un unificator $\nu \in Unif(U)$ este un cel mai general unificator (cgu, mgu) dacă
  or. $\nu' \in Unif(U)$ ex. τ substituţie a.î. $\nu' = \nu; \tau$.

Unificare. Cazul monosortat.

$(S = \{s\}, \Sigma)$ signatură, X mulţime de variabile
$U = \{t_1 \doteq t'_1, \ldots, t_n \doteq t'_n\}$ problemă de unificare

- Un unificator (o soluţie) pentru U este o substituţie $\nu : X \to T_\Sigma(X)$ a.î. $\nu(t_i) = \nu(t'_i)$ or. $i = 1, \ldots, n$.
  Notăm cu $Unif(U)$ mulţimea unificatorilor lui U.
- Un unificator $\nu \in Unif(U)$ este un cel mai general unificator (cgu, mgu) dacă
  or. $\nu' \in Unif(U)$ ex. τ substituţie a.î. $\nu' = \nu; \tau$.
- Algoritmul de unificare va determina cgu pentru problema de unificare sau va răspunde ca problema nu admite unificatori.

Exemplu

$S = \{s\}$, $\Sigma = \{0 :\to s, + : ss \to s, * : ss \to s\}$, $X = \{x, y, z\}$

$t = x + (y * y) = +(x, *(y, y))$,

$u = x + (y * x) = +(x, *(y, x))$

- $\nu(x) := y$, $\nu(y) := y$, $\nu(z) := z$,

Exemplu

$S = \{s\}$, $\Sigma = \{0 :\to s, + : ss \to s, * : ss \to s\}$, $X = \{x, y, z\}$

$t = x + (y * y) = +(x, *(y, y))$,

$u = x + (y * x) = +(x, *(y, x))$

- $\nu(x) := y$, $\nu(y) := y$, $\nu(z) := z$,
- $\nu'(x) := 0$, $\nu'(y) := 0$, $\nu'(z) := z$, $\nu' = \nu; \{y \leftarrow 0\}$

Exemplu

$S = \{s\}$, $\Sigma = \{0 :\to s, + : ss \to s, * : ss \to s\}$, $X = \{x, y, z\}$

$t = x + (y * y) = +(x, *(y, y))$,

$u = x + (y * x) = +(x, *(y, x))$

- $\nu(x) := y$, $\nu(y) := y$, $\nu(z) := z$,
- $\nu'(x) := 0$, $\nu'(y) := 0$, $\nu'(z) := z$, $\nu' = \nu; \{y \leftarrow 0\}$
- $\nu"(x) := z + 0$, $\nu"(y) := z + 0$, $\nu"(z) := z$,
  $\nu" = \nu; \{y \leftarrow z + 0\}$

Exemplu

$S = \{s\}$, $\Sigma = \{0 :\to s, + : ss \to s, * : ss \to s\}$, $X = \{x, y, z\}$

$t = x + (y * y) = +(x, *(y, y))$,

$u = x + (y * x) = +(x, *(y, x))$

- $\nu(x) := y$, $\nu(y) := y$, $\nu(z) := z$,
- $\nu'(x) := 0$, $\nu'(y) := 0$, $\nu'(z) := z$, $\nu' = \nu; \{y \leftarrow 0\}$
- $\nu"(x) := z + 0$, $\nu"(y) := z + 0$, $\nu"(z) := z$,
  $\nu" = \nu; \{y \leftarrow z + 0\}$
- $\mu(x) := z$, $\mu(y) := z$, $\mu(z) := z$, $\mu = \nu; \{y \leftarrow z\}$

Exemplu

$S = \{s\}$, $\Sigma = \{0 :\to s, + : ss \to s, * : ss \to s\}$, $X = \{x, y, z\}$

$t = x + (y * y) = +(x, *(y, y))$,

$u = x + (y * x) = +(x, *(y, x))$

- $\nu(x) := y$, $\nu(y) := y$, $\nu(z) := z$,
- $\nu'(x) := 0$, $\nu'(y) := 0$, $\nu'(z) := z$, $\nu' = \nu; \{y \leftarrow 0\}$
- $\nu"(x) := z + 0$, $\nu"(y) := z + 0$, $\nu"(z) := z$,
  $\nu" = \nu; \{y \leftarrow z + 0\}$
- $\mu(x) := z$, $\mu(y) := z$, $\mu(z) := z$, $\mu = \nu; \{y \leftarrow z\}$
- ν şi μ sunt cgu
  cgu nu este unic

Unificare

$(S = \{*\}, \Sigma)$ signatură, X mulţime de variabile

- Spunem că problema de unificare $R = \{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$ este rezolvată dacă
  - $x_i \in X$, $x_1 \neq x_j$ or. $i \neq j$
  - $x_i \notin \bigcup_{i=1}^{n} Var(t_i)$ or. $i = 1, \ldots, n$.

Unificare

$(S = \{*\}, \Sigma)$ signatură, X mulţime de variabile

- Spunem că problema de unificare $R = \{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$ este rezolvată dacă
  - $x_i \in X$, $x_1 \neq x_j$ or. $i \neq j$
  - $x_i \notin \bigcup_{i=1}^{n} Var(t_i)$ or. $i = 1, \ldots, n$.
- O problemă rezolvată R defineşte o substituţie ν_R astfel:
  - $\nu_R(x_i) := \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$.

Unificare

$(S = \{*\}, \Sigma)$ signatură, X mulţime de variabile

- Spunem că problema de unificare $R = \{x_1 \doteq t_1, \ldots, x_n \doteq t_n\}$ este rezolvată dacă
  - $x_i \in X$, $x_1 \neq x_j$ or. $i \neq j$
  - $x_i \notin \bigcup_{i=1}^{n} Var(t_i)$ or. $i = 1, \ldots, n$.
- O problemă rezolvată R defineşte o substituţie ν_R astfel:
  - $\nu_R(x_i) := \{x_1 \leftarrow t_1, \ldots, x_n \leftarrow t_n\}$.
- Propoziţie. ν_R este cgu idempotent pentru R, i.e. $\nu_R \in Unif(R)$, $\nu' = \nu_R; \nu'$ or. $\nu' \in Unif(R)$, $\nu_R; \nu_R = \nu_R$.