Seminarul 3

1. Dintr-un pachet standard de 52 de cărţi de joc se extrage aleator o carte. Considerăm evenimentele A:“cartea extrasă este un as” şi T:“cartea extrasă este de treflă”. Sunt A şi T independente? Dar dacă înaintea extragerii este scos din pachet doiul de caro?

R: Da, pentru că $\frac{1}{52} = P(A \cap T) = P(A) \cdot P(T) = \frac{4}{52} \cdot \frac{13}{52}$. Nu, pentru că $\frac{1}{51} = P(A \cap T) \neq P(A) \cdot P(T) = \frac{4}{51} \cdot \frac{13}{51}$.

2. Se aruncă un zar. Fie N numărul care a apărut. Apoi, zarul este aruncat de N ori. Care este probabilitatea ca N=3, ştiind că:

a) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite?

b) numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale?

R: Fie D: “numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt diferite” şi E: “numerele obţinute în urma celor N aruncări sunt egale”. Formula lui Bayes implică: a) $P(N=3|D) = \frac{P(D|N=3)P(N=3)}{\sum\limits_{i=1}^{6} P(D|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{A_6^3}{6^4}}{\sum\limits_{i=1}^{6} \frac{A_6^i}{6^{i+1}}}$;

b) $P(N=3|E) = \frac{P(E|N=3)P(N=3)}{\sum\limits_{i=1}^{6} P(E|N=i)P(N=i)} = \frac{\frac{1}{6^3}}{\sum\limits_{i=1}^{6} \frac{1}{6^i}}$.

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă returnată:**

$$\begin{aligned} b(k_1, \dots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i = \overline{1,r}, \\ &\quad \text{din } n \text{ extrageri } \textit{cu returnarea} \text{ bilei extrase} \\ &= \frac{n!}{k_1! \dots k_r!} \cdot p_1^{k_1} \cdot \dots \cdot p_r^{k_r}, \end{aligned}$$

unde p_i =probabilitatea de a extrage o bilă cu culoarea i, $i = \overline{1,r}$.

▷ cazul $r = 2$ corespunde distribuţiei binomiale.

3. O persoană tastează aleator 11 litere minuscule pe o tastatură engleză. Care este probabilitatea ca literele tastate să poată fi permutate astfel încât să se obţină cuvântul *abracadabra*?

R: $\frac{11!}{5!2!1!1!2!} \frac{1}{26^{11}}$.

• **Modelul urnei cu r culori şi bilă nereturnată:**

$$\begin{aligned} p(k_1, \dots, k_r; n) &= \text{probabilitatea de a obţine } k_i \text{ bile cu culoarea } i,\ i = \overline{1,r}, \\ &\quad \text{din } n \text{ extrageri } \textit{fără returnarea} \text{ bilei extrase} \\ &= \frac{C_{n_1}^{k_1} \cdot \dots \cdot C_{n_r}^{k_r}}{C_{n_1+\dots+n_r}^{n}}, \end{aligned}$$

unde n_i =numărul iniţial de bile cu culoarea i din urnă, $i = \overline{1,r}$.

▷ cazul $r = 2$ corespunde distribuţiei hipergeometrice.

4. O echipă formată din 4 cercetători este aleasă aleator dintr-un grup de 4 matematicieni, 3 informaticieni şi 5 fizicieni. Care este probabilitatea ca echipa să fie formată din 2 matematicieni, 1 informatician şi 1 fizician?

R: $\frac{C_4^2 C_3^1 C_5^1}{C_{12}^4}$.

5. Un magazin achiziţionează componente electronice în loturi de câte 100. 30% din loturi au câte 4 componente defecte, iar restul de 70% au câte 3 componente defecte. Dintr-un lot achiziţionat se aleg 3 componente pentru a fi testate. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de componente defecte găsite în urma testării. Determinaţi distribuţia lui X.

R: $X \sim \begin{pmatrix} k \\ p_k \end{pmatrix}_{k=\overline{0,3}}$, $p_k = \frac{3}{10} \cdot \frac{C_4^k C_{96}^{3-k}}{C_{100}^3} + \frac{7}{10} \cdot \frac{C_3^k C_{97}^{3-k}}{C_{100}^3}$.

6. Un zar este aruncat de cinci ori. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A:“exact două numere sunt pare.”
b) B:“1 apare de două ori, 3 apare o dată şi 6 apare de două ori.”
c) C: “exact două numere sunt prime, un număr este egal cu 1, iar celelalte două sunt egale cu 4”.
R: a) $C_5^2 \frac{1}{2^5}$; b) $\frac{5!}{2!1!2!} \frac{1}{6^5}$; c) $\frac{5!}{2!1!2!} \frac{1}{2^2} \frac{1}{6} \frac{1}{6^2}$.

7. Într-un club sunt $4N$ persoane din 4 oraşe diferite, câte N din fiecare oraş. 5 persoane sunt alese aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:
a) A: “exact 4 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş”.
b) B: “3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar celelalte 2 sunt dintr-un alt oraş”.
c) C: “3 persoane din cele alese sunt din acelaşi oraş, iar fiecare din celelalte 2 persoane este dintr-un oraş diferit de al celorlalte persoane alese”.
R: a) $A_4^2 \cdot \frac{C_N^4 C_N^1 C_N^0 C_N^0}{C_{4N}^5}$; b) $A_4^2 \cdot \frac{C_N^3 C_N^2 C_N^0 C_N^0}{C_{4N}^5}$; c) $\frac{A_4^3}{2} \cdot \frac{C_N^3 C_N^1 C_N^1 C_N^0}{C_{4N}^5}$.

• **Valoarea medie a unei variabile aleatoare discrete** (numerice) X, care ia valorile $\{x_i, i \in I\}$, este

$$E(X) = \sum_{i \in I} x_i P(X = x_i),$$

dacă $\sum_{i \in I} |x_i| P(X = x_i) < \infty$.
Dacă X şi Y sunt v.a. discrete, atunci au loc proprietăţile:
$\rightarrow E(aX + b) = aE(X) + b$ pentru orice $a, b \in \mathbb{R}$;
$\rightarrow E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.

8. Un sistem electronic are n ($n \in \mathbb{N}^*$) componente care funcţionează independent unele de altele. Fiecare componentă funcţionează cu probabilitatea p ($p \in (0, 1)$). Fie X variabila aleatoare care indică numărul de componente funcţionale ale sistemului. Determinaţi distribuţia lui X şi apoi calculaţi valoarea sa medie.
R: $X = X_1 + \cdots + X_n \sim \text{Bino}(n, p)$, $X_i \sim \text{Bernoulli}(p)$ indică funcţionarea componentei i, $i = \overline{1, n}$. $E(X) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = np$.

Consecinţă: Dacă $X \sim \text{Bino}(n, p)$, atunci $E(X) = np$.

9. Un mesaj este transmis printr-un canal de comunicare cu perturbări. Probabilitatea ca mesajul să fie recepţionat este p ($p \in (0, 1)$). Dacă mesajul nu este recepţionat, atunci se reia transmisia mesajului, independent de transmisiile anterioare. Fie X variabila aleatoare care indică numărul de transmisii până la prima transmisie în care este recepţionat mesajul. Determinaţi valoarea medie a lui X.
R.: Observăm că $X \sim \text{Geo}(p)$. Pe baza criteriului raportului pentru serii pozitive avem $\sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k < \infty$.
Scriem succesiv

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{k=0}^{\infty} kp(1-p)^k = (1-p) \sum_{k=1}^{\infty} kp(1-p)^{k-1} \\
&= (1-p) \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)p(1-p)^j = (1-p) \sum_{j=0}^{\infty} jp(1-p)^j + (1-p) \sum_{j=0}^{\infty} p(1-p)^j \\
&= (1-p)E(X) + (1-p) \Longrightarrow E(X) = \frac{1-p}{p}.
\end{aligned}$$

Consecinţă: Dacă $X \sim \text{Geo}(p)$, atunci $E(X) = \frac{1-p}{p}$.

10. O monedă este aruncată de n ori ($n \in \mathbb{N}^*$). Fie X variabila aleatoare care indică diferenţa dintre numărul de capete şi numărul de pajuri obţinute. Determinaţi:

i) distribuţia lui X;

R: Dacă C indică numărul de capete, atunci $C \sim \text{Bino}(n, \frac{1}{2})$ şi $X = C - (n - C)$.

Deci, $X \sim \begin{pmatrix} 2k - n \\ C_n^k \frac{1}{2^n} \end{pmatrix}_{k=\overline{0,n}}$.

ii) valoarea medie a lui X.

R: $E(X) = E(2C - n) = 2E(C) - n = 2 \cdot \frac{n}{2} - n = 0$.