

平面弹性问题的位移-应力混合重心插值配点法

王兆清¹ 张磊¹ 徐子康¹ 李金²

(1 山东建筑大学 力学研究所 250101 济南; 2 山东建筑大学 理学院 250101 济南)

摘要: 提出数值分析平面弹性问题的位移-应力混合重心插值配点法。将弹性力学控制方程表达为位移和应力的耦合偏微分方程组, 采用重心插值近似未知量, 利用重心插值微分矩阵得到平面问题控制方程的矩阵形式离散表达式。使用重心插值离散位移和应力边界条件, 采用附加法施加边界条件, 得到求解平面弹性问题的过约束线性代数方程组, 应用最小二乘法求解过约束方程组, 得到平面弹性问题位移和应力数值解。数值算例结果表明, 重心 Lagrange 插值方法的计算精度可达到 10^{-10} 量级。位移-应力混合重心插值配点法的计算公式简单、程序实施方便, 是一种高精度的无网格数值分析方法。

关键词: 弹性力学问题; 重心 Lagrange 插值; 微分矩阵; 位移-应力混合公式; 配点法

中图分类号: O343.1 **文献标识码:** A **DOI:** 10.11776/cjam.35.02.D002

1 引 言

按照求解未知量的不同, 分析弹性问题的方法可分为位移法、应力法、位移-应力混合法、位移-压力混合法。位移-应力混合法的控制方程为平衡方程、几何方程、本构关系构成的一阶偏微分方程组^[1]。基于偏微分方程的强形式数值计算方法, 也称配点法, 其具有计算公式简单、不需要数值积分、程序实施容易的特点, 是一种真正意义的无网格方法^[2-4]。数值分析弹性问题的配点型方法主要有谱配点法(拟谱法)^[5]、径向基函数(RBF)配点法^[6]、等几何样条配点法^[7]、微分求积法^[8]、重心插值配点法^[2-4]等。

配点法的计算精度主要依赖于未知函数的近似方式和计算节点的分布形式^[4]。重心 Lagrange 插值是一种数值稳定和高精度的插值近似方法^[9], 可以

有效地防止计算机计算溢出^[10]。基于重心 Lagrange 插值的配点型数值方法——重心插值配点法, 采用重心插值微分矩阵可以直接得到微分方程的矩阵-向量形式的离散方程^[4-5], 可以极大地简化计算程序的编制。重心插值配点法求解微分方程具有类似谱方法的计算精度, 已被广泛应用于求解常微分方程初值问题^[11]和边值问题^[12]、偏微分方程边值问题和初边值问题^[13-14]、梁板的力学分析^[15-16]、弹性力学问题的位移法^[2,4]、土体渗流问题^[17]、非线性问题的数值分析^[3,18-19]。

本文采用基于位移-应力混合公式的重心插值配点法求解平面弹性力学问题。联立平衡方程和本构方程, 得到弹性力学的位移-应力混合一阶偏微分方程组。应用重心 Lagrange 插值微分矩阵离散控制方程的微分算子, 建立数值求解平面弹性问题的位移-应力混合计算公式。通过数值算例验证方法的有效性和计算精度。

基金项目: 国家自然科学基金面上项目(51379113); 山东省省属优秀项目(ZR2016JL006)

收稿日期: 2017-01-10

修回日期: 2017-02-21

第一作者简介: 王兆清, 男, 1965 年生, 博士, 山东建筑大学, 副教授; 研究方向——计算力学与工程数值分析方法。E-mail: sdjzuwang@126.com

2 重心插值及其微分矩阵

在矩形区域 $\Omega=[a,b]\times[c,d]$ 上, 区间 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 分别离散为 M 和 N 个计算节点, 即

$$a = x_1 < x_2 < \cdots < x_M = b,$$

$$c = y_1 < y_2 < \cdots < y_N = d$$

区域 Ω 上的张量积型计算节点为

$$(x_i, y_j), (i=1, 2, \cdots, M; j=1, 2, \cdots, N)$$

记

$$u_{ij} = u(x_i, y_j), (i=1, 2, \cdots, M; j=1, 2, \cdots, N)$$

则函数 $u(x, y)$ 在节点 (x_i, y_j) 上的张量积型重心插值公式为^[4]

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \xi_i(x) \eta_j(y) u_{ij} \quad (1)$$

式中: $\xi_i(x)$ 和 $\eta_j(y)$ 分别为在 x 方向节点 x_1, x_2, \cdots, x_M 和 y 方向节点 y_1, y_2, \cdots, y_N 上的重心插值基函数。

$$\xi_k(x) = \frac{w_k}{x - x_k} \bigg/ \sum_{i=1}^M \frac{w_i}{x - x_i}, (k=1, 2, \cdots, M),$$

$$w_i = 1 / \prod_{i \neq k} (x_i - x_k), (i=1, 2, \cdots, M),$$

$$\eta_k(y) = \frac{w_k}{y - y_k} \bigg/ \sum_{i=1}^N \frac{w_i}{y - y_i}, (k=1, 2, \cdots, N),$$

$$w_i = 1 / \prod_{i \neq k} (y_i - y_k), (i=1, 2, \cdots, N)$$

重心插值基函数在计算节点处是奇异的, 其在节点处的函数值及其导数值, 按照极限的思想计算^[20]。

利用插值式(1), 函数 $u(x, y)$ 的 $l+k$ 阶偏导数可以写作

$$\frac{\partial^{l+k} u}{\partial x^l \partial y^k} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \xi_i^{(l)}(x) \eta_j^{(k)}(y) u_{ij}, (l, k=0, 1, 2, \cdots) \quad (2)$$

偏导数在节点 (x_p, y_q) 处的函数值为

$$u^{(l,k)}(x_p, y_q) := \frac{\partial^{l+k} u(x_p, y_q)}{\partial x^l \partial y^k} = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \xi_i^{(l)}(x_p) \eta_j^{(k)}(y_q) u_{ij},$$

$$(p=1, 2, \cdots, M; q=1, 2, \cdots, N) \quad (3)$$

将 $M \times N$ 个张量积型计算节点 (x_i, y_j) 按列拉伸成 $M \times N$ 维列向量为

$$\mathbf{x} = [X_1, X_2, \cdots, X_{M \times N}]^T, \mathbf{y} = [Y_1, Y_2, \cdots, Y_{M \times N}]^T$$

令 \mathbf{u} 、 $\mathbf{u}^{(l,k)}$ 分别为函数 $u(x, y)$ 及其 $l+k$ 阶偏导数在节点 $\{(X_k, Y_k), k=1, 2, \cdots, M \times N\}$ 处的函数值构成的列向量, 则式(3)可以写成矩阵形式, 即

$$\mathbf{u}^{(l,k)} = \mathbf{P}^{(l,k)} \mathbf{u} \quad (4)$$

其中: $\mathbf{P}^{(l,k)} = \mathbf{C}^{(l)} \otimes \mathbf{D}^{(k)}$ 称作节点 $\{(X_k, Y_k)\}$ 上的

(l, k) 阶偏微分矩阵; 符号“ \otimes ”为矩阵 $\mathbf{C}^{(l)}$ 和 $\mathbf{D}^{(k)}$ 的张量积; $\mathbf{C}^{(l)}$ 、 $\mathbf{D}^{(k)}$ 分别为在 x 方向节点 x_1, x_2, \cdots, x_M 和 y 方向节点 y_1, y_2, \cdots, y_N 上的重心插值形成的 l 阶和 k 阶微分矩阵^[4]。规定 $\mathbf{C}^{(0)} = \mathbf{I}_M$, $\mathbf{D}^{(0)} = \mathbf{I}_N$, 其中 \mathbf{I}_M 和 \mathbf{I}_N 分别为 M 阶和 N 阶单位矩阵。

3 平面弹性问题位移-应力混合重心插值配点法

弹性力学控制方程由平衡方程、几何方程、本构关系构成, 其指标记法为^[1]

$$\sigma_{ij,i} + f_j = 0 \quad (5)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (6)$$

$$\varepsilon_{ij} = [(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] / E \quad (7)$$

其中: δ_{ij} 为克罗内克记号; E 为杨氏模量; ν 为泊松比。

采用位移-应力法求解弹性问题, 以位移函数 u_i 和应力函数 σ_{ij} 作为基本未知量, 位移-应力混合表达的控制方程可以写作

$$\begin{cases} \sigma_{ij,i} + f_j = 0 \\ E(u_{i,j} + u_{j,i}) = 2[(1+\nu)\sigma_{ij} - \nu\sigma_{kk}\delta_{ij}] \end{cases} \quad (8)$$

式(8)为位移-应力耦合的一阶偏微分方程组。定义适当的边界条件, 即可数值求解得到位移和应力的数值解。

对于选定的张量型计算节点, 由二维插值式(1)可知, 位移函数 $u(x, y)$ 、 $v(x, y)$ 和应力函数 $\sigma_x(x, y)$ 、 $\sigma_y(x, y)$ 、 $\tau_{xy}(x, y)$ 在计算节点 (x_i, y_j) 的重心插值公式为

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \xi_i(x) \eta_j(y) u_{ij},$$

$$v(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \xi_i(x) \eta_j(y) v_{ij},$$

$$\sigma_x(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \xi_i(x) \eta_j(y) (\sigma_x)_{ij},$$

$$\sigma_y(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \xi_i(x) \eta_j(y) (\sigma_y)_{ij},$$

$$\tau_{xy}(x, y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \xi_i(x) \eta_j(y) (\tau_{xy})_{ij} \quad (9)$$

式中: $u_{ij} = u(x_i, y_j)$ 和 $v_{ij} = v(x_i, y_j)$ 为位移函数在节点处的位移值; $(\sigma_x)_{ij} = \sigma_x(x_i, y_j)$ 、 $(\sigma_y)_{ij} = \sigma_y(x_i, y_j)$ 、 $(\tau_{xy})_{ij} = \tau_{xy}(x_i, y_j)$ 为应力函数在节点处的应力值。

利用位移-应力混合控制方程式(8)的重心插值配点法离散公式, 矩阵-向量形式可以表达为

$$\begin{cases} P^{(1,0)}\sigma_x + P^{(0,1)}\tau_{xy} + f_x = 0 \\ P^{(1,0)}\tau_{xy} + P^{(0,1)}\sigma_y + f_y = 0 \\ EP^{(1,0)}u - \sigma_x + \nu\sigma_y = 0 \\ EP^{(0,1)}v - \sigma_y + \nu\sigma_x = 0 \\ G(P^{(0,1)}u + P^{(1,0)}v) - \tau_{xy} = 0 \end{cases} \quad (10)$$

其中: u 、 v 和 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 以及 f_x 、 f_y 分别为位移函数和应力函数以及体力函数在计算节点处函数值构成的列向量; G 为剪切模量。

式(10)可以写成下面的矩阵形式, 即

$$\begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & P^{(1,0)} & \mathbf{0} & P^{(0,1)} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & P^{(0,1)} & P^{(1,0)} \\ EP^{(1,0)} & \mathbf{0} & -I & \nu I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & EP^{(0,1)} & \nu I & -I & \mathbf{0} \\ GP^{(0,1)} & GP^{(1,0)} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -f_x \\ -f_y \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (11)$$

其中: $\mathbf{0}$ 代表与分块矩阵子块协调的零矩阵; I 为 $(M \times N)$ 阶单位矩阵。式(11)可简记为

$$LU = F \quad (12)$$

对于矩形区域的位移和应力边界条件, 可表达为

$$u = \bar{u}, v = \bar{v},$$

$$\sigma_x = \bar{\sigma}_x, \sigma_y = \bar{\sigma}_y, \tau_{xy} = \bar{\tau}_{xy} \quad (13)$$

由于采用位移-应力耦合的一阶偏微分方程组进行分析, 位移和应力边界条件式(13)可在计算节点处直接离散。将所有边界条件集成为边界条件矩阵方程为

$$BU = F_b \quad (14)$$

将主方程式(12)和离散边界方程式(14)组合为一个过约束方程组式(15), 实现边界条件的施加。

$$\begin{bmatrix} L \\ B \end{bmatrix} U = \begin{bmatrix} F \\ F_b \end{bmatrix} \quad (15)$$

过约束方程组式(15)采用最小二乘法求解。

4 数值算例及分析

本文数值算例计算程序采用 MATLAB 编写, 采用与第二类 Chebyshev 节点同分布形式的计算节点。计算误差采用向量欧氏范数度量。

算例1 单位正方形板的拉伸问题

边长为 1m 的正方形板在单位均布拉力作用下的单向拉伸, 板的弹性模量 $E=100\text{Pa}$, $\nu=0.3$ 。力边界条件为

$\sigma_x=0, \tau_{xy}=0, x=0, x=1, \sigma_y=1, \tau_{xy}=0, y=1$
 $y=0$ 边界上的位移边界条件由问题的平面应力问题位移解确定, 即

$$u(x, y) = \frac{\nu}{E}(1-x), \quad v(x, y) = \frac{1}{E}y \quad (16)$$

计算的位移平均误差 E_d 在 10^{-16} 量级附近, 已接近机器精度 2.2204×10^{-16} , 计算的应力平均误差 E_s 在 10^{-13} 量级附近。图1中 E 为误差, 图1给出了不同数量节点的位移平均误差和应力平均误差变化曲线。由图1可以看出, 随着计算节点数量增加, 计算误差波动很小, 说明本方法是一种数值稳定性极好、计算精度高的数值计算方法。

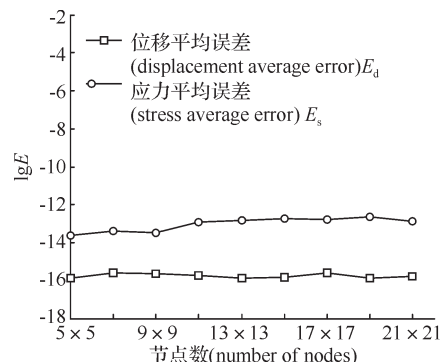


图1 不同节点数量位移-应力法计算的位移和应力平均误差变化曲线
 Fig.1 Fluctuation curves of calculated displacement and stress average error of displacement-stress method with different number of nodes

算例2 端部剪力作用下悬臂梁的弯曲问题

端部受剪力 P 作用, 单位厚度、高为 D 、长为 L 的悬臂梁弯曲问题。力边界条件和固定端位移边界条件由问题的平面应力问题位移解确定如下

$$\begin{cases} u = -\frac{P}{2EI}x^2y + \frac{P}{3EI}(1+\nu/2)y^3 + \frac{P}{2EI}[L^2 - (1+\nu)D^2/2]y \\ v = \frac{\nu P}{2EI}xy^2 + \frac{P}{6EI}x^3 - \frac{PL^2}{2EI}x + \frac{PL^3}{3EI} \end{cases} \quad (17)$$

式中 $I = D^3/12$ 为梁的截面惯性矩。数值计算时, 梁的力学参数和几何参数分别取 $E=10\text{kPa}$, $L=10\text{m}$, $D=1\text{m}$, $\nu=0.25$, $P=1000\text{N/m}$ 。

本算例是分析弹性问题的经典算例之一, 采用位移法^[4]和位移-应力法分别计算此问题, 并对比两种方法的计算精度和数值稳定性。从理论上分析, 由于位移-应力法的计算矩阵为一阶系统(最高阶偏

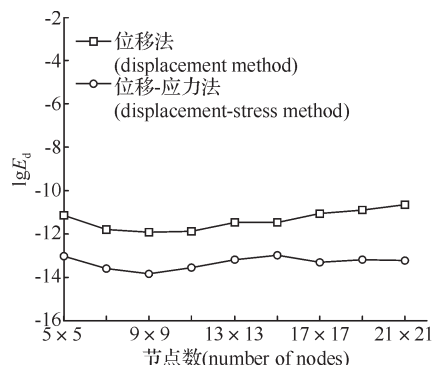


图2(a) 位移平均误差(displacement average error)

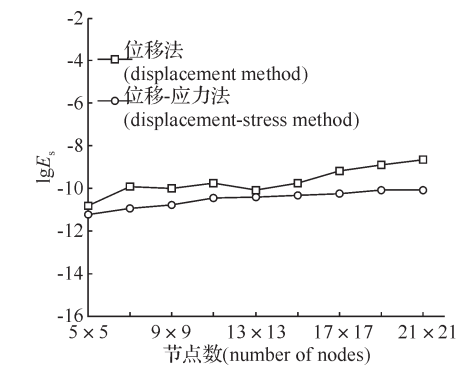


图 2(b) 应力平均误差(stress average error)

图 2 算例 2 位移法和位移-应力法计算的平均误差

Fig.2 Calculated average error of displacement method and displacement-stress method of example 2

导数为一阶), 而位移法的计算矩阵为二阶系统, 位移-应力法的计算精度要高于位移法。

不同节点数量位移法和位移-应力法计算的位移和应力平均误差如图 2 所示。由图 2 可以直观地看出, 该问题位移-应力法计算的位移平均误差比位移法计算的平均误差低 1~2 个数量级, 计算的应力平均误差比位移法计算平均误差低 1 个数量级左右。

算例 3 体力作用下正方形块的变形问题

正方形区域 $[0,1] \times [0,1]$, 平面应力情况下体力分量为

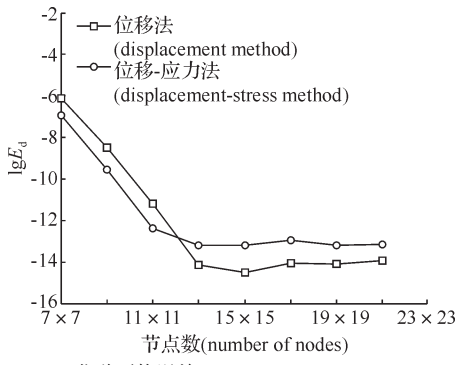
$$\begin{cases} f_x = [(Aa^2 + Bab)(\lambda + \mu) + A(a^2 + b^2)\mu] \times \sin(ax) \cos(by) \\ f_y = [(Bb^2 + Aab)(\lambda + \mu) + B(a^2 + b^2)\mu] \times \cos(ax) \sin(by) \end{cases} \quad (18)$$

其中 λ 、 μ 为拉梅常数, $\lambda = \frac{Ev}{(1+\nu)(1-\nu)}$, $\mu = \frac{E}{2(1+\nu)}$ 。各边界上的位移边界条件由问题的平面应力问题位移解析解确定, 则

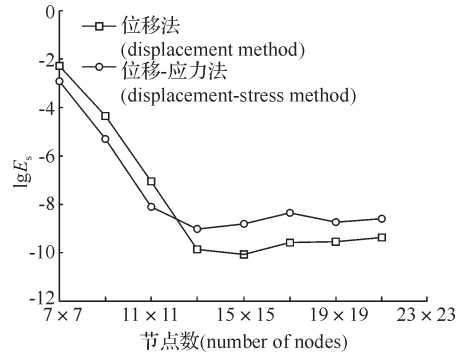
$$\begin{cases} u = A \sin(ax) \cos(by) \\ v = B \cos(ax) \sin(by) \end{cases} \quad (19)$$

数值计算时, 力学参数和几何参数分别取 $a = \pi/2$, $b = \pi/3$, $\nu = 0.4$, $A = (1-\nu)/a$, $B = -\nu/b$, $E = 1000 \text{ Pa}$ 。

不同节点数量位移法和位移-应力法计算的位移平均误差和应力平均误差如图 3 所示。由图 3 可以直观地看出, 采用较少的计算节点得不到问题的高精度解, 这主要是因为本问题的位移解析解为三角振荡函数。随着计算节点数量的增加, 位移和应力的平均误差明显下降, 位移-应力法的收敛速度要高于位移法, 但收敛后位移法计算的位移平均误差和应力平均误差都要比位移-应力法的计算结果平均高 1 个数量级左右。



(a) 位移平均误差(displacement average error)



(b) 应力平均误差(stress average error)

图 3 算例 3 位移法和位移-应力法计算的平均误差

Fig.3 Calculated average error of displacement method and displacement-stress method of example 3

表 1 给出了不同数量节点位移法和位移-应力法计算矩阵的条件数。由表 1 数据可以看出, 位移-应力法计算矩阵的条件数近似是位移法的 10^4 倍, 条件数越大说明矩阵越病态, 这是引起本问题位移-应力法计算精度损失的主要原因。

表 1 不同节点数量位移法和位移-应力法计算矩阵的条件数

节点数量 (number of nodes)	计算矩阵条件数 (condition number of calculated matrix)	
	位移法 (displacement method)	位移-应力法 (displacement-stress method)
7×7	3.3961×10^3	1.3599×10^7
9×9	1.1579×10^4	4.3120×10^7
11×11	3.0415×10^4	9.9919×10^7
13×13	6.8239×10^4	1.2735×10^8
15×15	1.3293×10^5	3.2417×10^8
17×17	2.3977×10^5	5.4498×10^8
19×19	4.5956×10^5	8.6543×10^8
21×21	6.4514×10^5	1.2987×10^9

5 结 论

1) 建立以位移和应力五个变量为未知函数的位移-应力混合计算公式。采用重心 Lagrange 插值微分矩阵离散控制方程, 得到的计算矩阵为一阶系统, 降低了求导阶数。矩阵-向量形式的计算公式, 非常适

用于 MATLAB 计算程序的编写。

2) 与位移法相比, 位移-应力法的位移和应力边界条件离散方式相同, 边界条件的离散和施加过程统一、方便。位移-应力法不需要采用应力分量表达式即可一次性直接求解得到问题的应力解。

3) 数值算例表明, 重心 Lagrange 插值法求解弹性问题的位移平均误差可达 10^{-12} 量级, 具有很高的计算精度; 随着计算节点数量的增加, 计算误差波动很小, 具有很好的数值稳定性。重心插值配点法的计算公式简单、程序实施方便, 是一种高精度的无网格数值分析方法。

参 考 文 献 (References)

- [1] ARNOLD D N, AWANOU G, QIU W. Mixed finite elements for elasticity on quadrilateral meshes[J]. *Advances in computational mathematics*, 2015, 41(3): 553-572.
- [2] 李树忱, 王兆清, 袁超. 极坐标系下弹性问题的重心插值配点法[J]. *中南大学学报(自然科学版)*, 2013, 44(5): 2031-2040. (LI Shuchen, WANG Zhaoqing, YUAN Chao. Barycentric interpolation collocation method for solving elastic problems[J]. *Journal of central south university(science and technology)*, 2013, 44(5): 2031-2040(in Chinese)).
- [3] 王兆清, 李淑萍. 非线性问题的重心插值配点法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015. (WANG Zhaoqing, LI Shuping. Barycentric interpolation collocation method for nonlinear problems[M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2015(in Chinese)).
- [4] 李树忱, 王兆清. 高精度无网格重心插值配点法-算法、程序及工程应用[M]. 北京: 科学出版社, 2012. (LI Shuchen, WANG Zhaoqing. Highly precision meshless barycentric interpolation collocation method: algorithms, programs and applications[M]. Beijing: Science Press, 2012(in Chinese)).
- [5] CIVIDINI A, QUARTERONI A, ZAMPIERI E. Numerical solution of linear elastic problems by spectral collocation methods[J]. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 1993, 104(1): 49-76.
- [6] CHI S W, CHEN J S, HU H Y. A weighted collocation on the strong form with mixed radial basis approximations for incompressible linear elasticity[J]. *Computational mechanics*, 2014, 53(2): 309-324.
- [7] KRUSE R, NGUYEN-THANH N, LORENZIS L, et al. Isogeometric collocation for large deformation elasticity and frictional contact problems[J]. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 2015, 296: 73-112.
- [8] ZONG Z, LAM K Y, ZHANG Y Y. A multidomain differential quadrature approach to plane elastic problems with material discontinuity[J]. *Mathematical and computer modelling*, 2005, 41(4): 539-553.
- [9] BERRUT J P, TREFETHEN L N. Barycentric Lagrange interpolation[J]. *Siam review*, 2004, 46(3): 501-517.
- [10] TANG X, LIU Z, HU Y. New results on pseudospectral methods for optimal control[J]. *Automatica*, 2016, 65: 160-163.
- [11] 王兆清, 李淑萍, 唐炳涛, 等. 脉冲激励振动问题的高精度数值分析[J]. *机械工程学报*, 2009, 45(1): 288-292. (WANG Zhaoqing, LI Shuping, TANG Bingtao, et al. High precision numerical analysis of vibration problems under pulse excitation[J]. *Journal of mechanical engineering*, 2009, 45(1): 288-292(in Chinese)).
- [12] 王兆清, 蔡甲帅, 唐炳涛. 奇异源项问题的重心插值数值解[J]. *计算物理*, 2012, 28(6): 883-888. (WANG Zhaoqing, QI Jiashuai, TANG Bingtao. Numerical solution of singular source problems with barycentric interpolation[J]. *Chinese journal of computational physics*, 2012, 28(6): 883-888(in Chinese)).
- [13] WANG Z Q, LI S, PING Y, et al. A highly accurate regular domain collocation method for solving potential problems in the irregular doubly connected domains[J]. *Mathematical problems in engineering*, 2014, 2014(4): 1-9.
- [14] 刘婷, 马文涛. 重心 Lagrange 插值配点法求解二维双曲电报方程[J]. *计算物理*, 2016, 33(3): 341-348. (LIU Ting, MA Wentao. Barycentric Lagrange interpolation collocation method for two-dimensional hyperbolic telegraph equation[J]. *Chinese journal of computational physics*, 2016, 33(3): 341-348(in Chinese)).
- [15] 王兆清, 李淑萍, 唐炳涛. 圆环变形及屈曲的重心插值配点法分析[J]. *机械强度*, 2009, 31(2): 245-249. (WANG Zhaoqing, LI Shuping, TANG Bingtao. Deformation and buckling analysis of ring by barycentric interpolation collocation method[J]. *Journal of mechanical strength*, 2009, 31(2): 245-249(in Chinese)).
- [16] 王兆清, 马燕, 唐炳涛. 梁动力学问题重心有理插值配点法[J]. *振动与冲击*, 2013, 32(22): 41-46. (WANG Zhaoqing, MA Yan, TANG Bingtao. Barycentric rational interpolation collocation method for solving dynamic problems of Euler-Bernoulli beams[J]. *Journal of vibration and shock*, 2013, 32(22): 41-46(in Chinese)).
- [17] 李树忱, 王兆清, 袁超. 岩土体渗流自由面问题的重心插值无网格方法[J]. *岩土力学*, 2013, 34(7): 1867-1873. (LI Shuchen, WANG Zhaoqing, YUAN Chao. Barycentric interpolation meshless method for solving rock and soil seepage free surface problems[J]. *Rock and soil mechanics*, 2013, 34(7): 1867-1873(in Chinese)).
- [18] JIANG J, WANG Z Q, WANG J H, et al. Barycentric rational interpolation iteration collocation method for solving nonlinear vibration problems[J]. *Journal of computational and nonlinear dynamics*, 2016, 11(2): 1-13.
- [19] 王兆清, 庄美玲, 姜剑. 非线性 MEMS 微梁的重心有理插值迭代配点法分析[J]. *固体力学学报*, 2015, 36(5): 453-459. (WANG Zhaoqing, ZHUANG Meiling, JIANG Jian. Nonlinear MEMS microbeam analysis by barycentric rational interpolation iteration collocation method[J]. *Chinese journal of solid mechanics*, 2015, 36(5): 453-459(in Chinese)).
- [20] WEIDEMAN J A, REDDY S C. A MATLAB differentiation matrix suite[J]. *ACM transactions on mathematical software*, 2000, 26(4): 465-519.

Barycentric interpolation collocation method based on mixed displacement-stress formulation for solving plane elastic problems

Wang Zhaoqing¹ Zhang Lei¹ Xu Zikang¹ Li Jin²

(1 Institute of Mechanics, Shandong Jianzhu University, 250101, Ji'nan, China; 2 School of Science, Shandong Jianzhu University, 250101, Ji'nan, China)

Abstract: Barycentric Interpolation Collocation Method based on mixed displacement-stress formulation for solving plane elastic problems is proposed. The governing equations of elastic theory are expressed as a coupled system of partial differential equations with displacements and stresses variables. Both displacements and stresses are approximated via tensor-product type barycentric Lagrange interpolation. The matrix-vector form expressions of the governing equations for plane elasticity problem are obtained by using barycentric interpolation differentiation matrices. Discrete boundary conditions of the displacements and stresses are obtained by barycentric interpolation. The additional method is applied to impose boundary conditions, and an over-constrained linear system of algebraic equations for elastic plane problem is constructed. Numerical solutions of displacements and stresses for plane elasticity problem are solved by using least-square method. Some numerical examples are given to verify the effectiveness and accuracy of the proposed method. The numerical results indicate that the computational errors of Lagrange interpolation method would be smaller by 10^{-10} order of magnitude.

Keywords: *elastic problem, Lagrange interpolation, differentiation matrix, displacement-stress mixed formulation, collocation method.*

Vibration analysis of honeycomb sandwich plate with negative Poisson's ratio

Zhu Xiufang Zhang Junhua

(College of Mechanical Engineering, Beijing Information Science and Technology University, 100192, Beijing, China)

Abstract: Influence of geometric parameters of an auxetic honeycomb sandwich plate on the vibration frequencies of the plate is studied and the variation law of the frequencies with Poisson's ratios is obtained. The nonlinear governing equations of motion for the negative Poisson's ratio honeycomb sandwich plate are derived by using the Reddy's higher-order shear deformation theory and the Hamilton's principle. According to the modified Gibson formula, the equivalent elastic parameters of the honeycomb cores are recalculated considering the bending and axial compression and deformation of the honeycomb cells. The Navier method is used to select the modal function suitable for the simply supported boundary conditions, and the first five natural frequencies of the system are obtained under the length-thickness ratios are 0.01, 0.05, 0.10, the core thickness ratios are 0.80, 0.85, 0.90, 0.95, the cell angles of the honeycomb core are -30° , -60° , 0° , 30° , 60° , respectively. Influence of Poisson's ratio on the natural frequency of the system is analyzed. It is obtained that the natural frequencies of negative Poisson's ratio honeycomb sandwich plate are significantly smaller than the traditional positive Poisson's ratio honeycomb sandwich plate. Results obtained in this paper are of significance to further study the multimodal resonance of the system and theoretical basis for vibration design of negative Poisson's ratio honeycomb sandwich structures.

Keywords: *negative Poisson's ratio, honeycomb sandwich plate, nature frequency, free vibration.*