Seminarul 1

Noţiuni de combinatorică

1. *Principiul fundamental de numărare:* numărul de perechi de obiecte în care primul obiect poate fi ales în m moduri şi al doilea în n moduri ($m, n \in \mathbb{N}$) este $m \cdot n$.
Exemplu: În câte moduri poate o persoană să îmbrace 2 cămăşi distincte şi 3 blugi diferiţi? R: $2 \cdot 3 = 6$.

2. *Aranjamente de n luate câte k* ($k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k$): alegeri de k obiecte distincte şi ordonate din n obiecte distincte date.

$$\begin{aligned} A_n^k &= \text{“numărul de aranjamente de } n \text{ obiecte luate câte } k\text{”} \\ &= n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte coduri cu 3 cifre distincte se pot forma folosind cifrele: 0, 1, 2, 3, 4? R: $A_5^3 = \frac{5!}{2!}$.

3. *Permutări de n* ($n \in \mathbb{N}$): aranjamente de n luate câte n.

$$P_n = \text{“numărul de permutări de } n \text{ obiecte”} = A_n^n = n!.$$

Observaţie: Prin convenţie, $0! = 1$.
Exemplu: În câte moduri se pot aşeza 3 persoane pe o bancă? R: $P_3 = 3!$.

4. *Combinări de n luate câte k* ($k \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}^*, n \geq k$): alegeri de k obiecte distincte şi neordonate din n obiecte distincte date, i.e. alegeri de submulţimi de k elemente ale unei mulţimi de n elemente.

$$\begin{aligned} C_n^k &= \text{“numărul de combinări de } n \text{ elemente luate câte } k\text{”} \\ &= \frac{A_n^k}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \end{aligned}$$

Exemplu: Câte echipe de handbal se pot forma dintr-un grup de 8 persoane? R: $C_8^7 = C_8^1$.

5. *Numărul de funcţii* de la o mulţime A cu k elemente la o mulţime B cu n elemente ($k, n \in \mathbb{N}^*$) este n^k.
Observaţie: O funcţie de la A la B poate fi identificată cu k alegeri de obiecte, nu neapărat distincte (i.e. un obiect poate fi ales de mai multe ori), ordonate, din n obiecte distincte date. Astfel, putem spune că funcţiile sunt *aranjamente cu repetiţii.*
Exemplu: În câte moduri se pot împărţi o portocală, un kiwi şi o banană la 4 copii? Un copil poate primi mai multe fructe, chiar toate.
R: Funcţiile $f : \{\text{“portocală”}, \text{“kiwi”}, \text{“banană”}\} \to \{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ se pot construi în 4^3 moduri.

6. *Permutări cu repetiţii:* Considerăm n obiecte care pot fi împărţite în k grupuri ($n, k \in \mathbb{N}^*, k \leq n$). Primul grup are n_1 obiecte identice, al 2-lea grup are n_2 obiecte identice,..., al k-lea grup are n_k obiecte identice ($n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}, n_1 + \ldots + n_k = n$). Două obiecte alese arbitrar sunt distincte dacă şi numai dacă provin din grupuri diferite. Numărul de permutări ale acestor n obiecte este

$$\frac{n!}{n_1! \cdot n_2! \cdot \ldots \cdot n_k!}.$$

Exemple: 1) Câte anagrame ale cuvântului “MISSISSIPPI” sunt posibile? R:$\frac{11!}{1!4!4!2!}$.
2) Într-o urnă sunt trei bile albe şi patru bile roşii. În câte moduri se pot aranja aceste bile într-un rând? R:$\frac{7!}{3!4!}$.

7. *Combinări cu repetiţii de n luate câte k* ($n \in \mathbb{N}^*, k \in \mathbb{N}$): alegeri de k obiecte, nu neapărat distincte (i.e. un obiect poate fi ales de mai multe ori), neordonate, din n obiecte distincte date (i.e. aranjamente cu repetiţii în care neglijăm ordinea). Numărul lor este

$$C_{n+k-1}^{k} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}.$$

Exemplu: O cofetărie are 7 sortimente de îngheţată. În câte moduri poate un client să îşi aleagă sortimentele pentru 3 cornete? (fiecare cornet are câte un glob de îngheţată!) R: $\frac{9!}{3!6!}$.

8. *Definiţia clasică a probabilităţii:* într-un experiment în care cazurile posibile, finite la număr, au aceleaşi şanse de a se realiza, probabilitatea unui eveniment E este

$$P(E) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile lui } E}{\text{numărul cazurilor posibile}}.$$

Probleme - Seminarul 1

1. În câte moduri se pot aşeza pe un raft 5 culegeri de matematică, 3 culegeri de informatică şi 4 romane, ştiind că fiecare carte are un autor diferit, astfel încât:

a) cărţile de acelaşi tip să fie alăturate?

b) doar romanele să fie neapărat alăturate?

c) doar culegerile de matematică, respectiv de informatică, să fie neapărat alăturate?

R: a) $5!3!4!3!$; b) $4!(5+3+1)!$; c) $5!3!(1+1+4)!$.

2. Câte coduri binare sunt formate din 4 biţi egali cu 1 şi 6 biţi egali cu 0 şi nu au doi biţi alăturaţi egali cu 1?

R: punem în linie 0-urile cu spaţii între ele: _0_0_0_0_0_0_, apoi alegem 4 spaţii pe care să punem 1-urile $\Longrightarrow$ există C_7^4 astfel de coduri.

3. a) Câte soluţii $(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ are ecuaţia $x_1+\ldots+x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq k$)?

R: C_{n-1}^{k-1}.

M1: Considerăm un şir cu n valori egale cu 1 şi $n-1$ spaţii între ele 1_1_1..._1. Dacă pe spaţii se pun $k-1$ simboluri + şi se şterg spaţiile libere, atunci şirul de 1-uri va fi împărţit în k grupe de aceste simboluri. Fie x_i=suma de 1-uri din al i-lea grup, $i=\overline{1,k}$. Cum nu există două simboluri + consecutive, avem $x_i \in \mathbb{N}^*$, $i=\overline{1,k}$. Din modul de construcţie obţinem $x_1+\ldots+x_k = n$. Există C_{n-1}^{k-1} moduri în care se pot pune $k-1$ simboluri + pe $n-1$ spaţii.

Exemplu: $n=6, k=3$, 1_1_1_1_1_1; $k-1=2$; $11+111+1$ (3 grupe de 1, separate prin 2 simboluri +) $\Rightarrow x_1=2, x_2=3, x_3=1$, iar $x_1+x_2+x_3=6$; în acest caz, există C_5^2 soluţii $(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$.

M2: Considerăm un şir de n zerouri şi $n-1$ spaţii între ele: $0\_0\_\cdots\_0$. Înlocuim $k-1$ spaţii cu 1-uri şi ştergem spaţiile rămase neocupate. Fie x_i numărul de zerouri consecutive până la al i-lea 1, pentru $i \in \{1,\ldots,k-1\}$, iar x_k numărul de zerouri după ultimul 1. $(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ este o soluţie a ecuaţiei date. Fiecare soluţie a ecuaţiei poate fi reprezentată printr-o astfel de secvenţă binară. Obţinem C_{n-1}^{k-1} soluţii, reprezentând numărul de alegeri ale celor $k-1$ poziţii pentru 1.

b) Câte soluţii $(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ are ecuaţia $x_1+\ldots+x_k = n$ ($k, n \in \mathbb{N}^*$)?

R: C_{n+k-1}^{k-1}.

Fiecare soluţie $(x_1,\ldots,x_k) \in \mathbb{N} \times \cdots \times \mathbb{N}$ a ecuaţiei $x_1+\ldots+x_k = n$ corespunde în mod unic unei soluţii $(y_1,\ldots,y_k) \in \mathbb{N}^* \times \cdots \times \mathbb{N}^*$ a ecuaţiei $y_1+\ldots+y_k = n+k$ şi vice versa, alegând $y_i = x_i+1$, pentru $i \in \{1,\ldots,k\}$. Cf. a), există C_{n+k-1}^{k-1} soluţii.

4. În câte moduri se pot îmbarca 9 persoane într-un tren cu 3 vagoane astfel încât:

a) în primul vagon să fie exact 3 persoane?

b) în fiecare vagon să fie 3 persoane?

c) într-un vagon să fie 1 persoană, iar în celelalte două vagoane să fie câte 4 persoane?

d) în fiecare vagon să fie cel puţin o persoană?

R: a) $C_9^3 \cdot 2^6$; b) $C_9^3 \cdot C_6^3$; c) $3 \cdot 9 \cdot C_8^4$; d) $3^9 - (3 \cdot 2^9 - 3)$.

5. Se aruncă două zaruri. Determinaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A: "se obţine o dublă".

b) B: "suma numerelor este un număr par."

c) C: "suma numerelor este cel mult egală cu 10."

R: a) $P(A) = \frac{1}{6}$; b) $P(B) = \frac{3^2+3^2}{36}$; c) $P(C) = 1 - \frac{3}{36}$.

6. 7 căluşari: $c_1, c_2, \ldots, c_7$ se aşează în cerc, într-o ordine aleatoare. Care este probabilitatea ca c_1 şi c_7 să fie vecini?

R: $\frac{2!5!}{\frac{7!}{7}} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

7. La un concurs de şah participă 5 băieţi şi 5 fete. Se formează aleator 5 perechi de jucători. Care este probabilitatea ca fiecare băiat să joace împotriva unei fete?

R: $p = \frac{n_f}{n_p}$, unde numărul cazurilor favorabile este $n_f = 5!$, iar numărul cazurilor posibile este $n_p = \frac{C_{10}^2 \cdot C_8^2 \cdot \ldots \cdot C_2^2}{5!}$, pentru că ordinea perechilor (echipelor) nu contează.

8. O persoană trimite 10 emailuri distincte alegând aleator pentru fiecare email un destinatar dintr-o listă de 20 de persoane. Care este probabilitatea ca prima persoană din listă să primească 5 emailuri?

R: $\frac{C_{10}^5 19^5}{20^{10}}$.

9. În câte moduri se pot aşeza în cerc caracterele următoare: A, A, A, B, B, 0, 0, 0, 1?

R: $\frac{1}{9} \cdot \frac{9!}{3!2!3!1!}$.

10. În câte moduri se pot distribui m bile identice în n cutii distincte ($m, n \in \mathbb{N}^*$)?

R: $C_{m+n-1}^m = C_{m+n-1}^{n-1}$ combinări cu repetiţie.

11. Câte coduri binare sunt formate din 10 cifre şi nu au două cifre alăturate egale cu 1?

R: $1 + C_{10}^1 + C_9^2 + \ldots + C_6^5$.

Dacă în codul binar sunt k biţi egali cu 1, atunci codul are $10-k$ biţi egali cu 0. Punem în linie 0-urile şi spaţiile pe care putem să punem 1-urile, la fel ca în **Pb. 2**: _0_0_..._0_. Deci avem $11-k$ spaţii libere pe care vrem să punem k biţi egali cu 1, rezultă C_{11-k}^k alegeri posibile. k poate să ia valorile $0, 1, \ldots$, până la maxim 5, deoarece pentru $k > 5$ numărul de spaţii libere este mai mic decât numărul de biţi egali cu 1.

12. Fie A şi B două mulţimi finite.

a) Dacă A are $k \in \mathbb{N}^*$ ($k \geq 3$) elemente şi B are 3 elemente, câte funcţii surjective se pot defini de la A la B?

R: a) Fie $A = \{a_1, a_2, ..., a_k\}$, $B = \{b_1, b_2, b_3\}$. Definim

$$F_i = \{f : \{a_1, a_2, ..., a_k\} \to \{b_1, b_2, b_3\} | \forall a \in A \ f(a) \neq b_i\}, i \in \{1, 2, 3\}.$$

Notăm cu $\#(M)$ numărul de elemente ale unei mulţimi M. Numărul funcţiilor care nu sunt surjective este

$$\begin{aligned}\#(F_1 \cup F_2 \cup F_3) &= \#(F_1) + \#(F_2) + \#(F_3) \\ &\quad - \#(F_1 \cap F_2) - \#(F_2 \cap F_3) - \#(F_1 \cap F_3) + \#(F_1 \cap F_2 \cap F_3) \\ &= C_3^1(3-1)^k - C_3^2(3-2)^k + C_3^3(3-3)^k = 3 \cdot 2^k - 3.\end{aligned}$$

Numărul funcţiilor care sunt surjective este $3^k - 3 \cdot 2^k + 3$. Observaţie: A se vedea rezultatul de la **Pb. 4 d)**, pentru cazul $k = 9$.

b) Dacă A are $k \in \mathbb{N}^*$ elemente şi B are $n \in \mathbb{N}^*$ ($k \geq n$) elemente, câte funcţii surjective se pot defini de la A la B? [*Indiciu:* Se aplică principiul includerii şi excluderii!]

R: b) $n^k - C_n^1(n-1)^k + C_k^2(n-2)^k - \ldots + (-1)^{k-2}C_k^{n-2}2^k + (-1)^{k-1}C_k^{n-1}$.

13. Fie $m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq n$. În câte moduri se pot îmbarca m persoane într-un tren cu n vagoane astfel încât niciun vagon să nu fie gol?

R: $n^m - C_n^1(n-1)^m + C_m^2(n-2)^m - \ldots + (-1)^{m-2}C_m^{n-2}2^m + (-1)^{m-1}C_m^{n-1}$.