Seminarul 2

1. Un cub de sticlă este vopsit pe fiecare faţă, apoi este împărţit în 1000 de cubuleţe de aceleaşi dimensiuni. Un cubuleţ este ales aleator. Calculaţi probabilităţile următoarelor evenimente:

a) A: "cubuleţul are exact 3 feţe vopsite". R: $\frac{8}{1000}$.

b) B: "cubuleţul are exact 2 feţe vopsite". R: $\frac{12 \cdot 8}{1000}$.

c) C: "cubuleţul are exact o faţă vopsită". R: $\frac{6 \cdot 8^2}{1000}$.

d) D: "cubuleţul nu are nicio faţă vopsită". R: $\frac{8^3}{1000}$.

2. X participă la un spectacol alături de un grup de prieteni format din m fete şi n băieţi ($m, n \in \mathbb{N}^*$, $m \geq 2$). X şi prietenii săi au primit bilete pe un singur rând, pe care îl vor ocupa în întregime. Biletele lor au fost distribuite aleator. Care este probabilitatea ca X să aibe două vecine?

R: $\frac{(m+n-1)A_m^2(m+n-2)!}{(m+n+1)!}$, unde $m+n-1$ este numărul de alegeri ale locului pentru X (nu poate ocupa locurile din capetele rândului), A_m^2 este numărul de alegeri ale vecinelor lui X (se ţine cont de ordinea alegerii pentru partea stângă, resp. partea dreaptă, lui X), $(m+n-2)!$ este numărul de alegeri ale locurilor pentru celelalte persoane.

3. Presupunem în continuare că data naşterii unei persoane alese aleator este în oricare dintre lunile anului cu aceleaşi şanse (i.e. probabilitatea ca o persoană aleasă aleator să aibe data naşterii într-o anumită lună este $\frac{1}{12}$). Care este probabilitatea ca

a) într-un grup de 5 persoane să fie cel puţin 2 persoane care îşi serbează zilele de naştere în aceeaşi lună? R: $1 - \frac{A_{12}^5}{12^5} \approx 62\%$.

b) într-un grup de 5 persoane zilele de naştere sunt serbate toate în cel mult două luni? R: $\frac{C_{12}^1 + C_{12}^2(2^5-2)}{12^5}$, unde C_{12}^1 e numarul de cazuri când toate persoanele sunt născute în aceeaşi lună, C_{12}^2 este numărul de alegeri ale lunilor pentru situaţia când toate persoanele sunt născute în exact 2 luni, iar $2^5 - 2$ este numărul de funcţii surjective de la persoane la cele 2 luni.

4. Se aruncă două zaruri. Calculaţi probabilitatea ca cel puţin un zar să indice numărul 6, ştiind că:

a) zarurile indică numere diferite. R: $\frac{10}{30} = \frac{1}{3}$, 30 este numărul de perechi de numere distincte, 10 este numărul de perechi de numere distincte care au un 6.

b) suma numerelor indicate de zaruri este un număr par. R: $\frac{5}{18}$, unde 18 este numărul de perechi de numere care au suma pară, 5 este numărul de numărul de perechi care au cel puţin un 6 şi suma pară.

5. Un patron deţine 3 magazine, m_1, m_2, m_3, care au 50, 75, respectiv 100, de angajaţi, din care 50%, 60%, respectiv 70%, sunt femei. Patronul alege aleator un angajat pentru un bonus la salariu. Care este probabilitatea ca angajatul norocos să lucreze la magazinul m_3, ştiind că acesta este bărbat?

Rezolvare: $P(\text{“angajatul ales lucrează la } m_3\text{”} \,|\, \text{“angajatul ales este bărbat”}) = \frac{\frac{30}{225}}{\frac{25+30+30}{225}} = \frac{30}{85} = \frac{6}{17}$.

6. Într-o cutie sunt 10 mingi de tenis, din care 3 mingi sunt noi. Pentru un antrenament, un jucător alege aleator 3 mingi, pe care le repune la sfârşit înapoi în cutie. Mai târziu, un alt jucător alege aleator 3 mingi din cutie. Care este probabilitatea ca aceste 3 mingi să fie noi?

R: Fie A_1:“primul jucător nu alege nicio minge nouă” şi A_2:“al doilea jucător alege trei mingi noi”. Probabilitatea cerută este: $P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) = \frac{C_7^3}{C_{10}^3} \cdot \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{7}{2880}$.

7. O persoană are în buzunar 2 zaruri roşii şi 3 zaruri albastre, dintre care alege aleator unul. Dacă a ales un zar roşu, atunci aruncă zarul ales de 3 ori, iar dacă a ales un zar albastru, atunci aruncă zarul ales de 2 ori. Calculaţi probabilitatea ca suma punctelor obţinute în urma aruncărilor să fie 10.

Rezolvare: Fie A:"zarul ales este albastru", R:"zarul ales este roşu" şi S:"suma punctelor obţinute în urma aruncărilor este 10". Formula probabilităţii totale implică $P(S) = P(S|A)P(A) + P(S|R)P(R) = \frac{3}{6^2} \cdot \frac{3}{5} + \frac{27}{6^3} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{10}$.

8. O persoană întârzie la serviciu într-o zi ploioasă cu probabilitatea 0,2, iar într-o zi senină cu probabilitatea 0,1. Conform prognozei meteo, în următoarea zi va ploua cu probabilitate 0,8. Care este probabilitatea ca:

a) persoana să ajungă ziua următoare la timp la serviciu?

b) ziua următoare să fie ploioasă, ştiind că persoana ajunge la timp la serviciu?

R: Fie I: "persoana întârzie la serviciu într-o zi" şi S:"ziua e senină". a) Formula probabilităţii totale implică $P(\bar{I}) = P(\bar{I}|S)P(S) + P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S}) = 0,9 \cdot 0,2 + 0,8 \cdot 0{,}8 = 0{,}82$; b) Formula lui Bayes implică $P(\bar{S}|\bar{I}) = \frac{P(\bar{I}|\bar{S})P(\bar{S})}{P(\bar{I})} = \frac{0{,}8 \cdot 0{,}8}{0{,}82} = \frac{32}{41}$.

9. X are 2 monede în buzunar: una normală, care are pe o faţă *cap* şi pe cealaltă *pajură*, şi una măsluită, care are pe ambele feţe *pajură*. X scoate aleator o monedă din buzunar, o aruncă şi constată că aceasta indică *pajură*. Care este probabilitatea ca:

a) moneda să fie măsluită?

b) moneda să fie măsluită, ştiind că X a mai aruncat o dată moneda şi a obţinut din nou *pajură*?

R: Fie C_i:"se obţine *cap* la aruncarea i", $i = 1, 2$ şi M:"se alege moneda măsluită."
Fromula lui Bayes implică: a) $P(M|\bar{C}_1) = \frac{P(\bar{C}_1|M)P(M)}{P(\bar{C}_1|M)P(M)+P(\bar{C}_1|\bar{M})P(\bar{M})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}$; b) $P(M|\bar{C}_1 \cap \bar{C}_2) = \frac{P(\bar{C}_1\cap\bar{C}_2|M)P(M)}{P(\bar{C}_1\cap\bar{C}_2|M)P(M)+P(\bar{C}_1\cap\bar{C}_2|\bar{M})P(\bar{M})} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}} = \frac{4}{5}$.

10. O zi londoneză este ploioasă cu probabilitatea $\frac{1}{2}$. Prognoza meteo este corectă cu probabilitatea $\frac{2}{3}$, adică: probabilitatea să plouă, ştiind că la meteo s-a anunţat o zi ploioasă, este $\frac{2}{3}$; probabilitatea să nu plouă, ştiind că la meteo s-a anunţat o zi senină, este tot $\frac{2}{3}$. Dl X pleacă în excursie la Londra. Dacă la meteo se anunţă o zi ploioasă, dl X îşi ia umbrela. Dacă la meteo se anunţă o zi senină, dl X îşi ia umbrela cu probabilitatea $\frac{1}{3}$. Care este probabilitatea ca dl X să îşi ia umbrela în excursie?

R: Fie U:"Dl X îşi ia umbrela", R:"plouă" şi M:"la meteo se anunţă ploaie". Fie $P(M) = x$. Avem $x = P(M) = P(M|R)P(R) + P(M|\bar{R})P(\bar{R}) = \frac{P(M|R)+1-P(\bar{M}|\bar{R})}{2}$. Formula lui Bayes implică $P(M|R) = \frac{P(R|M)P(M)}{P(R)} = \frac{4}{3}x$ şi $P(\bar{M}|\bar{R}) = \frac{P(\bar{R}|\bar{M})P(\bar{M})}{P(\bar{R})} = \frac{4}{3}(1-x)$. Deci $x = \frac{2}{3}x + \frac{1}{2} - \frac{2}{3}(1-x)$, adică $x = \frac{1}{2}$.
$P(U) = P(U|M)P(M) + P(U|\bar{M})P(\bar{M}) = 1 \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$.

11. Un grup de n persoane decide să facă un schimb de cadouri ($n \in \mathbb{N}^*$). Fiecare aduce un cadou. Cadourile sunt distribuite aleator, câte unul fiecărei persoane. Care este probabilitatea ca nicio persoană să nu îşi primească înapoi cadoul adus? *Indiciu*: Pentru $i \in \{1, \ldots, n\}$ fie A_i evenimentul "a i-a persoană îşi primeşte înapoi cadoul adus"; se calculează $1 - P\big(A_1 \cup \ldots \cup A_n\big)$, folosind principiul includerii şi excluderii.

R: Fie p_n probabilitatea cerută. Avem:

$$\begin{aligned}
P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) &= \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{1\le i<j\le n} P(A_i \cap A_j) + \ldots + (-1)^{n-1} P\Big(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\Big) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \frac{(n-1)!}{n!} - \sum_{1\le i<j\le n} \frac{(n-2)!}{n!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{0!}{n!} \\
&= \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \cdot C_n^k \cdot \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k!}.
\end{aligned}$$

Deci $p_n = 1 - P\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Observaţie: Folosind dezvoltarea în serie Maclaurin a funcţiei exp, deducem că $e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \implies \lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e} \approx 0.3679$.