弹性问题

2022 年 11 月 20 日

1 模型

令

$$\sigma(u) = 2\mu\epsilon(u) + \lambda tr(\epsilon(u))\delta$$
$$\epsilon(u) = \tfrac{1}{2}(gradu + (gradu)^t)$$
$$tr(\tau) = \tau_{11} + \tau_{22}$$
$$grad(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$
$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$div\tau = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

考察模型

$$-div\sigma(u) = f \quad \in \Omega$$
$$u|_\Gamma = 0$$

其中 $u = (u_1, u_2)^t$ 为求解向量，$f = (f_1, f_2)^t$ 为右端向量，$\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$$u_1 = (x-1)(y-1)ysin(x)$$
$$u_2 = (x-1)(y-1)xsin(y)$$
$$\begin{aligned} f_1 = -((2\mu+\lambda)y(y-1)(2cos(x) - (x-1)sin(x)) \\ +(\mu+\lambda)(2x-1)(sin(y) + (y-1)cos(y)) \\ +2\mu(x-1)sin(x)) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} f_2 = -((2\mu+\lambda)x(x-1)(2cos(y) - (y-1)sin(y)) \\ +(\mu+\lambda)(2y-1)(sin(x) + (x-1)cos(x)) \\ +2\mu(y-1)sin(y)) \end{aligned}$$

2 变分

该问题的变分问题为，求 $u \in H^1(\Omega)$ 使得 $u|_{\Gamma_1} = g$，并且

$$a(u,\nu) = \int_\Omega f \cdot \nu dxdy \quad \forall \nu \in V$$

其中

$$a(u,\nu) := \textstyle\int_\Omega \sigma(u) : grad\nu dxdy$$
$$V := \{\nu \in H^1(\Omega) \quad | \quad \nu|_\Gamma = 0\}$$

证其与原问题的等价性

1. 若 u 为原问题的解

设 $\nu=(\nu_1,\nu_2)^t$, $\nu_1,\nu_2\in C_0^\infty(\Omega)$，方程两边同乘 ν 并积分得

$$-\int_\Omega div\sigma(u)\nu dxdy=\int_\Omega f\nu dxdy$$

由

$$fdiva=div(fa)-a\cdot gradf$$
$$\int_\Omega divadV=\int_{\partial\Omega}adS$$

得

$$\begin{aligned}-\int_\Omega div\sigma(u)\nu dxdy&=-\int_\Omega div(\sigma(u)\nu)dxdy-\int_\Omega \sigma(u):grad\nu dxdy\\&=-\int_\Gamma \sigma(u)\nu dxdy+\int_\Omega \sigma(u):grad\nu dxdy\\&=\int_\Omega \sigma(u):grad\nu dxdy\end{aligned}$$

所以

$$\int_\Omega \sigma(u):grad\nu dxdy=\int_\Omega f\nu dxdy$$

2. 若 u 为变分问题的解

由

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sigma(u):grad\nu dxdy&=-\int_\Gamma \sigma(u)\nu dxdy+\int_\Omega \sigma(u):grad\nu dxdy\\&=-\int_\Omega div\sigma(u)\nu dxdy\end{aligned}$$

得

$$-\int_\Omega div\sigma(u)\nu dxdy=\int_\Omega f\nu dxdy$$

由变分法基本引理得

$$-div\sigma(u)=f$$

3　三角形元

3.1　面积坐标

设 $\triangle(i,j,k)$ 是以 i,j,k 为定点的任意三角型元，面积为 S。在 $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ 内任取一点 p_3，坐标为 (x,y)。过 p_3 点作与三个顶点的连线，将 $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ 分成三个三角形 (图 1)：$\triangle(p_1,p_2,p_3),\triangle(p_0,p_3,p_2),\triangle(p_0,p_1,p_3)$，其面积分别为 S_0,S_1,S_2

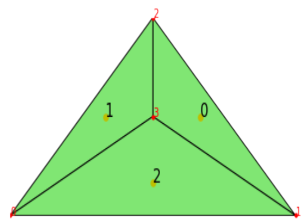

图 1

显然 $S_0+S_1+S_2=S$，令

$$L_0=\frac{S_0}{S},\quad L_1=\frac{S_1}{S},\quad L_2=\frac{S_2}{S}$$

称 (L_0,L_1,L_2) 位 P_3 的面积坐标，其中

$$\begin{cases} 2S=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad 2S_0=\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ 2S_1=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad 2S_2=\begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \end{cases}$$

由此可得面积坐标和直角坐标的转化关系

$$\begin{cases} x=x_0L_0+x_1L_1+x_2L_2 \\ y=y_0L_0+y_1L_1+x_2L_2 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
L_0 = \frac{1}{2S}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\
L_1 = \frac{1}{2S}[(x_3y_0 - x_0y_3) + (y_3 - y_0)x + (x_0 - x_3)y] \\
L_2 = \frac{1}{2S}[(x_0y_1 - x_1y_0) + (y_0 - y_1)x + (x_1 - x_0)y]
\end{cases}
$$

3.2 Lagrange 型公式

在三角型元 $\triangle(0,1,2)$ 上构造插值多项式

$$
p_m(x,y) = \sum_{i+j=0}^{m} c_{ij}x^iy^j
$$

易知 $p_m \in H^1$，当 m=1 时，有待定系数法得

$$
p_1(x,y) = L_0u_0 + L_1u_1 + L_2u_2
$$

从公式可知 L_i 即为对应节点的基函数在单元 $\triangle(0,1,2)$ 上的限制。

4 形成线性方程组

4.1 剖分

对区间 Ω 按图 2 方式剖分，并对节点 (node) 和单元 (cell) 进行编号，各节点坐标为 (x_i, y_i)，i=0, ... , n

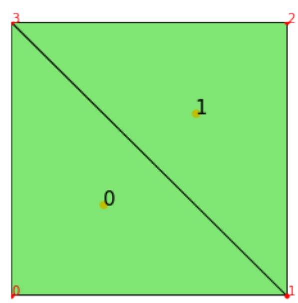

图 2

4.2 总刚度矩阵

设 $\phi_i = (\phi_i^{(1)}, \phi_i^{(2)})^t$，i = 0, ... , n 为试探函数空间 U_h 的基函数，则任一 $u_h \in U_h$ 可表成

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} u_i \phi_i, \quad u_i = u_h(x_i, y_i)$$

带入变分形式得

$$\sum_{j=0}^{n} a(\phi_j, \phi_i) u_i = (f, \phi_i) \quad i = 0, ..., n$$

矩阵形式为

$$\begin{gathered} Au = F \\ A = (a(\phi_i, \phi_j))_{n \times n} \\ F = ((f, \phi_i))_{n \times 1} \\ u = (u_i)_{n \times 1} \end{gathered}$$

4.3 单元刚度矩阵

在第 m 个单元 cell=$\triangle(i, j, k)$ 上，单元刚度矩阵和单元载荷向量为

$$\begin{gathered} A^{(m)} = (\int_{cell} (2\mu\epsilon(\phi_{i_1}) : \epsilon(\phi_{j_1}) + \lambda div\phi_{i_1} div\phi_{j_1}))_{3\times 3} \\ F^{(m)} = (\int_{cell} f \cdot \phi_{i_1})_{3\times 1} \\ i_1, j_1 = i, j, k \end{gathered}$$

将 $A^{(m)}$ 扩展成 $n \times n$ 矩阵，行列为 i，j，k 的九个元素即为 $A^{(m)}$ 的九个元素，并以同样的方式将 $F^{(m)}$ 扩展成 $n \times 1$ 向量，则

$$\begin{gathered} A = \sum_{m=0}^{n} A^{(m)} \\ F = \sum_{m=0}^{n} F^{(m)} \end{gathered}$$

4.4 边界条件

模型为齐次边界条件，若 (x_i, y_i) 为边界点，则 A 第 i 行只有第 i 列元素为 1，其他元素及 F(i) 都为 0。