本科抽检毕业论文

题　　目：带间断系数的弹性问题的有限元法

学　　院：本科抽检

班　　级：本科抽检

学　　号：本科抽检

姓　　名：本科抽检

指导教师：本科抽检

完成日期：2023 年 5 月

摘要

本文以带间断系数的弹性问题为研究对象。首先介绍了研究背景和国内外研究现状，然后回顾了有限元理论的基本知识，包括 Sobolev 空间、弹性问题的边值问题和变分、带间断系数的方程的引入、离散方法和误差估计等。接着给出了几个算例，分别展示了弹性问题和带间断系数的弹性问题在有限元方法下的数值解，比较了不同的参数对结果的影响。最后总结了本文的主要结论，指出了存在的不足和未来的研究方向。

关键字： 平面弹性问题; 间断系数； 非协调有限元; locking-free

Abstract

This paper studies the elastic problem with discontinuous coefficients. Firstly, the research background and the domestic and foreign research status are introduced. Then, the basic knowledge of finite element theory is reviewed, including Sobolev space, boundary value problem and variational form of elastic problem, introduction of equation with discontinuous coefficients, discrete method and error estimation. Next, several examples are given to show the numerical solutions of elastic problem and elasticity problem with discontinuous coefficients under finite element method, and the influence of different parameters on the results is compared. Finally, the main conclusions of this paper are summarized, and the existing shortcomings and future research directions are pointed out.

Key words: linear elasticity problem; discontinuous coefficient; nonconforming finite element; locking-free

目录

1 绪论

1.1 研究背景

带间断系数的方程是指一种用于模拟复合材料层合板的力学性能的数学模型。复合材料层合板是由两层或多层单层板粘合在一起的结构单元，具有不同的铺层顺序和铺层角度，可以表现出不同的力学特性。带间断系数的方程是一种考虑了层间应力和层间变形协调的方程，可以描述层合板在面内和面外的应力-位移关系。带间断系数的方程也可以用于模拟材料的分离和剥落，例如复合材料剥离、金属焊接材料损伤、混凝土材料开裂等。

平面弹性力学方程组是弹性力学中最基础、最常见的模型。当研究的弹性体形状和受力具有一定特点时，通过适当的简化处理，就可以归结为平面弹性问题 [1]。对于各向同性均匀介质的平面弹性问题，当材料的 Lamé 常数 $\lambda \to \infty$ 时，即对于几乎不可压介质，通常低阶的协调有限元解，往往不再收敛到原问题的解，或者达不到最优收敛阶，这就是闭锁现象[2]。

为了消除（近）不可压缩弹性问题中遇到的闭锁现象，国内外研究学者提出了多种有效的数值分析方法。根据型函数建立过程中是否需要网格剖分，这些数值方法可以分为两类：一类是有网格方法，这其中包括高阶有限元法[3]、混合有限元法[4]、增强有限元法[5] 和不连续 Galerkin 法[6] 等；另一类是无网格方法，无网格方法又可分为弱形式无网格法和强形式的无网格方法[1]。

1.2 国内外研究现状

有限元法是一种的数值分析方法，它可以用来求解各种复杂的工程问题。有限元法的核心思想最早可以追溯到 1943 年，当时 R.W.Courant 提出了一种基于变分原理的离散化方法。1956 年，R.W.Clough 等四位教授与工程师在一篇发表在科技期刊上的论文中，首次将这种方法应用到飞机机翼强度的计算中，并将其命名为刚性法 (Stiffness)。这篇论文标志着有限元法在工程学界上的正式诞生。在 1960 年，R.W.Clough 教授在一篇关于平面弹性问题的论文中，首次提出了“有限元法”这个术语，并将这种方法应用到了土木工程领域。三年后，Richard MacNeal 博士与 Robert Schwendler 合作创立了 MSC 公司，并开发出了一款名为 SADSAM 的软件程序，实现了数字仿真模拟结构分析的功能，这标志着有限元方法 (FEA) 从理论走向了实践。1964-1965 年期间，O.C.Zienkiewicz 等人在多篇论文中，采用极小位能原理和虚功原理，以一种新颖的思路推导出了有限元法。

在我国，有限元方法的发展历史上，涌现出了一批杰出的学者，他们为有限元方法的理论和应用做出了重要的贡献，如冯康（有限单元法理论），陈伯屏（结构矩阵方法），钱令希（余能定理），钱伟长（广义变分原理）等。但是，受到当时的国际和国内环境的制约，我国的学者在有限元方法的深层次研究上遇到

了很多困难，很难跟上国际的发展步伐，导致与国外的技术水平之间的差距逐步扩大。20 世纪 60 年代初期，我国的老一辈计算科学家较早地将计算机应用于土木、建筑和机械工程领域。当时黄玉珊教授就提出了“小展弦比机翼薄壁结构的直接设计法”和“力法 - 应力设计法”；而在 70 年代初期，钱令希教授提出了“结构力学中的最优化设计理论与方法的近代发展”。这些理论和方法都为国内的有限元技术指明了方向。1964 年初崔俊芝院士研制出国内第一个平面问题通用有限元程序，解决了刘家峡大坝的复杂应力分析问题。20 世纪 60 年代到 70 年代，国内的有限元方法及有限元软件诞生之后，曾计算过数十个大型工程，应用于水利、电力、机械、航空、建筑等多个领域。20 世纪 70 年代中期，大连理工大学研制出了 JEFIX 有限元软件，航空工业部研制了 HAJIF 系列程序。80 年代中期，北京大学的袁明武教授通过对国外 SAP 软件的移植和重大改造，研制出了 SAP-84；北京农业大学的李明瑞教授研发了 FEM 软件；建筑科学研究院在国家“六五”攻关项目支持下，研制完成了“BDP-建筑工程设计软件包”；中国科学院开发了 FEPS、SEFEM；航空工业总公司飞机结构多约束优化设计系统 YIDOYU 等一批自主程序。

然而，在上世纪 90 年代，国外的有限元软件大规模地进入国内市场，涵盖了各个领域。国外的学者专家也经常到各大学、工厂和企业进行技术推广和使用指导，使得国内有限元方法的发展面临着更大的挑战。管理部门对有限元软件的认识也出现了偏差，对此缺少必要的支持，核心技术控制在国外，所以一直到上世纪末期，国内自主技术创新的速度十分缓慢。但是，在 21 世纪初期以来，国内拥有自主知识产权的软件逐渐实现了市场化，取得了一定的发展空间，同时也引起了国家对有限元技术的高度重视，使得有限元方法逐渐走出低迷状态，不再仅仅停留在高校和企业之中。

2 有限元理论

2.1 Sobolev 空间

假定 G 是有界平面区域, 其边界 Γ 是按段光滑的简单闭曲线, $\overline{G} = G \cup \Gamma$ 是 G 的闭包。对于 $\overline{G}$ 上的任一函数 $u(x, y)$, 称集合 $\{(x, y) \,|\, u(x, y) \neq 0, \, (x, y) \in \overline{G}\}$ 的闭包为 u 的支集。如果 u 的支集 $\in G$ 内, 则说 u 于 G 具有紧致支集。具有紧致支集的函数必在边界 Γ 的某一邻域内恒等于零[7]。

用 C_0^∞ 表示 G 上无穷次可微并具有紧致支集的函数类, $L^2(G)$ 是定义在 G 上平方可积的可测函数空间, 其内积和范数分别为

$$(f, g) = \int_G fg dxdy, \tag{2.1.1}$$

$$||f|| = \sqrt{(f, f)} = (\int_G |f|^2 dxdy)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1.2}$$

对 $f \in L^2(G)$, 如果存在 $g, h \in L^2(G)$, 使等式

$$\int_G g\varphi dxdy = -\int_g f \frac{\partial \varphi}{\partial x} dxdy, \tag{2.1.3}$$

$$\int_G h\varphi dxdy = -\int_G f \frac{\partial \varphi}{\partial y} dxdy, \tag{2.1.4}$$

对任意的 $\varphi \in C_0^\infty$ 成立, 则说 f 对 x 的一阶广义导数 g 和对 y 的一阶导数 h, 记作

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = g, \tag{2.1.5}$$

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = y. \tag{2.1.6}$$

定义

$$H^1(G) = \{f(x, y) | f, f_x, f_y \in L^2(G)\},$$

其中 f_x, f_y 是 f 的广义导数。与 $H^1(G)$ 引入内积

$$(f, g)_1 = \int_G [fg + f_x g_x + f_y g_y] dxdy, \tag{2.1.7}$$

和范数

$$||f||_1 = \sqrt{(f, f)} = (\int_G [|f|^2 + |f_x|^2 + |f_y|^2] dxdy)^{\frac{1}{2}}. \tag{2.1.8}$$

则 $H^1(\Omega)$ 是 Hilbert 空间, 称之为 Sobolev 空间。

2.2 弹性问题

2.2.1 边值问题

令 u，g，t，$\sigma = (\sigma_{ij})_{1\le i,j\le 2}$，$\tau = (\tau_{ij})_{1\le i,j\le 2}$ 是双变量函数，定义以下符号

$$
\begin{gathered}
\epsilon(u) = \tfrac{1}{2}(grad\, u + (grad\, u)^t), \\
tr(\tau) = \tau_{11} + \tau_{22}, \\
grad(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} \end{pmatrix}, \\
\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \\
div\, u = \tfrac{\partial u_1}{\partial x} + \tfrac{\partial u_2}{\partial y}, \\
div\, \tau = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial y} \end{pmatrix}, \\
\sigma : \tau = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \sigma_{ij}\tau_{ij}.
\end{gathered}
$$

考虑各项同性弹性材料，令 $u(x,y), f(x,y)$ 是其位移和体力，由线弹性问题的静态理论，u, f 满足以下方程

$$
-div\, \sigma(u) = f \quad \in \Omega, \tag{2.2.1}
$$

应力张量 $\sigma(u)$ 定义为

$$
\sigma(u) = 2\mu\epsilon(u) + \lambda tr(\epsilon(u))\delta. \tag{2.2.2}
$$

其中 $\Omega \in \mathbb{R}^2$, 正常数 λ, μ 为 Lamé 常数。假定 $(\mu, \lambda) \in [\mu_1, \mu_2] \times (0, +\infty)$.

令 Γ_1、Γ_2 为 $\partial\Omega$ 的两个开子集，使得 $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \bigcup \overline{\Gamma_2}$ 并且 $\overline{\Gamma_1} \bigcap \overline{\Gamma_2} = \emptyset$, 令 Γ_1 上的位移边界条件为

$$
u|_{\Gamma_1} = g. \tag{2.2.3}
$$

并且 Γ_2 上的牵引力边值条件为

$$
(\sigma(u)\nu)|_{\Gamma_2} = t. \tag{2.2.4}
$$

如果 $\Gamma_1 = \emptyset\,$(或$\Gamma_2 = \emptyset$), 则边值问题为纯牵引力 (或纯位移) 问题。

2.2.2 变分

对于齐次纯位移问题，令 u 在边界上满足

$$
u|_{\partial\Omega} = 0. \tag{2.2.5}
$$

设 $\nu = (\nu_1, \nu_2)^t$, $\nu_1, \nu_2 \in C_0^\infty(\Omega)$, 方程 (2.2.1) 两边同乘 ν 并积分得

$$-\int_\Omega (div\,\sigma(u))\,\nu\,dxdy = \int_\Omega f\nu\,dxdy. \tag{2.2.6}$$

参考文献知[8]

$$f div\,a = div\,(fa) - a : grad\,f, \tag{2.2.7}$$

$$\int_\Omega div\,a\,dV = \int_{\partial\Omega} a\,dS. \tag{2.2.8}$$

将边界条件 (2.2.5)，方程 (2.2.7)，(2.2.8) 带入方程 (2.2.6) 得

$$\begin{aligned}
&-\textstyle\int_\Omega (div\,\sigma(u))\,\nu\,dxdy \\
&= -\int_\Omega div\,(\sigma(u)\nu)\,dxdy - \int_\Omega \sigma(u) : grad\,\nu\,dxdy \\
&= -\int_\Gamma \sigma(u)\nu\,dxdy + \int_\Omega \sigma(u) : grad\,\nu\,dxdy \\
&= \int_\Omega \sigma(u) : grad\,\nu\,dxdy \\
&= \int_\Omega 2\mu\epsilon(u) : grad\,\nu + \lambda\,div\,u\,div\,\nu\,dxdy \\
&= \mu\int_\Omega grad\,u : grad\,\nu\,dxdy + (\mu+\lambda)\int_\Omega div\,u\,div\,\nu\,dxdy.
\end{aligned}$$

所以

$$\mu\int_\Omega grad\,u : grad\,\nu\,dxdy + (\mu+\lambda)\int_\Omega div\,u\,div\,\nu\,dxdy = \int_\Omega f\nu\,dxdy. \tag{2.2.9}$$

该问题的变分问题为，求 $u \in H^1(\Omega)$ 使得 $u|_{\Gamma_1} = 0$, 并且

$$a(u,\nu) = \int_\Omega f\cdot\nu\,dxdy \quad \forall\nu\in V, \tag{2.2.10}$$

其中

$$\begin{aligned}
a(u,\nu) : &= \mu\int_\Omega grad\,u : grad\,\nu\,dxdy + (\mu+\lambda)\int_\Omega div\,u\,div\,\nu\,dxdy, \\
V : &= \{\nu\in H^1(\Omega) \quad | \quad \nu|_\Gamma = 0\}.
\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

Lax-Milgram 定理[9]： 设 H 是 Hilbert 空间，$a(\cdot,\cdot)$ 是 $H\times H$ 上的有界的强制的双线性泛函。则对任意的 $F\in H$, 存在唯一的 $u\in H$ 满足

$$a(u,\nu) = (f,\nu), \quad \forall\nu\in H. \tag{2.2.12}$$

由 Lax-Milgram 定理知，此变分问题的解存在且唯一。

2.2.3 引入间断系数

设 Ω_1，Ω_2 是 Ω 的两个子集，使得 $\Omega_1 \bigcup \Omega_2 = \Omega$ 并且 $\Omega_1 \bigcap \Omega_2 = \emptyset$,

考虑以下边值问题

$$\begin{aligned} -div\, \sigma(u) &= f \quad \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} &= 0. \end{aligned} \tag{2.2.13}$$

当 Lamé 常数 λ, μ 在 Ω_1, Ω_2 上取不同值，即 $(x, y) \in \Omega_1$ 时 $\lambda = \lambda_1$, $\mu = \mu_1$, $(x, y) \in \Omega_2$ 时 $\lambda = \lambda_2$, $\mu = \mu_2$, 并且 $\lambda_1 \neq \lambda_2$, $\mu_1 \neq \mu_2$, 通过计算得到与此问题对应的双线性形式为

$$\begin{aligned} a(u, \nu) = \mu_1 \int_{\Omega_1} grad\, u : grad\, \nu\, dxdy + (\mu_1 + \lambda_1) \int_{\Omega_1} div\, u\, div\, \nu\, dxdy \\ + \mu_2 \int_{\Omega_2} grad\, u : grad\, \nu\, dxdy + (\mu_2 + \lambda_2) \int_{\Omega_2} div\, u\, div\, \nu\, dxdy. \end{aligned} \tag{2.2.14}$$

2.3 离散

2.3.1 Galerkin 法

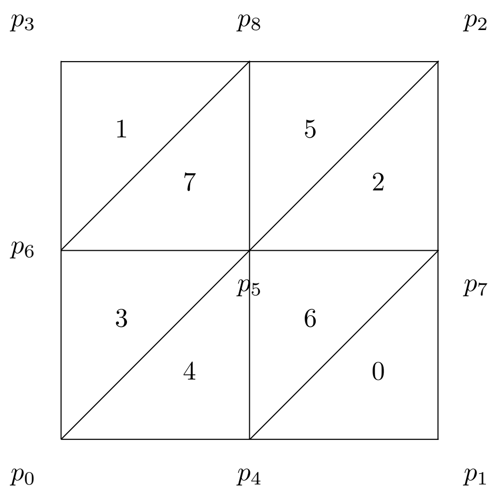


图 1

设求解区间 $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, 首先对其按照图 1 进行网格剖分，节点为

$$p_0, p_1, ..., p_n.$$

图中的三角形区域称为单元。

其次，在 Sobolev 空间 H^1 内取子空间 U_h, 它的元素在每一单元是次数不超过某一正整数 m 的多项式，在全区域 Ω 上属于函数空间 H^1. 则 $U_h \times U_h$ 为试探函数空间。

设

$$U_h = span(\varphi_0, \varphi_1, ..., \varphi_n),$$
$$\phi_{2i} = (\varphi_i, 0), \quad \phi_{2i+1} = (0, \varphi_i), \quad i = 0, ..., n.$$

则 $\forall u_h \in U_h \times U_h$, 可表成

$$u_h = \sum_{i=0}^{2n+1} c_i \phi_i. \tag{2.3.1}$$

将式 (2.3.1) 带入方程 (2.2.10) 中得到 Galerkin 方程

$$\sum_{i=0}^{2n+1} a(\phi_i, \phi_j) c_i = (f, \phi_j), \quad j = 0, 1, ..., 2n+1. \tag{2.3.2}$$

令

$$A = (a(\phi_j, \phi_i))_{0 \le i,j \le 2n+1},$$
$$F = ((f, \phi_i))_{0 \le i \le 2n+1},$$
$$c = (c_i)_{0 \le i \le 2n+1}.$$

则 Galerkin 方程 (2.3.2) 的矩阵形式为

$$Ac = F. \tag{2.3.3}$$

考虑齐次边界条件，若 (x_i, y_i) 为边界点，则 A 第 $2i$ 行第 $2i$ 列，第 $2i+1$ 行第 $2i+1$ 列元素为 1, 第 $2i$ 和 $2i+1$ 行的其他元素及 $F(2i), F(2i+1)$ 都为 0.

2.3.2 线性元

如图 2，设 $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ 是以 p_0, p_1, p_2 为顶点的任意三角型元，面积为 S. 在 $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ 内任取一点 p, 坐标为 (x, y). 过 p 点作与三个顶点的连线，将 $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ 分成三个三角形: $\triangle(p_1, p_2, p)$, $\triangle(p_0, p, p_2)$, $\triangle(p_0, p_1, p)$, 其面积分别为 S_0, S_1, S_2. [7]

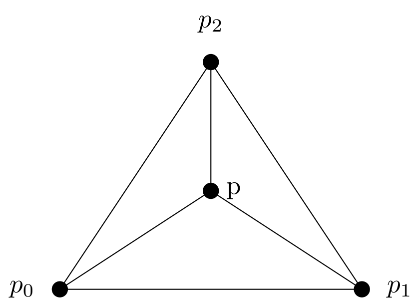


图 2

显然 $S_0+S_1+S_2=S$, 令

$$L_0=\frac{S_0}{S},\quad L_1=\frac{S_1}{S},\quad L_2=\frac{S_2}{S}, \tag{2.3.4}$$

$$\begin{cases} L_0=\frac{1}{2S}[(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y], \\ L_1=\frac{1}{2S}[(x_3y_0-x_0y_3)+(y_3-y_0)x+(x_0-x_3)y], \\ L_2=\frac{1}{2S}[(x_0y_1-x_1y_0)+(y_0-y_1)x+(x_1-x_0)y]. \end{cases}$$

因为

$$\begin{cases} L_0=\begin{cases} 1, & x=x_0,y=y_0, \\ 0, & x=x_1,y=y_1, \\ 0, & x=x_2,y=y_2, \end{cases} \\ L_1=\begin{cases} 0, & x=x_0,y=y_0, \\ 1, & x=x_1,y=y_1, \\ 0, & x=x_2,y=y_2, \end{cases} \\ L_2=\begin{cases} 0, & x=x_0,y=y_0, \\ 0, & x=x_1,y=y_1, \\ 1, & x=x_2,y=y_2, \end{cases} \end{cases}$$

所以在此区间上 $\varphi_i=L_i$，即

$$\begin{cases} \varphi_0=\frac{1}{2S}[(x_2y_3-x_3y_2)+(y_2-y_3)x+(x_3-x_2)y], \\ \varphi_1=\frac{1}{2S}[(x_3y_0-x_0y_3)+(y_3-y_0)x+(x_0-x_3)y], \\ \varphi_2=\frac{1}{2S}[(x_0y_1-x_1y_0)+(y_0-y_1)x+(x_1-x_0)y]. \end{cases} \tag{2.3.5}$$

2.3.3 C-R 元

如图 3, 设三角形 $\triangle(q_0,q_1,q_2)$ 是以 q_0,q_1,q_2 为顶点的任意三角形元, p_0,p_1,p_2 为其三条边的中点，其坐标分别为 $(x_0.y_0),(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.

设三角形 $\triangle(q_0,q_1,q_2)$ 上的 C-R 元为 $\varphi_0,\varphi_1,\varphi_2$,

$$\varphi_i=a_ix+b_iy+c_i,\quad i=0,1,2, \tag{2.3.6}$$

且其在 p_0，p_1，p_2 点上满足以下关系式

$$\varphi_i(p_j)=\begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i\neq j \end{cases},\quad i,j=0,1,2. \tag{2.3.7}$$

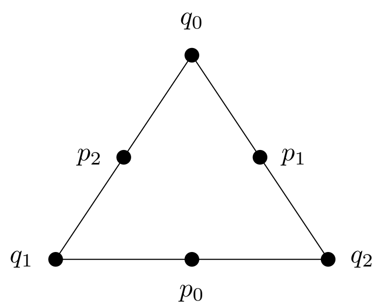


图 3

设

$$A = \begin{bmatrix} x_0 & y_0 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix}, \quad c_i = (a_i, b_i, c_i)^t, \quad f = (x, y, 1)^t.$$

则方程组 (2.3.7) 的矩阵形式为

$$Ac_i = e_i, \quad i = 0, 1, 2. \tag{2.3.8}$$

通过计算可以得到单元 $\triangle(q_0, q_1, q_2)$ 上的 C-R 元为

$$\varphi_i = A^{-1} e_i f, \quad i = 0, 1, 2. \tag{2.3.9}$$

2.4 误差估计

假设 Ω 是一个凸多边形区域，并且 Γ_1 or Γ_2 中任意一个为空。对于纯位移问题 $(\Gamma_2 = \emptyset)$, 只考虑齐次边界条件。

令 T^h 是 Ω 三角划分的一个非退化族。对于纯位移问题 $(\Gamma_2 = \emptyset)$, 使用有限元空间

$$V_h := \{\nu \in H^1(\Omega) : \nu|_T, \forall T \in T^h\},$$

并且对于纯牵引力问题 $(\Gamma_1 = \emptyset)$, 使用

$$V_h := \{\nu \in H^1(\Omega) : \nu|_T, \forall T \in T^h\},$$

令 $u \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ 满足纯位移问题，并且 $u_h \in V_h$ 满足

$$a(u_h, \nu) = \int_\Omega f \cdot \nu \, dx \quad \forall \nu \in V_h. \tag{2.4.1}$$

则存在一个正常数 $C_{(\mu,\lambda)}$ 使得[9]

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \leq C_{(\mu,\lambda)} h \|u\|_{H^2(\Omega)}. \tag{2.4.2}$$

令 $u \in H^2(\Omega)$ 满足纯牵引力问题。令 $u_h \in V_h$ 满足

$$a(u_h, \nu) = \int_\Omega f \cdot \nu \, dx + \int_{\Gamma_2} t \cdot \nu \, ds \quad \forall \nu \in V_h. \tag{2.4.3}$$

则存在一个正常数 $C_{(\mu,\lambda)}$ 使得[9]

$$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)} \le C_{(\mu,\lambda)} h \|u\|_{H^2(\Omega)}. \tag{2.4.4}$$

2.5 闭锁现象

对于固定的 μ 和 λ，以上定理给出了弹性问题令人满意近似的有限元近似。但是这些有限元方法的性能随着 λ 趋向于 ∞ 而变差。这就是所谓的锁定现象[9]。

令 $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. 考虑 $\mu = 1$ 时的纯位移边值问题:

$$\begin{aligned} div\{2\epsilon(u^\lambda) + \lambda tr(\epsilon(u^\lambda))\delta\} = f \quad in \quad \Omega \\ u^\lambda|_{\partial\Omega} = 0. \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

注意给定的 f, 当 $\lambda \to \infty$, $\|divu^\lambda\|_{H^1(\Omega)} \to 0$. 换句话说，我们正在处理一种几乎不可能压缩的弹性材料。为了强调对 λ 的依赖，将应力张量 $\sigma_\lambda(\nu)$ 和变分形式 $a_\lambda(\nu, \omega)$ 表示为

$$\begin{aligned} \sigma_\lambda(\nu) &= 2\epsilon(\nu) + \lambda tr(\epsilon(\nu))\delta, \\ a_\lambda(\nu, \omega) &= \int_\Omega \{2\epsilon(\nu) : \epsilon(\omega) + \lambda \, div \, \nu \, div \, \omega\} \, dx. \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

令 T^h 为 Ω (图 4) 的一个规则三角剖分。对于每一个 $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$, 定义 $u_h^\lambda \in V_h$ 为以下方程组的特解

$$\begin{aligned} a_\lambda(u_h^\lambda, \nu) = \int_\Omega [-div \, \sigma_\lambda(u)] \cdot \nu \, dx \quad \forall \nu \in V_h, \\ V_h := \{\nu \in H^1(\Omega) : \nu|_T, \forall T \in T^h\}. \end{aligned} \tag{2.5.3}$$

定义 $L_{\lambda,h}$ 为

$$L_{\lambda,h} := sup\{\frac{|u - u_h^\lambda|_{H^1(\Omega)}}{\|div\sigma_\lambda(u)\|_{L^2(\Omega)}} : 0 \ne u \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)\}. \tag{2.5.4}$$

则存在一个与 h 无关的正常数 C 使得[9]

$$\lim_{\lambda \to \infty} \inf L_{\lambda,h} \ge C. \tag{2.5.5}$$

式 (2.5.5) 意味着：无论 h 取多小，只要 λ 足够大，我们都能找到 $u \in H^2(\Omega) \cap H^1(\Omega)$ 使得相对误差 $|u - u_h|_{H^1(\Omega)}/\|div\sigma_\lambda(u)\|_{L^2(\Omega)}$ 以一个与 h 无关的常数为下界。换句话说，有限元方法的性能将会随着 λ 变大而变坏。

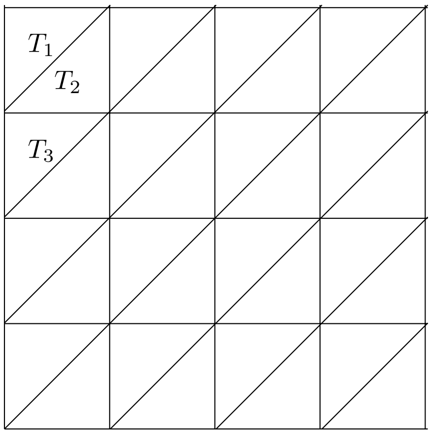


图 4

令 $\Omega=(0,1)\times(0,1)$. 考虑以下纯位移问题

$$\begin{aligned} -\mu \triangle u-(\mu+\lambda)\, grad\,(div\, u) &= f \quad \in \Omega, \\ u &= 0 \quad on\ \partial\Omega, \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

其中，$f\in L^2(\Omega)$, Ω_1, Ω_2 是 Ω 的两个子集，使得 $\Omega_1\bigcup\Omega_2=\Omega$ 并且 $\Omega_1\bigcap\Omega_2=\emptyset$, $(x,y)\in\Omega_1$ 时 $\lambda=\lambda_1$, $\mu=\mu_1$, $(x,y)\in\Omega_2$ 时 $\lambda=\lambda_2$, $\mu=\mu_2$, $\lambda_1\neq\lambda_2$, $\mu_1\neq\mu_2$.

它的变分形式为，求 $u\in H^1(\Omega)$ 使得 $u|_\Gamma=0$, 并且

$$a^s(u,v)=\int_\Omega f\cdot v\, dxdy \quad \forall v\in H^1(\Omega), \tag{2.5.7}$$

其中

$$a^s(u,v)=\mu\int_\Omega grad\, u: grad\, v\, dxdy+(\mu+\lambda)\int_\Omega (div\, u)\,(div\, v)\, dxdy. \tag{2.5.8}$$

令 T^h 是 Ω 三角划分的一个非退化族。定义

$$\begin{aligned} V_h^\star=\{v: v\in L^2(\Omega),\ v|_T\text{是线性的}\,\forall T\in T^h, \\ v\text{在单元边界的中点上是连续的并且}v=0\}. \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

对 $v\in V_h^\star$, 定义

$$(grad_h\, v)|_T=grad\,(v|_T), \quad (div_h\, v)|_T=div\,(v|_T), \quad \forall T\in T^h. \tag{2.5.10}$$

则问题的离散形式为，求 $u_h\in V_h^\star$ 使得

$$a_h^\star(u_h,v)=\int_\Omega f\cdot v\, dxdy, \quad \forall v\in V_h^\star, \tag{2.5.11}$$

其中双线性形式 $a_h^\star(\cdot,\cdot)$ 在 $V_h^\star + H^1(\Omega)$ 上的定义为

$$\begin{aligned} a_h^\star(u,v) = \mu \int_\Omega grad_h\, u : grad_h\, v\, dxdy \\ + (\mu+\lambda)\int_\Omega (div_h\, u)\,(div_h\, v)\, dxdy. \end{aligned} \tag{2.5.12}$$

定义 $V_h^\star + H^1(\Omega)$ 上的非协调能量泛函

$$||v||_h = a_h^\star(v,v)^{1/2}. \tag{2.5.13}$$

显然

$$||grad_h\, v||_{L^2(\Omega)} \le \mu^{-1/2}||v||_h. \tag{2.5.14}$$

定义

$$(\Pi_h u)(m_e) = \frac{1}{|e|}\int_e u\, ds, \tag{2.5.15}$$

其中 m_e 为边缘 e 的中点。则有

$$div(\Pi_h u)|_T = \frac{1}{|T|}\int_T div\, u\, dxdy \quad \forall T \in T^h, \tag{2.5.16}$$

并且存在独立于 h 的正常数 C 使得

$$||u-\Pi_h u||_{L^2(\Omega)} + h||grad_h\,(u-\Pi_h u)||_{L^2(\Omega)} \le Ch^2|u|_H^2(\Omega). \tag{2.5.17}$$

参考文献得

$$||u||_{H^2(\Omega)} + \lambda||div\, u||_{H^1(\Omega)} \le C||f||_{L^2(\Omega)}, \tag{2.5.18}$$

$$||u-u_h||_h \le \inf_{v\in V_h} ||u-v||_h + \sup_{v\in V_h\setminus\{0\}} \frac{|a_h^s(u,v) - \int_\Omega f\cdot v\, dxdy|}{||v||_h}, \tag{2.5.19}$$

$$\begin{aligned} |\int_\Omega grad_h\, u : grad_h\, v\, dxdy + \int_\Omega \triangle u\cdot v\, dxdy| \\ \le C\, h\, |u|_{H^2(\Omega)}||grad_h\, v||_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{2.5.20}$$

$$\begin{aligned} |\int_\Omega div_h\, u\, div_h\, v\, dxdy + \int_\Omega grad\,(div\, u)\cdot v\, dxdy| \\ \le C\, h\, |div\, u|_{H^1(\Omega)}||grad_h\, v||_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \tag{2.5.21}$$

设

$$\begin{aligned} a^s(u,v)|_{\Omega_1} = \mu \int_{\Omega_1} grad\, u : grad\, v\, dxdy \\ + (\mu+\lambda)\int_{\Omega_1} (div\, u)\,(div\, v)\, dxdy. \end{aligned} \tag{2.5.22}$$

由公式 (2.5.6), (2.5.12), (2.5.20), (2.5.21), (2.5.18) 和 (2.5.14) 得

$$
\begin{aligned}
&|a_h^s(u,v) - \int_\Omega f \cdot v \, dxdy| \\
&= |(a_h^s(u,v)|_{\Omega_1} - \int_\Omega f \cdot v \, dxdy) \\
&+ (a_h^s(u,v)|_{\Omega_2} - \int_\Omega f \cdot v \, dxdy)| \\
&\leq C\, h \, ||grad_h \, v||_{L^2(\Omega_1)} (\mu_1 |u|_{H^2(\Omega_1)} + (\mu_1 + \lambda_1) |div \, u|_{H^1(\Omega_1)}) \\
&+ C\, h \, ||grad_h \, v||_{L^2(\Omega_2)} (\mu_2 |u|_{H^2(\Omega_2)} + (\mu_2 + \lambda_2) |div \, u|_{H^1(\Omega_2)}) \\
&\leq C\, h \, ||v||_h ||f||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.5.23}
$$

参考文献得到，存在 $u_1 \in H^2(\Omega) \cup H^1(\Omega)$, 使得

$$div \, u_1 = div \, u, \tag{2.5.24}$$

$$||u_1||_{H^2(\Omega)} \leq C \, ||div \, u||_{H^1(\Omega)}, \tag{2.5.25}$$

$$||u_1||_{H^2(\Omega)} \leq \frac{C}{1+\lambda} \, ||f||_{L^2(\Omega)}, \tag{2.5.26}$$

$$div_h \, \Pi_h \, u_1 = div_h \, \Pi_h \, u. \tag{2.5.27}$$

由公式 (2.5.18), (2.5.17), (2.5.24), (2.5.26) 和 (2.5.27) 得

$$
\begin{aligned}
&\inf_{v \in V_h} ||u - v||_h \\
&\leq ||u - \Pi_h u||_h \\
&= (\mu_1 ||grad_h \, (u - \Pi_h u)||^2_{L^2(\Omega_1)} + (\mu_1 + \lambda_1) ||div_h \, (u - \Pi_h u)||^2_{L^2(\Omega_1)})^{1/2} \\
&+ (\mu_2 ||grad_h \, (u - \Pi_h u)||^2_{L^2(\Omega_2)} + (\mu_2 + \lambda_2) ||div_h \, (u - \Pi_h u)||^2_{L^2(\Omega_2)})^{1/2} \\
&= (\mu_1 ||grad_h \, (u - \Pi_h u)||^2_{L^2(\Omega_1)} + (\mu_1 + \lambda_1) ||div_h \, (u_1 - \Pi_h u_1)||^2_{L^2(\Omega_1)})^{1/2} \\
&+ (\mu_2 ||grad_h \, (u - \Pi_h u)||^2_{L^2(\Omega_2)} + (\mu_2 + \lambda_2) ||div_h \, (u_1 - \Pi_h u_1)||^2_{L^2(\Omega_2)})^{1/2} \\
&\leq C\, h \, ||f||_{L^2(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.5.28}
$$

由公式 (2.5.19), (2.5.23), (2.5.28) 得

$$||u - u_h||_h \leq C\, h \, ||f||_{L^2(\Omega)}. \tag{2.5.29}$$

3 算例

3.1 弹性问题

3.1.1 算例一

考察以下边值问题

$$-div\,\sigma(u) = f \quad \in \Omega,$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

其中 $u = (u_1, u_2)^t$ 为求解向量，$f = (f_1, f_2)^t$ 为右端向量，$\Omega = [0,1] \times [0,1]$,

$$u_1 = (x-1)(y-1)ysin(x),$$
$$u_2 = (x-1)(y-1)xsin(y).$$

通过数值实验得到,

1. 当 Lamé 常数 $\mu = 1$, $\lambda = 1$ 时的误差及误差阶如下表

表 1

h	1.0	0.5	0.25	0.125
$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$	4.102804E-1	1.424371E-1	8.382384E-2	4.737414-2
H1 误差阶	1.526284	0.764893	0.823260	0.905945
$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$	4.102632E-1	7.121859E-2	2.095596E-2	5.921768E-3
L2 误差阶	2.526284	1.764893	1.823260	1.905945

2. 当 Lamé 常数 $\mu = 1$, $\lambda = 1E4$ 时的误差及误差阶如下表

表 2

h	1.0	0.5	0.25	0.125
$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$	3.954836E-1	1.369558E-1	8.048234E-2	4.543017E-2
H1 误差阶	1.529907	0.7669663	0.8250215	0.9072268
$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$	3.945746E-1	6.847791E-2	2.012058E-2	5.678771E-3
L2 误差阶	2.529607	1.766966	1.825021	1.907226

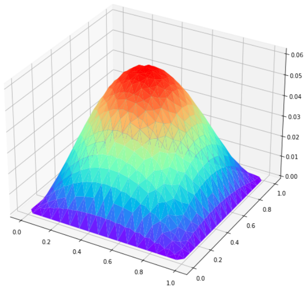
3. 当 Lamé 常数 $\mu = 1$, $\lambda = 1E8$ 时的误差及误差阶如下表

表 3

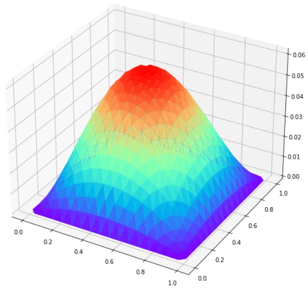
h \ λ	1.0	0.5	0.25	0.125
$\lvert u-u_h\rvert_{H^1(\Omega)}$	4.102771E-1	1.424359E-1	8.382310E-2	4.737371E-2
H1 误差阶	1.526285	0.7648937	0.823261	0.9059459
$\lvert u-u_h\rvert_{L^2(\Omega)}$	4.104650E-1	7.121799E-2	2.095577E-2	5.921714E-3
L2 误差阶	2.526285	1.764893	1.823261	1.905945

数值解和精确解图像如下

图 5



(a) 数值解图像



(b) 精确解图像

3.1.2 算例二

考察以下边值问题

$$-div\,\sigma(u) = f \quad \in \Omega,$$
$$u|_{\partial\Omega} = 0.$$

其中 $u = (u_1, u_2)^t$ 为求解向量，$f = (f_1, f_2)^t$ 为右端向量，$\Omega = [0,1] \times [0,1]$,

$$u_1 = x^2 sin(x-1) y^2 sin(y-1),$$
$$u_2 = x^2 sin(x-1) y^2 sin(y-1).$$

通过数值实验得到，

1. 当 Lamé 常数 $\mu = 1$, $\lambda = 1$ 时的误差及误差阶如下表

表 4

h	1.0	0.5	0.25	0.125
$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$	1.381670E-1	1.038442E-1	4.190134E-2	2.135923E-2
H1 误差阶	0.4119931	1.309352	0.972136	0.9399994
$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$	1.435610E-1	5.192211E-2	1.047533E-2	2.669904E-3
L2 误差阶	1.411993	2.309352	1.972136	1.939999

2. 当 Lamé 常数 $\mu = 1$, $\lambda = 1E4$ 时的误差及误差阶如下表

表 5

h	1.0	0.5	0.25	0.125
$\|u-u_h\|_{H^1(\Omega)}$	1.328102E-1	1.001068E-1	4.029172E-2	2.049834E-2
H1 误差阶	0.4078262	1.312984	0.9749761	0.9414672
$\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}$	1.647602E-1	5.005340E-2	1.007293E-2	2.562293E-3
L2 误差阶	1.407826	2.312984	1.974976	1.941467

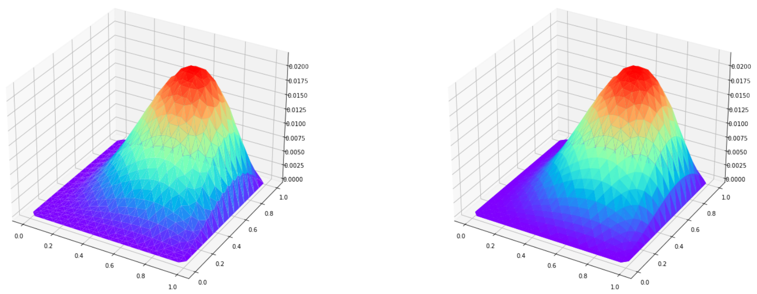
3. 当 Lamé 常数 $\mu = 1$, $\lambda = 1E8$ 时的误差及误差阶如下表

表 6

h \ λ	1.0	0.5	0.25	0.125
$\lvert u-u_h\rvert_{H^1(\Omega)}$	1.381659E-1	1.038433E-1	4.190099E-2	2.135904E-2
H1 误差阶	0.4119922	1.309353	0.9721372	0.9399997
$\lvert u-u_h\rvert_{L^2(\Omega)}$	1.473169E-1	5.192169E-2	1.047524E-2	2.669880E-3
L2 误差阶	1.411992	2.309353	1.972137	1.939999

数值解和精确解图像如下

图 6



(a) 数值解图像

(b) 精确解图像

3.2 带间断系数的弹性问题

3.2.1 算例一

考察以下边值问题

$$-div\,\sigma(u) = f \quad \in \Omega,$$
$$u|_\Gamma = 0.$$

其中 $u = (u_1, u_2)^t$ 为求解向量，$f = (f_1, f_2)^t$ 为右端向量，$\Omega = [0,1] \times [0,1]$，$\Omega_1 = [0,0.5] \times [0,0.5]$，$\Omega_2 = [0.5,1] \times [0,0.5]$，$\Omega_3 = [0,0.5] \times [0.5,1]$，$\Omega_4 = [0.5,1] \times [0.5,1]$.

当 $(x,y) \in \Omega_1$ 时，$\mu = \lambda = \lambda_1$，

$$u_1 = x(x-0.5)(x-1)y(y-0.5)(y-1)\,/\,\lambda_1,$$
$$u_2 = x(x-0.5)(x-1)y(y-0.5)(y-1)\,/\,\lambda_1.$$

当 $(x,y) \in \Omega_2$ 时，$\mu = \lambda = \lambda_2$，

$$u_1 = x(x-0.5)(x-1)y(y-0.5)(y-1)\,/\,\lambda_2,$$
$$u_2 = x(x-0.5)(x-1)y(y-0.5)(y-1)\,/\,\lambda_2.$$

当 $(x,y) \in \Omega_3$ 时，$\mu = \lambda = \lambda_3$，

$$u_1 = x(x-0.5)(x-1)y(y-0.5)(y-1)\,/\,\lambda_3,$$
$$u_2 = x(x-0.5)(x-1)y(y-0.5)(y-1)\,/\,\lambda_3.$$

当 $(x,y) \in \Omega_4$ 时，$\mu = \lambda = \lambda_4$，

$$u_1 = x(x-0.5)(x-1)y(y-0.5)(y-1)\,/\,\lambda_4,$$
$$u_2 = x(x-0.5)(x-1)y(y-0.5)(y-1)\,/\,\lambda_4.$$

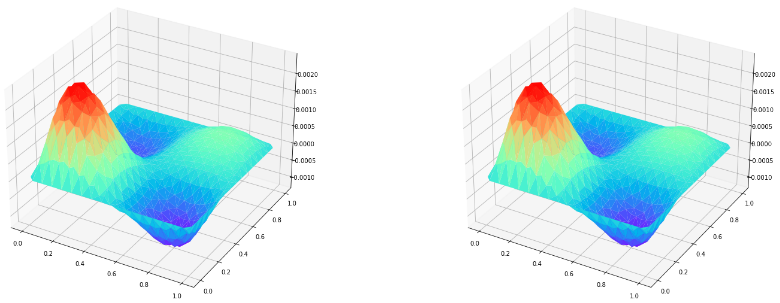
令 $\lambda = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4]$，$\mu = [\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4]$.

1. 当 Lamé 常数 $\lambda=\mu=[1,2,3,4]$ 时误差如下

表 7

h	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\lvert u-u_h\rvert_{H^1(\Omega)}$	1.599642E-2	7.130159E-3	3.516517E-3	1.900384E-3
H1 误差阶	1.165743	1.019786	0.8878559	0.9186291
$\lvert u-u_h\rvert_{L^2(\Omega)}$	3.999106E-3	8.912698E-4	2.197823E-4	5.938701E-5
L2 误差阶	2.165743	2.019786	1.887855	1.918629

图 7



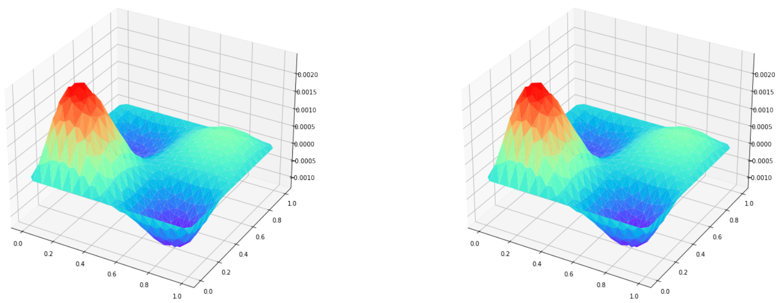
(a) 数值解图像　　(b) 精确解图像

2. 当 Lamé 常数 $\lambda = \mu = [1E4, 2E4, 3E4, 4E4]$ 时误差如下

表 8

h	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\lvert u - u_h \rvert_{H^1(\Omega)}$	1.599735E-2	7.130099E-3	3.516522E-3	1.900428E-3
H1 误差阶	1.165839	1.019772	0.8878243	0.918610
$\lvert u - u_h \rvert_{L^2(\Omega)}$	3.999338E-3	8.912623E-4	2.197826E-4	5.938839E-5
L2 误差阶	2.165839	2.019772	1.887824	1.91861

图 8



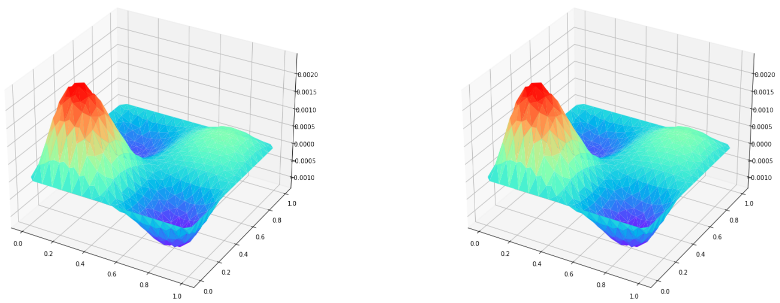
(a) 数值解图像 (b) 精确解图像

3. 当 Lamé 常数 $\lambda = \mu = [1E8, 2E8, 3E8, 4E8]$ 时误差如下

表 9

h	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\lvert u - u_h \rvert_{H^1(\Omega)}$	3.015333E-3	1.139928E-3	6.718610E-4	3.793589E-4
H1 误差阶	1.403373	0.7627090	0.8245995	0.9054011
$\lvert u - u_h \rvert_{L^2(\Omega)}$	7.538332E-4	1.424911E-5	4.199131E-5	1.185496E-5
L2 误差阶	2.403373	1.7627090	1.824599	1.905401

图 9



(a) 数值解图像　　(b) 精确解图像

3.2.2 算例二

考察以下边值问题

$$
\begin{aligned}
-div\,\sigma(u) &= f \quad \in \Omega, \\
u|_{\Gamma} &= 0.
\end{aligned}
$$

其中 $u=(u_1,u_2)^t$ 为求解向量，$f=(f_1,f_2)^t$ 为右端向量，$\Omega=[0,1]\times[0,1]$，$\Omega_1=[0,0.5]\times[0,0.5]$，$\Omega_2=[0.5,1]\times[0,0.5]$，$\Omega_3=[0,0.5]\times[0.5,1]$，$\Omega_4=[0.5,1]\times[0.5,1]$.

当 $(x,y)\in\Omega_1$ 时，$\mu=\lambda=\lambda_1$,

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sin(\pi x)\,\cos(\pi x)\,\sin(\pi y)\,\cos(\pi y)\,/\,\lambda_1, \\
u_2 &= \sin(\pi x)\,\cos(\pi x)\,\sin(\pi y)\,\cos(\pi y)\,/\,\lambda_1.
\end{aligned}
$$

当 $(x,y)\in\Omega_2$ 时，$\mu=\lambda=\lambda_2$,

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sin(\pi x)\,\cos(\pi x)\,\sin(\pi y)\,\cos(\pi y)\,/\,\lambda_2, \\
u_2 &= \sin(\pi x)\,\cos(\pi x)\,\sin(\pi y)\,\cos(\pi y)\,/\,\lambda_2.
\end{aligned}
$$

当 $(x,y)\in\Omega_3$ 时，$\mu=\lambda=\lambda_3$,

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sin(\pi x)\,\cos(\pi x)\,\sin(\pi y)\,\cos(\pi y)\,/\,\lambda_3, \\
u_2 &= \sin(\pi x)\,\cos(\pi x)\,\sin(\pi y)\,\cos(\pi y)\,/\,\lambda_3.
\end{aligned}
$$

当 $(x,y)\in\Omega_4$ 时，$\mu=\lambda=\lambda_4$,

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \sin(\pi x)\,\cos(\pi x)\,\sin(\pi y)\,\cos(\pi y)\,/\,\lambda_4, \\
u_2 &= \sin(\pi x)\,\cos(\pi x)\,\sin(\pi y)\,\cos(\pi y)\,/\,\lambda_4.
\end{aligned}
$$

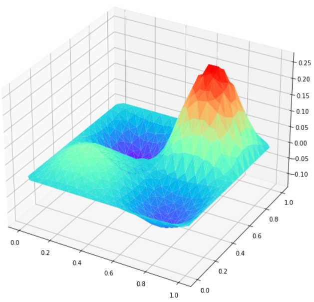
令 $\lambda=[\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3,\lambda_4]$，$\mu=[\mu_1,\mu_2,\mu_3,\mu_4]$.

1. 当 Lamé 常数 $\lambda = \mu = [4, 3, 2, 1]$ 时误差如下

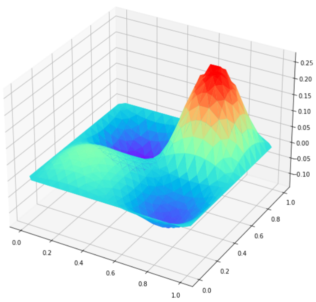
表 10: $|u - u_h|_{H^1(\Omega)}$

h	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\|u - u_h\|_{H^1(\Omega)}$	1.462698	6.166073E-1	4.261624E-1	2.415138E-1
H1 误差阶	1.246208	0.532948	0.819297	0.939899
$\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$	7.313491E-1	1.541518E-1	5.327030E-2	1.509461E-2
L2 误差阶	2.246208	1.532948	1.819297	1.939899

图 10



(a) 数值解图像



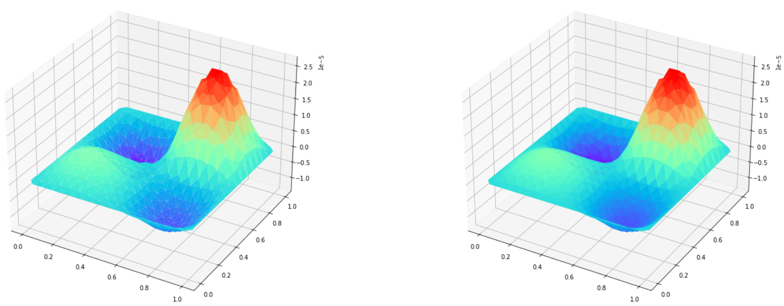
(b) 精确解图像

2. 当 Lamé 常数 $\lambda = \mu = [4E4, 3E4, 2E4, 1E4]$ 时误差如下

表 11

h	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\lvert u - u_h \rvert_{H^1(\Omega)}$	1.462698E-4	6.166073E-5	4.261624E-5	2.415138E-5
H1 误差阶	1.246208	0.532948	0.819297	0.939899
$\lvert u - u_h \rvert_{L^2(\Omega)}$	7.313491E-5	1.541518E-5	5.327030E-6	1.509461E-6
L2 误差阶	2.246208	1.532948	1.819297	1.939899

图 11



(a) 数值解图像

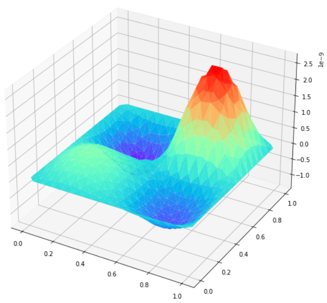
(b) 精确解图像

3. 当 Lamé 常数 $\lambda=\mu=[4E8,3E8,2E8,1E8]$ 时误差如下

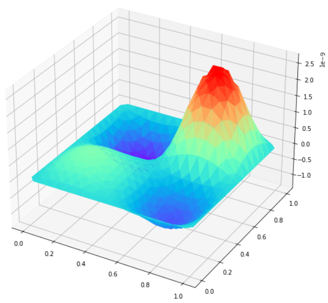
表 12: $|u-u_h|_{H^1(\Omega)}$

h	0.5	0.25	0.125	0.0625
$\lvert u-u_h\rvert_{H^1(\Omega)}$	1.462698E-8	6.166073E-9	2.415138E-9	2.373949E-9
H1 误差阶	1.246208	0.532948	0.819297	0.939899
$\lvert u-u_h\rvert_{L^2(\Omega)}$	7.313491E-9	1.541518E-9	5.327030E-10	1.509461E-10
L2 误差阶	2.246208	1.532948	1.819297	1.939899

图 12



(a) 数值解图像



(b) 精确解图像

4 总结

本文使用 C-R 有限元方法求解了带间断系数的平面弹性问题，分析了非协调元对闭锁现象的影响。数值结果表明，当 Lamé 常数间断且相等时，C-R 元可以有效地解除闭锁现象，并且具有预期的收敛阶。

为了完善本文的研究，未来可以考虑对纯牵引力问题进行数值实验，以检验 C-R 元在不同的边界条件下的表现。同时，也可以通过改变间断系数的大小和形式，以及使用不同的网格划分方式，来进一步探究 C-R 元的有效性和稳定性，以及对间断系数的敏感性。

参考文献

[1] 王兆清，徐子康，李金. 不可压缩平面问题的位移-压力混合重心插值配点法. 应用力学学报, 35(3):631–636, 2018.

[2] 陈绍春，肖留超. 平面弹性的一个新的 locking-free 非协调有限元. 应用数学, 20(4):739–747, 2007.

[3] YT Peet and PF Fischer. Legendre spectral element method with nearly incompressible materials. *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 44:91–103, 2014.

[4] Arif Masud, Timothy J Truster, and Lawrence A Bergman. A variational multiscale a posteriori error estimation method for mixed form of nearly incompressible elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200(47-48):3453–3481, 2011.

[5] Ferdinando Auricchio, L Beirao Da Veiga, Carlo Lovadina, and Alessandro Reali. An analysis of some mixed-enhanced finite element for plane linear elasticity. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194(27-29):2947–2968, 2005.

[6] Peter Hansbo and Mats G Larson. Discontinuous galerkin and the crouzeix–raviart element: application to elasticity. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 37(1):63–72, 2003.

[7] 李荣华，刘播. 偏微分方程数值解, 2007.

[8] 陈纪修，於崇华，金路. 数学分析. 高等教育出版社, 2004.

[9] Susanne C Brenner, L Ridgway Scott, and L Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 3. Springer, 2008.

致谢

时光荏苒, 岁月如梭, 转眼间大学生活来到了最后阶段. 当我写完这篇毕业论文的时候, 有一种如释重负的感觉, 感慨颇多. 回首大学四年, 得到过太多人的帮助了. 首先诚挚的感谢我的论文指导老师本科抽检. 本文的研究工作都是在本科抽检的悉心指导下完成的. 本科抽检平易近人, 严谨务实, 由于我知识储备不足, 在论文撰写过程中遇到了许多困难和疑惑, 本科抽检都及时给予指点, 耐心解释所犯的错误, 投入了大量的心血和精力, 更是不厌其烦地帮我察看论文中的小漏洞. 本科抽检对我的帮忙和关怀实在无法用言语表明. 还要感谢所有的老师们, 正是因为有了他们的督促和教导才能让我在这四年的学习生活里受益匪浅, 快速汲取专业知识, 提升专业能力. 同时也要感谢组内的同学们, 是他们以极大的热情来解答我在理论和程序上的疑问, 帮忙收集资料, 让平淡的日子不再那么枯燥乏味. 最后还要感谢我的家人, 是他们的支持与付出才给了我学习的机会, 感谢一直对我的理解, 这是我不断前进的动力.

附录 A　附录数值程序

Listing 1: **elasticityCR.py**

```
## 模型与剖分

import math
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

from tool import interfaceData, getIsBdNode, uniform_refine, get_cr_node_cell
from tool import get_A1_A2_F, my_solve, H1Error, print_error, print_P
from tool import get_stiff_and_div_matrix, get_bb, drawer_uh_u
from tool import getCellInOmega

n   = 3  #剖分次数
n   = n + 1
Lam = np.array([[1e0, 2e0, 3e0, 4e0],
                [1e1, 2e1, 3e1, 4e1],
                [1e2, 2e2, 3e2, 4e2],
                [1e3, 2e3, 3e3, 4e3],
                [1e4, 2e4, 3e4, 4e4]])

#Lam = np.array([[1e0, 2e0, 3e0, 4e0]])

Mu  = Lam

H     = np.zeros(n)                                 #步长
P     = np.zeros(Lam.shape[0])                      #误差阶
E     = np.zeros((Lam.shape[0],n), dtype=np.float64) #每个lambda(行)对应的误差(列)

for i in  range(Lam.shape[0]):
    pde = interfaceData(Lam[i], Mu[i])
    node = pde.node
    cell = pde.cell
    for j in  range(n):
        NC = cell.shape[0]
        #print("cr_NC= ", NC)
        # nn 特定情况下剖分次数
        nn  = math.log(NC/2, 4)
        NN =  int(3 * 2 * 4**nn - (3 * 2 * 4**nn - 4 * 2**nn) / 2)
```

```
        cm = np.ones(NC, dtype=np.float64) / NC

        cr_node, cr_cell = get_cr_node_cell(node,cell)

        # 单元刚度矩阵和单元载荷向量
        A1, A2 = get_stiff_and_div_matrix(cr_node, cr_cell, cm)
        bb = get_bb(pde, node, cell, cm)
        cellInOmega = getCellInOmega(cr_node, cr_cell)
        kk = 1
        for k in range(4):
            A1[cellInOmega[k]] *= pde.mu[k]
            A2[cellInOmega[k]] *= pde.mu[k] + pde.lam[k]
        A1, A2, F = get_A1_A2_F(A1, A2, bb, cr_node, cr_cell)
        A = A1 + A2

        uh = my_solve(A, F, cr_node, getIsBdNode)
        u = pde.solution(cr_node, cr_node)
        H[j] = np.sqrt(2 * cm[0]) / 2
        E[i][j] = H1Error(u, uh)
        if j < n-1:
            node, cell = uniform_refine(node, cell)
    drawer_uh_u(cr_node, uh, u, "../../image/tmp/interface_uh_u/uh_lam={}.png".format(Lam[i]), "../../image/tmp/interface_uh_u/u_lam={}.png".format(Lam[i]))

# 画图 得到误差阶
if n-1 > 1:
    # 画图
    for i in range(len(Lam)):
        fig = plt.figure()
        plt.plot(np.log(H[1:]), np.log(E[i][1:]))
        plt.title("lam={}".format(Lam[i]))
        plt.xlabel("log(h)")
        plt.ylabel("log(e)")
        plt.savefig(fname="interfaceCRFem/elasticityCRFemLam_{}.png"
                    .format(Lam[i]))
        plt.close(fig)
    # 求误差阶
    # 得到 P
    for i in range(len(Lam)):
        f = np.polyfit(np.log(H[1:]), np.log(E[i][1:]) ,1)
        P[i] = f[0]
```

```python
print_error(Lam, H, E)
if n-1 > 1:
    print_P(Lam, P)
```

Listing 2: **tool.py**

```python
import math
import numpy as np
from numpy.linalg import solve
from scipy.sparse import csr_matrix
from scipy.sparse.linalg import spsolve

# PDE1
# u1 = y(x-1)(y-1)sin(x)
# u2 = x(x-1)(y-1)sin(y)
# uh_dir = "../../image/tmp/elaticity_uh_u/PDE1/uh_lam={}.png".format(
    Lam[i])
# u_dir = "../../image/tmp/elaticity_uh_u/PDE1/u_lam={}.png".format(Lam[
    i])
class PDE():
    def __init__(self, mu=1, lam=1):
        self.mu  = mu
        self.lam = lam
        self.node = np.array([
            (0,0),
            (1,0),
            (1,1),
            (0,1)], dtype=np.float64)
        self.cell = np.array([(1,2,0), (3,0,2)], dtype=np.int64)

    def source(self, p):
        x   = p[..., 0]
        y   = p[..., 1]
        mu  = self.mu
        lam = self.lam

        sin = np.sin
        cos = np.cos
        val = np.zeros(p.shape, dtype=np.float64)

        frac_u1_x   = y * (y-1) * (2*cos(x) - (x-1) * sin(x))
        frac_u1_y   = 2 * (x-1) * sin(x)
```

```
        frac_u1_x_y = (2*y-1) * (sin(x) + (x-1) * cos(x))
        frac_u2_x   = 2 * (y-1) * sin(y)
        frac_u2_y   = x * (x-1) * (2*cos(y) - (y-1) * sin(y))
        frac_u2_x_y = (2*x-1) * (sin(y) + (y-1) * cos(y))

        val[..., 0] = -((2*mu+lam) * frac_u1_x + (mu+lam) * frac_u2_x_y
            + mu*frac_u1_y)
        val[..., 1] = -((2*mu+lam) * frac_u2_y + (mu+lam) * frac_u1_x_y
            + mu*frac_u2_x)

        return val

    def solution(self, p):
        x = p[..., 0]
        y = p[..., 1]

        val = np.zeros(p.shape, dtype=np.float64)

        val[..., 0] = y * (x - 1) * (y - 1) * np.sin(x)
        val[..., 1] = x * (x - 1) * (y - 1) * np.sin(y)

        return val

# PDE2
# u1 = u2 = x^2 * sin(x-1) * y^2 * sin(y-1)
# uh_dir = "../../image/tmp/elaticity_uh_u/PDE2/uh_lam={}.png".format(
    Lam[i])
# u_dir = "../../image/tmp/elaticity_uh_u/PDE2/u_lam={}.png".format(Lam[
    i])
class PDE2():
    def __init__(self, mu=1, lam=1):
        self.mu  = mu
        self.lam = lam
        self.node = np.array([
            (0,0),
            (1,0),
            (1,1),
            (0,1)], dtype=np.float64)
        self.cell = np.array([(1,2,0), (3,0,2)], dtype=np.int64)

    def source(self, p):
        x   = p[..., 0]
```

```
        y   = p[..., 1]
        mu  = self.mu
        lam = self.lam

        sin = np.sin
        cos = np.cos
        val = np.zeros(p.shape, dtype=np.float64)

        ux         = x**2 * sin(x-1)
        uy         = y**2 * sin(y-1)
        frac_ux_x  = 2 * x * sin(x-1) + x**2 * cos(x-1)
        frac_ux_xx = 2 * sin(x-1) + 2 * x *cos(x-1) + 2 * x * cos(x-1) - x**2 * sin(x-1)
        frac_uy_y  = 2 * y * sin(y-1) + y**2 * cos(y-1)
        frac_uy_yy = 2 * sin(y-1) + 2 * y *cos(y-1) + 2 * y * cos(y-1) - y**2 * sin(y-1)

        frac_u1_x   = frac_ux_xx * uy
        frac_u1_y   = ux * frac_uy_yy
        frac_u1_x_y = frac_ux_x * frac_uy_y
        frac_u2_x   = frac_ux_xx * uy
        frac_u2_y   = ux * frac_uy_yy
        frac_u2_x_y = frac_ux_x * frac_uy_y

        val[..., 0] = -((2*mu+lam) * frac_u1_x + (mu+lam) * frac_u2_x_y + mu*frac_u1_y)
        val[..., 1] = -((2*mu+lam) * frac_u2_y + (mu+lam) * frac_u1_x_y + mu*frac_u2_x)

        return val

    def solution(self, p):
        x = p[..., 0]
        y = p[..., 1]

        sin = np.sin
        val = np.zeros(p.shape, dtype=np.float64)

        ux = x**2 * sin(x-1)
        uy = y**2 * sin(y-1)

        val[..., 0] = ux * uy
```

```
        val[..., 1] = ux * uy

        return val

# PDE3
# u1 = u2 = -(x-1) * (e^x-1) * (y-1) * (e^y-1)
# uh_dir = "../../image/tmp/elaticity_uh_u/PDE3/uh_lam={}.png".format(
    Lam[i])
# u_dir = "../../image/tmp/elaticity_uh_u/PDE3/u_lam={}.png".format(Lam[
    i])
class PDE3():
    def __init__(self, mu=1, lam=1):
        self.mu  = mu
        self.lam = lam
        self.node = np.array([
            (0,0),
            (1,0),
            (1,1),
            (0,1)], dtype=np.float64)
        self.cell = np.array([(1,2,0), (3,0,2)], dtype=np.int64)

    def source(self, p):
        x   = p[..., 0]
        y   = p[..., 1]
        mu  = self.mu
        lam = self.lam

        sin = np.sin
        cos = np.cos
        exp = np.exp
        val = np.zeros(p.shape, dtype=np.float64)

        ux = (x-1) * (exp(x) - 1)
        uy = (y-1) * (exp(y) - 1)
        frac_ux_x = x * exp(x) - 1
        frac_ux_xx = exp(x) * (x+1)
        frac_uy_y = y * exp(y) - 1
        frac_uy_yy = exp(y) * (y+1)

        frac_u1_x   = frac_ux_xx * uy
        frac_u1_y   = ux * frac_uy_yy
        frac_u1_x_y = frac_ux_x * frac_uy_y
```

```
        frac_u2_x   = frac_ux_xx * uy
        frac_u2_y   = ux * frac_uy_yy
        frac_u2_x_y = frac_ux_x * frac_uy_y

        val[..., 0] = -((2*mu+lam) * frac_u1_x + (mu+lam) * frac_u2_x_y + mu*frac_u1_y)
        val[..., 1] = -((2*mu+lam) * frac_u2_y + (mu+lam) * frac_u1_x_y + mu*frac_u2_x)

        return -val

    def solution(self, p):
        x = p[..., 0]
        y = p[..., 1]

        val = np.zeros(p.shape, dtype=np.float64)

        ux = (x-1) * (np.exp(x) - 1)
        uy = (y-1) * (np.exp(y) - 1)

        val[..., 0] = ux * uy
        val[..., 1] = ux * uy

        return -val

# interfaceData1
# u1 = u2 = x(x-0.5)(x-1) * y(y-0.5)(y-1)
# uh_dir = "../../image/tmp/interface_uh_u/PDE1/uh_lam={}.png".format(Lam[i])
# u_dir = "../../image/tmp/interface_uh_u/PDE1/u_lam={}.png".format(Lam[i])
class interfaceData():
    def __init__(self, mu=np.array([1,2,3,4]), lam=np.array([1,2,3,4])):
        self.mu = mu
        self.lam = lam
        self.node = np.array([(0,0),
                              (0.5,0),
                              (1,0),
                              (0,0.5),
                              (0.5,0.5),
                              (1,0.5),
                              (0,1),
```

```
                         (0.5,1),
                         (1,1)], dtype=np.float64)
        self.cell = np.array([[0,1,4],
                [0,4,3],
                [1,2,5],
                [1,5,4],
                [3,4,7],
                [3,7,6],
                [4,5,8],
                [4,8,7]], dtype=np.int64)

    def source(self, p):
        x   = p[..., 0]
        y   = p[..., 1]

        mu  = 1
        lam = 1
        val = np.zeros(p.shape, dtype=np.float64)

        frac_u1_x   = (6*x-3) * (y**3-(3/2)*y**2+(1/2)*y)
        frac_u1_y   = (x**3-(3/2)*x**2+(1/2)*x) * (6*y-3)
        frac_u1_x_y = (3*x**2-3*x+1/2) * (3*y**2-3*y+1/2)
        frac_u2_x   = frac_u1_x
        frac_u2_y   = frac_u1_y
        frac_u2_x_y = frac_u1_x_y

        val[..., 0] = -((2*mu+lam) * frac_u1_x + (mu+lam) * frac_u2_x_y + mu*frac_u1_y)
        val[..., 1] = -((2*mu+lam) * frac_u2_y + (mu+lam) * frac_u1_x_y + mu*frac_u2_x)

        return val

    def solution(self, p, cr_node):
        x = p[..., 0]
        y = p[..., 1]

        val = np.zeros(p.shape, dtype=np.float64)

        val[..., 0] = x * (x - 0.5) * (x - 1) * y * (y - 0.5) * (y - 1)
        val[..., 1] = x * (x - 0.5) * (x - 1) * y * (y - 0.5) * (y - 1)

```

```
        crCell = getWhichCell(cr_node)
        for i in  range(4):
            val[crCell[i], :] /= self.lam[i]

        return val

def H1Error(u, uh):
    tmp = u - uh
    e = np.einsum("ni, ni -> n", tmp, tmp)
     sum = e. sum()
    return np.sqrt( sum)

def print_error(Lam, H, E):
    for i in  range( len(Lam)):
        print("---------------------Lam= {}---------------------".
            format(Lam[i]))
        n = H.shape[0]
        print()
        for j in  range(n):
            print("h= ", H[j])
            print("e=", E[i][j])
            print()
        print()

def print_P(Lam, P):
    print("---------------------误差阶---------------------")
    for i in  range( len(Lam)):
        print("lam= ", Lam[i])
        print("p= ", P[i])
        print()

#判断 P (维度[2]) 是否在 cr_node, 是则放回其下标, 否则 (val = 1 时) 将 P
     加入 cr_node 并返回下标
def is_in_cr_node(p, cr_node):
    #p 不会为[0,0]
    index = np.where((cr_node == p). all(axis=1))[0]
    if  len(index):
        return index[0]
    else:
        in_index = np.where((cr_node == np.array([0,0])).
            all(axis=1))[0]
        if  len(in_index) == 0:
            print("cr_node= ", cr_node)
```

```
            raise Exception("数组cr_node已满")
        cr_node[in_index[0]] = p
        return in_index[0]

#判断 P (维度[2]) 是否在 node, 是则放回其下标, 否则将 P 加入 node 并返回下标
def is_in_node(p, node):
    #p 不会为[0,0]
    index = np.where((node == p). all(axis=1))[0]
    if  len(index):
        return index[0]
    else:
        in_index = np.where((node == np.array([0,0])). all(axis=1))[0]
        if  len(in_index) == 1:
            print("node= ", node)
            raise Exception("数组node已满")
        node[in_index[1]] = p
        return in_index[1]

# a_cell 是否属于 cell, 是则返回下标,  否则返回 -1
def is_in_cell(a_cell, cell):
    i = np.where((cell == a_cell). all(axis=1))[0]
    if  len(i):
        return i[0]
    else:
        return -1

#将 a_cell (维数[3]) 放入new_cr_cell
def push_cr_cell(a_cell, new_cr_cell):
    in_index = np.where((new_cr_cell == np.array([0,0,0])).
        all(axis=1))[0]
    if  len(in_index) == 0:
        raise Exception("数组cr_cell已满")
    new_cr_cell[in_index[0]] = a_cell
    return new_cr_cell


# 对单个三角形 a_cell_node (维度 [3, 2]) 求三条边中点 p1, p2, p3 并将其放入 new_cr_node 、 new_cr_cell
def a_creat(a_cell_node, new_cr_node, new_cr_cell):
    p1 = (a_cell_node[0] + a_cell_node[1]) / 2
    p2 = (a_cell_node[0] + a_cell_node[2]) / 2
    p3 = (a_cell_node[1] + a_cell_node[2]) / 2
```

```

    p1_i = is_in_cr_node(p1, new_cr_node)
    p2_i = is_in_cr_node(p2, new_cr_node)
    p3_i = is_in_cr_node(p3, new_cr_node)

    push_cr_cell([p1_i, p2_i, p3_i], new_cr_cell)

    return new_cr_node, new_cr_cell

def refine_a_cell(a_cell, new_node, new_cell):
    p1 = (new_node[a_cell][0] + new_node[a_cell][1]) / 2
    p2 = (new_node[a_cell][0] + new_node[a_cell][2]) / 2
    p3 = (new_node[a_cell][1] + new_node[a_cell][2]) / 2

    p1_i = is_in_node(p1, new_node)
    p2_i = is_in_node(p2, new_node)
    p3_i = is_in_node(p3, new_node)

    push_cr_cell([p1_i, p2_i, p3_i], new_cell)
    push_cr_cell([a_cell[0], p1_i, p2_i], new_cell)
    push_cr_cell([p1_i, a_cell[1], p3_i], new_cell)
    push_cr_cell([p2_i, p3_i, a_cell[2]], new_cell)

    return new_node, new_cell

# 从剖分node, cell得到 cr_node, cr_cell
# 单元数 NC
# 剖分次数 n : log_4(NC / 2)
# 外边 out_edge : 4 * 2**n
# 总边 all_edge :  3 * NC - (3 * NC - out_edge) / 2
def get_cr_node_cell(node, cell):
    NC = cell.shape[0]
    # n 特定情况下剖分次数
    n  = math.log(NC/2, 4)
    NN =  int(3 * 2 * 4**n - (3 * 2 * 4**n - 4 * 2**n) / 2)
    cr_node = np.zeros((NN, 2), dtype=np.float64)
    cr_cell = np.zeros_like(cell)

    for i in  range(NC):
        cr_node, cr_cell = a_creat(node[cell[i]], cr_node, cr_cell)

    return cr_node, cr_cell
```

```python

# 返回 node 中是否为边界点的信息
# isBdNode [NN] bool
def getIsBdNode(cr_node):
    is_BdNode = np.zeros(cr_node.shape[0], dtype= bool)
    for i in  range(cr_node.shape[0]):
        a = np. min(np. abs(cr_node[i] - np.array([0,0])))
        b = np. min(np. abs(cr_node[i] - np.array([1,1])))
        if a < 1e-13 or b < 1e-13:
            is_BdNode[i] = True
    return is_BdNode

def getIsBdLineNode(cr_node):
    NN = cr_node.shape[0]
    isBdLineNode = getIsBdNode(cr_node)
    for i in  range(NN):
        a = cr_node[i,0]
        b = cr_node[i,1]
        if a == 0.5 or b == 0.5:
            isBdLineNode[i] = True
    return isBdLineNode

def uniform_refine(node, cell):
    old_NN = node.shape[0]
    old_NC = cell.shape[0]
    n  = math.log(old_NC/2, 4)
    NC = 4 * old_NC
    num_edge =  int(3 * 2 * 4**n - (3 * 2 * 4**n - 4 * 2**n) / 2)
    NN = old_NN + num_edge

    new_node = np.zeros((NN, 2), dtype=np.float64)
    new_cell = np.zeros((NC, 3), dtype=np.int64)
    new_node[:old_NN] = node

    for i in  range(old_NC):
        new_node, new_cell = refine_a_cell(cell[i], new_node, new_cell)

    return new_node, new_cell

def get_cr_glam_and_pre(cr_node, cr_cell):
    NC = cr_cell.shape[0]
    NN = cr_node.shape[0]
```

```
    cr_node_cell = cr_node[cr_cell]
    ##求解CR元导数
    cr_node_cell_A = np.ones((NC, 3, 3), dtype=np.float64)
    #求解CR元导数的系数矩阵
    cr_node_cell_A[:, :, 0:2] = cr_node_cell
    #用于求解CR元的值
    # cr_glam_x_y_pre [NC, 3, 3]
    cr_glam_x_y_pre = np.zeros((NC, 3, 3), dtype=np.float64)
    for k in  range(NC):
        cr_glam_x_y_pre[k, :, :] = solve(cr_node_cell_A[k, :, :], np.
            diag(np.ones(3)))
    #[NC,3,3]
    cr_glam_x_y = np.copy(cr_glam_x_y_pre)
    cr_glam_x_y = cr_glam_x_y[:, 0:2, :]
    cr_glam_x_y = cr_glam_x_y.transpose((0,2,1))
    return cr_glam_x_y, cr_glam_x_y_pre

# phi_val [NC,3(点),6(6个基函数),2(两个分量)]
def get_phi_val(node, cell, cr_glam_pre):
    NC = cell.shape[0]
    # cr_node_val [NC,3(点),3(三个cr元的值)] CR元在各顶点的值
    node_cell_A = np.ones((NC,3,3), dtype=np.float64)
    node_cell_A[:,:,0:2] = node[cell]
    cr_node_val = np.einsum("cij, cjk -> cik", node_cell_A, cr_glam_pre)

    # phi_node_val [NC,3(点),6(6个基函数),2(两个分量)]
    phi_node_val = np.zeros((NC,3,6,2), dtype=np.float64)
    phi_node_val[:,:,0:5:2,0] = cr_node_val
    phi_node_val[:,:,1:6:2,1] = cr_node_val
    return phi_node_val

def get_phi_grad_and_div(cr_node, cr_cell):
    NC = cr_cell.shape[0]
    cr_glam_x_y, cr_glam_x_y_pre = get_cr_glam_and_pre(cr_node, cr_cell)
    #求 cr_phi_grad [NC,6(基函数),2(分量 x , y),2(导数)]
    cr_phi_grad = np.zeros((NC,6,2,2), dtype=np.float64)
    cr_phi_grad[:, 0:5:2, 0, :] = cr_glam_x_y
    cr_phi_grad[:, 1:6:2, 1, :] = cr_glam_x_y

    # cr_phi_div [NC, 6]
    #cr_phi_div = np.einsum("cmij -> cm", cr_phi_grad)
    cr_phi_div = cr_glam_x_y.copy()
```

```
    cr_phi_div = cr_phi_div.reshape(NC, 6)
    return cr_phi_grad, cr_phi_div

## 单元刚度矩阵, 单元质量矩阵 stiff, div [NC, 6, 6]
def get_stiff_and_div_matrix(cr_node, cr_cell, cm):
    cr_phi_grad, cr_phi_div = get_phi_grad_and_div(cr_node, cr_cell)

    ## 单元刚度矩阵
    # A1 A2 [NC, 6, 6]
    A1 = np.einsum("cnij, cmij, c -> cnm", cr_phi_grad, cr_phi_grad, cm)
    A2 = np.einsum("cn, cm, c -> cnm", cr_phi_div, cr_phi_div, cm)
    return A1, A2

## 单元载荷向量 bb [NC, 6]
def get_bb(pde, node, cell, cm):
    cr_node, cr_cell = get_cr_node_cell(node,cell)
    cr_glam_x_y, cr_glam_x_y_pre = get_cr_glam_and_pre(cr_node, cr_cell)
    # phi_val [NC,3(点),6(6个基函数),2(两个分量)]
    phi_node_val = get_phi_val(node, cell, cr_glam_x_y_pre)

    # val [NC,3(点),2(分量)] 右端项在各顶点的值
    val = pde.source(node[cell])

    # phi_val [NC,3,6] 基函数和右端项的点乘
    phi_val = np.einsum("cijk, cik -> cij", phi_node_val, val)
    # bb [NC,6]
    bb = phi_val. sum(axis=1) * cm[0] / 3
    return bb

#input
#单元刚度矩阵 A1, A2 [NC, 6, 6], bb [NC,6]
# output
# 总刚度矩阵 A1, A2 [2*NN,2*NN], F [2*NN]
def get_A1_A2_F(A1, A2, bb, cr_node, cr_cell):
    NN = cr_node.shape[0]
    NC = cr_cell.shape[0]
    # cell_x_y [NC, 3(三个点), 2(x y 方向上基函数的编号)]
    cell_x_y = np.broadcast_to(cr_cell[:,:,None], shape=(NC, 3, 2)).copy
        ()
    cell_x_y[:,:,0] = 2 * cell_x_y[:,:,0]       #[NC,3] 三个节点x方向上
        基函数在总刚度矩阵的位置
    cell_x_y[:,:,1] = 2 * cell_x_y[:,:,1] + 1   #[NC,3] 三个节点y方向上
```

```
        基函数在总刚度矩阵的位置
    cell_x_y = cell_x_y.reshape(NC, 6)
    I = np.broadcast_to(cell_x_y[:, :, None], shape=A1.shape)
    J = np.broadcast_to(cell_x_y[:, None, :], shape=A2.shape)

    A1 = csr_matrix((A1.flat, (I.flat, J.flat)), shape=(2 * NN,2 * NN))
    A2 = csr_matrix((A2.flat, (I.flat, J.flat)), shape=(2 * NN,2 * NN))
    F = np.zeros(2 * NN)
    np.add.at(F, cell_x_y, bb)
    return A1, A2, F

def my_solve(A, F, cr_node, getIsBdNode):
    NN = cr_node.shape[0]
    isBdNode    = getIsBdNode(cr_node)
    isInterNode = ~isBdNode
    #print("isInterNode= ", isInterNode)
    isInterNodeA = np.broadcast_to(isInterNode[:, None], shape=(NN, 2))
    isInterNodeA = isInterNodeA.reshape(2 * NN)
    #print("isInterNodeA= ", isInterNodeA)

    uh = np.zeros((2 * NN), dtype=np.float64)
    uh[isInterNodeA] = spsolve(A[:, isInterNodeA][isInterNodeA], F[isInterNodeA])
    #uh = spsolve(A, F)
    #print("uh= ", uh)
    uh = uh.reshape(NN, 2)
    return uh

## [4,NN] 返回各点属于哪个区间
## \Omega_1 [0,0.5]   \times [0,0.5)
## \Omega_2 (0.5, 1]  \times [0,0.5]
## \Omega_3 [0,0.5)   \times [0.5,1]
## \Omega_4 [0.5,1] \times (0.5,1]
def getWhichCell(node):
    isWhichCellNode = np.zeros((4,node.shape[0]), dtype= bool)
    for i in  range(node.shape[0]):
        a = node[i, 0] - 0
        b = node[i, 1] - 0
        if a <= 0.5 and b < 0.5:
            isWhichCellNode[0,i] = True
        if a > 0.5 and b <= 0.5:
            isWhichCellNode[1,i] = True
```

```python
        if a < 0.5 and b >= 0.5:
            isWhichCellNode[2,i] = True
        if a >= 0.5 and b > 0.5:
            isWhichCellNode[3,i] = True
    return isWhichCellNode

## [4, NC] 返回各单元属于哪个区间
def getCellInOmega(node, cell):
    cellInOmega = np.zeros(cell.shape[0], dtype= bool)
    #print("node[cell]= ", node[cell])
    mid_p = node[cell]. sum(axis=1) / 3
    #print("mid_p= ", mid_p)
    cellInOmega = getWhichCell(mid_p)
    return cellInOmega

## [4,NN]
## \line_1 x=0.5, y<0.5
## \line_2 x=0.5, y>0.5
## \line_3 x<0.5, y=0.5
## \line_4 x>0.5, y=0.5
def getInterfaceCell(node):
    interfaceCell = np.zeros((4,node.shape[0]), dtype= bool)
    for i in  range(node.shape[0]):
        a = node[i,0]
        b = node[i,1]
        if a == 0.5 and b < 0.5:
            interfaceCell[0,i] = True
        if a == 0.5 and b > 0.5:
            interfaceCell[1,i] = True
        if a < 0.5 and b == 0.5:
            interfaceCell[2,i] = True
        if a > 0.5 and b == 0.5:
            interfaceCell[3,i] = True
    return interfaceCell

def getInterLineNode(node):
    NN = node.shape[0]
    lineNode = np.zeros(NN, dtype= bool)
    for i in  range(NN):
        a = node[i,0]
        b = node[i,1]
        if a == 0.5 or b == 0.5:
```

```
                lineNode[i] = True
    return lineNode

def phiInWhichCell(whichCell):
    phiCell = np.broadcast_to(whichCell[:, :, None], shape=(4, whichCell.shape[1], 2))
    phiCell = phiCell.reshape(4, 2 * whichCell.shape[1])
    return phiCell

# uh_dir = "../../image/tmp/elaticity_uh_u/uh_lam={}.png".format(Lam[i])"
# u_dir = "../../image/tmp/elaticity_uh_u/u_lam={}.png".format(Lam[i])
def drawer_uh_u(cr_node, uh, u, uh_dir, u_dir):
    import matplotlib.pyplot as plt
    fig = plt.figure(figsize=(10,10))
    ax = fig.add_subplot(111, projection='3d')

    x = cr_node[:,0]
    y = cr_node[:,1]

    ax.plot_trisurf(x, y, uh[:,0], cmap='rainbow')
    plt.savefig(fname=uh_dir)

    ax.plot_trisurf(x, y, u[:,0], cmap='rainbow')
    plt.savefig(fname=u_dir)
    plt.close(fig)
```