Seminarul 6

1. Un jucător de darts ocheşte discul roşu (denumit "bullseye") cu centrul în centrul ţintei şi diametru 1 cm. La o aruncare, distanţa dintre centrul ţintei şi punctul nimerit de săgeata jucătorului urmează distribuţia uniformă pe intervalul $[a, b]$, unde $0 \leq a < b$, cu valoarea medie $\frac{3}{2}$ cm şi deviaţia standard $\frac{\sqrt{3}}{2}$ cm. Aruncările jucătorului sunt independente. Determinaţi:
a) probabilitatea ca jucătorul să nimerească discul roşu.
b) valoarea medie a numărului de aruncări succesive până la (înainte de) prima aruncare care nimereşte discul roşu.
c) probabilitatea ca jucătorul să nimerească de 2 ori discul roşu din 10 aruncări.

R: a) X=distanţa de la săgeată la centru $\implies f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & x \in [a,b] \\ 0, & x \notin [a,b] \end{cases}$ este funcţie de densitate pentru $X \implies E(X) = \int_a^b \frac{x}{b-a}dx = \frac{a+b}{2} = \frac{3}{2}, V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \int_a^b \frac{x^2}{b-a}dx - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{a^2+b^2-2ab}{12} = \frac{3}{4}$. Avem: $\begin{cases} a+b=3 \\ ab=0 \end{cases} \implies a=0, b=3$. p=probabilitatea de a nimeri discul roşu $\implies p = P(X \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{b-a}dx = \frac{1}{6}$.
b) Y=numărul de aruncări până la (înainte de) reuşită $\implies Y \sim Geo(p) \implies E(Y) = \frac{1-p}{p} = 5$ (aruncări).
c) Z=numărul de reuşite din 10 aruncări $\implies Z \sim Bino(10,p) \implies P(Z=2) = C_{10}^2 p^2(1-p)^8 = 45 \cdot \frac{5^8}{6^{10}} \approx 29\%$.

2. Un computer este conectat la două imprimante: I_1 and I_2. Calculatorul trimite printarea unui document lui I_1 cu probabilitatea 0.4, respectiv lui I_2 cu probabilitatea 0.6. I_1 printează un poster $A2$ în T_1 secunde, unde T_1 are distribuţia exponenţială cu valoarea medie 5 secunde, iar I_2 printează un poster $A2$ în T_2 secunde, unde T_2 are distribuţia uniformă pe intervalul $[4,6]$. Un inginer solicită printarea unui poster A2 de pe computer. Calculaţi valoarea medie şi deviaţia standard pentru timpul (în secunde) de printare a posterului.

R: T=timpul de printare a posterului; F_T=funcţia de repartiţie a lui T. $T_1 \sim Exp(\lambda)$, unde $\lambda > 0$; $E(T_1) = \int_0^\infty \lambda t e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda} \implies \lambda = \frac{1}{5}$. $T_2 \sim Unif[4,6]$. Formula probabilităţii totale $\implies$

$$F_T(t) = P(T \leq t) = 0{,}4 \cdot P(T_1 \leq t) + 0{,}6 \cdot P(T_2 \leq t), t \in \mathbb{R} = 0{,}4 \int_{-\infty}^t f_{T_1}(\tau)d\tau + 0{,}6 \int_{-\infty}^t f_{T_2}(\tau)d\tau,$$

unde f_{T_i} este funcţie de densitate pentru T_i, $i=1,2$. $f_T(t) = \begin{cases} 0, t \in (-\infty, 0] \\ 0{,}4 \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}, t \in (0,4) \\ 0{,}4 \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}} + 0{,}6 \cdot \frac{1}{6-4}, t \in [4,6] \\ 0{,}4 \cdot \frac{1}{5}e^{-\frac{t}{5}}, t > 6 \end{cases}$ este funcţie de densitate pentru T. $E(T) = \int_{-\infty}^\infty t f_T(t)dt = 0{,}4\int_0^\infty \frac{1}{5}te^{-\frac{t}{5}}dt + 0{,}6\int_4^6 \frac{t}{2}dt = 0{,}4 \cdot 5 + 0{,}6 \cdot 5 = 5$ (secunde). $E(T^2) = \int_{-\infty}^\infty t^2 f_T(t)dt = 0{,}4\int_0^\infty \frac{1}{5}t^2 e^{-\frac{t}{5}}dt + 0{,}6\int_4^6 \frac{t^2}{2}dt = 20 + 15{,}2 = 35,2 \implies \sqrt{V(T)} = \sqrt{E(T^2) - E^2(T)} = \sqrt{10{,}2} \approx 3{,}2$ (secunde).

3. Durata (în minute) a unei plăţi pentru o factură la un ghişeu într-o bancă urmează distribuţia continuă $Unif[1,3]$. Ştiind că duratele oricăror plăţi sunt independente, demonstraţi că:
i) media aritmetică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la 2 minute, când $n \to \infty$.
ii) media geometrică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{3\sqrt{3}}{e}$ minute, când $n \to \infty$.
iii) media armonică a duratelor plăţilor a n facturi converge a.s. la $\frac{2}{\ln 3}$ minute, când $n \to \infty$.

R: Fie X_n durata plăţii celei de a n-a facturi. $(X_n)_n$ este un şir de variabile aleatoare independente care urmează disitribuţia $Unif[1,3]$.

i) LTNM implică $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \xrightarrow{a.s.} E(X_1) = \int_1^3 \frac{x}{2}\,dx = 2.$

ii) LTNM implică $\displaystyle\sqrt[n]{\prod_{i=1}^{n} X_i} = e^{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln X_i} \xrightarrow{a.s.} e^{E(\ln X_1)} = e^{\int_1^3 \frac{\ln x}{2}dx} = \frac{3\sqrt{3}}{e} \approx 1,91.$

iii) LTNM implică $\displaystyle\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}} = \frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{X_i}} \xrightarrow{a.s.} \frac{1}{E(\frac{1}{X_1})} = \frac{1}{\int_1^3 \frac{1}{2x}dx} = \frac{2}{\ln 3} \approx 1{,}82.$

4. Fie $(X_n)_n$ un şir de variabile aleatoare independente care au aceeaşi funcţie de repartiţie F. Fie $x \in \mathbb{R}$ fixat şi

$$\hat{F}_n(x) = \frac{\#\{i \in \{1,\dots,n\} : X_i \le x\}}{n}, \quad n \in \mathbb{N}^*,$$

funcţiile de repartiţie empirice pe punctul x. Demonstraţi că $E(\hat{F}_n(x)) = F(x)$ şi $\hat{F}_n(x) \xrightarrow{a.s.} F(x)$, adică $\hat{F}_n(x)$ este un estimator nedeplasat şi consistent pentru $F(x)$.

R: Fie $Y_n = \begin{cases} 1, & \text{dacă } X_n \le x \\ 0, & \text{dacă } X_n > x. \end{cases}$ $(Y_n)_n$ este un şir de variabile aleatoare independente care au distribuţia: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ F(x) & 1-F(x) \end{pmatrix}$. Deci $E(\hat{F}_n(x)) = E(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(Y_i) = F(x)$ şi LTNM implică $\displaystyle\hat{F}_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i \xrightarrow{a.s.} E(Y_1) = F(x).$

5. Fie $(X_n)_{n\ge1}$ un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite astfel încât $X_n \sim N(m_1, \sigma_1^2)$, pentru orice $n \ge 1$, şi fie $(Y_n)_{n\ge1}$ un şir de variabile aleatoare independente şi identic distribuite astfel încât $Y_n \sim N(m_2, \sigma_2^2)$, pentru orice $n \ge 1$ şi $m_2 \ne 0$. Către ce valoare converge aproape sigur şirul format din variabilele aleatoare

$$Z_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{Y_1 + \cdots + Y_n} \quad (n \ge 1) \quad ?$$

Justificaţi răspunsul.

R: $X_n \sim N(m_1,\sigma_1^2), Y_n \sim N(m_2,\sigma_2^2) \Longrightarrow E(X_n) = m_1, E(Y_n) = m_2$ (s-au făcut calculele la curs). Legea tare a numerelor mari implică $V_n = \frac{1}{n}(X_1 + \cdots + X_n) \stackrel{a.s.}{\to} m_1$ şi $W_n = \frac{1}{n}(Y_1 + \cdots + Y_n) \stackrel{a.s.}{\to} m_2$. Notăm: $A = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} V_n(\omega) = m_1\}$, $B = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} W_n(\omega) = m_2\}$ şi $C = \{\omega \in \Omega : \lim_{n\to\infty} \frac{V_n(\omega)}{W_n(\omega)} = \frac{m_1}{m_2}\}$. Avem $P(A) = P(B) = 1$ şi $A \cap B \subseteq C$. Deoarece $1 = P(A) \le P(A \cup B)$, avem $P(A \cup B) = 1$. Deducem că $P(C) \ge P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B) = 1$, deci $P(C) = 1$. Aşadar, $Z_n = \frac{V_n}{W_n} \stackrel{a.s.}{\to} \frac{m_1}{m_2}$.