第2章：复变函数的积分

2.1 复变函数的积分

线积分，重要性质，函数的解析性质

2.2 Cauchy 定理（重要性质一）

单连通和复连通区域，主值积分

2.3 Cauchy 积分公式

解析函数重要性质，Hilbert变换

2.4 渐近积分

最速下降方法， 整数阶Bessel函数

2.1 复变函数的积分

❑复平面上的线积分

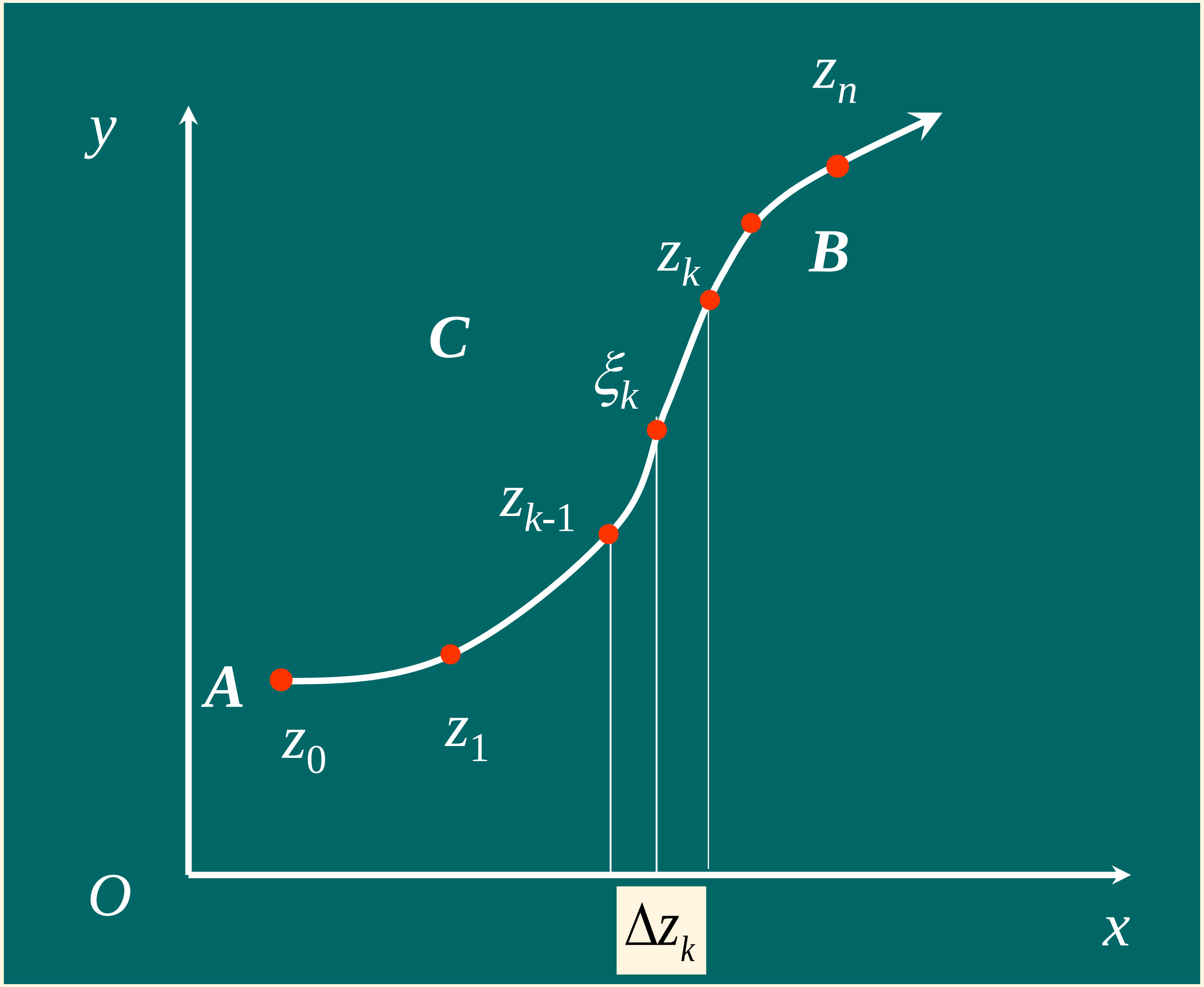
定义：复平面曲线C上的连续函数$f(z)$，定义线积分

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z \equiv \lim_{\max|\Delta z_k|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta z_k$$

（其中：$\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$）

如果极限存在且与ξ_k的选取无关，则称为从A到B的线积分

■ 连续函数的线积分



■ 分量形式：$f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, $z=x+iy$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C(u\mathrm{d}x-v\mathrm{d}y)+\mathrm{i}\int_C(u\mathrm{d}y+v\mathrm{d}x)$$

■ 参数形式：曲线C 的参数方程 $\{x=x(t), y=y(t)\}$
起始点A 和结束点 $B\Leftrightarrow t_A, t_B$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{t_A}^{t_B}\left(u\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}-v\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t+\mathrm{i}\int_{t_A}^{t_B}\left(u\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+v\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{d}t$$

❑ 几个重要性质

1、积分不等式

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right|\le\int_C|f(z)|\mathrm{d}s$$

其中, $ds=|dz|=[(dx)^2+(dy)^2]^{1/2}$ 是C 的弧长

$$\left|\int_C f(z)\mathrm{d}z\right| \le ML$$

其中, M 是 $|f(z)|$ 在 C 上的最大值，L 是 C 的全长

2、其他性质

(a)反方向积分

$$\int_{C^+} f(z)\mathrm{d}z = -\int_{C^-} f(z)\mathrm{d}z$$

—其中, C^- 是C^+的反方向路径

(b) 常数可以移出积分号

$$\int_C af(z)\mathrm{d}z = a\int_C f(z)\mathrm{d}z$$

—其中 a 是任意常数

(c) 如果 $C=C_1+C_2+\ldots C_n$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_{C_1} f(z)\mathrm{d}z+\int_{C_2} f(z)\mathrm{d}z+\ldots+\int_{C_n} f(z)\mathrm{d}z$$

(d) 相加函数的积分

$$\int_C\left[f_1(z)+f_2(z)+\ldots.+f_n(z)\right]\mathrm{d}z$$

$$=\int_C f_1(z)\mathrm{d}z+\int_C f_2(z)\mathrm{d}z+\ldots.+\int_C f_n(z)\mathrm{d}z$$

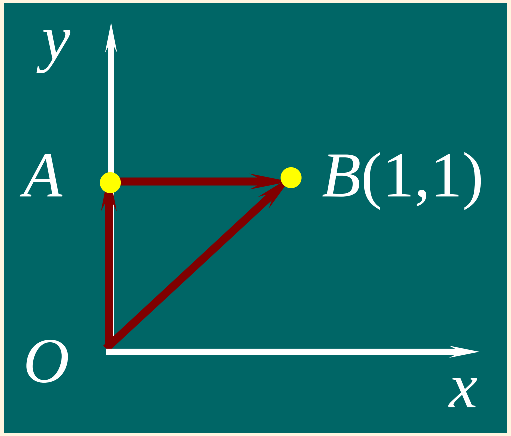
注意：有限项求和，不涉及到收敛性

例一 解析函数的积分

$$I=\int_C f(z)\mathrm{d}z=\int_C z\mathrm{d}z$$

其中，C 为：(1) $C_1=OB$

(2) $C_2=OA+AB$



解: (1) 在 *OB* 上 *y*=*x*

$$I_1=\int_{y=x}(x+\mathrm{i}y)\mathrm{d}(x+\mathrm{i}y)$$

$$=(1+\mathrm{i})^2\int_0^1 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}(1+\mathrm{i})^2=\mathrm{i}$$

(2)在*OA*上: *x*=0, *z*=i*y*; 在*AB* 上 *y*=1, *z*=*x*+i, 因此

$$I_2=\int_0^1 \mathrm{i}y\mathrm{d}(\mathrm{i}y)+\int_0^1(x+\mathrm{i})\mathrm{d}(x+\mathrm{i})$$

$$=-\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}+\mathrm{i}\right)=\mathrm{i}$$

可见: $I_1=I_2$，与积分路径无关!

例二、非解析函数的积分(积分线路同上)

$$J = \int_C \mathrm{Re}(z)\mathrm{d}z$$

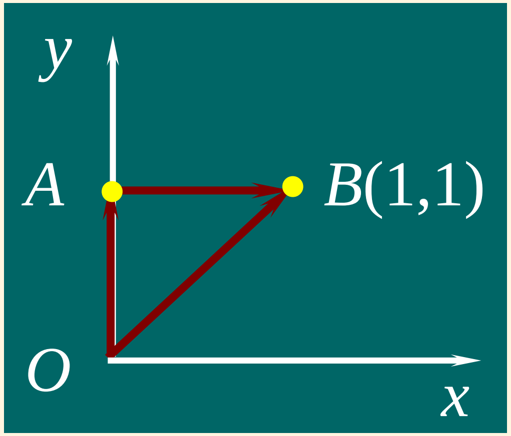
解 (1)在 OB 上

$$J_1 = \int_{y=x} x\mathrm{d}(x+\mathrm{i}y) = (1+\mathrm{i})\int_0^1 x\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(1+\mathrm{i})$$

(2)在OAB上

$$J_2 = \int_0^1 0\cdot\mathrm{d}(x+\mathrm{i}y) + \int_0^1 x\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{2}$$



可见 $J_1 \neq J_2$, 积分与路径有关!

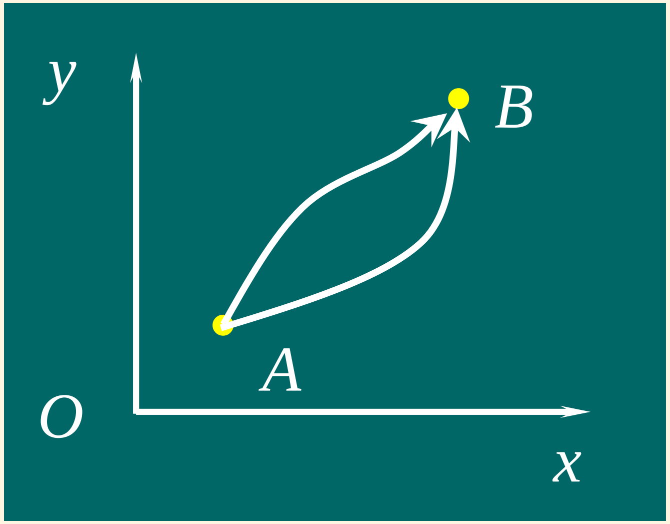
问题：什么情况下积分与路径无关?

与函数的解析性质有什么关系?

（1）如果 $f(z)$ 是解析函数，积分与路径无关，只与起始点 A 和结束点 B 有关。

（2）如果 $f(z)$ 不是解析函数，积分与路径有关。

——复变函数论中重要的定理：Cauchy 定理(讨论积分数值与积分路径的关系)



2.2 Cauchy 定理

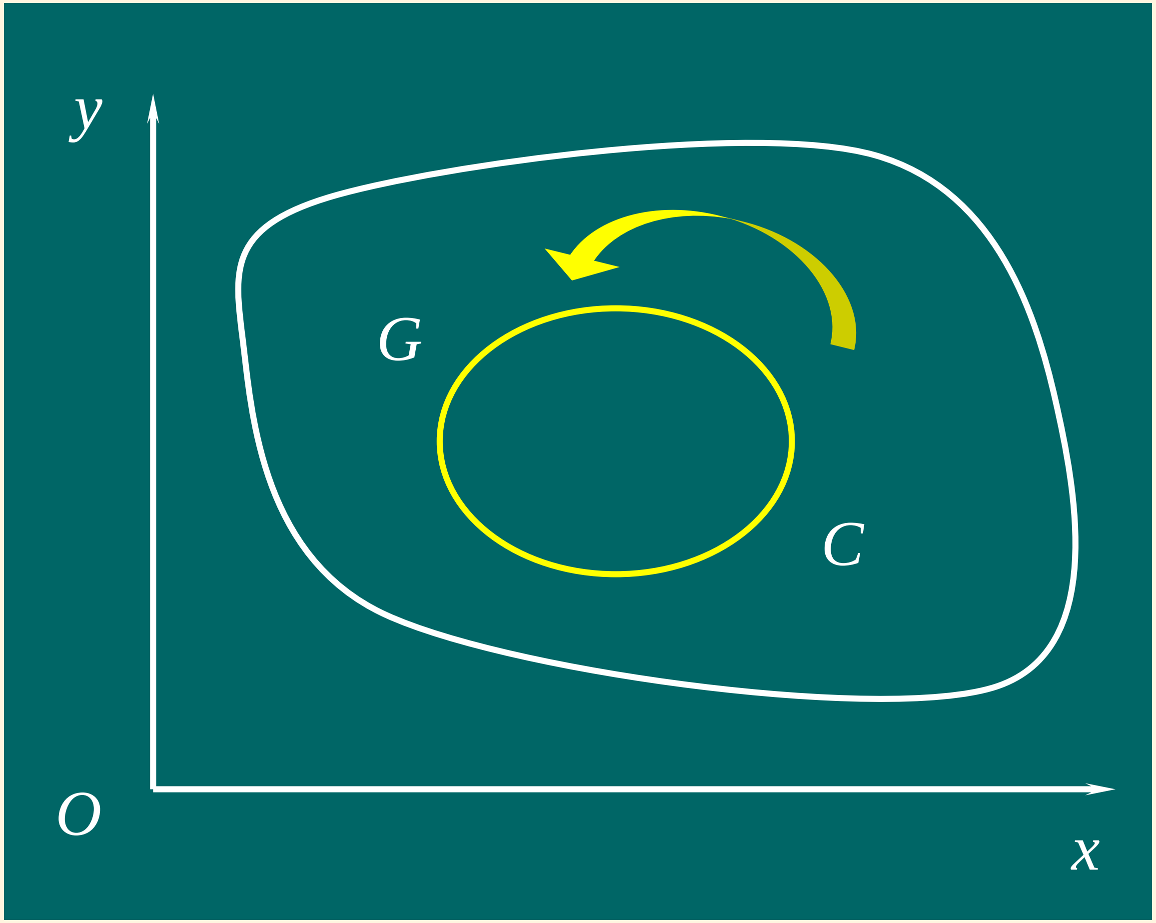
- **单连通区域的Cauchy 定理**　**如果 $f(z)$ 在单连通闭区域 G中单值且解析，则沿G中任何一个分段光滑的闭合围道C, 函数的积分为零**

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

证明：由路径积分的定义

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_C (u\mathrm{d}x - v\mathrm{d}y) + \mathrm{i}\oint_C (v\mathrm{d}x + u\mathrm{d}y)$$

设 $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ **连续**



函数 $f(z)$ 在单连通闭区域 G中单值且解析

利用平面线积分的 Green 公式

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

上式化为围道 *C* 所包围的面积 *S* 上的面积分

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = -\iint_S \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \mathrm{i}\iint_S \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

最后利用C—R条件可得

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

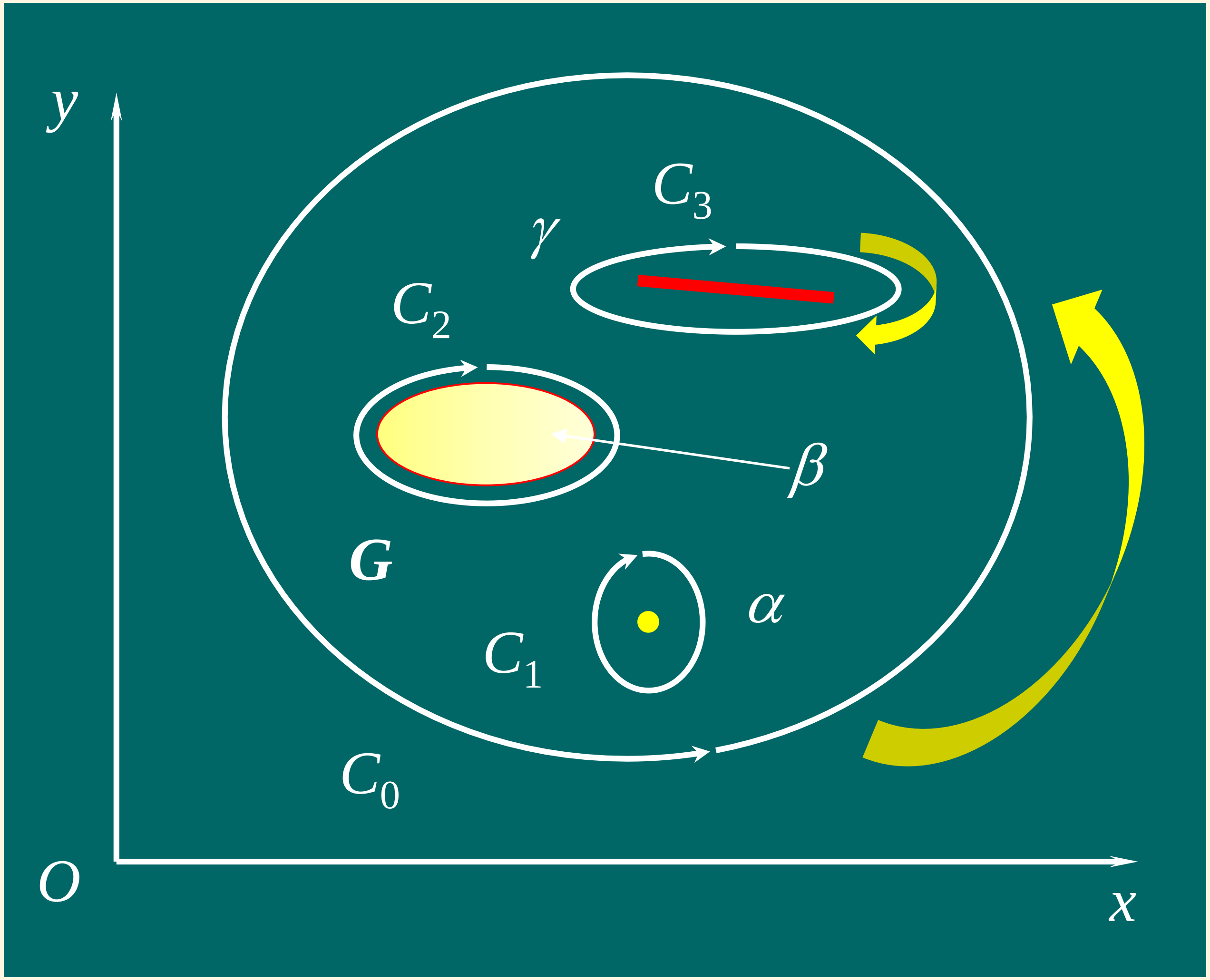
——更复杂的证明：只要求偏导数存在。

■ 如果区域内存在:（1）奇点α；（2）不连续线段β；（3）无定义区 γ

为了把这些奇异部分排除在外，需要作适当的围道 C_1、 C_2、 C_3 把它们分隔开来，形成复连通区域。

❑复连通区域的Cauchy 定理 如果 $f(z)$ 是复连通区域 G 中的单值解析函数，则

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z = 0$$



函数 $f(z)$ 在复连通闭区域 G 中单值且解析

证明：作辅助线L_1和L_2，那么由

$$C = C_0 + C_i + L_1 + L_2$$

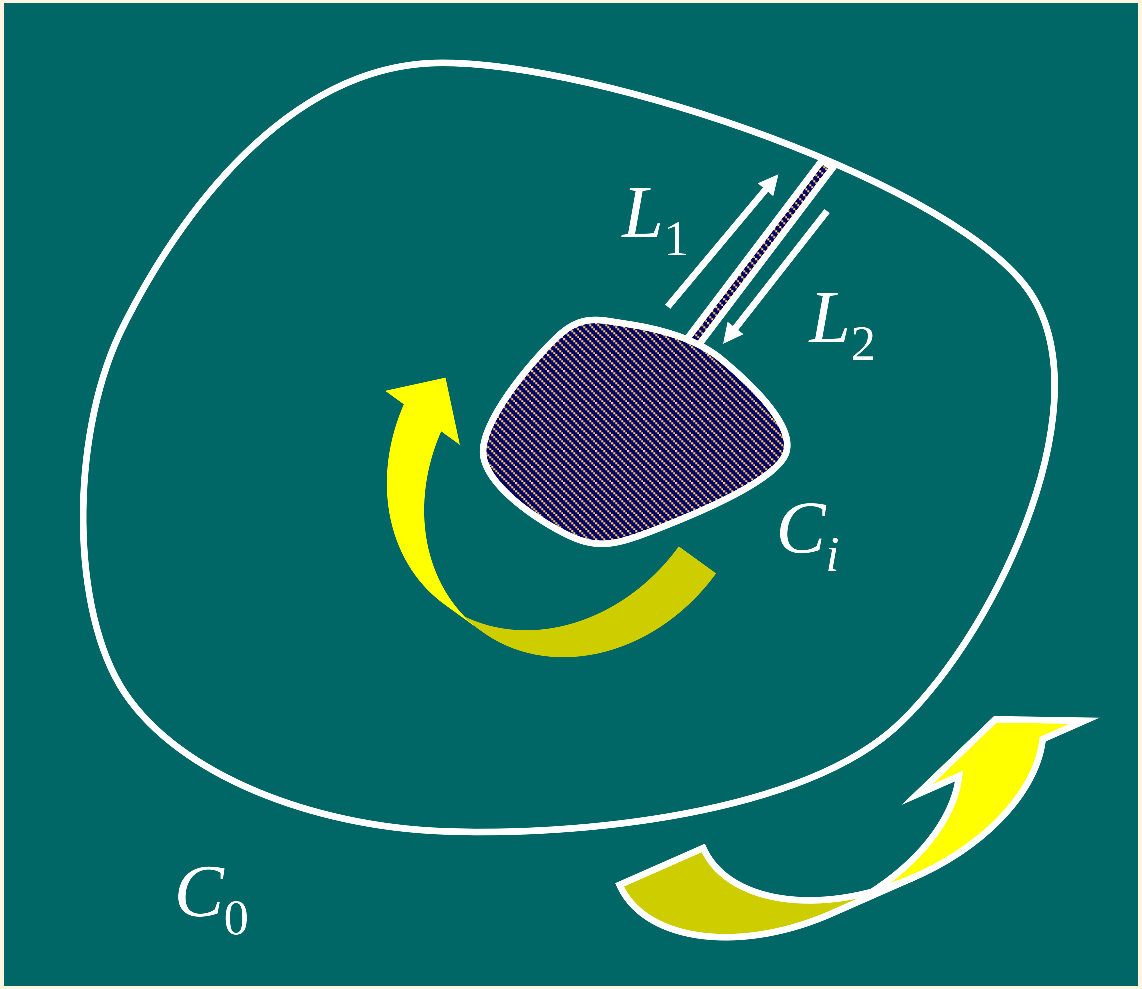
围成的区域是单连通区域

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \oint_{C_0+C_i+L_1+L_2} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

即

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{L_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{L_2} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

而L_1和L_2方向相反并无限接近，故积分反号，于是



增加辅助线L_1和L_2，使复连通变成单连通

$$\oint_{L_1} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{L_2} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

因此

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z + \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z = 0$$

如果存在多个岛，则可以对每个岛屿作类似的证明，于是定理得证。

注意：如果岛屿的围道C_1、 C_2、 C_3 …,反方向，则复连通区域的Cauchy 定理可写成

$$\oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z$$

❑逆Cauchy定理

若函数$f(z)$在单连通区域E内连续，且对E内任一条简单闭合曲线C

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0$$

则函数$f(z)$在单连通区域E内解析(可作为解析函数的定义)。

因此，函数$f(z)$在区域E内解析的充分必要条件

（1） $f(z)$在区域E内连续

（2）围道积分为零

例（非常重要）计算积分 I (其中 n 为整数）

$$I=\oint_C (z-\alpha)^n \mathrm{d}z$$

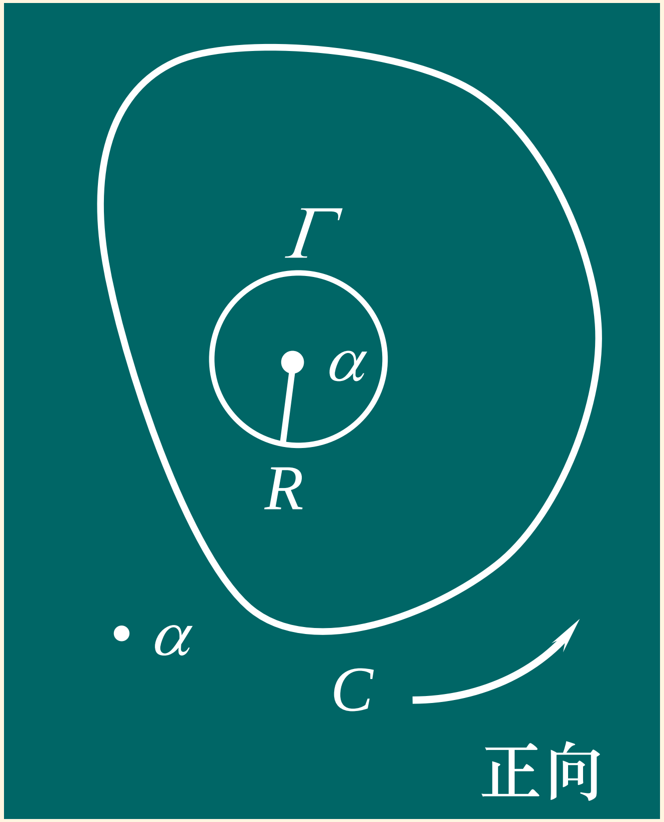
解:

(1）如果 C 不包含 α 点，被积函数总解析, 因此 $I=0$;

(2)如果 C 包含 α 点, 又要分两种情况

(A) $n\geq 0$, 因被积函数解析, 故 $I=0$

(B) $n<0$, 被积函数在C内有奇点 α



用半径为 R 的圆周 Γ 包围 α 点，则 $C+\Gamma$ 构成复连通区域，因此原积分变成圆周 Γ 上的积分，在 Γ 上 $z-\alpha=Re^{i\varphi}$，故

$$I=\oint_{\Gamma}(z-\alpha)^{n}\mathrm{d}z=\oint_{\Gamma}R^{n}e^{in\varphi}\mathrm{d}(\alpha+R^{1}e^{i\varphi})$$

$$=\mathrm{i}R^{n+1}\int_{0}^{2\pi}e^{\mathrm{i}(n+1)\varphi}\mathrm{d}\varphi=\begin{cases}0, & n\neq-1\\ 2\pi\mathrm{i}, & n=-1\end{cases}$$

总结

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C}\frac{\mathrm{d}z}{z-\alpha}=\begin{cases}0 & (\alpha\not\subset C)\\ 1 & (\alpha\subset C)\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C}(z-\alpha)^{n}\mathrm{d}z=0\ (n\neq-1).$$

问题：如果α刚好在积分围道上呢?

- **积分主值概念：反常积分定义为**

$$I=\lim_{\substack{R_1\to\infty\\R_2\to\infty}}\int_{-R_1}^{+R_2}f(x)\mathrm{d}x$$

当 $R_1=R_2$ 时，称为 I 的积分主值

$$P\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{+R}f(x)\mathrm{d}x$$

- **如果** $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\to\infty, x_0\in[a,b]$

$$P\int_{a}^{b}f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{a}^{x_0-\varepsilon}f(x)\mathrm{d}x+\int_{x_0+\varepsilon}^{b}f(x)\mathrm{d}x\right]$$

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\ln(1)-\ln(-1)=\mathrm{i}\pi$$ ——无意义

- **广义Riemann积分**

$$I=\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{-1}^{-\varepsilon_1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_{\varepsilon_2}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x$$ ——不存在

$$=\lim_{\varepsilon_1\to 0}\ln(-\varepsilon_1)-\ln(-1)+\ln(1)-\lim_{\varepsilon_2\to 0}(\varepsilon_2)$$

$$=-\mathrm{i}\pi+\lim_{\varepsilon_1\to 0}\ln(-\varepsilon_1)-\lim_{\varepsilon_2\to 0}(\varepsilon_2)$$

- **主值积分**

$$I=P\int_{-1}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{-1}^{-\varepsilon}\frac{1}{x}\mathrm{d}x+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{y}\mathrm{d}y+\int_{\varepsilon}^{1}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\right]=0$$

一般，积分主值存在，不一定反常积分存在，反之，如果反常积分存在，积分主值一定存在

■ 围道积分

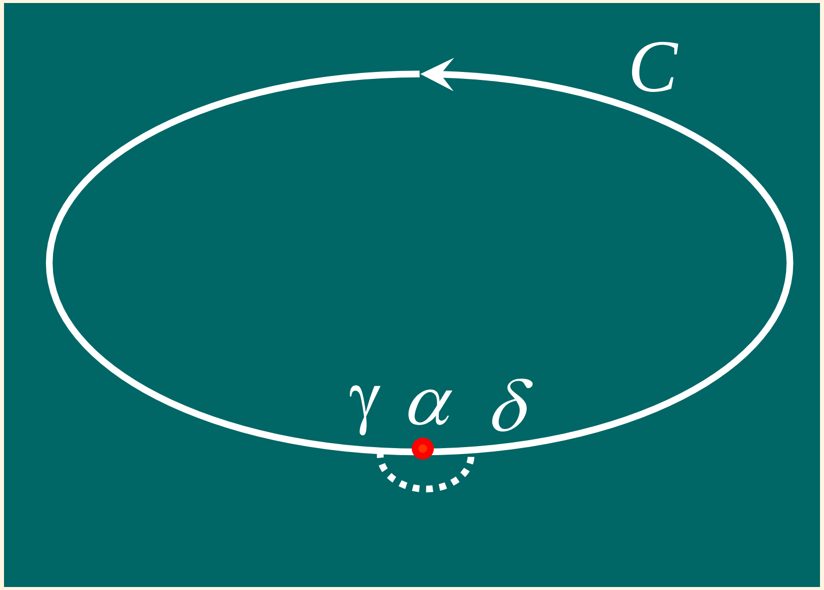
$$I=\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

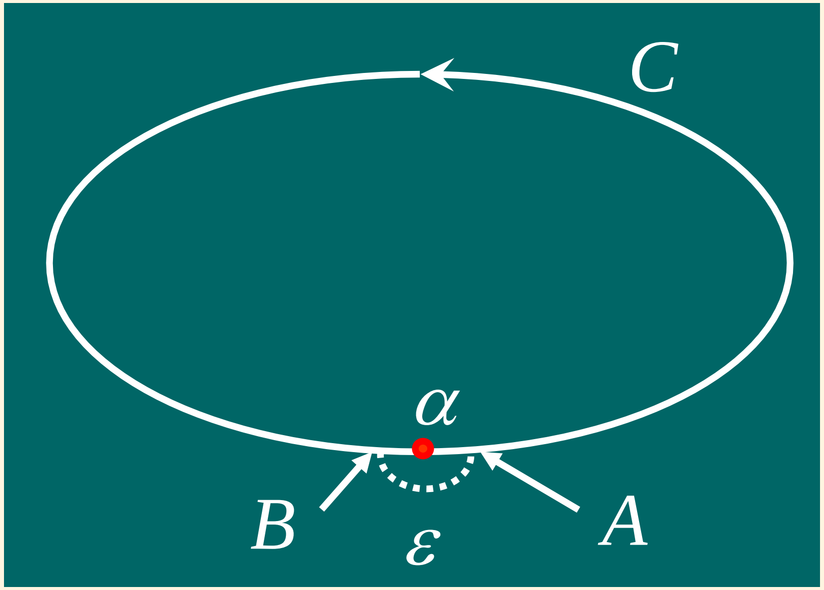
$$=\lim_{\substack{\delta\to 0\\ \gamma\to 0}}\left[\int_{\alpha+\delta\to\alpha-\gamma} f(z)\mathrm{d}z\right]$$

$$\varepsilon\equiv\delta=\gamma\to 0$$

$$P\oint_C f(z)\mathrm{d}z$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\alpha+\varepsilon\to\alpha-\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z\right]$$

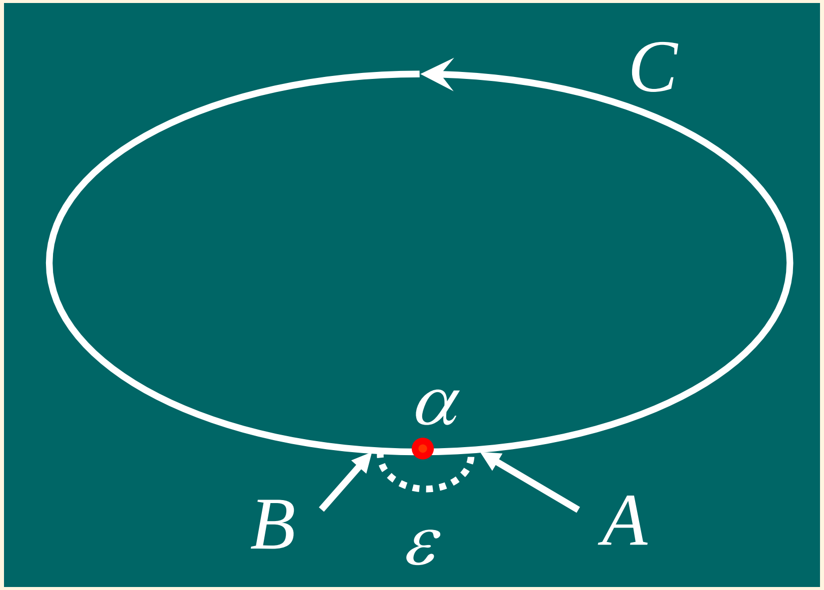




■ 围道主值积分

不形成闭合围道

构成闭合围道Σ: $A \rightarrow B + \varepsilon$半圆，主值积分



$$P\oint_C f(z)\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{A\to B} f(z)\mathrm{d}z + \int_{\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\oint_{\Sigma} f(z)\mathrm{d}z - \int_{\varepsilon} f(z)\mathrm{d}z\right]$$

半圆积分

$$I_1 \equiv \oint_{\Sigma} (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = \begin{cases} 0, & n \neq -1 \\ 2\pi\mathrm{i}, & n = -1 \end{cases}$$

■ **作变换：** $z-\alpha = \varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi}$ **(其中φ：$\pi \to 2\pi$)**

$$\int_{\varepsilon} (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = \mathrm{i}\varepsilon^{n+1} \int_{\pi}^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n+1)\varphi} \mathrm{d}\varphi$$

$$= \begin{cases} \mathrm{i}\pi, & n = -1 \\ \dfrac{\mathrm{i}\varepsilon^{n+1} e^{\mathrm{i}(n+1)\pi}}{\mathrm{i}(n+1)} [e^{\mathrm{i}(n+1)\pi} - 1], & n < -1 \end{cases}$$

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon} (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = \begin{cases} \mathrm{i}\pi, & n = -1 \\ \infty, & n < -1 \end{cases}$$

围道有一定的弧度上下限不是严格地从$\pi \to 2\pi$

关于积分的讨论（当上下限严格地从π→2π）

$$\int_{\varepsilon}(z-\alpha)^n \mathrm{d}z = \mathrm{i}\varepsilon^{n+1}\int_{\pi}^{2\pi} e^{\mathrm{i}(n+1)\varphi}\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{\mathrm{i}\varepsilon^{n+1}e^{\mathrm{i}(n+1)\pi}}{\mathrm{i}(n+1)}[e^{\mathrm{i}(n+1)\pi}-1],\ \ (n<-1)$$

如果是严格的半圆（如在x轴上），当

$$n+1=-2m\ \ (m=1,2,3,\ldots..)$$

$$e^{\mathrm{i}(n+1)\pi}-1=0 \Rightarrow \int_{\varepsilon}(z-\alpha)^n \mathrm{d}z=0$$

当 $n+1\neq -2m\ \ (m=1,2,3,\ldots..)$

$$e^{\mathrm{i}(n+1)\pi}-1\neq 0 \Rightarrow \int_{\varepsilon}(z-\alpha)^n \mathrm{d}z\to\infty$$

$$P\oint_C (z-\alpha)^n \mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\oint_\Sigma (z-\alpha)^n \mathrm{d}z - \int_\varepsilon (z-\alpha)^n \mathrm{d}z\right]$$

- **当n=–1时**

$$P\oint_C \frac{1}{z-\alpha}\mathrm{d}z = \lim_{\varepsilon\to 0}(2\pi\mathrm{i}-\pi\mathrm{i}) = \pi\mathrm{i}$$

- **当n<–1时**

$$P\oint_C (z-\alpha)^n \mathrm{d}z \to \infty$$

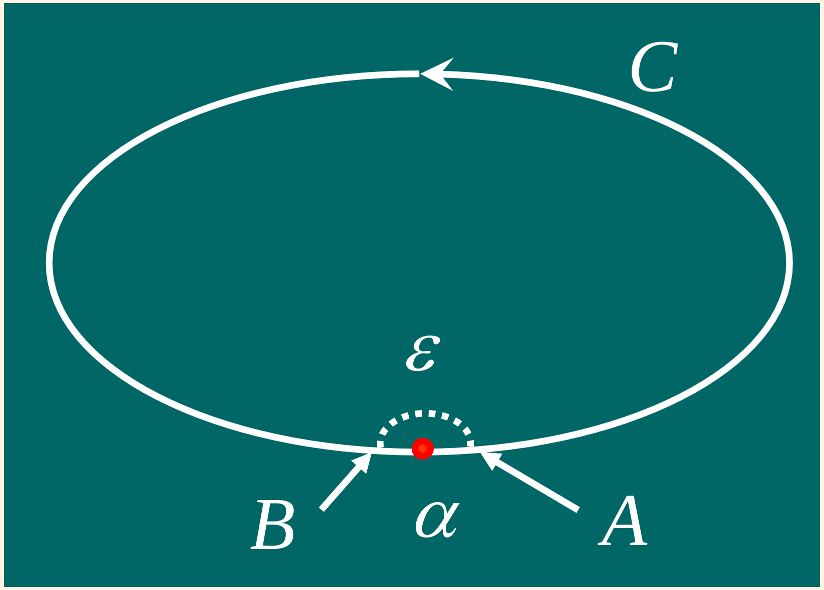
——围道上至多只能出现一阶极点，否则积分发散(可能)

■ **如果取围道Σ**

作变换: $z-\alpha=\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi}$

(其中φ: $\pi\to0$)

围道Σ内无奇点



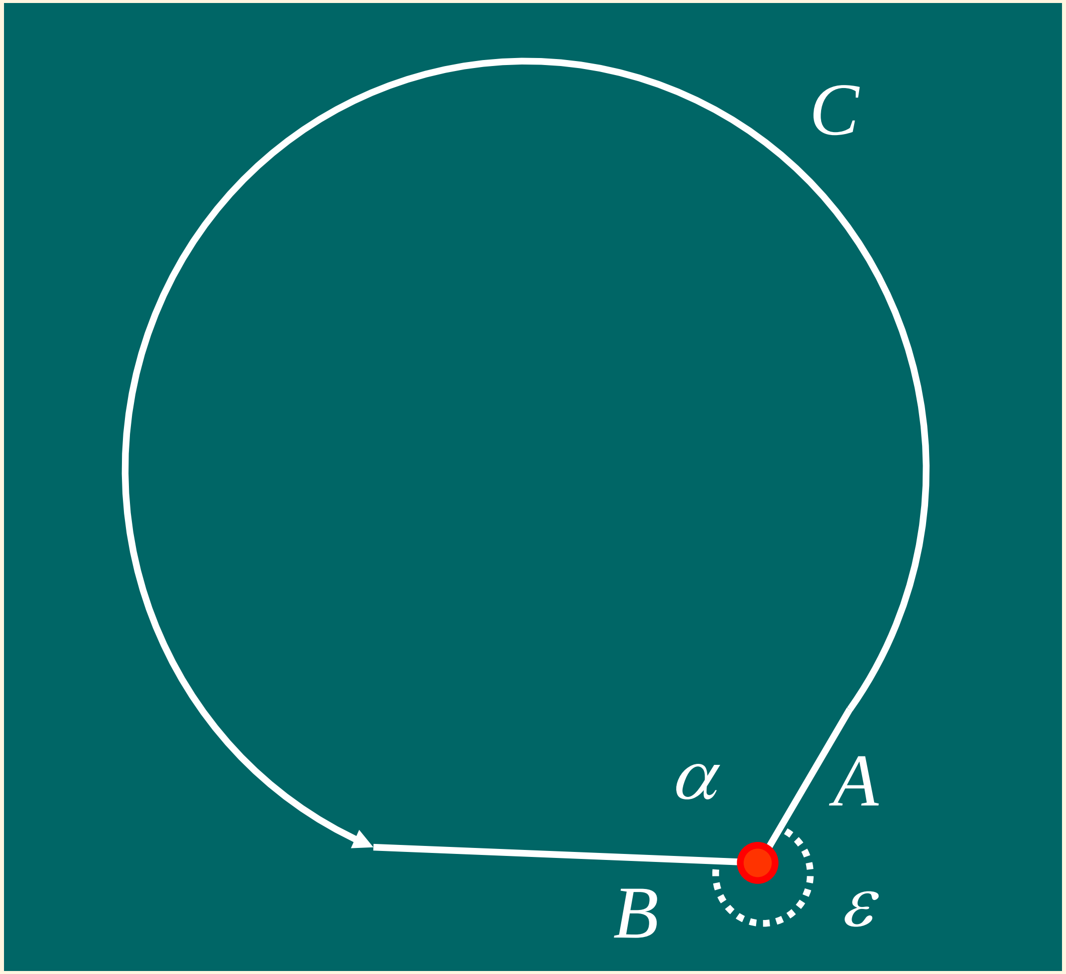
$$\oint_{\Sigma}\frac{1}{z-\alpha}\mathrm{d}z=0$$

$$\int_{\varepsilon}\frac{1}{z-\alpha}\mathrm{d}z=\mathrm{i}\int_{\pi}^{0}\mathrm{d}\varphi=-\mathrm{i}\pi$$

所以

$$P\oint_{C}\frac{1}{z-\alpha}\mathrm{d}z=\lim_{\varepsilon\to0}(0+\mathrm{i}\pi)=\mathrm{i}\pi$$

问题：如果奇点刚好在围道的尖角上，如何变化?



3.3 Cauchy 积分公式

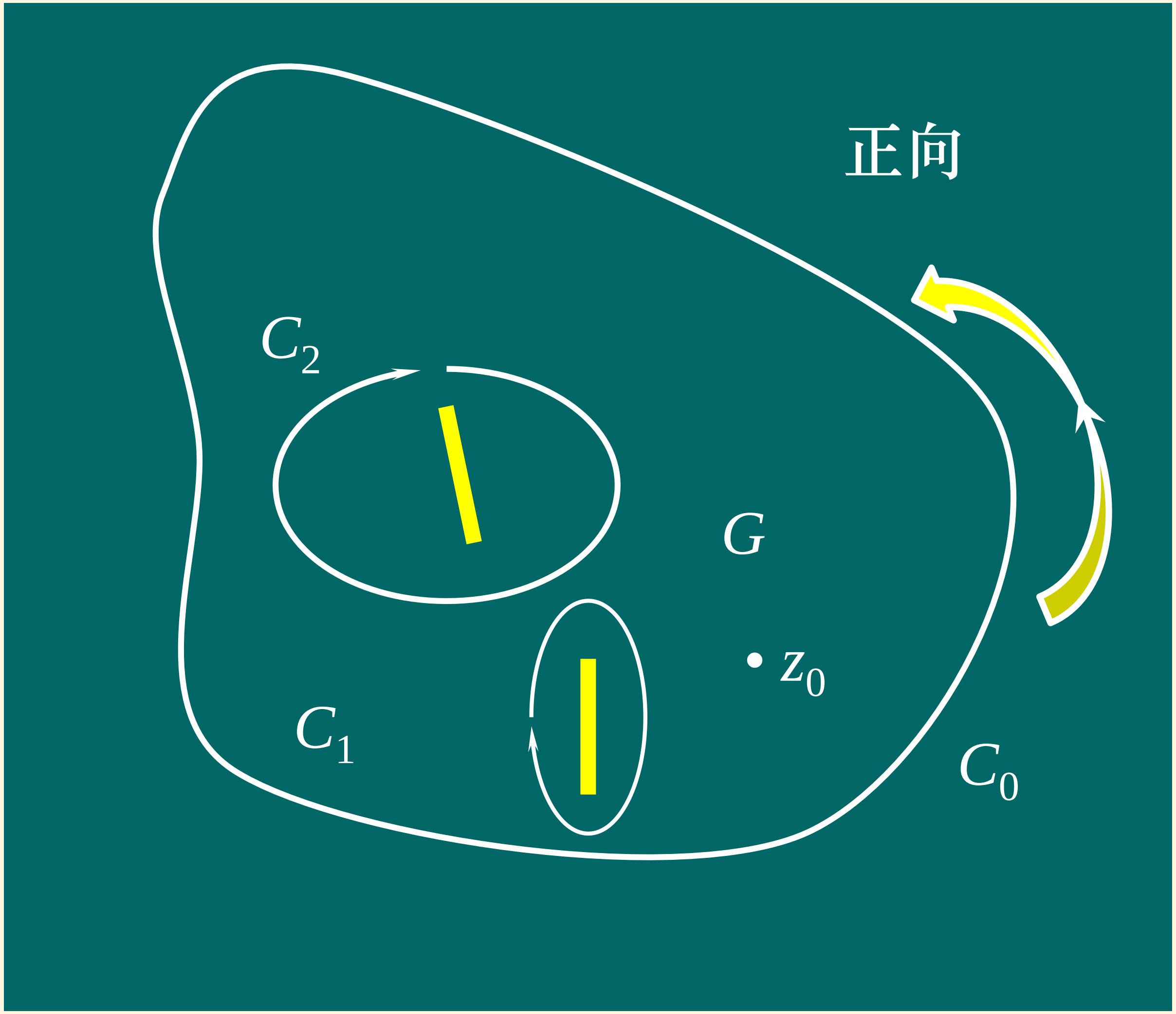
意义: 区域边界上的值来表示区域内任何一点的值。表明各处函数值的关联性。

■ 闭区域的 Cauchy 积分公式

设: (1) $f(z)$ 在闭区域 G 单值且解析；(2)G 的边界 C 分段光滑，则 G 内任何一点 z_0 的值可表示为积分

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi$$

其中 $C=C_0+C_1+C_2$, 积分沿 C 的正向。



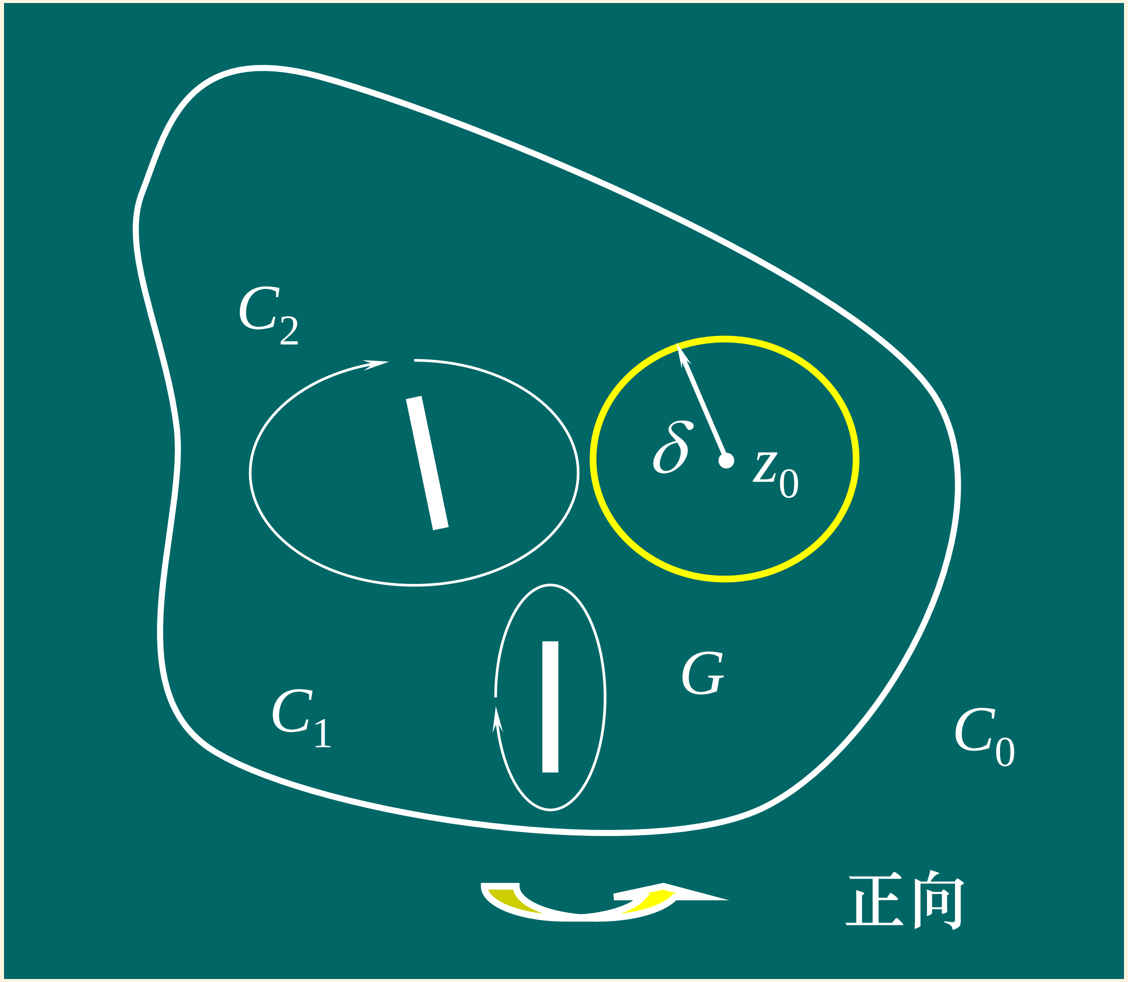
复连通区域： $C=C_0+C_1+C_2$

证明：在G内，$f(z)$解析，则z_0点是$f(z)/(z-z_0)$的奇点，在z_0点作小圆δ，在以C和δ围成的闭区域内，利用Cauchy 定理

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C+\delta}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\delta}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi=0$$

在小圆δ上 $\xi-z_0=\delta e^{\mathrm{i}\varphi}$

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\xi)}{\xi-z_0}\mathrm{d}\xi=-\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_{\delta}\frac{f(z_0+\delta e^{\mathrm{i}\varphi})}{\delta e^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}(\delta e^{\mathrm{i}\varphi})$$



z_0在复连通区域C之内

当δ趋近零

注意：积分方向

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi = -\frac{1}{2\pi}\lim_{\delta\to 0}\int_{2\pi}^{0} f(z_0+\delta e^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi = f(z_0)$$

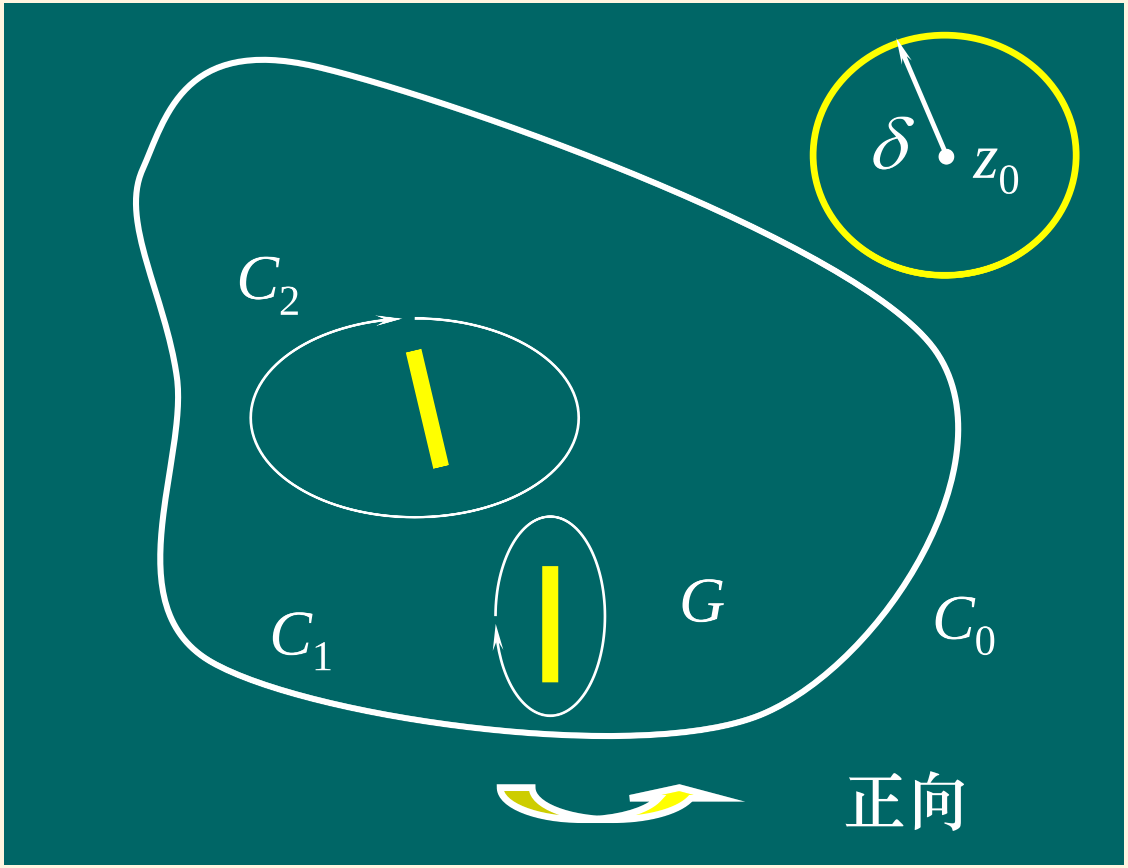
即为Cauchy公式。

- **注意：如果z_0点不在区域C内，显然$f(z)/(z-z_0)$在C内解析，于是**

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi = 0$$

因此

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{\xi - z_0}\mathrm{d}\xi = \begin{cases} f(z_0), & z_0 \subset C \\ 0, & z_0 \not\subset C \end{cases}$$



z_0在复连通区域C之外

❑Cauchy 积分公式的重要推论

1、解析函数的高阶导数

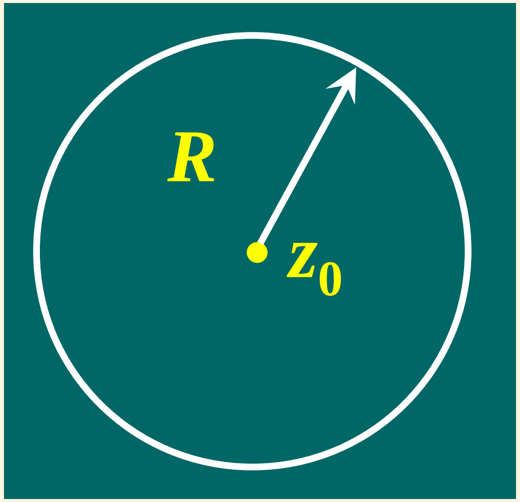
解析函数的任意阶导数存在

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-z)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

2、Cauchy不等式

注意：*R*任意

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right|=\frac{n!M}{R^n}$$



其中，*M*是|*f*(*z*)|在圆周*R*上的上界

3、均值定理

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(z_0+Re^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi$$

——圆心的值等于圆周上的平均!

4、若*f*(*z*)是闭区域上的解析函数, 则模的最大值在边界上

$$\max_{z\in E+\partial E}|f(z)|=\max_{z\in\partial E}|f(z)|=M$$

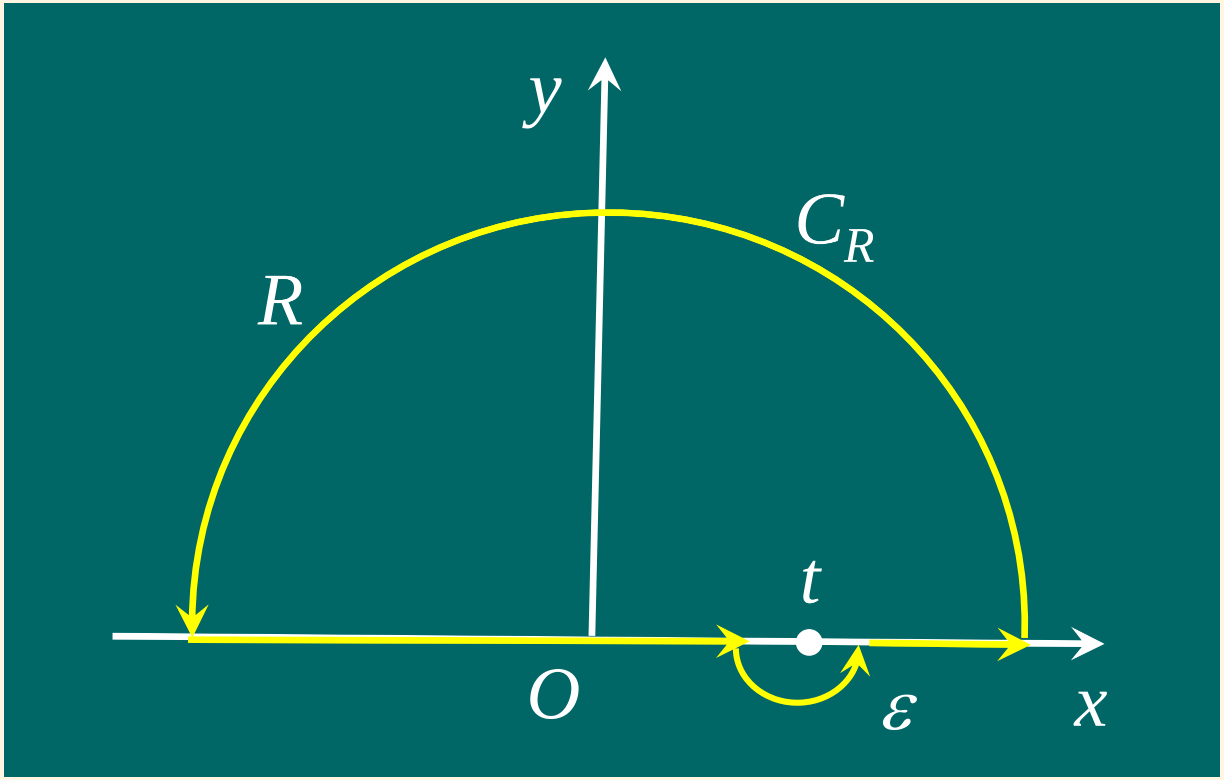
5、Liouville定理：如果*f*(*z*)在全平面解析（不包括无限大点）且当*z*→∞时| *f*(*z*)|< ∞, 则*f*(*z*)=常数。

Hilbert变换

$$\operatorname{Im} f(t) = -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(\eta)}{\eta - t}\,\mathrm{d}\eta$$

$$\operatorname{Re} f(t) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\eta)}{\eta - t}\,\mathrm{d}\eta$$

意义
一维实信号延拓成二维复平面上的解析函数



在围道Σ内，设f(z)解析，直接由Cauchy积分

$$f(t)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{\Sigma}\frac{f(\xi)}{\xi-t}\mathrm{d}\xi$$

积分由4部分组成

$$\begin{aligned}f(t)&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{-\infty}^{t-\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-t}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{t+\varepsilon}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-t}\mathrm{d}\xi+\\&\quad+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-t}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{f(\xi)}{\xi-t}\mathrm{d}\xi\\&=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi-t}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi-t}\mathrm{d}\xi+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{f(\xi)}{\xi-t}\mathrm{d}\xi\end{aligned}$$

大圆弧积分： $\xi - t = Re^{\mathrm{i}\varphi}$

$$\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_R}\frac{f(\xi)}{\xi - t}\mathrm{d}\xi = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\lim_{R\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{f(t+Re^{\mathrm{i}\varphi})}{Re^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}(Re^{\mathrm{i}\varphi})$$

$$= \lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} f(t+Re^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi \to 0$$ **一致趋向零**

小圆弧积分： $\xi - t = \varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{C_\varepsilon}\frac{f(\xi)}{\xi - t}\mathrm{d}\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{f(t+\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi})}{\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi}}\mathrm{d}(\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi})$$

$$= \frac{1}{2\pi}\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\pi}^{2\pi} f(t+\varepsilon e^{\mathrm{i}\varphi})\mathrm{d}\varphi = \frac{f(t)}{2\pi}\int_{\pi}^{2\pi}\mathrm{d}\varphi = \frac{f(t)}{2}$$

$$\frac{1}{2}f(t) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\xi)}{\xi - t}\mathrm{d}\xi$$

$$\operatorname{Im} f(t) = -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} f(\eta)}{\eta - t}\,\mathrm{d}\eta$$

$$\operatorname{Re} f(t) = \frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Im} f(\eta)}{\eta - t}\,\mathrm{d}\eta$$

一维实信号*x*(*t*)

$$y(t) = -\frac{1}{\pi} P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(t)}{\eta - t}\,\mathrm{d}\eta$$

Hilbert变换

二维复平面上的解析函数

$$f(t) \equiv x(t) + \mathrm{i}y(t)$$

$$f(z) \equiv x(z) + \mathrm{i}y(z)$$

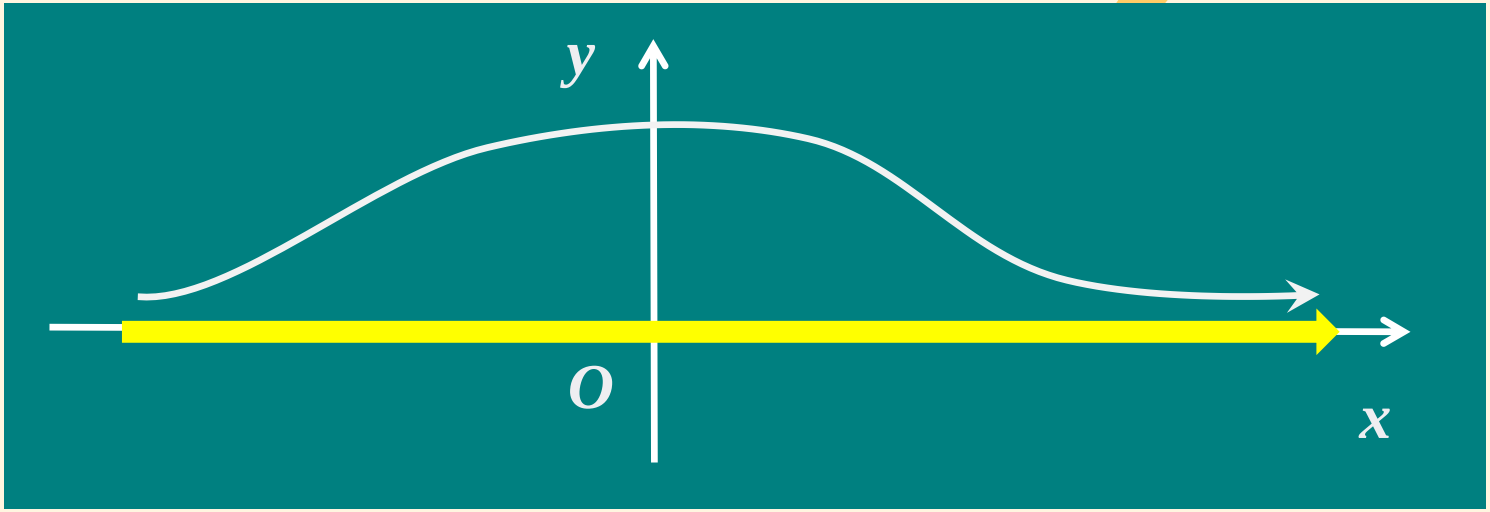
2.4 渐近积分

路径积分：$f(x)=\int_C g(z)\exp[xh(z)]\mathrm{d}z$

x: 很大的正实数; $g(z)$和$h(z)$:解析函数

积分路径+原路径形成的闭区域内解析

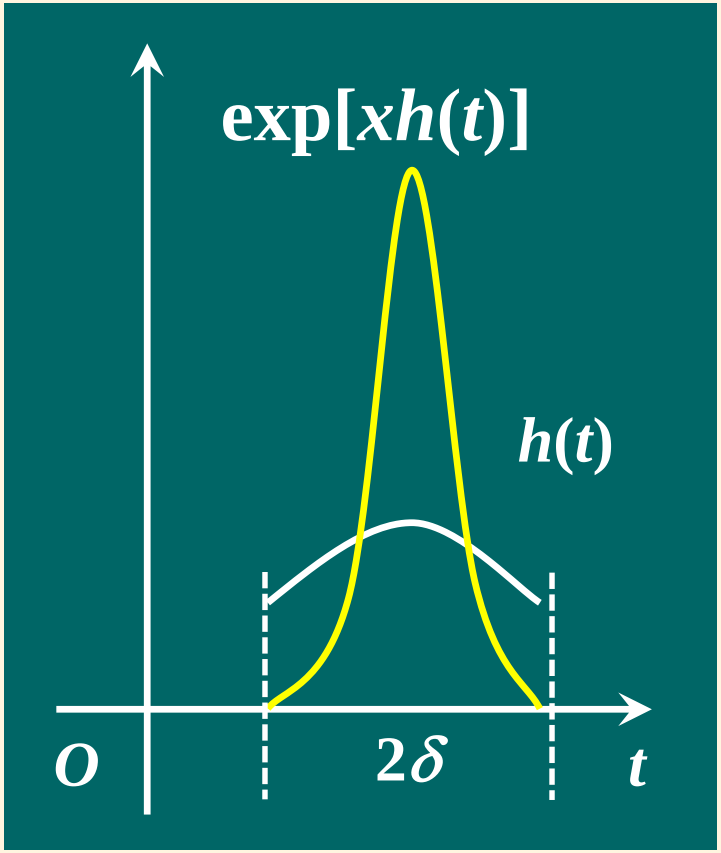
- 积分与路径无关



□ g和h都是实的

$$f(x)=\int_a^b g(t)\exp[xh(t)]\mathrm{d}t$$

假定：$h(t)$有一极大值，经过指数放大后，极大很突起，积分贡献主要是极大点t_0附近—假定$g(t)$是缓慢变化的。



于是

$$h(t)=h(t_0)+\frac{1}{2}h''(t_0)(t-t_0)^2+\ldots$$

极大条件 $h'(t_0)=0;\ h''(t_0)<0$

$$f(x)\approx \exp\left[xh(t_0)\right]\int_{t_0-\delta}^{t_0+\delta} g(t)\exp\left[-\frac{1}{2}x\,|h''(t_0)|\,(t-t_0)^2\right]\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{2}x\,|h''(t_0)|\,(t-t_0)^2\equiv\eta^2$$

$$\Downarrow$$

$$f(x)\approx\sqrt{2}g(t_0)\frac{\exp[xh(t_0)]}{\sqrt{x\,|h''(t_0)|}}\int_{-\delta\sqrt{x|h''(t_0)|/2}}^{+\delta\sqrt{x|h''(t_0)|/2}}\exp(-\eta^2)\mathrm{d}\eta$$

因为x是很大的正实数，而δ有限，积分可以拓展到$\eta\in(-\infty,\infty)$

$$f(x) \approx \sqrt{2}\, g(t_0) \frac{\exp[xh(t_0)]}{\sqrt{x|h''(t_0)|}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\eta^2) \mathrm{d}\eta$$

$$\approx \sqrt{2\pi}\, g(t_0) \frac{\exp[xh(t_0)]}{\sqrt{x|h''(t_0)|}}$$

例

$$\Gamma(x) = x^x \int_0^{\infty} \exp[x(\ln t - t)] \mathrm{d}t$$

$$g(t) = 1$$
$$h(t) = \ln t - t$$

$$h'(t) = t^{-1} - 1 = 0 \Rightarrow t_0 = 1$$
$$h''(t) = -t^{-2} < 0$$

$$h(t) = h(1) + \frac{1}{2} h''(1)(t-1)^2 + ... = -1 - \frac{1}{2}(t-1)^2 + ...$$

$$\Gamma(x) \approx x^x e^{-x} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \exp\left[-\frac{x}{2}(1-t)^2\right] dt$$

$$= x^x e^{-x} \int_{-\delta}^{+\delta} \exp\left[-\left(\sqrt{\frac{x}{2}}u\right)^2\right] \mathrm{d}u = x^x e^{-x} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_{-\delta\sqrt{x/2}}^{+\delta\sqrt{x/2}} \exp(-\eta^2) \mathrm{d}\eta$$

因为x是很大的正实数，而δ有限，积分可以拓展到$\eta \in (-\infty, \infty)$

$$\Gamma(x) \approx x^x e^{-x} \sqrt{\frac{2}{x}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\eta^2) \mathrm{d}\eta \approx x^x e^{-x} \sqrt{\frac{2\pi}{x}}$$

$$\ln \Gamma(x) \approx x \ln x - x$$

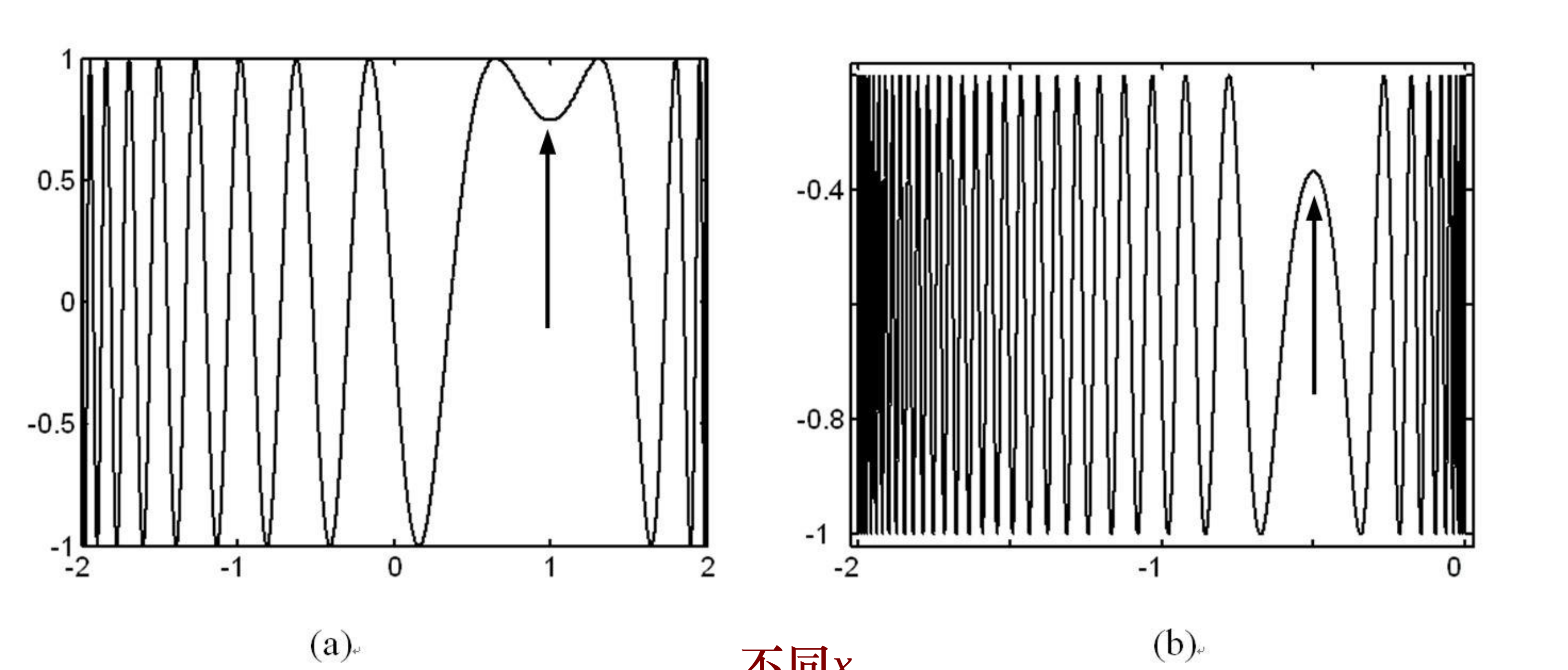
$$\ln n! \approx n \ln n - n$$

——Stirling公式

问题

$$f(x)=\int_a^b g(t)\exp[\mathrm{i}xh(t)]\mathrm{d}t \sim ?$$ **—稳相法**

x很大的正实数，积分高速震荡. 一般正负抵消，只有在某些点附近积分贡献极大

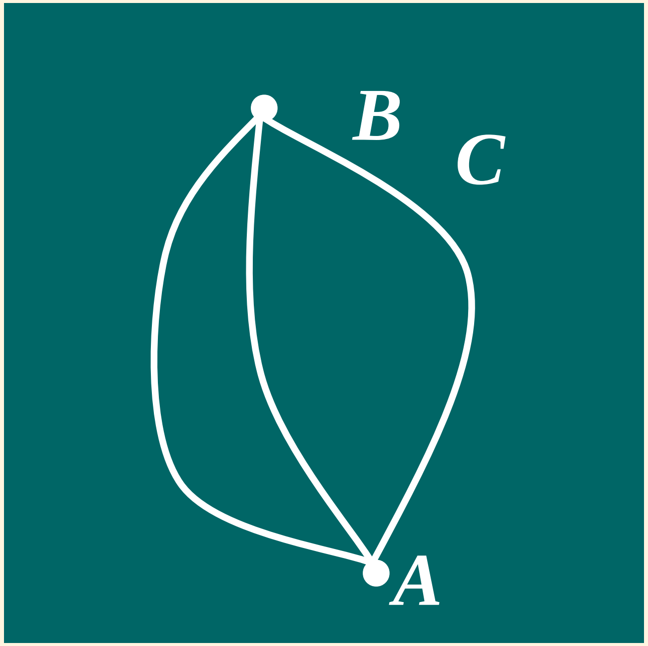


不同x

□ g和h都是复变函数且在讨论区域解析

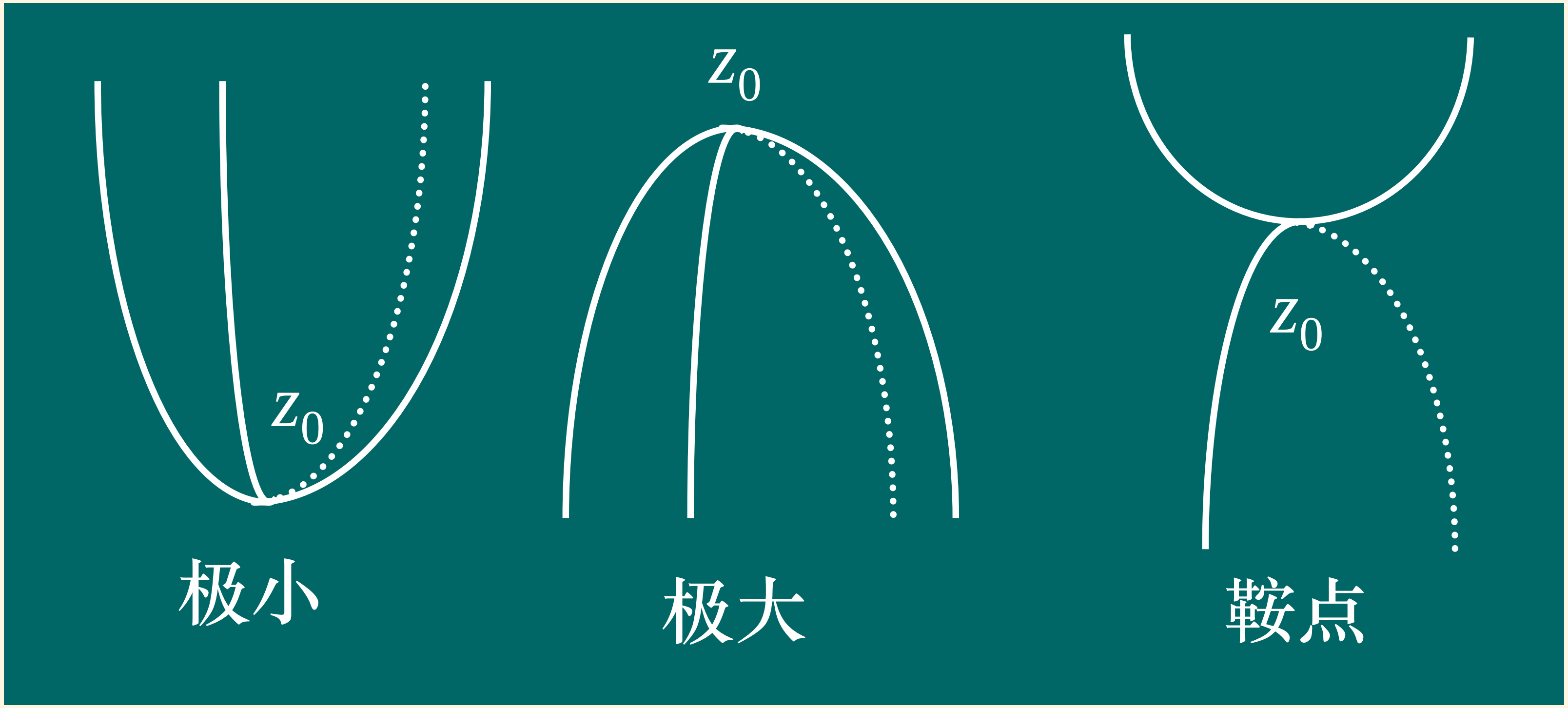
$$f(x)=\int_C g(z)\exp[xh(z)]\mathrm{d}z$$

由于g和h是解析函数，从A点到B点的积分可改变路线。于是可选择适当的路径，在此路径上，h出现极大



■ 存在二个问题

1、 h既然是解析函数，其实部和虚部$u(x,y)$、$v(x,y)$作为(x,y)的二元函数，不可能出现极大



2、积分

$$\int_C g(z)\mathrm{e}^{x\mathrm{Re}[h(z)]}\exp[\mathrm{i}x\,\mathrm{Im}[h(z)]]\mathrm{d}z$$

是高速振荡函数的积分

解决方法

1、能否找到一条适当的路径C, 经过鞍点z_0且沿着快速下降的方向，这样积分

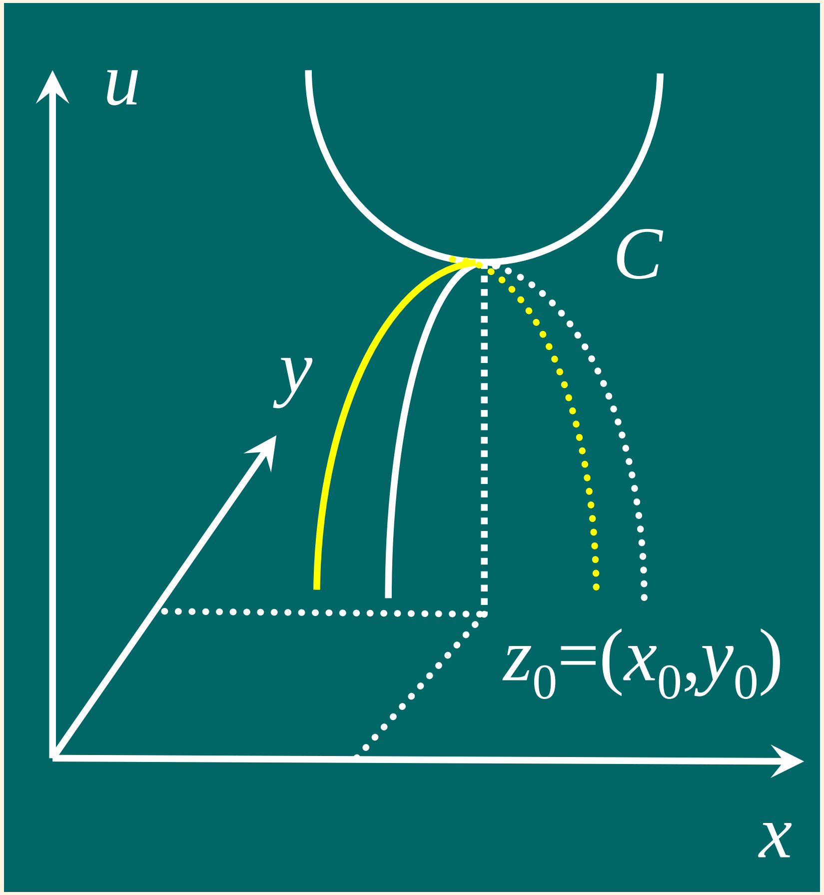
$$\int_C g(z)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x\,\mathrm{Im}[h(z)]}\exp[x\,\mathrm{Re}[h(z)]]\mathrm{d}z$$

只有在鞍点z_0附近有极大贡献

2、在鞍点z_0附近

$$\mathrm{Im}[h(z)]=\mathrm{Im}[h(z_0)]$$

高速振荡函数的积分变成常数因子



$$f(x) \approx \exp[\mathrm{i}x\,\mathrm{Im}\,h(z_0)]\int_C g(z)\exp[x\,\mathrm{Re}(h(z))]\mathrm{d}z$$

2、是否存在这样的路径*C*?

在鞍点z_0作Taylor展开

$$h(z) = h(z_0) + h'(z_0)(z - z_0) + \frac{1}{2}h''(z_0)(z - z_0)^2 + \ldots$$

$$= h(z_0) + \frac{1}{2}h''(z_0)(z - z_0)^2 + \ldots$$

令

$$z - z_0 = \rho e^{\mathrm{i}\varphi};\quad h''(z_0) = |h''(z_0)|e^{\mathrm{i}\vartheta}$$

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)+\frac{1}{2}|h''(z_0)|\rho^2\cos(\vartheta+2\varphi)+\ldots$$

$$v(x,y)=v(x_0,y_0)+\frac{1}{2}|h''(z_0)|\rho^2\sin(\vartheta+2\varphi)+\ldots$$

- **当** $\vartheta+2\varphi=\pm\pi$ ⇒ $\cos(\vartheta+2\varphi)=-1$ ⇒ $\varphi=-\frac{\vartheta}{2}\pm\frac{\pi}{2}$

  为最速下降方向，*u*取极大（要找的方向）

- **当** $\vartheta+2\varphi=\pm2\pi$ ⇒ $\cos(\vartheta+2\varphi)=+1$ ⇒ $\varphi=-\frac{\vartheta}{2}\pm\pi$

  为最速上升方向， *u*取极小

- **在最速下降（或上升方向）** $\sin(\vartheta+2\varphi)=0$

$$v(x,y)\approx v(x_0,y_0)$$

取C为最速下降方向的路径：在C上

$$v(x,y)-v(x_0,y_0)\approx 0 \Rightarrow \mathrm{Im}[f(z)-f(z_0)]\approx 0$$

$$h(z)=h(z_0)-\frac{1}{2}|h''(z_0)|\rho^2+\ldots$$

于是

$$f(x)\approx g(z_0)e^{xh(z_0)}\int_C \exp\left[-\frac{1}{2}x|h''(z_0)|\rho^2\right]\mathrm{d}z$$

在鞍点附近，沿最速下降方向的区间 $[-\delta,\delta]$

$$z-z_0=\rho e^{\mathrm{i}\varphi}\Rightarrow \mathrm{d}z=e^{\mathrm{i}\varphi}\ \mathrm{d}\rho\ ;\ \ \varphi=-\frac{\vartheta}{2}\pm\frac{\pi}{2}$$

$$f(x)\approx g(z_0)e^{xh(z_0)}\cdot e^{\mathrm{i}\varphi}\int_{-\delta}^{+\delta}\exp\left[-\frac{1}{2}x|h''(z_0)|\rho^2\right]\mathrm{d}\rho$$

令 $t=\sqrt{x|h''(z_0)|}\rho\Rightarrow[-\delta,\delta]=[-t_0,t_0]$

$$t_0=\sqrt{x|h''(z_0)|}\delta$$

——即使δ很小，因为x很大，t_0也足够大

积分贡献主要来自原点附近

$$f(x)\approx g(z_0)e^{xh(z_0)}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}}{\sqrt{x|h''(z_0)|}}\int_{-t_0}^{+t_0}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\mathrm{d}t$$

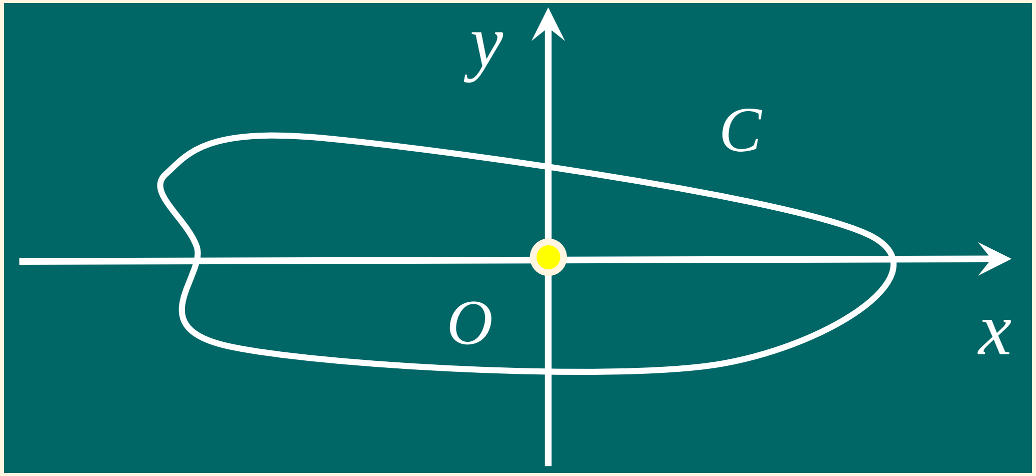
$$\approx g(z_0)e^{xh(z_0)}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}\varphi}}{\sqrt{x|h''(z_0)|}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\frac{1}{2}t^2\right)\mathrm{d}t$$

$$f(x) \approx g(z_0)e^{xh(z_0)} \cdot \frac{\sqrt{2\pi}e^{\mathrm{i}\varphi}}{\sqrt{x\,|\,h''(z_0)\,|}}$$

例 整数阶Bessel函数可表示为围道积分

$$J_n(x) \equiv \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \oint_C \frac{1}{z^{n+1}} \exp\left[\frac{x}{2}\left(z - \frac{1}{z}\right)\right] \mathrm{d}z$$

其中, C为包含原点(奇点)的任意围道(当n不是整数时，原点是支点)



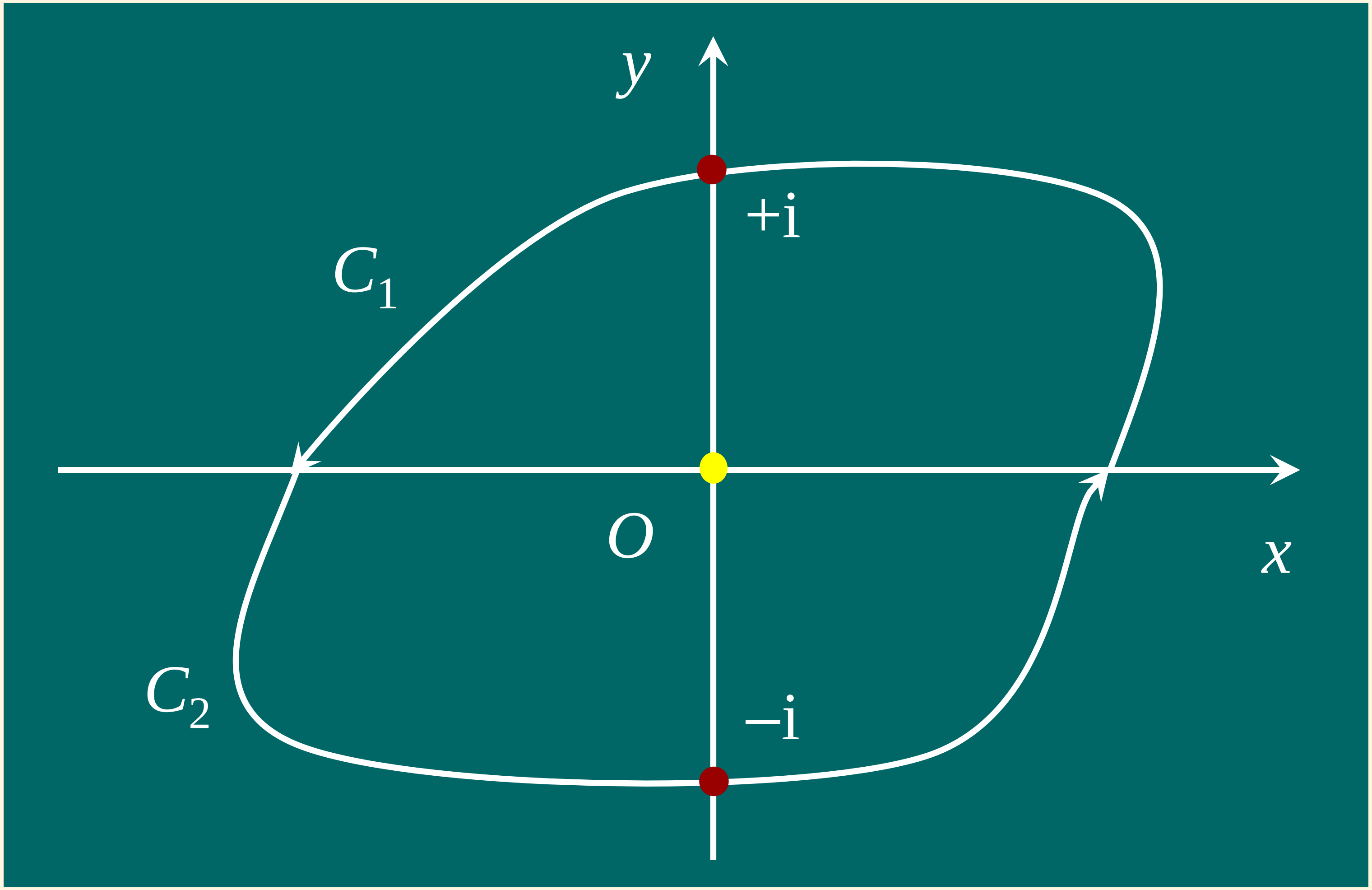
$$g(z)=\frac{1}{z^{\nu+1}};\quad h(z)=\frac{1}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)$$

$$h'(z)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2z^2}=0 \Rightarrow$$ **鞍点** $z_0=\pm\mathrm{i}$

当$x\to\infty$时，变化积分围道，使围道通过鞍点，积分主要由二个鞍点附近贡献

$$H_n^{(1)}(x)=\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_{C_1}\frac{1}{z^{n+1}}\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\mathrm{d}z$$

$$H_n^{(2)}(x)=\frac{1}{\mathrm{i}\pi}\int_{C_2}\frac{1}{z^{n+1}}\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\mathrm{d}z$$



变化积分围道，使围道通过鞍点±i

$$h(z_0)=h(\pm\mathrm{i})=\pm\mathrm{i};\quad h''(z_0)=h''(\pm\mathrm{i})=\mp\mathrm{i}=e^{\mp\mathrm{i}\pi/2}$$

$$|h''(\pm\mathrm{i})|=1;\vartheta=\mp\frac{\pi}{2};g(\pm\mathrm{i})=(\pm\mathrm{i})^{-\nu-1}$$

- **积分路径C_1经过鞍点** $z_0=+\mathrm{i}$

$$\vartheta=-\frac{\pi}{2};\quad \varphi=-\frac{\vartheta}{2}\pm\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{2}=\frac{3\pi}{4}\ \text{或者}\ -\frac{\pi}{4}$$

——分别对应上坡和下坡

$$H_n^{(1)}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[\mathrm{i}\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

积分路径C_2经过鞍点 $z_0=-\mathrm{i}$

$$\vartheta=\frac{\pi}{2};\quad \varphi=-\frac{\vartheta}{2}\pm\frac{\pi}{2}=-\frac{\pi}{4}\pm\frac{\pi}{2}=-\frac{3\pi}{4}\ \text{或者}\ \frac{\pi}{4}$$

——分别对应上坡和下坡

$$H_n^{(2)}(x)\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\exp\left[-\mathrm{i}\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

积分路径$C=C_1+C_2$

$$J_n(x)\equiv\frac{1}{2\mathrm{i}\pi}\oint_{C_1+C_2}\frac{1}{z^{n+1}}\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]\mathrm{d}z$$

$$=\frac{1}{2}\left[H_n^{(1)}(x)+H_n^{(2)}(x)\right]\approx\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$