一维二阶 Poisson 求解

2022 年 10 月 22 日

1 数值算例

1.1 Poisson 方程

$$\begin{cases} Lu = -u''(x) = f(x) \quad x \in G, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

其中 f(x) = sin(x), G = [0, π], 真解为 u(x) = sin(x)。

1.2 变分

令 $v \in C_0^\infty$, 以 v 乘以方程两端得:

$$\int_0^\pi (Lu - f)vdx = \int_0^\pi (-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - sin(x))vdx = 0$$

有分步积分法得:

$$\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx = \int_0^\pi vsin(x)dx$$

令 a(u,v) = $\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}dx$, 得原方程变分形式:

$$a(u, v) = (f, v)$$

1.3 剖分

将区间 G 分成 n 等分，分点为

$$x_i = ih \quad i = 0, 1, ..., n,$$

其中 h = $\frac{\pi}{n}$

1.4 构造基函数

基函数选取山形函数

$$\begin{cases} \phi_0(x) = \begin{cases} 1-\frac{x-x_0}{h_1}, & x_0 \le x \le x_1, \\ 0, & 其他. \end{cases} \\ \phi_i(x) = \begin{cases} 1+\frac{x-x_i}{h_i}, & x_{i-1} \le x \le x_i, \\ 1-\frac{x-x_i}{h_{i+1}}, & x_i \le x \le x_{i+1} \\ 0, & 其他, \end{cases} \\ \phi_n(x) = \begin{cases} 1+\frac{x-x_n}{h_n}, & x_{n-1} \le x \le x_n, \\ 0, & 其他 \end{cases} \end{cases}$$

借助仿射变换，及 [0,1] 上的标准山形函数

$$\varepsilon = F_i(x) = \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, \qquad N_0(\varepsilon) = 1-\varepsilon, N_1(\varepsilon) = \varepsilon,$$

则对基函数 i = 1,2,...,n-1, 基函数可写成:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} N_0(\varepsilon), & \varepsilon = \frac{x-x_i}{h_{i+1}}, \quad x_i \le x \le x_{i+1} \\ N_1(\varepsilon), & \varepsilon = \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, \quad x_{i-1} \le x \le x_i \\ 0, & 其他, \end{cases}$$

而

$$\phi_0(x) = \begin{cases} N_0(\varepsilon), & \varepsilon = \frac{x-x_0}{h_1}, \quad x_0 \le x \le x_1, \\ 0, & 其他 \end{cases}$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} N_1(\varepsilon), & \varepsilon = \frac{x-x_{n-1}}{h_n}, \quad x_{n-1} \le x \le x_n, \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

1.5 形成有限元方程

设数值解 $u_h = \sum_{i=0}^{n} c_i\phi_i$, 由边值条件得 $c_0 = c_n = 0$. 带入变分形式得有限元方程:

$$\sum_{j=1}^{n-1} a(\phi_j, \phi_i)c_j = (f, \phi_i), \quad i = 1, 2, ..., n-1$$

其矩阵形式为

$$K\bar{c} = \bar{b}$$

其中

$$K = \begin{bmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & a(\phi_1, \phi_2) & ... & a(\phi_1, \phi_{n-1}) \\ a(\phi_2, \phi_1) & a(\phi_2, \phi_2) & ... & a(\phi_2, \phi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a(\phi_{n-1}, \phi_1) & a(\phi_{n-1}, \phi_2) & ... & a(\phi_{n-1}, \phi_{n-1}) \end{bmatrix}, \quad \bar{c} = (c_1, c_2, ..., c_{n-1})^T$$