第9章 数学物理方程的定解问题

9.1 泛定方程的导出

三类方程, Laplace算子, 波动方程的变换

9.2 定解条件、古典解和广义解

古典解，广义解：强解，弱解；存在性

9.3 数学物理方程的分类

叠加原理, 实系数方程分类，色散型方程

9.4 定解问题的适定性

适定性, Helmholtz方程和辐射条件

9.1 泛定方程的导出

自然现象	物理描叙	物理规律	物理预言	改造自然
热学	位移	波动方程	流体理论	航空航天
电学	温度	扩散方程	固体理论	半导体
声学	压力	位势方程	电磁波	激光
光学	速度	量子力学	量子能级	计算机
液体	密度	流体力学	辐射理论	核电
流体	电场	固体力学	导体理论	原子武器
固体	磁场	电动力学	核理论	水声武器

❑ 典型的泛定方程

- **波动方程—双曲型方程**

  描述现象：声波、电磁波等经典波动过程

- **扩散方程—抛物型方程**

  描述现象：热扩散、物质扩散等扩散过程

- **位势方程—椭圆型方程**

  描述现象：电势、温度场、速度场等与时间无关的稳定场

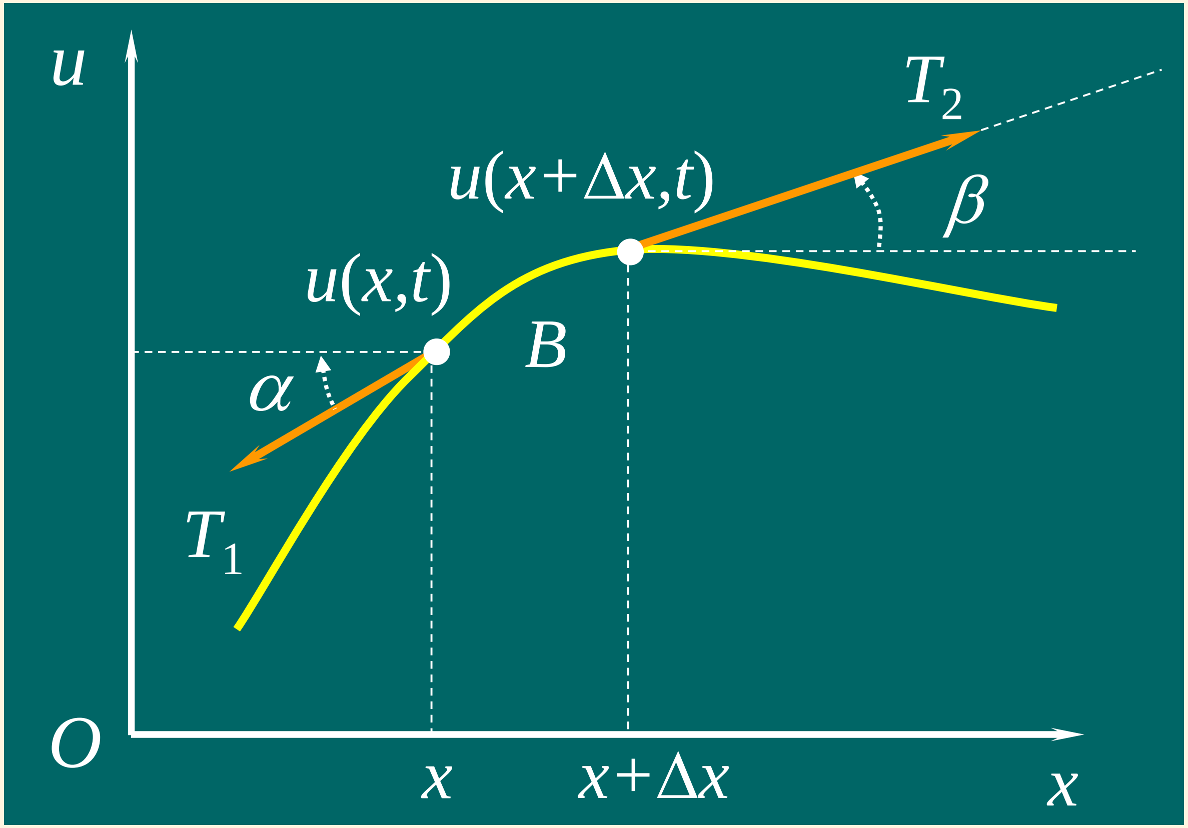
- **色散型方程—复系数波动方程**

  描述现象：量子力学Schrodinger方程

“泛定”:不同的物理现象，相同的数学方程

❑弦的横向振动方程

假定: (1)张力T>>重力mg; (2)静止时弦位于x 轴，横向振动时各点的位移为 $u(x,t)$; (3)弦的线密度为ρ; (4)振动无限小



考察 *x*—*x*+Δ*x* 小段*B*：力的平衡方程为

*x*方向： $T_2\cos\beta - T_1\cos\alpha = 0$

*y*方向： $T_2\sin\beta - T_1\sin\alpha = \rho\Delta S\overline{\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$ **B段上的平均加速度**

■三个近似—微小振动

(1) $\cos\beta \approx \cos\alpha \approx 1$

(2) $\sin\beta \approx \beta \approx \tan\beta = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$ ； $\sin\alpha \approx \alpha \approx \tan\alpha = \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x}$

(3) $\Delta S = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2} = \Delta x\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2} \approx \Delta x$

x 方向: $T_2 \approx T_1 \Rightarrow T_2 = T_1 \equiv T$

y 方向: $$T\left(\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x} \right) = \rho \Delta x \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}}$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{u_x \big|_{x+\Delta x} - u_x \big|_x}{\Delta x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \lim_{\Delta x \to 0} \overline{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

最后, 得到x处弦的运动方程为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - \frac{T}{\rho} \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

——由于x的任意性，也就是弦振动方程

如果弦受到线密度为 $f(x,t)$ (单位长度上受到的力)的横向力作用，则弦的受迫振动方程为

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{f(x,t)}{\rho}$$

其中 $a = \sqrt{T/\rho}$，弦中的张力有关，速度的量纲

❑杆的纵向振动

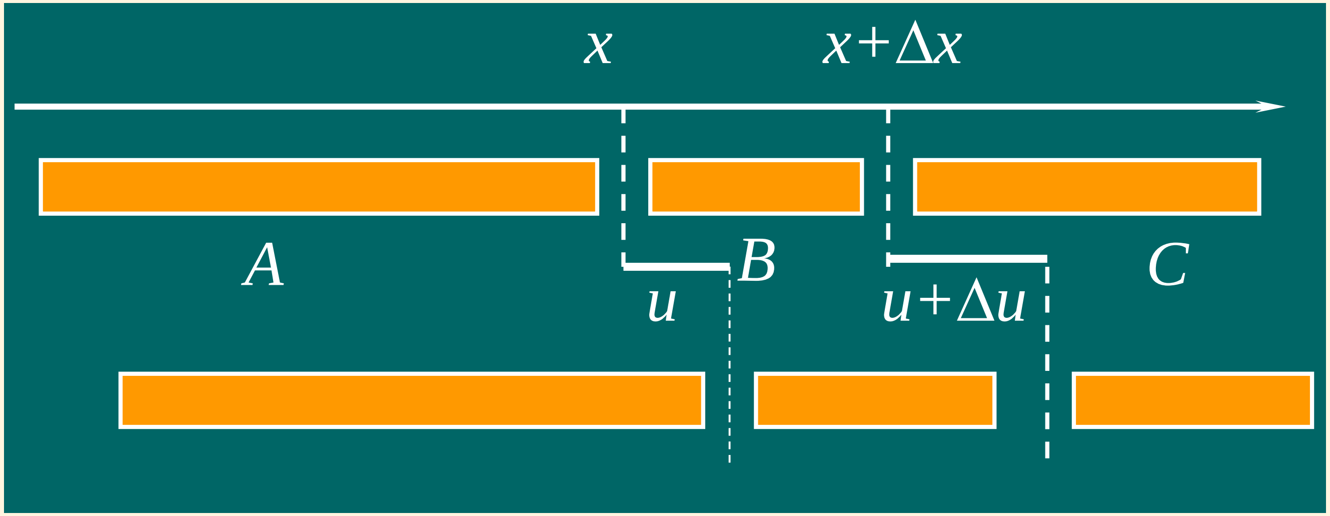
假定：(1)截面均匀的杆静止时位于x 轴，纵向振动时各点的位移为$u(x,t)$; (2) 杆的密度为ρ，Young模量为Y；(3)振动无限小。

■ ***B* 段的运动方程为**

$$\rho(S\Delta x)u_{tt}=YSu_x\big|_{x+\Delta x}-YSu_x\big|_x$$

式中：*S* 是杆的面积，最后的方程与次无关。当 $\Delta x\to 0$ 时

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=0$$



■非均匀杆的运动方程

$$\bar{\rho}\cdot\bar{S}\cdot\overline{u_{tt}}=\frac{(YSu_x)|_{x+\Delta x}-(YSu_x)|_x}{\Delta x}$$

当$\Delta x\to 0$时，$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\bar{\rho}\cdot\bar{S}\cdot\overline{u_{tt}}=\rho(x)S(x)u_{tt}(x,t)$

$$\rho(x)S(x)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left[Y(x)S(x)\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\right]$$

常见：仅仅截面变化

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}=\frac{Y}{\rho}\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}+\frac{Y}{\rho}\frac{\partial \ln S(x)}{\partial x}\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$$

——从振动学角度，截面变化后，一维振动的假定不成立了，只有在低频条件下，近似成立.

总结：物理上，前者描叙弦的横向振动，后者描叙杆的纵向振动，物理过程不同，但得到的两个数学方程具有相同的形式，可以写成统一的形式

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = 0$$

式中

$$a = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \quad \text{or} \quad a = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}$$

以后将看到：常数a是波在弦上(横波)或杆中(纵波)传播的速度

❑声波方程

描述方法：流体运动的Lagrange描叙方法；Euler描述方式。

■ Euler 描述参量

① 流体压强分布：$P(r,t)=P_0+p(r,t)$，P_0 是静态压强，如大气压，$p(r,t)$是 $r=(x, y, z)$点的瞬态声压分布;

② 流体密度分布：$\rho(r,t)=\rho_0+\rho'(r,t)$, ρ_0是平衡时流体的体密度;

③ 流体速度场分布：$v(r,t)=v_0(r,t)+v'(r,t)=v'(r,t)$, 这里假定流体平衡时不流动;

④ 流体温度场分布： $T(r,t)=T_0+T'(r,t)$, T_0是平衡时的流体温度。

——流体压力的变化，一定引起体积(或密度)和温度的变化。在经典力学框架下，可以用连续介质近似。

■ 流体的运动必须遵守的基本定律

- 质量守恒定律
- 动量守恒定律
- 能量守恒定律
- 流体的本构方程

6个场量，6个方程，形成确定系统

■ 守恒物理量满足的基本方程

积分形式 $$\frac{\partial}{\partial t}\int_V A\mathrm{d}\tau + \iint_S \boldsymbol{j}_A \cdot \mathrm{d}S = 0$$

微分形式 $$\frac{\partial A}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j}_A = 0$$

A：标量⇒矢量j_A；A：矢量⇒张量j_A

质量守恒方程

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \Leftarrow \boldsymbol{j} = \rho \boldsymbol{v}$$

动量守恒方程

$$\frac{\partial (\rho \boldsymbol{v})}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = 0$$

$$\boldsymbol{J} = P\boldsymbol{I} + (\rho \boldsymbol{v})\boldsymbol{v}; \quad (\boldsymbol{J})_{ij} = P\delta_{ij} + \rho v_i v_j$$

能量守恒方程

$$\frac{\partial (\rho \varepsilon)}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{j}_\varepsilon + P\boldsymbol{v}) = 0$$

$$\varepsilon = u + \frac{1}{2}v^2; \boldsymbol{j}_\varepsilon = \rho \varepsilon \boldsymbol{v}$$

- 介质本构方程—准平衡条件下，热力学关系

$$P = P(\rho, s); \quad u = u(\rho, s)$$

- 理想流体运动中，熵是守恒量

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial s}{\partial t} + \boldsymbol{v} \cdot \nabla s = 0$$

- 平衡时流体静止、均匀介质、无限小振幅，声波方程

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v} \approx 0; \quad \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} \approx -\nabla p; \quad p \approx \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s \rho'$$

- 一阶方程组

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial t} + \rho_0 \nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0; \quad \rho_0 \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial t} + \nabla p = 0$$

■ 二阶方程

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-\nabla^2 p=0;\quad \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{v}}{\partial t^2}-\nabla^2 \boldsymbol{v}=0$$

$$\boxed{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{v})=\nabla^2\boldsymbol{v}-\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{v})=\nabla^2\boldsymbol{v}}$$

其中

$$c=\sqrt{\left(\frac{\partial P}{\partial\rho}\right)_s}=\sqrt{\frac{\gamma P_0}{\rho_0}}$$ 空气中的声速

❑真空中的电磁波方程

- 描述参量：①电场强度矢量E; ②磁感应强度矢量B; ③空间电荷密度ρ、电流密度j分布。
- 物理规律：满足 Maxwell 方程组

■真空中的Maxwell方程组

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho}{\varepsilon_0};\ \nabla\times\boldsymbol{E}=-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0;\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\left(\boldsymbol{j}+\varepsilon_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}\right)$$

■消去*E*

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\nabla\times\boldsymbol{j}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\nabla^2\boldsymbol{B}$$

$$\boxed{\nabla^2\boldsymbol{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=\mu_0\nabla\times\boldsymbol{j}}$$

——*B*由空间电流密度的旋度产生，与空间电荷密度分布无关。

■消去B

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{E}=-\mu_0\left(\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}+\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}\right)=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{E})-\nabla^2\boldsymbol{E}$$

$$\boxed{\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{j}}{\partial t}+\nabla\left(\frac{\rho}{\varepsilon_0}\right)}$$

——E的产生源：①空间电流密度随时间的变化；②空间电荷密度分布随空间的变化。

■问题：E和B共6个未知量，但Maxwell方程组有8个方程，是否超定？事实上，8个方程不完全独立，引入标量势和矢量势后，仅有4个独立变量。

❑**静电场和静磁场方程** 当空间电荷密度和电流密度分布与时间无关时，Maxwell方程组为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\frac{\rho(\boldsymbol{r})}{\varepsilon_0};\ \nabla\times\boldsymbol{E}=0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0;\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

电场与磁场是解耦的. 对电场，由于$\nabla\times\boldsymbol{E}=0$，存在标量势：$\boldsymbol{E}=-\nabla\varphi$，因此

■**Poisson方程**

$$\varepsilon\nabla^2\varphi(\boldsymbol{r})=-\rho(\boldsymbol{r})$$

■**Laplace方程 在无源区域**

$$\nabla^2\varphi=0$$

对磁场，由于$\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$，存在矢量势：$\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$，因此

$$\nabla\times\nabla\times\boldsymbol{A}=\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

由于矢量势的任意性，可以选择Coulomb规范，要求$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$，于是矢量势满足

$$\nabla^2\boldsymbol{A}=-\mu_0\boldsymbol{j}(\boldsymbol{r})$$

- **Schrodinger 方程** 质量为m的微观粒子(如电子)在势场 U 中的运动满足Schrodinger 方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U\right)\psi$$

❑扩散方程

① 物理过程：由于浓度不均匀，物质从浓度高的地方向浓度低的地方转移—称为扩散。

② 描述参量：浓度的空间和时间分布 $u(r, t)$; 扩散流强度 $J(r,t)$—单位时间通过单位面积的原子或分子数或质量。

③ 物理规律：Fourier扩散定律

$$\boldsymbol{J}(\mathbf{r},t) = -D\nabla u(\mathbf{r},t)$$

④ 基本规律：质量守恒

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{J} = q(\mathbf{r},t)$$

其中：D 是扩散系数，不同的物质有不同的扩散系数；q 是扩散源强度（单位时间内单位体积中产生的粒子数或质量）

■扩散方程 由上述两方程，可以得到

$$\frac{\partial u}{\partial t} - D\nabla^2 u = q(\mathbf{r}, t)$$

■一维扩散过程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - D\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = q(x,t)$$

❑热传导方程

① 物理过程:由于温度不均匀，热量从温度高的地方向温度低的地方传导—称为热传导。

② 描述参量：温度的空间和时间分布 $T(\mathbf{r}, t)$; 热流强度 $J(\mathbf{r},t)$—单位时间通过单位面积的热量。

③ 物理规律：Fourier热传导定律

$$\boldsymbol{J}(\mathbf{r},t) = -\kappa\nabla T(\mathbf{r},t)$$

κ 是热传导系数

④ 基本规律：能量守恒定律

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \nabla\cdot\boldsymbol{J} = q$$

其中 e 是能量密度（单位质量物质的能量）；J 是能量流密度矢量，q 是其他热源。由于温度的变化，内能的变化为

$$\Delta e = \rho c_V \Delta T$$

■热传导方程 二式结合得到

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa \nabla^2 T = q$$

■对于各向异性的材料：一般扩散系数和热传导系数是张量 D_{ij}和κ_{ij} (i, j=1,2,3) 。因此扩散定律和热传导定律变成

$$J_i = -\sum_{j=1}^{3} D_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j}; \quad J_i = -\sum_{j=1}^{3} \kappa_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

热传导方程（扩散方程也作类似的变化）应该为

$$\rho c_V \frac{\partial T}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{3} \kappa_{ij} \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} = q$$

❑关于Laplace算子的讨论

物理量(温度，声压，电磁场，等)在原点邻域的泰勒展开

$$u(x,y,z)=u(0,0,0)+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 x+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 y+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 z$$

$$+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 x^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0 y^2+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0 z^2\right.$$

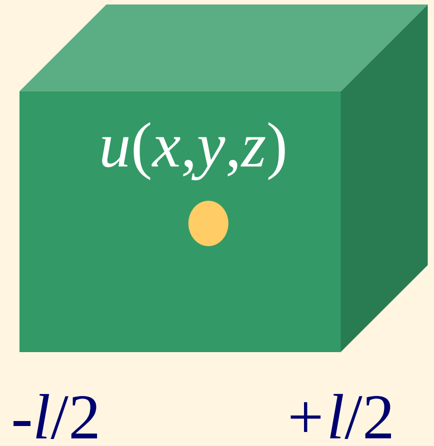
$$\left.+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}\right)_0 xy+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial z}\right)_0 yz+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial x}\right)_0 xz\right]+\ldots$$

在边长为*l*的正立方体内求平均，奇函数的贡献为零，于是

$$\bar{u}-u_0 \approx \frac{l^2}{24}\left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_0+\left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0\right] \approx \frac{l^2}{24}\nabla^2 u$$

$$\bar{u}=\frac{1}{\Delta V}\iiint_{\Delta V} u(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;\ u_0=u(0,0,0)$$

$$\bar{u}-u_0 \approx \frac{l^2}{24}\nabla^2 u$$



- **Laplace算子度量物理量u在某点数值u_0与无限小邻域内的平均值之差(注意：原点是任意的)**
- **在不同的物理过程中，该差别起不同作用**

- **热扩散方程** 局域值u_0不同于平均值，这种差别会随时间引起一种趋向于平均化的趋势

$$\bar{u}-u_0 \sim \frac{\partial u}{\partial t} \Rightarrow a^2\nabla^2 u = \frac{\partial u}{\partial t}$$

- **波动方程** 局域值u_0不同于平均值，这种差别起到恢复力作用

$$\bar{u}-u_0 \sim \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \Rightarrow a^2\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

- **稳态方程** 局域值u_0同于平均值

$$\bar{u}-u_0 \approx \frac{l^2}{24}\nabla^2 u = 0 \Rightarrow \nabla^2 u = 0 \Leftarrow$$

Laplace 方程解的基本性质

❑Laplace算子的空间各向同性

坐标转动不变性

$$x_i' = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} x_j$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{\nu=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_\nu'} \frac{\partial x_\nu'}{\partial x_i} = \sum_{\nu=1}^{3} a_{\nu i} \frac{\partial}{\partial x_\nu'}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3'^2} = \nabla'^2$$

坐标平移不变性

$$x_i' = x_i - a_i \quad (i = 1, 2, 3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i'}$$

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2'^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3'^2} = \nabla'^2$$

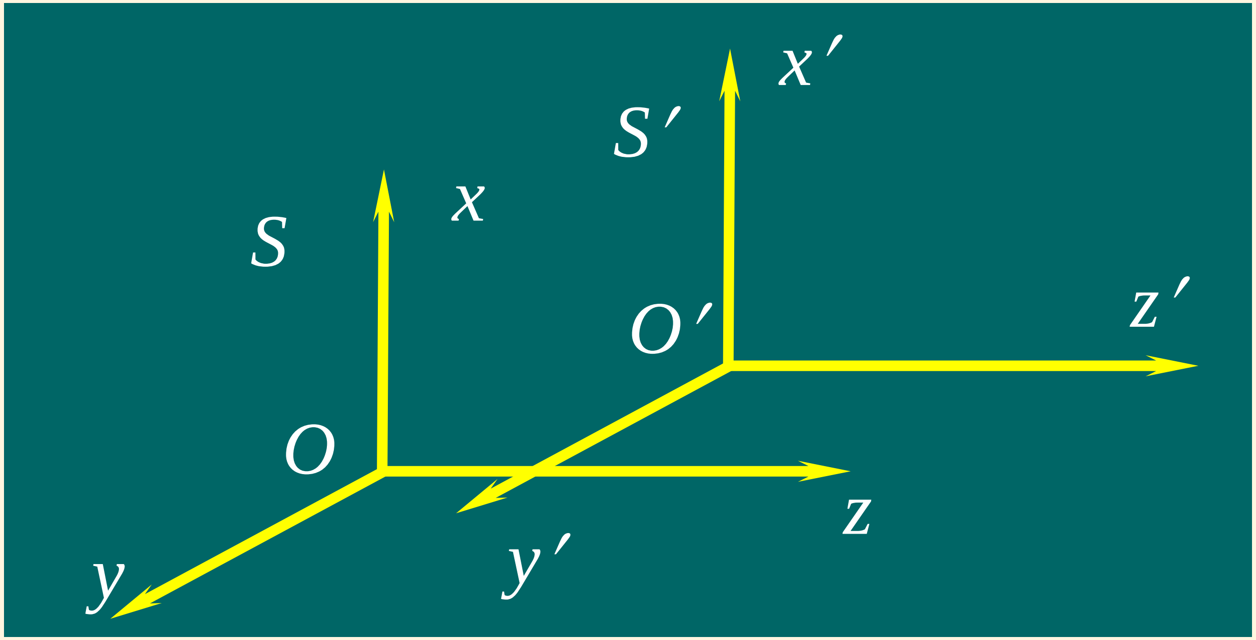
——Laplace算子在坐标转动、平动下形式不变，均匀的各向同性介质

❑波动方程的Lorentz变换不变性

$$\nabla'^2 u - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2} = 0$$

- **Galileo变换**

$$x_i = x_i' + U_{0i} t',\ (i = 1,2,3);\ t = t'$$



$$\frac{\partial}{\partial x_i'}=\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial x_i'}+\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x_i'}=\sum_{j=1}^{3}\delta_{ji}\frac{\partial}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{\partial}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial t'}+\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial x_j}{\partial t'}=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{j=1}^{3}U_{0j}\frac{\partial}{\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}_0\cdot\nabla$$

$$\nabla^2=\nabla'^2;\quad \frac{\partial^2}{\partial t'^2}=\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}_0\cdot\nabla\right)^2$$

$$\nabla^2 u-\frac{1}{c_0^2}\left(\frac{\partial}{\partial t}+\boldsymbol{U}_0\cdot\nabla\right)^2 u=0$$

均匀流的存在破坏了系统的空间对称性

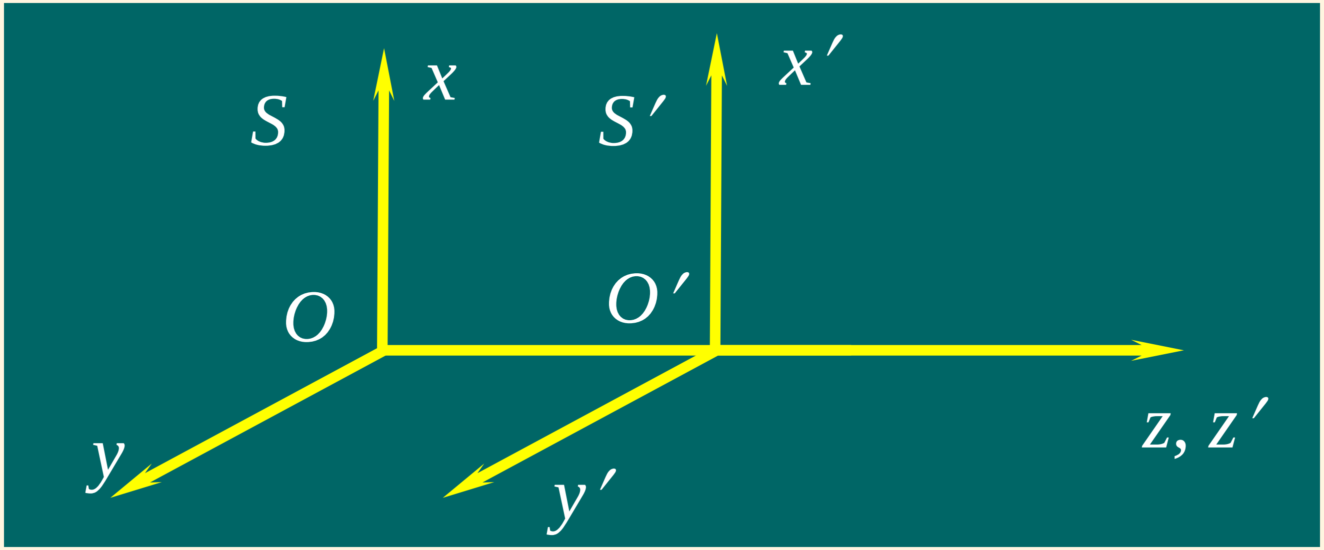
——在Galileo变换下，波动方程改变了形式

Lorentz变换

$$x' = x; \quad y' = y; \quad z' = \frac{z - U_0 t}{\sqrt{1 - M^2}}; \quad t' = \frac{t - U_0 z / c_0^2}{\sqrt{1 - M^2}}$$

$$x = x'; \quad y = y'; \quad z = \frac{z' + U_0 t'}{\sqrt{1 - M^2}}; \quad t = \frac{t' + U_0 z' / c_0^2}{\sqrt{1 - M^2}}$$

$M = U_0 / c_0 < 1$ —**流体亚音速流动**



$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}=\frac{1}{1-M^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{2U_0}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial z'\partial t'}+\frac{M^2}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{1}{1-M^2}\left(U_0^2\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-2U_0\frac{\partial^2}{\partial z'\partial t'}+\frac{\partial^2}{\partial t'^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial x'^2};\quad \frac{\partial^2}{\partial y^2}=\frac{\partial^2}{\partial y'^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}=\frac{\partial^2}{\partial x'^2}+\frac{\partial^2}{\partial y'^2}+\frac{\partial^2}{\partial z'^2}-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2}{\partial t'^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla'^2 u-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t'^2}=0\Rightarrow\nabla^2 u-\frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0$$

——Lorentz变换下波动方程不改变形式

❑Laplace算子作用于矢量场

- **直角坐标**

$$\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=E_x\boldsymbol{e}_x+E_y\boldsymbol{e}_y+E_z\boldsymbol{e}_z$$

——单位矢量是常矢量，不随坐标(x,y,z)变化，空间导数为零

$$\nabla^2\boldsymbol{E}(x,y,z,t)=\nabla^2(E_x\boldsymbol{e}_x)+\nabla^2(E_y\boldsymbol{e}_y)+\nabla^2(E_z\boldsymbol{e}_z)$$

$$=(\nabla^2E_x)\boldsymbol{e}_x+(\nabla^2E_y)\boldsymbol{e}_y+(\nabla^2E_z)\boldsymbol{e}_z$$

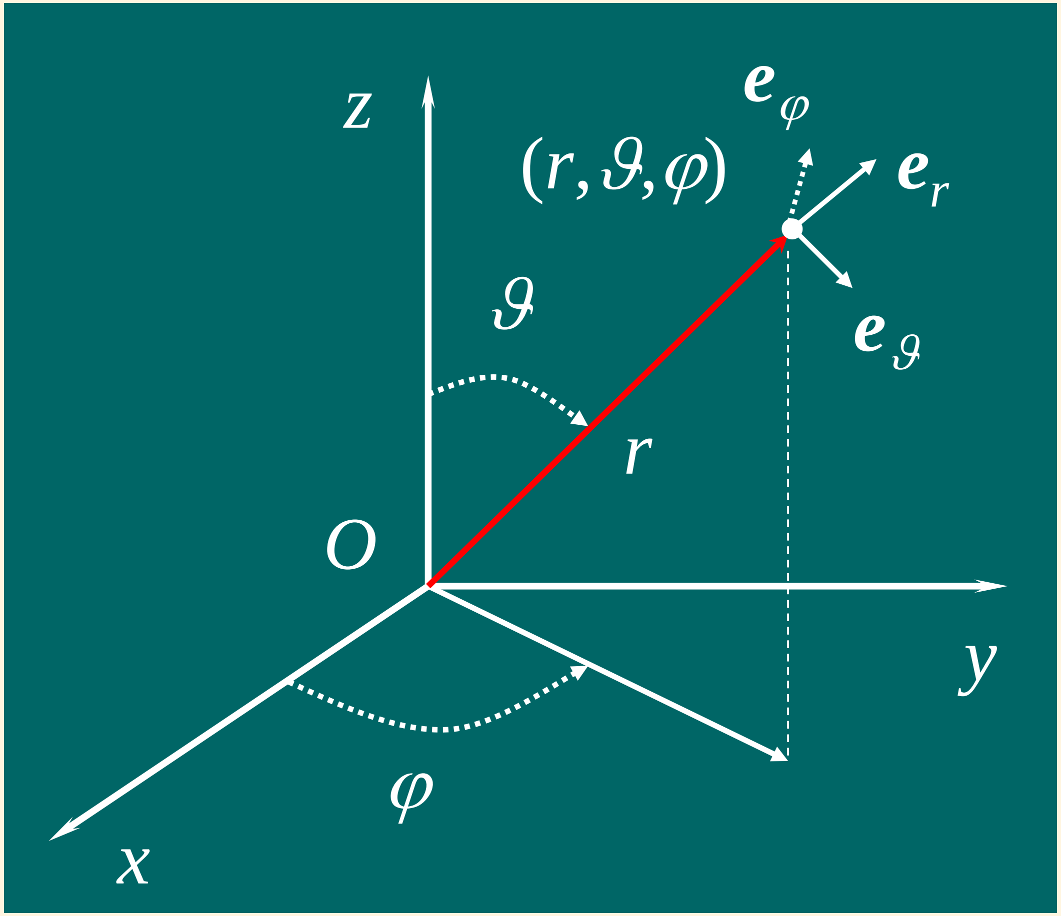
$$\Downarrow$$

$$\nabla^2E_i-\mu\varepsilon\frac{\partial^2E_i}{\partial t^2}=0\quad(i=x,y,z)$$

每个分量独立变化

球坐标

$$\boldsymbol{E}(r,\vartheta,\varphi,t)=E_r\boldsymbol{e}_r+E_\vartheta\boldsymbol{e}_\vartheta+E_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$



单位矢量每点不同，随空间坐标(r,ϑ,φ)变化，空间导数不为零

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(r,\vartheta,\varphi,t)=\nabla^2(E_r\boldsymbol{e}_r)+\nabla^2(E_\vartheta\boldsymbol{e}_\vartheta)+\nabla^2(E_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2\boldsymbol{E}=(\nabla^2\boldsymbol{E})_r\boldsymbol{e}_r+(\nabla^2\boldsymbol{E})_\vartheta\boldsymbol{e}_\vartheta+(\nabla^2\boldsymbol{E})_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

$$\Downarrow$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{E})_r=\nabla^2E_r-\frac{2}{r^2}\left[E_r+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial}{\partial\vartheta}(\sin\vartheta E_\vartheta)+\frac{1}{\sin\vartheta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$

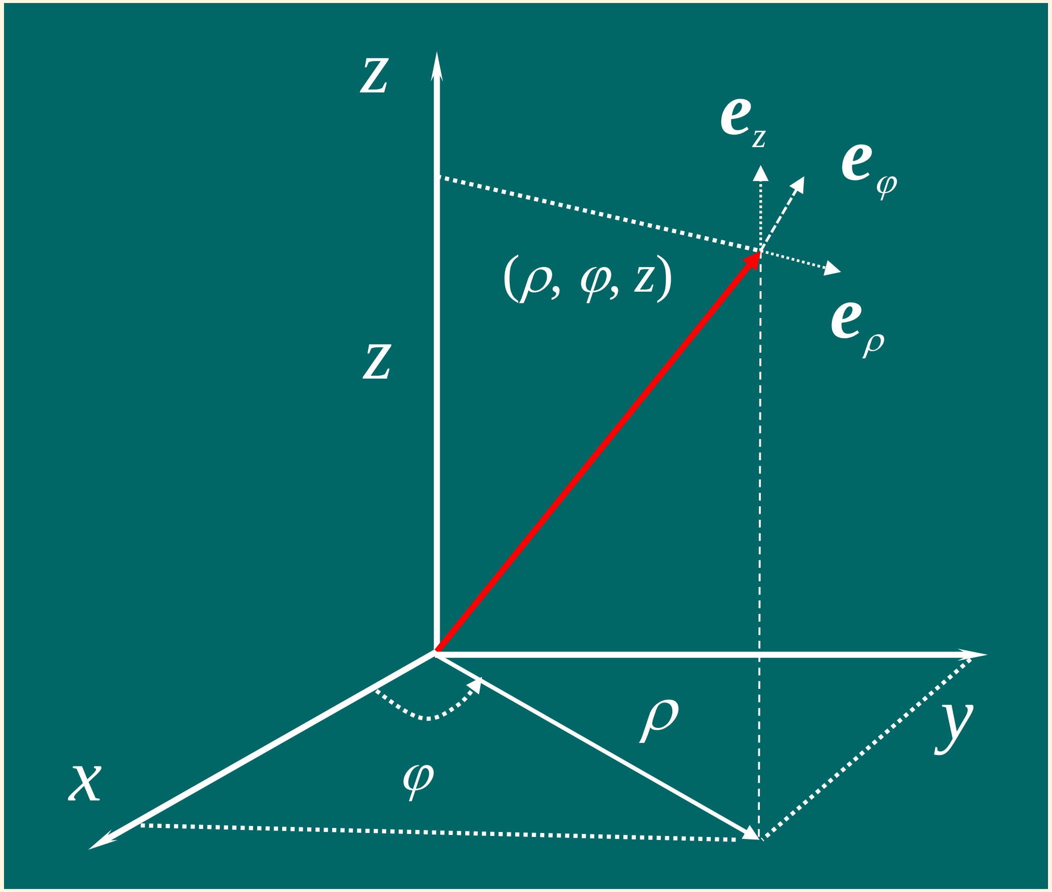
$$(\nabla^2\boldsymbol{E})_\vartheta=\nabla^2E_\vartheta+\frac{2}{r^2}\left(\frac{\partial E_r}{\partial\vartheta}-\frac{E_\vartheta}{2\sin^2\vartheta}-\frac{\cos\vartheta}{\sin^2\vartheta}\frac{\partial E_\varphi}{\partial\varphi}\right)$$

$$(\nabla^2\boldsymbol{E})_\varphi=\nabla^2E_\varphi+\frac{2}{r^2\sin\vartheta}\left(\frac{\partial E_r}{\partial\varphi}+\cot\vartheta\frac{\partial E_\vartheta}{\partial\varphi}-\frac{E_\varphi}{2\sin\vartheta}\right)$$

——三个分量相互耦合

柱坐标

$$\boldsymbol{E}(\rho,\varphi,z,t)=E_\rho\boldsymbol{e}_\rho+E_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+E_z\boldsymbol{e}_z$$



径向和方位方向单位矢量每点不同，随空间坐标(ρ,φ)变化，空间导数不为零, 但z方向独立

$$\nabla^2 \boldsymbol{E}(\rho,\varphi,z,t) = \nabla^2(E_\rho \boldsymbol{e}_\rho) + \nabla^2(E_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi) + (\nabla^2 E_z)\boldsymbol{e}_z$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = (\nabla^2 \boldsymbol{E})_\rho \boldsymbol{e}_\rho + (\nabla^2 \boldsymbol{E})_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + (\nabla^2 \boldsymbol{E})_z \boldsymbol{e}_z$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{E})_\rho = \nabla^2 E_\rho - \frac{1}{\rho^2} E_\rho - \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial E_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{E})_\varphi = \nabla^2 E_\varphi - \frac{1}{\rho^2} E_\varphi + \frac{2}{\rho^2} \frac{\partial E_\rho}{\partial \varphi}$$

$$(\nabla^2 \boldsymbol{E})_z = \nabla^2 E_z$$

——径向和方位方向分量相互耦合, 但z方向独立

❑ 分数Laplace算子概念

■ 三维无限空间

$$\psi(\boldsymbol{k},t)=\int\psi(\boldsymbol{r},t)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\equiv \mathrm{FT}^+[\psi(\boldsymbol{r},t)]$$

$$\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\psi(\boldsymbol{k},t)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\equiv \mathrm{FT}^-[\psi(\boldsymbol{k},t)]$$

$$-\nabla^2\psi(\boldsymbol{r},t)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\boldsymbol{k}|^2\,\psi(\boldsymbol{k},t)\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

$$=\mathrm{FT}^-[\,|\boldsymbol{k}|^2\,\psi(\boldsymbol{k},t)]=\mathrm{FT}^-\left[|\boldsymbol{k}|^2\ \mathrm{FT}^+[\psi(\boldsymbol{r},t)]\right]$$

■ 定义分数阶Laplace算子

$$(-\nabla^2)^{s/2}\psi(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{FT}^-\left[|\boldsymbol{k}|^s\ \mathrm{FT}^+[\psi(\boldsymbol{r},t)]\right]$$

■ 空间函数的卷积积分的形式

$$(-\nabla^2)^{s/2}\psi(\boldsymbol{r},t)=\mathrm{FT}^{-}\left[|\boldsymbol{k}|^s\int\psi(\boldsymbol{r}',t)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\right]$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int|\boldsymbol{k}|^s\int\psi(\boldsymbol{r}',t)\exp(-\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}')\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'\exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\left[\int|\boldsymbol{k}|^s\exp\left[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')\right]\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}\right]\psi(\boldsymbol{r}',t)\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$$

在球坐标下，上式中关于k 的积分首先完成角度部分积分得到

$$\int|\boldsymbol{k}|^s\exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}^3\boldsymbol{k}$$

$$=2\pi\int_0^\infty k^{s+2}\int_0^\pi\exp[\mathrm{i}k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\cos\vartheta]\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}k$$

$$=\frac{4\pi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\int_0^\infty k^{s+1}\sin\left(k|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|\right)\mathrm{d}k$$

$$\int |\boldsymbol{k}|^{s} \exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}')]\mathrm{d}^3\boldsymbol{k} = -\frac{4\pi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\frac{\partial^2}{\partial R^2}\int_0^\infty k^{s-1}\sin(kR)\mathrm{d}k$$

$$= -s(s+1)\Gamma(s)\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\frac{4\pi}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{3+s}} \quad (R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

■ 三维分数阶Laplace算子的积分形式

$$(-\nabla^2)^{s/2}\psi(\boldsymbol{r},t) = -\frac{s(s+1)\Gamma(s)}{2\pi^2}\sin\left(\frac{s\pi}{2}\right)\int \frac{\psi(\boldsymbol{r}',t)}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^{3+s}}\mathrm{d}^3\boldsymbol{r}'$$

❑含分数Laplace算子的波动方程

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta_0 \frac{\partial}{\partial t}(-\nabla^2)^{s/2} u$$

——描述非牛顿流体中的波动

9.2 定解条件，古典解和广义解

❑ 常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 u(t)}{\mathrm{d}t^2}+\omega^2 u(t)=0$$

通解

$$u(t)=A\sin(\omega t)+B\cos(\omega t)$$

两个任意常数

- Cauchy问题：初始条件决定；
- 边值问题：两端非齐次边界条件决定；
- 本征值问题：两端齐次边界条件，求非零解和存在条件。

❑偏微分方程

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}=0 \Rightarrow u(x,t)=G(x) \Leftarrow \text{任意函数}$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x}=0 \Rightarrow u(x,t)=G(x)+F(t)$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t\partial x}=C \Rightarrow u(x,t)=Cxt+G(x)+F(t)$$

❑一维波动方程的Cauchy问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

令 $\xi=x-t;\eta=x+t \Rightarrow \dfrac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$

通解

$$u = G(\xi) + F(\eta)$$

■ **波动方程的通解**

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$$

——两个任意函数：初始条件决定——Cauchy问题。例如：

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f(x);\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0} = g(x),\ x \in (-\infty,\infty)$$

D′ Alembert解

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-t) + f(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(s)\mathrm{d}s$$

- **问题：能否给定直线*x+t=C*(常数)上的初值，求*F*和*G*两个任意函数?**

$$u\big|_{x+t=C}=f(x);\quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x+t=c}=g(x)$$

$$u(x,t)\big|_{x+t=C}=F(C)+G(2x-C)=f(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{x+t=C}=F'(C)-G'(2x-C)=g(x)$$

无法求*F*和*G*——不能给定特征线*x*±*t*=*C*上的初值

□方程的古典解和弱间断解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\ t>0; x\in(-\infty,\infty)$$

$$u(x,t)|_{t=0}=f(x);\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x), x\in(-\infty,\infty)$$

D′ Alembert解

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-t)+f(x+t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}g(s)\mathrm{d}s$$

显然，要求f具有连续的一阶和二阶导数，而g具有连续的一阶导数，即要求$f\in C^2$, $g\in C^1$, 才能满足偏微分方程，这样的解称为方程的古典解.

但是, 实际物理问题往往不能给出具有如此光滑性的函数*f*和*g*, 而这样的问题却有实际意义

$$f(x)=\begin{cases}(x^2-1)^2, & |x|\le 1\\ 0, & |x|>1\end{cases};\quad g(x)=0$$

$$u(x,t)=u_1(x,t)+u_2(x,t)$$

$$u_1(x,t)=\begin{cases}[(x-t)^2-1]^2, & |x-t|\le 1\\ 0, & |x-t|>1\end{cases}$$

$$u_2(x,t)=\begin{cases}[(x+t)^2-1]^2, & |x+t|\le 1\\ 0, & |x+t|>1\end{cases}$$

由于在$|x\pm t|=1$上二阶导数间断(不满足方程), 但一阶导数连续, 故这种广义解也称为弱间断解

□广义解——强解(具体例子见下章)

选取函数序列$\{f_n\}$和$\{g_n\}$,每个元素满足$f_n \in C^2$, $g_n \in C^1$, 于是，对每对f_n和g_n，Cauchy问题存在古典解

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u_n}{\partial x^2} = 0$$

$$u_n\big|_{t=0} = f_n(x); \quad \left.\frac{\partial u_n}{\partial t}\right|_{t=0} = g_n(x)$$

$$\Downarrow$$

$$u_n(x,t) = \frac{1}{2}[f_n(x-t) + f_n(x+t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g_n(s)\mathrm{d}s$$

如果在“某种恰当意义下”, 序列$\{u_n\}$ 收敛到u:
例如均方收敛

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\left|u(x,t)-u_n(x,t)\right|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t \to 0$$

而序列$\{f_n\}$和$\{g_n\}$收敛到f和g(不满足$f\in C^2, g\in C^1$),即

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=f(x);\lim_{n\to\infty} g_n(x)=g(x)$$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x,t)=u(x,t)$$

$u(x,t)$(本身不一定满足方程)称为下列Cauchy问题的强解

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

$$u\big|_{t=0}=f(x);\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=g(x)$$

■非齐次方程　设函数序列$\{u_n\}$满足可微性条件，且在“某种恰当意义下”收敛到u

$$\lim_{n\to\infty} u_n = u$$

如果$L(u_n)$也在“某种恰当意义下”收敛到f

$$\lim_{n\to\infty} \boldsymbol{L}(u_n) = f$$

则称u为方程$L(u)=f$的广义解(强解)。

❑广义解——弱解（变分解）

由广义函数定义的广义解称为方程的弱解

$$\boldsymbol{L}(u) = f \Rightarrow (\boldsymbol{L}u,\varphi) = (f,\varphi),\quad \forall \varphi \in D$$

❑广义解的意义 解决方程解的存在性问题. 因为若干函数来自于实验测量，总含有噪声，不一定满足可微性条件，古典解不存在.

❑定解问题

偏微分方程：求通解没必要、意义不大。一般需要求满足给定条件的特解 ——称为定解问题

- 初始条件 —研究的物理系统过去的历史
- 边界条件 —研究的物理系统与外部的相互作用

❑初始条件

① 扩散方程、热传导方程(时间的一阶方程), 初始分布，求$t>0$后场随时间的演化

$$u(\mathbf{r},t)|_{t=0}=u(\mathbf{r},0);\ T(\mathbf{r},t)|_{t=0}=T(\mathbf{r},0)$$

② 波动方程(时间的二阶方程), 必须知道初始位移分布及速度分布

$$u(\mathbf{r},t)\big|_{t=0}=\varphi(\mathbf{r});\quad \left.\frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(\mathbf{r})$$

——注意：是整个系统在 t=0 时的分布，而不是仅仅知道某点或某几点的值

□ 问题

■振动方程 ➡ 初始位移分布及速度分布

■声波方程

$$p(\mathbf{r},t)\big|_{t=0}=\phi(\mathbf{r})$$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}-c^2\nabla^2 p=0 \quad \xrightarrow{??} \quad \left.\frac{\partial p(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(\mathbf{r})$$

物理意义？

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial t}+\rho_0 c^2\nabla\cdot\mathbf{v}=0;\quad \rho_0\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+\nabla p=0}$$

一阶方程组

一阶方程组初始条件

$$p(\mathbf{r},t)\big|_{t=0}=\phi_1(\mathbf{r});\ \ \mathbf{v}(\mathbf{r},t)\big|_{t=0}=\phi_2(\mathbf{r})$$

$$\boxed{\begin{aligned} &p(\mathbf{r},t)\big|_{t=0}=\phi_1(\mathbf{r}) \\ &\left.\frac{\partial p(\mathbf{r},t)}{\partial t}\right|_{t=0}=-\rho_0 c^2\nabla\cdot\phi_2(\mathbf{r}) \end{aligned}}$$

■电磁波方程

$$\nabla^2\boldsymbol{E}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{E}}{\partial t^2}=0;\ \ \nabla^2\boldsymbol{B}-\mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\boldsymbol{B}}{\partial t^2}=0$$

$$\boxed{\nabla\times\boldsymbol{E}+\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}=0;\ \ \nabla\times\boldsymbol{B}-\varepsilon_0\mu_0\frac{\partial\boldsymbol{E}}{\partial t}=0}$$

一阶方程组

一阶方程组初始条件

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\phi_1(\boldsymbol{r});\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\phi_2(\boldsymbol{r})$$

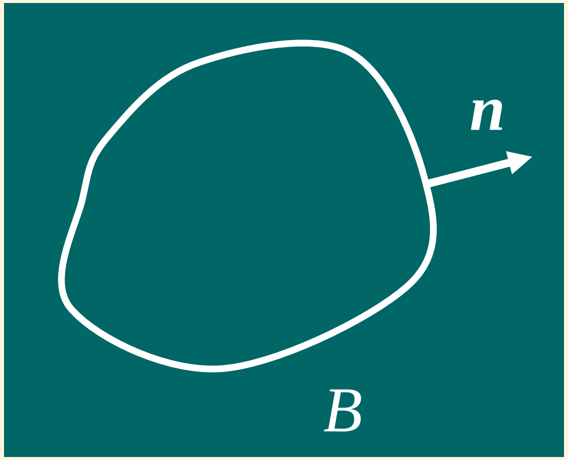
$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\phi_1(\boldsymbol{r});\quad \frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}=\frac{1}{\varepsilon_0\mu_0}\nabla\times\phi_2(\boldsymbol{r})$$

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r},t)|_{t=0}=\phi_2(\boldsymbol{r});\quad \frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}=-\nabla\times\phi_1(\boldsymbol{r})$$

❑边界条件

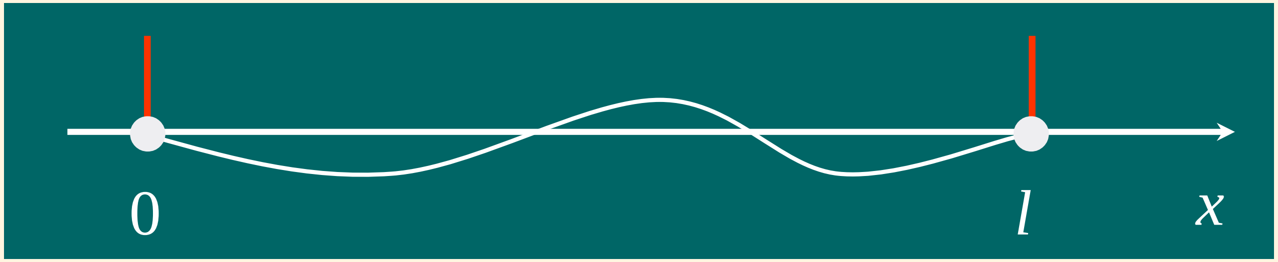
①第一类边界条件：给出边界上的分布

$$u(\boldsymbol{r},t)|_{\boldsymbol{r}\in \boldsymbol{B}}=u_B(\boldsymbol{r},t)$$



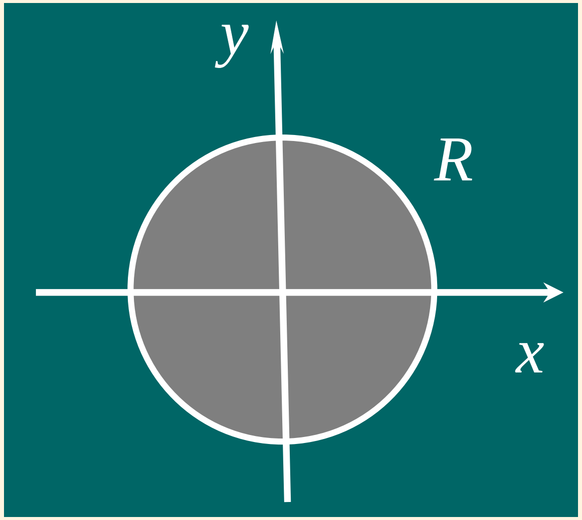
例1 弦乐器中两端固定的弦振动，边界条件可写作

$$u(x,t)|_{x=0}=u(x,t)|_{l=0}=0$$



例2 弦乐器中圆鼓的振动，因圆周固定，边界条件可写作

$$u(x,y,t)|_{\sqrt{x^2+y^2}=R}=0$$



在极坐标下

$$u(r,\vartheta,t)|_{r=R}=0$$

②第二类边界条件: 给出边界上外法向导数的分布

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_B = \varphi_B(\boldsymbol{r},t), \quad \text{或} \quad (\nabla u)\cdot\boldsymbol{n} = \varphi_B$$

例1 一端自由、另一端固定纵向振动杆: 在固定端是第一类边界条件；在自由端，处于自由状态，无应力，由虎克定律

解：在x=0,l处，分别满足第一、二类边界条件

$$u(x,t)\big|_{x=0} = 0$$

$$Y\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l} = 0$$

③第三类边界条件：给出边界上函数值与法向导数的线性关系

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_B=\phi$$

例：物体的自由冷却。热传导泛定方程为

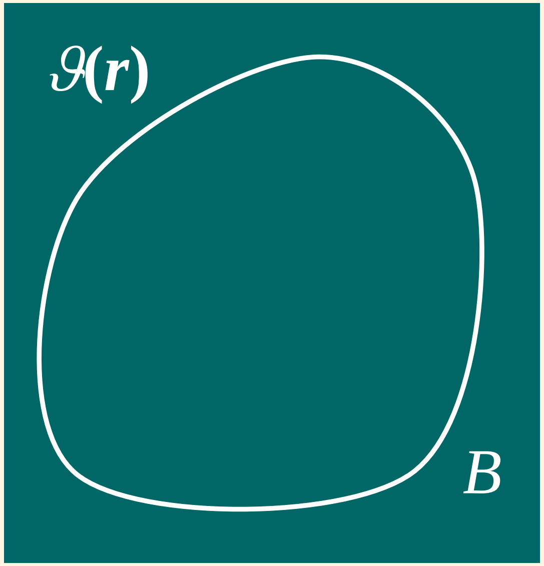
$$\rho c_V\frac{\partial T}{\partial t}-\kappa\nabla^2 T=0$$

物体初始温度分别为

$$T(x,y,z,t)\,|_{t=0}=T_0(x,y,z)$$

边界条件由“自由冷却”而得到。由牛顿自由冷却定律：从物体流出的热流矢量密度正比于物体表面与周围介质的温度差

$$-\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\bigg|_B = h(T-\vartheta)\,|_B$$



因此

$$\left(hT+\kappa\frac{\partial T}{\partial n}\right)\bigg|_B = \vartheta(\mathbf{r}),\mathbf{r}\in B$$

小心，这里θ前面
应该是少了一个h

——第三类非齐次边界条件

- **细杆两端的“自由冷却”：一维问题**

x=0, 外法向矢量 n_x=–1, 故

$$\left(hT-\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=0}=\vartheta(0)$$

x=l, 外法向矢量 n_x=+1, 故

$$\left(hT+\kappa\frac{\partial T}{\partial x}\right)\Bigg|_{x=l}=\vartheta(l)$$

说明

(1)齐次边界条件：右边的函数为零

(2)非齐次边界条件：右边的函数不为零

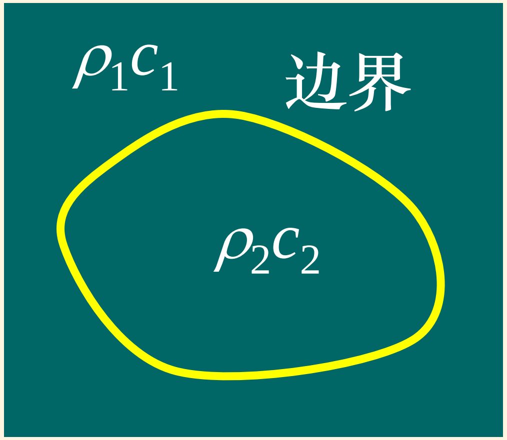
(3) 线性边界条件：仅仅出现待求分布的一次幂

(4)非线性边界条件: 非线性定解问题

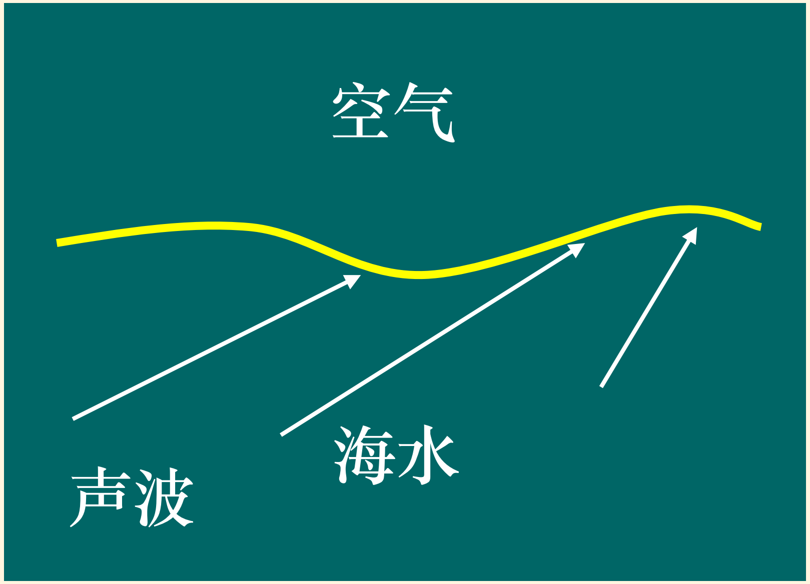
❑声学边界条件

① 第一类边界：“硬”介质被“软”介质包围。边界上，声压 p 为零，故边界条件为

$$p(\mathbf{r},t)\big|_B = 0$$



一个常遇到的例子是：水(“硬”介质)中声波遇到空气(“软”介质)界面，可以作这样的近似。因此水中的声波是几乎不能进入空气的（千分之一能量）。



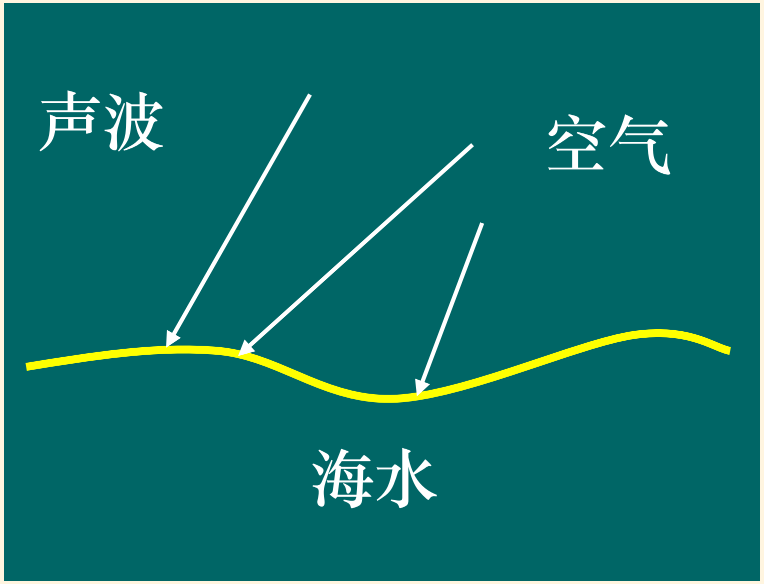
② 第二类边界: “软”介质被“硬”介质包围。边界上，流体粒子的速度为零，因此声压p的法向导数为零，故边界条件为

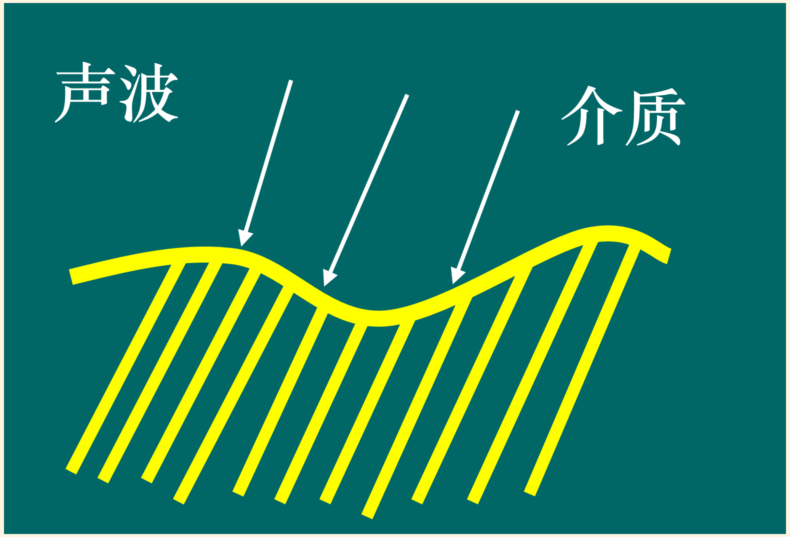
$$\left.\frac{\partial p(\mathbf{r},t)}{\partial n}\right|_B = 0$$

③ 第三类边界: 吸声边界

$$\left.\left(\frac{\partial p}{\partial n} - \mathrm{i}k_0\beta p\right)\right|_B = 0$$

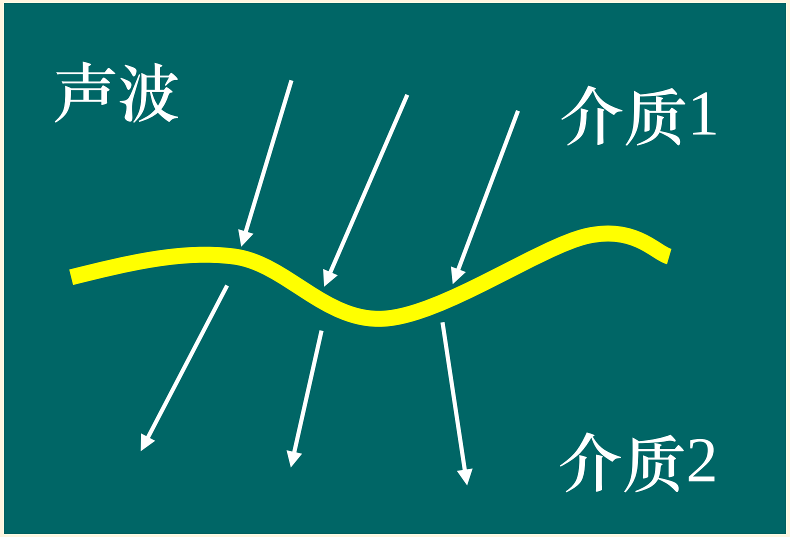
——非Hermite对称边界





④ **理想流体界面 根据力学性质：在介面上法向速度和声压连续，即**

$$\mathbf{v}_n\big|_1 = \mathbf{v}_n\big|_2;\quad p\big|_1 = p\big|_2$$



$$\boxed{\rho_0\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p} \Rightarrow \boxed{\begin{gathered}\left.\frac{1}{\rho_1}\frac{\partial p}{\partial n}\right|_1 = \left.\frac{1}{\rho_2}\frac{\partial p}{\partial n}\right|_2 \\ p\big|_1 = p\big|_2\end{gathered}}$$

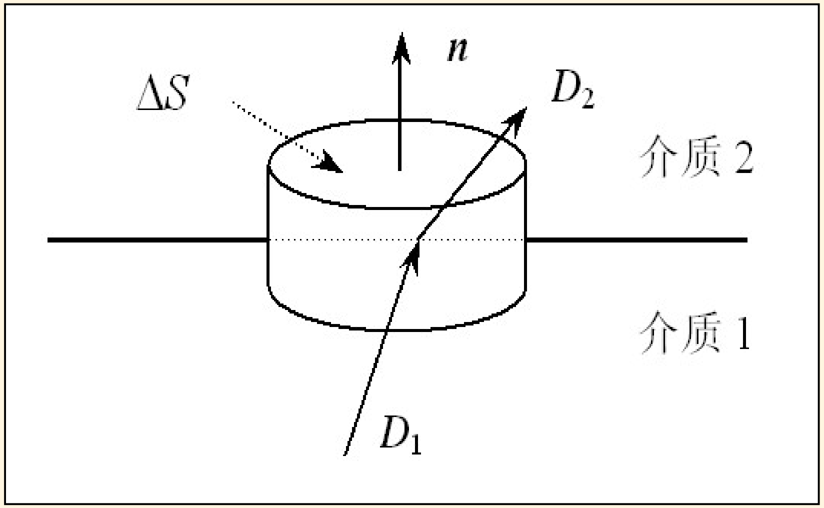
⑤ **黏性流体-黏性流体界面；理想流体-固体界面；黏性流体-固体界面；固体-固体界面。**

❑电磁边界条件

- **闭曲面积分：法向边界条件**

$$(\boldsymbol{D}_2-\boldsymbol{D}_1)\cdot\boldsymbol{n}=\sigma_f$$

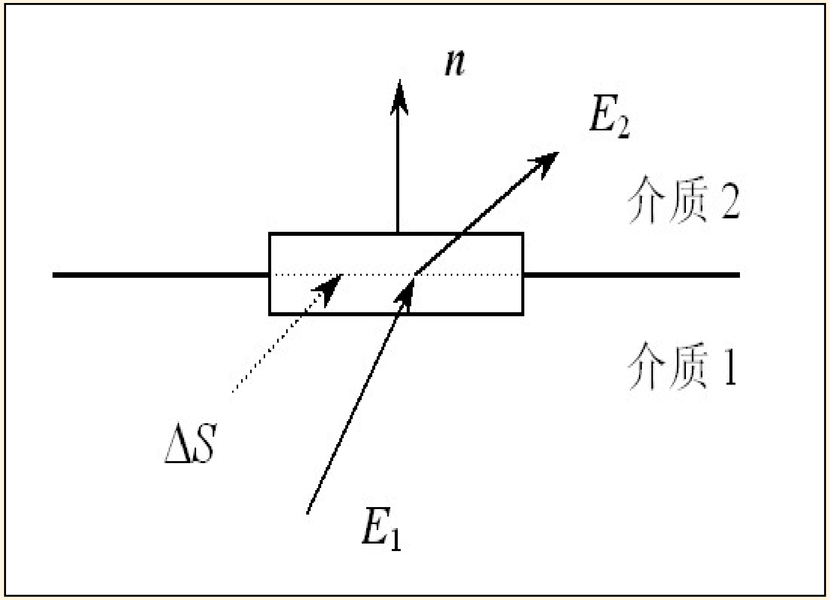
$$(\boldsymbol{B}_2-\boldsymbol{B}_1)\cdot\boldsymbol{n}=0$$



- **闭曲线积分：切向边界条件**

$$(\boldsymbol{E}_2-\boldsymbol{E}_1)\cdot\boldsymbol{t}=0$$

$$(\boldsymbol{H}_2-\boldsymbol{H}_1)\cdot\boldsymbol{t}=\boldsymbol{k}_f$$



——由积分方程形式的Maxwell方程给出

9.3 数学物理方程的分类

□线性偏微分方程

自变量 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, 函数 $u(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, 关于 u 的线性方程，一般形式

注意边界条件也要求线性

$$\boldsymbol{L}[u]=f$$

$$\boldsymbol{L}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c$$

① 齐次方程： $f=0$; 一般是无源问题

② 非齐次方程： $f\neq0$; 有源问题

③ 常系数方程：a_{ij}, b_i, c 与自变量 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 无关。一般是均匀介质；

④ 变系数方程：a_{ij}, b_i, c 与自变量 $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ 有关。一般是非均匀介质。

❑叠加原理

(1) 如果u_i满足$L[u_i]=f_i$ $(i=1,2,\ldots,N)$

则

$$u=\sum_{i=1}^{N}C_i u_i$$

满足

$$\boldsymbol{L}[u]=f;\quad f\equiv\sum_{i=1}^{N}C_i f_i$$

不同源产生的场的简单叠加

(2)如果u_i满足，$L[u_i]= f_i$ $(i=1,2,\ldots,\infty)$

则 $u=\sum_{i=1}^{\infty}C_i u_i$ 满足 $L[u]=f$; $f=\sum_{i=1}^{\infty}C_i f_i$

——如果无限求和收敛且求和与微分可交换(引入广义函数后，条件比较松)。分离变量方法的基础

(3)如果$u(\beta)$满足，$L[u(\beta)]=f(\beta)$

则 $u=\int C(\beta)u(\beta)\mathrm{d}\beta$ 满足 $L[u]=f$; $f=\int f(\beta)\mathrm{d}\beta$

——如果积分与微分可交换(引入广义函数后，条件比较松)。积分变换方法的基础

❑ 两个自变量的方程分类(注意：实系数)

两个自变量的线性偏微分方程

$$a_{11}u_{xx} + 2a_{12}u_{xy} + a_{22}u_{yy} + b_1u_x + b_2u_y + cu = f$$

假定：a_{11}、a_{12}、a_{22}、b_1、b_2、c、f 是 x、y 的函数且是实数。

■ 试作变量变换: 空间(x,y)到空间(ξ,η)的映射

$$\begin{cases} x = x(\xi,\eta) \\ y = y(\xi,\eta) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \xi = \xi(x,y) \\ \eta = \eta(x,y) \end{cases} \Longleftarrow J = \frac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)} \neq 0$$

要求 Jacobi 行列式不为零，否则函数相关。

$$a_{11}u_{xx}+2a_{12}u_{xy}+a_{22}u_{yy}+b_1u_x+b_2u_y+cu=f$$

$$\boxed{A_{11}u_{\xi\xi}+2A_{12}u_{\xi\eta}+A_{22}u_{\eta\eta}+B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu=F}$$

$$\begin{cases} A_{11}=a_{11}\xi_x^2+2a_{12}\xi_x\xi_y+a_{22}\xi_y^2 \\ A_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2 \\ A_{12}=a_{11}\xi_x\eta_y+a_{12}(\eta_x\xi_y+\eta_y\xi_x)+a_{22}\xi_y\eta_y \end{cases}$$

注意：A_{11}和A_{22}的系数具有对称的形式，如果取 $\xi=\xi(x,y)$和$\eta=\eta(x,y)$是下列一阶偏微分方程的二个独立的特解

$$a_{11}z_x^2 + 2a_{12}z_x z_y + a_{22}z_y^2 = 0$$

——则方程的系数A_{11}和A_{22}为零

■ 特征方程

① 设 $z=z(x,y)$是方程的一个特解，则 $z(x,y)=C$ (常数) 必满足常微分方程(称为特征方程)

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 - 2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + a_{22} = 0$$

② 反之，如果$\varphi(x,y)=C$(常数)是上述常微分方程的一个通解，则$z=\varphi(x,y)$必是一阶偏微分方程的一个特解

证明：①由 $z(x,y)=C$，二边微分

$$\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=0\Rightarrow\frac{z_x}{z_y}=-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

代入一阶偏微分方程即得到特征方程

$$a_{11}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2-2a_{12}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_{22}=0$$

②由 $\varphi(x,y)=C$，二边微分

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\mathrm{d}y=0\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{\varphi_x}{\varphi_y}$$

又 $z=\varphi(x,y)$，故

$$z_x=\varphi_x;z_y=\varphi_y\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{z_x}{z_y}$$

代入特征方程得到一阶偏微分方程

■ 特征曲线

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}+\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{a_{12}-\sqrt{a_{12}^2-a_{11}a_{22}}}{a_{11}}$$

$\Rightarrow$ **特征曲线**

$$\xi(x,y)=C_1$$

$$\eta(x,y)=C_2$$

■ 实系数二阶方程的分类 根据特征曲线的性质进行分类

(1) 双曲型方程： $a_{12}^2-a_{11}a_{22}>0$，**存在二族实特征线**

$$\xi(x,y)=C_1;\quad \eta(x,y)=C_2$$

取变换关系

$$\xi=\xi(x,y);\ \eta=\eta(x,y)$$

原二阶偏微分方程变成

$$u_{\xi\eta} = -\frac{1}{2A_{12}}\left(B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu - f\right)$$

再令变换

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi + \eta);\ \beta = \frac{1}{2}(\xi - \eta)$$

可得到双曲型方程的标准形式

$$u_{\alpha\alpha} - u_{\beta\beta} = \varPhi(u_\alpha, u_\beta, \alpha, \beta)$$

——可见波动方程是典型的双曲方程

- 主部 由以上讨论可见，二阶方程的特征完全由方程的二阶偏导数项决定，称为方程的主部

(2) 抛物型方程： $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = 0$，仅存在一族实特征线

$$\xi(x,y) = C_1$$

取一个变换关系

$$\xi = \xi(x,y)$$

再取与$\xi(x,y)$无关的函数$\eta(x,y)$构成自变量变换，于是 $A_{11}=0$, 同时可证明 $A_{12}=0$。因此，原二阶偏微分方程变成

$$u_{\eta\eta} = \Phi(u_\xi, u_\eta, \xi, \eta)$$

——上述即抛物型方程的标准形式。显然，扩散方程是典型的抛物方程。

(3) 椭圆型方程: $a_{12}^2 - a_{11}a_{22} < 0$ **,无实的特征曲线, 且**

$$\xi(x,y) = \eta^*(x,y)$$

取变换关系

$$\xi = \xi(x,y);\ \ \eta = \xi^*(x,y)$$

原二阶偏微分方程变成

$$u_{\xi\eta} = -\frac{1}{2A_{12}}\left(B_1 u_\xi + B_2 u_\eta + Cu - f\right)$$

——得到与双曲型方程情况类似的方程, 不同的是:ξ和η是复数并且$\eta = \xi^*$，令

$$\xi = \alpha + \mathrm{i}\beta;\ \ \eta = \alpha - \mathrm{i}\beta$$

$$\alpha=\mathrm{Re}(\xi)=\frac{1}{2}(\xi+\eta);\quad \beta=\mathrm{Im}(\xi)=\frac{1}{2}(\xi-\eta)$$

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=\Phi(u_{\alpha},u_{\beta},\alpha,\beta)$$

——即椭圆型方程的标准形式。显然位势方程是典型的椭圆方程。

注意

① 因为系数a_{11},a_{12},a_{22}与 x, y 有关，所以上述分类也与区域有关；

② 在同一区域，作自变量变换方程的类型不变，不可能通过自变量变换改变方程的类型。

例1 Tricomi 方程

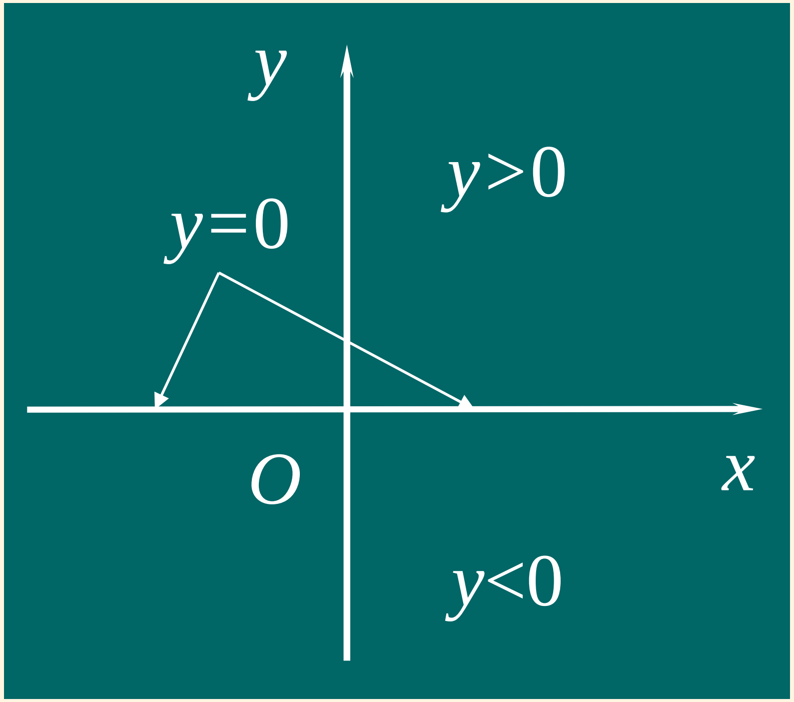
$$y\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

$a_{11}=y,\ a_{12}=0,\ a_{22}=1$

$$\boxed{a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-y}$$

特征方程为

$$y\left(\frac{\mathrm{d}y}{dx}\right)^2+1=0$$



(1)上半平面是椭圆型的

由特征方程

$$\mathrm{d}x\pm \mathrm{i}\sqrt{y}\mathrm{d}y=0\Rightarrow x\pm \mathrm{i}\frac{2}{3}y^{3/2}=C_1$$

作变量变换

$$\xi = x;\ \eta = \frac{2}{3} y^{3/2}$$

原方程变成标准形式

$$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} + \frac{1}{3\eta} u_\eta = 0$$

(2)下半平面是双曲型的

$$\mathrm{d}x \pm \sqrt{-y}\,\mathrm{d}y = 0 \Rightarrow x \mp \frac{2}{3}(-y)^{3/2} = C_2$$

作变量变换

$$\xi = x - \frac{2}{3}(-y)^{3/2};\ \eta = x + \frac{2}{3}(-y)^{3/2}$$

原方程变成标准形式

$$u_{\xi\eta} - \frac{1}{6(\xi - \eta)}(u_\xi - u_\eta) = 0$$

例2 具体物理例子：流线型运动物体产生的声波

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}-\left(\frac{1}{c_0^2}-\frac{1}{U_0^2}\right)\frac{\partial^2 p}{\partial t_1^2}=-\rho_0 U_0^2 A''(U_0 t_1)\delta(x)\delta(y)$$

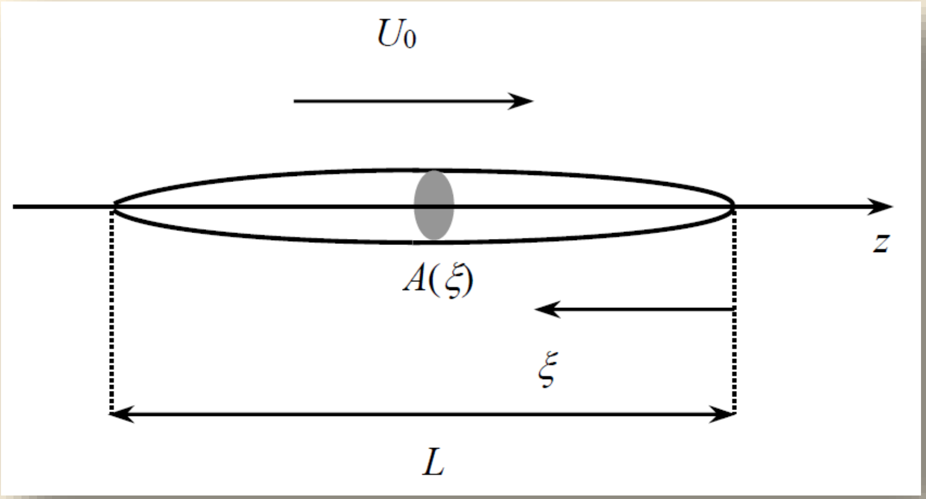
其中：$A(\xi)$为截面面积； $t_1=t-z/U_0; A''(\xi)=\mathrm{d}^2 A(\xi)/\mathrm{d}\xi^2$

方程的类型决定于U_0的大小：亚音速，等音速和超音速。

① 超音速：声爆 (sonic boom)

② 等音速：音障 (sonic barrier)

声辐射功率无限



① 当$U_0<c_0$时(亚音速), 方程是3个变量的椭圆型方程，其解有良好的性质;

② 当$U_0=c_0$时(等音速), 方程是2个变量的椭圆型方程;

③ 当$U_0>c_0$时(超音速), 方程是3个变量的双曲型方程，其解表现出丰富的波动性质。

问题 量子力学Schrodinger方程属于什么类型?

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial\psi}{\partial t}=\left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2+U\right)\psi$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2\nabla^2 u = 0$$ ➡ 双曲型方程

$$\rho C_v \frac{\partial T}{\partial t} - \kappa\nabla^2 T = 0$$ ➡ 抛物型方程

$$\mathrm{i}\hbar\frac{\partial \psi}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right)\psi$$ ➡ 色散型波动方程

——复系数，前面讨论的方法不能直接引用

假定 $\psi = \psi_R + \mathrm{i}\psi_I$，则实部和虚部满足耦合方程

$$\hbar\frac{\partial \psi_R}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right)\psi_I$$

$$-\hbar\frac{\partial \psi_I}{\partial t} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U\right)\psi_R$$

实部和虚部都满足波动方程

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi_{R,I}}{\partial t^2} = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2 + U \right)^2 \psi_{R,I}$$

自由粒子(类似于薄板弯曲振动方程)

$$\frac{\partial^2 \psi_{R,I}}{\partial t^2} + \frac{\hbar^2}{(2m)^2}\nabla^4 \psi_{R,I} = 0$$

- **双曲型 波动过程: 解函数可能存在间断，比如存在波阵面;**
- **抛物型 扩散过程:解函数随时间衰减;**
- **椭圆型 位势平衡: 解函数光滑，如Laplace方程的解无限可微。**

9.4 定解问题的适定性

❑**定解问题** 给定边界条件和初始条件，求方程的特解

(1)初值问题: Cauchy问题), 无穷区域

$$\rho c_V \frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r},t),\ t>0$$

$$u(\mathbf{r},t)|_{t=0} = \varphi(\mathbf{r})$$

$$\frac{\partial^2 u(\mathbf{r},t)}{\partial t^2} - a^2 \nabla^2 u(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r},t),\ t>0$$

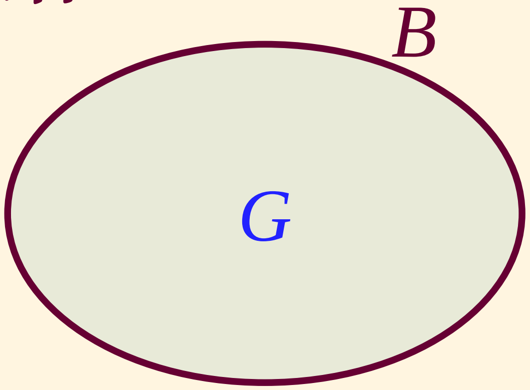
$$u(\mathbf{r},t)|_{t=0} = \varphi(\mathbf{r}); u_t(\mathbf{r},t)|_{t=0} = \psi(\mathbf{r})$$

——**含时间的瞬态过程**

(2)边值问题: 对 Laplace 方程, 描写的是稳态问题, 无时间变量, 一般给出的是边界条件

$$\nabla^2 u(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in G$$

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)_B = \psi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in B$$



(3)混合问题: 有限空间中的瞬态过程

$$\rho c_V \frac{\partial u(\mathbf{r},t)}{\partial t} - \kappa \nabla^2 u(\mathbf{r},t) = f(\mathbf{r},t),\ \mathbf{r} \in G, t > 0$$

$$u(\mathbf{r},t)\big|_{t=0} = \varphi(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in G + B$$

$$\left(\alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial n}\right)_B = \psi(\mathbf{r},t), \mathbf{r} \in B, t \geq 0$$

❑定解问题的适定性

一般，对位势方程提边值问题，而对扩散方程和波动方程提混合问题，能否反过来：对位势方程提混合问题，而对波动方程提边值问题?

位势方程 → 边值问题

波动方程
扩散方程 → 混合问题 ← $t>0$

这不是偶然的，物理上，这样的提法有物理意义，数学上，这样的提法是否有根据? ——数学物理方程定解问题的**适定性**问题。

如果定解问题满足

(1)解存在；(2)解唯一；(3)解稳定

则称定解问题是适定的，否则称为不适定的

■存在性：古典解扩充到广义解：①基于函数序列收敛的强解；②基于广义函数的弱解；③基于变分原理的弱解(Ritz意义的弱解)。

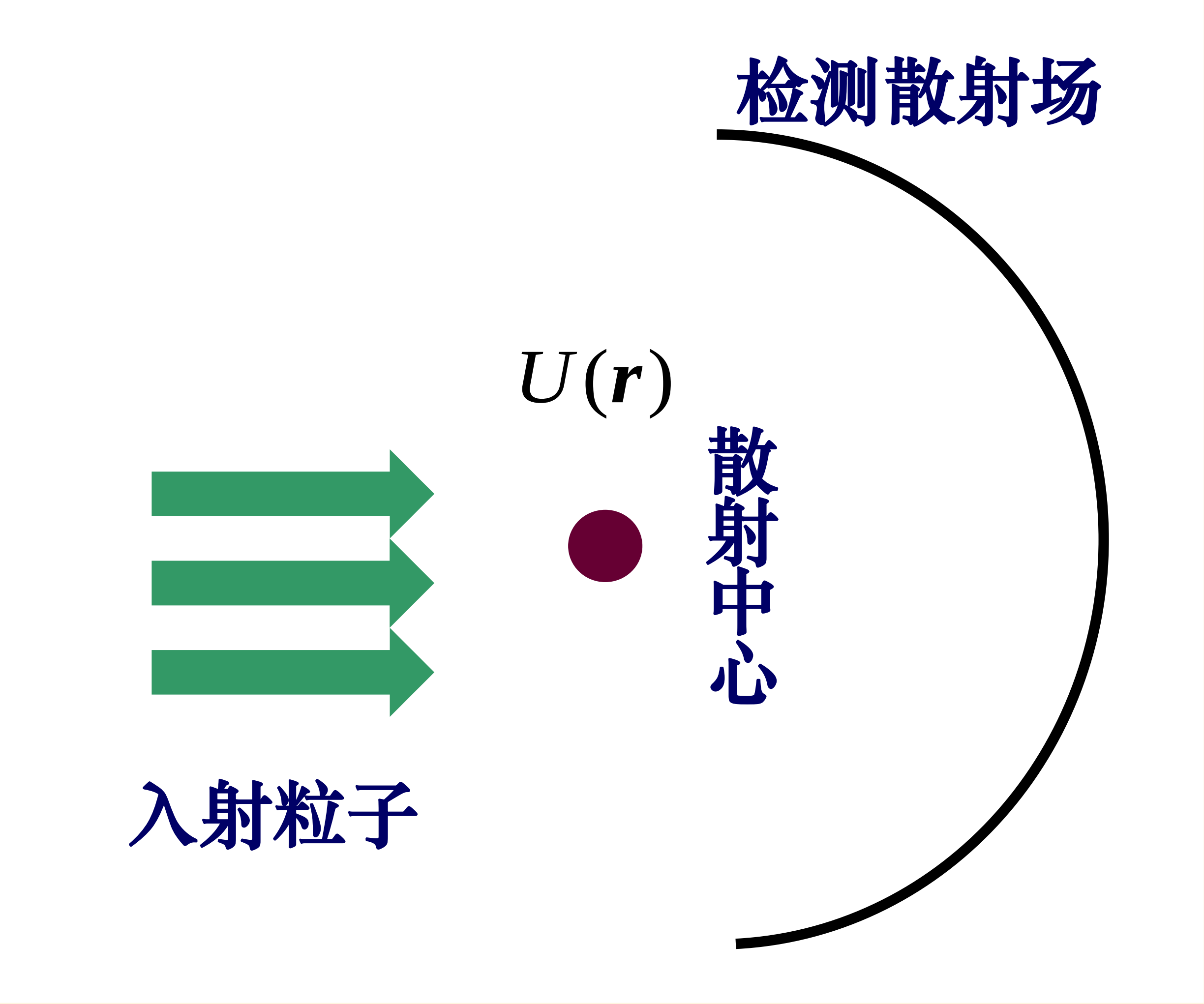
■唯一性：定解问题的解一般是唯一的，唯一性保证用不同的方法求得的解是一致的，例如：级数形式的解和解析解。

■稳定性：方程系数都是通过实验得到，如果测量数据有小的变化，而解的变化很大，这样的解无实际应用意义。

- **正问题**：已知边界、边界条件、方程的系数 或非齐次项 f，求方程的解。
- **逆问题**：已知部分边界、部分方程的系数或部分非齐次项 f，或部分解(在某个实验上可测量的区域), 要求未知的另一部分边界、或另部分方程的系数、或另一部分非齐次项 f。

逆问题一般是不适定问题。不适定问题的求解是目前一个研究课题，有很重要的应用，物理中经常遇到：①地球物理勘探; ②无损评价; ③医学成像; ④水力工程, 等领域有非常重要的应用(第15章讨论)

□逆问题的典型例子——Rutherford散射



■正问题

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2)\psi = \dfrac{2m}{\hbar^2}U(\boldsymbol{r})\psi \\ \psi_i(\boldsymbol{r}) = \psi_0 \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \end{cases} \Rightarrow$$

求散射场分布

$\psi_s(\boldsymbol{r})$

■逆问题 已知测量的散射场(部分)

$$\begin{cases} (\nabla^2 + k^2)\psi = \dfrac{2m}{\hbar^2}U(\boldsymbol{r})\psi \\ \psi_i(\boldsymbol{r}) = \psi_0 \exp(\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}) \\ \psi_s(\boldsymbol{r}_j)\ (j = 1, 2, 3, \cdots, M) \end{cases} \Rightarrow$$

求相互作用势

$U(\boldsymbol{r})$

猜相互作用势：西瓜模型？行星模型？

□波动方程混合问题解的唯一性和稳定性

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad t>0,\quad x\in(0,l)$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0,\quad t\geq 0$$

$$u|_{t=0}=\phi(x),\quad u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in[0,l]$$

■能量积分

$$E(t)=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}E(t)}{\mathrm{d}t}=\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}+\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial t}\right)\mathrm{d}x=\int_0^l\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\right|_0^l$$

$$=\int_0^l\frac{\partial u}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\mathrm{d}x=0$$ 能量守恒

■**唯一性 设存在二个解$u_{(1)}$和$u_{(2)}$满足**

$$\frac{\partial^2 u_{(j)}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_{(j)}}{\partial x^2}=0,\quad t>0,\quad x\in(0,l)$$

$$u_{(j)}\big|_{x=0}=u_{(j)}\big|_{x=l}=0,\quad t\ge 0 \qquad\qquad (j=1,2)$$

$$u_{(j)}\big|_{t=0}=\phi(x),\quad \left.\frac{\partial u_{(j)}}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x),\quad x\in[0,l]$$

令$u=u_{(1)}-u_{(2)}$，则u满足零初值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad t>0,\quad x\in(0,l)$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0,\quad t\ge 0$$

$$u\big|_{t=0}=u_t\big|_{t=0}=0,\quad x\in[0,l]$$

$$\boxed{E(0)=\frac{1}{2}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\Bigg|_{t=0}\mathrm{d}x=0\Rightarrow E(t)\equiv 0}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial u}{\partial x}=0 \Rightarrow u=C \Rightarrow u(x,t)\equiv 0$$

——即零初值问题只有零解, 于是，混合问题的唯一性得证.

■**能量不等式** **考虑积分** $E_1(t)=\frac{1}{2}\int_0^l u^2(x,t)\mathrm{d}x$

$$\frac{\mathrm{d}E_1(t)}{\mathrm{d}t}\le\int_0^l u\frac{\partial u}{\partial t}\mathrm{d}x\le\frac{1}{2}\int_0^l u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^l\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\mathrm{d}x$$

$$\le\frac{1}{2}\int_0^l u^2\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int_0^l\left[\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right]\mathrm{d}x$$

$$\frac{\mathrm{d}E_1(t)}{\mathrm{d}t}\le E_1(t)+E(t)$$

两边乘exp(−*t*)

$$e^{-t}\frac{\mathrm{d}E_1(t)}{\mathrm{d}t}\le e^{-t}E_1(t)+e^{-t}E(t)\Rightarrow\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-t}E_1(t)]\le e^{-t}E(t)$$

$$\Downarrow$$

$$E_1(t)\le e^{t}E_1(0)+e^{t}\int_0^t e^{-\tau}E(t)\mathrm{d}\tau$$

$$=e^{t}E_1(0)+e^{t}E(0)\int_0^t e^{-\tau}\mathrm{d}\tau=e^{t}E_1(0)+(e^{t}-1)E(0)$$

能量不等式

$$\Downarrow$$

$$\boxed{E_1(T)\le e^{T}E_1(0)+(e^{T}-1)E(0)}$$

——意义: 把*T*时刻解的平方积分值与初始给定的条件联系起来

■**稳定性** **设解$u_{(1)}$和$u_{(2)}$满足对应的混合问题**

$$\frac{\partial^2 u_{(j)}}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u_{(j)}}{\partial x^2}=0,\quad t>0,\quad x\in(0,l)$$

$$u_{(j)}\big|_{x=0}=u_{(j)}\big|_{x=l}=0,\qquad t\geq 0$$

$$u_{(j)}\big|_{t=0}=\phi_{(j)}(x),\quad \left.\frac{\partial u_{(j)}}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_{(j)}(x),\quad x\in[0,l]$$

令$u=u_{(1)}-u_{(2)}$，则u满足

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0,\quad t>0,\quad x\in(0,l)$$

$$u\big|_{x=0}=u\big|_{x=l}=0,\qquad t\geq 0$$

$$u\big|_{t=0}=\phi_{(1)}(x)-\phi_{(2)}(x)=\delta\phi(x)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi_{(1)}(x)-\psi_{(2)}(x)=\delta\psi(x)$$

由能量不等式

$$\boxed{E_1(T) \le e^T E_1(0) + (e^T - 1)E(0)}$$

$$\int_0^l u^2(x,T)\mathrm{d}x \le e^T \int_0^l (\delta\phi)^2 \mathrm{d}x + (e^T - 1)\int_0^l \left[(\delta\psi)^2 + \left(\frac{\partial \delta\phi}{\partial x}\right)^2 \right] \mathrm{d}x$$

所以，混合问题的解在下述意义下是稳定的：对任意给定的$\varepsilon>0$, 一定存在$\eta>0$，当

$$\int_0^l (\delta\phi)^2 \mathrm{d}x < \eta;\ \int_0^l (\delta\psi)^2 \mathrm{d}x < \eta;\ \int_0^l \left|\frac{\partial \delta\psi}{\partial x}\right|^2 \mathrm{d}x < \eta$$

$$\int_0^l u^2(x,T)\mathrm{d}x \le e^T \eta + 2(e^T - 1)\eta = \varepsilon$$

——注意:与时间T有关,时间越长, 要求η越小。

□扩散方程混合问题解的唯一性和稳定性

考虑混合问题

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)=g(\boldsymbol{r},t),\quad t>0,\quad \boldsymbol{r}\in G$$

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=f(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in G+\partial G$$

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=b(\boldsymbol{r},t),\quad t\geq 0,\quad \boldsymbol{r}\in\partial G$$

■**唯一性** 只需证明齐次问题只有零解，作积分

$$I(t)=\int_G w^2\mathrm{d}\tau \Rightarrow \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=2\int_G w\frac{\partial w}{\partial t}\mathrm{d}\tau=2\int_G w\nabla^2 w\mathrm{d}\tau$$

$$\Uparrow$$

$$\int_G w\nabla^2 w\mathrm{d}\tau=-\int_G(\nabla w)^2\mathrm{d}\tau+\iint_{\partial G}w\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=-2\int_G(\nabla w)^2\mathrm{d}\tau+2\iint_{\partial G}w\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S$$

$$=-2\int_G(\nabla w)^2\mathrm{d}\tau-2\begin{cases}\displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\beta}{\alpha}\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)^2\mathrm{d}S, & \alpha\neq 0\\ \displaystyle\iint_{\partial G}\frac{\alpha}{\beta}w^2\mathrm{d}S, & \beta\neq 0\end{cases}$$

$\boxed{\frac{\alpha}{\beta}\geq 0;\frac{\beta}{\alpha}\geq 0}$ ➡ $\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}\leq 0$ ➡ **$I(t)$ 单调下降函数**

$$I(0)=0\Rightarrow I(t)\equiv 0\Rightarrow w\equiv 0$$

——唯一性即证

■稳定性 仅证明对初值的稳定性

$$\frac{\partial u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t}-\nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)=0,\quad t>0,\quad \boldsymbol{r}\in G$$

$$u(\boldsymbol{r},t)\big|_{t=0}=f(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in G+\partial G$$

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0,\quad t\geq 0,\quad \boldsymbol{r}\in\partial G$$

$$\boxed{I(t)=\int_G u^2\mathrm{d}\tau}\Rightarrow\boxed{\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t}=2\int_G u\nabla^2 u\mathrm{d}\tau=-2\left[\int_G(\nabla u)^2\mathrm{d}\tau-\iint_{\partial G}u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S\right]}$$

$$\Uparrow$$

$$\boxed{0<\lambda_{\min}\leq\frac{\int_G(\nabla u)^2\mathrm{d}\tau-\iint_{\partial G}u\dfrac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S}{\int_G u^2\mathrm{d}\tau}}\Leftarrow\boxed{\begin{gathered}-\nabla^2\psi(\boldsymbol{r})=\lambda\psi(\boldsymbol{r}),\quad \boldsymbol{r}\in G\\ \left.\left(\alpha\psi+\beta\frac{\partial\psi}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0\end{gathered}}$$

$$\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} \le -2\lambda_1^2 I(t) \quad \Rightarrow \quad I(t) \le I(0)\exp(-2\lambda_1^2 t)$$

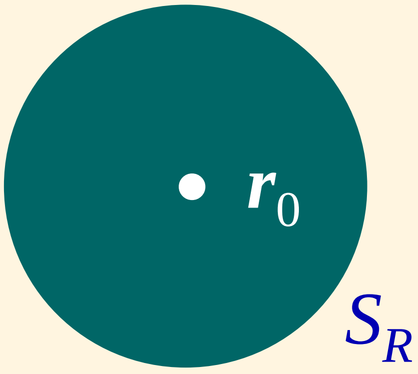
$$\boxed{\int_G |u_1(\boldsymbol{r},t)-u_2(\boldsymbol{r},t)|^2 \,\mathrm{d}\tau \le \mathrm{e}^{-2\lambda_1^2 t}\int_G |f_1(\boldsymbol{r})-f_2(\boldsymbol{r})|^2 \,\mathrm{d}\tau}$$

故扩散方程混合问题对初值是均方渐近稳定的

❑Laplace方程边值问题

■调和函数的均值性

$$u(\boldsymbol{r}_0)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint_{S_R} u(\boldsymbol{r})\mathrm{d}S$$



反之，如果函数在G内任意一个S_R上满足上式，则必是调和函数

证明 Green公式

$$\int_G (u\nabla^2 v - v\nabla^2 u)\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G}\left(u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

(1)取 $\nabla^2 u = 0; v = 1$

$$\iint_{\partial G}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = 0$$

——物理意义

① 在静电场中, 意味着穿过闭曲面S_R的电通量守恒;

② 热平衡, 意味着G内能量守恒, 因为内不存在热源;

③ 不可压缩流动，穿过S_R的总质量守恒。

(2)取 $\nabla^2 u = 0; v = 1/R; R \equiv |\boldsymbol{r} - \boldsymbol{r}_0|$

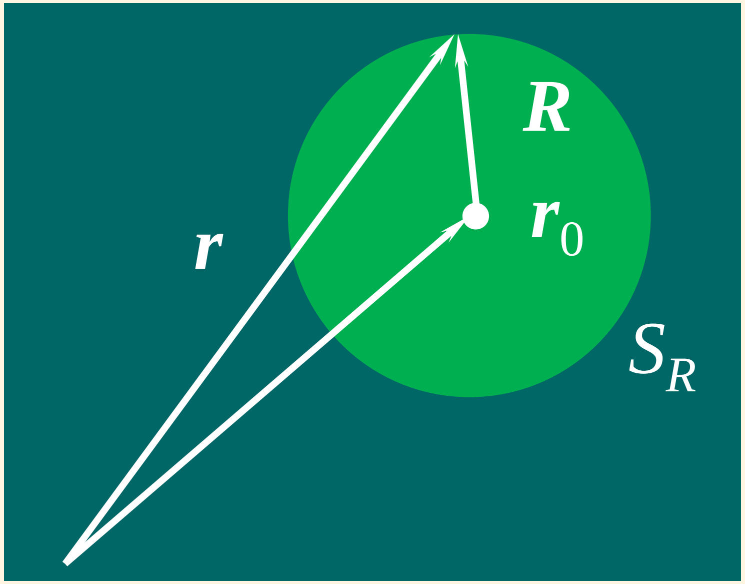
$$\boxed{-\nabla^2 \frac{1}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|} = \delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)}$$

$$-4\pi u(\boldsymbol{r}_0) = \iint_{S_R} \left(u\frac{\partial v}{\partial n} - \frac{1}{R}\frac{\partial u}{\partial n} \right) \mathrm{d}S$$

在球面上

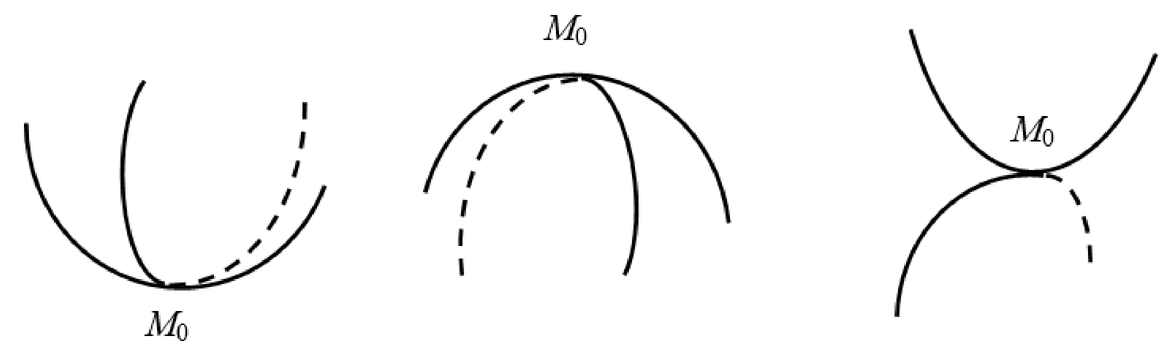
$$\left.\frac{\partial v}{\partial n}\right|_{S_R} = \left.\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{R}\right)\right|_{S_R} = -\frac{1}{R^2}$$

$$u(\boldsymbol{r}_0) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_{S_R} u(\boldsymbol{r}) \mathrm{d}S$$



■调和函数的极值性

$$\max_{\boldsymbol{r}\in G+\partial G}|u(\boldsymbol{r})|=\max_{\boldsymbol{r}\in\partial G}|u(\boldsymbol{r})|=M$$



M_0: 极小、极大和鞍点三种情况

■唯一性

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r})=g(\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{r}\in G;\ \ u(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=f(\boldsymbol{r}),\ \ \ \boldsymbol{r}\in\partial G$$

设存在二个解$u_{(1)}$和$u_{(2)}$满足

$$\nabla^2 u_{(1)}(\boldsymbol{r})=g(\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{r}\in G;\ \ u_{(1)}(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=f(\boldsymbol{r}),\ \ \ \boldsymbol{r}\in\partial G$$

$$\nabla^2 u_{(2)}(\boldsymbol{r})=g(\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{r}\in G;\ \ u_{(2)}(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=f(\boldsymbol{r}),\ \ \ \boldsymbol{r}\in\partial G$$

令$w=u_{(1)}-u_{(2)}$，则w满足

$$\nabla^2 w(\boldsymbol{r})=0,\ \ \boldsymbol{r}\in G;\ \ w(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=0,\ \ \boldsymbol{r}\in\partial G$$

由调和函数的极值性质

$$\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{r}\in G+\partial G}|w(\boldsymbol{r})|=\operatorname*{Max}_{\boldsymbol{r}\in\partial G}|w(\boldsymbol{r})|=0$$

$$\Downarrow$$

$$u_1(\boldsymbol{r})\equiv u_2(\boldsymbol{r})$$ **——唯一性得证**

■**稳定性 设$u_{(1)}$和$u_{(2)}$满足**

$$\nabla^2 u_{(1)}(\boldsymbol{r})=0,\ \ \boldsymbol{r}\in G;\ \ u_{(1)}(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=f_1(\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{r}\in\partial G$$

$$\nabla^2 u_{(2)}(\boldsymbol{r})=0,\ \ \boldsymbol{r}\in G;\ \ u_{(2)}(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=f_2(\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{r}\in\partial G$$

令$w=u_{(1)}-u_{(2)}$，则w满足

$$\nabla^2 w(\boldsymbol{r})=0,\ \ \boldsymbol{r}\in G;\ \ w(\boldsymbol{r})|_{\partial G}=f_1(\boldsymbol{r})-f_2(\boldsymbol{r}),\ \ \boldsymbol{r}\in\partial G$$

由调和函数的极值性质

$$\operatorname*{Max}_{\mathbf{r}\in G+\partial G}|w(\mathbf{r})|=\operatorname*{Max}_{\mathbf{r}\in\partial G}|w(\mathbf{r})|=\operatorname*{Max}_{\mathbf{r}\in\partial G}|f_1(\mathbf{r})-f_2(\mathbf{r})|<\varepsilon$$

$$\Downarrow$$

$$|u_1(\mathbf{r})-u_2(\mathbf{r})|<\varepsilon$$

——对边值的微小偏差是一致稳定的

■第二、三类边界条件的唯一性

$$\nabla^2 u(\mathbf{r})=f(\mathbf{r}),\quad \mathbf{r}\in G;\quad \left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=g(\mathbf{r}),\quad \mathbf{r}\in\partial G$$

$$\Downarrow$$

$$\nabla^2 w(\mathbf{r})=0,\ \mathbf{r}\in G;\quad \left.\left(\alpha w+\beta\frac{\partial w}{\partial n}\right)\right|_{\partial G}=0$$

由第一Green公式

$$\int_G w\nabla^2 w\,\mathrm{d}\tau = \iint_{\partial G} w\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S - \int_G (\nabla w)^2\mathrm{d}\tau$$

$$-\int_G (\nabla w)^2\mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} w\frac{\partial w}{\partial n}\mathrm{d}S = 0$$

①第一类边界条件

$$\int_G (\nabla w)^2\mathrm{d}\tau = 0 \Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x_1} = \frac{\partial w}{\partial x_2} = \cdots = \frac{\partial w}{\partial x_n} = 0$$

$$w\,|_{\partial G} = 0 \Rightarrow w(\boldsymbol{r}) \equiv 0 \Rightarrow u_1(\boldsymbol{r}) \equiv u_2(\boldsymbol{r})$$

②第二类边界条件 可确定到只差一个任意常数

$$u(\boldsymbol{r}) = \text{常数}$$

③第三类边界条件

$$\int_G (\nabla w)^2 \mathrm{d}\tau + \iint_{\partial G} \frac{\beta}{\alpha} w^2 \mathrm{d}S = 0$$

$$w(\boldsymbol{r}) = C;\quad \beta/\alpha > 0 \Rightarrow w(\boldsymbol{r})|_{\partial G} = 0$$

$$u_1(\boldsymbol{r}) \equiv u_2(\boldsymbol{r})$$ ——唯一性得证

❑Helmholtz方程 波动方程——双曲型方程

$$\frac{\partial^2 u(\boldsymbol{r},t)}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u(\boldsymbol{r},t)$$

时谐解 $u(\boldsymbol{r},t) = u(\boldsymbol{r},\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega t)$

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r},\omega) + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 u(\boldsymbol{r},\omega) = 0$$

约化波动方程
—椭圆型方程

从双曲型波动方程到椭圆型Helmholtz方程，破坏了解的唯一性

例 考虑Helmholtz方程的第一类外边值问题

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r})+k^2 u(\boldsymbol{r})=0,\ |\boldsymbol{r}|>\pi/k;\quad k=\omega/a$$

$$u\big|_{|\boldsymbol{r}|=\pi/k}=g(\boldsymbol{r}),\quad |\boldsymbol{r}|=\pi/k$$

齐次问题

$$\nabla^2 w(\boldsymbol{r})+k^2 w(\boldsymbol{r})=0,\ |\boldsymbol{r}|>\pi/k$$

$$w(\boldsymbol{r})\big|_{|\boldsymbol{r}|=\pi/k}=0;\quad k=\omega/a$$

存在非零解

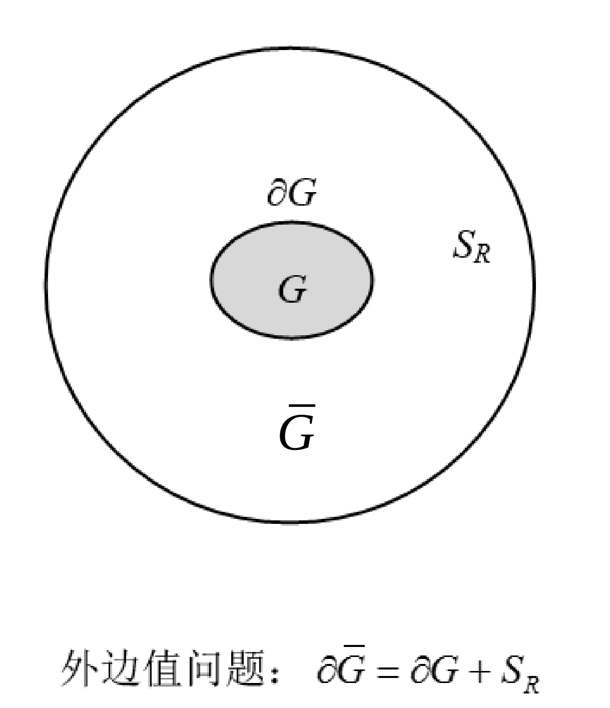
$$w(\boldsymbol{r})=c\frac{\sin k|\boldsymbol{r}|}{4\pi|\boldsymbol{r}|}$$

——解不唯一！物理问题？新的边界条件？

■Sommerfeld辐射条件

$$\nabla^2 u(\boldsymbol{r})+k^2 u(\boldsymbol{r})=f(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\bar{G}$$

$$\left.\left(\alpha u+\beta\frac{\partial u}{\partial n}\right)\right|_{\partial\bar{G}}=g(\boldsymbol{r}),\ \boldsymbol{r}\in\partial\bar{G}$$



Sommerfeld辐射条件

$$\boxed{\lim_{|\boldsymbol{r}|\to\infty}\sqrt{|\boldsymbol{r}|^{n-1}}\left[\frac{\partial u(\boldsymbol{r})}{\partial|\boldsymbol{r}|}-\mathrm{i}ku(\boldsymbol{r})\right]=0}$$

证明

$$\int_{\bar{G}}[u(\nabla^2+k^2)v-v(\nabla^2+k^2)u]\mathrm{d}\tau=\iint_{\partial\bar{G}}\left(u\frac{\partial v}{\partial n}-v\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}S$$

$$v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=\frac{\exp(\mathrm{i}kR)}{4\pi R};R=|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0|,\ \ (\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)\in\bar{G}$$

$$\nabla^2 v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)+k^2 v(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0)=-\delta(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)$$

$$u(\boldsymbol{r}_0)=-\frac{1}{4\pi}\int_{\bar{G}}\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial\bar{G}}\left[\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\right]\mathrm{d}S$$

$$=-\frac{1}{4\pi}\int_{\bar{G}}\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}f(\boldsymbol{r})\mathrm{d}\tau+\frac{1}{4\pi}\iint_{\partial G}\left[\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\right]\mathrm{d}S+I_R$$

$$I_R\equiv\frac{1}{4\pi}\iint_{S_R}\left[\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\right]\mathrm{d}S \Rightarrow \lim_{R\to\infty}I_R=0$$

$$\nabla\left(\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)=\frac{\partial}{\partial R}\left(\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}\right)\nabla R=\frac{\mathrm{i}kR-1}{R}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}kR}}{R}\boldsymbol{e}_R$$

$$I_R=\lim_{R\to\infty}\frac{1}{4\pi}\iint_{S_R}\frac{e^{ikr}}{r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)\mathrm{d}S$$

$$=\lim_{r\to\infty}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}e^{ikr}r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)r\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\phi$$

$$\boxed{\lim_{r\to\infty}r\left(\frac{\partial u}{\partial r}-iku\right)=0}$$

例 Helmholtz方程的二个球对称解

$$u_1(\boldsymbol{r})=\frac{\exp(ikr)}{4\pi r};\ u_2(\boldsymbol{r})=\frac{\exp(-ikr)}{4\pi r}$$

$$\lim_{r\to\infty}r\left(\frac{\partial u_1}{\partial r}-iku_1\right)=-\lim_{r\to\infty}\frac{e^{ikr}}{4\pi r}=0$$

满足辐射条件

$$\lim_{r\to\infty}r\left(\frac{\partial u_2}{\partial r}-iku_2\right)=-\lim_{r\to\infty}(2ikr+1)\frac{e^{ikr}}{4\pi r}=-\frac{ik}{2\pi}e^{ikr}$$

■**时域解** $\exp(-\mathrm{i}\omega t)$

$$u_1(\boldsymbol{r},t)=u_1(\boldsymbol{r},\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega t)=\frac{1}{4\pi r}\exp[\mathrm{i}(kr-\omega t)]$$

——**辐射解：向无限远传播**

$$u_2(\boldsymbol{r},t)=u_2(\boldsymbol{r},\omega)\exp(-\mathrm{i}\omega t)=\frac{1}{4\pi r}\exp[-\mathrm{i}(kr+\omega t)]$$

——**接收解：向原点处传播**

■**时域解** $\exp(\mathrm{i}\omega t)$

$$u_1(\boldsymbol{r},t)=u_1(\boldsymbol{r},\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)=\frac{1}{4\pi r}\exp[\mathrm{i}(kr+\omega t)]$$

——**接收解：向原点处传播**

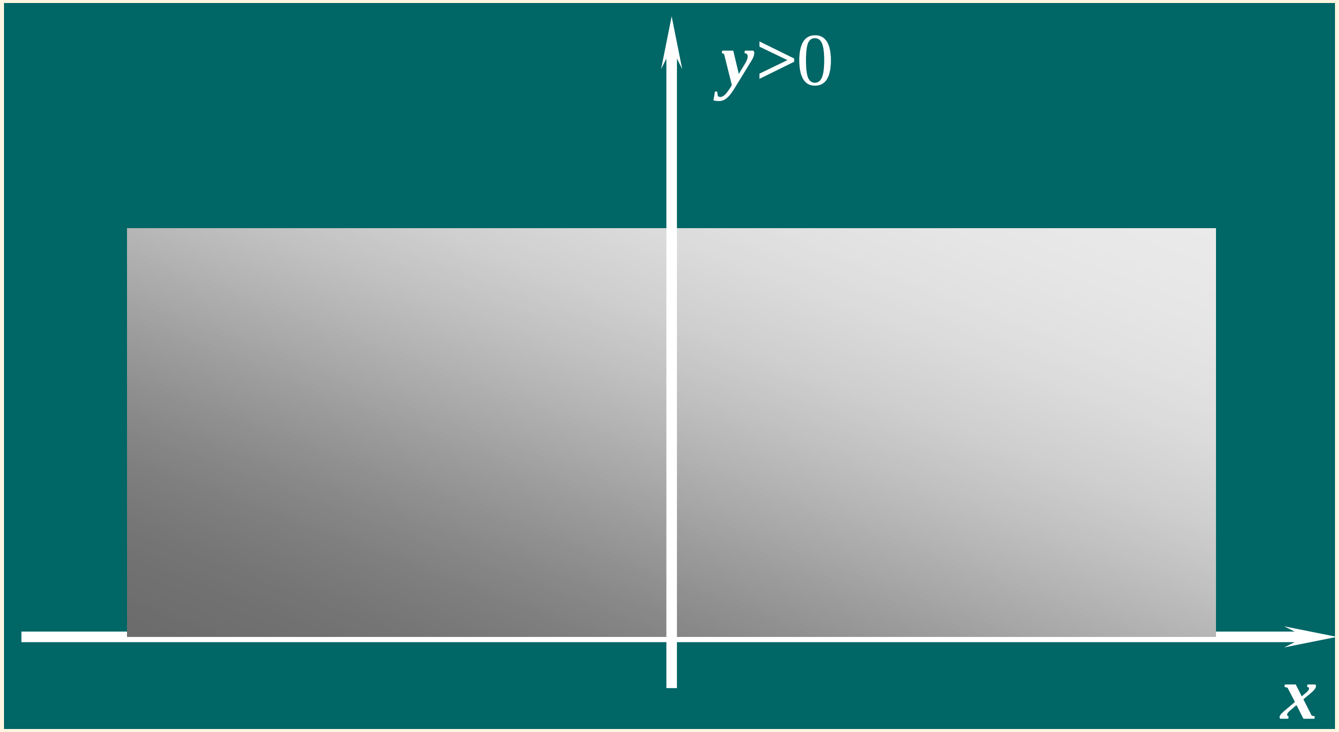
$$u_2(\boldsymbol{r},t)=u_2(\boldsymbol{r},\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)=\frac{1}{4\pi r}\exp[\mathrm{i}(\omega t-kr)]$$

——**辐射解：向无限远传播**

❑二维Laplace方程的Cauchy问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\ y>0,\quad x\in(-\infty,\infty)$$

$$u\,|_{y=0}=\varphi(x);\quad u_y\,|_{y=0}=\psi(x),\ \ x\in(-\infty,\infty)$$



令 t=iy

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=0,\mathrm{i}t>0,\quad x\in(-\infty,\infty)$$

$$u|_{t=0}=\varphi(x);\quad u_t|_{t=0}=-\mathrm{i}\,\psi(x),\ \ x\in(-\infty,\infty)$$

D′ Alembert解

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x-t)+\varphi(x+t)]+\frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t}(-\mathrm{i})\,\psi(s)\mathrm{d}s$$

$$\Downarrow$$

$$u(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi(x-\mathrm{i}y)+\varphi(x+\mathrm{i}y)]+\frac{1}{2}\int_{x-\mathrm{i}y}^{x+\mathrm{i}y}(-\mathrm{i})\,\psi(s)\mathrm{d}s$$

$$\Uparrow$$

$$s=x+\mathrm{i}\eta$$

$$\Downarrow$$

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\left[\varphi(x+\mathrm{i}y)+\int_0^y\psi(x+\mathrm{i}\eta)\mathrm{d}\eta\right]$$

解为

$$u(x,y)=\mathrm{Re}\left[\varphi(x+\mathrm{i}y)+\int_0^y \psi(x+\mathrm{i}t)\mathrm{d}t\right]$$

——要求初值为解析函数：解的存在性问题

■ **稳定性 初值附加微小变化**

$$\delta\psi=\frac{1}{n^k}\sin nx$$

解的变化

$$\delta u=\frac{1}{2n^{k-1}}\left[\exp(ny)-\exp(-ny)\right]\sin nx$$

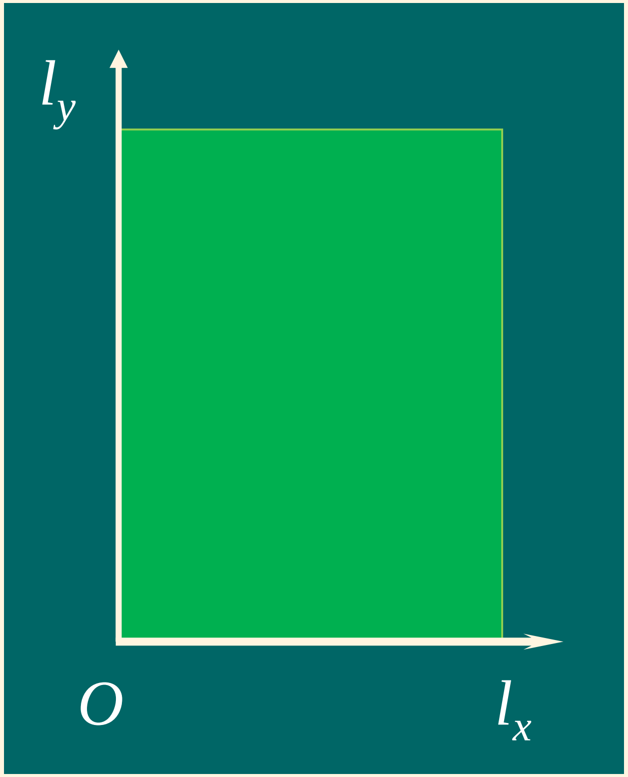
$$n\to\infty;\ \delta\psi\to 0;\ \delta u\to\infty$$

——解的稳定性问题

❑波动方程的边值问题

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=g(x,y),\quad (x,y)\in G$$

$$u|_{\partial G}=f(x,y),\ \ (x,y)\in\partial G$$



齐次问题有非零解

$$u(x,y)=A\sin\left(\frac{n\pi x}{l_x}\right)\sin\left(\frac{m\pi y}{l_y}\right)$$

满足自洽条件

$$l_y/l_x=m/n,(m,n=1,2,....)$$

l_y/l_x : **有理数, 解不唯一**; l_y/l_x : **无理数时, 解唯一**

□热传导方程对负时间的不稳定性

$$\frac{\partial u}{\partial t}-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0, x\in(0,l), t<0$$

$$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0, u|_{t=0}=\varphi(x)$$

解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\exp\left(-\frac{n^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right),\quad (t<0)$$

$$A_n=\frac{1}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\mathrm{d}x$$

初值条件有扰动

$$\delta\phi=k^{-2}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

可任意小

解的变化为

$$\delta u=\frac{1}{k^2}\exp\left(-\frac{k^2\pi^2 t}{l^2}\right)\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right)$$

可任意大

- 热传导方程描述不可逆过程，不可能根据现在状态反推过去的状态；
- 热传导方程对时间反演不具有不变性；
- 波动方程对时间反演具有不变性，可从的波动状态反推知的波动状态；
- 但是如果波动方程包含不可逆的阻尼或耗散项，同样不具有时间反演不变性.

第9章 小 结

■三类典型的泛定方程

波动方程：双曲型方程(解函数光滑性较差)

扩散方程：抛物型方程(解函数光滑性较好)

位势方程：椭圆型方程(解函数光滑性很好)

■定解问题：边界条件+初始条件+泛定方程

初值问题：无限空间 随时间演化

边值问题：有限空间 与时间无关

混合问题：有限空间 随时间演化

■定解问题的适定性

存在性　唯一性　稳定性

双曲型波动方程：不能提边值问题

抛物型扩散方程：不能提逆时间问题

椭圆型平衡方程：不能提初值问题