翻译《The Mathematical Theory of Finite Element Methods 3rd Ed (Brenner2007)》11.3 节

2022 年 10 月 30 日

1　有限元近似和锁定

为简单起见，我们假设 Ω 是一个凸多边形区域，并且 Γ_1 or Γ_2 中任意一个为空。对于纯位移问题 $(\Gamma_2 = \emptyset)$，我们只需考虑齐次边界条件。

令 T^h 是 Ω 三角划分的一个非退化族。对于纯位移问题 $(\Gamma_2 = \emptyset)$, 我们使用有限元空间

(11.3.1) $$V_h := \{\nu \in H^1(\Omega) : \nu|_T\text{为线性函数}, \forall T \in T^h\},$$

并且对于纯牵引力问题 $(\Gamma_1 = \emptyset)$，我们使用

(11.3.2) $$V_h := \{\nu \in H^1(\Omega) : \nu|_T\text{为线性函数}, \forall T \in T^h\},$$

根据第二章和第四章的理论我们得到以下定理。

(11.3.3) Theorem. 令 $u \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ 满足纯位移问题, 并且 $u_h \in V_h$ 满足

$$a(u_h, \nu) = \int_\Omega f \cdot \nu dx \quad \forall \nu \in V_h.$$

则存在一个正常数 $C_{(\mu,\lambda)}$ 使得

(11.3.4) $$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \le C_{(\mu,\lambda)} h \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

(11.3.5) Theorem. 令 $u \in H^2(\Omega)$ 满足纯牵引力问题。令 $u_h \in V_h$ 满足

$$a(u_h, \nu) = \int_\Omega f \cdot \nu dx + \int_\Gamma t \cdot \nu ds \quad \forall \nu \in V_h.$$

则存在一个正常数 $C_{(\mu,\lambda)}$ 使得

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \le C_{(\mu,\lambda)} h \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

对于一般情况 $\emptyset \ne \Gamma_1 \ne \partial\Omega$ 下的收敛定理，查看练习 11.x.25.

对于固定的 μ 和 λ，定理 11.3.3 和 11.3.5 给出了弹性问题令人满意近似的

有限元近似。但是这些有限元方法的性能随着 λ 趋向于 ∞ 而变差。这就是所谓的锁定现象，我们将在本节的其余部分解释。

令 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$. 我们考虑 $\mu=1$ 时的纯位移边值问题:

$$
\begin{aligned}
div\{2\epsilon(u^{\lambda})+\lambda tr(\epsilon(u^{\lambda}))\delta\} &= f \quad in \quad \Omega \\
u^{\lambda}|_{\partial\Omega} &= 0.
\end{aligned}
\tag{11.3.6}
$$

注意给定的 f，当 $\lambda\to\infty$，(11.2.33) 说明 $\|divu^{\lambda}\|_{H^1(\Omega)}\to 0$. 换句话说，我们正在处理一种几乎不可能压缩的弹性材料。为了强调对 λ 的依赖，我们将应力张量 (11.1.3) $\sigma_{\lambda}(\nu)$ 和变分形式 (11.2.2) $a_{\lambda}(\nu,\omega)$ 表示为

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\lambda}(\nu) &= 2\epsilon(\nu)+\lambda tr(\epsilon(\nu))\delta \\
a_{\lambda}(\nu,\omega) &= \textstyle\int_{\Omega}\{2\epsilon(\nu):\epsilon(\omega)+\lambda div\nu div\omega\}dx.
\end{aligned}
$$

令 T^h 为 Ω (cf. 图 1) 的一个规则三角剖分，并且 V_h 被定义为 (11.3.1)。对于每一个 $u\in H^2(\Omega)\cap H^1_0(\Omega)$，我们定义 $u^{\lambda}_h\in V_h$ 为以下方程组的特解

$$a_{\lambda}(u^{\lambda}_h,\nu)=\int_{\Omega}[-div\sigma_{\lambda}(u)]\cdot\nu dx \quad \forall\nu\in V_h.$$

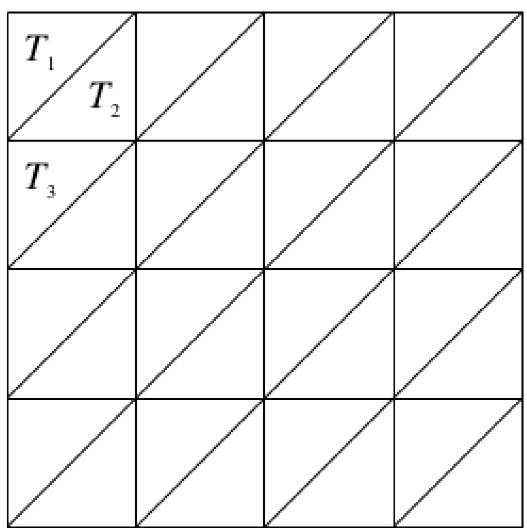

图 1: 单位正方形的规则三角剖分

定义 $L_{\lambda,h}$ 为

$$L_{\lambda,h}:=sup\{\frac{|u-u^{\lambda}_h|_{H^1(\Omega)}}{\|div\sigma_{\lambda}(u)\|_{L^2(\Omega)}}:0\neq u\in H^2(\Omega)\cap H^1(\Omega)\}.$$

我们要证明存在一个与 h 无关的正常数 C 使得

$$\lim_{\lambda\to\infty} \inf L_{\lambda,h} \geq C. \tag{11.3.7}$$

式 (11.3.7) 意味着：无论 h 取多小，只要 λ 足够大，我们都能找到 $u \in H^2(\Omega)\cap H^1(\Omega)$ 使得相对误差 $|u-u_h|_{H^1(\Omega)}/\|div\sigma_\lambda(u)\|_{L^2(\Omega)}$ 以一个与 h 无关的常数为下界。换句话说，有限元方法的性能将会随着 λ 变大而变坏。

为证明式 (11.3.7)，我们首先观察到

$$\{\nu \in V_h : div\nu = 0\} = \{0\} \tag{11.3.8}$$

(cf.exercise 11.x.14). 因此，映射 $\nu \to div\nu$ 是有限维空间 V_h 到 $L^2(\Omega)$ 的一个一对一映射，并且存在一个正常数 $C_1(h)$ 使得

$$\|\nu\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1(h)\|div\nu\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall\nu \in V_h. \tag{11.3.9}$$

令 ψ 是 $\overline{\Omega}$ 上的无穷次可微函数, 使得在 Ω 的边界上 $curl\psi = 0$ 且 $\|\epsilon(curl\psi)\|_{L^2(\Omega)} = 1$。令 $u := curl\psi$。则 $u \in H^2(\Omega)\cap H^1(\Omega)$，并有

$$div u = 0, \tag{11.3.10}$$

$$\|\epsilon(u)\|_{L^2(\Omega)} = 1, \tag{11.3.11}$$

$$\sigma_\lambda(u) = 2\epsilon(u). \tag{11.3.12}$$

根据 (11.3.10)，(11.3.11) 和 11.2 节开始的分步积分得

$$-\int_\Omega div\epsilon(u)\cdot u dx = \int_\Omega \epsilon(u) : \epsilon(u) dx = 1. \tag{11.3.13}$$

根据 (11.3.12)，(11.3.13) 推断

$$\lim_{\lambda\to\infty} div\sigma_\lambda(u) = 2div\epsilon(u) \neq 0. \tag{11.3.14}$$

由 (2.5.10) 得,

$$a_\lambda(u-u_h^\lambda, u-u_h^\lambda) = \min_{\nu \in V_h} a_\lambda(u-\nu, u-\nu) \le a_\lambda(u,u). \tag{11.3.15}$$

由 (11.3.10) 和 (11.3.11)，我们得到

$$a_\lambda(u,u) = 2. \tag{11.3.16}$$

因此，对于 λ 足够大时有

$$a_\lambda(u-u_h^\lambda, u-u_h^\lambda) \le 2. \tag{11.3.17}$$

由 (11.3.10) 和 (11.3.17) 得

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda}\|divu_h^\lambda\|_{L^2(\Omega)} &= \sqrt{\lambda}\|div(u-u_h^\lambda)\|_{L^2(\Omega)}\\ &\le \sqrt{a_\lambda(u-u_h^\lambda, u-u_h^\lambda)}\\ &\le \sqrt{2}\end{aligned}$$

对足够大的 λ 有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|divu_h^\lambda\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

由式 (11.3.9) 有

$$\lim_{\lambda\to\infty}\|u_h^\lambda\|_{H^1(\Omega)} = 0. \tag{11.3.18}$$

最后，我们得到 (cf.exercise 11.x.16)

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\infty}\inf L_{\lambda,h} &\ge \lim_{\lambda\to\infty}\inf \frac{|u-u_h^\lambda|_{H^1(\Omega)}}{\|div\sigma_\lambda(u)\|_{L^2(\Omega)}}\\ &= \frac{|u|_{H^1(\Omega)}}{\|div\sigma(u)\|_{L^2(\Omega)}} > 0.\end{aligned} \tag{11.3.19}$$

对这个特别例子的锁定的讨论到此为止。有关锁定的更多信息请参考 (Babuska & Suri 1992)。