弹性问题

2022 年 11 月 9 日

1 模型

令

$$
\begin{gathered}
\sigma(u) = 2\mu\epsilon(u) + \lambda tr(\epsilon(u))\delta \\
\epsilon(u) = \tfrac{1}{2}(gradu + (gradu)^t) \\
tr(\tau) = \tau_{11} + \tau_{22} \\
grad(u) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} \\
\delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
div\tau = \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} \end{pmatrix}
\end{gathered}
$$

考察模型

$$
\begin{gathered}
-div\sigma(u) = f \quad \in \Omega \\
u|_{\Gamma_1} = 0
\end{gathered}
$$

其中 $u = (u_1, u_2)^t$ 为求解向量，$f = (f_1, f_2)^t$ 为右端向量，$\Omega = [0,1] \times [0,1]$，$\Gamma_1 = [x, 0]$

$$
\begin{gathered}
f_1 = -((12x^2 - 12x + 2)(4y^3 - 6y^2 \\
+2y) + (x - x^2)^2(24y - 12)) \\
f_2 = (24x - 12)(y - y^2)^2 + (4x^3 \\
-6x^2 + 2x)(12y^2 - 12y + 2)
\end{gathered}
$$

2 变分

该问题的变分问题为，求 $u \in H^1(\Omega)$ 使得 $u|_{\Gamma_1} = g$，并且

$$
a(u, \nu) = \int_\Omega f \cdot \nu dx \quad \forall \nu \in V
$$

其中

$$
\begin{gathered}
a(u, \nu) := \int_\Omega (2\mu\epsilon(u) : \epsilon(\nu) + \lambda divudiv\nu)dx \\
V := \{\nu \in H^1(\Omega) \quad | \quad \nu|_{\Gamma_1} = 0\}
\end{gathered}
$$

3 三角形元

3.1 面积坐标

设 $\triangle(i, j, k)$ 是以 i,j,k 为定点的任意三角型元，面积为 S。在 $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ 内任取一点 p_3，坐标为 (x,y)。过 p_3 点作与三个顶点的连线，将 $\triangle(p_0, p_1, p_2)$ 分成三个三角形 (图 1): $\triangle(p_1, p_2, p_3), \triangle(p_0, p_3, p_2), \triangle(p_0, p_1, p_3)$，其面积分别为 S_0, S_1, S_2

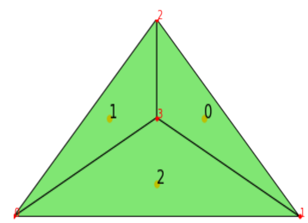

图 1

显然 $S_0 + S_1 + S_2 = S$，令

$$
L_0 = \frac{S_0}{S}, \quad L_1 = \frac{S_1}{S}, \quad L_2 = \frac{S_2}{S}
$$

称 (L_0, L_1, L_2) 位 P_3 的面积坐标，其中

$$
\begin{cases}
2S = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad 2S_0 = \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix} \\
2S_1 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \end{vmatrix}, \quad 2S_2 = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & y_0 \\ 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \end{vmatrix}
\end{cases}
$$

由此可得面积坐标和直角坐标的转化关系

$$
\begin{cases}
x = x_0 L_0 + x_1 L_1 + x_2 L_2 \\
y = y_0 L_0 + y_1 L_1 + x_2 L_2
\end{cases}
$$

$$\begin{cases} L_0 = \frac{1}{2S}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_3)x + (x_3 - x_2)y] \\ L_1 = \frac{1}{2S}[(x_3y_0 - x_0y_3) + (y_3 - y_0)x + (x_0 - x_3)y] \\ L_2 = \frac{1}{2S}[(x_0y_1 - x_1y_0) + (y_0 - y_1)x + (x_1 - x_0)y] \end{cases}$$

3.2 Lagrange 型公式

在三角型元 $\triangle(0,1,2)$ 上构造插值多项式

$$p_m(x,y) = \sum_{i+j=0}^{m} c_{ij}x^iy^j$$

易知 $p_m \in H^1$，当 m=1 时，有待定系数法得

$$p_1(x,y) = L_0u_0 + L_1u_1 + L_2u_2$$

从公式可知 L_i 即为对应节点的基函数在单元 $\triangle(0,1,2)$ 上的限制。

4 形成线性方程组

4.1 剖分

对区间 Ω 按图 2 方式剖分，并对节点 (node) 和单元 (cell) 进行编号，各节点坐标为 (x_i,y_i)，i=0, ... , n

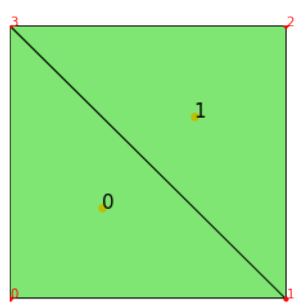

图 2

4.2 总刚度矩阵

设 $\phi_i = (\phi_i^{(1)}, \phi_i^{(2)})^t$，i = 0, ... , n 为试探函数空间 U_h 的基函数，则任一 $u_h \in U_h$ 可表成

$$u_h = \sum_{i=1}^{n} u_i\phi_i, \quad u_i = u_h(x_i,y_i)$$

带入变分形式得

$$\sum_{j=0}^{n} a(\phi_j,\phi_i)u_i = (f,\phi_i) \quad i = 0,...,n$$

矩阵形式为

$$\begin{gathered} Au = F \\ A = (a(\phi_i,\phi_j))_{n\times n} \\ F = ((f,\phi_i))_{n\times 1} \\ u = (u_i)_{n\times 1} \end{gathered}$$

4.3 单元刚度矩阵

在第 m 个单元 cell=$\triangle(i,j,k)$ 上，单元刚度矩阵和单元载荷向量为

$$\begin{gathered} A^{(m)} = (\int_{cell}(2\mu\epsilon(\phi_{i_1}) : \epsilon(\phi_{j_1}) + \lambda div\phi_{i_1} div\phi_{j_1}))_{3\times 3} \\ F^{(m)} = (\int_{cell} f\cdot\phi_{i_1})_{3\times 1} \\ i_1, j_1 = i, j, k \end{gathered}$$

将 $A^{(m)}$ 扩展成 $n\times n$ 矩阵，行列为 i，j，k 的九个元素即为 $A^{(m)}$ 的九个元素，并以同样的方式将 $F^{(m)}$ 扩展成 $n\times 1$ 向量，则

$$\begin{gathered} A = \sum_{m=0}^{n} A^{(m)} \\ F = \sum_{m=0}^{n} F^{(m)} \end{gathered}$$

4.4 边界条件

模型为齐次边界条件，若 (x_i,y_i) 为边界点，则 A 第 i 行只有第 i 列元素为 1，其他元素及 F(i) 都为 0。