弹性问题

2022 年 11 月 26 日

1 模型

令

$$\sigma(u) = 2\mu\epsilon(u) + \lambda tr(\epsilon(u))\delta$$
$$\epsilon(u) = \frac{1}{2}(gradu + (gradu)^t)$$
$$tr(\tau) = \tau_{11} + \tau_{22}$$
$$grad(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$
$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$divu = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}$$
$$div\tau = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

考察模型

$$-div\sigma(u) = f \quad \in \Omega$$
$$u|_\Gamma = 0$$

其中 $u = (u_1, u_2)^t$ 为求解向量，$f = (f_1, f_2)^t$ 为右端向量，$\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$$u_1 = (x-1)(y-1)ysin(x)$$
$$u_2 = (x-1)(y-1)xsin(y)$$
$$f_1 = -((2\mu+\lambda)y(y-1)(2cos(x)-(x-1)sin(x))$$
$$+(\mu+\lambda)(2x-1)(sin(y)+(y-1)cos(y))$$
$$+2\mu(x-1)sin(x))$$
$$f_2 = -((2\mu+\lambda)x(x-1)(2cos(y)-(y-1)sin(y))$$
$$+(\mu+\lambda)(2y-1)(sin(x)+(x-1)cos(x))$$
$$+2\mu(y-1)sin(y))$$

2 变分

设 $\nu = (\nu_1, \nu_2)^t, \quad \nu_1, \nu_2 \in C_0^\infty(\Omega)$，方程两边同乘 ν 并积分得

$$-\int_\Omega div\sigma(u)\nu dxdy = \int_\Omega f\nu dxdy$$

由

$$fdiva = div(fa) - a : gradf$$
$$\int_\Omega divadV = \int_{\partial\Omega} adS$$

得

$$-\int_\Omega div\sigma(u)\nu dxdy$$
$$= -\int_\Omega div(\sigma(u)\nu)dxdy - \int_\Omega \sigma(u) : grad\nu dxdy$$
$$= -\int_\Gamma \sigma(u)\nu dxdy + \int_\Omega \sigma(u) : grad\nu dxdy$$
$$= \int_\Omega \sigma(u) : grad\nu dxdy$$

所以

$$\int_\Omega \sigma(u) : grad\nu dxdy = \int_\Omega f\nu dxdy$$

该问题的变分问题为，求 $u \in H^1(\Omega)$ 使得 $u|_{\Gamma_1} = g$，并且

$$a(u,\nu) = \int_\Omega f \cdot \nu dxdy \quad \forall \nu \in V$$

其中

$$a(u,\nu) := \int_\Omega \sigma(u) : grad\nu dxdy$$
$$= \int_\Omega 2\mu\epsilon(u) : grad\nu + \lambda divudiv\nu dxdy$$
$$V := \{\nu \in H^1(\Omega) \quad | \quad \nu|_\Gamma = 0\}$$

3 剖分与基函数

3.1 剖分

对区间 Ω 按图 1 方式剖分，并对节点和单元进行编号，各节点坐标为 (x_i, y_i)，i=0, ... , n，

设基函数为

$$(\varphi_0, 0)^t, (0, \varphi_0)^t, (\varphi_1, 0)^t, (0, \varphi_1)^t, ..., (\varphi_n, 0)^t, (0, \varphi_n)^t$$

φ_i 为线性元，以下得到其在各单元上表达式。

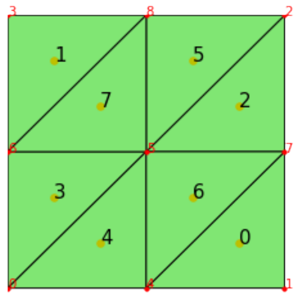

图 1

3.2 线性元

如图 2，设 $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ 是以 p_0,p_1,p_2 为顶点的任意三角型元，面积为 S。在 $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ 内任取一点 p_3，坐标为 (x,y)。过 p_3 点作与三个顶点的连线，将 $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ 分成三个三角形: $\triangle(p_1,p_2,p_3),\triangle(p_0,p_3,p_2),\triangle(p_0,p_1,p_3)$，其面积分别为 S_0,S_1,S_2

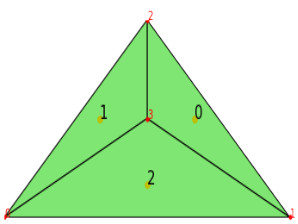

图 2

显然 $S_0+S_1+S_2=S$，令

$$L_0=\frac{S_0}{S},\quad L_1=\frac{S_1}{S},\quad L_2=\frac{S_2}{S}$$

$$\begin{cases} L_0=\frac{1}{2S}[(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y] \\ L_1=\frac{1}{2S}[(x_3y_0-x_0y_3)+(y_3-y_0)x+(x_0-x_3)y] \\ L_2=\frac{1}{2S}[(x_0y_1-x_1y_0)+(y_0-y_1)x+(x_1-x_0)y] \end{cases}$$

因为

$$\begin{cases} L_0=\begin{cases} 1, & x=x_0,y=y_0 \\ 0, & x=x_1,y=y_1 \\ 0, & x=x_2,y=y_2 \end{cases} \\ L_1=\begin{cases} 0, & x=x_0,y=y_0 \\ 1, & x=x_1,y=y_1 \\ 0, & x=x_2,y=y_2 \end{cases} \\ L_2=\begin{cases} 0, & x=x_0,y=y_0 \\ 0, & x=x_1,y=y_1 \\ 1, & x=x_2,y=y_2 \end{cases} \end{cases}$$

所以在此区间上 $\varphi_i=L_i$。

4 形成线性方程组

4.1 刚度矩阵

设 $\varphi_{xi}=(\varphi_i,0)^t,\varphi_{yi}=(0,\varphi_i)^t$， i = 0, ... , n 为试探函数空间 U_h 的基函数，则任一 $u_h\in U_h$ 可表成

$$u_h=\sum_{i=1}^{n}u_1^i\varphi_{xi}+\sum_{i=1}^{n}u_2^i\varphi_{yi},\quad u^i=u_h(x_i,y_i)$$

令 $\phi_{2i}=\varphi_{xi}$ ， $\phi_{2i+1}=\varphi_{yi}$, $c_{2i}=u_1^i$ ， $c_{2i+1}=u_2^i$ 带入变分形式得

$$\sum_{j=0}^{2n+1}a(\phi_j,\phi_i)c_i=(f,\phi_i)\quad i=0,...,2n+1$$

矩阵形式为

$$
\begin{aligned}
Ac &= F \\
A &= (a(\phi_i, \phi_j))_{(2n+1)\times(2n+1)} \\
F &= ((f, \phi_i))_{(2n+1)\times 1} \\
c &= (c_i)_{(2n+1)\times 1}
\end{aligned}
$$

4.2 边界条件

模型为齐次边界条件，若 (x_i, y_i) 为边界点，则 A 第 2i 行第 2i 列，第 2i+1 行第 2i+1 列元素为 1，其他元素及 F(2i)，F(2i+1) 都为 0。