Seminarul 5

1. O variabilă aleatoare continuă X are funcţia de densitate $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ cxe^{-x}, & x > 0. \end{cases}$
Determinaţi $c \in \mathbb{R}$ şi apoi calculaţi valoarea medie a lui X.

R: $1 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = c\int_0^{\infty} xe^{-x}dx = c \implies c = 1$. $E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \int_0^{\infty} x^2e^{-x}dx = 2$.

2. Funcţia de repartiţie $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a unei variabile aleatoare continue X are expresia:

$$F(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + c, & 0 \le x < 2 \\ d, & x < 0 \\ e, & x \ge 2. \end{cases}$$

Determinaţi $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$, dacă: i) $P(1 < X < 2) = \dfrac{1}{2}$; ii) $E(X) = 1$.

R: $0 = \lim_{x\to-\infty} F(x) = d$, $1 = \lim_{x\to\infty} F(x) = e$. $c = F(0) = \lim_{x\nearrow 0} F(x) = d = 0$, $1 = e = F(2) = \lim_{x\nearrow 2} F(x) = 4a + 2b + c = 4a + 2b$.
i) $P(1 < X < 2) = F(2) - F(1) = e - a - b - c = 1 - a - b = \frac{1}{2}$. Deci $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0, e = 1$.
ii) Funcţia de densitate este $f(x) = \begin{cases} 2ax + b, & x \in (0, 2) \\ 0, & \text{în rest} \end{cases}$. Avem: $1 = E(X) = \int_0^2 2ax^2 + bx\,dx = \dfrac{16}{3}a + 2b$. Deci $a = 0, b = \frac{1}{2}, c = 0, d = 0, e = 1$.

3. Un circuit are trei condensatoare, care funcţionează independent unele de altele. Timpul de funcţionare a fiecărui condensator urmează legea exponenţială cu valoarea medie de 3 minute. Ştiind că cele trei condensatoare sunt grupate în circuit aşa cum indică
a) figura A (în paralel),
b) figura B (în serie),
c) figura C,
determinaţi valoarea medie a timpului de funcţionare a circuitului.

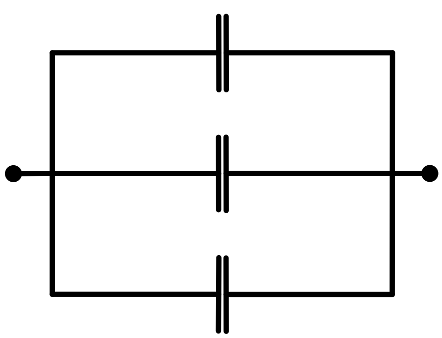

Figura A

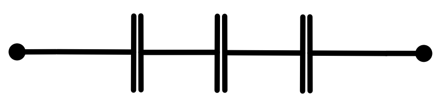

Figura B

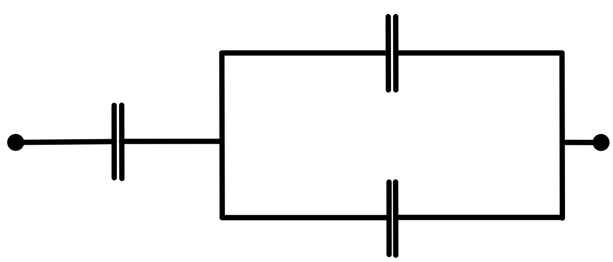

Figura C

R: O v.a. X care urmează **legea exponenţială** cu parametrul $\lambda > 0$ are funcţia de densitate

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}.$$

Deducem că:

i) $F_X(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$, unde F_X este funcţia de repartiţie a lui X.

ii) $P(X > x) = 1 - F_X(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 0 \\ e^{-\lambda x}, & x > 0 \end{cases}$.

iii) $E(X) = \displaystyle\int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{\lambda}$ (folosind integrarea prin părţi).

Fie T timpul de funcţionare a circuitului şi fie T_i v.a. care indică timpul de funcţionare a condensatorului i, $i = 1, 2, 3$. Fiecare T_i urmează legea exponenţială cu parametrul $\frac{1}{3}$. Aceste variabile aleatoare sunt independente.

a) $F_T(t) = P(\max\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = P(\bigcap_{i=1}^3 (T_i \leq t)) = \prod_{i=1}^3 P(T_i \leq t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ (1 - e^{-\frac{t}{3}})^3, & t > 0 \end{cases}$

unde am folosit i). Deci $f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ (1 - e^{-\frac{t}{3}})^2 e^{-\frac{t}{3}}, & t > 0 \end{cases}$ şi $E(T) = \displaystyle\int_0^\infty t e^{-\frac{1}{3}t} - 2te^{-\frac{2}{3}t} + te^{-t} dt =$

$9 - \dfrac{9}{2} + 1 = 5{,}5$ minute, unde am folosit iii).

b) $F_T(t) = P(\min\{T_1, T_2, T_3\} \leq t) = 1 - P(\min\{T_1, T_2, T_3\} > t) = 1 - P(\bigcap_{i=1}^3 (T_i > t)) =$ $1 - \prod_{i=1}^3 P(T_i > t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$, unde am folosit ii). Deci $f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$ deci $T \sim Exp(1)$ şi $E(T) = 1$ minut.

c) $F_T(t) = P(\min\{T_1, \max\{T_2, T_3\}\} \leq t) = 1 - P(T_1 > t)\Big(1 - P(T_2 \leq t)P(T_3 \leq t)\Big) =$

$= \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - e^{-\frac{t}{3}}\Big(1 - (1 - e^{-\frac{t}{3}})^2\Big), & t > 0 \end{cases} = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1 - 2e^{-\frac{2}{3}t} + e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$, $f_T(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \frac{4}{3}e^{-\frac{2}{3}t} - e^{-t}, & t > 0 \end{cases}$ şi

$E(T) = \displaystyle\int_0^\infty \frac{4}{3} t e^{-\frac{2}{3}t} - te^{-t} dt = 3 - 1 = 2$ minute.

4. Fie vectorul aleator continuu (X, Y) cu funcţia de densitate $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \begin{cases} 2e^{-x-2y}, & x, y > 0 \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$

Determinaţi:

a) funcţia de repartiţie a vectorului aleator (X, Y);

b) funcţiile de repartiţie ale variabilelor aleatoare X şi Y;

c) funcţii de densitate ale variabilelor aleatoare X şi Y;

d) valorile medii ale variabilelor aleatoare X şi Y;

e) dacă variabilele aleatoare X şi Y sunt independente sau dependente.

R: a) $F_{(X,Y)}(x, y) = \displaystyle\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v)\, du\, dv = \begin{cases} 0, & (x, y) \in (-\infty, 0] \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \\ \displaystyle\int_0^x \int_0^y 2e^{-u} e^{-2v}\, du\, dv, & (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty) \end{cases}$

$= \begin{cases} 0, & (x, y) \in (-\infty, 0] \times \mathbb{R} \cup \mathbb{R} \times (-\infty, 0] \\ (1 - e^{-x})(1 - e^{-2y}), & (x, y) \in (0, \infty) \times (0, \infty). \end{cases}$

b) $F_X(x) = \lim_{y\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ 1-e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ şi $F_Y(y) = \lim_{x\to\infty} F_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 1-e^{-2y}, & y > 0 \end{cases}$.

c) $f_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ e^{-x}, & x > 0 \end{cases}$ şi $f_Y(y) = \begin{cases} 0, & y \le 0 \\ 2e^{-2y}, & y > 0 \end{cases}$.

d) $E(X) = \displaystyle\int_0^\infty xe^{-x}dx = 1$. $E(Y) = \displaystyle\int_0^\infty 2ye^{-2y}dy = \frac{1}{2}$.

e) X şi Y sunt independente, pentru că $f_{(X,Y)}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$, $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Fie X o variabilă aleatoare continuă care are funcţia de densitate $f_X(x) = \begin{cases} 2x, & x \in (0,1) \\ 0, & \text{în rest.} \end{cases}$
Determinaţi funcţii de densitate pentru variabilele aleatoare: $2X+1$, X^2, e^X şi e^{X^2}.

R: $F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \le 0 \\ x^2, & x \in (0,1) \\ 1, & x \ge 1 \end{cases}$. Fie $Y = 2X+1$. $F_Y(y) = P(2X+1 \le y) = P(X \le \frac{y-1}{2}) = F_X(\frac{y-1}{2})$. $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{y-1}{2}, & y \in (1,3), \\ 0, & \text{altfel.} \end{cases}$ Fie $Z = X^2$. $F_Z(z) = P(-\sqrt{z} \le X \le \sqrt{z}) = F_X(\sqrt{z}) - F_X(-\sqrt{z}) = F_X(\sqrt{z})$, $z \ge 0$, şi $F_Z(z) = 0$, $z < 0$. $f_Z(z) = \begin{cases} 1, & z \in (0,1) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$. Fie $V = e^X$. $F_V(v) = P(e^X \le v) = P(X \le \ln v) = F_X(\ln v)$, $v > 0$, şi $F_V(v) = 0$, $v \le 0$. $f_V(z) = \begin{cases} \frac{2\ln v}{v}, & v \in (1,e) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$. Fie $W = e^{X^2}$. $F_W(w) = P(X^2 \le \ln w) = F_X(\sqrt{\ln w}) - F_X(-\sqrt{\ln w}) = F_X(\sqrt{\ln w})$, $w \ge 1$, şi $F_W(w) = 0$, $w < 1$. $f_W(z) = \begin{cases} \frac{1}{w}, & w \in (1,e) \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$.