应 用 数 学
MATHEMATICA APPLICATA
2007,20(4):739～747

平面弹性的一个新的Locking-free非协调有限元

陈绍春，肖留超
（郑州大学数学系，河南 郑州 450052）

摘要：针对平面弹性问题构造了一个Locking-free的矩形非协调有限元，并证明该有限元格式关于λ有一致最优收敛阶，其离散误差的能量模为$O(h^2)$，L^2模为$O(h^3)$．最后给出了数值实验对理论结果进行了验证．

关键词：平面弹性；Locking-free；非协调有限元
中图分类号：O242.21　　**AMS(2000)主题分类**：60N30
文献标识码：A　　**文章编号**：1001-9847(2007)04-0739-09

1. 引言

对于各向同性均匀介质的平面弹性问题，当材料的Lamé常数$\lambda \to \infty$时，即对于几乎不可压介质，通常低阶的协调有限元解，往往不再收敛到原问题的解，或者达不到最优收敛阶，这就是所谓的Locking现象[1~4,6]．原因在于，一方面是离散空间选得不适当，使得离散散度算子的核空间太小；另一方面，在通常的有限元分析中，其误差估计的系数是与λ有关的，当$\lambda \to \infty$时，该系数将趋向于无穷大．因此为克服Locking现象，就需要构造特殊的单元，使其解关于$\lambda \in (0,\infty)$一致收敛于原问题的解．为解决Locking现象，许多中外学者做了大量的研究工作，很多工作是基于混合有限元方法[1~2,7~8]；还有是基于通常的能量极小原理的有限元方法[4,9~10]．因为后一种途径需要求解的未知函数个数少，并且有限元方法形成的代数方程组的系数矩阵是正定的，给求解带来了很大的方便．这里考虑纯位移边界条件的平面弹性问题．鉴于高阶协调元需要的自由度个数较多，造成有限元格式过于复杂，且不便于应用；而非协调有限元具有自由度少的优点，我们基于能量极小原理，构造了一个Locking-free的矩形非协调有限元，并证明该有限元格式关于λ有一致最优收敛阶，其离散误差的能量模为$O(h^2)$，L^2模为$O(h^3)$．最后给出了数值实验对理论结果进行了验证．

2. 不完全双三次矩形元的构造

考虑下述各向同性且均匀介质的纯位移平面弹性问题：

$$\begin{cases} -\mu\Delta \boldsymbol{u} - (\mu+\lambda)\,\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{f}, & \text{in } \Omega, \\ \boldsymbol{u} = 0, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2.1}$$

其对应的变分问题为：求$\boldsymbol{u} \in V$，使得

* **收稿日期**：2007-04-06
基金项目：国家自然科学基金资助项目(10471133,10590353)
作者简介：陈绍春，男，汉，安徽人，教授，博士生导师，研究方向：有限元方法．

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v}),\forall\,\boldsymbol{v}\in V,\tag{2.2}$$

其中

$$V=(H_0^1(\Omega))^2,a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})=\int_\Omega\{\mu\mathrm{grad}\,\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{grad}\,\boldsymbol{v}+(\mu+\lambda)(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\}\mathrm{d}x$$

$$=\mu\int_\Omega\{\mathrm{grad}\,u_1\cdot\mathrm{grad}\,v_1+\mathrm{grad}\,u_2\cdot\mathrm{grad}\,v_2\}\mathrm{d}x+(\mu+\lambda)\int_\Omega(\mathrm{div}\,\boldsymbol{u})(\mathrm{div}\,\boldsymbol{v})\mathrm{d}x,\tag{2.3}$$

$$(\boldsymbol{f},\boldsymbol{v})=\int_\Omega\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x,\tag{2.4}$$

且 $\lambda\in(0,\infty)$, $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$, $0<\mu_1<\mu_2$，是 Lamé 常数，$\Omega\subset\mathbf{R}^2$ 是有界矩形区域. 由于双线性型(2.3)是 V-椭圆的，从而问题(2.1)存在唯一解.

本文采用 Ciarlet[5] 中的记号. 公式中的系数 C 在不同的地方取不同的常数，文中不作区别. 不失一般性，假定 $\partial\Omega$ 是由平行于 x 轴和 y 轴的线段组成，设 T_h 是区域 Ω 的拟一致矩形剖分. 任取单元 $K\in T_h$. 设中心点是 $a_0(x_0,y_0)$, x,y 方向的边长分别为 $2h_1$ 和 $2h_2$，四个顶点为 $a_i(x_i,y_i)$，四边是 l_i, $l_i=\overline{a_ia_{i+1}}(i=1,2,3,4,\mathrm{Mod}(4))$. 设参考单元 $\hat{K}=[-1,1]\times[-1,1]$ 在 (ξ,η) 平面上，中心是 $O(0,0)$，边长为 2，四边是 $\hat{l}_i(i=1,2,3,4)$. 在 $\hat{K}$ 上，定义有限元 $(\hat{K},\hat{P},\hat{\Sigma})$ 如下：令 $W_1(\hat{K})=(\hat{Q}_{32}/\{\xi\eta^2,\xi^2\eta\})\oplus\{\eta^3\}$, $W_2(\hat{K})=(\hat{Q}_{23}/\{\eta^3,\xi\eta^2\})\oplus\{\xi^3\}$，其中 $\hat{Q}_{ij}$ 表示对 ξ 次数不超过 i，对 η 次数不超过 j 的多项式空间. 形函数空间是

$$\hat{P}(\hat{K})=\{\hat{\boldsymbol{p}}\mid\hat{\boldsymbol{p}}\in W_1(\hat{K})\times W_2(\hat{K}),\mathrm{div}\,\hat{\boldsymbol{p}}\in P_1(\hat{K})\}.\tag{2.5}$$

设 $\hat{\boldsymbol{v}}=(\hat{v}_1,\hat{v}_2)^{\mathrm{T}}$，自由度取为

$$\hat{\Sigma}=\begin{cases}\dfrac{1}{|\hat{l}_i|}\displaystyle\int_{\hat{l}_i}\hat{v}_j\mathrm{d}\hat{s},i=1,2,3,4;j=1,2;\dfrac{1}{|\hat{l}_i|}\displaystyle\int_{\hat{l}_i}\hat{v}_j\xi\mathrm{d}\hat{s},i=1,3;j=1,2;\\[2ex]\dfrac{1}{|\hat{l}_i|}\displaystyle\int_{\hat{l}_i}\hat{v}_j\eta\mathrm{d}\hat{s},i=2,4;j=1,2;\dfrac{1}{|\hat{K}|}\displaystyle\int_{\hat{K}}\hat{v}_j\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta,j=1,2.\end{cases}\tag{2.6}$$

上述有限元是适定的，且 $\hat{K}$ 上的插值函数可以表示为：$\forall\,\hat{\boldsymbol{v}}=(\hat{v}_1,\hat{v}_2)^{\mathrm{T}}\in(H^1(\hat{K}))^2$,

$$\begin{aligned}\hat{\Pi}\hat{\boldsymbol{v}}=&\sum_{i=1}^4\frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i}\hat{v}_1\mathrm{d}\hat{s}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_{1,i}+\sum_{i=1}^4\frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i}\hat{v}_2\mathrm{d}\hat{s}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_{2,i}\\&+\sum_{i=1,3}\frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i}\hat{v}_1\xi\mathrm{d}\hat{s}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_{1,i+4}++\sum_{i=2,4}\frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i}\hat{v}_1\eta\mathrm{d}\hat{s}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_{1,i+4}\\&+\sum_{i=1,3}\frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i}\hat{v}_2\xi\mathrm{d}\hat{s}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_{2,i+4}++\sum_{i=2,4}\frac{1}{|\hat{l}_i|}\int_{\hat{l}_i}\hat{v}_2\eta\mathrm{d}\hat{s}\cdot\hat{\boldsymbol{q}}_{2,i+4}\\&+\frac{1}{|\hat{K}|}\int_{\hat{K}}\hat{v}_1\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}_1+\frac{1}{|\hat{K}|}\int_{\hat{K}}\hat{v}_2\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\,\hat{\boldsymbol{\varphi}}_2,\end{aligned}\tag{2.7}$$

其中

$$\hat{\boldsymbol{q}}_{1,1}=\left(-\frac14+\frac34\eta+\frac34\eta^2-\frac54\eta^3,0\right)^{\mathrm{T}},\hat{\boldsymbol{q}}_{1,3}=\left(-\frac14-\frac34\eta+\frac34\eta^2+\frac54\eta^3,0\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\boldsymbol{q}}_{1,2}=\left(-\frac14+\frac{13}{16}\xi+\frac34\xi^2+\frac{5}{24}\xi^3-\frac{25}{16}\xi^3\eta^2,-\frac{5}{16}\eta-\frac58\xi^2\eta+\frac{25}{16}\xi^2\eta^3\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\boldsymbol{q}}_{1,4}=\left(-\frac14-\frac{13}{16}\xi+\frac34\xi^2-\frac{5}{24}\xi^3+\frac{25}{16}\xi^3\eta^2,\frac{5}{16}\eta+\frac58\xi^2\eta-\frac{25}{16}\xi^2\eta^3\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{q}}_{1,5}=&\left(-\frac{15}{16}\xi-\frac{15}{4}\xi\eta-\frac58\xi^3+\frac{15}{4}\xi^3\eta+\frac{75}{16}\xi^3\eta^2,-\frac58+\frac{15}{16}\eta+\frac{15}{8}\xi^2+\frac{15}{8}\eta^2\right.\\&\left.+\frac{15}{8}\xi^2\eta-\frac{45}{8}\xi^2\eta^2-\frac{75}{16}\xi^2\eta^3\right)^{\mathrm{T}},\end{aligned}$$

$$\hat{q}_{1,6}=\left(\frac{15}{4}\eta-\frac{9}{4}\xi\eta-\frac{15}{4}\eta^3+\frac{15}{4}\xi^3\eta,-\frac{5}{8}+\frac{15}{8}\xi^2+\frac{15}{8}\eta^2-\frac{45}{8}\xi^2\eta^2\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{q}_{1,7}=\left(-\frac{15}{16}\xi+\frac{15}{4}\xi\eta-\frac{5}{8}\xi^3-\frac{15}{4}\xi^3\eta+\frac{75}{16}\xi^3\eta^2,\frac{5}{8}+\frac{15}{16}\eta-\frac{15}{8}\xi^2-\frac{15}{8}\eta^2\right.$$
$$\left.+\frac{15}{8}\xi^2\eta+\frac{45}{8}\xi^2\eta^2-\frac{75}{16}\xi^2\eta^3\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{q}_{1,8}=\left(\frac{15}{4}\eta+\frac{9}{4}\xi\eta-\frac{15}{4}\eta^3-\frac{15}{4}\xi^3\eta,\frac{5}{8}-\frac{15}{8}\xi^2-\frac{15}{8}\eta^2+\frac{45}{8}\xi^2\eta^2\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{q}_{2,1}=\left(\frac{5}{16}\xi-\frac{5}{24}\xi^3-\frac{5}{16}\xi^3\eta^2,-\frac{1}{4}-\frac{13}{16}\eta+\frac{3}{4}\eta^2+\frac{5}{8}\xi^2\eta+\frac{5}{16}\xi^2\eta^3\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{q}_{2,2}=\left(0,-\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\xi+\frac{3}{4}\xi^2+\frac{5}{4}\xi^3\right)^{\mathrm{T}},\hat{q}_{2,4}=\left(0,-\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\xi+\frac{3}{4}\xi^2-\frac{5}{4}\xi^3\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{q}_{2,3}=\left(-\frac{5}{16}\xi+\frac{5}{24}\xi^3+\frac{5}{16}\xi^3\eta^2,-\frac{1}{4}+\frac{13}{16}\eta+\frac{3}{4}\eta^2-\frac{5}{8}\xi^2\eta-\frac{5}{16}\xi^2\eta^3\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{q}_{2,5}=\left(\frac{5}{8}-\frac{15}{8}\xi^2-\frac{15}{8}\eta^2+\frac{45}{8}\xi^2\eta^2,\frac{15}{4}\xi+\frac{9}{4}\xi\eta-\frac{15}{4}\xi^3-\frac{15}{4}\xi\eta^3\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{q}_{2,6}=\left(\frac{5}{8}+\frac{15}{16}\xi-\frac{15}{8}\xi^2-\frac{15}{8}\eta^2-\frac{5}{8}\xi^3+\frac{45}{8}\xi^2\eta^2-\frac{15}{16}\xi^3\eta^2,-\frac{15}{16}\eta+\frac{15}{4}\xi\eta\right.$$
$$\left.+\frac{15}{8}\xi^2\eta-\frac{15}{4}\xi\eta^3+\frac{15}{16}\xi^2\eta^3\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{q}_{2,7}=\left(-\frac{5}{8}+\frac{15}{8}\xi^2+\frac{15}{8}\eta^2-\frac{45}{8}\xi^2\eta^2,\frac{15}{4}\xi-\frac{9}{4}\xi\eta-\frac{15}{4}\xi^3+\frac{15}{4}\xi\eta^3\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{q}_{2,8}=\left(-\frac{5}{8}+\frac{15}{16}\xi+\frac{15}{8}\xi^2+\frac{15}{8}\eta^2-\frac{5}{8}\xi^3-\frac{45}{8}\xi^2\eta^2-\frac{15}{16}\xi^3\eta^2,-\frac{15}{16}\eta-\frac{15}{4}\xi\eta\right.$$
$$\left.+\frac{15}{8}\xi^2\eta+\frac{15}{4}\xi\eta^3+\frac{15}{16}\xi^2\eta^3\right)^{\mathrm{T}},$$

$$\hat{\varphi}_1=\left(2-\frac{3}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\eta^2,0\right)^{\mathrm{T}},\hat{\varphi}_2=\left(0,2-\frac{3}{2}\xi^2-\frac{3}{2}\eta^2\right)^{\mathrm{T}}.$$

参考元到一般单元的变换 $F_K:\hat{K}\to K$ 为：

$$\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=F_K\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}=B\begin{pmatrix}\xi\\\eta\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}x_0\\y_0\end{pmatrix},\tag{2.8}$$

其中

$$B=\begin{bmatrix}h_1&0\\0&h_2\end{bmatrix}.$$

再记 $h_K=\max(h_1,h_2),h=\max\limits_{K\in T_h}h_K$. 对 $\hat{K}$ 上任意的向量函数 $\hat{v}$，定义 $\hat{v}$ 在 K 上的对应向量为

$$v=B\hat{v}=(h_1\hat{v}_1\circ F_K^{-1},h_2\hat{v}_2\circ F_K^{-1})^{\mathrm{T}},\tag{2.9}$$

一般单元 K 上的形函数空间为：

$$P(K)=\{p\mid p=B\hat{p}\circ F_K^{-1},\hat{p}\in\hat{P}(\hat{K})\}.\tag{2.10}$$

则 K 上的插值函数为：

$$\Pi_K v=B\hat{\Pi}\hat{v}\circ F_K^{-1}.\tag{2.11}$$

显然插值算子是仿射等价的，即

$$\widehat{\Pi_K \boldsymbol{v}} = B^{-1}\Pi_K \boldsymbol{v} = \hat{\Pi}\hat{\boldsymbol{v}}. \tag{2.12}$$

令 Π_h 定义为，$\forall \boldsymbol{v} \in (H^1(\Omega))^2$，

$$\Pi_h \boldsymbol{v}\mid_K = \Pi_K \boldsymbol{v}. \tag{2.13}$$

令非协调不完全双三次矩形元空间

$$V_h = \{\boldsymbol{v}_h \mid \boldsymbol{v}_h\mid_K \in P(K), \int_F \boldsymbol{v}_h \cdot \boldsymbol{q}\mathrm{d}s = 0, \forall F \subset \partial\Omega, \forall \boldsymbol{q} \in (P_1(F))^2\}. \tag{2.14}$$

3. 误差估计

令 $a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = \sum_K \int_K \{\mu \mathrm{grad}\boldsymbol{u}_h \cdot \mathrm{grad}\boldsymbol{v}_h + (\mu+\lambda)\mathrm{div}\boldsymbol{u}_h \cdot \mathrm{div}\boldsymbol{v}_h\}\mathrm{d}x$ 为定义在 V_h 上的双线性型，平面弹性问题(2.2)的非协调不完全双三次矩形元空间 V_h 中的逼近格式为：求 $\boldsymbol{u}_h \in V_h$，使得

$$a_h(\boldsymbol{u}_h, \boldsymbol{v}_h) = (\boldsymbol{f}, \boldsymbol{v}_h), \forall \boldsymbol{v}_h \in V_h, \tag{3.1}$$

易证 $\|\boldsymbol{v}_h\|_h = a_h(\boldsymbol{v}_h, \boldsymbol{v}_h)^{\frac{1}{2}}$ 为 V_h 中的范数，因此逼近问题(3.1)有唯一解.

引理 1　下述插值误差成立：

$$\|\boldsymbol{v} - \Pi_K \boldsymbol{v}\|_{0,K} + h_K \mid \boldsymbol{v} - \Pi_K \boldsymbol{v}\mid_{1,K} \leqslant Ch_K^3 \mid \boldsymbol{v}\mid_{3,K}, \forall \boldsymbol{v} \in (H^3(K))^2, \tag{3.2}$$

其中 $C = \mathrm{const} > 0$ 与 h_K，K 无关.

证　由(2.9)，利用插值定理[3,5]，有

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{v} - \Pi_K \boldsymbol{v}\|_{0,K} + h_K \mid \boldsymbol{v} - \Pi_K \boldsymbol{v}\mid_{1,K} &\leqslant C(h_K \|B\| \, \|\hat{\boldsymbol{v}} - \widehat{\Pi_K \boldsymbol{v}}\|_{0,K} + h_K \|B\| \, \mid \hat{\boldsymbol{v}} - \widehat{\Pi_K \boldsymbol{v}}\mid_{1,K}) \\ &= Ch_K \|B\| (\|\hat{\boldsymbol{v}} - \hat{\Pi}\hat{\boldsymbol{v}}\|_{0,K} + \mid \hat{\boldsymbol{v}} - \hat{\Pi}\hat{\boldsymbol{v}}\mid_{1,K}) \\ &\leqslant Ch_K \|B\| \, \mid \hat{\boldsymbol{v}}\mid_{3,K} \leqslant Ch_K^3 \|B\| \, \|B^{-1}\| \, \mid \boldsymbol{v}\mid_{3,K} \\ &\leqslant Ch_K^3 \mid \boldsymbol{v}\mid_{3,K}.\end{aligned}$$

引理 2　设 $\Pi_{P_1}: L^2(K) \to P_1(K)$ 是 L^2 投影算子，即 $\int_K (\Pi_{P_1} w) p\mathrm{d}x = \int_K wp\mathrm{d}x, \forall w \in L^2(K), \forall p \in P_1(K)$，则有

$$\Pi_{P_1}\mathrm{div}\boldsymbol{v} = \mathrm{div}\Pi_K \boldsymbol{v}, \forall \boldsymbol{v} \in (L^2(\Omega))^2, \tag{3.3}$$

$$\|w - \Pi_{P_1} w\|_{0,K} \leqslant Ch_K^2 \mid w\mid_{2,K}. \tag{3.4}$$

证　$\forall p \in P_1(K)$，根据 Π_K 的定义有

$$\begin{aligned}\int_K (\mathrm{div}\Pi_K \boldsymbol{v}) p\mathrm{d}x &= \int_{\partial K} \Pi_K \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} p\mathrm{d}s - \int_K \Pi_K \boldsymbol{v} \cdot \nabla p\mathrm{d}x \\ &= \int_{\partial K} \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{n} p\mathrm{d}s - \int_K \boldsymbol{v} \cdot \nabla p\mathrm{d}x = \int_K (\mathrm{div}\ \boldsymbol{v}) p\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

因为 $\mathrm{div}\Pi_K \boldsymbol{v} \in P_1(K)$，所以 $\mathrm{div}\Pi_K \boldsymbol{v} = \Pi_{P_1}\mathrm{div}\boldsymbol{v}$. 由于算子 Π_K 对一次多项式 $p \in P_1(K)$ 保持不变，利用 Bramble-Hilbert 引理，及通常的仿射等价技巧[5]即可证明(3.4).

定理 1　设 $\boldsymbol{f} \in (L^2(\Omega))^2$，$\boldsymbol{u} \in (H^3(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ 为问题(2.2)的解，$\boldsymbol{u}_h$ 是逼近问题(3.1)的解. 假定弹性问题(2.1)的解满足正则性条件

$$\|\boldsymbol{u}\|_{3,\Omega} + \lambda \|\mathrm{div}\ \boldsymbol{u}\|_{2,\Omega} \leqslant C, \tag{3.5}$$

则有下面的误差估计：

$$\|\boldsymbol{u} - \boldsymbol{u}_h\|_h \leqslant Ch^2, \tag{3.6}$$

其中常数 $C > 0$ 且与 h 及 λ 无关.

证　由 Strang 第二引理[5]

$$\| \boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h \|_h \leqslant C\left\{ \inf_{\boldsymbol{v}\in V_h} \| \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \|_h + \sup_{\boldsymbol{v}\in V_h\setminus\{0\}} \frac{\left| a_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x \right|}{\| \boldsymbol{v} \|_h} \right\}. \tag{3.7}$$

1)逼近误差：

$$\begin{aligned} \inf_{\boldsymbol{v}\in V_h} \| \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \|_h &\leqslant \| \boldsymbol{u}-\Pi_h\boldsymbol{u} \|_h \\ &= \{ \sum_K [\mu \mid \boldsymbol{u}-\Pi_K\boldsymbol{u} \mid_{1,K} + (\mu+\lambda) \| \operatorname{div}(\boldsymbol{u}-\Pi_K\boldsymbol{u}) \|_{0,K}]\}^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

对第一项：

$$\begin{aligned} \mid \boldsymbol{u}-\Pi_K\boldsymbol{u} \mid_{1,K} &= \mid B\hat{\boldsymbol{u}} - B\hat{\Pi}_{\hat{K}}\hat{\boldsymbol{u}} \mid_{1,\hat{K}} \\ &\leqslant C\| B \| \ \| B^{-1} \| h_K^2 \mid \boldsymbol{u} \mid_{3,K} \leqslant Ch_K^2 \mid \boldsymbol{u} \mid_{3,\hat{K}}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

对第二项：由引理 2，

$$\| \operatorname{div}(\boldsymbol{u}-\Pi_K\boldsymbol{u}) \|_{0,K} = \| \operatorname{div} \boldsymbol{u} - \Pi_{P_1} \operatorname{div} \boldsymbol{v} \|_{0,K} \leqslant Ch_K^2 \mid \operatorname{div} \boldsymbol{u} \mid_{2,K}. \tag{3.10}$$

将(3.9)～(3.10)代入(3.8)，且 $\mu\in[\mu_1,\mu_2]$ 是大于零的常数，得

$$\begin{aligned} \inf_{\boldsymbol{v}\in V_h} \| \boldsymbol{u}-\boldsymbol{v} \|_h &\leqslant Ch^2\Big[\sum_{K\in T_h}(\mid \boldsymbol{u} \mid_{3,K}^2 + \lambda \mid \operatorname{div} \boldsymbol{u} \mid_{2,K}^2)\Big]^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant Ch^2(\mid \boldsymbol{u} \mid_{3,\Omega} + \lambda \mid \operatorname{div} \boldsymbol{u} \mid_{2,\Omega}). \end{aligned} \tag{3.11}$$

2)相容误差：由(3.2)和 Green 公式，$\forall \boldsymbol{v}\in V_h$，

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) &= a_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) - \int_\Omega \boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x \\ &= \sum_K \Big[\int_K \mu \operatorname{grad} \boldsymbol{u}\cdot\operatorname{grad} \boldsymbol{v}\mathrm{d}x + (\mu+\lambda)\int_K (\operatorname{div} \boldsymbol{u})(\operatorname{div} \boldsymbol{v})\mathrm{d}x\Big] \\ &\quad - \sum_K \int_K [-\mu\Delta\boldsymbol{u} - (\mu+\lambda)\operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{u})]\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}x \\ &= \sum_K \Big[\mu\int_{\partial K} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}s + (\mu+\lambda)\int_{\partial K} (\operatorname{div} \boldsymbol{u})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}x\Big]. \end{aligned} \tag{3.12}$$

定义算子 $P_0^F v = \frac{1}{\mid F\mid}\int_F v\mathrm{d}s$，令 $\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n} = \boldsymbol{w}$，由单元构造知，对 $\forall p\in(P_1(K))^2$，$\int_{\partial K}\boldsymbol{v}\cdot p\mathrm{d}s$ 跨过单元连续，在 $\partial\Omega$ 上为 0. 令 $I_h(w)$ 为以函数 $w\in H^2(\Omega)$ 在单元顶点上的函数值构成的分片双线性插值函数，则 $I_h(w)\in C^0(\Omega)$. 利用迹定理和插值定理[5]得

$$\begin{aligned} \left| \sum_K \int_{\partial K} \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial n}\cdot\boldsymbol{v}\mathrm{d}s \right| &= \left| \sum_K \sum_{F\subset\partial K} \int_F (\boldsymbol{w} - I_h(\boldsymbol{w}))\cdot(\boldsymbol{v} - P_0^F(\boldsymbol{v}))\mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant C\sum_K \sum_{F\subset\partial K} h_K \| B\hat{\boldsymbol{w}} - \hat{I}_h(B\hat{\boldsymbol{w}}) \|_{0,\hat{F}} \| B\hat{\boldsymbol{v}} - \widehat{P_0^F}(B\hat{\boldsymbol{v}}) \|_{0,\hat{F}} \\ &\leqslant C\sum_K h_K \mid B\hat{\boldsymbol{w}} \mid_{2,\hat{K}} \mid B\hat{\boldsymbol{v}} \mid_{1,\hat{K}} \leqslant Ch^2 \sum_K \mid \boldsymbol{w} \mid_{2,K} \mid \boldsymbol{v} \mid_{1,K} \\ &\leqslant Ch^2 \mid \boldsymbol{u} \mid_{3,\Omega} \| \boldsymbol{v} \|_h. \end{aligned} \tag{3.13}$$

类似地，

$$\begin{aligned} \left| \sum_K \int_{\partial K} (\operatorname{div} \boldsymbol{u})\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s \right| &= \left| \sum_K \sum_{F\subset\partial K} \int_F (\operatorname{div} \boldsymbol{u} - I_h(\operatorname{div} \boldsymbol{u}))(\boldsymbol{v} - P_0^F\boldsymbol{v})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s \right| \\ &\leqslant Ch^2 \mid \operatorname{div} \boldsymbol{u} \mid_{2,\Omega} \| \boldsymbol{v} \|_h. \end{aligned} \tag{3.14}$$

将(3.13)～(3.14)代入(3.12)得

$$\mathrm{E}_h(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}) \leqslant Ch^2(\mid \boldsymbol{u} \mid_{3,\Omega} + \lambda \mid \operatorname{div} \boldsymbol{u} \mid_{2,\Omega}). \tag{3.15}$$

由(3.12),(3.15)和正则性可得(3.6),定理证毕.

引理 3 设 $u \in (H^3(K))^2, v \in (H^1(K))^2, K \in T_h, e \subset \partial K$,则存在与 K 无关的常数 C,使得

$$\left|\int_e v \cdot (u - \Pi_K u)\mathrm{d}s\right| \leqslant Ch_K^3 \mid v \mid_{1,K} \mid u \mid_{3,K}. \tag{3.16}$$

证 设 $\hat{e} \subset \partial \hat{K}, e = F_K(\hat{e})$,令

$$b(\hat{v},\hat{u}) = \int_{\hat{e}} \hat{v} \cdot (\hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u})\mathrm{d}\hat{s}. \tag{3.17}$$

由迹定理及插值定理有

$$\mid b(\hat{v},\hat{u}) \mid \leqslant \| \hat{v} \|_{0,\hat{e}} \| \hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u} \|_{0,\hat{e}} \leqslant \| \hat{v} \|_{1,\hat{K}} \| \hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u} \|_{1,\hat{K}} \leqslant \| \hat{v} \|_{1,\hat{K}} \| \hat{u} \|_{3,\hat{K}},$$

即 $b(\cdot,\cdot)$ 定义了 $(H^1(\hat{K}))^2 \times (H^3(\hat{K}))^2$ 上的一个有界双线性型.根据插值算子 $\hat{\Pi}$ 的性质得

$$b(\hat{v},\hat{q}) = 0, \forall \hat{v} \in (H^1(\hat{K}))^2, \forall \hat{q} \in (P_2(\hat{K}))^2,$$
$$b(\hat{p},\hat{u}) = 0, \forall \hat{p} \in (P_0(\hat{K}))^2, \forall \hat{u} \in (H^3(\hat{K}))^2,$$

由双线性引理[5]可知

$$\mid b(\hat{v},\hat{u}) \mid \leqslant C \mid \hat{v} \mid_{1,\hat{K}} \mid \hat{u} \mid_{3,\hat{K}}. \tag{3.18}$$

再利用剖分的正则性可得

$$\begin{aligned}\left|\int_e v \cdot (u - \Pi_K u)\mathrm{d}s\right| &= \frac{\mid e \mid}{\mid \hat{e} \mid}\left|\int_{\hat{e}} B\hat{v} \cdot B(\hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u})\mathrm{d}\hat{s}\right| \\ &= \frac{\mid e \mid}{\mid \hat{e} \mid}\left|\int_{\hat{e}} \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 \\ 0 & h_2^2 \end{pmatrix} \hat{v} \cdot (\hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u})\mathrm{d}s\right| \\ &\leqslant Ch_K \int_{\hat{e}} \hat{v}_1 \cdot (\hat{u} - \hat{\Pi}\hat{u})\mathrm{d}\hat{s} = Ch_K b(\hat{v}_1,\hat{u}) \\ &\leqslant Ch_K^3 \mid v \mid_{1,K} \mid u \mid_{3,K},\end{aligned}$$

其中,$\hat{v}_1 = \begin{pmatrix} h_1^2 & 0 \\ 0 & h_2^2 \end{pmatrix} \hat{v}$.

定理 2 在定理 1 的条件下,下面的误差估计成立:

$$\| u - u_h \|_{0,\Omega} \leqslant Ch^3, \tag{3.19}$$

其中常数 $C > 0$ 且与 h 及 λ 无关.

证 按照范数的定义,有

$$\| u - u_h \|_{0,\Omega} = \sup_{0 \neq w \in (L^2(\Omega))^2} \frac{\mid \int_\Omega (u - u_h) \cdot w\mathrm{d}x \mid}{\| w \|_{0,\Omega}}. \tag{3.20}$$

对给定的 $w \in (L^2(\Omega))^2$,设 $\zeta \in (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega))^2$ 是下列问题的解

$$\begin{cases} -\mu\Delta\zeta - (\mu + \lambda)\mathrm{grad}(\mathrm{div}\,\xi) = w, & \text{in } \Omega, \\ \zeta = \mathbf{0}, & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \tag{3.21}$$

则 ζ 满足变分方程

$$a(\xi, v) = \int_\Omega w \cdot v\mathrm{d}x, \forall v \in V. \tag{3.22}$$

$\zeta_h \in V_h$ 是如下离散方程的解

$$a_h(\zeta_h, v) = \int_\Omega w \cdot v\mathrm{d}x, \forall v \in V_h. \tag{3.23}$$

由通常的非协调误差估计和方程的正则性[4],存在与 h 无关的常数 C,使得

$$\|\boldsymbol{\zeta}\|_{2,\Omega}+\lambda\|\operatorname{div}\boldsymbol{\zeta}\|_{1,\Omega}\leqslant C\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega}, \tag{3.24}$$

$$\|\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}_h\|_h\leqslant Ch\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega}, \tag{3.25}$$

$$\begin{aligned}\left|\int_\Omega(\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)\cdot\mathrm{w}\mathrm{d}x\right| &= |a_h(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}_h,\boldsymbol{u}-\Pi_h\boldsymbol{u})+a_h(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}_h,\Pi_h\boldsymbol{u})\\ &\quad+a_h(\boldsymbol{\zeta}_h-\Pi_h\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)+a_h(\Pi_h\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)|\\ &\leqslant\|\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}_h\|_h\|\boldsymbol{u}-\Pi_h\boldsymbol{u}\|_h+\|\boldsymbol{\zeta}_h-\Pi_h\boldsymbol{\zeta}\|_h\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_h\\ &\quad+|a_h(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}_h,\Pi_h\boldsymbol{u})|+|a_h(\Pi_h\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)|.\end{aligned} \tag{3.26}$$

由(3.8),(3.25)得 $\|\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}_h\|_h\|\boldsymbol{u}-\Pi_h\boldsymbol{u}\|_h\leqslant Ch^3\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega}$,

$\|\boldsymbol{\zeta}_h-\Pi_h\boldsymbol{\zeta}\|_h\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_h\leqslant(\|\boldsymbol{\zeta}_h-\boldsymbol{\zeta}\|_h+\|\boldsymbol{\zeta}-\Pi_h\boldsymbol{\zeta}\|_h)\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_h\leqslant Ch^3\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega}$.

对于(3.26)式的后两项利用 Green 公式及引理 3,正则性(3.5)(3.24),可得

$$\begin{aligned}|a_h(\boldsymbol{\zeta}-\boldsymbol{\zeta}_h,\Pi_h\boldsymbol{u})| &= \left|a_h(\boldsymbol{\zeta},\Pi_h\boldsymbol{u})-\int_\Omega\boldsymbol{w}\cdot\Pi_h\boldsymbol{u}\mathrm{d}x\right|\\ &\leqslant\mu\left|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(\operatorname{grad}\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{n}\cdot\Pi_h\boldsymbol{u}\mathrm{d}s\right|+(\mu+\lambda)\left|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(\operatorname{div}\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{n}\cdot\Pi_h\boldsymbol{u}\mathrm{d}s\right|\\ &=\mu\left|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(\operatorname{grad}\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{n}\cdot(\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u})\mathrm{d}s\right|\\ &\quad+(\mu+\lambda)\left|\sum_{K\in T_h}\int_{\partial K}(\operatorname{div}\boldsymbol{\zeta})\boldsymbol{n}\cdot(\Pi_h\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u})\mathrm{d}s\right|\\ &\leqslant Ch^3|\boldsymbol{u}|_{3,\Omega}(\|\boldsymbol{\zeta}\|_{2,\Omega}+\lambda\|\operatorname{div}\boldsymbol{\zeta}\|_{1,\Omega})\\ &\leqslant Ch^3\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega}.\end{aligned} \tag{3.27}$$

同理可证 $|a_h(\Pi_h\boldsymbol{\zeta},\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h)|\leqslant Ch^3\|\boldsymbol{w}\|_{0,\Omega}$, 从而得 $\|\boldsymbol{u}-\boldsymbol{u}_h\|_{0,\Omega}\leqslant Ch^3$.

4. 数值实验

考虑下面纯位移的齐次边界平面弹性问题:

$$\begin{cases}-\mu\Delta\boldsymbol{u}-(\mu+\lambda)\operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{u})=\boldsymbol{f} & \text{in } \Omega=[0,1]\times[0,1],\\ \boldsymbol{u}=0 & \text{on } \partial\Omega.\end{cases} \tag{4.1}$$

其中 $\boldsymbol{f}=(f_1,f_2)^{\mathrm{T}}$.

算例 1　取

$$f_1=\pi^2\left[4\sin2\pi y(-1+2\cos2\pi x)-\cos\pi(x+y)+\frac{2}{1+\lambda}\sin\pi x\sin\pi y\right],$$

$$f_2=\pi^2\left[-4\sin2\pi x(-1+2\cos2\pi y)-\cos\pi(x+y)+\frac{2}{1+\lambda}\sin\pi x\sin\pi y\right].$$

选取 $\mu=1$,可得到方程(4.1)的真解为:

$$u_1=\sin 2\pi y(-1+\cos2\pi x)+\frac{1}{1+\lambda}\sin\pi x\sin\pi y,$$

$$u_2=-\sin 2\pi x(-1+\cos2\pi y)+\frac{1}{1+\lambda}\sin\pi x\sin\pi y.$$

对 Ω 采用正则均匀剖分,设单元边长为 h,将每个小正方形沿一个方向剖分为两个三角形可得相应的三角形剖分. 在表 1~4 中分别列出了不同剖分尺度下,当 λ 取不同值时各个单元的 L^2 模、能量模误差.

表 1 18 自由度矩形元：$\| u-u_h \|_{0,\Omega}$

$n\times n$	8×8	16×16	32×32	64×64
$\lambda=1E0$	6.142651E-3	6.186388E-4	6.985179E-5	8.333318E-6
$\lambda=1E4$	6.357675E-3	6.252127E-4	6.999615E-5	8.328538E-6
$\lambda=1E8$	6.357760E-3	6.251194E-4	6.989440E-5	9.345298E-6

表 2 18 自由度矩形元：$\| u-u_h \|_{h,\Omega}$

$n\times n$	8×8	16×16	32×32	64×64
$\lambda=1E0$	3.820934E-1	8.577144E-2	1.956642E-2	4.642017E-3
$\lambda=1E4$	3.880816E-1	8.588486E-2	1.950425E-2	4.620000E-3
$\lambda=1E8$	3.880838E-1	8.588496E-2	1.950426E-2	4.622947E-3

表 3 C-R 元 $\| u-u_h \|_{0,\Omega}$

$n\times n$	8×8	16×16	32×32	64×64
$\lambda=1E0$	6.950815E-2	1.790365E-2	4.516291E-3	1.131893E-3
$\lambda=1E4$	7.031642E-2	1.837091E-2	4.656548E-3	1.168997E-3
$\lambda=1E8$	7.053239E-2	1.837119E-2	4.656432E-3	1.168650E-3

表 4 C—R 元：$\| u-u_h \|_{h,\Omega}$

$n\times n$	8×8	16×16	32×32	64×64
$\lambda=1E0$	2.382238E-0	1.207121E-0	6.057565E-1	3.031701E-1
$\lambda=1E4$	2.361003E-0	1.197003E-0	6.008141E-1	3.007209E-1
$\lambda=1E8$	2.361002E-0	1.197003E-0	6.008137E-1	3.007206E-1

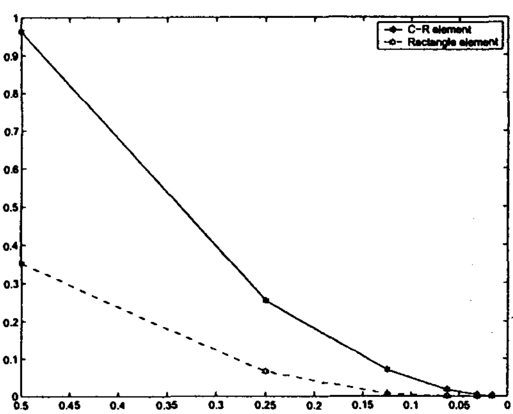

图 1 $\| u-u_h \|_{0,\Omega}$

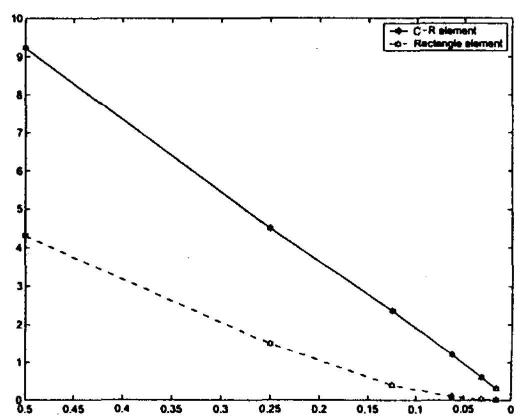

图 2 $\| u-u_h \|_{h,\Omega}$

从表 1～4 可以看出第二部分中构造的单元的 L^2 和能量模的收敛阶分别为 3 和 2，并且关于 λ 是一致收敛的. 显然，比 C-R 元的收敛阶都高. 图 1，图 2 表明 C-R 元的误差比较大，我们所构造的单元具有更好的逼近效果.

算例 2 设 $f_1=10000000, f_2=-10000000$. 方程(4.1)的解未知，我们给出了相邻两层网格有限元解之间的误差，见表 5～6.

表 5 18 自由度矩形元 ($\lambda=10^8$)

h_1-h_2	$\| u_{h_2} \|_{0,\Omega}$	$\dfrac{\| u_{h_2}-u_{h_1} \|_{0,\Omega}}{\| u_{h_2} \|_{0,\Omega}}$	$\lvert u_{h_2} \rvert_{1,\Omega}$	$\dfrac{\lvert u_{h_2}-u_{h_1} \rvert_{1,\Omega}}{\lvert u_{h_2} \rvert_{1,\Omega}}$
0.25—0.125	1.404687E-2	3.058954E-2	7.406028E-2	1.378250E-1

0. 125—0. 0625	1. 394533E-2	7. 281472E-3	7. 020303E-2	5. 494413E-2
0. 0625—0. 03125	1. 392050E-2	1. 783686E-3	6. 915918E-2	1. 509348E-2

表 6　C—R 元 ($\lambda = 10^8$)

$h_1 - h_2$	$\Vert u_{h_2} \Vert_{0,\Omega}$	$\frac{\Vert u_{h_2} - u_{h_1} \Vert_{0,\Omega}}{\Vert u_{h_2} \Vert_{0,\Omega}}$	$\vert u_{h_2} \vert_{1,\Omega}$	$\frac{\vert u_{h_2} - u_{h_1} \vert_{1,\Omega}}{\vert u_{h_2} \vert_{1,\Omega}}$
0. 25—0. 125	4. 1. 171749E+5	2. 542317E-0	2. 839803E+6	8. 549762E-1
0. 125—0. 0625	3. 055986E+4	2. 834275E-0	1. 455865E+6	9. 505950E-1
0. 0625—0. 03125	7. 748650E+3	2. 943887E-0	7. 338897E+5	9. 837654E-1

表 5～6 说明:当 λ 很大时,第二部分中的单元是收敛的,相对误差趋近于零;而 C-R 元的收敛效果变差. 从而进一步说明我们所构造的单元在求解精度和稳定性上的优势.

参考文献:

[1] Arnold D N, Falk R S. A new mixed formulation for elasticity[J]. Numer. Math., 1988, 53: 13～30.

[2] Arnold D N, Dougals J Jr, Gupta C P. A family of higher order mixed finite element methods for plane elasticity[J]. Numer. Math., 1984, 45: 1～22.

[3] Brenner S C, Scott L R. The Mathematical Theory of Finite Element Methods[M]. New York: Springer-Verlag, 1994.

[4] Brenner S C, Li Yungsung. Linear finite element methods for planar linear elasticity[J]. Math. Comp., 1992, 59(220): 321～330.

[5] Ciarlet P G. The Finite Element Method for Elliptic Problems[M]. New York: North-Holland, 1978.

[6] Fallk R S. Noncomforming finite element methods for the equations of linear elasticity[J]. Math. Comp., 1991, 57: 529～550.

[7] Stenberg R. A family of mixed finite elements for the elasticity problem[J]. Numer. Math., 1988, 53: 513～538.

[8] Stenberg R, Suri M. Mixed hp finite element methods for problems in elasticity and Stokes flow[J]. Numer. Math., 1996, 72: 367～390.

[9] Wang Lie-heng, Qi He. On locking-free finite element for the planar elasticity[J]. J. Comp. Math., 2005, 23: 101～112.

[10] 王烈衡,齐禾. 关于平面弹性问题 Locking-free 有限元格式[J]. 计算数学, 2002, 24(2): 243～256.

A New Locking-free Nonconforming Finite Element for the Planar Elasticity

CHEN Shao-chun, XIAO Liu-chao

(*Department of Mathematics, Zhengzhou University, Zhengzhou* 450052, *China*)

Abstract: A locking-free nonconforming rectangle finite element for the planar elasticity is presented. The finite element is uniformly optimal with respect to λ. The energy norm and L^2 norm errors are $O(h^2)$ and $O(h^3)$. We carry out the numerical test which coincides with our theoretical analysis.

Key words: Planar elasticity; Locking-free; Nonconforming finite element