带间断系数的弹性问题的有限元法

答辩人: 唐小康，指导老师: 王华

2023 年 5 月 19 日

1. 研究内容和研究方法
2. 实验结果
3. 总结
4. 致谢

考虑各项同性弹性材料，令 $u(x,y), f(x,y)$ 是其位移和体力，对纯位移边值问题，u, f 满足以下方程

$$\begin{aligned} -div\,\sigma(u) &= f \quad \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= g. \end{aligned} \tag{1}$$

其中 $\Omega \in \mathbb{R}^2$。Ω_1，Ω_2 是 Ω 的两个子集，使得 $\Omega_1 \bigcup \Omega_2 = \Omega$ 并且 $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset$，Lamé 常数 λ，μ 在 Ω_1，Ω_2 上取不同值，即 $(x,y) \in \Omega_1$ 时 $\lambda = \lambda_1$，$\mu = \mu_1$，$(x,y) \in \Omega_2$ 时 $\lambda = \lambda_2$，$\mu = \mu_2$，$\lambda_1 \neq \lambda_2$，$\mu_1 \neq \mu_2$。

对齐次的纯位移边值问题，其变分形式为，求 $u \in H^1(\Omega)$ 使得 $u|_{\Gamma_1} = 0$，并且

$$a(u, \nu) = \int_\Omega f \cdot \nu \, dxdy, \quad \forall \nu \in V, \tag{2}$$

其中

$$\begin{aligned} a(u, \nu) &= \mu_1 \int_{\Omega_1} grad\, u : grad\, \nu \, dxdy + (\mu_1 + \lambda_1) \int_{\Omega_1} div\, u \, div\, \nu \, dxdy \\ &+ \mu_2 \int_{\Omega_2} grad\, u : grad\, \nu \, dxdy + (\mu_2 + \lambda_2) \int_{\Omega_2} div\, u \, div\, \nu \, dxdy, \\ V &:= \{\nu \in H^1(\Omega) \quad | \quad \nu|_\Gamma = 0\}. \end{aligned} \tag{3}$$

考察以下边值问题

$$\begin{aligned} -div\,\sigma(u) &= f \quad \in \Omega \\ u|_\Gamma &= 0. \end{aligned}$$

其中 $u = (u_1, u_2)^t$ 为求解向量， $f = (f_1, f_2)^t$ 为右端向量。

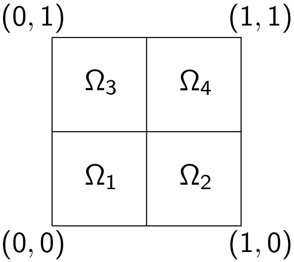


图: Ω

如图，当 $(x, y) \in \Omega_1$ 时，$\mu = \lambda = \lambda_1$，当 $(x, y) \in \Omega_2$ 时，$\mu = \lambda = \lambda_2$，当 $(x, y) \in \Omega_3$ 时，$\mu = \lambda = \lambda_3$ ，当 $(x, y) \in \Omega_4$ 时，$\mu = \lambda = \lambda_4$。

$$v = x(x - 0.5)(x - 1)y(y - 0.5)(y - 1)$$
$$u_1 = u_2 = v/\lambda$$

1. 当 Lamé 常数 $\lambda = \mu = [5E8, -2E5, -8E4, 1E6]$ 时误差如下

h	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\lvert u - u_h \rvert_{H^1(\Omega)}$	1.599642E-2	7.130159E-3	3.516517E-3	1.900384E-3
H1 误差阶	1.165743	1.019786	0.8878559	0.9186291
$\lvert u - u_h \rvert_{L^2(\Omega)}$	3.999106E-3	8.912698E-4	2.197823E-4	5.938701E-5
L2 误差阶	2.165743	2.019786	1.887855	1.918629

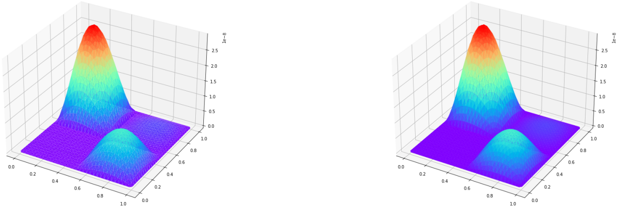
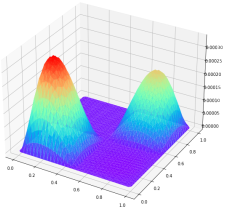


图: 数值解和精确解图像

2. 当 Lamé 常数 $\lambda = \mu = [7, 3E2, 2E3, 10]$ 时误差如下

h	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$	1.599735E-2	7.130099E-3	3.516522E-3	1.900428E-3
H1 误差阶	1.165839	1.019772	0.8878243	0.918610
$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$	3.999338E-3	8.912623E-4	2.197826E-4	5.938839E-5
L2 误差阶	2.165839	2.019772	1.887824	1.91861



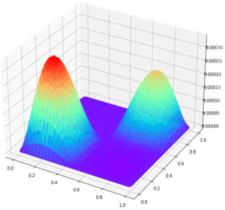


图: 数值解和精确解图像

3 当 Lamé 常数 $\lambda = \mu = [7E8, 5, 1E4, 3E6]$ 时误差如下

h	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\lvert u - u_h\rvert_{H^1(\Omega)}$	3.015333E-3	1.139928E-3	6.718610E-4	3.793589E-4
H1 误差阶	1.403373	0.7627090	0.8245995	0.9054011
$\lvert u - u_h\rvert_{L^2(\Omega)}$	7.538332E-4	1.424911E-5	4.199131E-5	1.185496E-5
H1 误差阶	2.403373	1.7627090	1.824599	1.905401

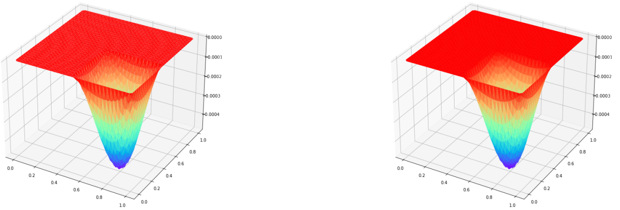


图: 数值解和精确解图像

数值结果表明，当 Lamé 常数间断且相等时，C-R 元可以有效地解除闭锁现象，并且具有预期的收敛阶。

谢谢！