

# 不规则区域平面弹性问题的 正则区域重心插值配点法

王兆清<sup>\*1</sup>, 纪思源<sup>1</sup>, 徐子康<sup>1</sup>, 李金<sup>2</sup>

(1. 山东建筑大学 工程力学研究所, 济南 250101; 2. 山东建筑大学 理学院, 济南 250101)

**摘要:** 将不规则区域嵌入到规则的矩形区域, 在矩形区域上将弹性平面问题的控制方程采用重心 Lagrange 插值离散, 得到控制方程矩阵形式的离散表达式。在边界节点上利用重心插值离散边界条件, 规则区域采用置换法施加边界条件, 不规则区域采用附加法施加边界条件, 得到求解平面弹性问题的过约束线性代数方程组, 采用最小二乘法进行求解, 得到整个规则区域上的位移数值解。利用重心插值计算得到不规则区域内任意节点的位移值, 计算精度可到  $10^{-14}$  以上。数值算例验证了所建立方法的有效性和计算精度。

**关键词:** 不规则区域; 平面弹性问题; 正则区域法; 重心 Lagrange 插值; 微分矩阵; 配点法

中图分类号: O241

文献标志码: A

文章编号: 1007-4708(2018)02-0195-07

## 1 引言

求解弹性力学平面问题的主要方法有解析解法<sup>[1]</sup>和数值分析方法。对于不规则平面弹性问题, 很难得到其解析解, 因此需要借助数值方法进行求解。求解不规则区域平面弹性问题的数值方法计算中, 有限元法<sup>[2,3]</sup>、边界元法<sup>[4]</sup>、有限差分法<sup>[5]</sup>和无网格法<sup>[6,7]</sup>是应用最广泛的方法。有限元法有其不足之处, 需要进行大量网格划分, 影响了有限单元法的计算精度和实际应用范围。边界元法可只对不规则边界进行离散, 离散化误差仅仅来源于不规则边界, 但边界元法依赖于所求问题的基本解, 需要进行奇异积分计算。对于不规则问题, 采用有限差分法计算, 需要构造特殊的差分格式。近年来兴起的无网格法有效弥补了有限单元法、边界元法和有限差分法的不足之处。基于径向基函数法的数值方法<sup>[7]</sup>将径向基函数引入未知函数近似过程, 该方法不需要划分网格, 局限性在于计算精度非常依赖形状参数的选取。

配点法是一种真正意义上的无网格方法, 该方法是基于微分方程强形式的离散方法, 程序实施方便, 无需进行网格划分。常用的配点法有拟谱法<sup>[8]</sup>和微分求积法(DQM)<sup>[9]</sup>。拟谱法是基于谱函数近

似展开, 数值求解微分方程的配点法。通过微分矩阵来表达未知函数的各阶导数, 微分矩阵通过对未知函数的近似函数求导得到。为了提高计算精度, 在拟谱法中的节点一般采用谱多项式的零点来求解。微分求积法是由 Bellman 和 Casti 在 20 世纪 70 年代提出的求解偏微分方程的一种数值计算方法, 其本质是通过在全域节点的函数值加权近似得到未知函数的导数值。微分求积法的权一般通过 Lagrange 插值计算。拟谱方法和微分求积法不能直接应用于不规则问题的数值分析。

Lagrange 插值是函数近似的重要方法, 随着插值节点数量的增加, Lagrange 插值表现出极大的数值不稳定性。将 Lagrange 插值公式改写成重心公式的形式, 可以显著降低插值的数值不稳定性 and 改善计算精度。采用重心 Lagrange 插值近似未知函数的配点型方法即重心 Lagrange 插值配点法具有不需要划分网格、程序实施方便和计算精度高的优点, 已广泛应用于求解线性和非线性微分方程的初值问题、边值问题和初边值问题<sup>[10-16]</sup>。

本文采用重心插值配点法求解不规则区域弹性平面问题。将不规则区域嵌入到规则的矩形区域, 实现区域正则化。与有限单元法相比<sup>[17]</sup>, 本文方法为全局配点方法, 不需要划分计算单元。在规则区域上, 通过重心插值离散和施加边界条件得到规则区域上的位移数值解, 利用重心插值得到不规则区域内任意节点的位移解。提出了一种研究不规则区域弹性平面问题的正则区域法, 为求解不规

收稿日期: 2016-12-07; 修改稿收到日期: 2017-04-06.

基金项目: 国家自然科学基金(51379113); 山东省自然

科学基金重点(ZR2016JL006)资助项目.

作者简介: 王兆清<sup>\*</sup> (1965-), 男, 博士, 副教授

(E-mail: sdjzuwang@126.com).

则弹性平面问题提供了一种高精度的数值算法,通过数值算例验证了方法的有效性和计算精度。

## 2 重心 Lagrange 插值及其微分矩阵

### 2.1 一维重心 Lagrange 插值函数及其微分矩阵

对于区间  $[a, b]$  上的节点  $a = x_1, x_2, \dots, x_n = b$ , 函数  $p(x)$  在节点处的函数值为  $p_j = p(x_j), j = 1, 2, \dots, n$ , 则函数  $p(x)$  的重心 Lagrange 型插值函数为<sup>[16]</sup>

$$p(x) = \sum_{j=1}^n L_j(x) p_j, \quad L_j(x) = \frac{w_j}{x - x_j} / \sum_{j=1}^n \frac{w_j}{x - x_j} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

式中  $w_j = 1 / \prod_{j \neq k} (x_j - x_k), j = 1, 2, \dots, n$ 。利用式(1), 函数  $p(x)$  在节点  $x_1, x_2, \dots, x_n$  处的  $m$  阶导数可以表示为

$$p^{(m)}(x_i) \triangleq p_i^{(m)} = \frac{d^m p(x_i)}{dx^m} = \sum_{j=1}^n L_j^{(m)}(x_i) p_j = \sum_{j=1}^n D_{ij}^{(m)} p_j \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2)$$

写成矩阵的形式为

$$p^{(m)} = D^{(m)} p \quad (3)$$

式中  $p^{(m)} = [p_1^{(m)}, p_2^{(m)}, \dots, p_n^{(m)}]^T$  为未知函数  $p(x)$  在节点处的  $m$  阶导数值列向量,  $p = [p_1, p_2, \dots, p_n]^T$  为未知函数在节点处的函数值, 矩阵  $D^{(m)}$  称为未知函数的  $m$  阶微分矩阵, 其元素为  $D_{ij}^{(m)} = L_j^{(m)}(x_i)$ 。

### 2.2 二维重心 Lagrange 插值函数及其偏微分矩阵

假设函数  $p(x, y)$  在定义的矩形区域  $\Omega_0 = [a, b] \times [c, d]$  上, 由节点  $a = x_1, x_2, \dots, x_m = b, c = y_1, y_2, \dots, y_n = d$  构成  $\Omega_0$  上张量积型节点  $(x_i, y_j)$ , 对应的函数值  $p_{ij} = p(x_i, y_j)$ 。函数  $p(x, y)$  的重心 Lagrange 插值为<sup>[16]</sup>

$$p(x, y) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i(x) M_j(y) p_{ij} \quad (4)$$

式中  $L_i(x)$  和  $M_j(y)$  是一维重心 Lagrange 插值基函数。由式(4), 函数  $p(x, y)$  的  $(l+k)$  阶偏微分可以写为

$$\frac{\partial^{l+k} p}{\partial x^l \partial y^k} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i^{(l)}(x) M_j^{(k)}(y) p_{ij} \quad (5)$$

未知函数  $p(x, y)$  在节点  $(x_i, y_j), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$  处的  $(l+k)$  阶偏微分值为

$$p_{pq}^{(l,k)} = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i^{(l)}(x_p) M_j^{(k)}(y_q) p_{ij} \quad (p = 1, 2, \dots, m, q = 1, 2, \dots, n) \quad (6)$$

式(8)可以用矩阵形式表示为

$$P^{(l,k)} = (C^{(l)} \otimes D^{(k)}) P \quad (7)$$

式中  $C^{(l)}$  为节点  $\{x_i\}$  处  $l$  阶重心 Lagrange 插值微分矩阵,  $\otimes$  为矩阵的 Kronecker 积,  $D^{(k)}$  为节点  $\{y_j\}$  处  $k$  阶重心 Lagrange 插值微分矩阵。定义  $C^{(0)} = I_m$  和  $D^{(0)} = I_n, I_m$  和  $I_n$  分别为  $m$  阶和  $n$  阶单位矩阵。向量  $P$  和  $P^{(l,k)}$  分别为函数值及其  $(l+k)$  阶偏微分构成的列向量。

## 3 不规则区域弹性平面问题的正则区域重心 Lagrange 插值配点法

### 3.1 直角坐标系下弹性力学的基本方程

在直角坐标系下, 平面问题的位移表达控制方程为

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \right) + f_x = 0 \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1-\mu}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{1+\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \right) + f_y = 0 \end{cases} \quad (8)$$

位移边界条件

$$u|_{\Gamma_u} = \bar{u}, \quad v|_{\Gamma_u} = \bar{v} \quad (9)$$

位移形式表达的力边界条件为

$$\begin{cases} \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \mu \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_1 + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_2 \right]_{\Gamma_\sigma} = \bar{t}_x \\ \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \left( \mu \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) n_2 + \frac{1-\mu}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) n_1 \right]_{\Gamma_\sigma} = \bar{t}_y \end{cases} \quad (10)$$

式中  $E$  和  $\mu$  分别为杨氏模量和 Poisson 比,  $f_x$  和  $f_y$  为体力分量,  $n_1$  和  $n_2$  为边界外法线方向余弦,  $\bar{t}_x$  和  $\bar{t}_y$  为边界面力分量。

### 3.2 不规则区域弹性平面的正则区域法

正则区域法是将任意不规则物理区域  $\Omega$  嵌入到一个规则的矩形计算区域  $\Omega_0 = [a, b] \times [c, d]$ , 将规则区域  $\Omega_0$  的几何边界条件记作  $\Gamma_0$ , 不规则区域  $\Omega$  的几何边界条件记作  $\Gamma$ 。在  $\Omega_0$  的  $x$  方向布置  $m$  个节点  $x_1, x_2, \dots, x_m, y$  方向布置  $n$  个点  $y_1, y_2, \dots, y_n$ , 从而可以布置成  $m \times n$  的张量型数值计算节点  $(x_i, y_j), i = 1, 2, \dots, m, j = 1, 2, \dots, n$ 。如图 1 所示,  $\bullet$  为区域  $\Omega$  内的节点,  $\circ$  为区域  $\Omega_0$  外的节点, 构成计算节点。

利用插值式(4)近似位移函数  $u(x, y)$  和  $v(x, y)$ , 并将其代入位移控制方程(8), 利用偏导数的微分矩阵表达式(7), 位移控制方程(8)的重心插值配点法离散方程可写作如下矩阵形式。

$$\begin{cases} \left( \frac{1-\mu}{2} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}^{(2)}) + \mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{I}_n \right) \mathbf{u} + \\ \frac{1+\mu}{2} (\mathbf{C}^{(1)} \otimes \mathbf{D}^{(1)}) \mathbf{v} + \frac{(1-\mu^2)}{E} \mathbf{f}_x = 0 \\ \frac{1+\mu}{2} (\mathbf{C}^{(1)} \otimes \mathbf{D}^{(1)}) \mathbf{u} + \left[ \frac{1-\mu}{2} (\mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{I}_n) + \right. \\ \left. (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}^{(2)}) \right] \mathbf{v} + \frac{(1-\mu^2)}{E} \mathbf{f}_y = 0 \end{cases} \quad (11)$$

引进记号

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} (\mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{I}_n) + \frac{1-\mu}{2} (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}^{(2)}) \\ \frac{1+\mu}{2} (\mathbf{C}^{(1)} \otimes \mathbf{D}^{(1)}) \\ \frac{1+\mu}{2} (\mathbf{C}^{(1)} \otimes \mathbf{D}^{(1)}) \\ \frac{1-\mu}{2} (\mathbf{C}^{(2)} \otimes \mathbf{I}_n) + (\mathbf{I}_m \otimes \mathbf{D}^{(2)}) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix}, \mathbf{F} = \frac{(1-\mu^2)}{E} \begin{bmatrix} \mathbf{f}_x \\ \mathbf{f}_y \end{bmatrix}$$

方程组(11)可化简为

$$\mathbf{LU} = \mathbf{F} \quad (12)$$

式中  $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{f}_x$  和  $\mathbf{f}_y$  分别为位移和体力函数在计算节点处函数值构成列向量。

### 3.3 边界条件的离散及施加

对于规则边界,其位移边界条件可直接在计算节点上离散。对于不规则区域边界,在其边界上布置  $m_0$  个节点  $\{(x_k^b, y_k^b)\}, k=1, 2, \dots, m_0$ 。利用重心插值式(4),位移边界条件可离散为

$$u(x_k^b, y_k^b) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i(x_k^b) M_j(y_k^b) u_{ij}$$

$$v(x_k^b, y_k^b) = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n L_i(x_k^b) M_j(y_k^b) v_{ij} \quad (13)$$

式(13)的矩阵形式为

$$u(x_k^b, y_k^b) = [\mathbf{A}(x_k^b) \otimes \mathbf{B}(y_k^b)] \mathbf{u} = \bar{u}(x_k^b, y_k^b)$$

$$v(x_k^b, y_k^b) = [\mathbf{A}(x_k^b) \otimes \mathbf{B}(y_k^b)] \mathbf{v} = \bar{v}(x_k^b, y_k^b) \quad (14)$$

式中  $\mathbf{A}(x_k^b) = [L_1(x_k^b), L_2(x_k^b), \dots, L_m(x_k^b)]$

$$\mathbf{B}(y_k^b) = [M_1(y_k^b), M_2(y_k^b), \dots, M_n(y_k^b)]$$

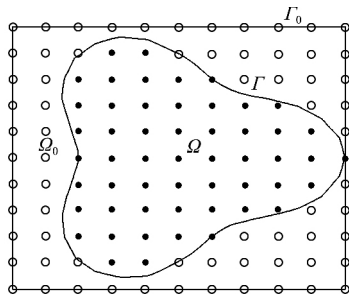


图1 不规则区域  $\Omega$  嵌入一个矩形区域  $\Omega_0$

Fig. 1 Irregular domain  $\Omega$  embedded into a rectangular region  $\Omega_0$

力边界条件(10)可采用类似的方式离散。将位移和力边界条件的离散方程,简记为

$$\mathbf{B}_0 \mathbf{U} = \mathbf{g}, \mathbf{B}_1 \mathbf{U} = \mathbf{h} \quad (15)$$

采用附加法<sup>[15,16]</sup>施加边界条件(15),即将方程(15)附加到方程(12),得到

$$\begin{bmatrix} \mathbf{L} \\ \mathbf{B}_0 \\ \mathbf{B}_1 \end{bmatrix} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{h} \end{bmatrix} \quad (16)$$

方程组(16)为过约束线性方程组,采用最小二乘法求解。在数值算例实施过程中,采用 MATLAB 的反斜杠命令求解方程组(16)。为确保方程组(16)解的唯一性,选取的边界节点数量应大于正则区域边界点的数量。

## 4 数值算例

本文数值算例,采用 MATLAB 进行数值算例程序的编写,计算节点采用与 Chebyshev 节点同分布的点。不同数量节点计算的绝对误差和相对误差分别定义为  $E_a = \|\mathbf{U}^c - \mathbf{U}^e\|_2, E_r = \|\mathbf{U}^c - \mathbf{U}^e\|_2 / \|\mathbf{U}^e\|_2$ 。 $\mathbf{U}^c$  和  $\mathbf{U}^e$  为计算值和解析解值列向量; $\|\cdot\|_2$  表示向量的 2 范数。

**算例 1** 拱形区域  $\Omega$ , 三条直角边固支,拱顶承受面力作用,各点坐标分别为  $O(-1,0), B(1,0), C(1,1), D(-1,1)$ ,如图 2 所示。拱顶曲线函数为抛物线  $y = 2 - x^2$ 。拱顶上的面力和体力分量由位移解析解  $u(x, y) = y(x^2 - 1)$  和  $v(x, y) = y(x^2 - 1)$  确定。

正则区域法计算时,弹性模量  $E = 1000 \text{ Pa}$ ,泊松比  $\mu = 0.3$ 。将不规则拱形区域  $\Omega$  嵌入最小规则矩形区域  $\Omega_0 = \{(x, y) : -1 < x < 1, 0 < y < 2\}$ ,如图 2 所示。数值计算时,在规则区域  $\Omega_0$  上布置  $m \times n$  个计算节点,直线边界上采用计算节点作为边界节点,在区域  $\Omega$  的不规则抛物线边界上,按照  $x$  方向等距布置  $2m$  个点作为边界节点。用于误差计算的不规则区域插值节点分布,如图 3 所示。

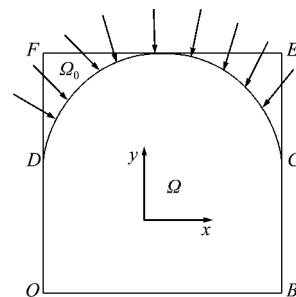


图2 拱形区域嵌入矩形区域

Fig. 2 Arch domain embedded rectangular region

在本文的数值算例中,不规则区域内的插值节点采用结构化的布置方式,这有利于计算结果的可视化绘图。不同数量计算节点的计算误差列入表1。由表1可知,采用 $5 \times 5$ 个计算节点即可达到极高的计算精度,随着计算节点数量的增加,计算精度有所降低。这是因为本算例的解为二次多项式,重心 Lagrange 插值为多项式插值,采用高次多项式近似低阶多项式的误差,随着近似多项式的次数增加而增大。

**算例 2** 花瓣形不规则区域,如图4所示,区域边界函数方程为 $\Omega = \{(x, y): (x-1)^2 + (y+1)^2 < \rho^2\}$ ,  $\rho = 1.0 + 0.3 \sin\{4 \arctan[(y+1)/(x-1)]\}$ 。位移边界条件和体力由位移解析解确定<sup>[18]</sup>,  $u(x, y) = \left(-2xy + \frac{\exp(x)}{\lambda + \mu}(\lambda + \mu)x - 3\mu - \lambda\right) \sin y$

表 1 拱形区域的位移绝对和相对误差  
Tab. 1 Computational errors of displacement by barycentric interpolation collocation method under different numbers of nodes in example 1

计算节点数 $m=n$	绝对误差 $E_a$	相对误差 $E_r$
5	$2.3750 \times 10^{-13}$	$1.0065 \times 10^{-14}$
11	$3.4157 \times 10^{-12}$	$1.4476 \times 10^{-13}$
15	$1.5458 \times 10^{-10}$	$6.5509 \times 10^{-12}$
21	$2.5137 \times 10^{-9}$	$1.0653 \times 10^{-10}$

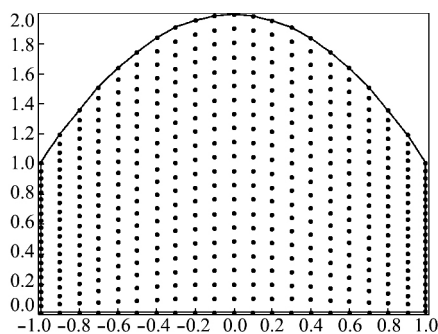


图 3 拱形区域插值节点分布图  
Fig. 3 Interpolated nodes in arch domain

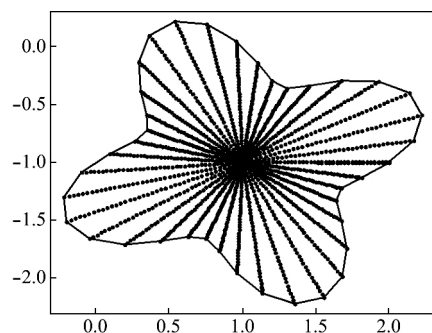


图 5 花瓣型区域插值节点分布图  
Fig. 5 Interpolated nodes in petals domain

$$v(x, y) = \frac{1}{\lambda + \mu} [(\lambda - \mu)y^2 + (\lambda + 3\mu)x^2] - \exp(x)(x \cos y + \sin x)$$

正则区域法计算时,取拉梅常数 $\lambda = 5.2, \mu = 12$ 。将花瓣形不规则平面区域 $\Omega$ 嵌入最小规则矩形区域 $\Omega_0 = \{-0.5 < x < 2.5, -2.5 < y < 0.5\}$ ,如图4所示。数值计算时,在规则区域 $\Omega_0$ 上布置 $m \times n$ 个计算节点,不规则区域 $\Omega$ 边界上按照曲线参数方程 $x = 1 + \rho(\theta) \cos \theta, y = -1 + \rho(\theta) \sin \theta, 0 \leq \theta < 2\pi$ 的参数 $\theta$ 等距布置 $2(m+n)$ 个边界节点。用于误差计算的不规则区域内的插值节点分布如图5所示。不同数量计算节点的计算误差列入表2。由表2可知,随着计算节点数量的增大,计算精度随之提高。

表 2 花瓣型区域的位移绝对和相对误差  
Tab. 2 Computational errors of displacement by barycentric interpolation collocation method under different numbers of nodes in example 2

计算节点数 $m=n$	绝对误差 $E_a$	相对误差 $E_r$
9	$1.3919 \times 10^{-3}$	$1.1896 \times 10^{-5}$
13	$1.3971 \times 10^{-7}$	$1.1941 \times 10^{-9}$
17	$1.1323 \times 10^{-10}$	$9.6777 \times 10^{-13}$
21	$7.4544 \times 10^{-10}$	$6.3709 \times 10^{-12}$

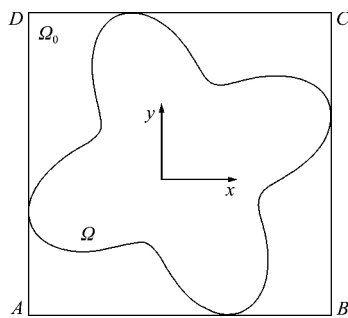


图 4 花瓣型区域嵌入矩形区域  
Fig. 4 Petals domain embedded rectangular region

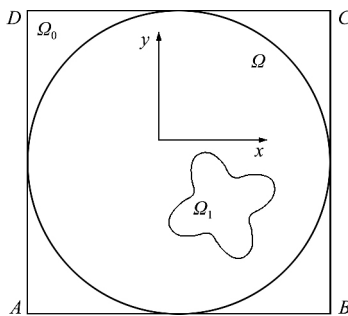


图 6 含有花瓣形孔洞的圆形域嵌入矩形区域  
Fig. 6 Circular domain with a petal-shaped holes embedded rectangular region

**算例 3** 圆域含有花瓣型孔洞的多连通区域  $\Omega = \Omega_2 \setminus \Omega_1$ , 如图 6 所示, 花瓣型孔洞区域  $\Omega_1$  的边界曲线参数方程为

$$x = 1 + (1 + 0.3\sin(4\theta))\cos\theta$$

$$y = -1 + (1 + 0.3\sin(4\theta))\sin\theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

圆形区域  $\Omega_2$  的边界曲线方程为  $x^2 + y^2 = 3.5^2$ 。位移边界条件和体力分量由位移解析解确定<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} u(x, y) &= -y(2x + y) - \exp(y)\sin(x) + \\ &\quad \exp(x)[\lambda + 3\mu + (\mu - \lambda)x]/(\lambda + \mu) \\ v(x, y) &= \exp(y)\cos(x) - x\exp(x)\cos(y) + \\ &\quad [(\lambda + 3\mu)x^2 + (\lambda - \mu)y^2 + 2\mu xy]/ \\ &\quad (\lambda + \mu) \end{aligned}$$

正则区域法计算时, 取拉梅常数  $\lambda = 5.2, \mu = 12$ 。将不规则区域  $\Omega$  嵌入最小规则矩形区域  $\Omega_0 = \{-3.5 < x < 3.5, -3.5 < y < 3.5\}$ , 如图 6 所示。数值计算时, 在规则区域  $\Omega_0$  上布置  $m \times n$  个计算节点, 不规则区域  $\Omega$  的外边界上布置  $2(m+n)$  个边界节点, 内边界上布置  $m+n$  个边界节点。用于误差计算的不规则区域  $\Omega$  的插值节点分布如图 7 所示。不同数量计算节点的计算误差列入表 3。由表 3 可知, 重心插值配点法具有极高的计算精度。重心 Lagrange 插值配点法计算的不规则区域在  $x, y$  方向位移等值线图分别如图 8 和图 9 所示。

表 3 圆域含有花瓣型孔洞的位移绝对和相对误差  
Tab. 3 Computational error of displacement by barycentric interpolation collocation method under different types and numbers of nodes in example 3

计算节点数 $m=n$	绝对误差 $E_a$	相对误差 $E_r$
17	$4.6793 \times 10^{-7}$	$5.8865 \times 10^{-10}$
21	$2.5344 \times 10^{-10}$	$3.1883 \times 10^{-13}$
27	$4.9887 \times 10^{-10}$	$6.2758 \times 10^{-13}$
29	$5.2532 \times 10^{-10}$	$6.6085 \times 10^{-13}$

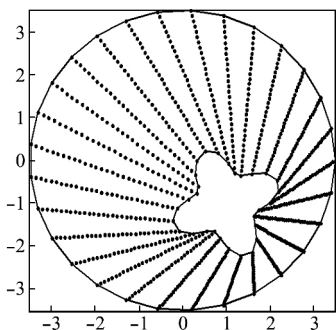


图 7 带有花瓣形孔洞的圆形域计算节点分布图  
Fig. 7 Interpolated nodes in circular domain with a petal-shaped hole

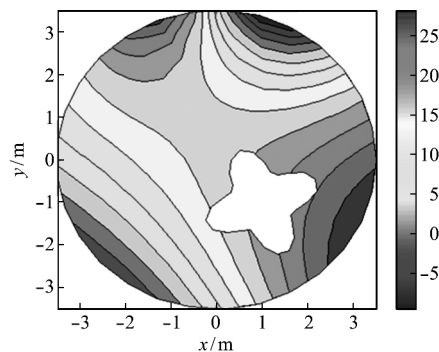


图 8 含有花瓣形空洞的圆形域  $x$  方向位移数值计算等值线图  
Fig. 8 Contours of displacement in  $x$  direction for circular domain with a petal-shaped hole

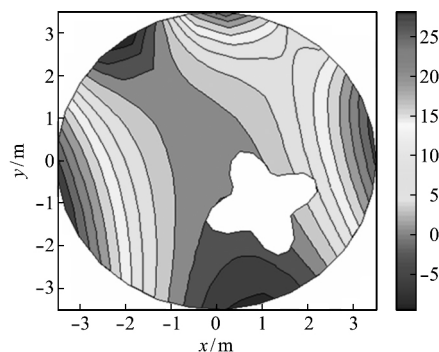


图 9 含有花瓣形空洞的圆形域  $y$  方向位移数值计算等值线图  
Fig. 9 Contours of displacement in  $y$  direction for circular domain with a petal-shaped hole

## 5 结 论

重心插值配点法求解不规则区域上的弹性问题, 具有类似谱方法的高精度。采用较少数量的节点进行计算, 即可实现极高的计算精度。重心插值配点法是一种真正意义上的无网格方法, 计算过程不需要背景网格的数值积分。重心插值配点法既可以求解简单的单连通区域问题, 也可以求解多连通区域问题。

矩阵-向量形式表达的计算公式, 极大地简化了编写计算程序的复杂性。附加法施加边界条件, 就是组合离散控制方程和边界条件为过约束代数方程, 该方法可以实现任意边界条件的施加。

采用正则区域法计算时, 应选取包含物理区域的最小的正则区域作为计算区域。数值试验表明, 采用最小的正则区域, 可以提高计算精度。对于多连通域上的弹性问题, 也可以采用极坐标下的正则区域法求解<sup>[13,14]</sup>。应当注意的是, 在极坐标系下的正则区域为圆、扇形或环形区域。

## 参考文献(References):

- [1] 侯祥林, 李琦, 郑夕健. 按位移求解弹性力学平面问题的解析构造解研究[J]. 计算力学学报, 2015,

- 32(3): 411-417. (HOU Xiang-lin, LI Qi, ZHENG Xi-jian. Study on analytic construction solutions about solving elasticity plane problems by displacement method[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, 32(3): 411-417. (in Chinese))
- [2] 卞正宁, 杜世森, 罗建辉. 弹性力学问题的一阶有限元解法[J]. 计算力学学报, 2015, 32(4): 544-547. (BI-AN Zheng-ning, DU Shi-sen, LUO Jian-hui. First-order finite element method for elasticity[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2015, 32(4): 544-547. (in Chinese))
- [3] 方锡武, 贾丙辉. 非匹配结点的有限单元等参插值方法及其应用研究[J]. 计算力学学报, 2017, 34(1): 43-48. (FANG Xi-wu, JIA Bing-hui. Research on isoparametric interpolation for finite element with non-matching nodes and its application[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2017, 34(1): 43-48. (in Chinese))
- [4] Zhang J, Qin X, Han X, et al. A boundary face method for potential problems in three dimensions[J]. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 2009, 80(3): 320-337.
- [5] Opršal I, Zahradník J. Elastic finite-difference method for irregular grids[J]. *Geophysics*, 1999, 64(1): 240-250.
- [6] 张 雄, 刘 岩, 马 上. 无网格法的理论及应用[J]. 力学进展, 2009, 39(1): 1-36. (ZHANG Xiong, LIU Yan, MA Shang. Meshfree methods and their applications [J]. *Advances in Mechanics*, 2009, 39(1): 1-36. (in Chinese))
- [7] Kee B B T, Liu G R, Lu C. A least-square radial point collocation method for adaptive analysis in linear elasticity[J]. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 2008, 32(6): 440-460.
- [8] Weideman J A C, Reddy S C. A MATLAB differentiation matrix suite[J]. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 2000, 26(4): 465-519.
- [9] Ma H, Qin Q H. An interpolation-based local differential quadrature method to solve partial differential equations using irregularly distributed nodes [J]. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 2008, 24(7): 573-584.
- [10] Jiang J, Wang Z Q, Wang J H, et al. Barycentric rational interpolation iteration collocation method for solving nonlinear vibration problems[J]. *Journal of Computational and Nonlinear Dynamics*, 2016, 11(2), 021001(1-13).
- [11] 王兆清, 庄美玲, 姜 剑. 非线性 MEMS 微梁的重心有理插值迭代配点法分析[J]. 固体力学学报, 2015, 36(5): 453-459. (WANG Zhao-qing, ZHUANG Mei-ling, JIANG Jian. Nonlinear MEMS microbeam analysis by barycentric rational interpolation iteration collocation method[J]. *Chinese Journal of Solid Mechanics*, 2015, 36(5): 453-459. (in Chinese))
- [12] 王兆清, 綦甲帅, 唐炳涛. 奇异源项问题的重心插值数值解[J]. 计算物理, 2011, 28(6): 883-888. (WANG Zhao-qing, QI Jia-shuai, TANG Bing-tao. Numerical solution of singular source problems with barycentric interpolation[J]. *Chinese Journal of Computational Physics*, 2011, 28(6): 883-888. (in Chinese))
- [13] 李树忱, 王兆清, 袁 超. 极坐标系下弹性问题的重心插值配点法[J]. 中南大学学报(自然科学版), 2013, 44(5): 2031-2040. (LI Shu-chen, WANG Zhao-qing, YUAN Chao. Barycentric interpolation collocation method for solving elastic problems[J]. *Journal of Central South University (Science and Technology)*, 2013, 44(5): 2031-2040. (in Chinese))
- [14] Wang Z Q, Li S C, Ping Y, et al. A highly accurate regular domain collocation method for solving potential problems in the irregular doubly connected domains[J]. *Mathematical Problems in Engineering*, 2014: 397327.
- [15] 王兆清, 李淑萍. 非线性问题的重心插值配点法[M]. 北京: 国防工业出版社, 2015. (WANG Zhao-qing, LI Shu-ping. *Barycentric Interpolation Collocation Method for Nonlinear Problems* [M]. Beijing: National Defense Industry Press, 2015. (in Chinese))
- [16] 李树忱, 王兆清. 高精度无网格重心插值配点法[M]. 北京: 科学出版社, 2012. (LI Shu-chen, WANG Zhao-qing. *High Accuracy Meshless Center of Attaching Method* [M]. Beijing: Science Press, 2012. (in Chinese))
- [17] Schillinger D, Ruess, M, Zander, N, et al. Small and large deformation analysis with the p-and B-spline versions of the finite cell method[J]. *Computational Mechanics*, 2012, 50(4): 445-478.
- [18] Martins N F, Rebelo M. A meshfree method for elasticity problems with interfaces[J]. *Applied Mathematics and Computation*, 2013, 219(22): 10732-10745.

## A regular domain collocation method based on barycentric interpolation for solving plane elastic problems in irregular domains

WANG Zhao-qing<sup>\*1</sup>, JI Si-yuan<sup>1</sup>, XU Zi-kang<sup>1</sup>, LI Jin<sup>2</sup>

(1. Institute of Engineering Mechanics, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China;

2. School of Science, Shandong Jianzhu University, Jinan 250101, China)

**Abstract:** By embedding the irregular domain into a rectangular domain, the governing equations of plane elasticity problems in a rectangular domain are discretized by the differentiation matrices based on barycentric Lagrange interpolation to form a system of algebraic equations. Using barycentric interpolation to discrete boundary condition on the boundary nodes, the regular boundary conditions are imposed by replacement method, and the irregular boundary conditions are imposed by additional method to form an over-constrained linear system of algebraic equations. The least-squares method is applied to obtain the displacements on the regular domain. Any nodal displacements in the irregular region can be evaluated by interpolating with barycentric interpolation. The errors of the presented method are calculated in irregular region. The numerical examples demonstrate that the proposed method has advantages of simple computational formulations, being easy to program and high precision.

**Key words:** irregular domain; plane elastic problem; regular domain collocation method; barycentric Lagrange interpolation; differential matrix; collocation method; least-square method

---

引用本文/Cite this paper:

王兆清, 纪思源, 徐子康, 等. 不规则区域平面弹性问题的正则区域重心插值配点法[J]. 计算力学学报, 2018, 35(2): 195-201.

WANG Zhao-qing, JI Si-yuan, XU Zi-kang, et al. A regular domain collocation method based on barycentric interpolation for solving plane elastic problems in irregular domains[J]. *Chinese Journal of Computational Mechanics*, 2018, 35(2): 195-201.