# 第5章：Fourier变换

5.1 周期函数的Fourier 级数

与Laurent展开关系, 收敛性，Gibbs 现象

5.2 非周期函数的Fourier积分

共轭对称性，典型函数, 若干基本性质

5.3 分数导数与分数积分

分数导数定义，卷积形式，FT性质

5.4 时频分析

短时FT，不确定关系，小波变换

5.5 分数Fourier变换

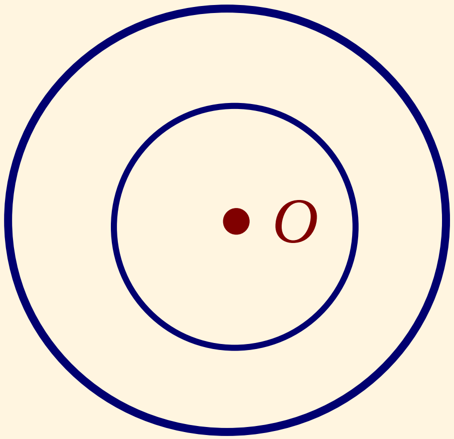
FT积分算子基本性质, 分数FT, 短时分数FT

# 5.1 周期函数的Fourier 级数展开

- Taylor、Laurent幂级数展开：①函数的奇性分析, 局部性质分析；②函数逼近；……
- 函数按正交系展开: ①信号谱分析(全局分析); ②线性微分方程的解等; ③函数逼近; ……

## ■ Fourier级数与Laurent展开的关系

考虑环域$R_1<|z|<R_2$上的Laurent级数展开




$$f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k z^k;\quad c_k=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{z^{k+1}}\mathrm{d}z$$

**在半径为$R$的圆上取值，$z = Re^{i\varphi}$ 并且取积分围道$C$为该圆(在环域内) 代入Laurent展开得到**

$$f(R,\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\mathrm{i}k\varphi}; a_k = \int_0^{2\pi} f(R,\varphi)e^{-\mathrm{i}k\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

**——周期为2π的Fourier级数**

**令 $\Phi(\varphi) \equiv f(R,\varphi)$，则周期2π的函数展开为Fourier级数**

$$\Phi(\varphi) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\mathrm{i}k\varphi}; a_k = \int_0^{2\pi} \Phi(\varphi)e^{-\mathrm{i}k\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

**Laurent级数展开 ⟷ Fourier级数展开**

——Laurent级数要求函数解析—要求太高，实际的函数由测量数据而来，不可能光滑，更不可能解析。

## ■周期函数的Fourier 级数

设函数 $f(x)$ 定义于区间$[-l,l]$上，且以$L=2l$ 为周期，延拓到整个实轴上：$f(x)=f(x+2l)$。如果 $f(x)$ 在一个周期内平方可积

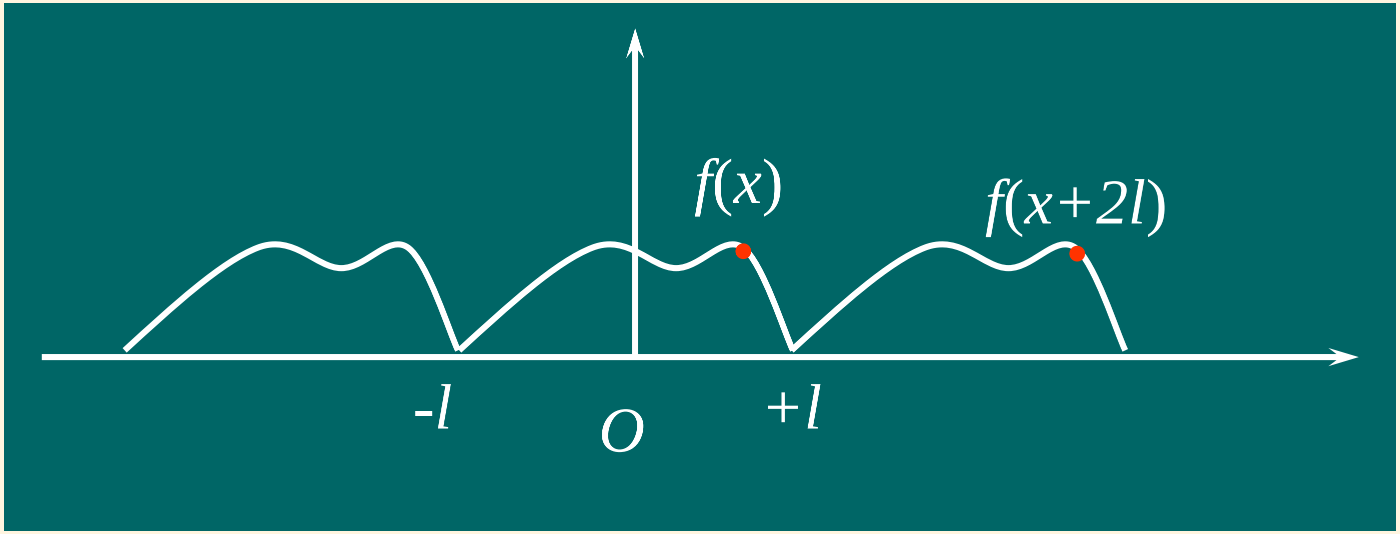
$$\int_{-l}^{l} |f(x)|^2 \,\mathrm{d}x < \infty$$

则在均方收敛的意义下， $f(x)$ 可展成Fourier 级数

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\pi x}{l}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{2n\pi x}{L}\right)$$

**其中 Fourier 展开系数 为**

$$c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}\xi\right)\mathrm{d}\xi$$




**证明：展开式的均方误差为**

$$\Delta_N \equiv \int_{-l}^{l}\left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}\right)\right|^2 \mathrm{d}x$$

## 利用

$$\left| f(x) - \sum_{n=-N}^{N} c_n \exp\left( \mathrm{i}\frac{n\pi x}{l} \right) \right|^2$$

$$= | f(x) |^2 - \sum_{m=-N}^{N} c_m^* f(x) \exp\left( -\mathrm{i}\frac{m\pi x}{l} \right)$$

$$- \sum_{n=-N}^{N} c_n f^*(x) \exp\left( \mathrm{i}\frac{n\pi x}{l} \right) + \sum_{n,m=-N}^{N} c_n c_m^* \exp\left[ \mathrm{i}\frac{(n-m)\pi x}{l} \right]$$

$$\Downarrow$$

$$\Delta_N = (f, f) - \sum_{m=-N}^{N} f_m c_m^* - \sum_{n=-N}^{N} f_n^* c_n + 2l \sum_{n=-N}^{N} c_n c_n^*$$

## 其中

$$(f,f)=\int_{-l}^{l}|f(x)|^2\,\mathrm{d}x$$

$$f_m=\int_{-l}^{l}f(x)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{m\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x;\quad \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}\exp\left[\mathrm{i}\frac{(n-m)\pi x}{l}\right]=\delta_{nm}$$

## 极小条件

$$\frac{\partial\Delta_N}{\partial c_k}=0;\quad \frac{\partial\Delta_N}{\partial c_k^*}=0\quad (k=-N,\cdots,N)$$

$$f_k^*=2lc_k^*;\quad f_k=2lc_k$$

$$c_k=\frac{1}{2l}f_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{k\pi}{l}\xi\right)\mathrm{d}\xi$$

## Bessel不等式

$$\Delta_N = (f,f) - 2l\sum_{m=-N}^{N} c_m c_m^* \ge 0$$

$$(f,f) \ge 2l\sum_{m=-N}^{N} |c_m|^2$$

$$(f,f) = 2l\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N} |c_m|^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}x\right) \\ &= c_0 + \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}x\right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} \exp\left(-\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}x\right) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}x\right) \\ &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[c_{-n}^* \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}x\right)\right]^* + c_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}x\right) \\ &= c_0 + 2\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\left[c_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}x\right)\right] \end{aligned}}$$

## 共轭对称性：*f*(*x*)实函数

$$c_{-n}^* = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\exp(-\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}\xi)\mathrm{d}\xi = c_n$$

## 优点和缺点

$$f(x) \approx \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}x\right); c_n = \frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}\xi\right)\mathrm{d}\xi$$

$$f(x) \approx \frac{1}{2l}\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{l}x}; \quad a_k = \int_{-l}^{l} f(\xi)e^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{l}\xi}\mathrm{d}\xi.$$

**优点:**

- **简洁的展开式，在计算机快速Fourier 变换(FFT)中应用;**
- **便于推广到非周期函数的Fourier积分（更有意义，见后面讨论）。**

**缺点：对有奇偶性的周期函数，比较麻烦。**

## 三角函数形式

$$f(x)\approx\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\exp\left[-\mathrm{i}\frac{n\pi}{l}(\xi-x)\right]\mathrm{d}\xi$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}(\xi-x)\mathrm{d}\xi-\mathrm{i}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}(\xi-x)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}(\xi-x)\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$a_n\equiv\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\mathrm{d}\xi;\ b_n\equiv\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\left(\frac{n\pi}{l}\xi\right)\mathrm{d}\xi$$

**注意关系**

$$\boxed{\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2l}\int_{-l}^{+l}f(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}(\xi-x)\mathrm{d}\xi=0}$$

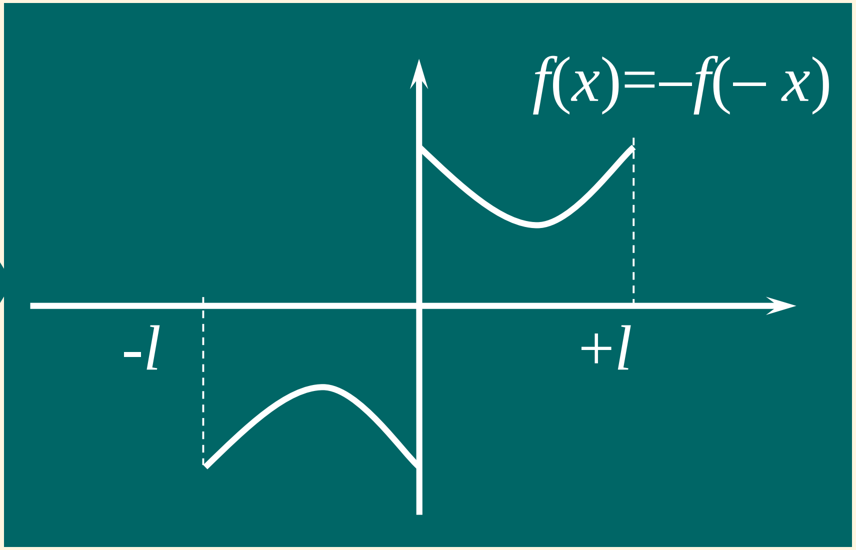
## ❑奇函数: $f(x) = -f(-x)$

$$a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x = 0 \ (n = 0,1,2,\ldots.)$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_{0}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x \ (n = 1,2,\ldots.)$$

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right]\sin\frac{k\pi}{l}x$$

**注意: 奇函数展开时，级数在边界 $x=\pm l$处收敛到零；但是函数 $f(x)$ 不一定有这样的性质**



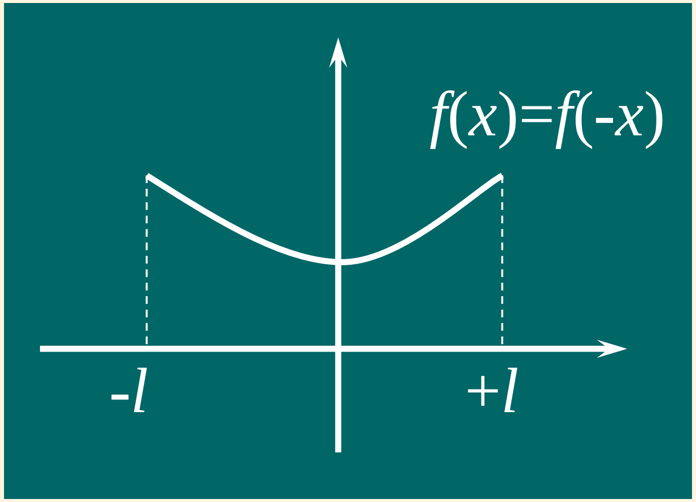
## ❑偶函数: $f(x)=f(-x)$

$$a_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\ (n=0,1,2,\ldots.)$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^l f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x=0\ (n=1,2,\ldots.)$$

$$f(x)\approx\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi\right]\cos\frac{k\pi}{l}x$$

**注意: 偶函数展开时, 级数在边界 $x=\pm l$ 的导数收敛零; 函数 $f(x)$ 不一定有这样的性质**



# 例1：方波的Fourier展开, 在一个周期内

$$f(t)=\begin{cases}\pi/2, & 0<t<\pi \\ 0, & t=0,\ \pm\pi \\ -\pi/2, & -\pi<t<0\end{cases}$$

$$f(t)\approx 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin[(2n-1)t]}{2n-1}$$

**基波频率**

$\omega_{min}=1$

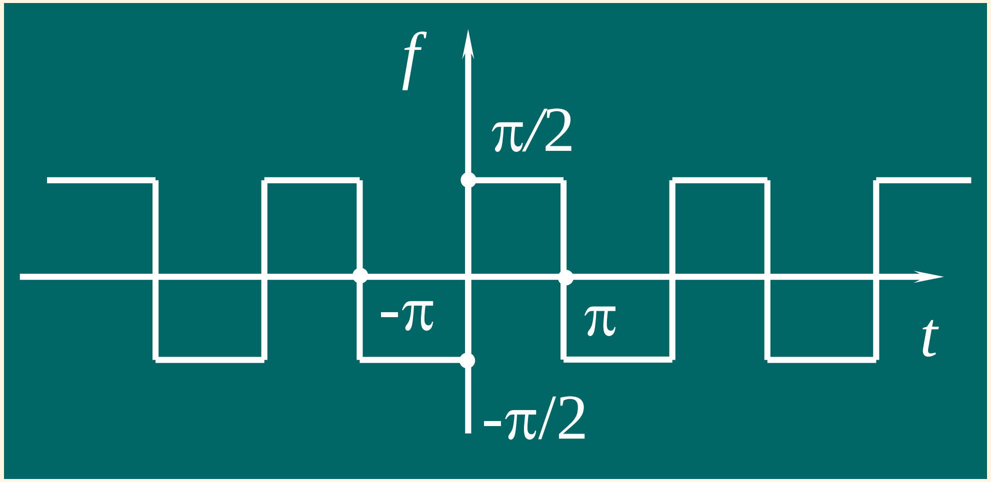
**谐波频率**

$\omega_n=2n-1$

**特点**

**没有二次谐波**

**$t$=0和 ±π 是第一类间断点**



## 例2：锯齿波的Fourier展开, 在一个周期内

$$f(t)=t,\quad -l<t<l.$$

$$f(t)\approx\frac{2l}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{l}t\right)$$

基波频率

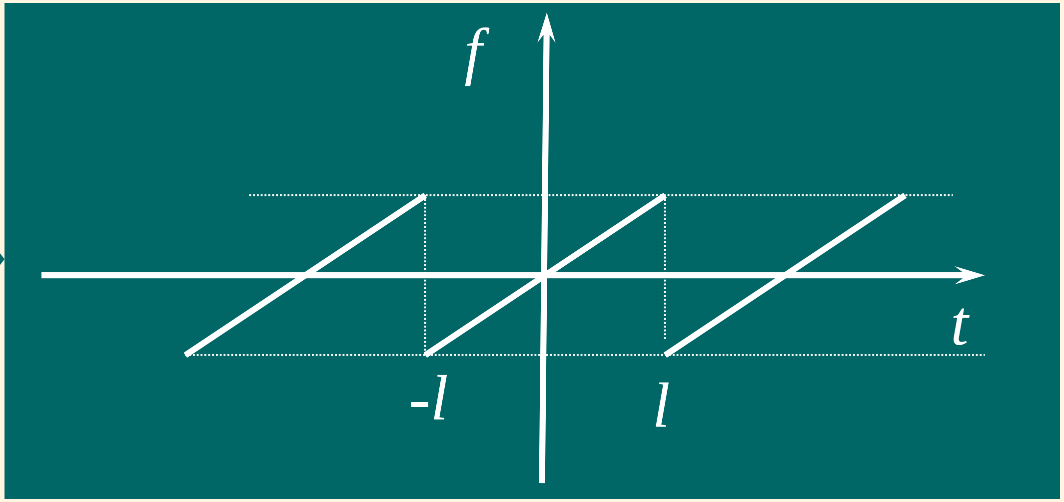
$\omega_{\min}=\pi/l$

谐波频率

$\omega_n=n\pi/l$

**特点**

**丰富的各次谐波，$t=\pm l$ 是第一类间断点**



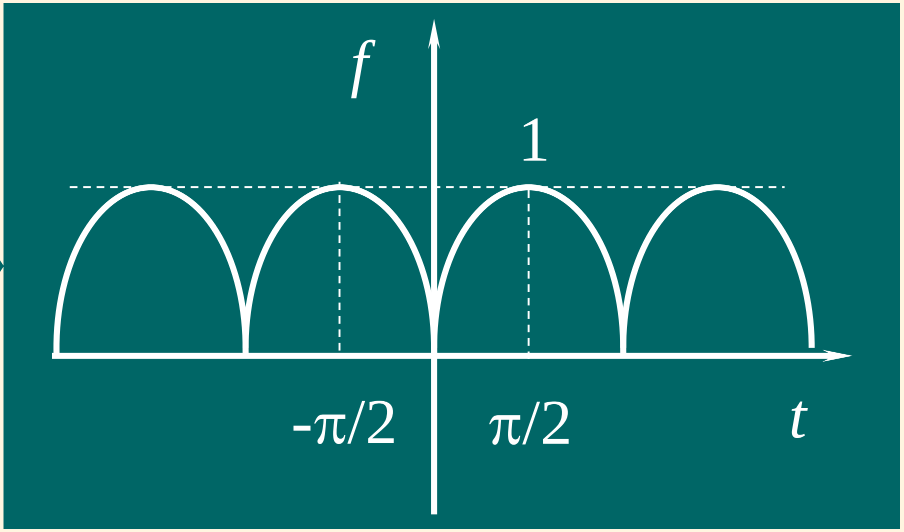
## 例3：整流信号的Fourier展开, 在一个周期内

$$f(t)=|\sin t|,\quad -\pi/2<t<\pi/2$$

$$f(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2nt}{(2n-1)(2n+1)}$$

**高次谐波以$1/n^2$衰减故能量小**

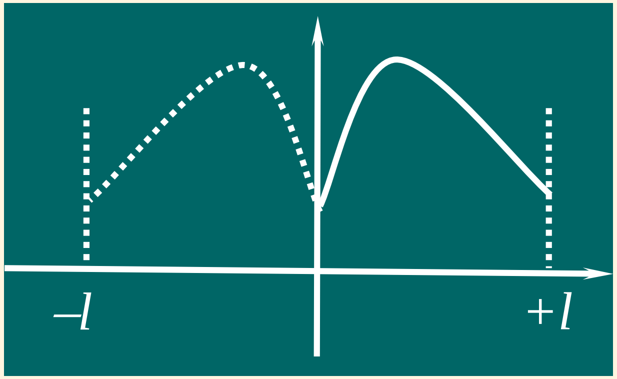
**特点**
**整流后产生直流信号,无基频信号主要是倍频信号**



## ■ 有限区间的Fourier级数

**函数定义在有限区间$(0,l)$内，周期延拓到整个实轴$(-\infty,+\infty)$**

### ■ 偶延拓




$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,l) \\ f(-x), & x\in(-l,0) \end{cases}$$

**端点**

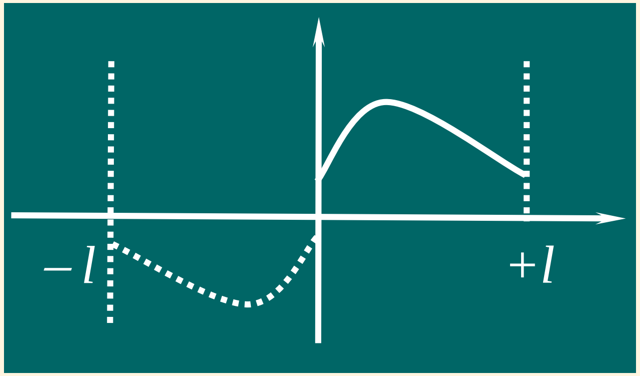
$$F'(0)=F'(l)=0$$ ⟸ **物理问题要求作偶延拓**

$$f(x)\approx\frac{1}{l}\int_0^l f(\xi)\mathrm{d}\xi+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi}{l}x\quad(0<x<l)$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\cos\frac{k\pi}{l}\xi\mathrm{d}\xi$$

## ■ 奇延拓

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,l) \\ -f(-x), & x\in(-l,0) \end{cases}$$




**端点**

$$F(0)=F(l)=0$$ ⟵ **物理问题要求作奇延拓**

$$f(x)\approx\sum_{k=1}^{\infty}a_k\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right);\ a_k=\frac{2}{l}\int_0^l f(\xi)\sin\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right)\mathrm{d}\xi$$

**如果物理问题要求端点如下，如何延拓?**

$$F'(0)=F(l)=0 \text{ 或者 } F(0)=F'(l)=0$$

$$\text{或者}\quad aF(0)+bF'(0)=0$$

**——广义Fourier展开—展开函数变化**

## ■ 多重Fourier级数：如果三维周期函数

$$f(x,y,z) = f(x+2l_x, y+2l_y, z+2l_z)$$

**平方可积**

$$\int_{-l_x}^{l_x}\int_{-l_y}^{l_y}\int_{-l_z}^{l_z} |f(x,y,z)|^2 \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z < \infty$$

**则三维Fourier级数**

$$f(x,y,z) = \frac{1}{8l_xl_yl_z}\sum_{k,m,n=-\infty}^{\infty} c_{kmn}\exp\left[\mathrm{i}\pi\left(\frac{k}{l_x}x+\frac{m}{l_y}y+\frac{n}{l_z}z\right)\right]$$

$$c_{kmn} = \int_{-l_x}^{l_y}\int_{-l_y}^{l_y}\int_{-l_z}^{l_z} f(\xi,\eta,\mu)\exp\left[-\mathrm{i}\pi\left(\frac{k}{l_x}\xi+\frac{m}{l_y}\eta+\frac{n}{l_z}\mu\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\mu.$$

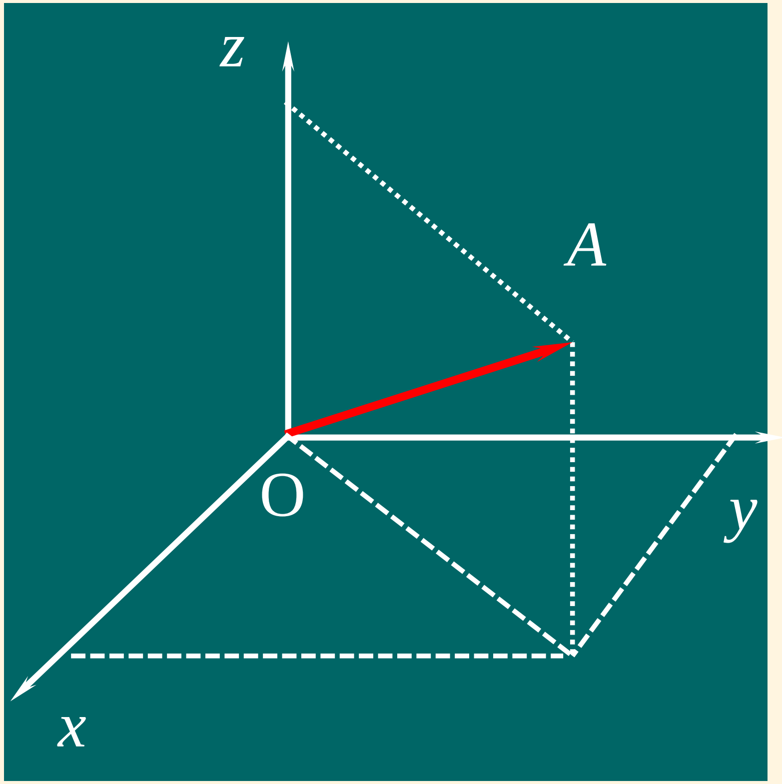
■ **Fourier 级数的收敛性**

■ **与$n$维矢量的比较**

■ **三维空间：基矢量$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$**

**正交归一性** $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$

**任意矢量** $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{e}_1 + y\boldsymbol{e}_2 + z\boldsymbol{e}_3$




■ **$n$ 维空间：正交基矢量**

$$(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \ldots\ldots, \boldsymbol{e}_n)$$

**正交归一性** $\boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}_j = \delta_{ij}$

**任意矢量** $\boldsymbol{A} = a_1\boldsymbol{e}_1 + a_2\boldsymbol{e}_2 + \ldots\ldots + a_n\boldsymbol{e}_n \Leftarrow a_k = \boldsymbol{e}_k \cdot \boldsymbol{A}$

## ■ 无限维周期函数空间

**①复数形式基矢量** $\left\{\varphi_k(x)=\frac{1}{\sqrt{2l}}e^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{l}x}, k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ldots\right\}$

**正交归一性** $$\int_{-l}^{l}\varphi_k(x)\varphi_m^*(x)\mathrm{d}x=\delta_{km}$$ ⇐ **Kronecker delta**

**任意矢量*f*(*x*)** $$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}g_k\varphi_k(x)$$

$$g_k=\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-\mathrm{i}\frac{k\pi}{l}\xi}\mathrm{d}\xi\equiv(\varphi_k, f)$$

**②实数形式基矢量**

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi_k^s(x)=\sqrt{\frac{1}{l}}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right);\varphi_k^c(x)=\sqrt{\frac{1}{l}}\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots\end{array}\right\}$$

## 正交归一性

$$\int_{-l}^{l}\varphi_k^s(x)\varphi_m^s(x)\mathrm{d}x=\delta_{km};\quad \int_{-l}^{l}\varphi_k^c(x)\varphi_m^c(x)\mathrm{d}x=\delta_{km}$$

## 任意矢量*f*(*x*)

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k^c(x)+\sum_{k=1}^{\infty}b_k\varphi_k^s(x)$$

■ 二个正交子空间

$$\left\{\begin{array}{c}\varphi_k^s(x)=\sqrt{\frac{1}{l}}\sin\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots.\end{array}\right\};\quad \left\{\begin{array}{c}\varphi_k^c(x)=\sqrt{\frac{1}{l}}\cos\left(\frac{k\pi}{l}x\right)\\ k=0,\ 1,\ 2,\ldots.\end{array}\right\}$$

$$\Downarrow$$

$$\int_{-l}^{l}\varphi_k^s(x)\varphi_m^c(x)\mathrm{d}x=0$$

**二个基本问题**

① 无穷级数的收敛性质如何?

② 是否存在其它函数系，起基函数作用?

■ **Fourier 级数的收敛性：若周期函数 $f(x)$ 在每个周期中只有有限个第一类间断点，并且在每个周期只有有限个极值点，则 (注意：充分条件)**

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=0}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{k\pi}{l}x+b_n\sin\frac{k\pi}{l}x\right)$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{\mathrm{i}\frac{k\pi}{l}x}=\begin{cases} f(x) & (\text{连续点}) \\ \dfrac{1}{2}\left[f(x_0+0)+f(x_0-0)\right] & (\text{间断点}) \end{cases}$$

**证明**

$$f_N(x)\approx\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{n\pi}{l}(\xi-x)\mathrm{d}\xi\right]$$

$$=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(\xi)\left[\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{N}\cos\frac{n\pi}{l}(\xi-x)\right]\mathrm{d}\xi$$

即

这一步用到了点鞭炮公式

$$f_N(x) \approx \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(\xi)\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)\frac{(\xi-x)\pi}{l}\right]}{2\sin\frac{(\xi-x)\pi}{2l}}\mathrm{d}\xi$$

利用（第7章）

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{2\pi}\frac{\sin\left[\left(N+\frac{1}{2}\right)x\right]}{\sin\frac{x}{2}} = \delta(x); \quad \delta(ax) = \frac{1}{|a|}\delta(x)$$

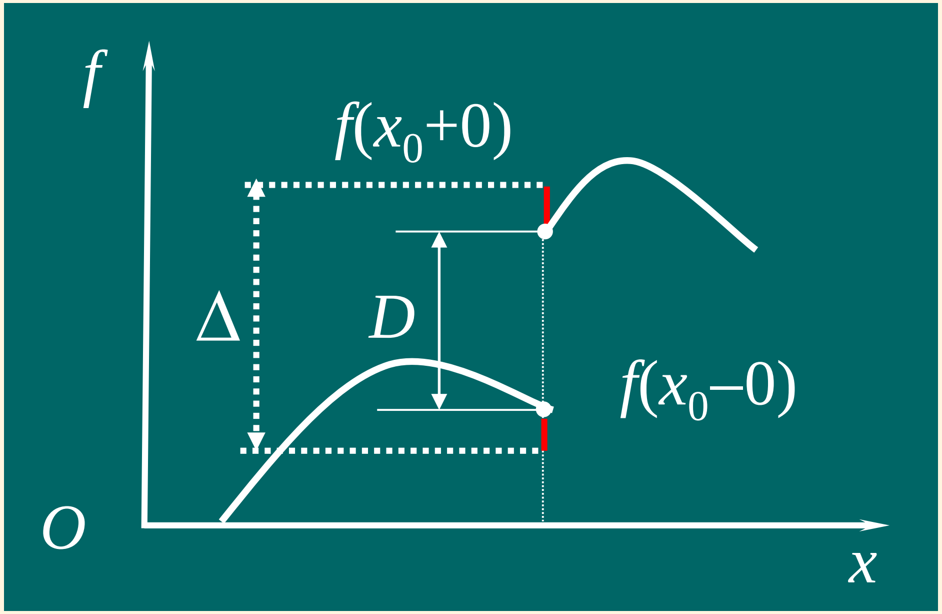
得到

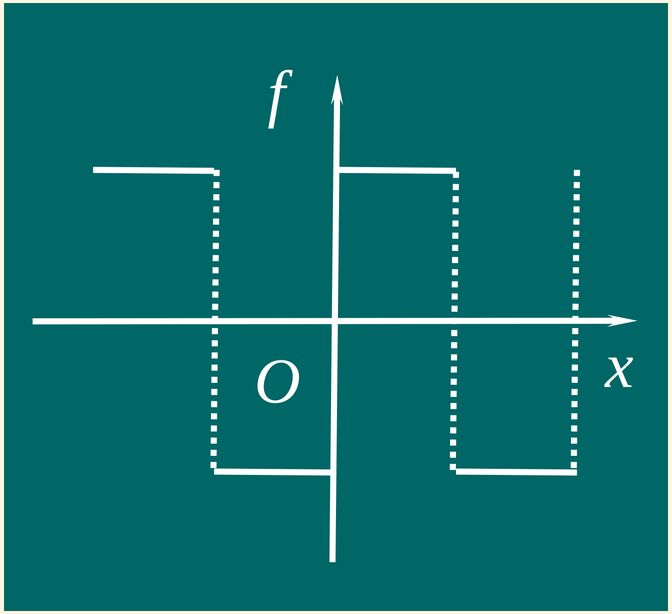
$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_n \cos\frac{k\pi}{l}x + b_n \sin\frac{k\pi}{l}x = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{\mathrm{i}k\pi}{l}x} = \lim_{N\to\infty} f_N(x)$$

$$= \int_{-l}^{+l} f(\xi)\delta(x-\xi)\mathrm{d}\xi = \begin{cases} f(x) & x\in C \\ \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)] & x\notin C \end{cases}$$

## ■ Gibbs 现象

**间断点的跳跃量** $\Delta=(1+2\mu)D;\ 1+2\mu=1.17897975$




## 例：方波的Fourier变换

$$f(x)=\begin{cases}+1, & x\in(0,+\pi)\\ 0, & x=0,\pm\pi\\ -1, & x\in(-\pi,0)\end{cases}$$

$2l=2\pi$

## ■ Fourier级数

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left(\sin x+\frac{1}{3}\sin 3x+\ldots\right)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1}$$

**部分和**

$$s_N(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\frac{\sin[(2k-1)x]}{2k-1}$$

**一阶导数**

$$s_N'(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{N}\cos[(2k-1)x]=\frac{2}{\pi}\frac{\sin(2Nx)}{\sin x}$$

**因此**

$$s_N(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x\frac{\sin(2Nt)}{\sin t}\mathrm{d}t$$

## 利用关系

$$\int_0^x g(t)\sin(2Nt)\mathrm{d}t = O(N^{-1}) \quad (N\to\infty)$$

$$\int_0^x g(t)\sin(2Nt)\mathrm{d}t = -\frac{1}{2N}\int_0^x g(t)\mathrm{d}[\cos(2Nt)]$$

$$= -\frac{1}{2N}\left[\cos(2Nt)g(t)\Big|_0^x - \int_0^x \cos(2Nt)g'(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$= -\frac{1}{2N}\left[\cos(2Nx)g(x) - \int_0^x \cos(2Nt)g'(t)\mathrm{d}t\right]$$

## 取

$$g(t) = \frac{1}{\sin t} - \frac{1}{t} \Rightarrow \int_0^x \frac{\sin(2Nt)}{\sin t}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{\sin(2Nt)}{t}\mathrm{d}t \quad (N\to\infty)$$

有点Taylor的意思

$$s_N(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^x \frac{\sin(2Nt)}{t}\mathrm{d}t \quad (N\to\infty)$$

- **左极限：从左边趋向原点** $x^- = -\pi/(2N)$

$$\lim_{N\to\infty} s_N\left(-\frac{\pi}{2N}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{-\pi/(2N)}\frac{\sin(2Nt)}{t}\mathrm{d}t$$

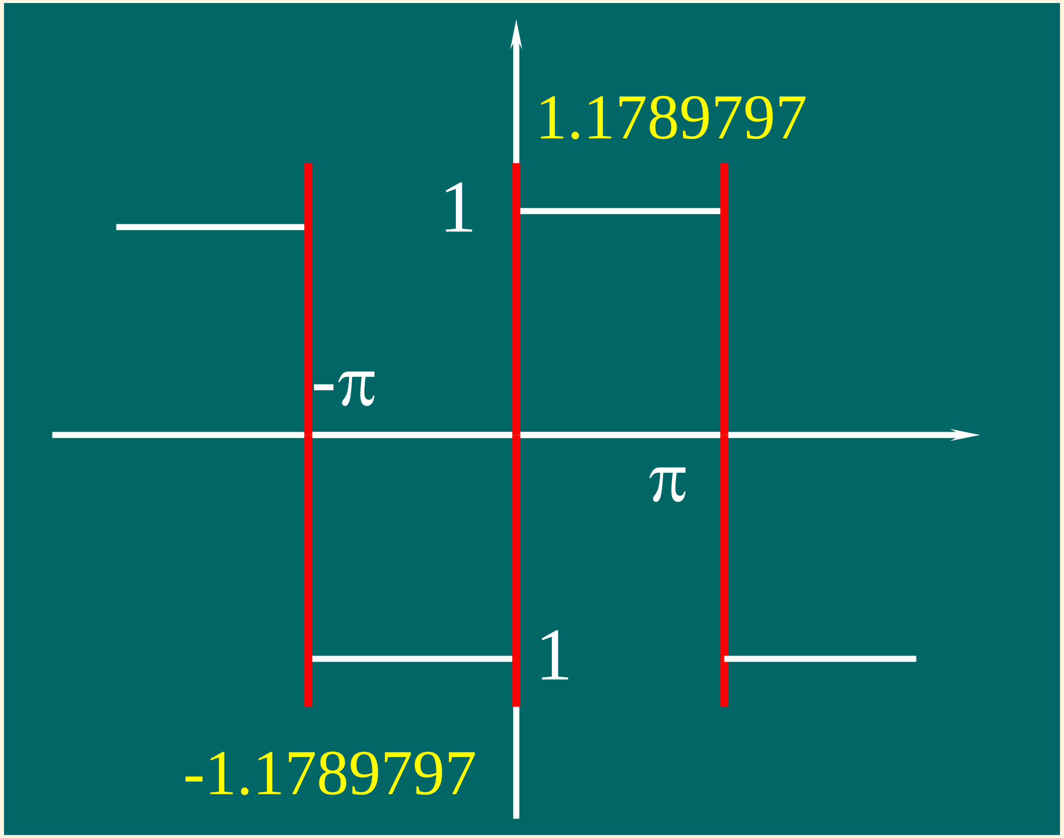
$$=-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi=-1.1789797$$

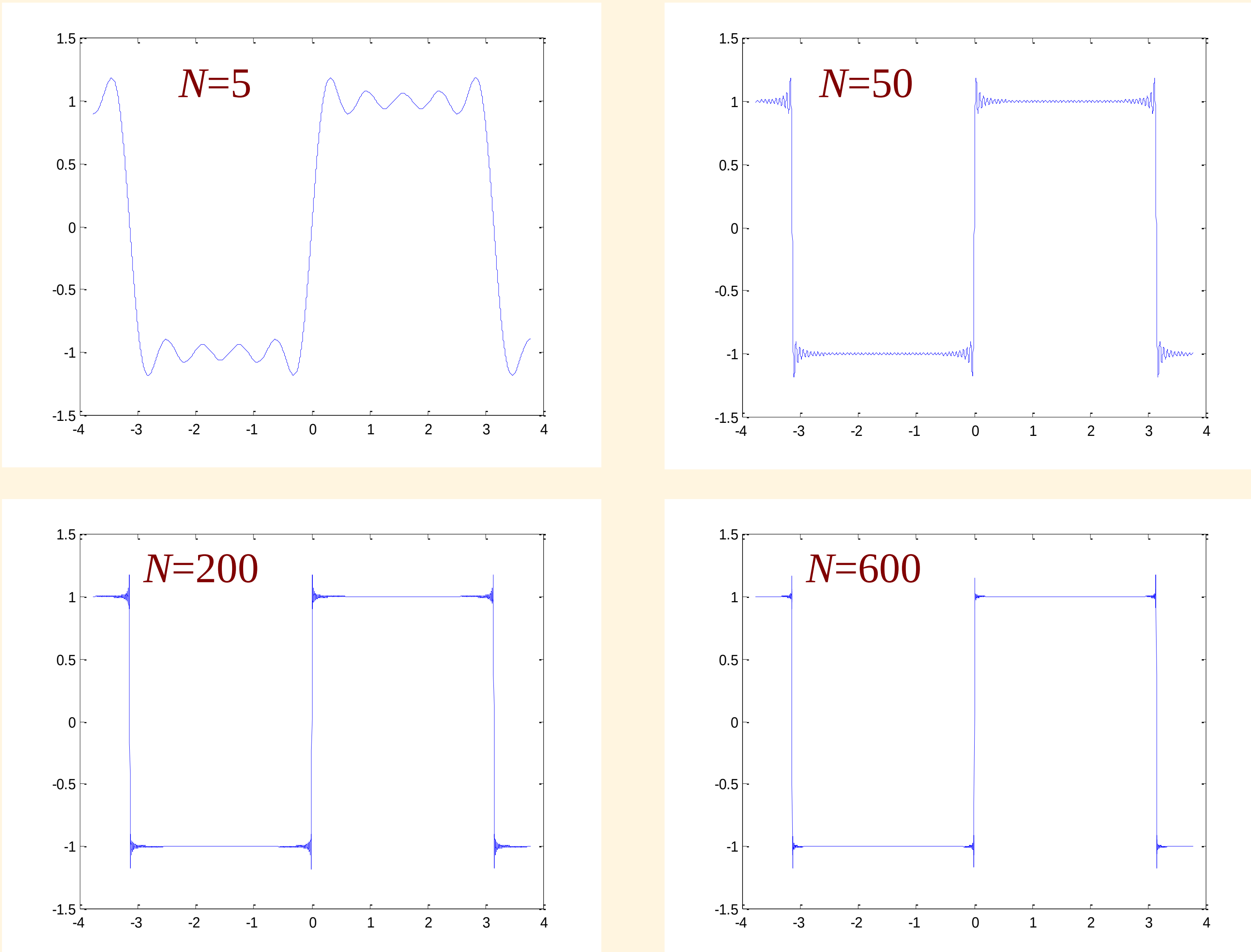
- **右极限：从右边趋向原点** $x^+ = \pi/(2N)$

$$\lim_{N\to\infty} s_N\left(+\frac{\pi}{2N}\right)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\pi/(2N)}\frac{\sin(2Nt)}{t}\mathrm{d}t$$

$$=+\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin\xi}{\xi}\mathrm{d}\xi=1.1789797$$

## Gibbs现象：在间断点，级数收敛到1.1789797而不是原来的1




N=5
N=50
N=200
N=600
1.5
1
0.5
0
-0.5
-1
-1.5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4

# 5.2 非周期函数的Fourier积分

■ **Fourier 积分：考虑 $f(x)$ 定义在整个实轴上, 非周期函数可看作周期函数的周期趋向无穷大，即 $l\to\infty$ , 令**

$$k_m=\frac{m\pi}{l}\Rightarrow \Delta k_m=k_{m+1}-k_m=\frac{\pi}{l}\Rightarrow\frac{1}{2l}=\frac{\Delta k_m}{2\pi}$$

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k_m=-\infty}^{\infty}g(k_m)e^{\mathrm{i}k_m x}\Delta k_m;\ \ g(k_m)=\int_{-l}^{l}f(\xi)e^{-\mathrm{i}k_m\xi}\mathrm{d}\xi$$

■ **Fourier 变换对**

$$\boxed{f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}g(k)e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k;\ \ g(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi}$$

■ **对称形式 令**

$$G(k) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} g(k)$$

**Fourier 变换对的对称形式为**

$$\boxed{f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) e^{\mathrm{i}kx} \mathrm{d}k;\quad G(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-\mathrm{i}k\xi} \mathrm{d}\xi.}$$

**——*G*(*k*)称为*f*(*x*)的Fourier积分，记为**

$$G(k) = \mathfrak{J}[f(x)]$$

**——*f*(*x*)称为*F*(*k*)的逆Fourier积分，记为**

$$f(x) = \mathfrak{J}^{-1}[G(k)]$$

**——事实上，*f*(*x*)和*G*(*k*)互为逆Fourier积分**

## ■ 共轭对称性 实信号

这个证明不是很好，可以直接有f(x)=f*(x)简单得出！

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}G(-k)\exp(-\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}G(k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left[\int_{0}^{\infty}G^{*}(-k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k\right]^{*}+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{0}^{\infty}G(k)\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k$$

$$\operatorname{Im} f(x)\equiv 0\Rightarrow \operatorname{Im}\int_{0}^{\infty}[G(k)-G^{*}(-k)]\exp(\mathrm{i}kx)\mathrm{d}k\equiv 0$$

$$\boxed{\begin{gathered}G(k)=G^{*}(-k)\\ \operatorname{Re}G(k)=\operatorname{Re}G(-k);\operatorname{Im}G(k)=-\operatorname{Im}(-k)\end{gathered}}$$

**——实部：偶函数；虚部：奇函数**

## ■ 实的时间信号

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega;\quad G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\underset{t}{\cancel{\omega}}.$$

**频率(圆频率)**

**可测量的物理量，物理上$\omega$ >0；但是数学上，exp(i$\omega t$)的完备性要求我们必须知道从–∞到∞的频率分量。因此把$G(\omega)(\omega>0)$延拓到$\omega$<0区域：**

**实部：偶函数，作偶延拓展**
**虚部：奇函数，作奇延拓展**

**——例如：界面上，瞬态波的反射和透射**

## ■ 无限维平方可积分函数空间(Hilbert空间)

**基矢量**

$$\left\{\varphi(k,x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\mathrm{i}kx},(-\infty<k<\infty)\right\}$$

**正交归一性**

$$\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(k,x)\varphi^*(k',x)\mathrm{d}x=\delta(k-k')$$

**Dirac delta**

**任意矢量*f*(*x*) (平方可积函数)**

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}g(k)\varphi(k,x)\mathrm{d}k$$

$$g(k)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\varphi^*(k,x)\mathrm{d}\xi\equiv(\varphi,f)$$

## ■ Fourier积分的收敛性质

定义在(–∞,∞)的分段连续、绝对可积函数

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \mathrm{d}x < \infty$$

主值意义下的积分

则存在平均收敛关系

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi\right]e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

证明

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi\right]e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\mathrm{i}k(\xi-x)}\mathrm{d}\xi\right]\mathrm{d}k$$

由于

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\mathrm{i}k(\xi-x)}\mathrm{d}\xi\right| \le \int_{-\infty}^{\infty} |f(\xi)|\mathrm{d}\xi < \infty$$

左式绝对一致收敛，故可交换顺序

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-\mathrm{i}k\xi}\mathrm{d}\xi\right]e^{\mathrm{i}kx}\mathrm{d}k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}k(\xi-x)}\mathrm{d}k\right]\mathrm{d}\xi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left\{\lim_{N\to\infty}\int_{-N}^{+N}\cos[k(\xi-x)]\mathrm{d}k\right\}\mathrm{d}\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\left\{\lim_{N\to\infty}\frac{\sin N(\xi-x)}{\pi(\xi-x)}\right\}\mathrm{d}\xi$$

主值意义下的积分

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(\xi-x)\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2}[f(x-0)+f(x+0)]$$

于是结论得证。

## ■ 二维Fourier积分：绝对可积的分段连续函数

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|f(x_1,x_2)|\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2<\infty$$

**可展成Fourier积分**

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(k_1,k_2)e^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2$$

$$G(k_1,k_2)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)e^{-\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

**证明：1、首先把$x_2$看作常数**

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(k_1,x_2)e^{\mathrm{i}k_1x_1}\mathrm{d}k_1$$

$$g(k_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)e^{-\mathrm{i}k_1x_1}\mathrm{d}x_1$$

## 2、再求 $g(k_1,x_2)$ 的Fourier展开

$$G(k_1,k_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}g(k_1,x_2)e^{-\mathrm{i}k_2x_2}\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)e^{-\mathrm{i}k_1x_1}\mathrm{d}x_1\right]e^{-\mathrm{i}k_2x_2}\mathrm{d}x_2$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1,x_2)e^{-\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x_1,x_2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(k_1,k_2)e^{\mathrm{i}k_2x_2}\mathrm{d}k_2\right]e^{\mathrm{i}k_1x_1}\mathrm{d}k_1$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}G(k_1,k_2)e^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2)}\,\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2$$

## ■ 三维Fourier积分

$$f(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint G(k_1,k_2,k_3)e^{\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}\mathrm{d}k_1\mathrm{d}k_2\mathrm{d}k_3$$

$$G(k_1,k_2,k_3)=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint f(x_1,x_2,x_3)e^{-\mathrm{i}(k_1x_1+k_2x_2+k_3x_3)}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3$$

**矢量形式**

$$\boldsymbol{r}=(x_1,x_2,x_3);\quad \boldsymbol{k}=(k_1,k_2,k_3)$$

$$f(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint G(\boldsymbol{k})e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

$$G(\boldsymbol{k})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint f(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}$$


39

**例：Hankel变换 设二维函数在极坐标下与角度无关**

$$f(\rho,\varphi)=f(\rho)$$

**求Fourier变换的形式。**

**解：考虑二维 Fourier 变换对**

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}g(k_x,k_y)e^{\mathrm{i}(k_x x+k_y y)}\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y$$

$$g(k_x,k_y)=\frac{1}{2\pi}\iint_{-\infty}^{\infty}f(x,y)e^{-\mathrm{i}(k_x x+k_y y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

**在极坐标下**

$$x=\rho\cos\varphi;\quad y=\rho\sin\varphi$$

$$k_x=k\cos\vartheta;\quad k_y=k\sin\vartheta$$

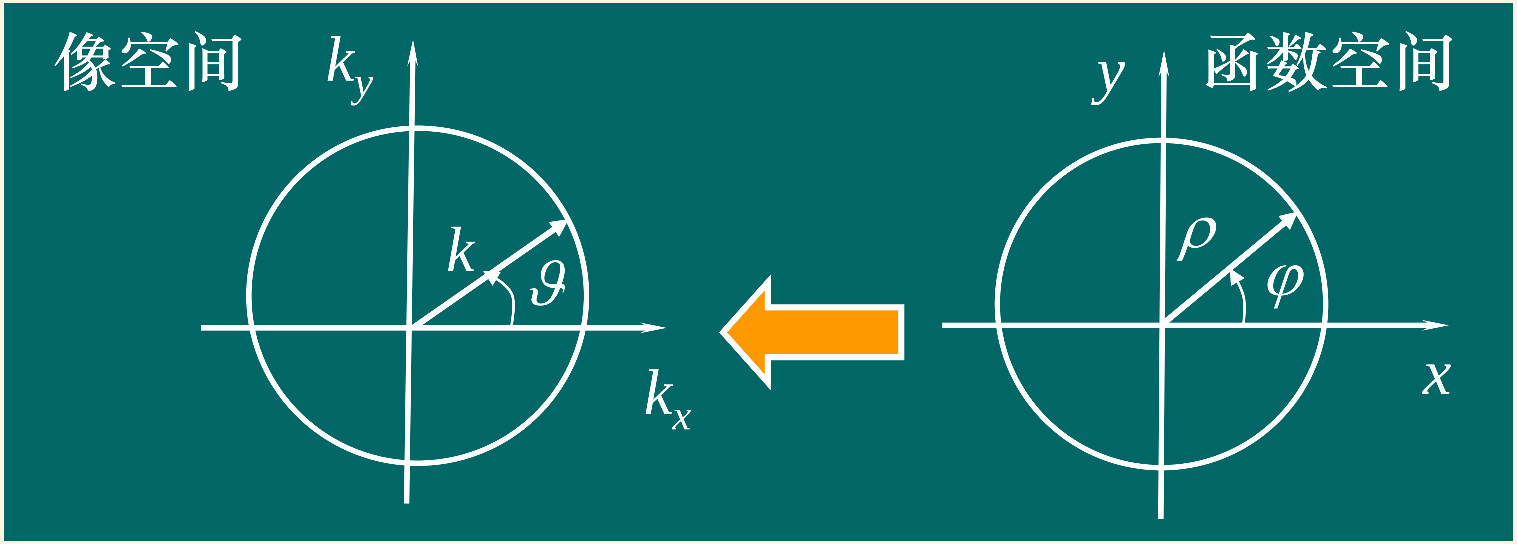
**因此**

$$f(\rho,\varphi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}g(k\cos\vartheta,k\sin\vartheta)e^{\mathrm{i}k\rho\cos(\vartheta-\varphi)}k\mathrm{d}k\mathrm{d}\vartheta$$

$$g(k,\vartheta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}f(\rho\cos\varphi,\rho\sin\varphi)e^{-\mathrm{i}k\rho\cos(\vartheta-\varphi)}\rho\mathrm{d}\rho\mathrm{d}\varphi$$

**如果**

$$f(\rho,\varphi)=f(\rho)$$



**应有**

$$g(k,\vartheta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{2\pi}f(\rho)e^{-\mathrm{i}k\rho\cos(\varphi-\vartheta)}\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{\infty}f(\rho)J_0(k\rho,\vartheta)\rho\,\mathrm{d}\rho$$

$$J_0(k\rho,\vartheta)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{i}k\rho\cos(\varphi-\vartheta)}\mathrm{d}\varphi$$

**事实上，上式积分与$\vartheta$无关**

$$\frac{\mathrm{d}J_0(k\rho,\vartheta)}{\mathrm{d}\vartheta}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(-\mathrm{i}k)\rho\sin(\varphi-\vartheta)e^{-\mathrm{i}k\rho\cos(\varphi-\vartheta)}\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{i}k\rho\cos(\varphi-\vartheta)}\mathrm{d}[\mathrm{i}k\rho\cos(\varphi-\vartheta)]=-\frac{1}{2\pi}e^{-\mathrm{i}k\rho\cos(\varphi-\vartheta)}\Big|_0^{2\pi}=0$$

**因此，可取 $\vartheta=0$， 于是 $J_0(k\rho)$ 是零阶Bessel 函数**

$$J_0(k\rho)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-\mathrm{i}k\rho\cos\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

**可得到变换对**

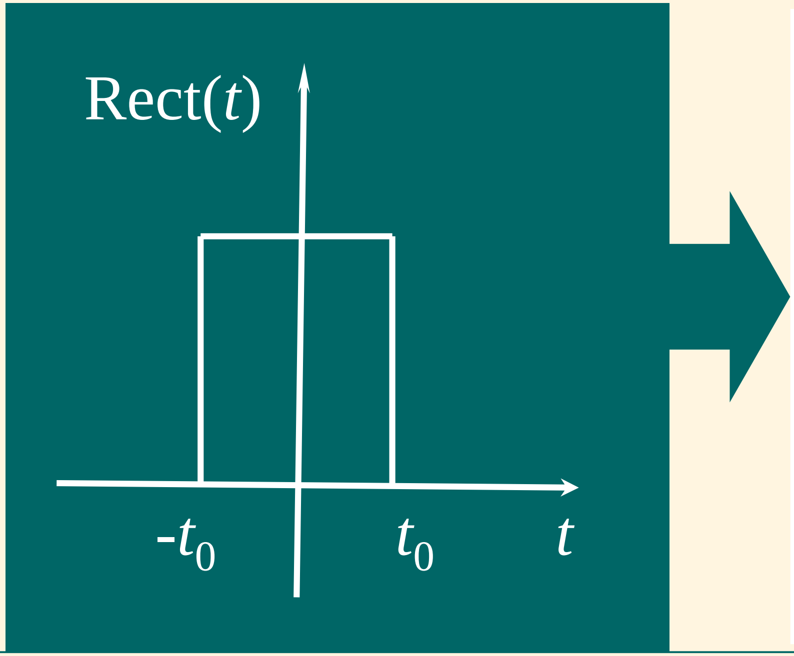
$$\boxed{\begin{aligned} f(\rho)&=\int_0^{\infty}g(k)J_0(k\rho)k\mathrm{d}k \\ g(k)&=\int_0^{\infty}f(\rho)J_0(k\rho)\rho\mathrm{d}\rho \end{aligned}}$$

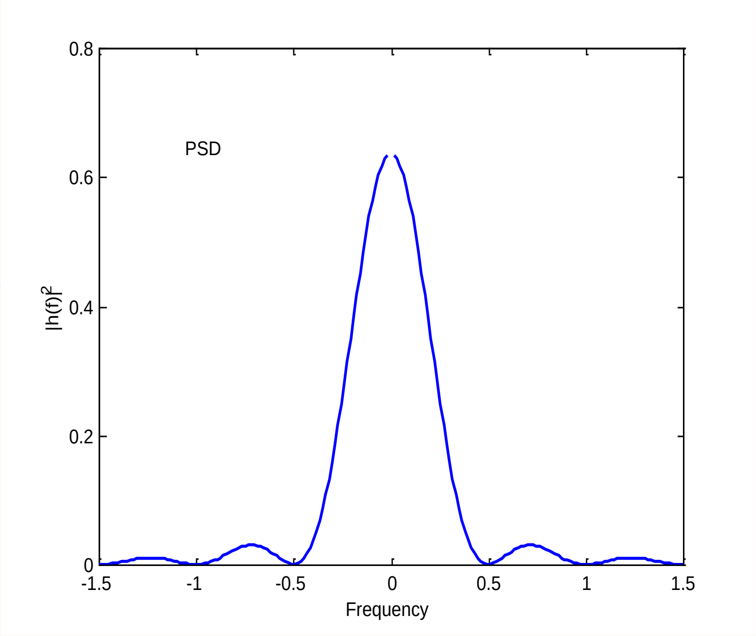
**——这一变换对称为零阶 Hankel 变换。在解径向对称问题时，经常用到。**

## 例1 方波脉冲的 Fourier 变换(物理例子：Y干涉；数学意义：局域函数的谱)

$$\mathrm{rect}(t)=\begin{cases}1, & |t|<t_0\\ 0, & |t|>t_0\end{cases}$$

$$G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-t_0}^{t_0}e^{-\mathrm{i}\omega\xi}\mathrm{d}\xi=t_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\omega t_0}{\omega t_0}$$



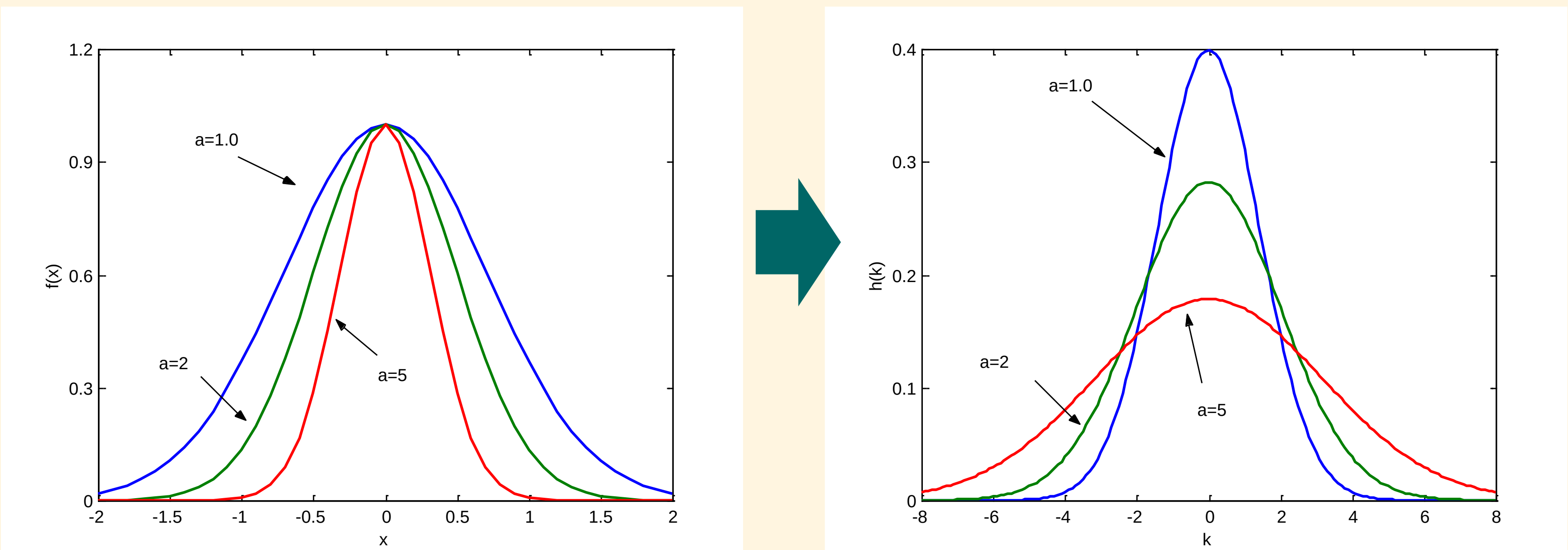



## 例2 Gauss 分布的 Fourier 变换（数学意义：速降函数的谱）

$$f(x)=e^{-ax^2}$$

$$G(k)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-ax^2}\cdot e^{-\mathrm{i}kx}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{2a}}e^{-\frac{k^2}{4a}}$$

**Gauss 分布的 Fourier 变换仍然是 Gauss 分布**



## Fourier 变换的若干性质

**线性变换(重要性质)：设**

$$\mathfrak{I}[f_1(t)] = G_1(\omega); \quad \mathfrak{I}[f_2(t)] = G_2(\omega)$$

**那么对任意常数$c_1$和$c_2$**

$$\mathfrak{I}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] = c_1 G_1(\omega) + c_2 G_2(\omega)$$

**事实上**

$$\begin{aligned}
&\mathfrak{I}[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)] \\
&= c_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_1(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t + c_2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t \\
&= c_1 G_1(\omega) + c_2 G_2(\omega)
\end{aligned}$$

**微分性质: 如果** $\lim\limits_{t\to\pm\infty} f(t)=0$**，那么**

$$\mathfrak{J}[f'(t)]=(\mathrm{i}\omega)G(\omega)=(\mathrm{i}\omega)\mathfrak{J}[f(t)]$$

**证明**

$$\mathfrak{J}[f'(t)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f'(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{(-\mathrm{i}\omega)}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\mathrm{i}\omega\mathfrak{J}[f(t)]$$

**——时间域求导数，相当于频率域相乘——能使问题大大简化——把微分方程化成代数方程**

$\boxed{\text{变换关系}\quad \mathrm{d}/\mathrm{d}t \Leftrightarrow \mathrm{i}\omega}$

**注意：如果FT对定义为**

这样的定义一般在波的传播中涉及到（时间和空间分开考虑，变换规则不同），见例2！

$$f(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}G(\omega)\boxed{e^{-\mathrm{i}\omega t}}\mathrm{d}\omega;\quad G(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\boxed{e^{\mathrm{i}\omega t}}\mathrm{d}t$$

$$\Im\left[f'(t)\right]=-\mathrm{i}\omega\Im[f(t)] \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Leftrightarrow -\mathrm{i}\omega}$$

**但是二阶导数不变**

$$\Im\left[\frac{\partial^2 f(t)}{\partial t^2}\right]=(\pm\mathrm{i}\omega)^2\Im[f(t)]=-\omega^2\Im[f(t)]$$

48

**——用Fourier变换方法求解微分方程时，经常使用**

# 例 1 空间域函数

$$f(\boldsymbol{r})=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint \Im[f]e^{\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k};\quad \Im[f]=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint f(\boldsymbol{r})e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}.$$

$$\Im\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial x}\right]=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial x}e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\mathrm{i}k_x\Im[f]$$

$$\Im\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial y}\right]=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial y}e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\mathrm{i}k_y\Im[f]$$

$$\Im\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial z}\right]=\frac{1}{(2\pi)^{3/2}}\iiint\frac{\partial f(\boldsymbol{r})}{\partial z}e^{-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}=\mathrm{i}k_z\Im[f]$$

$$\boxed{\Im\left[\nabla f\right]=\mathrm{i}\boldsymbol{k}\Im[f];\Im\left[\nabla^2 f(\boldsymbol{r})\right]=(\mathrm{i}k)^2\Im[f]}$$

# 例2 时-空域函数

$$f(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\iiint \Im(\boldsymbol{k},\omega)\boxed{e^{\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\mathrm{d}\omega$$

为什么写成这样?

$$\Im(\boldsymbol{k},\omega)=\frac{1}{(2\pi)^2}\int_{-\infty}^{\infty}\iiint f(\boldsymbol{r},t)e^{-\mathrm{i}(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}-\omega t)}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\mathrm{d}t.$$

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\Rightarrow\Im\left[\frac{\partial f(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}\right]=(-\mathrm{i}\omega)\Im(\boldsymbol{k},\omega)$$

$$\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}=\Im\left[\frac{\partial^2 f(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2}\right]=-\omega^2\Im(\boldsymbol{k},\omega)$$

$$\nabla f(\boldsymbol{r},t)\Rightarrow\Im\left[\nabla f(\boldsymbol{r},t)\right]=(\mathrm{i}\boldsymbol{k})\Im(\boldsymbol{k},\omega)$$

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{r},t)\Rightarrow\Im\left[\nabla^2 f(\boldsymbol{r},t)\right]=-k^2\Im(\boldsymbol{k},\omega)$$

## 积分性质:

$$\mathfrak{I}[\int f(t)\mathrm{d}t]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathfrak{I}[f]$$

**证明: 令**

$$g(t)\equiv\int f(t)\mathrm{d}t=\mathfrak{I}^{-1}[G] \Rightarrow g'(t)=f(t)$$

**因此，由导数定理**

$$\mathfrak{I}[g'(t)]=\mathfrak{I}[f(t)]=\mathrm{i}\omega\mathfrak{I}[g(t)]=\mathrm{i}\omega G(\omega)$$

$$\Downarrow$$

$$G(\omega)=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\mathfrak{I}[f(t)]=\mathfrak{I}[g(t)]=\mathfrak{I}\left[\int f(t)\mathrm{d}t\right]$$

**——时间域求积分，相当于频率域相除——能使问题大大简化!**

## 卷积定理：设

$$\mathfrak{I}[f(t)]=F(\omega);\quad \mathfrak{I}[g(t)]=G(\omega)$$

输出为时域信号

**两函数的卷积定义为**

$$f(t)*g(t)=\int_{-\infty}^{\infty}f(\eta)g(t-\eta)\mathrm{d}\eta$$

$$F(\omega)*G(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\Omega)g(\omega-\Omega)\mathrm{d}\Omega$$

**那么**

$$\mathfrak{I}\left[f(t)*g(t)\right]=\sqrt{2\pi}F(\omega)G(\omega)$$

$$\mathfrak{I}\left[f(t)g(t)\right]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}F(\omega)*G(\omega)$$

**时域卷积：频域相乘；时域相乘：频域卷积。**

**乘积定理：** **设$f(t)$和$g(t)$是实函数并且**

$$\mathfrak{F}[f(t)] = F(\omega);\quad \mathfrak{F}[g(t)] = G(\omega)$$

**那么**

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t)g(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^{*}(\omega)\mathrm{d}\omega = \int_{-\infty}^{\infty} F^{*}(\omega)G(\omega)\mathrm{d}\omega$$

**——时域乘积的积分等于频域乘积的积分**

**特别：** $f(t)=g(t)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} [f(t)]^2 \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega$$

**Parseval 等式**

**——信号能量等于每个频率分量能量的积分**

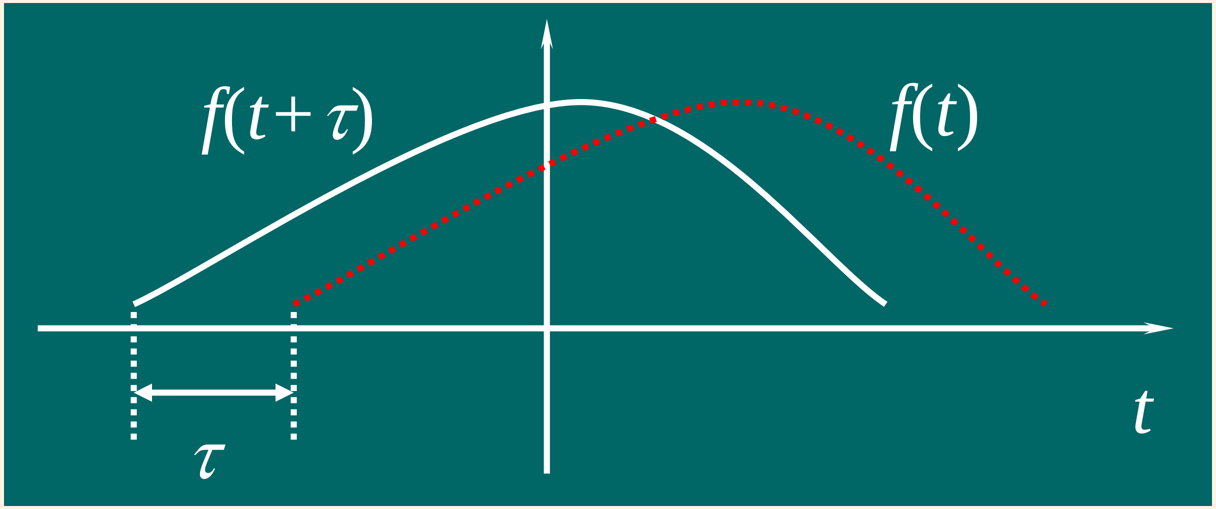
**相关函数：函数$f_1(t)$和$f_2(t)$的互相关函数定义为**

$$R_{12}(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(t)\,f_2(t+\tau)\mathrm{d}t$$

**输出为间隔$\tau$的函数注意与卷积区别**

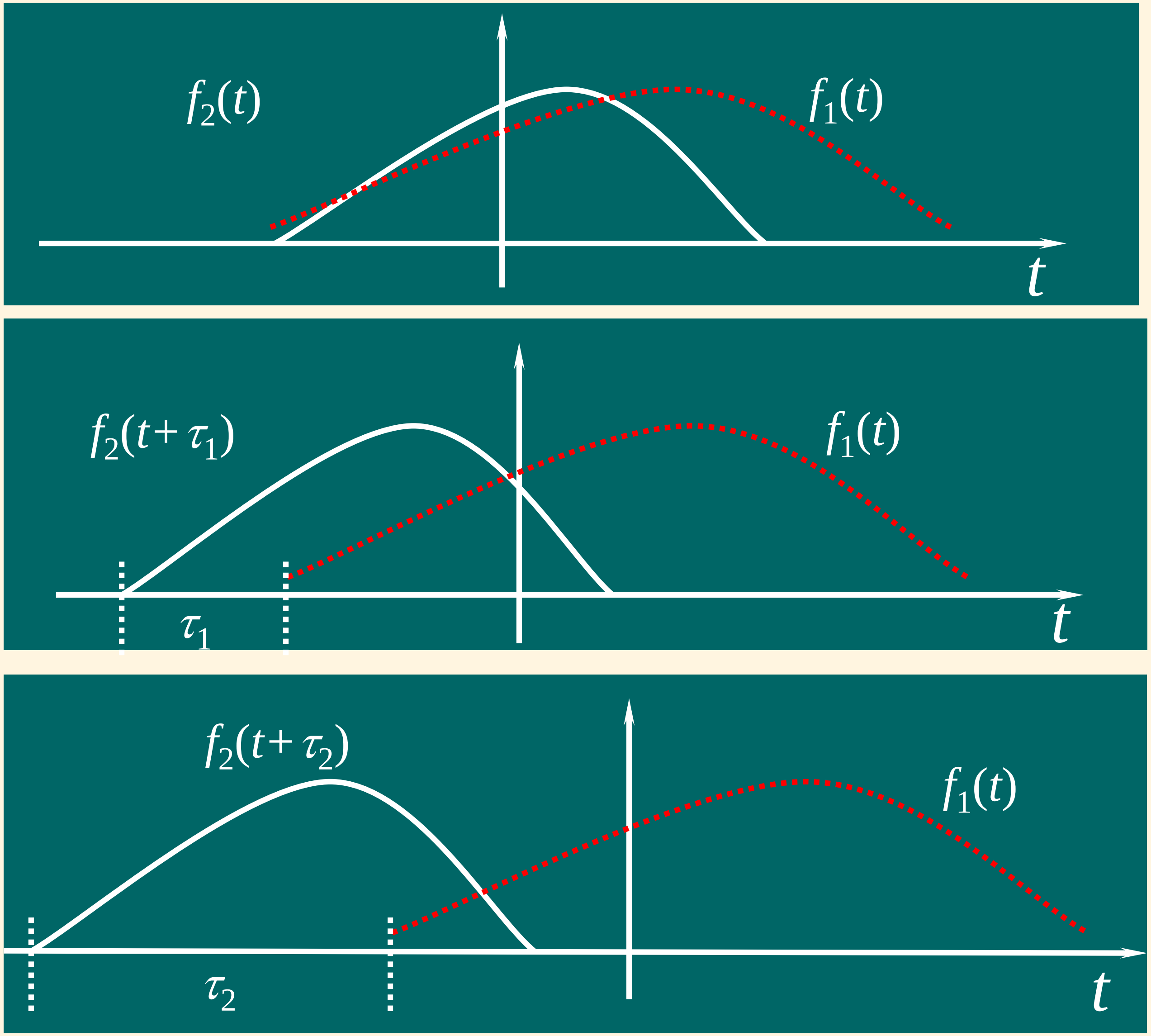
**函数$f(t)$的自相关函数定义为**

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,f(t+\tau)\mathrm{d}t$$




**足够长时间后，二个函数的互相关积分变为零最大非零的时间为$\tau_{max}$——称为相关时间**

# 函数$f_1(t)$和$f_2(t)$的互相关



## 物理意义

1、随机物理量$f_1(t)$与$f_2(t)$的涨落相关性

2、随机物理量$f(t)$在不同时刻的涨落相关性

■ 自相关函数的对称性

$$R(-\tau)=R(\tau)$$ ——偶函数

事实上

$$R(-\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t-\tau)\mathrm{d}t \overset{t-\tau=u}{=\!=\!=} \int_{-\infty}^{\infty} f(u+\tau)f(u)\mathrm{d}u$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)f(u+\tau)\mathrm{d}u=R(\tau)$$

## ■ 自相关函数与谱的关系

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2 e^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

**证明**

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)f(t+\tau)\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega\right]\left[\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega')e^{\mathrm{i}\omega'(t+\tau)}\mathrm{d}\omega'\right]\mathrm{d}t$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)F(\omega')e^{\mathrm{i}\omega'\tau}\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}(\omega'+\omega)t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\omega$$

**利用**

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}(\omega'+\omega)t}\mathrm{d}t=\delta(\omega'+\omega)$$ ——**第7章**

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}F(\omega)F(\omega')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega'\tau}\delta(\omega+\omega')\mathrm{d}\omega'\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F(\omega)F(-\omega)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}F(-\omega)F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

而

$$F(-\omega)=\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t\right]^{*}=F^{*}(\omega)$$

因此

$$R(\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}F(-\omega)F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}F^{*}(\omega)F(\omega)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^{2}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega\tau}\mathrm{d}\omega$$

## 5.3 分数导数和分数积分

- ***n*阶导数的Fourier变换**

$$\Im[f'(t)] = \mathrm{i}\omega\Im[f(t)]$$

⬇

$$\Im\left[\frac{\mathrm{d}^n f(t)}{\mathrm{d}t^n}\right] = (\mathrm{i}\omega)^n \Im[f(t)]$$

**可以用FT定义函数*f*(*t*)的*n*阶导数**

$$D^n f(t) \equiv \Im^{-1}\left\{(\mathrm{i}\omega)^n \Im[f(t)]\right\}$$

**事实上**

$$D^n f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{i}\omega)^n\exp\left[\mathrm{i}\omega(\tau-t)\right]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{\partial^n}{\partial t^n}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left[\mathrm{i}\omega(\tau-t)\right]\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{\partial^n}{\partial t^n}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau-t)\mathrm{d}\tau=\frac{\partial^n f(t)}{\partial t^n}$$

**因此** $D^n f(t)\equiv\mathfrak{I}^{-1}\left\{(\mathrm{i}\omega)^n\mathfrak{I}[f(t)]\right\}$ **确实给出了*n*导数**

- **s阶导数的定义**

$$D^s f(t)\equiv\mathfrak{I}^{-1}\left\{(\mathrm{i}\omega)^s\mathfrak{I}[f(t)]\right\},\quad(0<s<1)$$

**——假定*s*<1是真分数，如果*s*>1, 令*s*=*n*+*s*′,则 $D^s f(t)=D^n[D^{s'}f(t)]$**

## ■ 分数导数的卷积积分形式

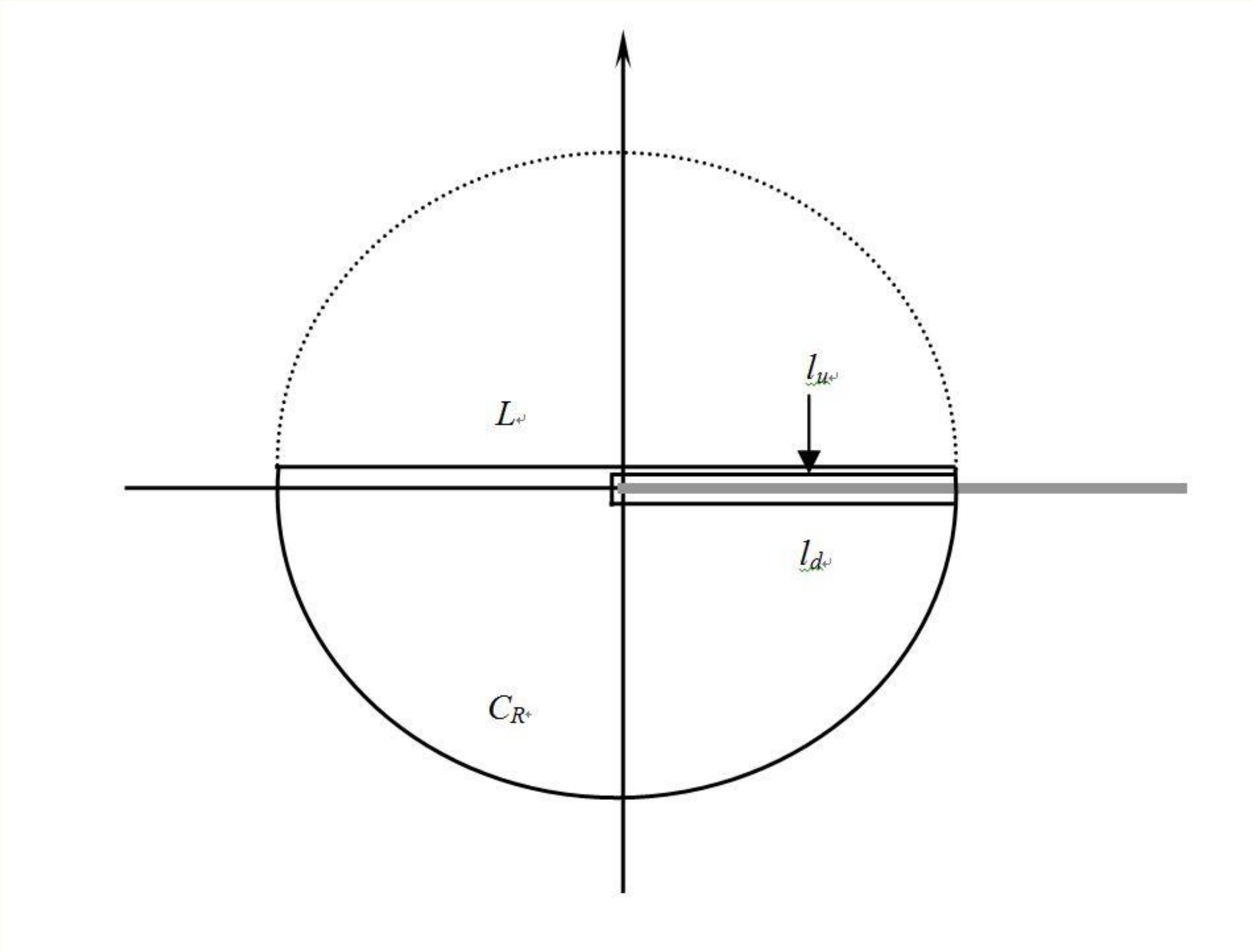
$$D^s f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{i}\omega)^s \exp[\mathrm{i}\omega(\tau-t)]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$

$$= \frac{1}{2\pi}\mathrm{i}^{s-1}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\frac{\partial}{\partial t}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{s-1}\exp[\mathrm{i}\omega(\tau-t)]\mathrm{d}\omega\right]\mathrm{d}\tau$$

$$\Downarrow$$

$$I \equiv \int_{-\infty}^{\infty}\omega^{s-1}\exp[\mathrm{i}\omega(\tau-t)]\mathrm{d}\omega,\ (0<s<1)$$

- 当$\tau > t$时，积分围道取实轴+上半平面半径为$R$的大圆，围道内无奇点，故积分$I$为零；
- 当$\tau<t$时，积分围道必须取实轴+下半平面半径为$R$的大圆+割线上沿+割线下沿，在割线下沿 (如图)，函数值为$\omega e^{\mathrm{i}2\pi}$. 在割线上、下沿和的积分分别为




**积分围道**

$$I_u \equiv \int_\infty^0 \omega^{s-1} \exp\left[\mathrm{i}\omega(\tau - t)\right]\mathrm{d}\omega$$

$$I_d \equiv \int_0^\infty (\omega \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi})^{s-1} \exp\left[\mathrm{i}\omega(\tau - t)\right]\mathrm{d}\omega$$

**围道内无奇点且大圆上积分为零（原点的贡献也为0）**

$$I + I_u + I_d = 0$$

$$I = -I_u - I_d = (1 - \mathrm{e}^{\mathrm{i}2\pi s})\int_0^\infty \omega^{s-1} \exp\left[-\mathrm{i}\omega(t - \tau)\right]\mathrm{d}\omega$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\sin(ax)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\sin\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) \quad (\mu < 1)$$

$$\int_0^\infty x^{\mu-1}\cos(ax)\mathrm{d}x = \frac{\Gamma(\mu)}{a^\mu}\cos\left(\frac{\mu\pi}{2}\right) \quad (\mu < 1)$$

$$I = -I_u - I_d = (1-\mathrm{e}^{2\pi s\mathrm{i}})\frac{\Gamma(s)}{(t-\tau)^s}\exp\left(-\mathrm{i}\frac{s\pi}{2}\right)$$

- ***f*(*t*)的*s*阶导数为积分算子**

$$\boxed{D^s f(t) = \frac{\mathrm{d}^s f(t)}{\mathrm{d}t^s} = \frac{1}{\Gamma(-s)}\int_{-\infty}^{t}\frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{s+1}}\mathrm{d}\tau}$$

**——*s*>1, 令*s*=*m*+*β* (整数+真分数)**

$$D^s f(t) = \frac{\mathrm{d}^s f(t)}{\mathrm{d}t^s} = \frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}t^m}\left[D^\beta f(t)\right]$$

**整数阶导数：*t*邻域的性质**

**分数阶导数：由卷积定义，故具有“记忆”功能**

■ 分数积分概念——由Fourier变换的性质引进

$$\Im[\int f(t)dt]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\Im[f(t)]$$

■ *n*次积分的Fourier变换

$$\Im[\int\cdots\int f(t)\mathrm{d}t]\equiv\Im[I^n f(t)]=\frac{1}{(\mathrm{i}\omega)^n}\Im[f(t)]$$

■ 定义*p*阶积分为算子

$$\Im\left[I^p f(t)\right]=(\mathrm{i}\omega)^{-p}\Im[f(t)]$$

$$\Downarrow$$

$$I^p f(t)=\Im^{-1}\left[(\mathrm{i}\omega)^{-p}\Im[f(t)]\right]$$

## ■ 分数积分的卷积积分

$$I^p f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}(\mathrm{i}\omega)^{-p}\exp\left[\mathrm{i}\omega(\tau-t)\right]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{2\pi}\mathrm{i}^{-p}\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\int_{-\infty}^{\infty}\omega^{-p}\exp\left[\mathrm{i}\omega(\tau-t)\right]\mathrm{d}\omega\mathrm{d}\tau$$

$$=\frac{1}{\Gamma(p)}\int_{-\infty}^{t}\frac{g(\tau)}{(t-\tau)^{1-p}}\mathrm{d}\tau$$

## ■ 与分数导数的关系：分数阶导数与分数阶积分互为逆运算

$$D^s D^{-s} g(t)=g(t)$$

$$I^\alpha g(t)=D^{-\alpha}g(t)=\frac{\partial^{-\alpha}g(t)}{\partial t^{-\alpha}}$$

$$D^\alpha D^{-\beta}g(t)=D^{\alpha-\beta}g(t),\quad(\alpha>0,\beta>0)$$

# 5.4 时频分析

## ■ 短时Fourier变换

信号的最基本特征是频谱或者功率谱 。但是，频谱或者功率谱并不能给出信号的时间特征。

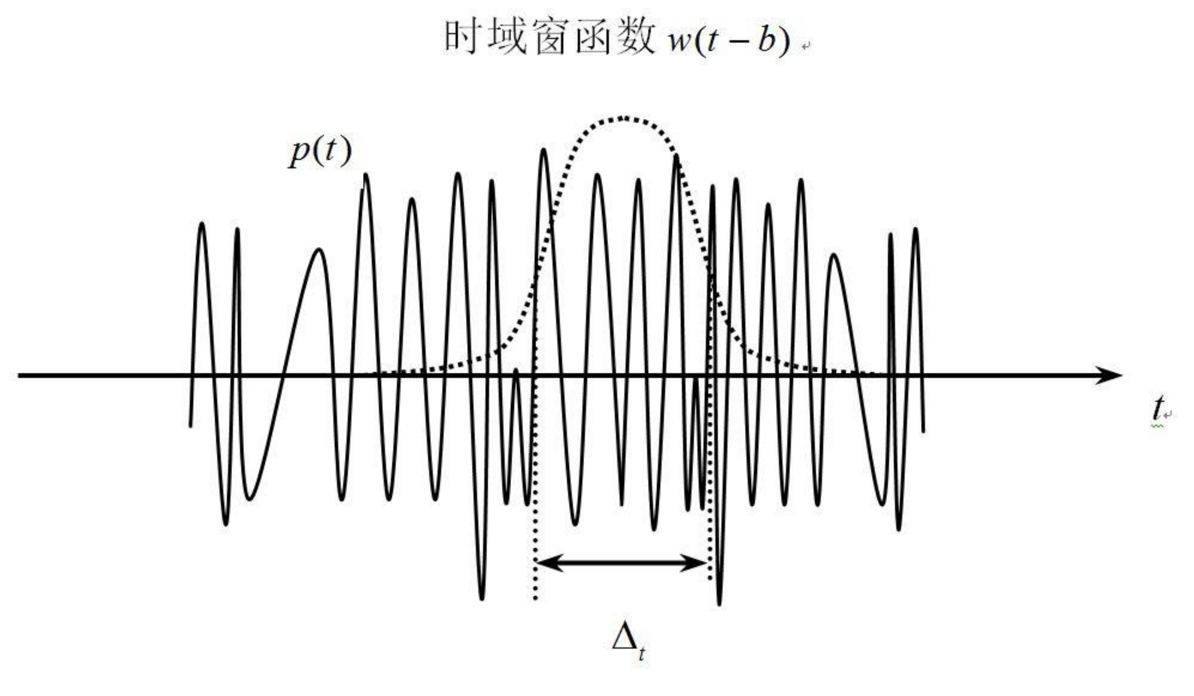
一个众所周知的例子是

① 在一段足够长的时间内，采集音乐厅的演奏，其中包括小提琴、号等多种乐器的演奏。

② 如果分析这段音乐，可以知道多种乐器的存在，但无法给出某种乐器在什么具体的时间演奏，也就是说，信号的功率谱完全损失了信号的时间特征。

## ■ 短时Fourier变换

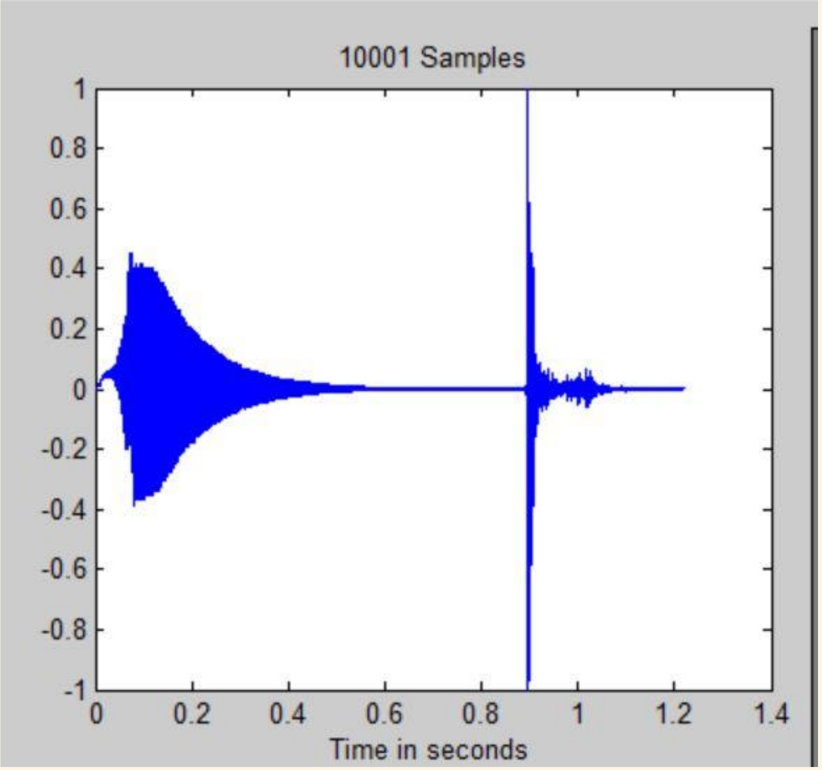
短时Fourier变换克服了Fourier变换的缺点，即在长时采集的信号上加窗函数截取一段时间内(短时)的信号进行Fourier分析

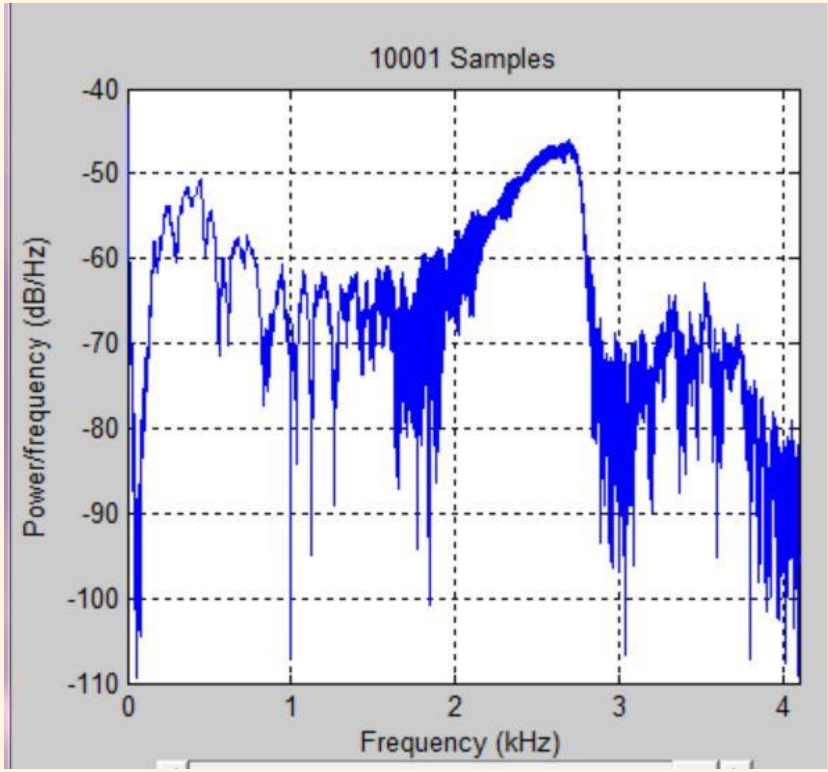



短时 Fourier 变换：时域窗函数 $w(t-b)$

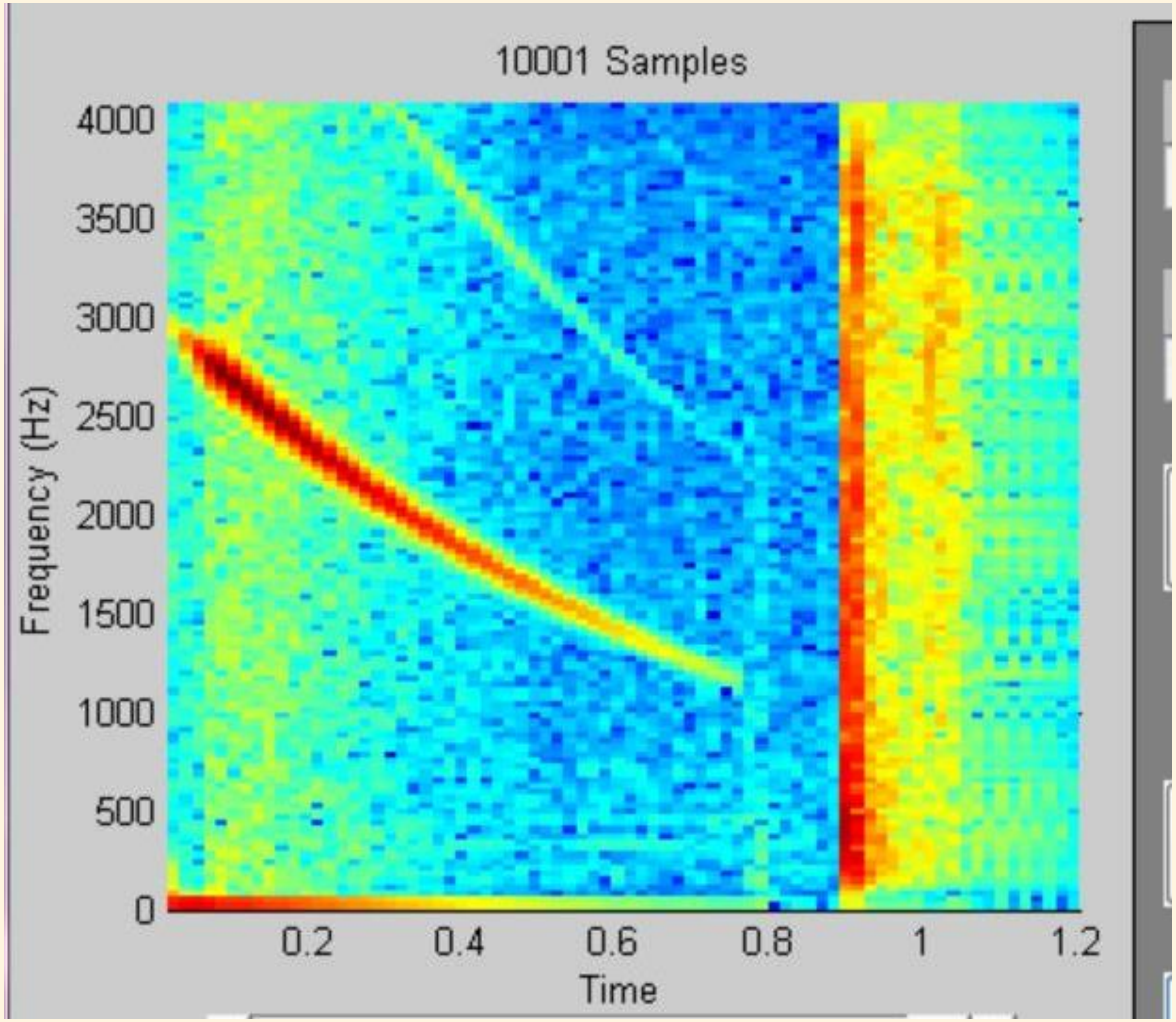
$$p(\omega,b)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}p(t)w(t-b)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t$$

**—当*b*平移时，覆盖整个采集的长时信号**

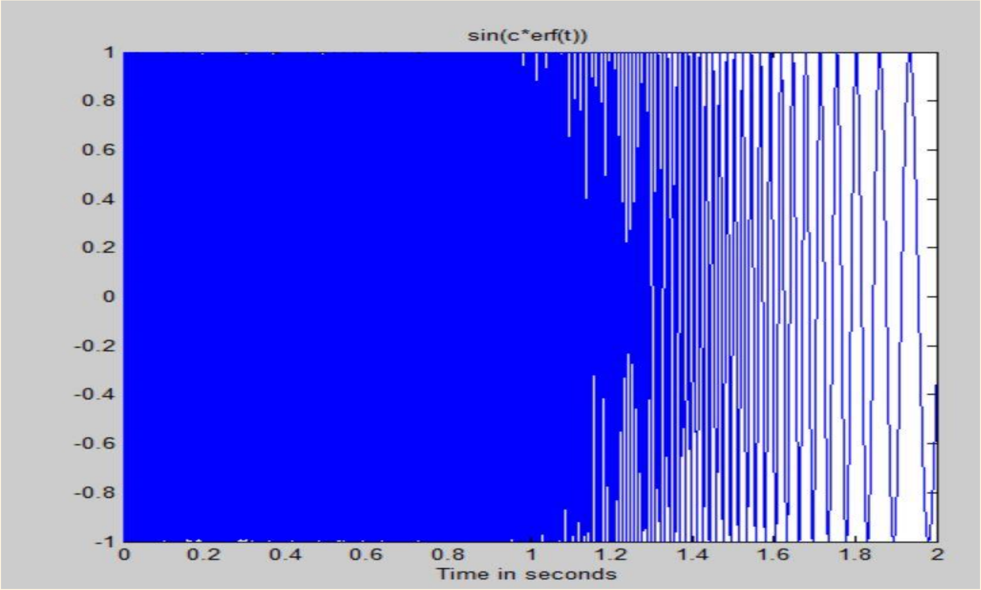


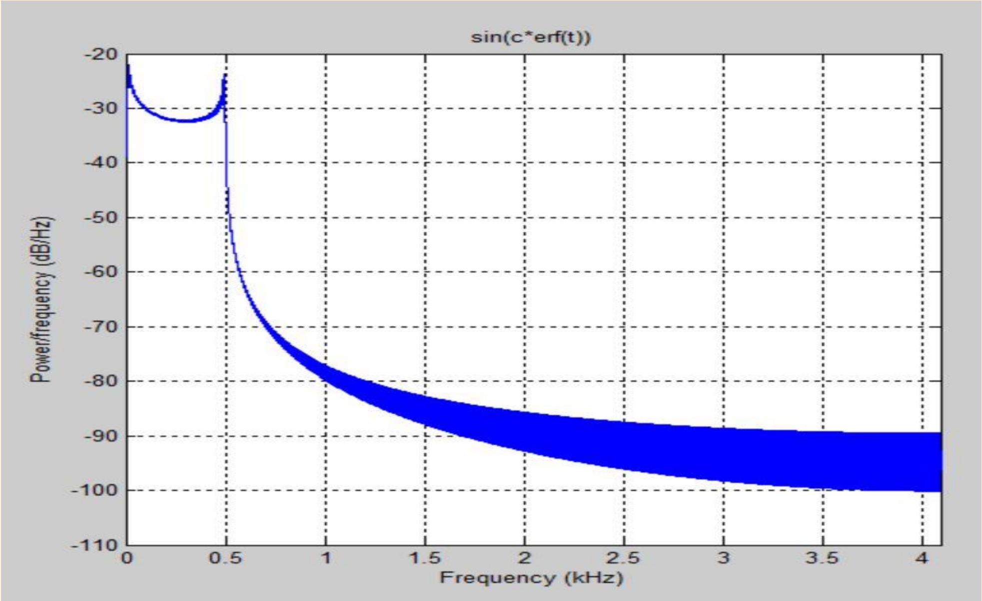

**Dropping Egg—时域信号**　　**Dropping Egg—功率谱**




**Dropping Egg—时频图**

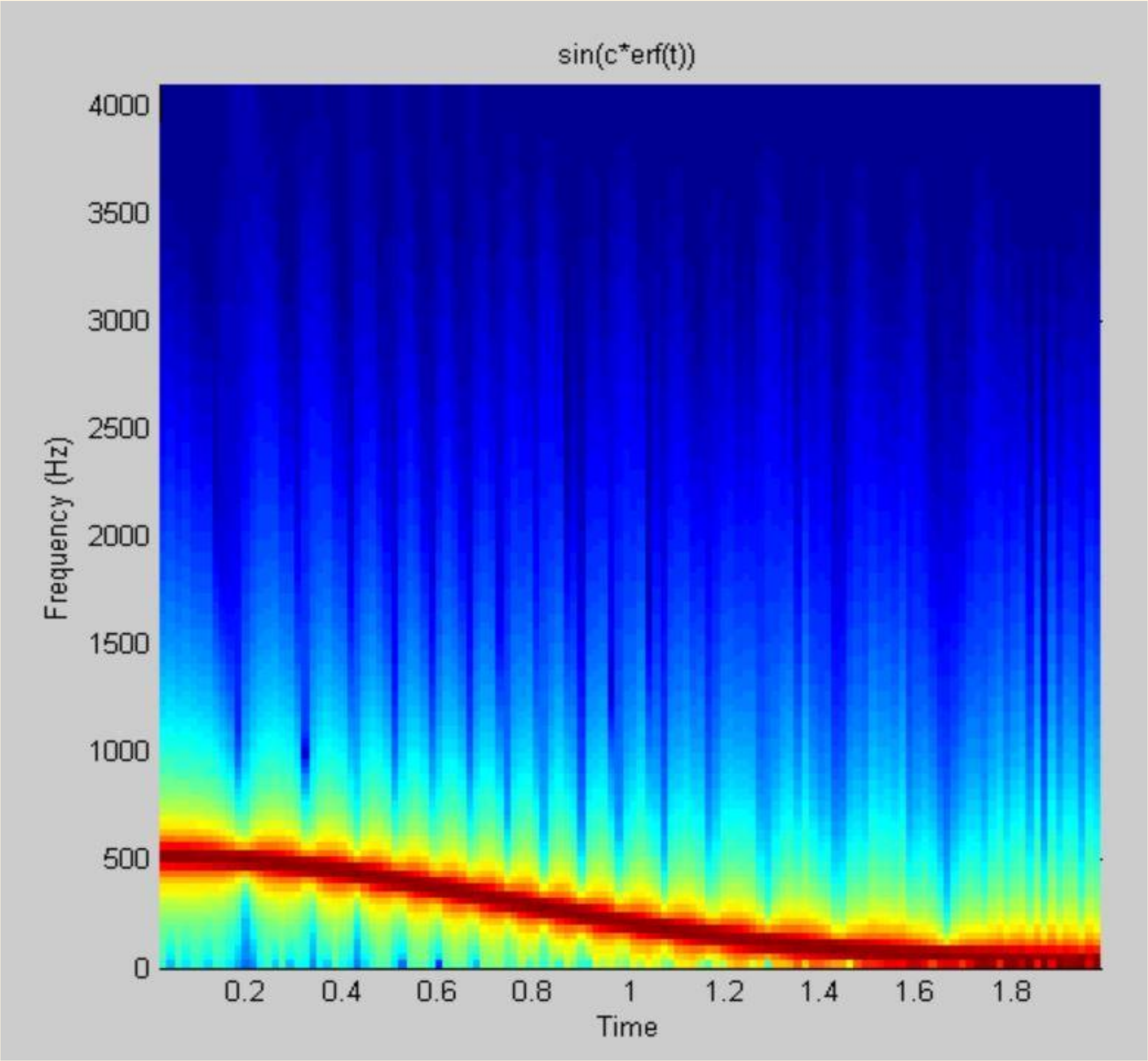



**FM信号**
**—时域**



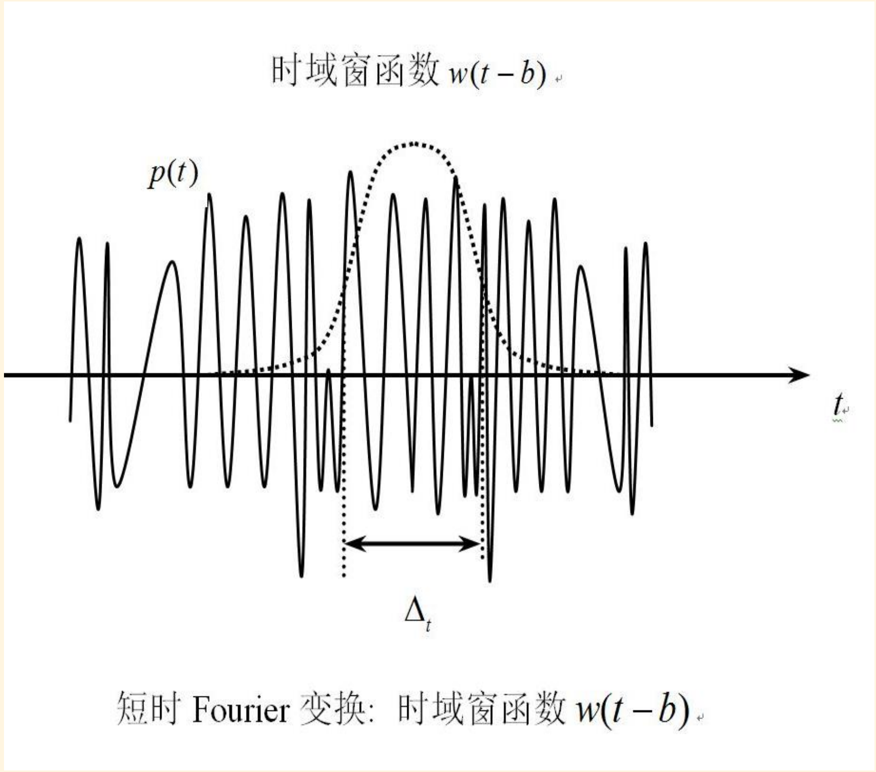

**FM信号**
**—功率谱**

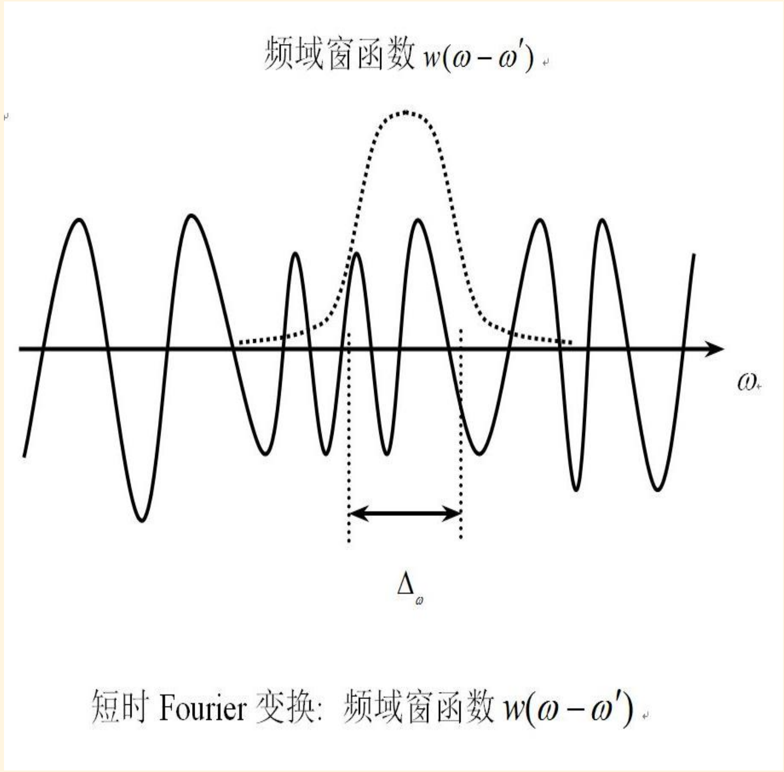

71


sin(c*erf(t))
Frequency (Hz)
4000
3500
3000
2500
2000
1500
1000
500
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
1.8
Time

**FM信号—时频图**

# 时域窗函数$w(t)$的选择：时域和频率域都有局域性质



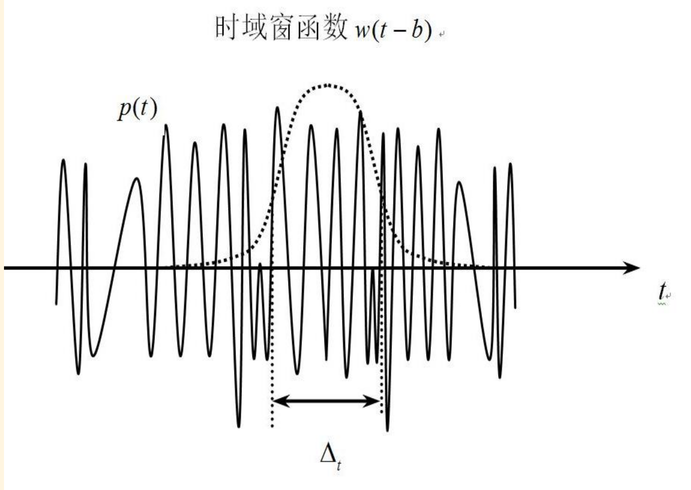




**时域局域**　　　　**频域局域**

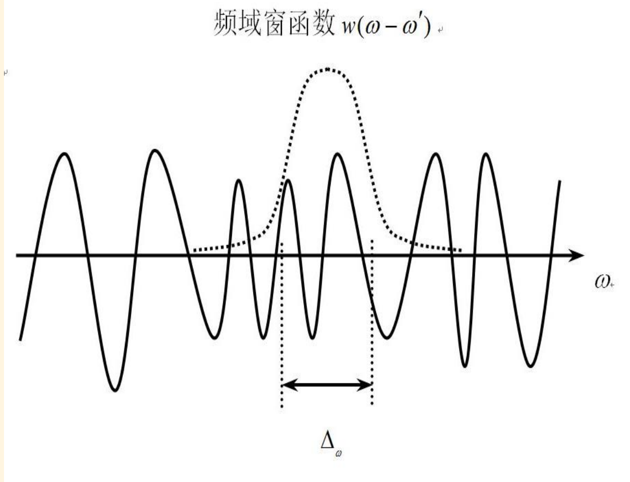
$$p(t)=\int_{-\infty}^{\infty}p(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega;\ w(t)=\int_{-\infty}^{\infty}w(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega$$

$$p(\omega,b)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}p(t)w(t-b)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t$$

$$p(\omega,b)=\int_{-\infty}^{\infty}p(\omega')w(\omega-\omega')\exp\left[\mathrm{i}(\omega-\omega')b\right]\mathrm{d}\omega'$$



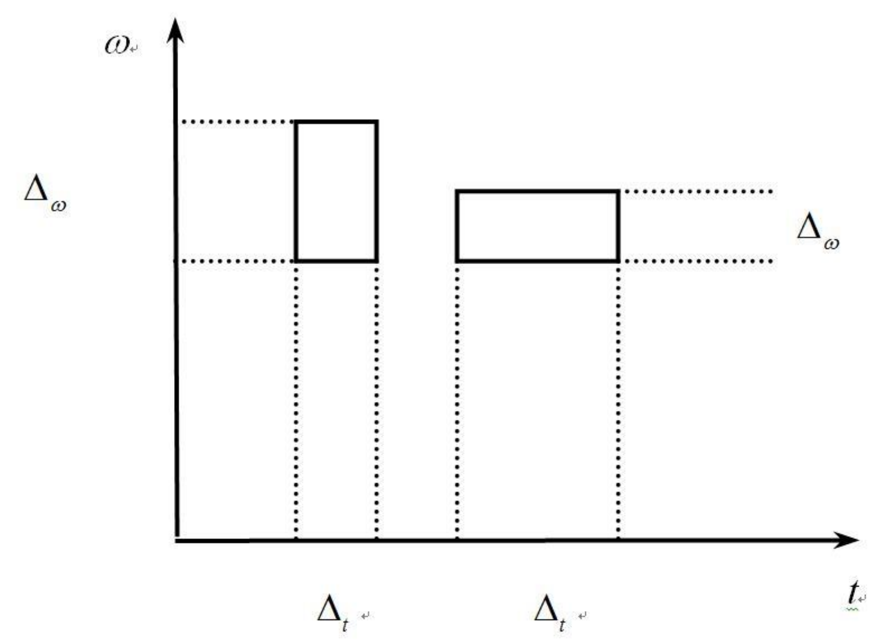

短时 Fourier 变换：时域窗函数 $w(t-b)$




短时 Fourier 变换：频域窗函数 $w(\omega-\omega')$

$$(\Delta_t)^2 \equiv \frac{1}{E_1}\int_{-\infty}^{\infty}(t-\overline{t})^2 |w(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \frac{1}{E_1}\left[\int_{-\infty}^{\infty} t^2 |w(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right] - (\overline{t})^2$$

$$(\Delta_\omega)^2 \equiv \frac{1}{E_2}\int_{-\infty}^{\infty}(\omega-\overline{\omega})^2 |w(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega = \frac{1}{E_2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \omega^2 |w(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega\right] - (\overline{\omega})^2$$



时域窗函数与频域窗函数的关系

$$\overline{t} = \frac{1}{E_1}\int_{-\infty}^{\infty} t |w(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

$$\overline{\omega} = \frac{1}{E_2}\int_{-\infty}^{\infty} \omega |w(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega$$

$$E_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |w(t)|^2 \,\mathrm{d}t$$

$$E_2 = \int_{-\infty}^{\infty} |w(\omega)|^2 \,\mathrm{d}\omega$$

## ■ 不确定关系

$$\Delta_t \Delta_\omega \geq \frac{1}{4} \Rightarrow w_a(t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \exp\left(-\frac{t^2}{4a^2}\right)$$

——这样的短时Fourier变换称为Gabor变换，其中参数$a$可用来调节Gauss窗函数的宽度—Gauss函数是“最优”窗函数！

问题：

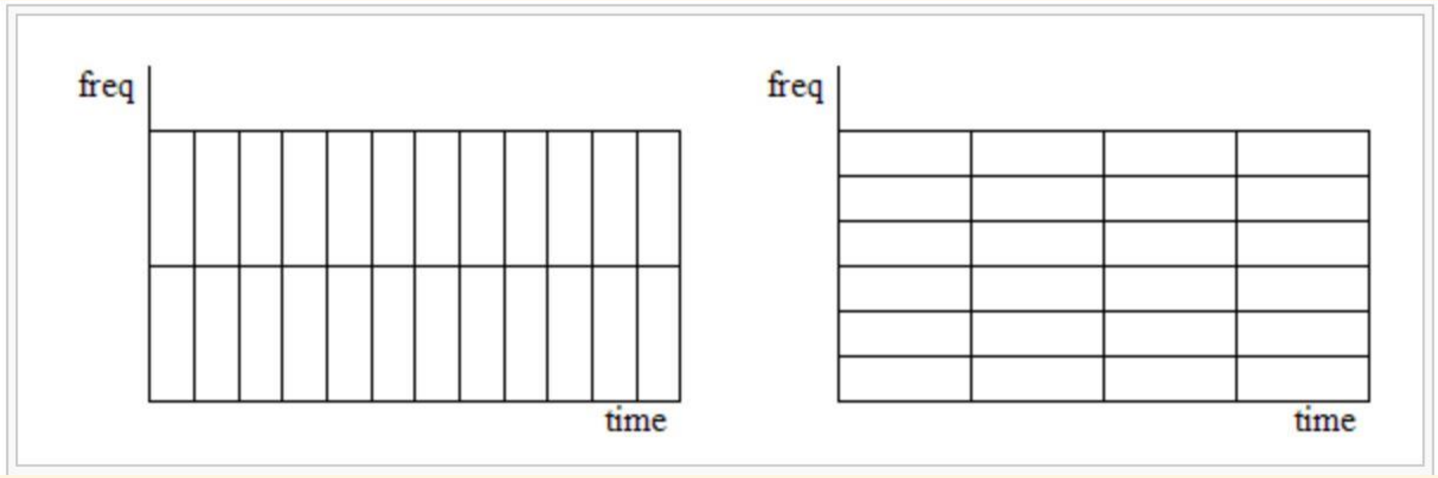
一旦选定$a$,则Gabor变换的窗函数不变，对信号中的高频成分和低频成分一样的窗函数！

低频——宽窗函数；高频——窄窗函数

与频率相关的窗函数——小波变换

## ■ 小波变换

**短时Fourier变换的缺点：固定的窗函数**




$$p(\omega,b)=\int_{-\infty}^{\infty}p(t)K_b(\omega,t)\mathrm{d}t$$

**Fourier变换：基函数** $K_b(\omega,t)\equiv\exp(\mathrm{i}\omega t)=K(\omega,t)$

**短时F变换：基函数** $K_b(\omega,t)\equiv w(t-b)\exp(\mathrm{i}\omega t)$

## 小波变换：基函数

$$K_{a,b}(t) \equiv \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi^{*}\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

## 信号$p(t)$变换

$$W(a,b) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} K_{a,b}(t)\, p(t)\,\mathrm{d}t$$

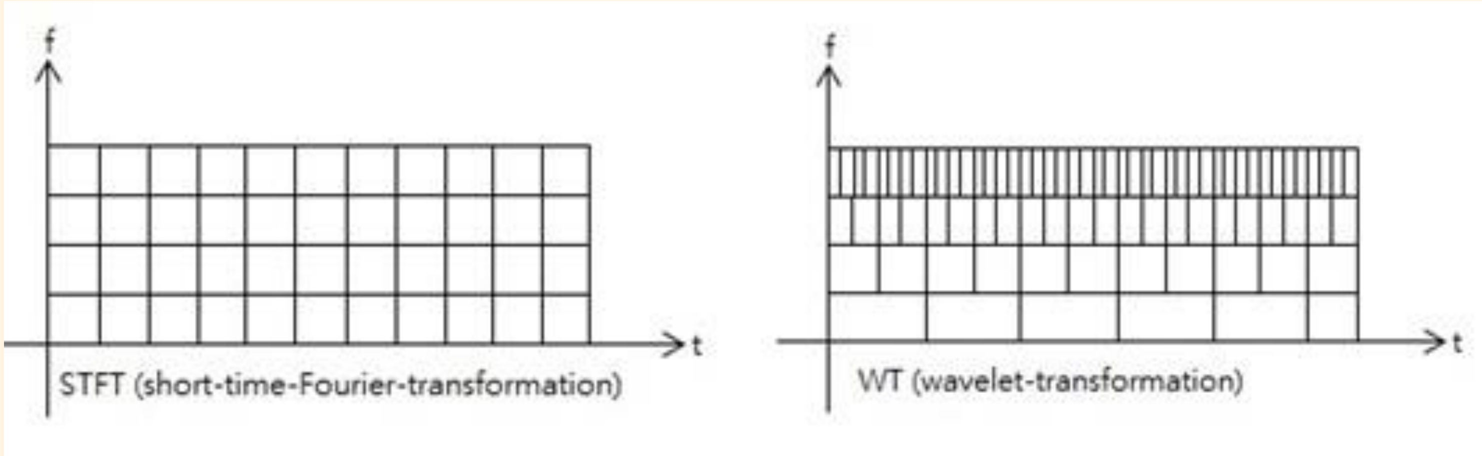
## 逆变换

$$p(t) = \frac{1}{C_{\psi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} W(a,b) K_{a,b}(t) \frac{\mathrm{d}a\mathrm{d}b}{a^{2}}$$

$$C_{\psi} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\Psi(\omega)|^{2}}{|\omega|} \mathrm{d}\omega$$

$\Psi(\omega)$是$\psi(t)$的Fourier变换

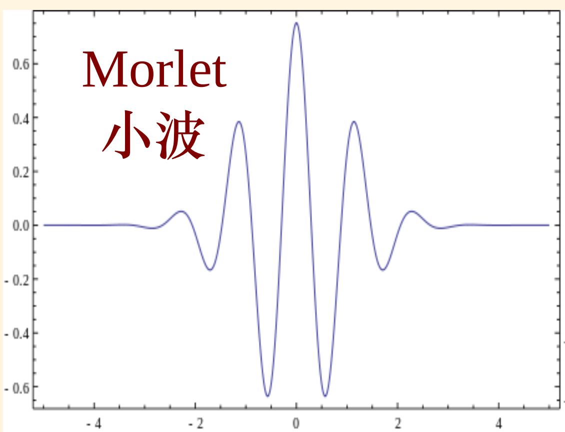
- $b$的作用：平移时间
- $a$的作用：时域放大(缩小)，“频率”域缩小(放大)

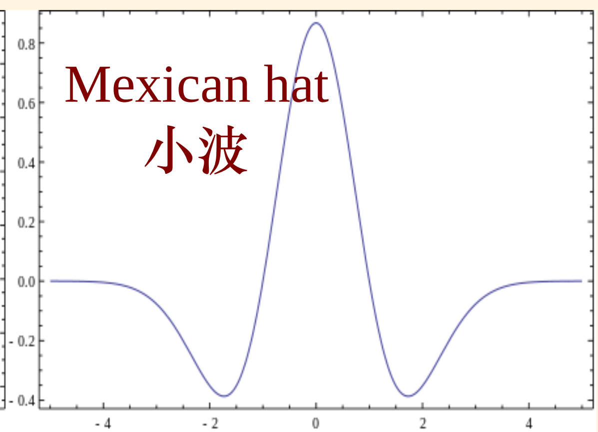



- **什么样的函数能作为基函数?**

$$C_\psi = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\Psi(\omega)|^2}{|\omega|}\mathrm{d}\omega < \infty$$

函数衰减足够快




## 5.5 分数Fourier变换

- **问题提出** $X(\omega)=F[x(t)]=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}t$

$$x(t)=F^{-1}[X(\omega)]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)e^{\mathrm{i}\omega t}\mathrm{d}\omega$$

**如果作多次Fourier变换**

$F^{0}[x(t)]=x(t)$ 时域

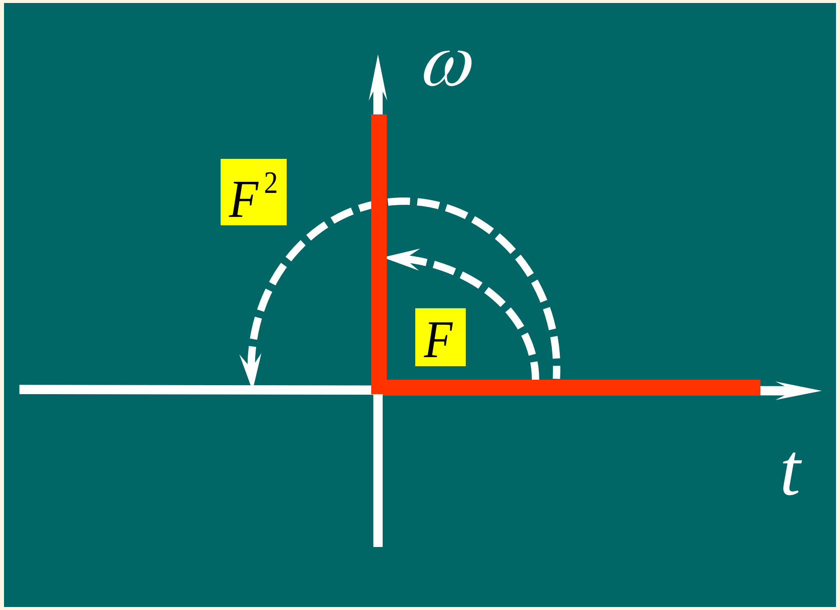
$F^{1}[x(t)]=X(\omega)$ 频域

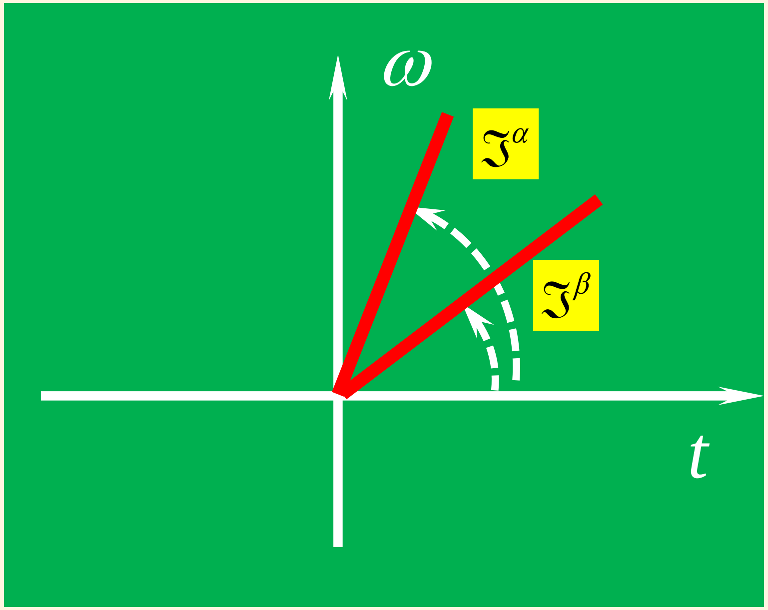
$F^{2}[x(t)]=F\big[F[x(t)]\big]=F\big[X(\omega)\big]=x(-t)$ 时域

$F^{3}[x(t)]=F\big[F^{2}[x(t)]\big]=F\big[x(-t)\big]=X(-\omega)$ 频域

$F^{4}[x(t)]=F\big[F^{3}[x(t)]\big]=F\big[X(-\omega)\big]=x(t)$ 时域

**每次Fourier变换相当于时域和频域的转换。这种特性用时-频图表示：每次Fourier变换，相当于坐标旋转π/2**




**问题：能否设计一个变换，进行任意角度的旋转(具有时频滤波功能)？引入短时分数Fourier变换更容易理解。**

## Fourier算子、本征函数和本征值

**Fourier积分可看作作用在$L^2(-\infty, \infty)$的积分算子**

$$\boldsymbol{F}(f)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}xy} f(y)\mathrm{d}y$$

- **本征值问题** $\boldsymbol{F}(\psi)=\lambda\psi$

**矩阵的本征值问题**

$$\boldsymbol{A}=[N\times N]\Rightarrow \boldsymbol{A}X_n=\lambda_n X_n \quad (n=1,2,\cdots,N)$$

**Hermite对称矩阵A: ①本征值是实的; ②本征函数正交**

$$X_m^T X_n=\delta_{mn} \quad (n,m=1,2,\cdots,N)$$

# 矩阵方程的解

$$\boldsymbol{A}x = b \Rightarrow x = \sum_{n}^{N} C_n X_n$$

$$\boldsymbol{A}x = \sum_{n}^{N} C_n \boldsymbol{A} X_n = \sum_{n}^{N} C_n \lambda_n X_n = b \Rightarrow C_m = \frac{X_m^T \cdot b}{\lambda_m}$$

$$x = \sum_{n=1}^{N} \frac{X_m^T \cdot b}{\lambda_m} X_n$$

**矩阵条件数**
$\kappa = \lambda_{\max} / \lambda_{\min}$

$$x = C_0 X_0 + \sum_{n=1}^{N} \frac{X_m^T \cdot b}{\lambda_m} X_n$$

**如果存在零本征值，解不唯一**

## ■ Fourier算子的本征值和本征函数

$$\boldsymbol{F}[\psi_n(y)] = \lambda_n \psi_n(x)$$

$$\lambda_n = (-\mathrm{i})^n; \quad \psi_n(y) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,2^n n!}} e^{y^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n} e^{-y^2}$$

**证明**

$$\boldsymbol{F}[\psi_n(y)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}xy + y^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}y^n} e^{-y^2} \mathrm{d}y$$

$$\boldsymbol{F}[\psi_n] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}} e^{x^2/2} \int_{-\infty\underset{-}{\cancel{+}}\mathrm{i}x}^{\infty\underset{-}{\cancel{+}}\mathrm{i}x} e^{\eta^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\eta^n} e^{-(\eta+\mathrm{i}x)^2} \mathrm{d}\eta$$

y = \ita + x


84

$$\boldsymbol{F}(\psi_n)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(-\mathrm{i})^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\int_{-\infty+\mathrm{i}x}^{\infty+\mathrm{i}x}e^{\eta^2/2}\cdot e^{-(\eta+\mathrm{i}x)^2}\mathrm{d}\eta$$

$$\int_{-\infty+\mathrm{i}x}^{\infty+\mathrm{i}x}e^{\eta^2/2}\cdot e^{-(\eta+\mathrm{i}x)^2}\mathrm{d}\eta=\sqrt{2\pi}e^{-x^2}$$

$$\boldsymbol{F}(\psi_n)=\frac{(-\mathrm{i})^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}e^{x^2/2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}e^{-x^2}=(-\mathrm{i})^n\psi_n(x)$$

**故本征函数为**$\psi_n$**，相应的本征值为** $\lambda_n=(-\mathrm{i})^n$

## □ 完备的正交、归一系(第9章)

$$\{\psi_n(x)\} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,2^n n!}} e^{-t^2/2} H_n(t) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{\sqrt{\pi}\,2^n n!}} e^{x^2/2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n} e^{-x^2} \right\}$$

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n} e^{-x^2}$$ ⟸ **Hermite多项式**

**构成Hilbert空间$L^2(-\infty,\infty)$上完备、正交、归一系**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x = \delta_{nm}$$

**$L^2(-\infty,\infty)$上带权平方可积的函数$f(x)$**

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} f^2(x)\mathrm{d}x < \infty$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x); \quad c_n = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x$$

## 逆算子

$$\boldsymbol{F}(f) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}xy} f(y)\mathrm{d}y = g(x)$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \psi_n(x)$$

$$\boldsymbol{F}(f) = \sum_{n=0}^{\infty} (-\mathrm{i})^n f_n \psi_n(x) = g(x)$$

$$f_n = \mathrm{i}^n \int_{=\infty}^{\infty} g(x) \psi_n(x)\mathrm{d}x$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n \psi_n(x) = \int_{=\infty}^{\infty} g(y) \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{i}^n \psi_n(x) \psi_n(y) \right] \mathrm{d}y$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{\mathrm{i}n\pi/2}\psi_n(x)\psi_n(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\mathrm{i}xy)$$ **(证明见面)**

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} f_n\psi_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{=\infty}^{\infty} g(y)\exp(\mathrm{i}xy)\mathrm{d}y\equiv \boldsymbol{F}^{-1}(g)$$

$$f(x)=\boldsymbol{F}^{-1}(g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}xy}g(y)\mathrm{d}y\equiv \boldsymbol{F}^{+}(g)$$

- **共轭算子**

$$\boldsymbol{F}^{+}(g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{\mathrm{i}xy}g(y)\mathrm{d}y$$

**故逆算子为共轭算子**

$$\boldsymbol{F}^{-1}=\boldsymbol{F}^{+}$$

**方程** $\boldsymbol{F}(f)=g$ **的解为** $f=\boldsymbol{F}^{-1}(g)$

$$f=\boldsymbol{F}^{-1}(g)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}xy}g(y)\mathrm{d}y$$

- **保范变换**

$$\boldsymbol{F}(f)=\sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^n f_n\psi_n(x)$$

$$\|\boldsymbol{F}(f)\|^2=\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{i}^{n+m}f_n^* f_m\int_{-\infty}^{\infty}\psi_n^*(x)\psi_m(x)\mathrm{d}x$$

$$=\sum_{m,n=0}^{\infty}(-1)^n\mathrm{i}^{n+m}f_n^* f_m\delta_{nm}=\sum_{n=0}^{\infty}|f_n|^2=\|f\|^2$$

$$\|\boldsymbol{F}(f)\|=\|f\| \Rightarrow \|\boldsymbol{F}(f_1-f_2)\|=\|f_1-f_2\|$$

$$\| \boldsymbol{F}(f_1) - \boldsymbol{F}(f_2) \| = \| f_1 - f_2 \|$$

$\|f_1 - f_2\|$表示$f_1$与$f_2$之间的“距离”，因此经$F$作用后，二个象$F(f_1)$与$F(f_2)$之间的“距离”保持不变化，这样的变换称为“保范变换”

- 如果作用在Hilbert空间$H$上的任意线性算子$U$满足条件

① 等距性$\|Uf\|=\|f\|, \forall f \in H$;

② 算子$U$的逆: $U^{-}=U^{+}$。

则称$U$为酉算子。因此，$F$是一个酉算子。

## ■ 分数阶Fourier算子(1980年)

**Fourier算子的特征函数为 $\psi_n$，特征值为 $e^{-\mathrm{i}n\pi/2}$**

$$\boldsymbol{F}[\psi_n] = (-\mathrm{i})^n \psi_n = e^{-\mathrm{i}n\pi/2}\psi_n$$

***N*(整数, 作*N*次FT)阶Fourier变换**

$$\boldsymbol{F}^N[\psi_n] = e^{-\mathrm{i}Nn\pi/2}\psi_n$$

## ■ 定义 *p* (分数或者整数)阶Fourier算子满足

$$\boxed{\mathfrak{I}^p[\psi_n] = e^{-\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n}$$

**——即要求分数阶Fourier算子的特征函数仍然为 $\psi_n$，而特征值为 $e^{-\mathrm{i}pn\pi/2}$——由此导出算子的具体形式**

## $f(x)$用正交基展开

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x);\quad c_n=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x$$

## 求$p$阶Fourier变换

$$\mathfrak{I}^p[f(x)]=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathfrak{I}^p[\psi_n(x)]=\sum_{n=0}^{\infty} c_n \mathfrak{I}^p[\psi_n(x)]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n \Leftarrow \mathfrak{I}^p[\psi_n]=e^{-\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n$$

$$\Uparrow$$

$$c_n=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x$$

$$\Im^p[f(x)] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n e^{-\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mathrm{i}pn\pi/2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\psi_n(x)\mathrm{d}x\right]\psi_n(y)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\left[\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n(y)\psi_n(x)\right] f(x)\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_p(y,x)\mathrm{d}x$$

奇异值分解的形式

- ***p*阶Fourier变换的核函数**

$$K_p(y,x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mathrm{i}pn\pi/2}\psi_n(y)\psi_n(x) = K_p(x,y)$$

- **核的函数形式**
  - ***p*=0**

$$K_0(x,y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n(x)\psi_n(y) = \delta(x-y)$$

$$\mathfrak{I}^0[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} K_0(x,y) f(x)\mathrm{d}x = f(y)$$ ——函数本身

- $p$=1

$$K_1(x,y) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mathrm{i}n\pi/2}\psi_n(x)\psi_n(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\mathrm{i}xy)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(-\mathrm{i}xy) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\psi_n(x)$$ 把$e^{-\mathrm{i}xy}$用正交基展开

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\mathrm{i}t'y)\psi_n(t')\mathrm{d}t'\right]\psi_n(x)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left[e^{-\mathrm{i}n\pi/2}\psi_n(y)\right]\psi_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\mathrm{i}n\pi/2}\psi_n(x)\psi_n(y)$$

$$\mathfrak{I}^1[f(x)] = \int_{-\infty}^{\infty} K_1(x,y) f(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mathrm{i}xy} f(x)\mathrm{d}x$$

——故$p$=1就是通常的Fourier变换

## ■ $p=-1$

$$K_{-1}(x,y)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{\mathrm{i}n\pi/2}\psi_n(x)\psi_n(y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp(\mathrm{i}xy)$$

$$\Downarrow$$

$$\mathfrak{I}^{-1}[f(x)]=\int_{-\infty}^{\infty}K_{-1}(x,y)f(x)\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\mathrm{i}xy}f(x)\mathrm{d}x$$

**——故$p$=–1就是通常的逆Fourier变换**

## ■ $p$=任意

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\rho^n}{2^n n!}H_n(x)H_n(y)=\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left[\frac{2\rho xy-(x^2+y^2)\rho^2}{1-\rho^2}\right]$$

$$\Downarrow$$

$$K_p(x,y)=\sqrt{\frac{1-\cot\alpha}{2\pi}}\exp\left(\mathrm{i}\frac{x^2+y^2}{2}\cot\alpha-\frac{\mathrm{i}xy}{\sin\alpha}\right)(\alpha=p\pi/2)$$

**——标准的Chirp类分数Fourier变换核函数**

## ■ 时间-频率形式

$$\Im^{p}(\omega)=\sqrt{\frac{1-\cot\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega^{2}+t^{2}}{2}\cot\alpha-\frac{\mathrm{i}\omega t}{\sin\alpha}\right)f(t)\mathrm{d}t$$

$$(\alpha=p\pi/2)$$

**物理本质: ①分数FT以线性调频信号作为基函数展开；②整数FT以单频信号作为基函数展开**

**例 Dirac Delta** $f(t)=\delta(t)$

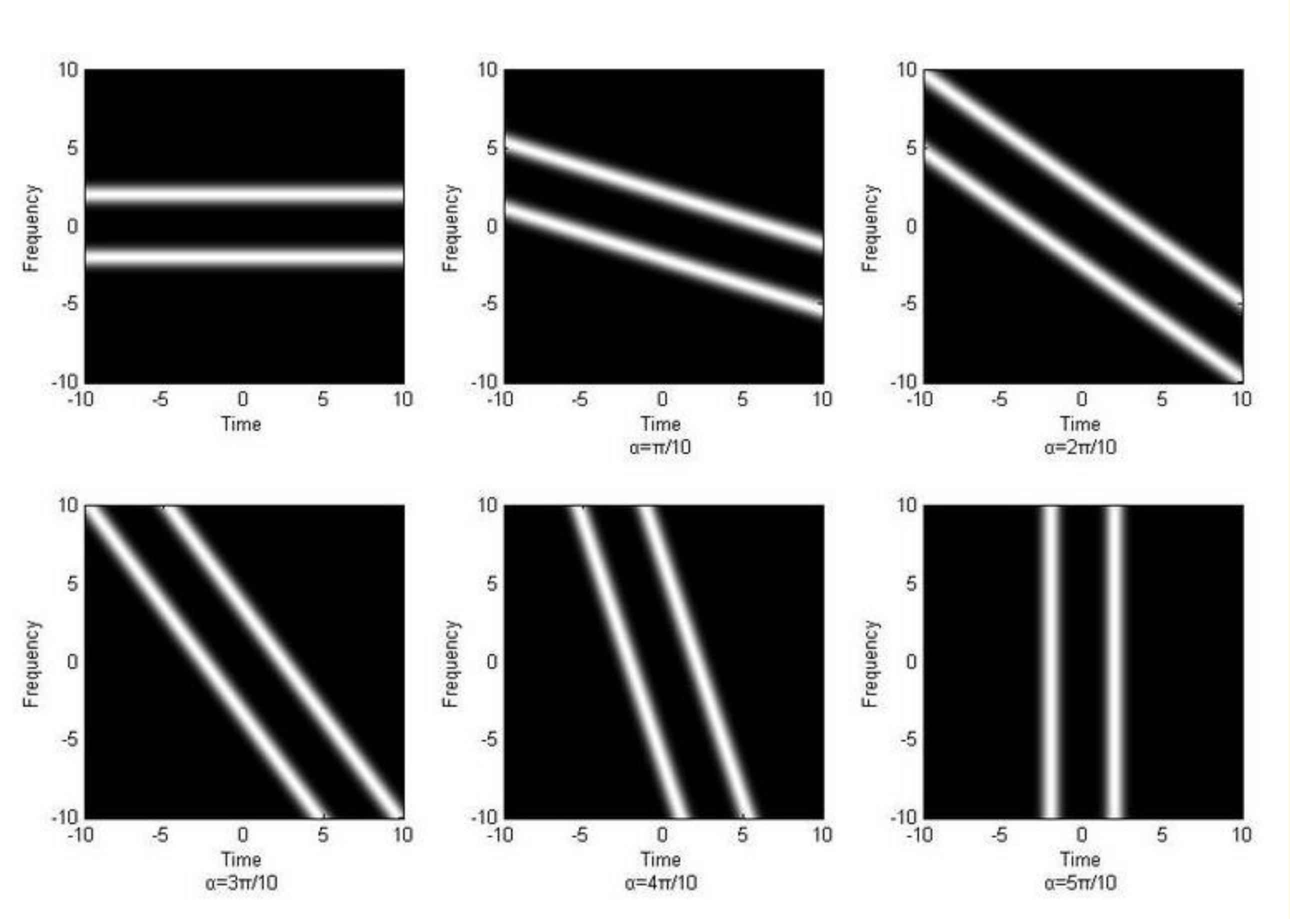
$$\Im^{p}(\omega)=\sqrt{\frac{1-\cot\alpha}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega^{2}+t^{2}}{2}\cot\alpha-\frac{\mathrm{i}\omega t}{\sin\alpha}\right)\delta(t)\mathrm{d}t$$

$$=\sqrt{\frac{1-\cot\alpha}{2\pi}}\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega^{2}}{2}\cot\alpha\right)$$

**幅值常数相位变化**

## ■ 短时分数阶Fourier变换

$$\Im^p(\omega,b)=\int_{-\infty}^{\infty} w(t-b)K_p(\omega,t)f(t)\mathrm{d}t$$

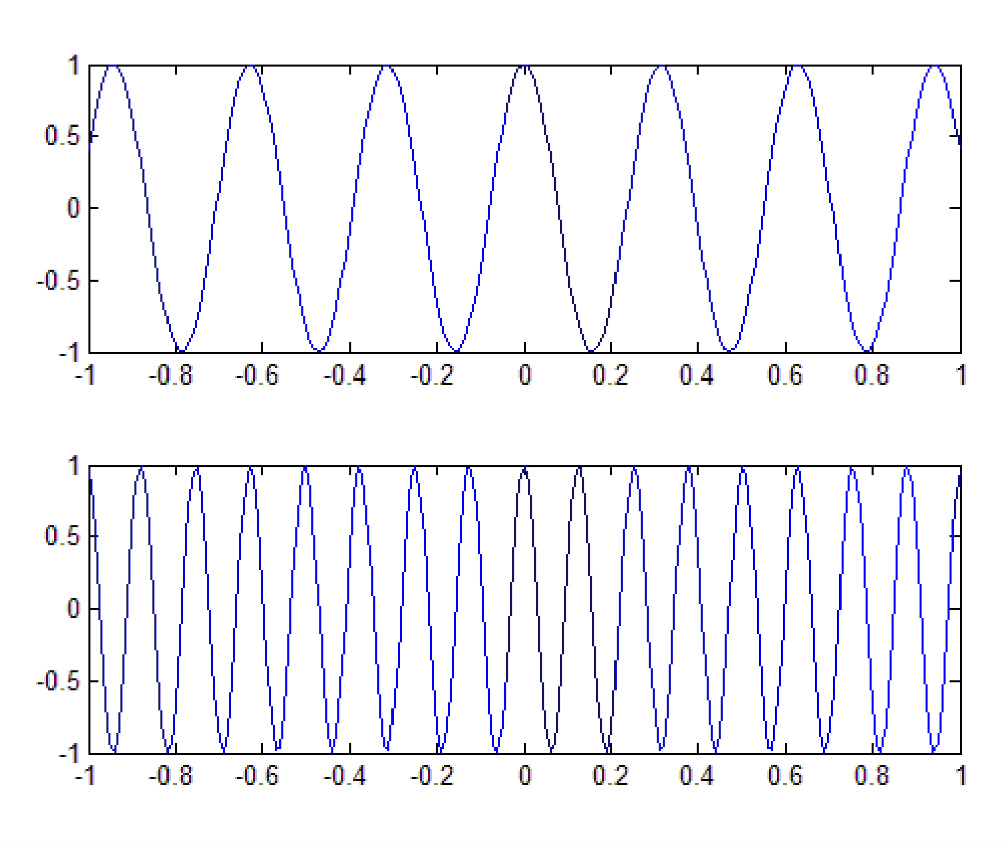



**应用：量子力学、光学、声学、通信、信号处理**

- **数学本质：函数*f*(*t*)按不同的完备基展开**

- **Fourier变换：** $K(\omega,t)=e^{\mathrm{i}\omega t}=\cos(\omega t)+\mathrm{i}\sin(\omega t)$

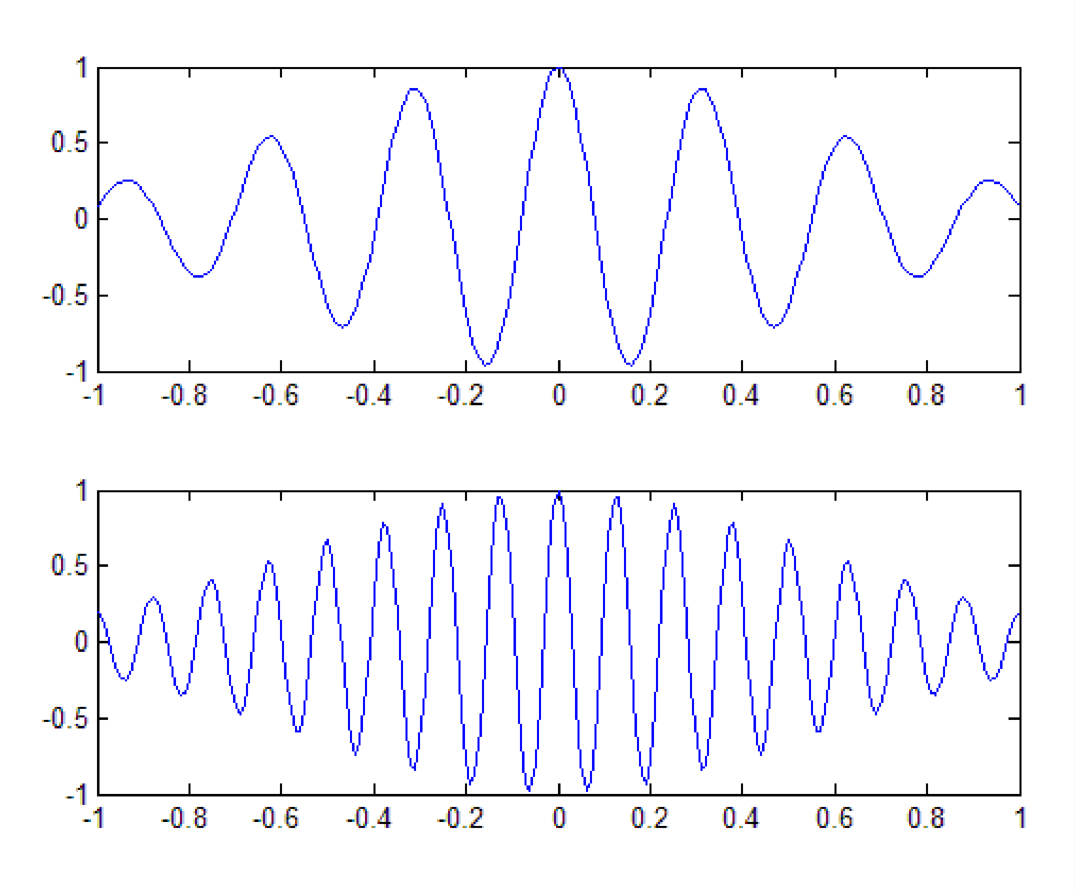
**实部不同频率**



## Gabor变换：

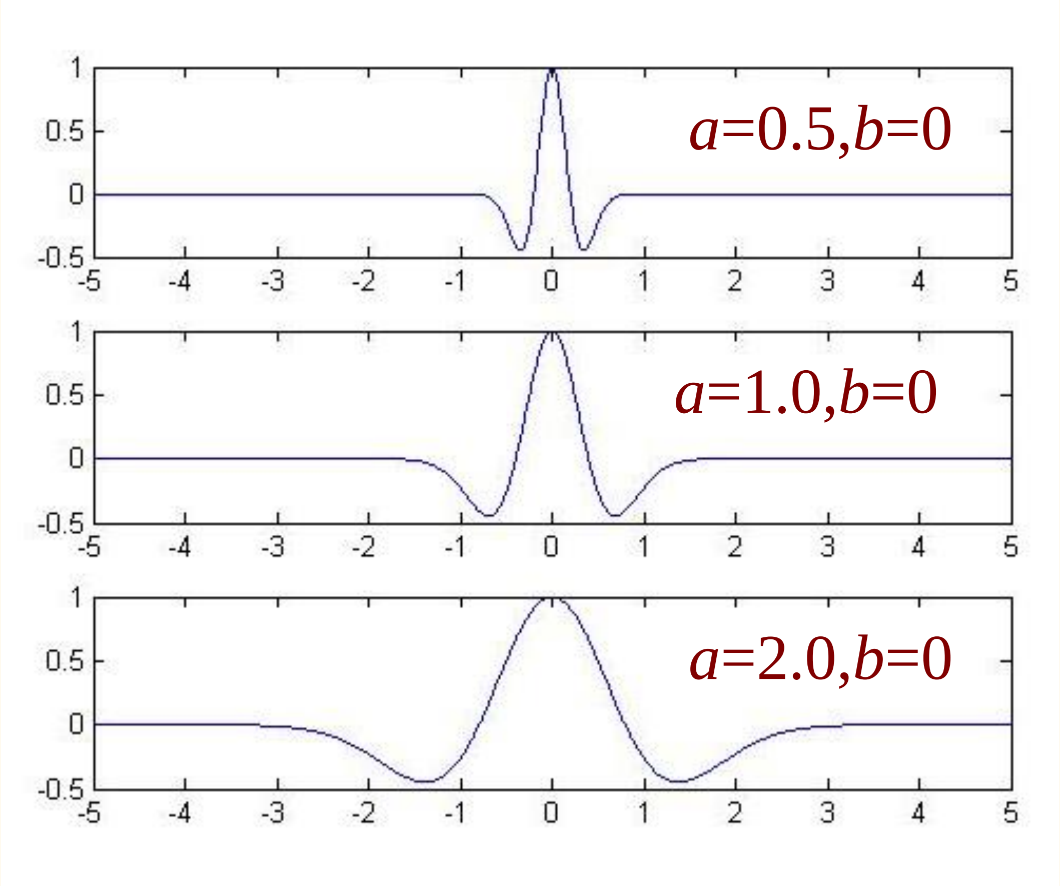
$$K(\omega,b,t)=e^{\mathrm{i}\omega t}\exp\left[-\frac{(t-b)^2}{4a^2}\right]$$

**实部不同频率($b$=0)**



## Wavelet变换：丰富的基函数 Mexican hat Wavelet

$$K(a,b,t)=\frac{1}{\sqrt{|a|}}\psi^*\left(\frac{t-b}{a}\right);\ \ \psi(t)=\frac{2^{5/4}}{\sqrt{3}}(1-2\pi t^2)e^{-\pi t^2}$$



## 分数Fourier变换：

$$K_p(\omega,t)\sim\exp\left(\mathrm{i}\frac{\omega^2}{2}\cot\alpha\right)\exp\left[-\mathrm{i}\left(\frac{\omega}{\sin\alpha}-\frac{t}{2}\cot\alpha\right)t\right]$$

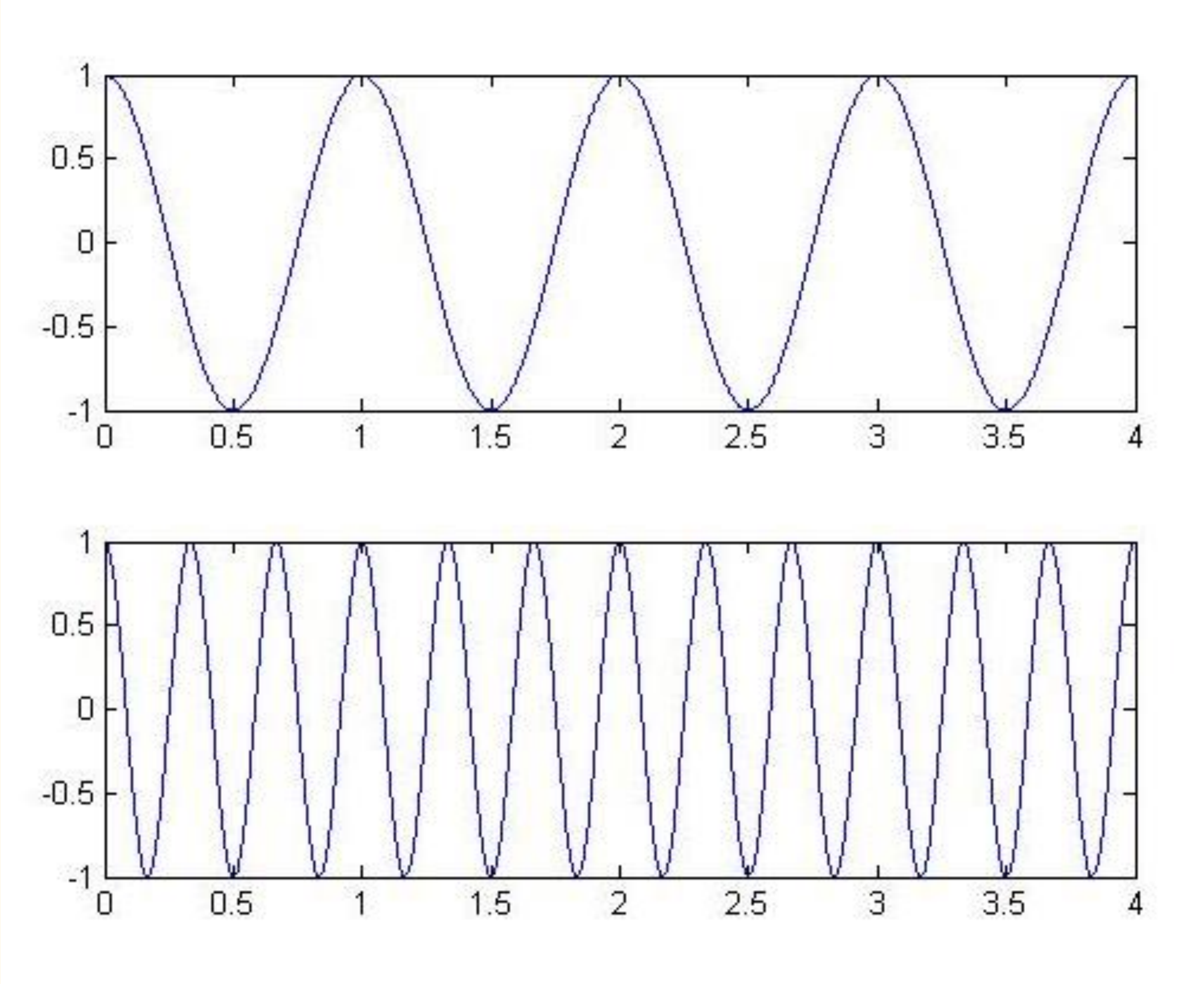
**瞬态相位和时变频率**

$$\vartheta(t)=\left(\frac{\omega}{\sin\alpha}-\frac{t}{2}\cot\alpha\right)t$$

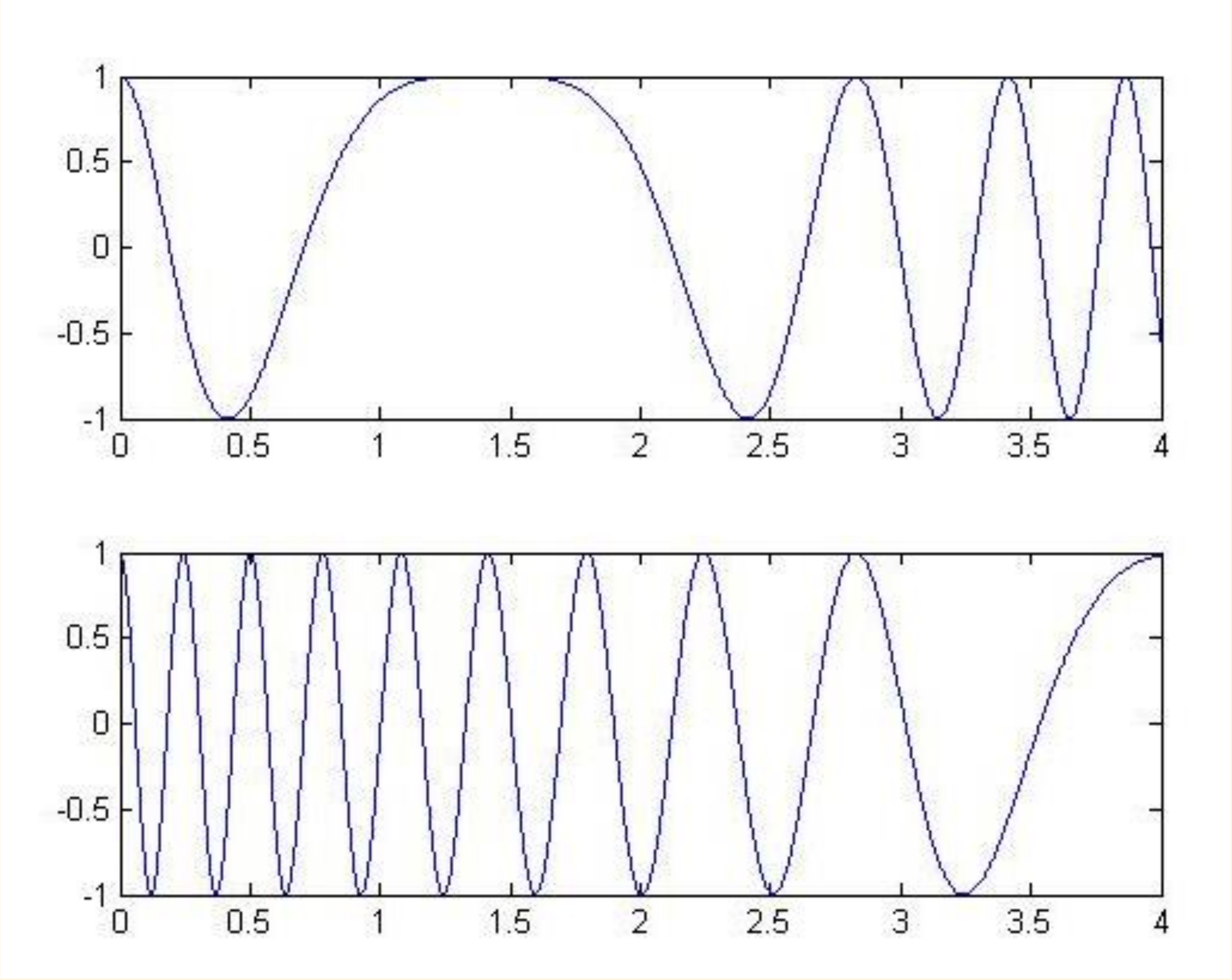
$$\omega(t)=\frac{\mathrm{d}\vartheta(t)}{\mathrm{d}t}=\frac{\omega}{\sin\alpha}-t\cot\alpha$$

**——线性调频信号作为基函数，$\alpha$：频率变化的尺度**

# $p$=1, 通常Fourier变换的基函数(实部，2个频率点）



# $p$=0.5, 基函数为线性调频信号(实部，2个频率点）



## ■ 小结

- **Fourier 级数**

  **周期函数: Fourier级数(周期内平方可积)**

  **复指数形式(系数的共轭对称性)，三角形式**

  **收敛性(充分条件)；Gibbs现象**

  **有限区域的Fourier级数**

  **几个典型周期函数的Fourier级数及其性质**

  **功率型信号**

$$\frac{1}{T}\int_{-T/2}^{T/2}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t=\lim_{N\to\infty}\sum_{m=-N}^{N}|c_m|^2$$

■ **Fourier积分**

**非周期函数：Fourier积分，二个典型信号**

**时域信号；空间域信号；时-空信号**

**收敛性(充分条件)**

**能量型信号**

**Parseval等式：** $\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)]^2\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$

**Fourier积分的性质：微分性质，积分性质**

**分数导数和分数积分**

**Fourier积分算子；逆算子；本征值问题**

**分数Fourier积分**

## ■时频分析

Fourier积分的时频分析能力?

短时Fourier分析（Gabor变换）

频域-时域不确定关系（量子力学比较）

短时Fourier分析高、低频率的分辨能力?

小波变换

## ■函数变换的本质

不同基函数展开——Fourier分析，分数Fourier分析，短时Fourier分析，短时分数Fourier分析，小波变换