

一维二阶 Poisson 求解

2022 年 10 月 29 日

1 数值算例

1.1 Poisson 方程

$$\begin{cases} Lu = -u''(x) = f(x) & x \in G, \\ u(0) = u(\pi) = 0 \end{cases}$$

其中 $f(x) = \sin(x)$, $G = [0, \pi]$, 真解为 $u(x) = \sin(x)$ 。

1.2 变分

令 $v \in C_0^\infty$, 以 v 乘以方程两端得:

$$\int_0^\pi (Lu - f)v dx = \int_0^\pi \left(-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sin(x)\right)v dx = 0$$

由分部积分法得:

$$\int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx = \int_0^\pi v \sin(x) dx$$

令 $a(u, v) = \int_0^\pi \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx$, 得原方程变分形式:

$$a(u, v) = (f, v)$$

1.3 剖分

将区间 G 分成 n 等分, 分点为

$$x_i = ih \quad i = 0, 1, \dots, n,$$

其中 $h = \frac{\pi}{n}$, 剖分单元 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$.

1.4 构造基函数

基函数选取山形函数

$$\begin{cases} \phi_0(x) = \begin{cases} 1 - \frac{x-x_0}{h_1}, & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases} \\ \phi_i(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-x_i}{h_i}, & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ 1 - \frac{x-x_i}{h_{i+1}}, & x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ 0, & \text{其他,} \end{cases} \\ \phi_n(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-x_n}{h_n}, & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & \text{其他} \end{cases} \end{cases}$$

借助仿射变换, 及 $[0, 1]$ 上的标准山形函数

$$\varepsilon = F_i(x) = \frac{x - x_{i-1}}{h_i}, \quad N_0(\varepsilon) = 1 - \varepsilon, N_1(\varepsilon) = \varepsilon,$$

则对基函数 $i = 1, 2, \dots, n-1$, 基函数可写成:

$$\phi_i(x) = \begin{cases} N_0(\varepsilon), & \varepsilon = \frac{x-x_i}{h_{i+1}}, \quad x_i \leq x \leq x_{i+1} \\ N_1(\varepsilon), & \varepsilon = \frac{x-x_{i-1}}{h_i}, \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i \\ 0, & \text{其他,} \end{cases}$$

而

$$\phi_0(x) = \begin{cases} N_0(\varepsilon), & \varepsilon = \frac{x-x_0}{h_1}, \quad x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} N_1(\varepsilon), & \varepsilon = \frac{x-x_{n-1}}{h_n}, \quad x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & \text{其他.} \end{cases}$$

1.5 形成有限元方程

设数值解 $u_h = \sum_{i=0}^n c_i \phi_i$, 由边值条件得 $c_0 = c_n = 0$, 且 $c_i = u_i, i = 1, \dots, n-1$. 带入变分形式得

有限元方程:

$$\sum_{j=1}^{n-1} a(\phi_j, \phi_i) c_j = (f, \phi_i), \quad i = 1, 2, \dots, n-1$$

其矩阵形式为

$$K\bar{c} = \bar{b}$$

其中

$$K = \begin{bmatrix} a(\phi_1, \phi_1) & a(\phi_1, \phi_2) & \dots & a(\phi_1, \phi_{n-1}) \\ a(\phi_2, \phi_1) & a(\phi_2, \phi_2) & \dots & a(\phi_2, \phi_{n-1}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a(\phi_{n-1}, \phi_1) & a(\phi_{n-1}, \phi_2) & \dots & a(\phi_{n-1}, \phi_{n-1}) \end{bmatrix},$$

$$\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_{n-1})^T$$

$$\bar{b} = ((f, \phi_1), (f, \phi_2), \dots, (f, \phi_{n-1}))^T.$$

1.6 从单元刚度矩阵组装总刚度矩阵

令 $v_h = \sum_{i=0}^n v_i \phi_i$, 双线性泛函 $a(u_h, v_h)$ 在剖分单元 $I_i = [x_{i-1}, x_i]$ 上的限制为

$$a(u_h, v_h) = (v_{i-1}, v_i) K^{I_i} \begin{pmatrix} u_{i-1} \\ u_i \end{pmatrix}$$

其中

$$K^{I_i} := \begin{bmatrix} a_{i-1,i-1}^{I_i} & a_{i-1,i}^{I_i} \\ a_{i,i-1}^{I_i} & a_{i,i}^{I_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a(N_0, N_0)_{I_i} & a(N_0, N_1)_{I_i} \\ a(N_1, N_0)_{I_i} & a(N_1, N_1)_{I_i} \end{bmatrix}$$

为单元刚度矩阵

泛函 (f, v_h) 在剖分单元 I_i 上的限制为

$$(f, v_h)_{I_i} = (v_{i-1}, v_i) b^{I_i}$$

其中

$$b^{I_i} = \begin{pmatrix} b_{i-1}^{I_i} \\ b_i^{I_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (f, N_0)_{I_i} \\ (f, N_1)_{I_i} \end{pmatrix}$$

为单元载荷向量。

将 K^{I_i} 扩展成 $n \times n$ 矩阵, 第 $i-1$ 行和第 i 行和第 $i-1$ 列和第 i 列就是 K^{I_i} 的四个元素, 其余全为零, 则总刚度矩阵

$$K = \sum_{i=1}^{n-1} K^{I_i}$$

以同样的方式得到总载荷向量

$$\bar{b} = \sum_{i=1}^{n-1} b^{I_i}$$

1.7 实验结果

当剖分次数 $n=5$ 时, 得到数值解与真解如下图

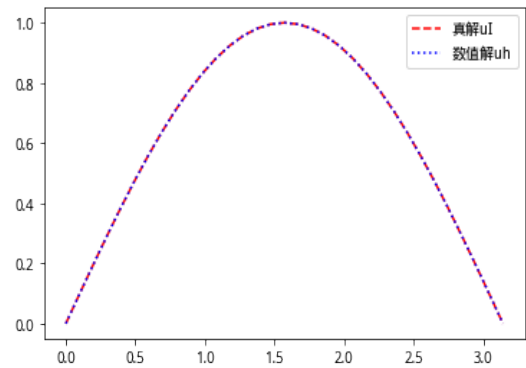


图 1

改变剖分步长 h 得到其与误差二范数 e 的关系如下表

表 1

h	e
1.57	1.63e-07
0.78	8.29e-10
0.39	4.48e-12
0.19	2.11e-14
0.09	1.33e-14

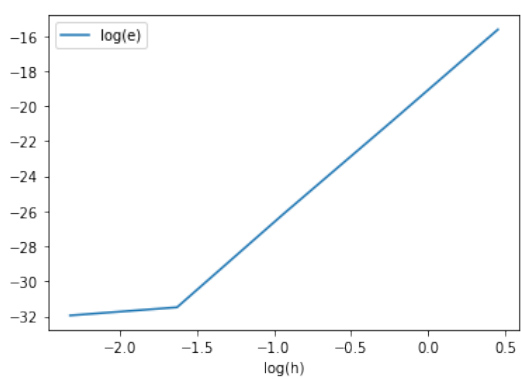


图 2