

带间断系数的弹性问题

2023 年 1 月 14 日

目录

1	引言	2
2	有限元近似和闭锁	2
2.1	误差估计	2
2.2	闭锁现象	3
3	算例	5
3.1	模型	5
3.2	变分	6
3.3	剖分与基函数	7
3.3.1	剖分	7
3.3.2	线性元	7
3.4	形成线性方程组	8
3.4.1	刚度矩阵	8
3.4.2	边界条件	8
3.5	实验结果	8

1 引言

具有间断系数的方程成为交界面问题。这类问题起源于许多应用领域,例如 2 种不同材料或者相同材料在不同状态下物理机制的研究 [3]

平面弹性力学方程组是弹性力学中最基础、最常见的模型。当研究的弹性体形状和受力具有一定特点时,通过适当的简化处理,就可以归结为平面弹性问题 [1]。

对于各向同性均匀介质的平面弹性问题,当材料的 Lamé 常数 $\lambda \rightarrow \infty$ 时,即对于几乎不可压介质,通常低阶的协调有限元解,往往不再收敛到原问题的解,或者达不到最优收敛阶,这就是闭锁现象,使用非协调有限元可克服闭锁现象 [2]。

本文将通过数值实验的方法,考察对于具有间断系数的平面弹性问题,使用 C-R 元是否仍可以解除闭锁现象。

2 有限元近似和闭锁

2.1 误差估计

假设 Ω 是一个凸多边形区域,并且 Γ_1 or Γ_2 中任意一个为空。对于纯位移问题 ($\Gamma_2 = \emptyset$),我们只需考虑齐次边界条件。

令 T^h 是 Ω 三角划分的一个非退化族。对于纯位移问题 ($\Gamma_2 = \emptyset$),我们使用有限元空间

$$(1.3.1) \quad V_h := \{\nu \in H^1(\Omega) : \nu|_T \text{ 为线性函数}, \forall T \in T^h\},$$

并且对于纯牵引力问题 ($\Gamma_1 = \emptyset$),我们使用

$$(1.3.2) \quad V_h := \{\nu \in H^1(\Omega) : \nu|_T \text{ 为线性函数}, \forall T \in T^h\},$$

(1.3.3) Theorem[4]. 令 $u \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ 满足纯位移问题,并且 $u_h \in V_h$ 满足

$$a(u_h, \nu) = \int_{\Omega} f \cdot \nu dx \quad \forall \nu \in V_h.$$

则存在一个正常数 $C_{(\mu, \lambda)}$ 使得

$$(1.3.4) \quad \|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{(\mu, \lambda)} h \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

(1.3.5) Theorem. 令 $u \in H^2(\Omega)$ 满足纯牵引力问题。令 $u_h \in V_h$ 满足

$$a(u_h, \nu) = \int_{\Omega} f \cdot \nu dx + \int_{\Gamma} t \cdot \nu ds \quad \forall \nu \in V_h.$$

则存在一个正常数 $C_{(\mu, \lambda)}$ 使得

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{(\mu, \lambda)} h \|u\|_{H^2(\Omega)}.$$

2.2 闭锁现象

对于固定的 μ 和 λ , 定理 1.3.3 和 1.3.5 给出了弹性问题令人满意近似的有限元近似。但是这些有限元方法的性能随着 λ 趋向于 ∞ 而变差。这就是所谓的锁定现象。

令 $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$. 我们考虑 $\mu = 1$ 时的纯位移边值问题:

$$(1.3.6) \quad \begin{aligned} \operatorname{div}\{2\epsilon(u^\lambda) + \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(u^\lambda))\delta\} &= f \quad \text{in } \Omega \\ u^\lambda|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned}$$

注意给定的 f , 当 $\lambda \rightarrow \infty$, (1.2.33) 说明 $\|\operatorname{div} u^\lambda\|_{H^1(\Omega)} \rightarrow 0$. 换句话说, 我们正在处理一种几乎不可能压缩的弹性材料。为了强调对 λ 的依赖, 我们将应力张量 (1.1.3) $\sigma_\lambda(\nu)$ 和变分形式 (1.2.2) $a_\lambda(\nu, \omega)$ 表示为

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(\nu) &= 2\epsilon(\nu) + \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(\nu))\delta \\ a_\lambda(\nu, \omega) &= \int_{\Omega} \{2\epsilon(\nu) : \epsilon(\omega) + \lambda \operatorname{div} \nu \operatorname{div} \omega\} dx. \end{aligned}$$

令 T^h 为 Ω (cf. 图 1) 的一个规则三角剖分, 并且 V_h 被定义为 (1.3.1)。对于每一个 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 定义 $u_h^\lambda \in V_h$ 为以下方程组的特解

$$a_\lambda(u_h^\lambda, \nu) = \int_{\Omega} [-\operatorname{div} \sigma_\lambda(u)] \cdot \nu dx \quad \forall \nu \in V_h.$$

定义 $L_{\lambda, h}$ 为

$$L_{\lambda, h} := \sup \left\{ \frac{|u - u_h^\lambda|_{H^1(\Omega)}}{\|\operatorname{div} \sigma_\lambda(u)\|_{L^2(\Omega)}} : 0 \neq u \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega) \right\}.$$

我们要证明存在一个与 h 无关的正常数 C 使得

$$(1.3.7) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \inf L_{\lambda, h} \geq C.$$

式 (1.3.7) 意味着: 无论 h 取多小, 只要 λ 足够大, 我们都能找到 $u \in$

$H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ 使得相对误差 $|u - u_h|_{H^1(\Omega)} / \|div \sigma_\lambda(u)\|_{L^2(\Omega)}$ 以一个与 h 无关的常数为下界。换句话说, 有限元方法的性能将会随着 λ 变大而变坏。

为证明式 (1.3.7), 我们首先观察到

$$(1.3.8) \quad \{\nu \in V_h : div \nu = 0\} = \{0\}$$

(cf. exercise 11.x.14). 因此, 映射 $\nu \rightarrow div \nu$ 是有限维空间 V_h 到 $L^2(\Omega)$ 的一个一对一映射, 并且存在一个正常数 $C_1(h)$ 使得

$$(1.3.9) \quad \|\nu\|_{H^1(\Omega)} \leq C_1(h) \|div \nu\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall \nu \in V_h.$$

令 ψ 是 $\bar{\Omega}$ 上的无穷次可微函数, 使得在 Ω 的边界上 $curl \psi = 0$ 且 $\|\epsilon(curl \psi)\|_{L^2(\Omega)} = 1$ 。令 $u := curl \psi$ 。则 $u \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$, 并有

$$(1.3.10) \quad div u = 0,$$

$$(1.3.11) \quad \|\epsilon(u)\|_{L^2(\Omega)} = 1,$$

$$(1.3.12) \quad \sigma_\lambda(u) = 2\epsilon(u).$$

根据 (1.3.10), (1.3.11) 和 1.2 节开始的分步积分得

$$(1.3.13) \quad - \int_{\Omega} div \epsilon(u) \cdot u dx = \int_{\Omega} \epsilon(u) : \epsilon(u) dx = 1.$$

根据 (1.3.12), (1.3.13) 推断

$$(1.3.14) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} div \sigma_\lambda(u) = 2 div \epsilon(u) \neq 0.$$

由 (2.5.10) 得,

$$(1.3.15) \quad a_\lambda(u - u_h^\lambda, u - u_h^\lambda) = \min_{\nu \in V_h} a_\lambda(u - \nu, u - \nu) \leq a_\lambda(u, u).$$

由 (1.3.10) 和 (1.3.11), 我们得到

$$(1.3.16) \quad a_\lambda(u, u) = 2.$$

因此, 对于 λ 足够大时有

$$(1.3.17) \quad a_\lambda(u - u_h^\lambda, u - u_h^\lambda) \leq 2.$$

由 (1.3.10) 和 (1.3.17) 得

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda} \|div u_h^\lambda\|_{L^2(\Omega)} &= \sqrt{\lambda} \|div(u - u_h^\lambda)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \sqrt{a_\lambda(u - u_h^\lambda, u - u_h^\lambda)} \\ &\leq \sqrt{2} \end{aligned}$$

对足够大的 λ 有

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|div u_h^\lambda\|_{L^2(\Omega)} = 0.$$

由式 (1.3.9) 有

$$(1.3.18) \quad \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \|u_h^\lambda\|_{H^1(\Omega)} = 0.$$

最后, 我们得到

$$(1.3.19) \quad \begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \inf L_{\lambda, h} &\geq \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \inf \frac{|u - u_h^\lambda|_{H^1(\Omega)}}{\|div \sigma_\lambda(u)\|_{L^2(\Omega)}} \\ &= \frac{|u|_{H^1(\Omega)}}{\|div \sigma(u)\|_{L^2(\Omega)}} > 0. \end{aligned}$$

3 算例

3.1 模型

令

$$\sigma(u) = 2\mu\epsilon(u) + \lambda \text{tr}(\epsilon(u))\delta$$

$$\epsilon(u) = \frac{1}{2}(\text{grad}u + (\text{grad}u)^t)$$

$$\text{tr}(\tau) = \tau_{11} + \tau_{22}$$

$$\text{grad}(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}$$

$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$div u = \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}$$

$$div \tau = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} \end{pmatrix}$$

考察模型

$$-div \sigma(u) = f \quad \in \Omega$$

$$u|_\Gamma = 0$$

其中 $u = (u_1, u_2)^t$ 为求解向量, $f = (f_1, f_2)^t$ 为右端向量, $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$

$$\begin{aligned} u_1 &= (x-1)(y-1)y\sin(x) \\ u_2 &= (x-1)(y-1)x\sin(y) \\ f_1 &= -((2\mu + \lambda)y(y-1)(2\cos(x) - (x-1)\sin(x)) \\ &\quad + (\mu + \lambda)(2x-1)(\sin(y) + (y-1)\cos(y)) \\ &\quad + 2\mu(x-1)\sin(x)) \\ f_2 &= -((2\mu + \lambda)x(x-1)(2\cos(y) - (y-1)\sin(y)) \\ &\quad + (\mu + \lambda)(2y-1)(\sin(x) + (x-1)\cos(x)) \\ &\quad + 2\mu(y-1)\sin(y)) \end{aligned}$$

3.2 变分

设 $\nu = (\nu_1, \nu_2)^t$, $\nu_1, \nu_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, 方程两边同乘 ν 并积分得

$$-\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u) \nu dx dy = \int_{\Omega} f \nu dx dy$$

由

$$\begin{aligned} f \operatorname{div} a &= \operatorname{div}(fa) - a : \operatorname{grad} f \\ \int_{\Omega} \operatorname{div} a dV &= \int_{\partial\Omega} a dS \end{aligned}$$

得

$$\begin{aligned} &-\int_{\Omega} \operatorname{div} \sigma(u) \nu dx dy \\ &= -\int_{\Omega} \operatorname{div}(\sigma(u)\nu) dx dy - \int_{\Omega} \sigma(u) : \operatorname{grad} \nu dx dy \\ &= -\int_{\Gamma} \sigma(u)\nu dx dy + \int_{\Omega} \sigma(u) : \operatorname{grad} \nu dx dy \\ &= \int_{\Omega} \sigma(u) : \operatorname{grad} \nu dx dy \end{aligned}$$

所以

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \operatorname{grad} \nu dx dy = \int_{\Omega} f \nu dx dy$$

该问题的变分问题为, 求 $u \in H^1(\Omega)$ 使得 $u|_{\Gamma_1} = g$, 并且

$$a(u, \nu) = \int_{\Omega} f \cdot \nu dx dy \quad \forall \nu \in V$$

其中

$$\begin{aligned} a(u, \nu) &:= \int_{\Omega} \sigma(u) : \operatorname{grad} \nu dx dy \\ &= \int_{\Omega} 2\mu \epsilon(u) : \operatorname{grad} \nu + \lambda \operatorname{div} u \operatorname{div} \nu dx dy \\ V &:= \{\nu \in H^1(\Omega) \mid \nu|_{\Gamma} = 0\} \end{aligned}$$

3.3 剖分与基函数

3.3.1 剖分

对区间 Ω 按图 1 方式剖分, 并对节点和单元进行编号, 各节点坐标为 (x_i, y_i) , $i=0, \dots, n$,

设基函数为

$$(\varphi_0, 0)^t, (0, \varphi_0)^t, (\varphi_1, 0)^t, (0, \varphi_1)^t, \dots, (\varphi_n, 0)^t, (0, \varphi_n)^t$$

φ_i 为线性元, 以下得到其在各单元上表达式。

3.3.2 线性元

如图 2, 设 $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ 是以 p_0, p_1, p_2 为顶点的任意三角型元, 面积为 S 。在 $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ 内任取一点 p_3 , 坐标为 (x, y) 。过 p_3 点作与三个顶点的连线, 将 $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ 分成三个三角形: $\triangle(p_1, p_2, p_3)$, $\triangle(p_0, p_3, p_2)$, $\triangle(p_0, p_1, p_3)$, 其面积分别为 S_0, S_1, S_2

显然 $S_0 + S_1 + S_2 = S$, 令

$$L_0 = \frac{S_0}{S}, \quad L_1 = \frac{S_1}{S}, \quad L_2 = \frac{S_2}{S}$$

$$\begin{cases} L_0 = \frac{1}{2S}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ L_1 = \frac{1}{2S}[(x_3y_0 - x_0y_3) + (y_3 - y_0)x + (x_0 - x_3)y] \\ L_2 = \frac{1}{2S}[(x_0y_1 - x_1y_0) + (y_0 - y_1)x + (x_1 - x_0)y] \end{cases}$$

因为

$$\begin{cases} L_0 = \begin{cases} 1, & x = x_0, y = y_0 \\ 0, & x = x_1, y = y_1 \\ 0, & x = x_2, y = y_2 \end{cases} \\ L_1 = \begin{cases} 0, & x = x_0, y = y_0 \\ 1, & x = x_1, y = y_1 \\ 0, & x = x_2, y = y_2 \end{cases} \\ L_2 = \begin{cases} 0, & x = x_0, y = y_0 \\ 0, & x = x_1, y = y_1 \\ 1, & x = x_2, y = y_2 \end{cases} \end{cases}$$

所以在此区间上 $\varphi_i = L_i$ 。

3.4 形成线性方程组

3.4.1 刚度矩阵

设 $\varphi_{xi} = (\varphi_i, 0)^t, \varphi_{yi} = (0, \varphi_i)^t, i = 0, \dots, n$ 为试探函数空间 U_h 的基函数，则任一 $u_h \in U_h$ 可表成

$$u_h = \sum_{i=1}^n u_1^i \varphi_{xi} + \sum_{i=1}^n u_2^i \varphi_{yi}, \quad u^i = u_h(x_i, y_i)$$

令 $\phi_{2i} = \varphi_{xi}, \phi_{2i+1} = \varphi_{yi}, c_{2i} = u_1^i, c_{2i+1} = u_2^i$ 带入变分形式得

$$\sum_{j=0}^{2n+1} a(\phi_j, \phi_i) c_j = (f, \phi_i) \quad i = 0, \dots, 2n+1$$

矩阵形式为

$$\begin{aligned} Ac &= F \\ A &= (a(\phi_i, \phi_j))_{(2n+1) \times (2n+1)} \\ F &= ((f, \phi_i))_{(2n+1) \times 1} \\ c &= (c_i)_{(2n+1) \times 1} \end{aligned}$$

3.4.2 边界条件

模型为齐次边界条件，若 (x_i, y_i) 为边界点，则 A 第 $2i$ 行第 $2i$ 列，第 $2i+1$ 行第 $2i+1$ 列元素为 1，其他元素及 $F(2i), F(2i+1)$ 都为 0。

3.5 实验结果

表 1: 线性元误差

$\lambda \backslash h$	3.125e-2	7.812e-3	1.953e-3	4.882e-4	1.220e-4	3.051e-5
1	3.1007e-3	6.6322e-4	1.4833e-4	4.3538e-5	1.6079e-5	6.2883e-6
10	3.4359e-3	1.3916e-3	4.5128e-4	1.2428e-4	3.2305e-5	8.1245e-6
100	3.3958e-3	9.0716e-3	3.6454e-3	1.0038e-3	2.6076e-4	6.5941e-5
1e3	3.4040e-3	8.5781e-2	3.5580e-2	9.8154e-3	2.5446e-3	6.4444e-4
1e4	3.4050e-3	8.5287e-1	3.5492e-1	9.7931e-2	2.5383e-2	6.4295e-3
1e5	3.4051e-3	8.5237	3.5484	9.7909e-1	2.5377e-1	6.4280e-2

参考文献

- [1] 王兆清, 徐子康, and 李金. 不可压缩平面问题的位移-压力混合重心插值配点法. 应用力学学报, 35(3):631–636, 2018.
- [2] 陈绍春 and 肖留超. 平面弹性的一个新的 locking-free 非协调有限元. 应用数学, 20(4):739–747, 2007.
- [3] 邵文婷. 求解一类交界面问题的模态基函数谱元法数值实验. 上海第二工业大学学报, 34(4):283–290, 2017.
- [4] Susanne C Brenner, L Ridgway Scott, and L Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 3. Springer, 2008.

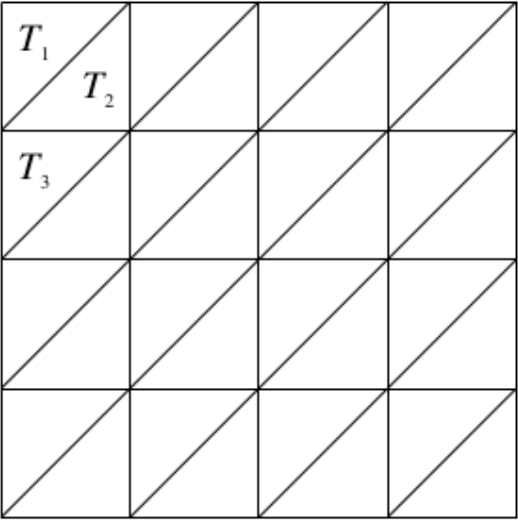


图 1: 单位正方形的规则三角剖分

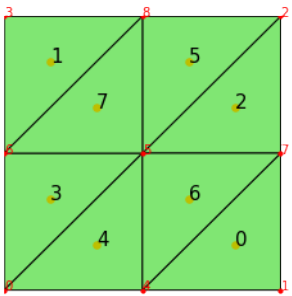


图 2

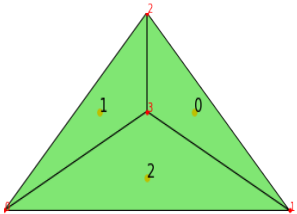


图 3

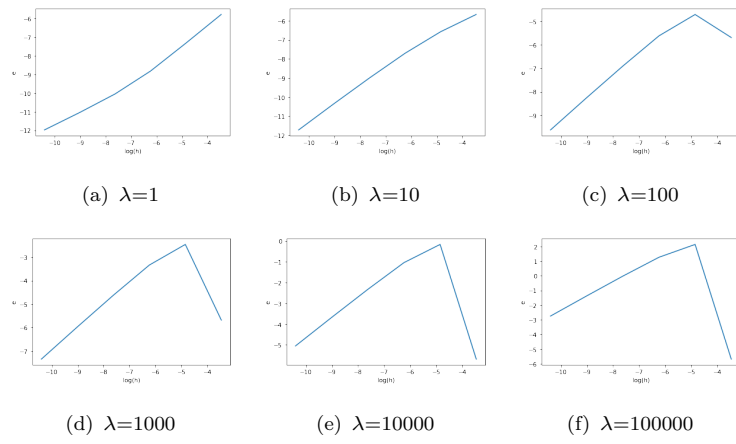


图 4: 线性元误差