

带间断系数的弹性问题

答辩人：唐小康，指导老师：王华

2023 年 4 月 10 日

- ① 研究背景和主要内容
- ② 研究方法
- ③ 实验结果和待完成内容
 - 实验结果
 - 待完成内容
- ④ 致谢

平面弹性力学方程组是弹性力学中最基础、最常见的模型。当研究的弹性体形状和受力具有一定特点时，通过适当的简化处理，就可以归结为平面弹性问题，其控制方程可以表示为以下形式

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} \sigma(u) &= f \in \Omega \\ \sigma(u) &= 2\mu \epsilon(u) + \lambda \operatorname{tr}(\epsilon(u)) \delta \\ u|_{\Gamma} &= 0 \end{aligned}$$

其中 $u = (u_1, u_2)^t$ 为求解向量， $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ ， Γ 为 Ω 的边界。

使用协调有限元求解弹性问题时，有限元方法的性能会随着系数 λ 趋向于 ∞ 而变差，称其为闭锁现象，而使用非协调元（如 CR 元）时则可以解除闭锁现象，本文的主要内容是当系数 λ, μ 在区域 Ω 上间断时，使用 CR 元是否任然可以解除闭锁现象。

本文的研究方法是，先通过查阅文献等方法了解有限元的基础理论，如 Sobolev 空间、线性元、CR 元的定义以及误差估计，然后通过三组数值实验得到结论，通过线性元和 CR 元求解弹性问题的对比可以观察到闭锁现象，通过 CR 元求解弹性问题和带间断系数的弹性问题的对比可以初步判断 CR 元是否可以解除闭锁现象。

表: 线性元误差

$\lambda \backslash h$	1.0	0.5	0.25	0.125	0.0625
1	0.0	5.3881e-5	1.1197e-4	3.9125e-5	1.0772e-5
10	0.0	1.1963e-2	2.6789e-3	6.4168e-4	1.6060e-4
100	0.0	1.8830e-2	4.7420e-3	1.2635e-3	3.5042e-4
1e3	0.0	1.9855e-2	5.2306e-3	1.6399e-3	6.7184e-4
1e4	0.0	1.9963e-2	5.2878e-3	1.7076e-3	6.6349e-4
1e5	0.0	1.9974e-2	5.2936e-3	1.7150e-3	8.2476e-4

表: CR 元误差

$\lambda \backslash h$	1.0	0.5	0.25	0.125	0.0625
1	2.9011	7.9878e-2	2.0326e-2	5.8054e-3	1.5808e-3
10	1.8652	4.9859e-2	1.2611e-2	3.4043e-3	9.0626e-4
100	1.7617	4.6901e-2	1.1864e-2	3.1691e-3	8.3997e-4
1e3	1.7513	4.6605e-2	1.1790e-2	3.1457e-3	8.3336e-4
1e4	1.7503	4.6577e-2	1.1783e-2	3.1434e-3	8.3270e-4
1e5	1.7502	4.6574e-2	1.1782e-2	3.1431e-3	8.3263e-4

可以看到, 随着 λ 的增大, 使用线性元得到的近似解的收敛效果逐渐下降, 而使用 CR 元的收敛速度保持不变。

接下来将完成求解带间断系数的弹性问题的程序的编写，得到实验结果并且与以上结果对比，最后得到结论。

谢谢!