ALT SEMINAR DE PROGRAMARE LOGICA

Claudia Mureşan

1 Exercitii

Exercitiul 1.1. Determinati signatura corespunzatoare urmatoarei gramatici independente de context:

- multimea neterminalelor este: $\mathcal{N} = \{\mathbf{T}, \mathbf{V}, \mathbf{B}, \mathbf{N}, \mathbf{R}, \mathbf{E}, \mathbf{P}\}$;
- multimea terminalelor este: $\mathcal{T} = \{\text{true}, \leq, ||, !, +, -, =, \{, \}, \text{if}, \text{while}, ;\} \cup \{reg\ n | n \in \{1,2,3\}\} \cup \{i | i \in \overline{0,9}\}$;
- productiile (vom nota multimea lor cu $\mathcal{P}$, iar fiecare dintre productii este notata prin litera greceasca intre paranteze patrate care o preceda) sunt:

$$\begin{array}{rl}
[\tau_{1,2}] & \mathbf{T} \to \text{true} \mid \mathbf{V} \leq \mathbf{V} \\
[\beta_{1,2,3}] & \mathbf{B} \to \mathbf{T} \mid \mathbf{B} \mid\mid \mathbf{B} \mid !\ \mathbf{B} \\
[\nu_i] & \mathbf{N} \to i, \quad i \in \overline{0,9} \\
[\mu_i] & \mathbf{N} \to i\ \mathbf{N}, \quad i \in \overline{0,9} \\
[\rho_n] & \mathbf{R} \to reg\ n, \quad n \in \{1,2,3\} \\
[\gamma_{1,2,3,4}] & \mathbf{V} \to \mathbf{N} \mid \mathbf{R} \mid \mathbf{V} + \mathbf{V} \mid \mathbf{V} - \mathbf{V} \\
[\epsilon_{1,2,3,4}] & \mathbf{E} \to \mathbf{R}\ =\ \mathbf{V} \mid \{\ \mathbf{P}\ \} \mid \text{if}\ \mathbf{B}\ \mathbf{E} \mid \text{while}\ \mathbf{B}\ \mathbf{E} \\
[\pi_{1,2}] & \mathbf{P} \to \mathbf{E} \mid \mathbf{E}\ ;\ \mathbf{P}
\end{array}$$

In scrierea productiilor am folosit conventia pentru scrierea mai multor productii pe un singur rand, de exemplu:

$[\alpha_{1,2,3}]$ $Neterminal \to Sir_1 | Sir_2 | Sir_3$

este o scriere concentrata pentru urmatoarele 3 productii:

$[\alpha_1]$ $Neterminal \to Sir_1$

$[\alpha_2]$ $Neterminal \to Sir_2$

$[\alpha_3]$ $Neterminal \to Sir_3$

De asemenea, scrierea:

$[\alpha_k]$ $Neterminal \to k, \quad k \in \{1,2,3,4\}$

semnifica, desigur, urmatoarele 4 productii:

$[\alpha_1]$ $\quad Neterminal \rightarrow 1$
$[\alpha_2]$ $\quad Neterminal \rightarrow 2$
$[\alpha_3]$ $\quad Neterminal \rightarrow 3$
$[\alpha_4]$ $\quad Neterminal \rightarrow 4$

Rezolvare: Acestei gramatici i se asociaza signatura (S, Σ), unde multimea de sorturi este egala cu multimea neterminalelor: $S = \mathcal{N}$, iar multimea simbolurilor de operatie este egala cu multimea productiilor: $\Sigma = \mathcal{P} = \{\tau_t, \beta_b, \nu_i, \mu_i, \rho_n, \gamma_v, \epsilon_e, \pi_p | t \in \{1,2\}, b \in \{1,2,3\}, i \in \overline{0,9}, n \in \{1,2,3\}, v \in \{1,2,3,4\}, e \in \{1,2,3,4\}, p \in \{1,2\}\}$, cu urmatoarele aritati si sorturi rezultat:

- $\tau_1 :\rightarrow \mathbf{T}$ (adica $\tau_1 \in \Sigma_{\lambda,\mathbf{T}}$, unde λ este cuvantul vid)
- $\tau_2 : \mathbf{V}\ \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{T}$
- $\beta_1 : \mathbf{T} \ \rightarrow \mathbf{B}$
- $\beta_2 : \mathbf{B}\ \mathbf{B} \ \rightarrow \mathbf{B}$
- $\beta_3 : \mathbf{B} \ \rightarrow \mathbf{B}$
- pentru fiecare $i \in \overline{0,9}$, $\nu_i :\rightarrow \mathbf{N}$
- pentru fiecare $i \in \overline{0,9}$, $\mu_i : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{N}$
- pentru fiecare $n \in \{1,2,3\}$, $\rho_n :\rightarrow \mathbf{R}$
- $\gamma_1 : \mathbf{N} \rightarrow \mathbf{V}$
- $\gamma_2 : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{V}$
- $\gamma_3 : \mathbf{V}\ \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$
- $\gamma_4 : \mathbf{V}\ \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}$
- $\epsilon_1 : \mathbf{R}\ \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{E}$
- $\epsilon_2 : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{E}$
- $\epsilon_3 : \mathbf{B}\ \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$
- $\epsilon_4 : \mathbf{B}\ \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{E}$
- $\pi_1 : \mathbf{E} \rightarrow \mathbf{P}$
- $\pi_2 : \mathbf{E}\ \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{P}$

Exercitiul 1.2. Fie (S, Σ) o signatura, $\mathcal{K}$ o clasa de $(S, \Sigma)-$algebre, $\mathcal{I}$ o algebra initiala in $\mathcal{K}$, $s \in S$ un sort si $l, r \in (T_\Sigma)_s$ doi termeni de sort s din $(S, \Sigma)-$algebra termenilor fara variabile $T_\Sigma = T_\Sigma(\emptyset)$. Sa se demonstreze ca, daca $\mathcal{I} \models (\forall\, \emptyset)\, l \doteq_s r$, atunci $\mathcal{A} \models (\forall\, \emptyset)\, l \doteq_s r$ oricare ar fi $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$.

Rezolvare: Fie $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$.

Stim ca T_Σ este algebra initiala in clasa tuturor $(S, \Sigma)-$algebrelor, prin urmare, conform definitiei, exista un unic $(S, \Sigma)-$morfism $y : T_\Sigma \to \mathcal{I}$ si exista un unic $(S, \Sigma)-$morfism $\alpha : T_\Sigma \to \mathcal{A}$.

Pe de alta parte, conform ipotezei, $\mathcal{I}$ este algebra initiala in $\mathcal{K}$, iar $\mathcal{A} \in \mathcal{K}$, asadar exista un unic $(S, \Sigma)-$morfism $h : \mathcal{I} \to \mathcal{A}$.

$$\begin{tikzcd} T_\Sigma \arrow[r, "y"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathcal{I} \arrow[d, "h"] \\ & \mathcal{A} \end{tikzcd}$$

Dar compunerea dintre $(S, \Sigma)-$morfismele y si h este un $(S, \Sigma)-$morfism de la T_Σ la $\mathcal{A}$, prin urmare unicitatea lui α ne asigura de faptul ca aceasta compunere coincide cu α: $y; h = \alpha$.

Stim ca de la $\emptyset$ la orice multime M exista o unica functie f, anume $f = (\emptyset, \emptyset, M)$, cu notatia functiei prin tripletul (domeniu,grafic,codomeniu). Orice functie g de la o multime P la multimea M extinde functia f, pentru ca restrictia $g\,|_\emptyset$ este, desigur, unica functie de la $\emptyset$ la M, adica $g\,|_\emptyset = f$.

Avand in vedere observatiile din paragraful anterior, sa recitim definitia satisfacerii unei $(S, \Sigma)-$ecuatii si s-o particularizam la cazul in care multimea de variabile este vida: in acest caz obtinem: oricare ar fi o $(S, \Sigma)-$algebra $\mathcal{B}$, $\mathcal{B} \models (\forall\, \emptyset)\, l \doteq_s r$ daca si numai daca, oricare ar fi $(S, \Sigma)-$morfismul $f : T_\Sigma \to \mathcal{B}$, are loc egalitatea: $f_s(l) = f_s(r)$.

Ipoteza spune ca $\mathcal{I} \models (\forall\, \emptyset)\, l \doteq_s r$, prin urmare avem: $y_s(l) = y_s(r)$, de unde rezulta ca $h_s(y_s(l)) = h_s(y_s(r))$, ceea ce se scrie echivalent aplicand definitia compunerii de functii $S-$sortate sub forma: $(y; h)_s(l) = (y; h)_s(r)$, adica $\alpha_s(l) = \alpha_s(r)$. Dar α este unicul $(S, \Sigma)-$morfism de la T_Σ la $\mathcal{A}$, prin urmare $\mathcal{A} \models (\forall\, \emptyset)\, l \doteq_s r$ (a se vedea paragraful anterior).

Exercitiul 1.3. Fie specificatia monosortata (S, Σ, E), cu:

- $S = \{bool\}$;
- $\Sigma = \{0 :\to bool, 1 :\to bool, succ : bool \to bool, fct : bool \to bool\}$;

- $E = \{(\forall\, \emptyset)\, succ(0) \doteq_{bool} 1, (\forall\, \emptyset)\, fct(0) \doteq_{bool} 0, (\forall\, \emptyset)\, fct(1) \doteq_{bool} 1,$ $(\forall\, \{x\})\, fct(succ(x)) \doteq_{bool} fct(x)\}$.

Aratati ca $E \vdash (\forall\, \emptyset)\, 1 \doteq_{bool} 0$ printr-o demonstratie in logica ecuationala, in care sa indicati la fiecare pas regula de deductie folosita.

Rezolvare: Sa notam ecuatiile din E in felul urmator:
(EC1) $(\forall\, \emptyset)\, succ(0) \doteq_{bool} 1$
(EC2) $(\forall\, \emptyset)\, fct(0) \doteq_{bool} 0$
(EC3) $(\forall\, \emptyset)\, fct(1) \doteq_{bool} 1$
(EC4) $(\forall\, \{x\})\, fct(succ(x)) \doteq_{bool} fct(x)$

Ecuatia de demonstrat are urmatoarea demonstratie formala in logica ecuationala:

	Ecuatia curenta	Ecuatiile folosite	Regula de deductie folosita
(e1)	$(\forall\, \emptyset)\, fct(succ(0)) \doteq_{bool} fct(0)$	(EC4)	$\mathbf{Sub_E} : x \leftarrow 0$
(e2)	$(\forall\, \emptyset)\, fct(succ(0)) \doteq_{bool} 0$	(e1), (EC2)	**T**
(e3)	$(\forall\, \emptyset)\, fct(succ(0)) \doteq_{bool} fct(1)$	(EC1)	$\mathbf{C\Sigma}$
(e4)	$(\forall\, \emptyset)\, fct(succ(0)) \doteq_{bool} 1$	(e3), (EC3)	**T**
(e5)	$(\forall\, \emptyset)\, 1 \doteq_{bool} fct(succ(0))$	(e4)	**S**
(e6)	$(\forall\, \emptyset)\, 1 \doteq_{bool} 0$	(e5), (e2)	**T**

Exercitiul 1.4. Fie signatura monosortata (S, Σ), cu $S = \{s\}$ si $\Sigma = \{0 :\to s, f : s \to s\}$. Aratati ca sistemul de rescriere $R = \{(\forall\, \{x\})\, f(f(x)) \to 0\}$ nu este confluent.

Rezolvare: Sa consideram termenul $f(f(f(0)))$.

Daca in unica regula de rescriere a sistemului R aplicam:

- substitutia $x \leftarrow f(0)$, obtinem rescrierea: $f(f(f(0))) \to 0$;
- substitutia $x \leftarrow 0$, obtinem rescrierea: $f(f(0)) \to 0$, iar daca in aceasta rescriere aplicam regula $\mathbf{C\Sigma}$ obtinem: $f(f(f(0))) \to f(0)$.

Niciunul dintre termenii 0 si $f(0)$ nu unifica cu membrul stang $f(f(x))$ al unicei reguli de rescriere a sistemului R, pentru ca, indiferent ce valoare ar primi x printr-o substitutie, $f(f(x))$ nu ar deveni literal identic nici cu 0, nici cu $f(0)$. Aceasta inseamna ca termenii 0 si $f(0)$ nu se pot rescrie, deci sunt forme normale ale sistemului de rescriere R. Acesti termeni sunt in mod clar diferiti, pentru ca nu sunt literal identici.

Prin urmare, termenul $f(f(f(0)))$ are doua forme normale diferite si, in concluzie, sistemul de rescriere R nu este confluent.

Exercitiul 1.5. Fie (S, Σ) o signatura monosortata, cu: $S = \{s\}$ si $\Sigma = \{* : s\ s \to s, ^{-1} : s \to s\}$. Vom nota infixat operatia $*$ si postfixat operatia $^{-1}$. Daca $X = \{x, y, z, u, v\}$ este o multime de variabile, gasiti o substitutie $\sigma : X \to T_\Sigma(X)$ astfel incat $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$, unde $t_1 = (x * y) * z$ si $t_2 = v * (u * v)^{-1}$. Am notat unicul $(S, \Sigma)-$endomorfism al lui $T_\Sigma(X)$ la care se extinde σ tot cu σ, asa cum este uzual.

Rezolvare: Notam $U = \{t_1 \doteq_s t_2\} = \{(x*y)*z \doteq_s v*(u*v)^{-1}\}$. Avem de rezolvat problema de unificare U. O rezolvam prin aplicarea algoritmului de unificare:

(i) *initializare:* $R = U$

(ii) *descompunere:* $R = \{x * y \doteq_s v, z \doteq_s (u * v)^{-1}\}$

(iii) *orientare:* $R = \{v \doteq_s x * y, z \doteq_s (u * v)^{-1}\}$

(iv) *eliminare:* $R = \{v \leftarrow x * y, z \doteq_s (u * (x * y))^{-1}\}$

(v) *eliminare:* $R = \{v \leftarrow x * y, z \leftarrow (u * (x * y))^{-1}\}$

O substitutie σ care verifica $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ este: $\sigma : \{v \leftarrow x * y, z \leftarrow (u * (x * y))^{-1}\}$, scrisa detaliat prin definitia ei pe fiecare variabila din X astfel:

a	$\sigma(a)$
x	x
y	y
z	$(u * (x * y))^{-1}$
u	u
v	$x * y$

2 Rezultate teoretice

Propozitia 2.1. *Reflexivitatea, simetria, tranzitivitatea si compatibilitatea cu operatiile sunt reguli de deductie corecte pentru logica ecuationala.*

Demonstratie: Conform definitiei, o congruenta pe o structura algebrica A este o relatie de echivalenta pe A compatibila cu operatiile lui A, adica o relatie binara pe A care este reflexiva, simetrica, tranzitiva si compatibila cu operatiile lui A. Daca (S, Σ, Γ) este o specificatie si $\mathcal{A}$ este o $(S, \Sigma, \Gamma)-$algebra, atunci o congruenta pe $\mathcal{A}$ este o relatie binara pe suportul lui $\mathcal{A}$ care verifica proprietatile de reflexivitate, simetrie, tranzitivitate si compatibilitate cu operatiile lui $\mathcal{A}$ corespunzatoare simbolurilor de operatii din Σ. S-a demonstrat in curs ca relatia de congruenta semantica este o congruenta pe o $(S, \Sigma, \Gamma)-$algebra, ceea ce, conform definitiei amintite mai sus, inseamna ca relatia de congruenta semantica este reflexiva, simetrica, tranzitiva si compatibila cu operatiile, ceea ce, daca ne amintim definitia congruentei semantice, semnifica exact faptul ca regulile **R**, **S**, **T** si **C$\boldsymbol{\Sigma}$** sunt corecte pentru logica ecuationala (a se vedea cursul II despre rescriere al domnului Profesor V. E. Cazanescu, din fisierul 2log.pdf, Teorema 1.2).

Propozitia 2.2. *Fie (S, Σ) o signatura multisortata si X si Y doua multimi $S-$ sortate de variabile raportat la signatura (S, Σ). Sa se demonstreze ca, daca multimile X si Y sunt in bijectie, atunci $(S, \Sigma)-$algebrele de termeni cu variabile din X si respectiv Y sunt $(S, \Sigma)-$izomorfe. Scris formal: daca $X \cong Y$, atunci $T_\Sigma(X) \cong T_\Sigma(Y)$.*

Demonstratie: Sa presupunem ca exista o bijectie $S-$sortata $\varphi : X \to Y$. Aceasta inseamna ca $\varphi = \{\varphi_s\}_{s\in S}$, unde, pentru fiecare sort $s \in S$, functia $\varphi_s : X_s \to Y_s$ este o bijectie. Sa definim functia $S-$sortata $f : X \to T_\Sigma(Y)$ prin: $f = \varphi$ ca valori, adica: pentru orice $s \in S$ si orice $x \in X_s$, $f_s(x) = \varphi_s(x) \in Y_s$. Conform unei teoreme din curs, functia f se extinde la un unic $(S, \Sigma)-$morfism $\tilde{f} : T_\Sigma(X) \to T_\Sigma(Y)$. Vom demonstra ca $(S, \Sigma)-$morfismul $\tilde{f}$ este bijectiv, adica este $(S, \Sigma)-$izomorfism.

Amintim ca, intr-o exprimare generala nu tocmai precisa (a se vedea definitiile exacte in curs), pentru orice simbol de operatie $\sigma \in \Sigma$ (sau, mai exact, folosind o notatie din curs, $\sigma \in |\Sigma|$), operatia corespunzatoare lui σ dintr-o algebra de termeni se noteaza tot cu σ.

Pentru inceput, sa demonstram ca $\tilde{f}$ este surjectiv, adica, pentru orice sort $s \in S$ si orice termen $u \in (T_\Sigma(Y))_s$, exista un termen $t \in (T_\Sigma(X))_s$, astfel incat $\tilde{f}_s(t) = u$. Procedam prin inductie structurala dupa u.

Pasul de verificare: Daca $u \in Y_s$, cum $\varphi_s : X_s \to Y_s$ este o bijectie, rezulta ca exista (chiar un unic) $t \in X_s$ astfel incat $u = \varphi_s(t) = f_s(t) = \tilde{f}_s(t)$. Daca $u \in (T_\Sigma(Y))_s$ astfel incat $u :\to s$ (adica, scris mai exact, $u \in \Sigma_{\lambda,s}$, unde λ este cuvantul vid), atunci $u \in (T_\Sigma(X))_s$ si, intrucat $\tilde{f}$ este $(S, \Sigma)-$morfism si deci comuta cu u, rezulta ca $\tilde{f}_s(u) = u$.

Pasul de inductie: Daca $u \in (T_\Sigma(Y))_s$, astfel incat exista un $n \in \mathbb{N}^*$, exista $n + 1$ sorturi $s_1, \ldots, s_n, s \in S$, exista in Σ un simbol de operatie $\sigma : s_1 s_2 \ldots s_n \to s$ si exista n termeni $u_1 \in (T_\Sigma(Y))_{s_1}, \ldots u_n \in (T_\Sigma(Y))_{s_n}$ cu proprietatile ca $\sigma(u_1, u_2, \ldots, u_n) = u$ si exista n termeni $t_1 \in (T_\Sigma(X))_{s_1}, \ldots t_n \in (T_\Sigma(X))_{s_n}$ astfel incat $\tilde{f}_{s_1}(t_1) = u_1, \tilde{f}_{s_2}(t_2) = u_2, \ldots, \tilde{f}_{s_n}(t_n) = u_n$, atunci, intrucat $\tilde{f}$ este $(S, \Sigma)-$morfism si deci comuta cu σ, rezulta ca, notand $t = \sigma(t_1, \dots, t_n) \in (T_\Sigma(X))_s$, avem ca: $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = \sigma(\tilde{f}_{s_1}(t_1), \tilde{f}_{s_2}(t_2), \dots, \tilde{f}_{s_n}(t_n)) = \sigma(u_1, u_2, \dots, u_n) = u$.

Conform principiului inductiei structurale, rezulta ca orice element al partii stabile generate de Y in $T_\Sigma(Y)$ are o preimagine prin $\tilde{f}$ in $T_\Sigma(X)$. Dar multimea de variabile Y genereaza algebra de termeni $T_\Sigma(Y)$, asadar am obtinut ca orice element al lui $T_\Sigma(Y)$ are o preimagine prin $\tilde{f}$ in $T_\Sigma(X)$, ceea ce inseamna ca $(S, \Sigma)-$morfismul $\tilde{f}$ este surjectiv.

Acum vom demonstra ca $(S, \Sigma)-$morfismul $\tilde{f}$ este injectiv, ceea ce va necesita o dubla inductie structurala. Avem de demonstrat ca, pentru orice sort $s \in S$ si orice termeni $t, t' \in (T_\Sigma(X))_s$, daca $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$ atunci $t = t'$. Procedam prin inductie structurala dupa t si apoi dupa t'.

Fiecare dintre cele doua inductii structurale va fi impartita in 3 cazuri, dintre care primele doua vor constitui pasul de verificare, iar ultimul va fi pasul de inductie.

Incepem inductia structurala dupa t.

Cazul 1*:* Fie $t \in X_s$, arbitrar. Demonstram prin inductie structurala dupa t' ca, pentru orice $t' \in (T_\Sigma(X))_s$, daca $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$ atunci $t = t'$.

Subcazul 1.1*:* Fie $t' \in X_s$, astfel incat $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$. Conform definitiei morfismului $\tilde{f}$, rezulta ca $\varphi_s(t) = f_s(t) = f_s(t') = \varphi_s(t')$. Dar φ_s este bijectiva, deci in particular injectiva, prin urmare $t = t'$.

Subcazul 1.2*:* Fie $t' :\to s$, astfel incat $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$. Dar $t \in X_s$, prin urmare $\tilde{f}_s(t) = f_s(t) = \varphi_s(t) \in Y_s$, in timp ce $\tilde{f}_s(t') = t' \in \Sigma_{\lambda,s}$ conform definitiilor operatiilor zeroare in algebra de termeni, iar $Y_s \cap \Sigma_{\lambda,s} = \emptyset$ pentru ca Y este multime de variabile raportat la signatura (S, Σ). Deci am obtinut o contradictie, ceea ce inseamna ca nu exista niciun $t' :\to s$ care sa satisfaca $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$, asadar in acest subcaz cerinta cazului 1 este satisfacuta in mod trivial.

Subcazul 1.3*:* Fie $t' \in (T_\Sigma(X))_s$ astfel incat $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$ si $t' = \sigma(t_1, \dots, t_n)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $s_1, \dots, s_n, s \in S$, $\sigma : s_1 \dots s_n \to s$, $t_1 \in (T_\Sigma(X))_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma(X))_{s_n}$, cu $t_1, \dots, t_n$ satisfacand ipoteza de inductie (in care ipoteza de inductie pentru t_i ($i \in \overline{1, n}$) este nebanala numai daca $s_i = s$, in caz contrar faptul ca ipoteza de inductie este raportata la t si definitia unei multimi de variabile aplicate lui Y asigurandu-ne ca egalitatea cu pricina nu este posibila; aceasta discutie va fi utila mai tarziu in demonstratie, dar momentan nu vom folosi ipoteza de inductie pentru niciunul dintre elementele $t_1, \dots, t_n$). In acest subcaz, avem ca $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t') = \tilde{f}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = \sigma(\tilde{f}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{f}_{s_n}(t_n))$. Dar, dupa cum am mentionat si mai sus in subcazul 1.2, $\tilde{f}_s(t) \in Y_s$, iar Y_s este disjuncta de multimea simbolurilor de operatie, asadar egalitatea de mai sus nu poate fi satisfacuta nici in acest subcaz, pentru ca termenii extremi ai acestui sir de egalitati nu sunt literal identici (a se revedea definitia unei algebre de termeni). Asadar si aici conditia din enuntul cazului 1 este satisfacuta in mod trivial.

La fel ca in cazul demonstratiei de mai sus pentru surjectivitatea lui $\tilde{f}$, principiul inductiei structurale si faptul ca multimea $S-$sortata X genereaza $(S, \Sigma)-$algebra de termeni $T_\Sigma(X)$ ne asigura de faptul ca tocmai am incheiat demonstratia cazului 1.

Cazul 2*:* Fie $t :\rightarrow s$, adica $t \in \Sigma_{\lambda,s}$, arbitrar. Demonstram prin inductie structurala dupa t' ca, pentru orice $t' \in (T_\Sigma(X))_s$, daca $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$ atunci $t = t'$.

Subcazul 2.1*:* Este subcazul in care $t' \in X_s$. Se trateaza analog subcazului 1.2.

Subcazul 2.2*:* Fie $t' :\rightarrow s$, astfel incat $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$. Dar $\tilde{f}$ este morfism si deci comuta cu operatiile zeroare, asadar $t = \tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t') = t'$, deci $t = t'$.

Subcazul 2.3*:* Fie $t' \in (T_\Sigma(X))_s$ astfel incat $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$ si $t' = \sigma(t_1, \dots, t_n)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $s_1, \dots, s_n, s \in S$, $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$, $t_1 \in (T_\Sigma(X))_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma(X))_{s_n}$, cu $t_1, \dots, t_n$ satisfacand ipoteza de inductie, pe care nu o vom folosi nici aici. In acest caz, egalitatea $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$ se transcrie prin $t = \tilde{f}_s(\sigma(t_1, \dots, t_n)) = \sigma(\tilde{f}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{f}_{s_n}(t_n))$. Insa $t \neq \sigma$, datorita faptului ca t si σ nu au aceeasi aritate si proprietatii multimii multisortate Σ de a avea componentele doua cate doua disjuncte (din definitia unei signaturi multisortate). Rezulta ca nu putem avea $t = \sigma(\tilde{f}_{s_1}(t_1), \dots, \tilde{f}_{s_n}(t_n))$, pentru ca membrii acestei egalitati nu sunt literal identici.

Principiul inductiei structurale si faptul ca multimea $S-$sortata X genereaza $(S, \Sigma)-$algebra de termeni $T_\Sigma(X)$ ne asigura de faptul ca tocmai am incheiat demonstratia cazului 2.

Cazul 3*:* Acesta este pasul de inductie al inductiei structurale exterioare, adica a inductiei structurale dupa t. Fie asadar $t \in (T_\Sigma(X))_s$ astfel incat $t = \sigma(t_1, \dots, t_n)$, unde $n \in \mathbb{N}^*$, $s_1, \dots, s_n, s \in S$, $\sigma : s_1 \dots s_n \rightarrow s$, $t_1 \in (T_\Sigma(X))_{s_1}, \dots, t_n \in (T_\Sigma(X))_{s_n}$, cu $t_1, \dots, t_n$ satisfacand ipoteza de inductie, anume ca preimaginea prin $\tilde{f}_s$ a valorii lui $\tilde{f}_s$ in fiecare dintre acesti termeni este o multime cu un singur element. Demonstram prin inductie structurala dupa t' ca, pentru orice $t' \in (T_\Sigma(X))_s$, daca $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$ atunci $t = t'$.

Subcazul 3.1*:* Este subcazul in care $t' \in X_s$. Se trateaza analog subcazului 1.3.

Subcazul 3.2*:* Este subcazul in care $t' :\rightarrow s$. Se trateaza analog subcazului 2.3.

Subcazul 3.3*:* Fie $t' \in (T_\Sigma(X))_s$ astfel incat $\tilde{f}_s(t) = \tilde{f}_s(t')$ si $t' = \sigma'(t'_1, \ldots, t'_m)$, unde $m \in \mathbb{N}^*$, $s'_1, \ldots, s'_m, s \in S$, $\sigma' : s'_1 \ldots s'_m \rightarrow s$, $t'_1 \in (T_\Sigma(X))_{s'_1}, \ldots, t'_m \in (T_\Sigma(X))_{s'_m}$, cu $t'_1, \ldots, t'_m$ satisfacand ipoteza de inductie, ipoteza care aici nu mai este raportata doar la t, ci si la $t_1, \ldots, t_n$, termeni care satisfac ipoteza de inductie a inductiei dupa t. In acest ultim subcaz, obtinem, conform definitiei operatiilor algebrei de termeni: $\sigma(\tilde{f}_{s_1}(t_1), \ldots, \tilde{f}_{s_n}(t_n)) = \tilde{f}_s(\sigma(t_1, \ldots, t_n)) = \tilde{f}_s(t') = \tilde{f}_s(\sigma'(t'_1, \ldots, t'_m)) = \sigma'(\tilde{f}_{s'_1}(t'_1), \ldots, \tilde{f}_{s'_m}(t'_m))$, prin urmare termenii extremi ai acestui sir de egalitati sunt literal identici, ceea ce inseamna ca: $\sigma = \sigma'$, asadar $n = m$, $s_1 = s'_1, \ldots, s_n = s'_n$ si $\tilde{f}_{s_1}(t_1) = \tilde{f}_{s'_1}(t'_1) = \tilde{f}_{s_1}(t'_1)$, ..., $\tilde{f}_{s_n}(t_n) = \tilde{f}_{s'_n}(t'_n) = \tilde{f}_{s_n}(t'_n)$. Acum aplicam ipoteza de inductie si obtinem ca $t_1 = t'_1$, $t_2 = t'_2$, ..., $t_n = t'_n$, asadar $t = \sigma(t_1, \ldots, t_n) = \sigma'(t'_1, \ldots, t'_n) = \sigma'(t'_1, \ldots, t'_m) = t'$.

Aici s-a incheiat inductia structurala dupa t, deci putem conchide: conform principiului inductiei structurale si faptului ca X genereaza pe $T_\Sigma(X)$, in acest moment demonstratia injectivitatii lui $\tilde{f}$ este completa.

Asadar $(S, \Sigma)-$morfismul $\tilde{f}$ este bijectiv, deci este un $(S, \Sigma)-$izomorfism intre $T_\Sigma(X)$ si $T_\Sigma(Y)$. Demonstratia propozitiei este incheiata.