弹性问题

2022 年 11 月 8 日

1 模型

令

$$\sigma(u) = 2\mu\epsilon(u) + \lambda tr(\epsilon(u))\delta$$
$$\epsilon(u) = \frac{1}{2}(gradu + (gradu)^t)$$
$$tr(\tau) = \tau_{11} + \tau_{22}$$
$$grad(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$
$$\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$div\tau = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix}$$

考察模型

$$-div\sigma(u) = f \quad \in \Omega$$
$$u|_\Gamma = 0$$

其中 $u = (u_1, u_2)^t$ 为求解向量，$f = (f_1, f_2)^t$ 为右端向量，$\Omega = [0,1] \times [0,1]$

$$f_1 = -((12x^2 - 12x + 2)(4y^3 - 6y^2 + 2y) + (x - x^2)^2(24y - 12))$$
$$f_2 = (24x - 12)(y - y^2)^2 + (4x^3 - 6x^2 + 2x)(12y^2 - 12y + 2)$$

2 变分

该问题的变分问题为，求 $u \in H^1(\Omega)$ 使得 $u|_{\Gamma_1} = g$，并且

$$a(u, \nu) = \int_\Omega f \cdot \nu dx \quad \forall \nu \in V$$

其中

$$a(u,\nu) := \int_\Omega (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(\nu) + \lambda divudiv\nu)dx$$
$$= \mu \int_\Omega \frac{\partial u_1}{\partial x}\frac{\partial \nu_1}{\partial x} + \frac{\partial u_1}{\partial y}\frac{\partial \nu_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}\frac{\partial \nu_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial \nu_2}{\partial y} dx$$
$$+(\mu + \lambda)\int_\Omega (\frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y})(\frac{\partial \nu_1}{\partial x}\frac{\partial \nu_2}{\partial y})dx$$
$$V := \{\nu \in H^1(\Omega) \quad | \quad \nu|_{\Gamma_1} = 0\}$$

3 三角形元

3.1 面积坐标

设 $\triangle(i,j,k)$ 是以 i,j,k 为定点的任意三角型元，面积为 S。在 $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ 内任取一点 p_3，坐标为 (x,y)。过 p_3 点作与三个顶点的连线，将 $\triangle(p_0,p_1,p_2)$ 分成三个三角形 (图 1): $\triangle(p_1,p_2,p_3), \triangle(p_0,p_3,p_2), \triangle(p_0,p_1,p_3)$，其面积分别为 S_0, S_1, S_2

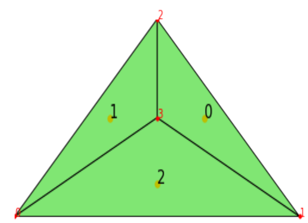

图 1

显然 $S_0 + S_1 + S_2 = S$，令

$$L_0 = \frac{S_0}{S}, \quad L_1 = \frac{S_1}{S}, \quad L_2 = \frac{S_2}{S}$$

称 (L_0, L_1, L_2) 位 P_3 的面积坐标，其中

$$\begin{cases} 2S = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}, & 2S_0 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\ 2S_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}, & 2S_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix} \end{cases}$$

由此可得面积坐标和直角坐标的转化关系

$$\begin{cases} x = x_0L_0 + x_1L_1 + x_2L_2 \\ y = y_0L_0 + y_1L_1 + x_2L_2 \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
L_0 = \frac{1}{2S}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\
L_1 = \frac{1}{2S}[(x_3y_0 - x_0y_3) + (y_3 - y_0)x + (x_0 - x_3)y] \\
L_2 = \frac{1}{2S}[(x_0y_1 - x_1y_0) + (y_0 - y_1)x + (x_1 - x_0)y]
\end{cases}
$$

3.2 Lagrange 型公式

在三角型元 $\triangle(0,1,2)$ 上构造插值多项式

$$
p_m(x,y) = \sum_{i+j=0}^{m} c_{ij}x^iy^j
$$

易知 $p_m \in H^1$，当 m=1 时，有待定系数法得

$$
p_1(x,y) = L_0u_0 + L_1u_1 + L_2u_2
$$

从公式可知 L_i 即为对应节点的基函数在单元 $\triangle(0,1,2)$ 上的限制。

4 刚度矩阵

4.1 剖分

对区间 Ω 按图 2 方式剖分，并对节点和区间进行编号，各节点坐标为 (x_i, y_i)，i=0, ... , n

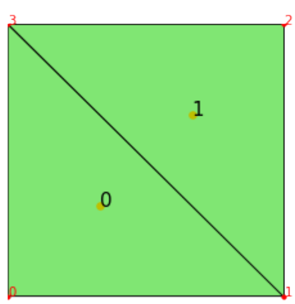

图 2

4.2 总刚度矩阵

设 $\phi_i = (\phi_i^{(1)}, \phi_i^{(2)})^t$，i = 0, ... , n 为试探函数空间 U_h 的基函数，则任一 $u_h \in U_h$ 可表成

$$
u_h = \sum_{i=1}^{n} u_i\phi_i, \quad u_i = u_h(x_i, y_i)
$$

带入变分形式得

$$
\sum_{j=0}^{n} a(\phi_j, \phi_i)u_i = (f, \phi_i) \quad i = 0, ..., n
$$

4.3 单元刚度矩阵