第4章 留数理论及其应用

4.1 留数定理

留数性质，留数计算，无限远点的留数

4.2 应用留数理论计算定积分-I

有理三角函数，无限积分，含三角函数的无限积分

4.3 应用留数理论计算定积分-II

实轴上存在单极点情况

4.4含有多值函数的积分

含有分数幂次，含有对数

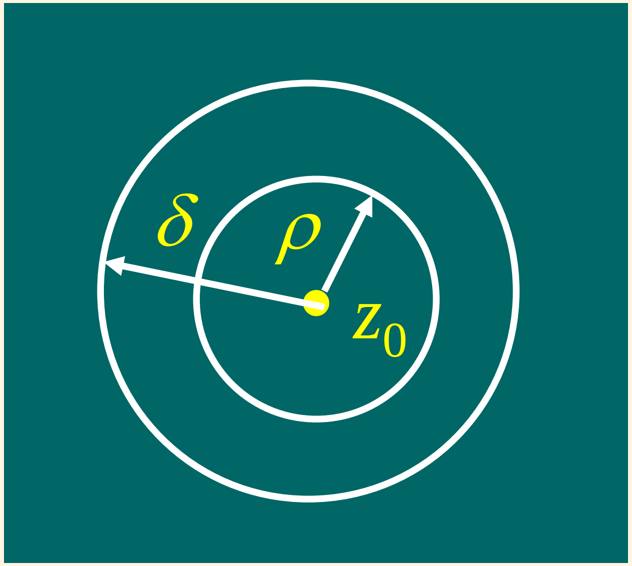
4.1 留数定理

解析函数的积分值与函数奇点的关系

❑有限远奇点的留数

设$z_0<\infty$为$f(z)$的孤立奇点，即函数$f(z)$在某个圆环$0<|z-z_0|<\delta$内解析. 设C为任意一个圆周 $|z-z_0|=\rho<\delta$, 则称积分

$$\mathrm{Res}[f(z_0)] \equiv \frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$



为函数$f(z)$在奇点z_0处的留数。

❑留数与Laurent展开的关系

函数$f(z)$在奇点 z_0处作Laurent展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n(z-b_k)^n$$

利用公式

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{dz}{z-z_0}=1\ \ (z_0\subset C)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C(z-z_0)^n dz=0\ \ (n\neq-1)$$

得到

$$\mathrm{Res}[f(z_0)]\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_C f(z)dz=a_{-1}$$

因此，函数在有限远处奇点的留数等于Laurent展开负一次幂的系数！

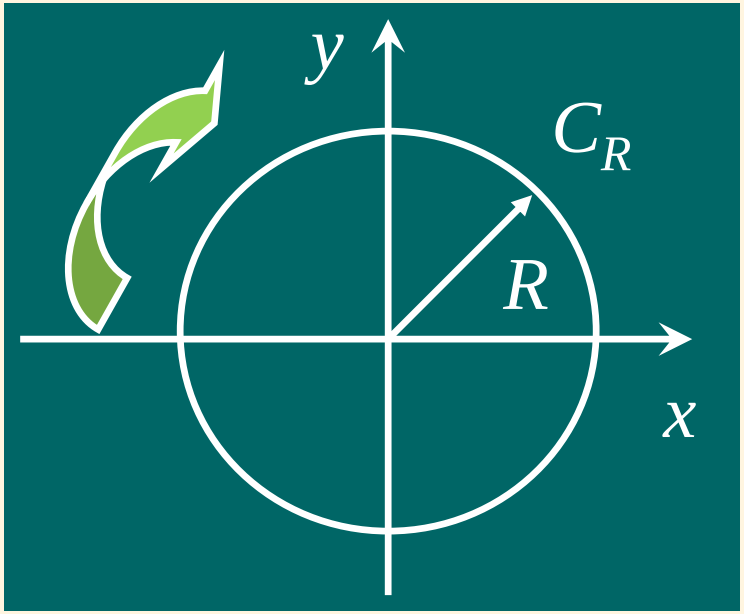
可去奇点的留数为0

❑无穷远点的留数

设$z_0=\infty$为$f(z)$的孤立奇点，即函数$f(z)$在去心邻域$R<|z|<\infty$解析，则定义函数$f(z)$ 在∞处的留数为积分

$$\mathrm{Res}[f(\infty)] \equiv \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$

其中C_R为顺时针方向.



函数$f(z)$在去心邻域$R<|z|<\infty$作Laurent展开

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

$$\mathrm{Res}[f(\infty)] \equiv \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = -a_{-1}$$

——因此，函数在无限远处的留数等于Laurent展开负一次幂系数的负数

注意：对有限远点，如果为可去奇点或解析点，其留数为0；但对无限远点，即使是可去奇点或解析点，留数也可能不为零。

例：$f(z)=1/z$ 无穷远点解析，但

$$\mathrm{Res}[f(\infty)] \equiv \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \oint_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = -1$$

❑留数定理

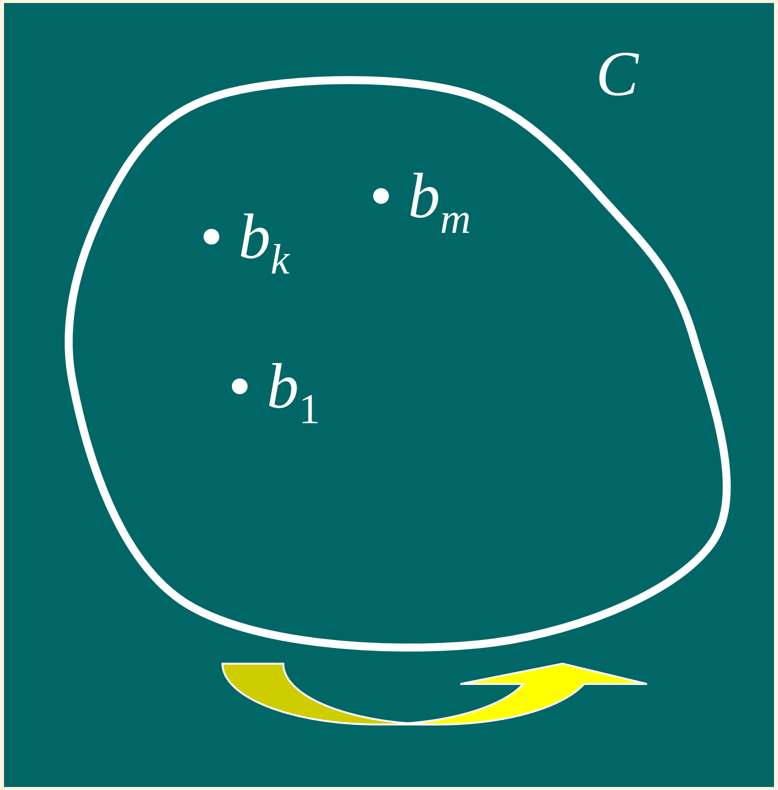
设：(1) C 是分段光滑的简单闭合曲线且 C的走向是逆时针;

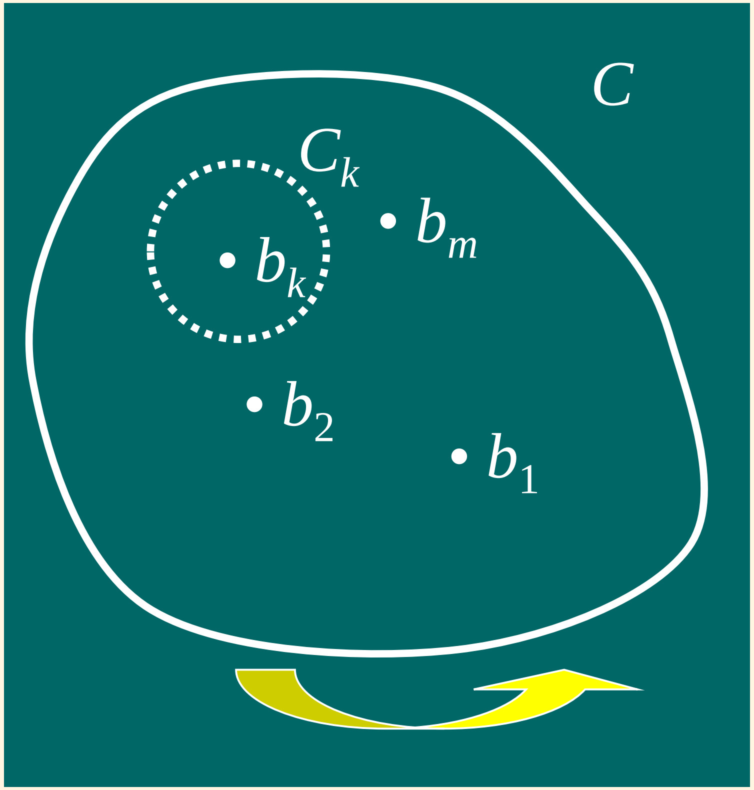
(2) $f(z)$ 在 C 内除去 m (有限)个孤立奇点(极点或本性奇点) 外是单值解析的函数;

(3) 在C 上没有 $f(z)$ 的奇点。则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z),b_k]$$

其中：$\mathrm{Res}[f(z),b_k]$ **表示函数$f(z)$在奇点b_k处的留数**





围道内存在有限个孤立奇点，围道上无奇点

证明：利用Cauchy 定理

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{k=1}^{m}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z$$

在奇点b_k附近作Laurent展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n^k(z-b_k)^n$$

因此，奇点b_k对积分的贡献为

$$\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\oint_{C_k} a_n^k(z-b_k)^n\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}a_{-1}^k$$

于是

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \sum_{k=1}^{m}\oint_{C_k} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m} a_{-1}^{k}$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}\left[f(z), b_k\right]$$

留数的性质

设$f(z)$在扩充复平面上除在有限远处奇点和∞外解析，那么

$$\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}\left[f(b_k)\right] + \mathrm{Res}\left[f(\infty)\right] = 0$$

——以原点为心作半径为R的大圆，由留数定理和无限远处留数定义就可证明。

□计算留数的公式

一、一阶极点留数的计算

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-b}+a_0+a_1(z-b)+\ldots.$$

因此

$$\boxed{\operatorname{Res}[f(z),b]=a_{-1}=\lim_{z\to b}(z-b)f(z)}$$

例1 z=0 是函数1/sinz 的一阶极点，相应的留数为

$$\operatorname{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{(z-0)}{\sin z}=1$$

例2 求 $f(z)=\cot z=\cos z/\sin z$ 在 $z=n\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$ 处的留数

解

$$\operatorname{Res}[f(z),n\pi]=\lim_{z\to n\pi}(z-n\pi)\frac{\cos z}{\sin z}$$

令 $\Delta z=z-n\pi$ **可得**

$$\operatorname{Res}[f(z),n\pi]=\lim_{\Delta z\to 0}\Delta z\frac{\cos(\Delta z+n\pi)}{\sin(\Delta z+n\pi)}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{\sin\Delta z}=1$$

二、*m* (*m*≥2)阶极点留数的计算

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{(z-b)^m}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-b}+a_0+a_1(z-b)+\ldots$$

两边乘 (*z*-*b*)^m 得到

$$(z-b)^m f(z)=a_{-m}+a_{-m+1}(z-b)+\ldots$$
$$+a_{-1}(z-b)^{m-1}+a_0(z-b)^m+\ldots$$

为了求 a_{-1}, 对上式求 (*m*-1)阶导数

$$\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-b)^m f(z)]=a_{-1}(m-1)!+a_0 m!(z-b)+\ldots$$

因此

$$\operatorname{Res}[f(z),b]=a_{-1}=\lim_{z\to b}\frac{1}{(m-1)!}\frac{\mathrm{d}^{m-1}}{\mathrm{d}z^{m-1}}[(z-b)^m f(z)]$$

例：求 $f(z)=1/(z^2+1)^3$ 在 $z=i$ 处的留数。

解：由 $z^2+1=(z-i)(z+i)$ 故 $z=\pm i$，是 $f(z)$ 的三阶极点

$$\operatorname{Res}[f(z),\mathrm{i}]=\lim_{z\to \mathrm{i}}\frac{1}{2!}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z-\mathrm{i})^3\frac{1}{(z+\mathrm{i})^3(z-\mathrm{i})^3}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}z^2}\left[(z+\mathrm{i})^{-3}\right]\Big|_{z=\mathrm{i}}=-\frac{3}{16}\mathrm{i}$$

三、无限远处留数的计算

1、利用公式

$$\sum_{k=1}^{m}\text{Res}[f(b_k)]+\text{Res}[f(\infty)]=0$$

有时通过求无限远处留数，求有限处留数之和

2、若无限远处 $\lim_{z\to\infty} f(z)=0$

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{z^m}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z}$$

则

$$\text{Res}[f(\infty)]=-a_{-1}=-\lim_{z\to\infty}[zf(z)]$$

注意：即使无限远处解析，留数也可能不为零

3、若无限远 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)\neq 0$ （包括 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=a_0\neq 0$）

$$f(z)=\frac{a_{-m}}{z^m}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z}+a_0+a_1 z+\ldots$$

作变换 $\xi=1/z$

$$f\left(\frac{1}{\xi}\right)=a_{-m}\xi^m+\ldots+a_{-1}\xi+a_0+\frac{a_1}{\xi}+\frac{a_2}{\xi^2}\ldots$$

$$g(\xi)\equiv\frac{1}{\xi^2}f\left(\frac{1}{\xi}\right)=a_{-m}\xi^{m-2}+\ldots+a_{-2}+\frac{a_{-1}}{\xi}+\frac{a_0}{\xi^2}+\frac{a_1}{\xi^3}$$

——**求新函数在ξ=0的留数——首先判断阶数**

无限远处留数为

$$\mathrm{Res}[f(\infty)] = -a_{-1} = -\mathrm{Res}\left[\frac{1}{\xi^2} f\left(\frac{1}{\xi}\right), \xi = 0\right]$$

例

$$f(z) = 1 - \frac{1}{z} + \frac{2}{z^2} + \frac{3}{z^3}$$

$$g(\xi) = \frac{1}{\xi^2} f\left(\frac{1}{\xi}\right) = \frac{1}{\xi^2}(1 - \xi + 2\xi^2 + 3\xi^3)$$

ξ=0是$g(\xi)$的二阶极点

$$\mathrm{Res} f(\infty) = -a_{-1} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left[(\xi - 0)^2 g(\xi)\right] = +1$$

四、本性奇点处留数的计算

对本性奇点或奇性不明的奇点，没有一般的公式，只能作Laurent展开，然后取负一次幂的系数

例 z=0是下列二个函数的本性奇点

$$f_1(z)=\sin(1/z);\ f_2(z)=\cos(1/z)$$

$$f_1(z)=\frac{1}{z}-\frac{1}{3!z^3}+\frac{1}{5!z^5}+\ldots+\ldots.$$

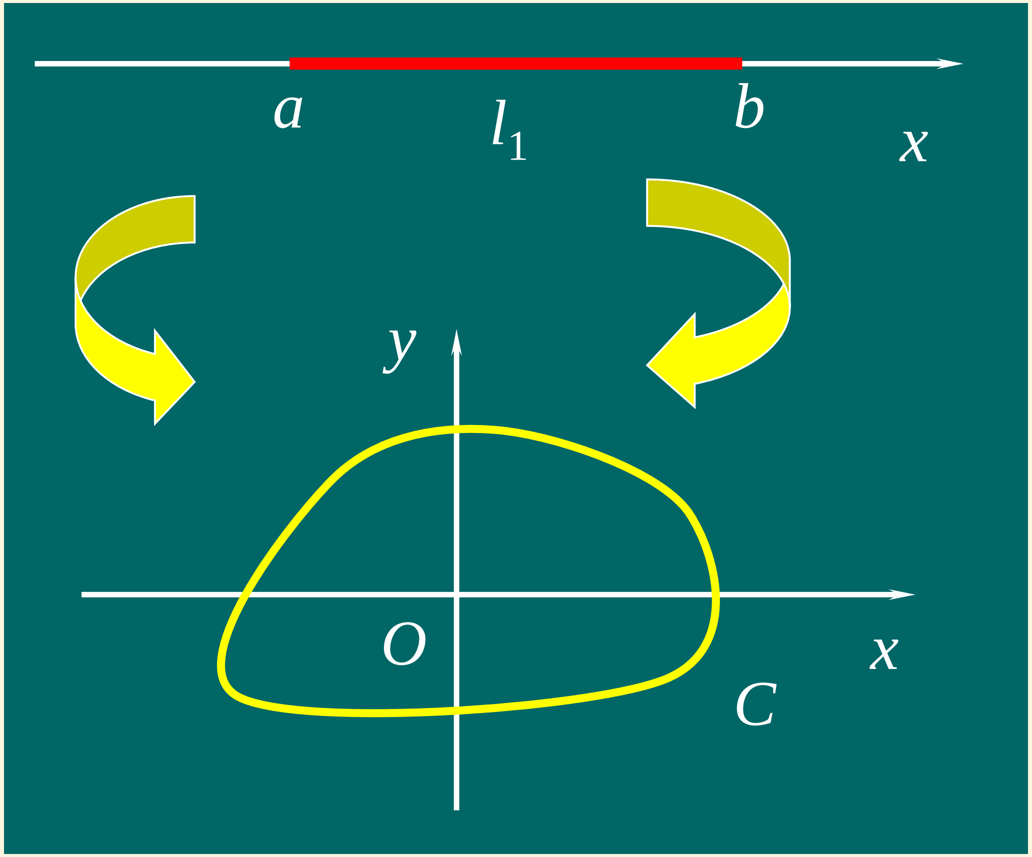
$$f_2(z)=1-\frac{1}{2!z^2}+\frac{1}{4!z^4}+\ldots+\ldots.$$

$$\mathrm{Res}[f_1(0)]=a_{-1}=1;\ \mathrm{Res}[f_2(0)]=a_{-1}=0$$

4.2 应用留数理论计算定积分-I

实变函数积分⇔复变函数的围道积分

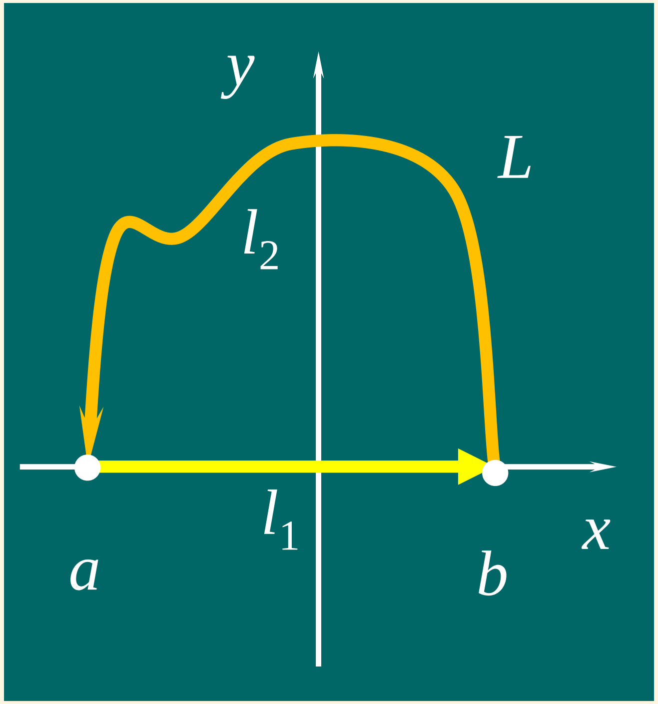
方法一、通过变量变换，把区间$l_1=[a, b]$映射成复平面的围道，把实数积分变成复平面的围道积分



方法二、补充线段 l_2, 并且延拓函数到整个复平面，可构成围道积分

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_{l_2} f(z)\mathrm{d}z$$

左边积分和右边第二个积分可以利用复变函数理论很容易求出。因而，可以方便求出右边第一项积分。



□类型一 有理三角函数

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$$

其中

① 函数$R(\cos x, \sin x)$ 是 $\sin x$和$\cos x$ 的有理式;
② 积分区间是 $[0, 2\pi]$;
③ 在区间$[0, 2\pi]$内无奇点.

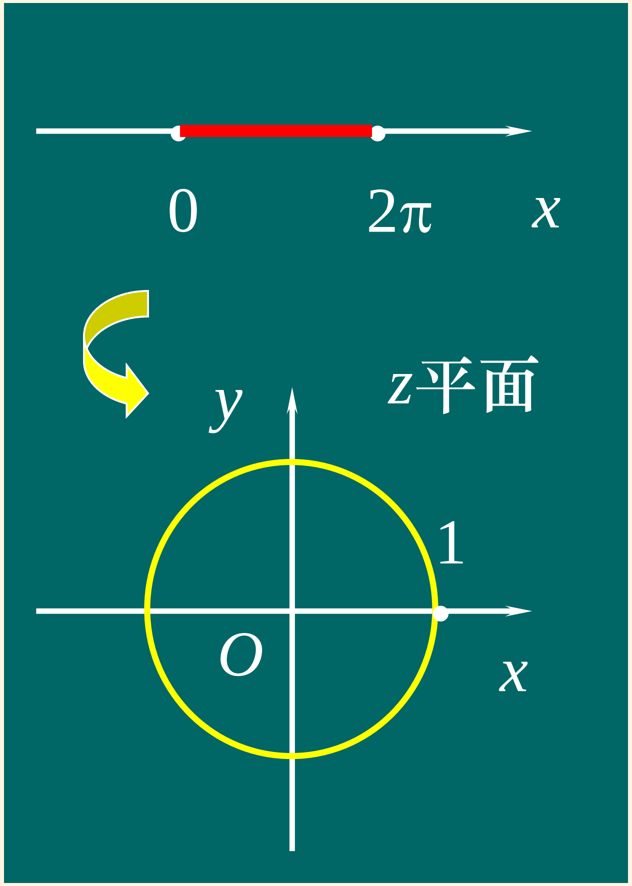
令 $z=e^{ix}$, 则原积分变成单位圆的围道积分

$$\cos x = \frac{1}{2}(z+z^{-1});\ \sin x = \frac{1}{2\mathrm{i}}(z-z^{-1})$$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}z/(\mathrm{i}z)$$

原积分变成

$$I=\oint_{|z|=1}R\left(\frac{z+z^{-1}}{2},\frac{z-z^{-1}}{2\mathrm{i}}\right)\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$



例题：计算积分

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\vartheta}{1-2p\cos\vartheta+p^2}\mathrm{d}\vartheta$$

$$(0<p<1)$$

分析：因 $1-2p\cos\vartheta+p^2=(1-p)^2+2p(1-\cos\vartheta)$，当 $0<p<1$，在 $0\le\vartheta\le 2\pi$，分母大于0，因而在实轴上无零点

$$\cos 2\vartheta = \frac{1}{2}(e^{2i\vartheta} + e^{-2i\vartheta}) = \frac{1}{2}(z^2 + z^{-2})$$

原积分

$$I = \oint_{|z|=1} \frac{z^2 + z^{-2}}{2} \cdot \frac{1}{1 - p\cdot(z + z^{-1}) + p^2} \cdot \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{1 + z^4}{2\mathrm{i}z^2(1 - pz)(z - p)} \mathrm{d}z = \oint_{|z|=1} f(z)\mathrm{d}z$$

——$f(z)$ 有三个极点：$z=0$、p、$1/p$，只有前两个在单位圆内，其中：$z=0$ 为二阶极点，$z=p$ 为一阶极点;在单位圆上无奇点。

而

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dz}}\left[z^2\cdot\frac{1+z^4}{2\mathrm{i}z^2(1-pz)(z-p)}\right]=-\frac{1+p^2}{2\mathrm{i}p^2}$$

$$\mathrm{Res}[f(z),p]=\lim_{z\to p}\left[(z-p)\cdot\frac{1+z^4}{2\mathrm{i}z^2(1-pz)(z-p)}\right]=-\frac{1+p^4}{2\mathrm{i}p^2(1-p^2)}$$

原积分

$$I=2\pi\mathrm{i}\left[-\frac{1+p^2}{2\mathrm{i}p^2}+\frac{1+p^4}{2\mathrm{i}p^2(1-p^2)}\right]=\frac{2\pi p^2}{1-p^2}.$$

①如果 $p>1$, $1-2p\cos\vartheta+p^2=p^2[1-2\cos\vartheta/p+1/p^2]$ 即可

②如果 $p=1$, 原积分在 $z=0$ 和 2π 发散，表现在单位圆上有二阶奇点。

❑类型二 无限积分

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

其中

① 积分区间是 $(-\infty, +\infty)$;

② 复变函数 $f(z)$ 在实轴上无奇点，在上半平面除有限个奇点（$b_1, b_2,\ldots,b_n$) 外解析;

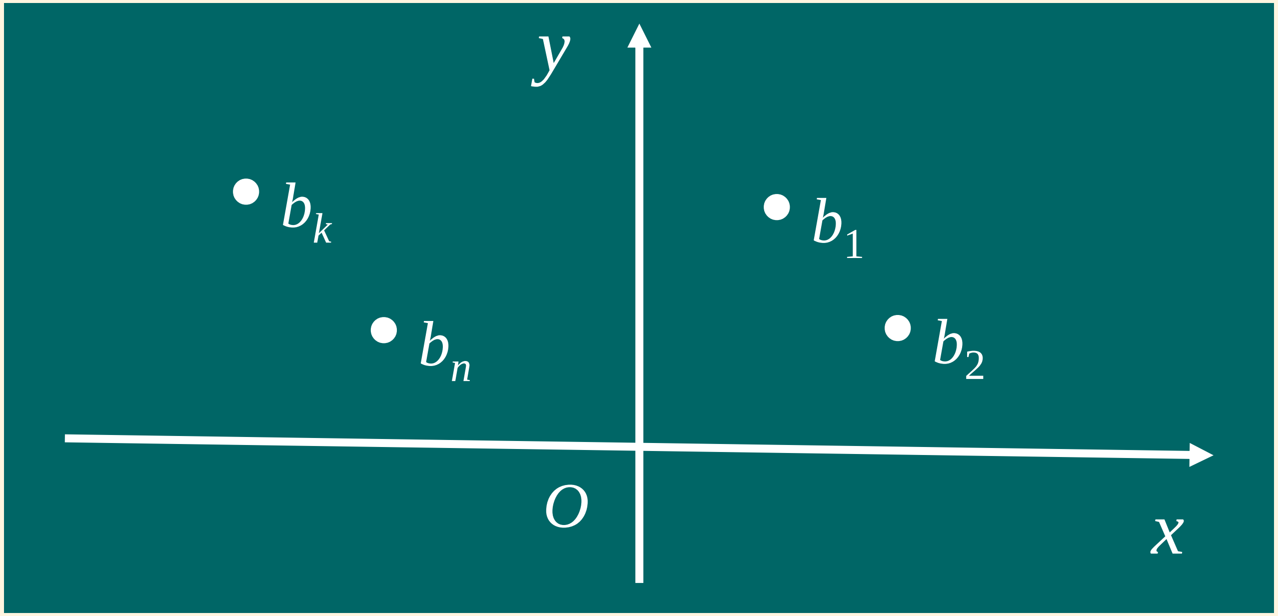
③ 当 z 在上半平面和实轴上$\to\infty$时，一致地 $|zf(z)|\to 0$;

④ 如果 $f(x)$是有理分式，则分母在实轴无零点且分母的次数高于分子次数至少二次。

则有

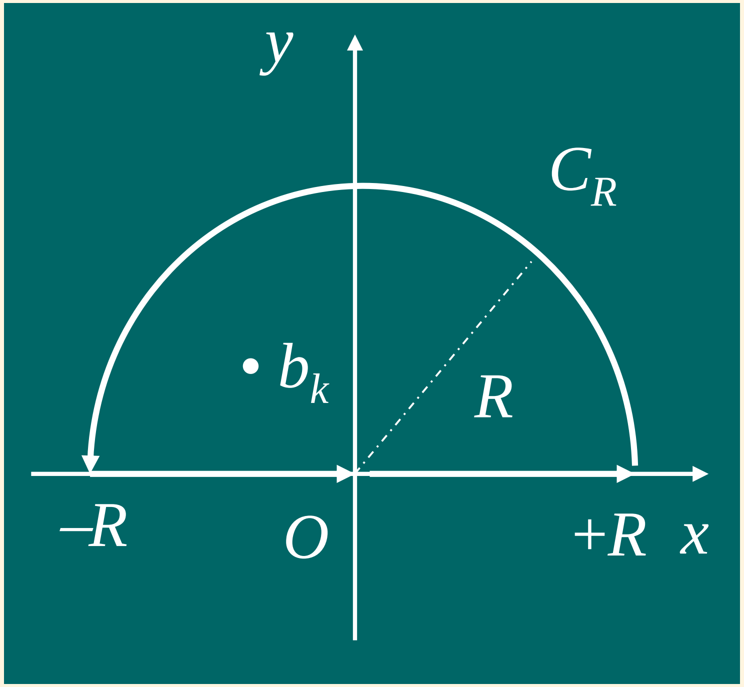
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), b_k]$$

其中 b_k 是 $f(z)$ 位于上半平面的有限个数奇点。



证明：补充围道如图，作线积分

$$\oint_L f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$



由留数定理

$$\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), b_k]$$

当 $R\to\infty$,左边的第一个积分就是要求的，第二个积分可证明当 $f(z)$满足条件③时为零。

在大圆上 $z = Re^{\mathrm{i}\varphi} \Rightarrow \mathrm{d}z = \mathrm{i}Re^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi$

$$\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = \mathrm{i}\int_0^{\pi} Rf(Re^{\mathrm{i}\varphi})e^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

当 z 在上半平面和实轴上→∞时，一致地 $|zf(z)|\to 0$

$$|zf(z)| \to 0 \Rightarrow \lim_{R\to\infty} |Rf(Re^{\mathrm{i}\varphi})| \to 0$$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

注意
主值积分

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), b_k]$$

例 求积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\mathrm{d}x\quad(a>0,b>0)$$

解: 分析

(1)积分区间是 $(0,\infty)$,但 $f(x)$ 是偶函数，因此可以变成$(-\infty,+\infty)$ 的积分；

(2)分母在实轴上无零点且分母的次数高于分子次数二次，因此积分存在；

(3)函数 $f(z)$ 在上半平面的一阶极点为ia 和 ib。

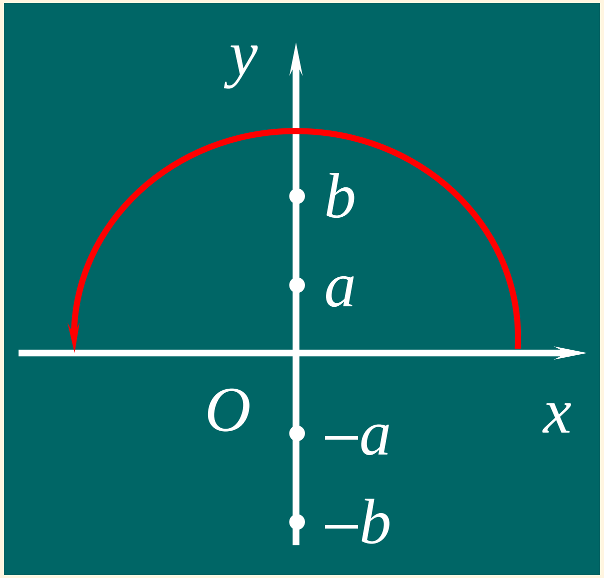
$$\operatorname{Res}[f(z),\mathrm{i}a]=\lim_{z\to \mathrm{i}a}\left[\frac{(z-\mathrm{i}a)z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right]=\frac{a}{2\mathrm{i}(a^2-b^2)}$$

$$\operatorname{Res}[f(z),\mathrm{i}b]=\lim_{z\to \mathrm{i}b}\left[\frac{(z-\mathrm{i}b)z^2}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right]=\frac{b}{2\mathrm{i}(b^2-a^2)}$$

因此积分为

$$I=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\left[\frac{a}{2\mathrm{i}(a^2-b^2)}+\frac{b}{2\mathrm{i}(b^2-a^2)}\right]$$

$$=\frac{\pi}{2(a+b)}$$



——注意:出现1/2，因为积分的区间是(0,∞)。

❑类型三 含三角函数的无限积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x \quad (a>0)$$

其中

① 复变函数 $P(z)$在实轴上无奇点，在上半平除有限个奇点($b_1, b_2 \ldots b_n$) 外解析；

② 当 z 在上半平面和实轴上 $\to\infty$时，一致地 $|P(z)|\to 0$；

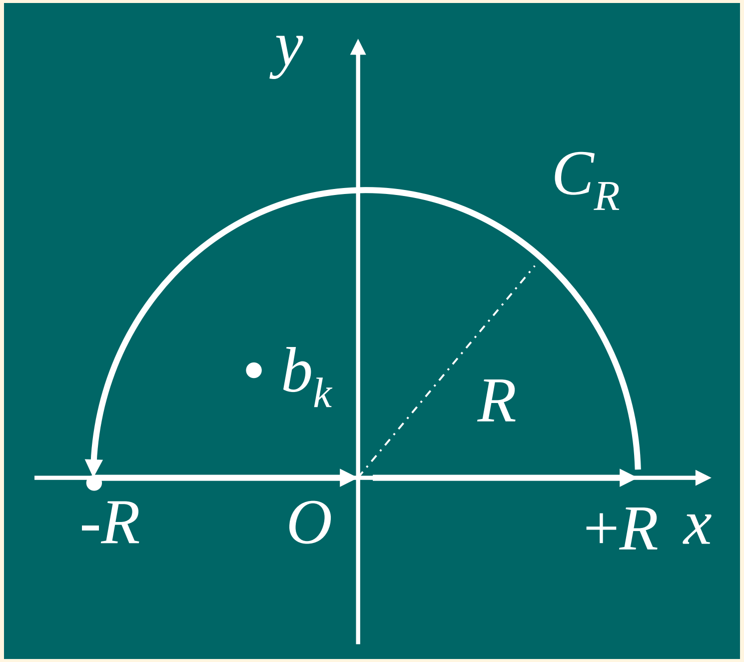
③ 如果 $P(x)$ 是有理分式，则分母在实轴无零点且分母的次数高于分子次数至少一次.

可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k}^{n}\mathrm{Res}[f(z), b_k]$$

其中 b_k 是 $f(z)=P(z)e^{iaz}$ 位于上半平面的奇点。

证明：由留数定理



$$\int_{-R}^{R} P(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x + \int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z), b_k]$$

大圆上积分

$$\int_{C_R} P(z)e^{\mathrm{i}az}\mathrm{d}z = \int_0^{\pi} P(Re^{\mathrm{i}\varphi})e^{\mathrm{i}aR(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \mathrm{i}\int_0^{\pi} P(Re^{\mathrm{i}\varphi})e^{\mathrm{i}(\varphi+aR\cos\varphi)}\cdot e^{-aR\sin\varphi}R\mathrm{d}\varphi$$

$$\le 2\max\{P(Re^{\mathrm{i}\varphi})\}\mathrm{i}\int_0^{\pi/2} e^{-aR\sin\varphi}R\mathrm{d}\varphi$$

上半平面：$\sin\varphi > 0$

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} P(z)e^{\mathrm{i}az}\mathrm{d}z \to 0$$

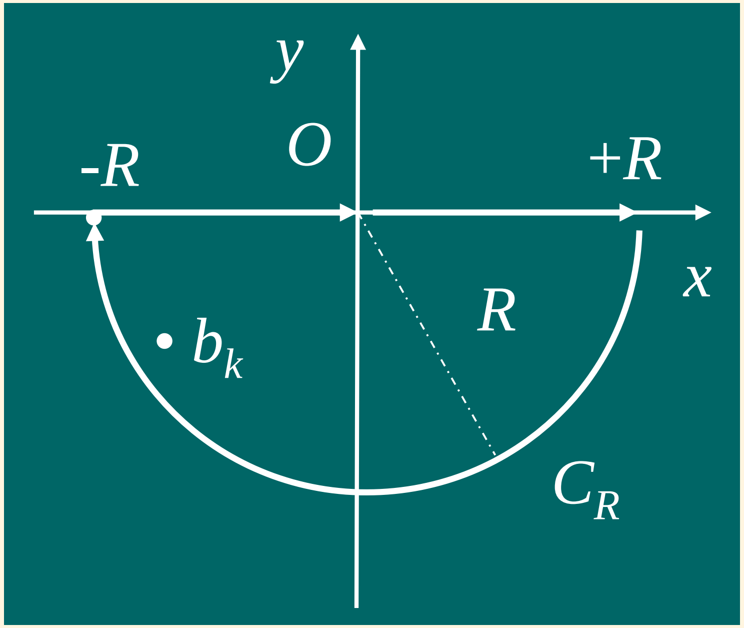
因此

$$\lim_{R\to 0}\int_{-R}^{R} P(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k}^{n}\mathrm{Res}[f(z),b_k]$$

■ 如果 $a<0$, 应改为下半平面计算，结果如何?

取下半平面半圆围道，由留数定理

$$-\left[\int_{-R}^{R} P(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\right]=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),b_k]$$



其中 b_k 是 $f(z)=P(z)e^{\mathrm{i}az}$ 位于下半平面的奇点。

注意：积分围道是反向的，故必须增加负号

大圆上积分

$$\int_{C_R} P(z)e^{iaz}\mathrm{d}z = \int_{2\pi}^{\pi} P(Re^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|a|R(\cos\varphi+\mathrm{i}\sin\varphi)}\,\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \mathrm{i}\int_{2\pi}^{\pi} P(Re^{\mathrm{i}\varphi})e^{\mathrm{i}(\varphi-|a|R\cos\varphi)}e^{|a|R\sin\varphi}R\mathrm{d}\varphi$$

$$\le \mathrm{i}\max\{P(Re^{\mathrm{i}\varphi})\}\int_{2\pi}^{\pi} e^{|a|R\sin\varphi}R\mathrm{d}\varphi$$

下半平面

$\sin\varphi < 0$

$$\le -2\mathrm{i}\max\{P(Re^{\mathrm{i}\varphi})\}\int_{0}^{\pi/2} e^{-|a|R\sin\phi}R\mathrm{d}\phi$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{R\to\infty}\oint_{C_R} R(z)e^{iaz}\mathrm{d}z \to 0$$

因此

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} P(x)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}|a|x}\,\mathrm{d}x = -2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),b_k]$$

例：求积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}dx\quad (a>0) \Rightarrow P(z)=\frac{z}{z^2+a^2}$$

在实轴上无奇点，上半平面上有一阶极点 i*a*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x}{x^2+a^2}e^{\mathrm{i}x}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[P(z)e^{\mathrm{i}z},\mathrm{i}a]$$

$$=\frac{2\pi\mathrm{i}}{2}e^{-a}=\mathrm{i}\pi e^{-a}$$

利用三角函数的公式及*P*(*z*)的奇偶性，可得

$$\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{x^2+a^2}=\frac{\pi}{2}e^{-a}$$

例：求积分(阻尼振动的响应函数)

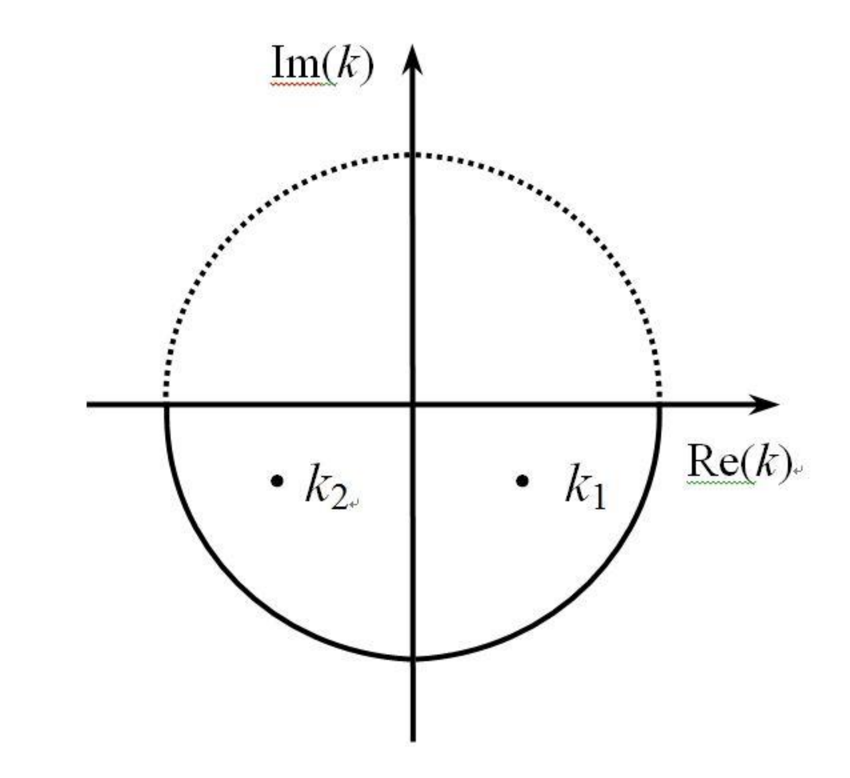
$$G(t,t')=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\exp[-\mathrm{i}(t-t')k]}{k^2+2\mathrm{i}\gamma k-\omega_0^2}\mathrm{d}k$$

二个一阶极点

$$k_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}-\mathrm{i}\gamma$$

$$k_2=-\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}-\mathrm{i}\gamma$$

——当 $t>t'$时, 位于下半平面的半圆形;
——当 $t<t'$时, 取上半平面, 这时围道内无极点;



$$G(t,t')=\frac{1}{2\pi}\begin{cases}2\pi\mathrm{i}\sum\limits_{\nu=1}^{2}\mathrm{Res}[f(k),k_\nu] & (t>t')\\ 0 & (t<t')\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$G(t,t')=\begin{cases}e^{-\gamma(t-t')}\dfrac{\sin\left[\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}(t-t')\right]}{\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}} & (t>t')\\ 0 & (t<t')\end{cases}$$

阻尼的作用：物理上引起
①指数衰减；②频率变化

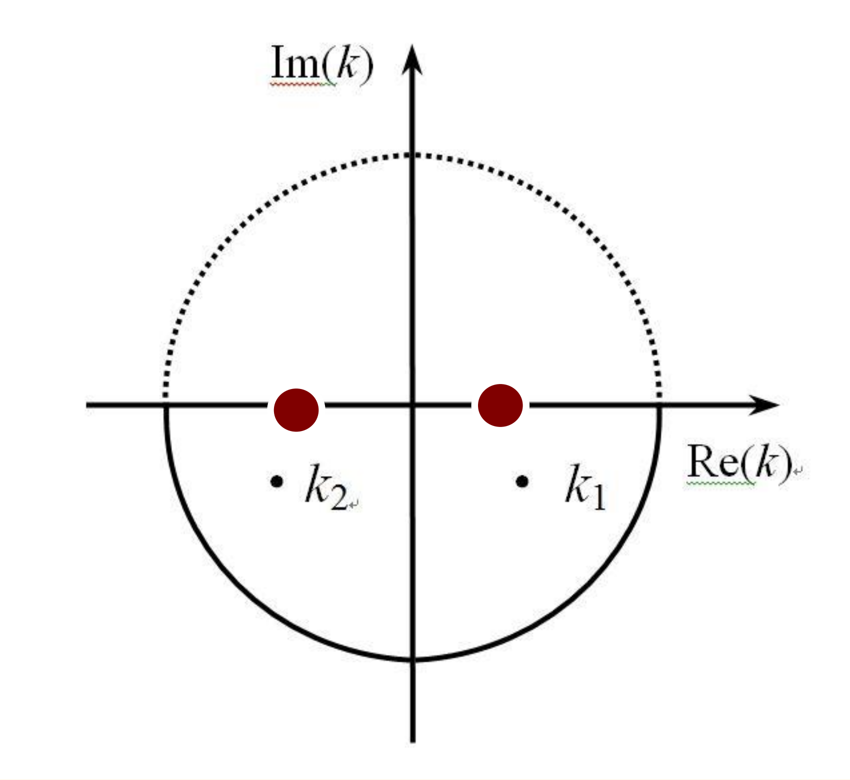
阻尼的作用：数学上引起

$$k_1=\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}-\mathrm{i}\gamma \qquad \xrightarrow{\gamma\to 0} \qquad k_1=+\omega_0$$

$$k_2=-\sqrt{\omega_0^2-\gamma^2}-\mathrm{i}\gamma \qquad \qquad k_2=-\omega_0$$

二个一阶极点位于实轴上.

——物理上，经常这样操作：引进阻尼或者衰减，使极点偏离实轴



4.3 应用留数理论计算定积分-II

■ 实轴上存在单极点情况

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x;\quad \int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x\quad (a>0)$$

其中

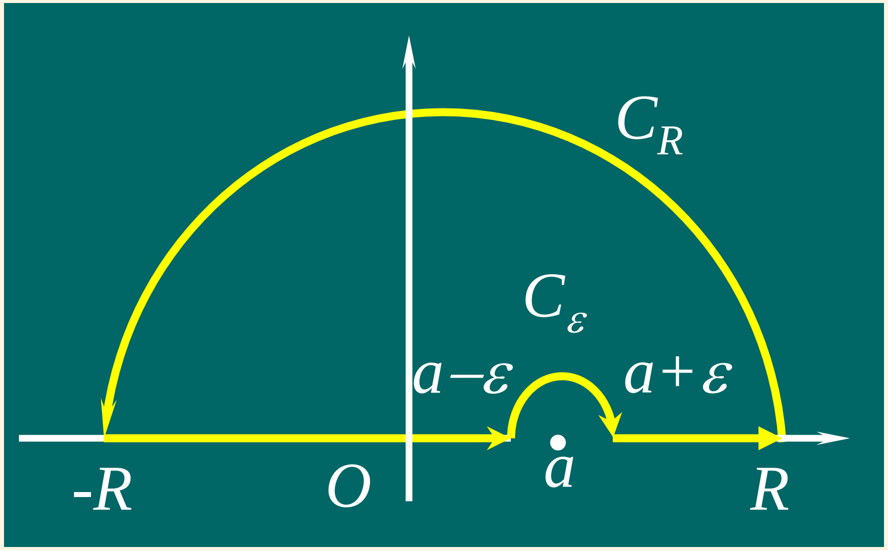
① 函数 $f(z)$ 在实轴上有单极点 a，上半平面除有限个奇点（$b_1, b_2 \ldots b_n$）外解析；

② 当 z 在上半平面和实轴上→∞时，一致地 $|zf(z)| \to 0$

由于a 的存在，作如图围道。在围道内如有有限个奇点则

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\oint_L f(z)\mathrm{d}z=\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left[\begin{array}{l}\int_{-R}^{a-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z\\ +\int_{a+\varepsilon}^{+R} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z\end{array}\right]$$

$$=P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z+\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z$$

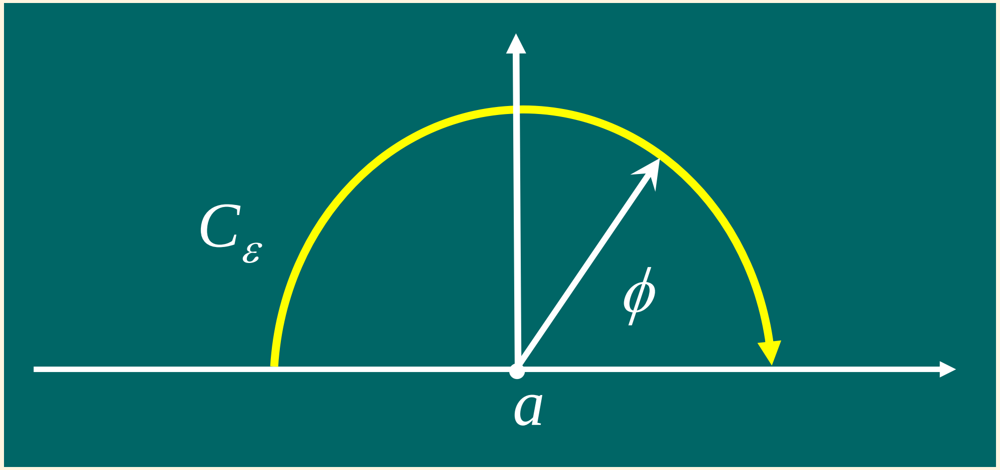


当$R\to\infty$时 第 3 部分大圆上积分为零

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x+\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),b_k]$$

其中 b_k 是 $f(z)$ 位于上半平面的有限个数奇点。

因此问题的关键是求实轴上单极点处的积分



事实上, 令 $z-a\equiv\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi}$

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_\varepsilon}\left[\frac{a_{-1}}{z-a}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-a)^k\right]\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\pi}^{0}\frac{a_{-1}\mathrm{d}(\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi})}{\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi}}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k\varepsilon^k\int_{\pi}^{0}e^{\mathrm{i}k\phi}\mathrm{d}(\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi})$$

$$=-\mathrm{i}\pi a_{-1}=-\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),a],\ (\varepsilon\to 0)$$

注意:

① 如果是二阶以上的极点，当$\varepsilon\to 0$时，积分可能趋向无限大而发散;

② 半圆弧积分方向是[π,0]。

因此, 原积分为

$$P\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),b_k] + \pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z),a_k]$$

——这里已假定如果实轴上有*m*个单极点

同样

$$P\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{Res}[f(z),b_k] + \pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z),a_k]$$

注意：实轴上的奇点是单极点，如果是二阶以上极点（或者是本性奇点）积分可能发散。

$$f(z) = \sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-a)^k} + \frac{a_{-1}}{z-a} + \sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-a)^k$$

$$\int_{C_\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_\varepsilon}\left[\sum_{k=2}^{\infty}\frac{a_{-k}}{(z-a)^k}+\frac{a_{-1}}{z-a}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-a)^k\right]\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mathrm{i}a_{-k}}{\varepsilon^{k-1}}\int_{\pi}^{0}e^{-\mathrm{i}(k-1)\phi}\mathrm{d}\phi-\mathrm{i}\pi\mathrm{Res}[f(z),a]$$

$$=\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\mathrm{i}a_{-k}}{\varepsilon^{k-1}}\frac{1}{-\mathrm{i}(k-1)}\{1-\cos[(k-1)\pi]\}-\mathrm{i}\pi\mathrm{Res}[f(z),a]$$

注意到：①当k–1=奇数时，$1-\cos[(k-1)\pi]=2$

当$f(z)$的Laurent展开含有负偶数项时，相应的积分发散；

②当k–1=偶数时，$1-\cos[(k-1)\pi]=0$

当$f(z)$的Laurent展开含有负奇数项时，相应的积分为零（负奇次幂项主值积分为零）。

例1：求积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

x=0是可去奇点

解：利用函数的奇偶性，原积分可化成

$$I=\frac{1}{2\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{\mathrm{i}x}}{x}\mathrm{d}x$$

被积函数仅仅在实轴上有单极点 z=0, 因此

$$I=\frac{\pi}{2}\mathrm{Res}\left(\left.\frac{e^{iz}}{z}\right|_{y=0},0\right)=\frac{\pi}{2}$$

即

$$\boxed{\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}}$$

例2：求积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$$ ⬅ ***x*=0是可去奇点**

解：利用函数的奇偶性，原积分可化成

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x$$

不能直接取（实轴上有二阶极点）

$$f(z)=\frac{e^{2iz}}{z^2}$$ ⬅ ***z*=0是二阶极点**

更不能取（上半平面发散）

$$f(z)=\frac{\sin^2 z}{z^2}$$ ⬅ **①*z*=0是二阶极点 ②上半平面发散**

利用关系

$$\sin^2 x = 1 - \cos 2x$$

$$I = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos 2x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}\mathrm{Re}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-e^{2\mathrm{i}x})}{x^2}\,\mathrm{d}x$$

取

$$f(z) = \frac{1-e^{2\mathrm{i}z}}{z^2}$$

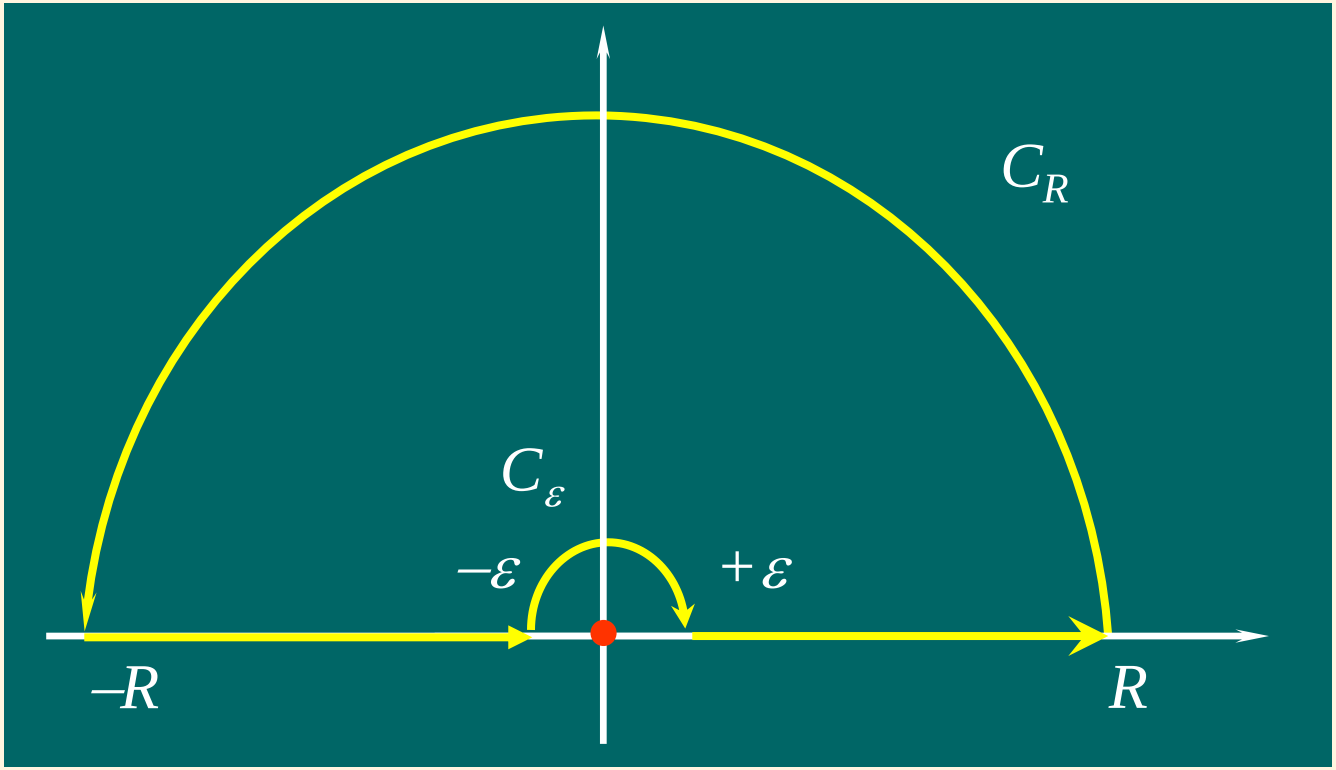
z=0是一阶极点

相应的留数

$$\mathrm{Res}[f(z),0] = \lim_{z\to 0}(z-0)f(z) = \lim_{z\to 0}\frac{1-e^{2\mathrm{i}z}}{z} = -2\mathrm{i}$$

$$I = \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left\{\pi \mathrm{i}\,\mathrm{Res}[f(z),0]\right\} = \frac{1}{2}\pi\mathrm{i}(-2\mathrm{i}) = \pi$$

- **详细计算：围道内无奇点，故** $\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$



$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{R}^{\varepsilon} + \int_{C_R} = 0$$

1. 实轴积分部分

$$\lim_{\substack{R\to\infty\\ \varepsilon\to 0}} \int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{R}^{\varepsilon} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{2ix}}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-(\cos 2x + i\sin 2x)}{x^2}\mathrm{d}x$$

$$= P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x - i\sin 2x}{x^2}\mathrm{d}x = 2P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\mathrm{d}x = 2I$$

2. 大半圆积分部分

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{1-e^{2\mathrm{i}z}}{z^2}\mathrm{d}z=\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1-e^{2\mathrm{i}Re^{\mathrm{i}\varphi}}}{R^2e^{2\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}(Re^{\mathrm{i}\varphi})$$

$$=\mathrm{i}\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{1-e^{2\mathrm{i}R\cos\varphi-2R\sin\varphi}}{Re^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}\varphi\to 0$$

3. 小半圆积分部分

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{1-e^{2\mathrm{i}z}}{z^2}\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{\left[1-e^{2\mathrm{i}\varepsilon\exp(\mathrm{i}\phi)}\right]}{\varepsilon^2e^{2\mathrm{i}\phi}}\mathrm{d}(\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi})$$

$$=\mathrm{i}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{\left[1-[1+2\mathrm{i}\varepsilon\exp(\mathrm{i}\phi)]\right]}{\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi}}\mathrm{d}\phi=\mathrm{i}\int_0^{\pi}\frac{2\mathrm{i}\varepsilon\exp(\mathrm{i}\phi)}{\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi}}\mathrm{d}\phi=-2\pi$$

4. 积分

$$2I-2\pi=0 \Rightarrow I=\pi$$

例3：求积分

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x$$ **x=0是可去奇点**

不能直接取

$$f(z)=\frac{e^{3\mathrm{i}z}}{z^3}$$ ——**实轴上有三阶极点**

利用 $$4\sin^3 x=3\sin x-\sin 3x$$

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3\sin x-\sin 3x}{x^3}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{8}\mathrm{Im}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{3e^{\mathrm{i}z}-e^{3\mathrm{i}z}-2}{x^3}\mathrm{d}x$$

取

$$f(z)=\frac{3e^{\mathrm{i}z}-e^{3\mathrm{i}z}-2}{z^3}$$ —z=0是一阶极点

相应的留数

$$\mathrm{Res}[f(z),0]=\lim_{z\to 0}(z-0)f(z)=\lim_{z\to 0}\frac{3e^{\mathrm{i}z}-e^{3\mathrm{i}z}-2}{z^2}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{3\mathrm{i}(e^{\mathrm{i}z}-e^{3\mathrm{i}z})}{2z}=\lim_{z\to 0}\frac{3\mathrm{i}(\mathrm{i}e^{\mathrm{i}z}-3\mathrm{i}e^{3\mathrm{i}z})}{2}=3$$

$$I=\int_0^{\infty}\frac{\sin^3 x}{x^3}\mathrm{d}x=\frac{1}{8}\mathrm{Im}\{\pi\mathrm{i}\mathrm{Res}[f(z),0]\}=\frac{3\pi}{8}$$

4.4 含有多值函数的积分

❑含有根式

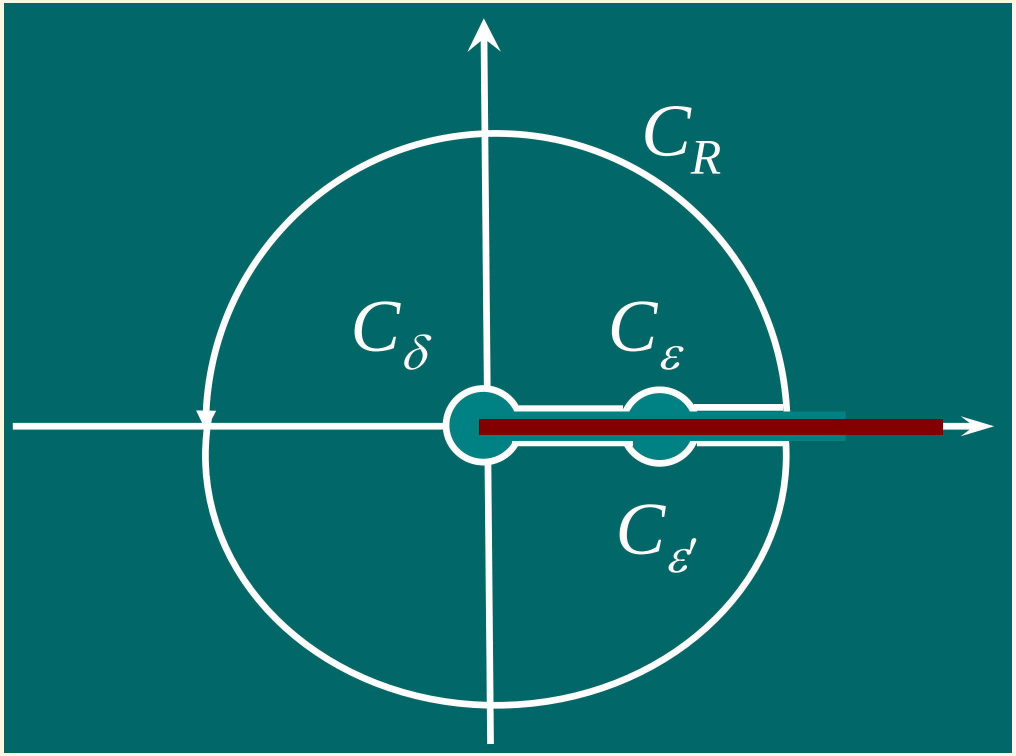
$$I=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1-x^2}\mathrm{d}x \quad (0<\alpha<2)$$

枝点：z=0, ∞

极点：z=-1,+1

割线：原点和正实轴。取

$$f(z)=\frac{z^{\alpha-1}}{1-z^2}$$



围道内$f(z)$是单值解析函数

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \int_{C_R} + \int_{C_\delta} + \int_{\delta}^{1-\varepsilon} + \int_{C_\varepsilon} + \int_{1+\varepsilon}^{R}$$

$$+ \int_{(1-\varepsilon)e^{2\pi i}}^{\delta e^{2\pi i}} + \int_{C_{\varepsilon'}} + \int_{Re^{2\pi i}}^{(1+\varepsilon)e^{2\pi i}}$$

$$= 2\pi i \,\mathrm{Res}[f(e^{i\pi})]$$

1、大圆周

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R}\frac{z^{\alpha-1}}{1-z^2}\mathrm{d}z \sim \lim_{R\to\infty}\int_0^{2\pi}\frac{|R|^{\alpha-1}}{R^2}Re^{i\phi}\mathrm{d}\phi$$

$$\sim\left(\frac{1}{|R|}\right)^{2-\alpha} \sim 0 \quad \boxed{(\alpha<2)}$$

2、原点小圆周

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta}\frac{z^{\alpha-1}}{1-z^2}\mathrm{d}z\sim\lim_{\delta\to 0}\int_0^{2\pi}\frac{(\delta e^{\mathrm{i}\phi})^{\alpha-1}}{1-(\delta e^{\mathrm{i}\phi})^2}\delta e^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{d}\phi$$

$$\sim\delta^{\alpha}\sim 0\quad\boxed{(0<\alpha)}$$

3、ε小半圆

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}\frac{z^{\alpha-1}}{1-z^2}\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{0}\frac{(1+\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi})^{\alpha-1}}{[1+(1+\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi})][1-(1+\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi})]}\mathrm{i}\varepsilon e^{\mathrm{i}\phi}\mathrm{d}\phi$$

$$=\frac{\pi\mathrm{i}}{2}$$

4、ε'小半圆

$$\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{C_{\varepsilon'}}\frac{z^{\alpha-1}}{1-z^2}\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\varepsilon'\to 0}\int_{2\pi}^{\pi}\frac{(e^{2\pi\mathrm{i}}+\varepsilon' e^{\mathrm{i}\varphi})^{\alpha-1}\mathrm{i}\varepsilon' e^{\mathrm{i}\varphi}\mathrm{d}\varphi}{[e^{2\pi\mathrm{i}}+(e^{2\pi\mathrm{i}}+\varepsilon' e^{\mathrm{i}\varphi})][e^{2\pi\mathrm{i}}-(e^{2\pi\mathrm{i}}+\varepsilon' e^{\mathrm{i}\varphi})]}$$

$$=\frac{\mathrm{i}\pi e^{2\pi\mathrm{i}\alpha}}{2}$$

5、割线上沿

$$\lim_{\substack{\varepsilon,\delta\to 0\\ R\to\infty}}\left[\int_{\delta}^{1-\varepsilon}+\int_{1+\varepsilon}^{R}\right]=\int_0^{\infty}\frac{x^{\alpha-1}}{1-x^2}\mathrm{d}x=I$$

6、割线上沿

$$\lim_{\substack{\varepsilon,\delta\to 0\\ R\to\infty}}\left[\int_{(1-\varepsilon)e^{2\pi i}}^{\delta e^{2\pi i}} + \int_{Re^{2\pi i}}^{(1+\varepsilon)e^{2\pi i}}\right]$$

$$=-\int_0^{\infty}\frac{(xe^{2\pi i})^{\alpha-1}}{1-(xe^{2\pi i})^2}\mathrm{d}(xe^{2\pi i})=-Ie^{2\pi i\alpha}$$

7、围道内奇点z =–1的留数

$$\mathrm{Res}[f(e^{i\pi})]=\lim_{z\to e^{i\pi}}(z+1)\frac{z^{\alpha-1}}{1-z^2}=\frac{e^{i\pi(\alpha-1)}}{2}$$

$$=-\frac{e^{i\pi\alpha}}{2}$$

8、留数定理

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \frac{\mathrm{i}\pi}{2}(1+e^{2\pi\mathrm{i}\alpha}) + I(1-e^{2\pi\mathrm{i}\alpha})$$

$$= 2\pi\mathrm{i}\,\mathrm{Res}f(e^{\mathrm{i}\pi}) = -\pi\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\pi\alpha}$$

$$\Downarrow$$

$$I = -\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\frac{\left[1+2e^{\mathrm{i}\pi\alpha}+(e^{\mathrm{i}\pi\alpha})^2\right]}{(1-e^{2\pi\mathrm{i}\alpha})} = -\frac{\mathrm{i}\pi}{2}\frac{(1+e^{\mathrm{i}\pi\alpha})^2}{(1-e^{2\pi\mathrm{i}\alpha})}$$

$$= \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}\left(\frac{1+e^{\mathrm{i}\pi\alpha}}{2e^{\mathrm{i}\pi\alpha/2}}\right)^2 = \frac{\pi}{2}\cot\left(\frac{\pi}{2}\alpha\right)$$

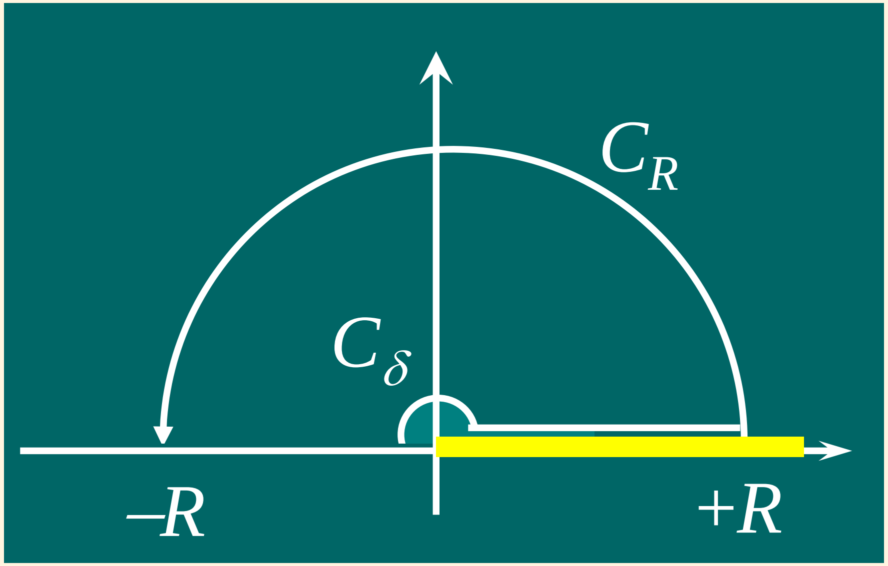
□含有对数

例2 $$I=\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x \Rightarrow f(z)=\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}$$

枝点：$z=0,\infty$

极点：$z=-\mathrm{i},+\mathrm{i}$

割线：原点和正实轴围道如图，C内只有一个二阶极点$+\mathrm{i}$. 取



——围道内，除极点外单值解析。

1、求留数：令

$$\phi(z)=(z-i)^2\frac{\ln z}{(z+i)^2(z-i)^2}=\frac{\ln z}{(z+i)^2}$$

$$\phi'(z)=\frac{1}{z}\frac{1}{(z+i)^2}-\frac{2}{(z+i)^3}\ln z$$

$$\operatorname{Res}[f(z),i]=a_{-1}=\lim_{z\to i}\varphi'(z)=-\frac{1}{4i}-\frac{2}{-8i}\frac{\pi i}{2}=\frac{\pi+2i}{8}$$

2、由留数定理

$$\oint_C f(z)dz=\int_{C_R}+\int_{C_\delta}+\int_{-R}^{-\delta}+\int_{\delta}^{R}=2\pi i\operatorname{Res}[f(i)]$$

$$=2\pi i\frac{\pi+2i}{8}=-\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}i$$

3、各积分值

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)\mathrm{d}z=0;\quad \lim_{\delta\to 0}\int_{C_\delta} f(z)\mathrm{d}z=0$$

在正实轴上 $z=xe^{0\mathrm{i}}(x>0);\mathrm{d}z=\mathrm{d}x$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ R\to\infty}}\int_{\delta}^{R}\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z=\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=I$$

在负实轴上 $z=xe^{\mathrm{i}\pi}(x>0);\mathrm{d}z=\mathrm{d}xe^{\mathrm{i}\pi}=\mathrm{d}(-x)$

$$\lim_{\substack{\delta\to 0\\ R\to\infty}}\int_{-R}^{-\delta}\frac{\ln z}{(1+z^2)^2}\mathrm{d}z=\int_{\infty}^{0}\frac{\ln x+\mathrm{i}\pi}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}(-x)$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{\ln x+\mathrm{i}\pi}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x=I+\mathrm{i}\pi\int_0^{\infty}\frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x$$

4、积分

$$I + I + \mathrm{i}\pi\int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = -\frac{\pi}{2} + \frac{\pi^2}{4}\mathrm{i}$$

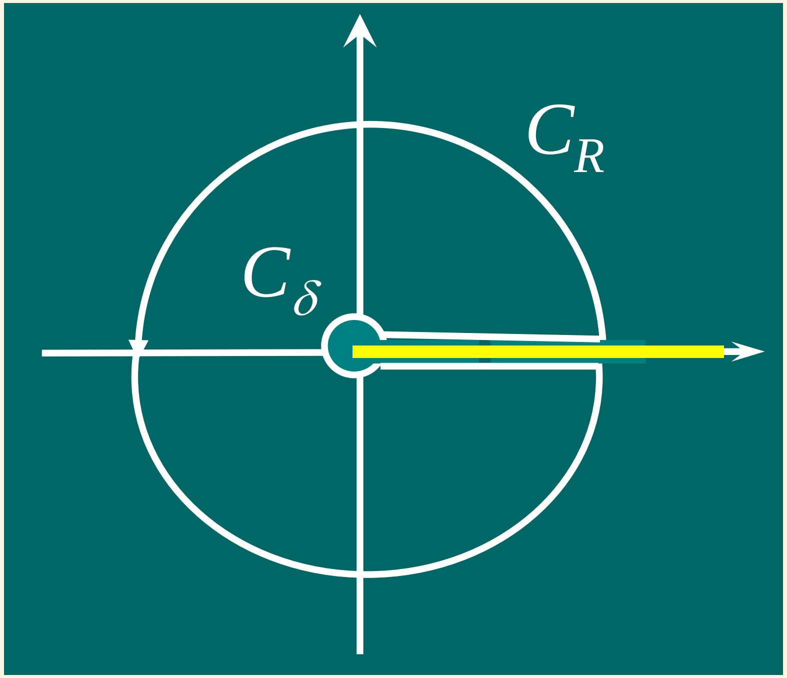
比较实部和虚部得到

$$I = -\frac{\pi}{4};\ \int_0^{\infty} \frac{1}{(1+x^2)^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}$$

如果积分围道取右图

1、二个极点都在C内

2、割线上、下沿



$$z = xe^{0\mathrm{i}}, z = xe^{2\pi\mathrm{i}}$$

复变函数复习

- **解析函数**

  1、微分、积分、幂级数展开的等价定义

  2、解析函数的重要性质

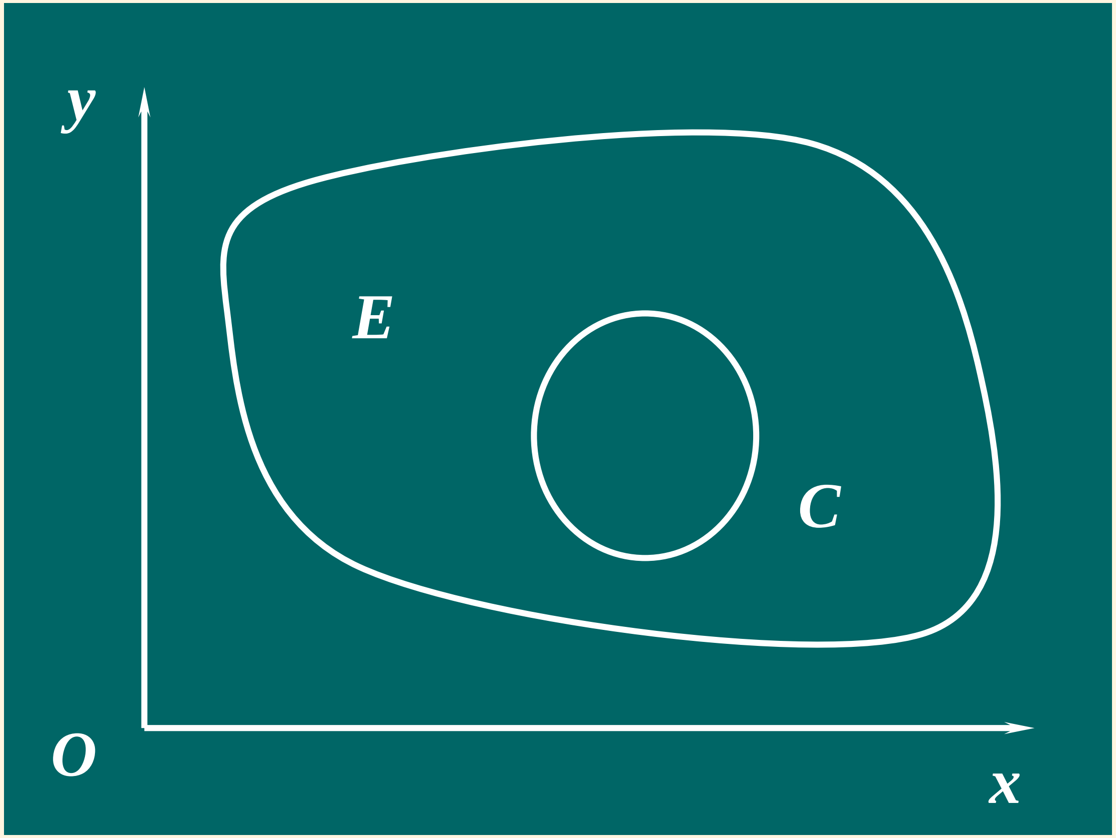
  正交性
  无限可导性
  积分性质
  平均值性质
  保角性质
  极值性质
  解析延拓唯一性

■ Cauchy 定理

❑ 单连通区域的Cauchy 定理

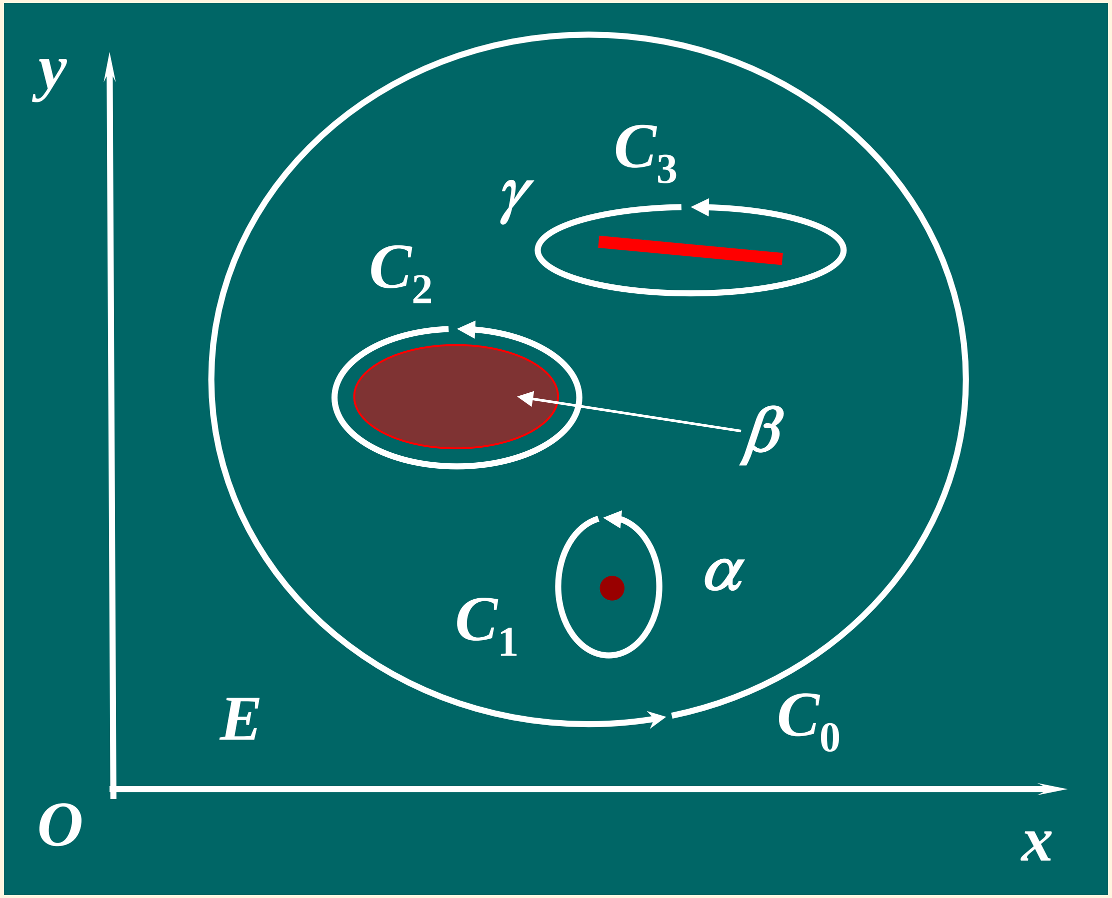
$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

64



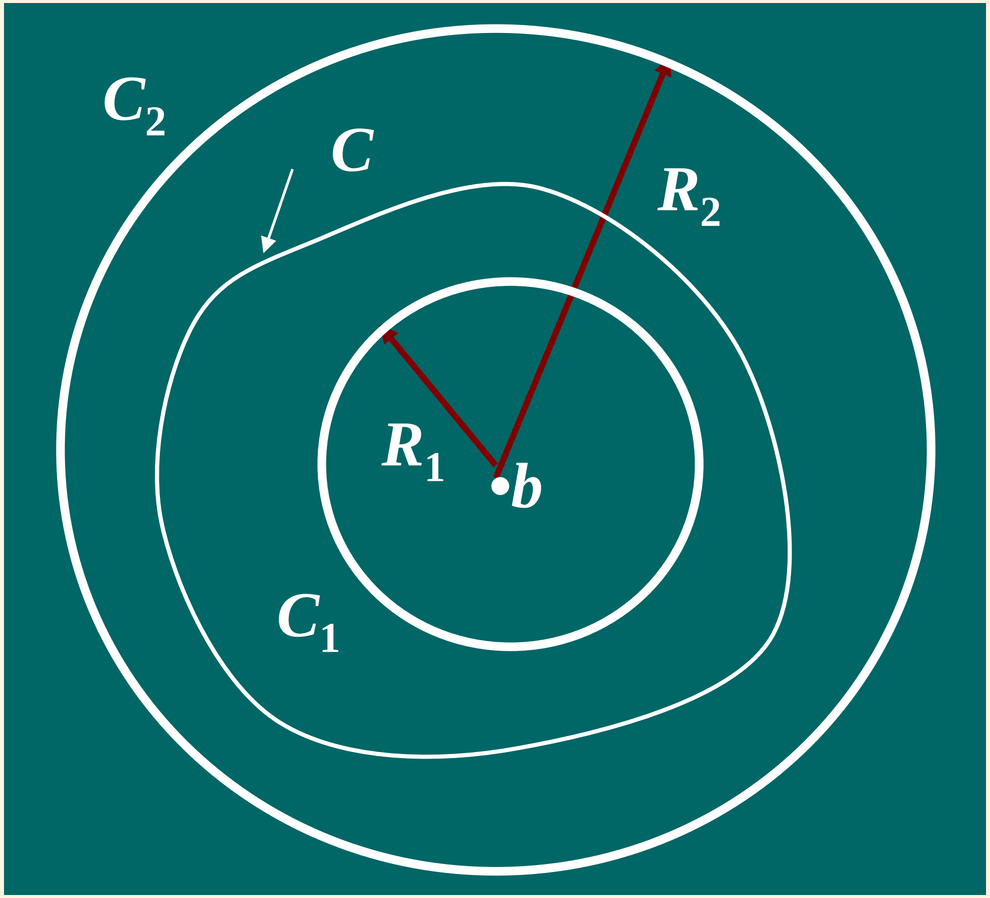
□复连通区域的Cauchy 定理

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z$$



■ Laurent展开

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-b)^n;\quad b_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$



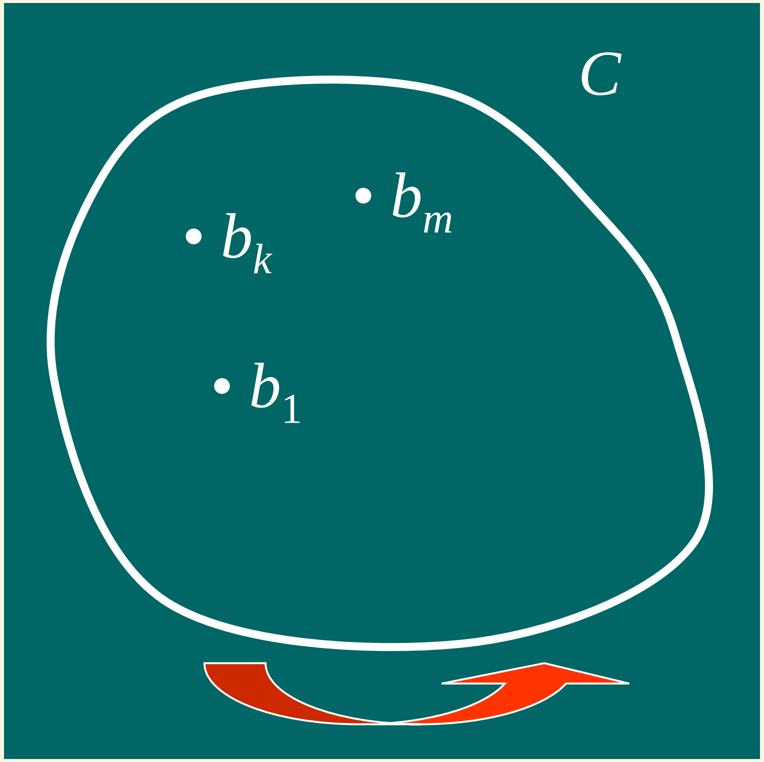
■ 留数定理

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi\mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z), b_k]$$

■ 重要积分关系

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-z_0} = \begin{cases} 0 & (z_0 \not\subset C) \\ 1 & (z_0 \subset C) \end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C (z-z_0)^n \mathrm{d}z = 0 \quad (n \neq -1)$$



■ 留数定理应用于实数积分

❑类型一 有理三角函数

$$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$$

❑类型二 无限积分

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

❑类型三 含三角函数的无限积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x \quad (a > 0)$$

❑实轴上存在单极点情况

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x; \quad \int_{-\infty}^{\infty} P(x)e^{\mathrm{i}ax}\mathrm{d}x \quad (a>0)$$

❑多值函数的积分

含有根式 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)x^{\alpha-1}\mathrm{d}x$

含有对数 $I=\int_{0}^{\infty} f(x)\ln x\mathrm{d}x$