第3章: 复变函数的幂级数展开

3.1 幂级数的性质

常用函数定义，导数和积分可交换

3.2 解析函数的Taylor 展开（重要性质二）

与实变函数的区别，解析函数的定义

3.3 解析延拓（重要性质三）

幂级数方法，方向性，物理应用

3.4 解析函数的Laurent 展开和奇点分类

正则部分和主部，孤立奇点的分类

3.1 幂级数的性质

(1)函数定义：指数函数，三角函数

(2)分析奇点附近函数的性态，定义奇点类型;

(3)围道积分与展开系数，负一次幂系数—留数;

(4)复数域讨论微分方程——级数展开的形式。

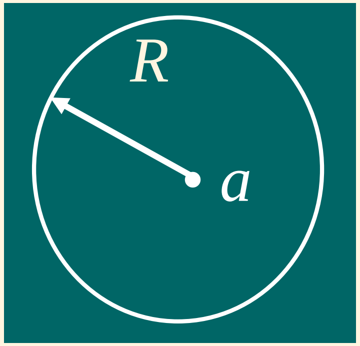
❑幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n = c_0 + c_1 (z-a) + \ldots + c_n (z-a)^n + \ldots$$

——以a为中心,不失一般性，可令 $a=0$

■ 收敛圆和收敛半径

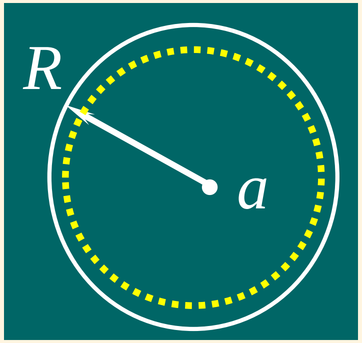
如果：正整数幂z^n 的级数



$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = c_0 + c_1 z + ... + c_n z^n + ...$$

在 $|z|<R$ 的圆内区域收敛，而在圆外发散，则称该圆为收敛圆，R 为收敛半径。在圆上级数可能收敛，可能发散(但至少存在一个不解析点)

■ 幂级数的收敛性



在稍微小于收敛圆的区域内，幂级数绝对、一致收敛。

求收敛半径的公式

1、比值判别法

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|$$

2、根式判别法

$$R = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{|c_n|}}$$

3、上极限判别法

$$R = \frac{1}{\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|c_n|}}$$

例1 指数函数：幂级数

$$S(z)=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}\equiv e^z$$

的收敛半径为

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{n!}=\infty$$

因此，级数在复平面上收敛。级数 $S(z)$ 代表一个在复平面上解析的函数，以 e^z 表示之，作为指数函数的定义：

$$e^z\equiv\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\ldots$$

例2 三角函数：幂级数

$$S_1(z)=\frac{z}{1!}-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}\equiv\sin z$$

$$S_2(z)=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots+\ldots.=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}\equiv\cos z$$

的收敛半径为

$$R_1=\lim_{n\to\infty}\frac{[2(n+1)+1]!}{(2n+1)!}=\infty;\ R_2=\lim_{n\to\infty}\frac{[2(n+1)]!}{(2n)!}=\infty$$

因此，级数在复平面上收敛， S_1(z)和S_2(z) 代表在复平面上解析的函数，以sinz和cosz 表示之，作为三角函数的定义.

幂级数的导数和积分

正整数幂z^n 函数是最简单的解析函数，因此在收敛圆内

1、幂级数的和函数是解析函数

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$

2、求导（或积分）可与求和交换次序

$$f^{(p)}(z)=n!c_n+\frac{(n+1)!}{1!}c_{n+1}z+\frac{(n+2)!}{2!}c_{n+1}z^2+\ldots$$

$$\int_C f(z)\mathrm{d}z=\sum_{n=0}^{\infty}c_n\int_C z^n\mathrm{d}z$$

幂级数在收敛圆周上的性态

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n z^n$$

在收敛圆周$|z|=R$上至少有一奇点。

1、即使在收敛圆周$|z|=R$上处处收敛，其和函数在收敛圆周上仍然至少有一个奇点

例

$$f(z)=\frac{z}{1^2}+\frac{z^2}{2^2}+\dots+\frac{z^n}{n^2}+\dots.$$

在收敛圆内及圆周上 $|z|\le 1$ 处处绝对且一致收敛。但是

$$f'(z)=1+\frac{z}{2}+\ldots+\frac{z^{n-1}}{n}+\ldots.$$

当z沿实轴从单位圆内趋向1

$$f'(1)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1^{n-1}}{n}+\ldots.\to+\infty$$

——z=1是f(z)的一个奇点

2、幂级数理论只有在复数域才能完全理解

例 $$\frac{1}{1+x}=1-x+x^2-x^3+\ldots(|x|<1)$$

——第一个零点x=-1 ➡ 收敛区间(-1,1)

$$\frac{1}{1+x^2}=1-x^2+x^4-x^6+\ldots(|x|<1)$$

为什么？

左边函数：分母无零点对所有的x都有定义；但右边幂级数的收敛半径为$|x|<1$. 为什么?

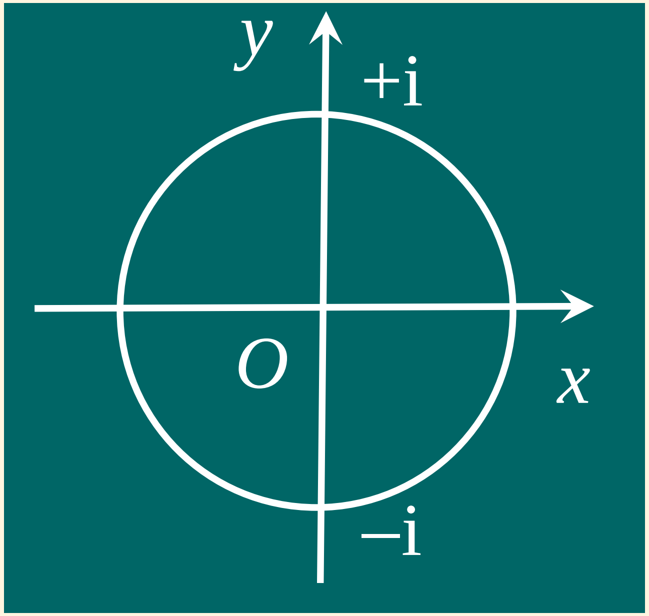
复变函数

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2}$$

的二个奇点为 $z=\pm\mathrm{i}$

$$\frac{1}{1+z^2}=1-z^2+z^4-z^6+\dots$$

的收敛半径为 $|z|<1.$



3.2 解析函数的Taylor 展开

幂级数在收敛圆内：解析函数

逆定理：解析函数可展开成幂级数

定理：设 $f(z)$ 在以 a 为圆心的圆 C 内 解析，则对于圆内的任何 z 点，$f(z)$ 可以用幂级数展开为

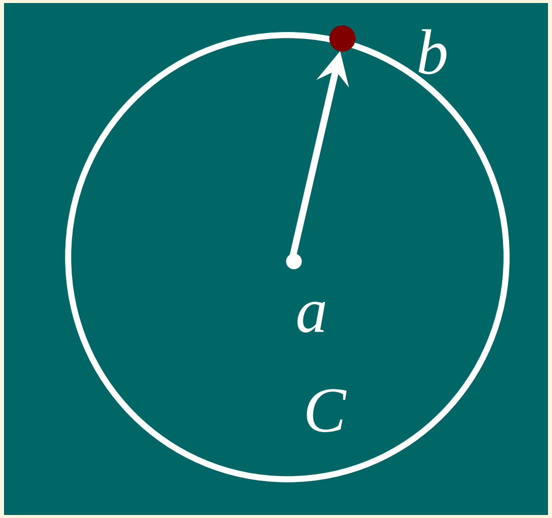
$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

其中展开系数为

$$a_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

❑Taylor 级数的收敛半径

设 b 是 $f(z)$ 的离 a 点最近的奇点，则在圆C内 $|z-a|<|b-a|$内 $f(z)$ 处处解析。因此，一般收敛半径等于$|b-a|$.



❑幂级数与解析函数的关系

$f(z)$在D内解析的充分必要条件是：在D内的任一点a的邻域内可展成$(z-a)$的幂级数，即Taylor级数。

解析函数 ⟺ Taylor级数 **——可作为解析函数的定义**

❑与实变函数的比较

- **复变函数*f*(z)：某点z_0邻域的解析函数与此邻域的幂级数存在一一对应**
- **实变函数*f*(*x*)：1、高阶导数不一定存在；2、即使存在，也不一定能作Taylor展开**

$$f(x)=\begin{cases}\exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right), x\neq 0\\ 0, x=0\end{cases}$$

在*x*=0的邻域,不能展成Taylor级数

在*x*=0, 各阶导数 $f^{(n)}(0)=0$

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots.$$

$$=0+0x+0x^2+\ldots.\equiv 0$$

❑解析函数的四种等价定义

- 若$f(z)$在区域D内处处可导，则$f(z)$在区域D内解析；（原始定义）

- $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 作为二元实变函数u和v在区域D内可微，并且满足Cauchy-Riemann方程，则$f(z)$在区域D内解析；（微分角度）

- 若$f(z)$在单连通区域D内连续，且对D内任意一条光滑闭曲线C都有围道积分为零，则$f(z)$在区域D内解析；（积分角度）

- 若$f(z)$在区域D内每一点的某邻域中可展成Taylor级数，则$f(z)$在区域D内解析。（级数角度）

❑Taylor 级数展开方法

1、根据公式——比较麻烦，较少用

$$a_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

2、根据幂级数可逐项求导、求积分性质，根据已知的幂级数展开，通过演算求复杂函数的幂级数——常用方法!

例1、求 e^z 在 $z=1$ 邻域的 Taylor 展开。

解：因为 $(e^z)^{(n)}|_{z=1}=e$

$$e^z=e\left[1+\frac{(z-1)}{1!}+\frac{(z-1)^2}{2!}+\ldots+\frac{(z-1)^n}{n!}+\ldots\right] \Rightarrow R=\infty$$

例2、求 sinz 和 cosz 在 z=0 邻域的Taylor 展开。

解

$$(\sin z)^{(2n+1)}\big|_{z=0}=(-1)^n;\quad (\sin z)^{(2n)}\big|_{z=0}=0$$

$$(\cos z)^{(2n)}\big|_{z=0}=(-1)^n;\quad (\cos z)^{(2n+)}\big|_{z=0}=0$$

故

$$\sin z=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\ldots.+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\ldots.$$

$$\cos z=1-\frac{z^2}{2!}+\frac{z^4}{4!}-\ldots.+(-1)^n\frac{z^{2n}}{(2n)!}+\ldots.$$

收敛半径 $R=\infty$

例3、求 下列二函数在 $z=0$ 邻域的Taylor 展开

$$f(z)=\frac{1}{1-z};g(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$$

解：因为

$$f^{(n)}(z)|_{z=0}=n!$$

$$\Downarrow$$

故

$$\frac{1}{1-z}=1+z+z^2+....$$

收敛半径 $R=1$。 事实上，该函数的奇点为 $z=1$, 因此，$z=0$ 与 $z=1$ 的距离为 $R=1$

$$g(z)=\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\sum_{n=0}^{\infty}z^n=\sum_{n=1}^{\infty}nz^{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n$$

收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+2}{n+1}\right|=1$$

1、取变换 $z\to -z$

$$\frac{1}{1+z}=1-z+z^2-....=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k$$

2、因为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\ln(1+z)=\frac{1}{1+z}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k$$

在收敛圆 $|z|<1$ 内可逐项积分，故

$$\ln(1+z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int z^k\mathrm{d}z=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}z^{k+1}+c$$

1、如取主值分支： ln1=0，*c*=0

$$\ln(1+z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}z^{k+1}\quad(|z|<1)$$

2、若取其他分支：ln1=2*k*πi, *c*= 2*k*πi

$$\ln(1+z)=2k\pi\mathrm{i}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}z^{k+1}\quad(|z|<1)$$

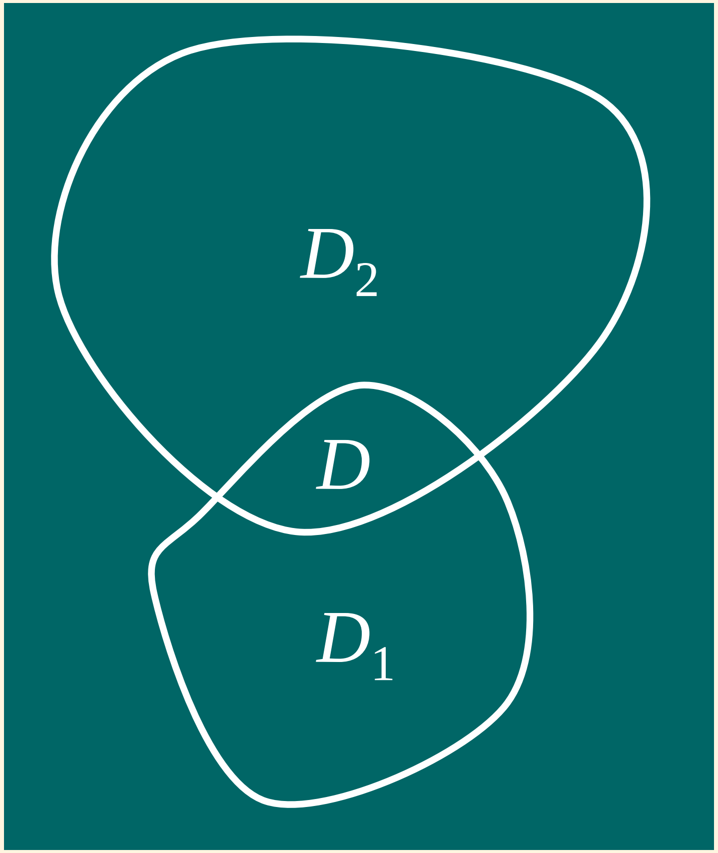
3.3 解析延拓的幂级数方法

定义：$f_1(z)$、$f_2(z)$分别在D_1、D_2上解析，在公共区域D

$$f_1(z) = f_2(z)$$

称$f_2(z)$为$f_1(z)$在D_2内的解析延拓。

——意义：扩大解析函数的定义域。



❑解析延拓的唯一性

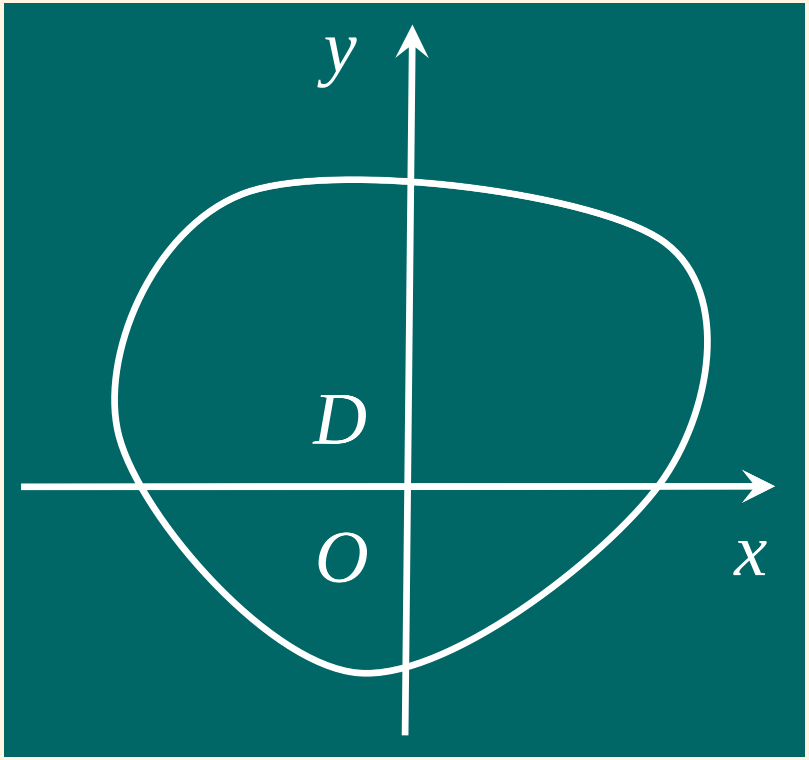
实函数：延拓的任意性——偶延拓，奇延拓,…；

解析函数:一个解析函数由其定义域内一个小区域或者小线段上的值唯一确定——局部与整体的关系

既然在公共区域D内，$f_2(z)=f_1(z)$，那么在D_2内，解析函数$f_2(z)$唯一确定。

- 数学应用：已知函数在实轴上的分布$f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$，延拓到复平面：$f(z)$；
- 物理应用：已知频域信号在正实轴上的分布$f(\omega)$ $(0<\omega<\infty)$，构成虚部——求色散关系。

■ **本质：实部、虚部满足二维Laplace方程的边值问题（调和函数）**



$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (x,y\in D)$$

$$u(x,y)|_{\partial D}=u_0(x,y)$$

——解是唯一的

■ **上半平面问题**

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad (-\infty<x<\infty, y>0)$$

$$u(x,y)|_{y=0}=u_0(x) \quad (-\infty<x<\infty)$$

$$\lim_{\sqrt{x^2+y^2}\to\infty} u(x,y)\to 0$$

上半平面1/*R*趋向零

❑解析延拓的重要方法：幂级数法

例：(1)幂级数

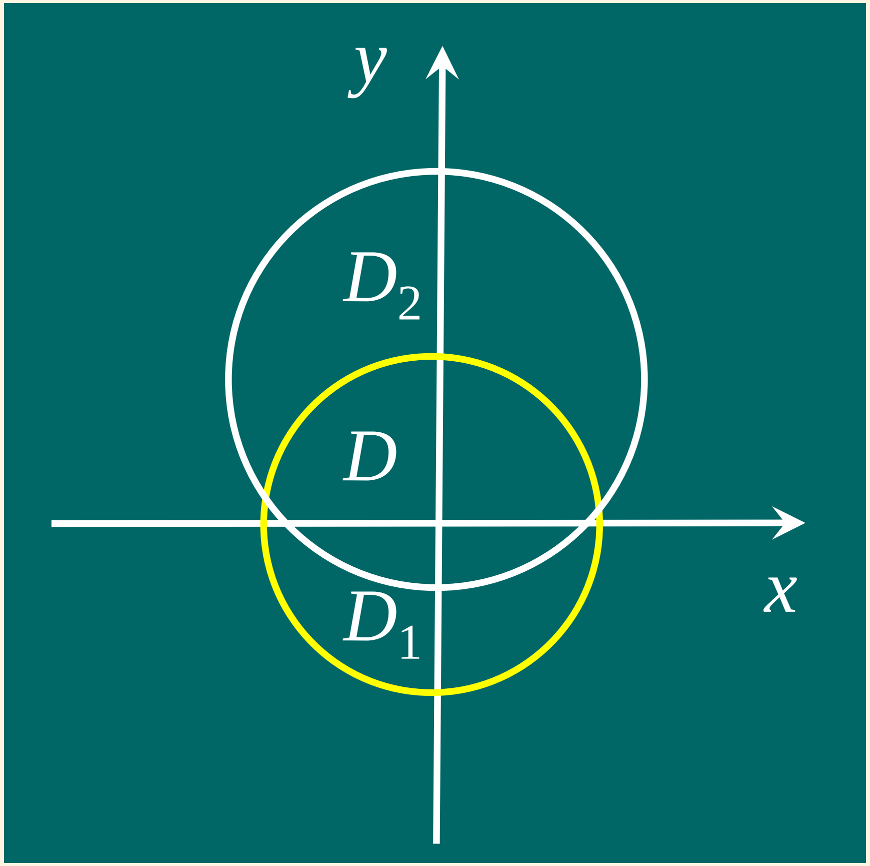
$$f_1(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^k$$

的收敛半径$|z|<1$, 在小圆D_1内收敛。

(2)幂级数

$$f_2(z)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{(z-\mathrm{i})^k}{(1+\mathrm{i})^{k+1}}$$

的收敛半径$|z|<2^{1/2}$, 在大圆D_2内收敛。



在公共区域D, 二个幂级数都收敛到$f(z)$

$$f(z)=\frac{1}{1+z}=f_2(z)=f_1(z)$$

□ 幂级数法

已知幂级数$f_1(z)$在$|z|<R_1$内收敛，利用该幂级数，可以求得收敛圆边界附近z_0的各阶导数 $f_1^{(n)}(z_0)$，于是可构成以z_0为展开中心的新幂级数

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

新幂级数$f_2(z)$的收敛圆为$|z|<R_2$；在公共区域，二个幂级数应该收敛到同一值，而扩大的区域就是开拓的区域

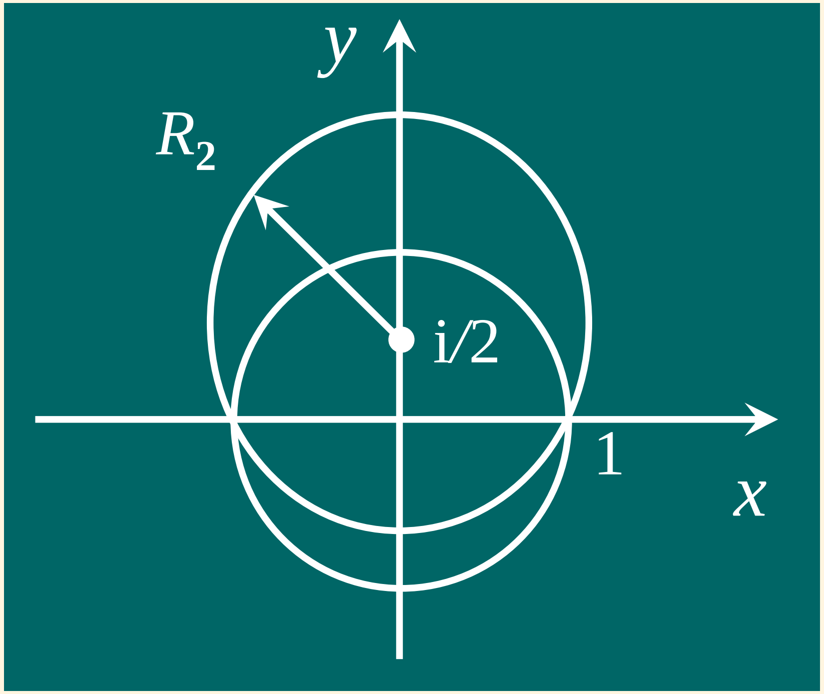
例

$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^k$$

收敛区：单位圆内

$$|z|<1$$

在单位圆内取任意一点z_0=i/2, 在这点的导数



$$f_1\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)=1+\frac{\mathrm{i}}{2}+\left(\frac{\mathrm{i}}{2}\right)^2+\ldots=\frac{1}{1-\mathrm{i}/2}$$

$$f_1'\left(\frac{i}{2}\right)=1+2\cdot\frac{i}{2}+3\cdot\left(\frac{i}{2}\right)^2+\ldots=\frac{1}{(1-i/2)^2}$$

.....

$$f_1^{(n)}\left(\frac{i}{2}\right)=\frac{n!}{(1-i/2)^{n+1}}$$

构成新级数

$$f_2(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-i/2)^{n+1}}\left(z-\frac{i}{2}\right)^n$$

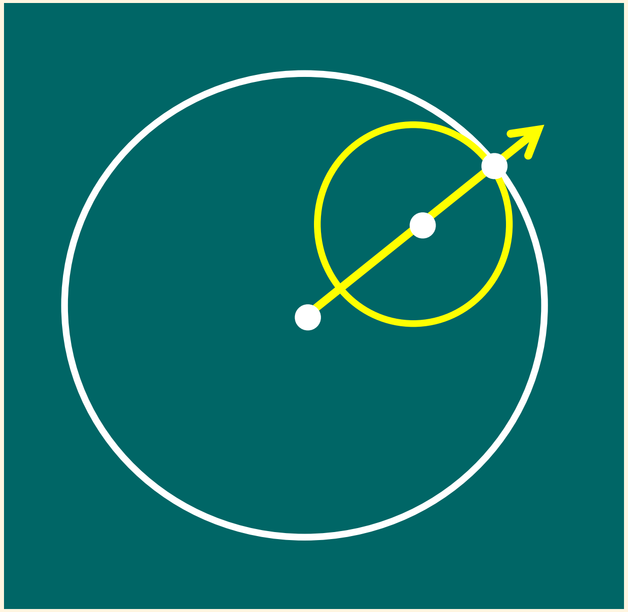
收敛区：圆内

$$R_2=\left|1-\frac{i}{2}\right|=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

❑解析延拓的方向性

可能出现这样情况：第二个收敛圆与第一个收敛圆相切，解析区域没有得到延拓！

切点是第一个收敛圆的奇点 ——因此在奇点方向，不能作解析延拓。



例

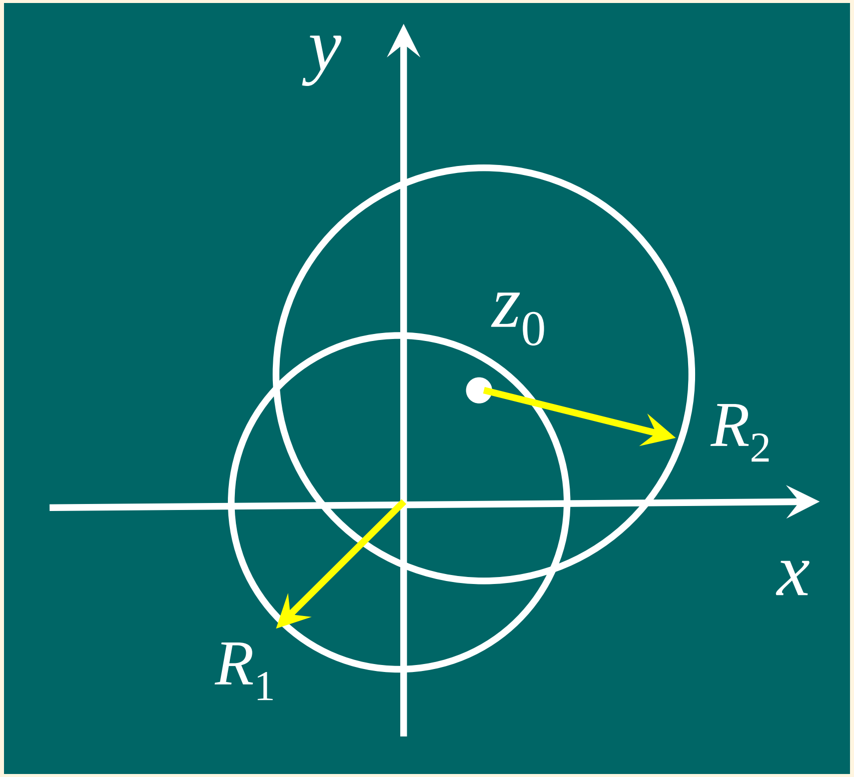
$$f_1(z)=\sum_{n=0}^{\infty} z^k$$

奇点在 $z=1$，所以在实轴方向不能作解析延拓。

❑解析延拓的应用

1、扩大函数的定义域：如把定义在实轴的函数延拓到整个复平面

2、已知子区域解的解析函数表达式，求整个区域内解析函数表达式



在信号处理中有重要应用

3.4 解析函数的Laurent展开

解析函数在奇点附近的展开，研究函数在奇点附近的性态

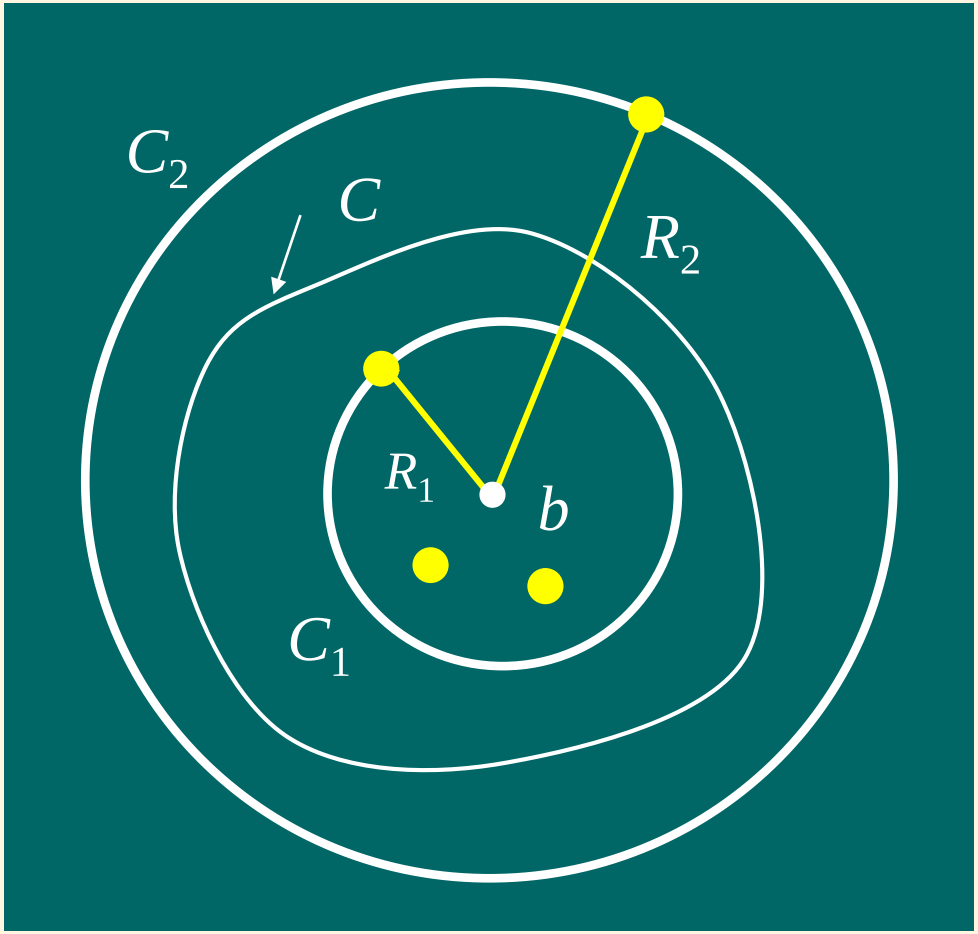
设 $f(z)$ 在环状区域 $R_1<|z-b|<R_2$ 内单值解析，则$f(z)$ 可以展开为 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n(z-b)^n$$

其中展开系数为

$$b_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

C 是环状区域内，包围内圆的任意闭曲线。



环状区域 $R_1<|z-b|<R_2$ 内单值解析

证明

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-b)^n$$

积分与求和交换次序

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-b)^m}\mathrm{d}z=\oint_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-a)^{n-m}\mathrm{d}z$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \oint_C (z-b)^{n-m}\mathrm{d}z$$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C \frac{\mathrm{d}z}{z-b}=\begin{cases}0 & (b\not\subset C)\\ 1 & (b\subset C)\end{cases};\quad \frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C (z-b)^n\mathrm{d}z=0$$

$$n\neq -1$$

$$n-m=-1 \Rightarrow n=m-1$$

$$\oint_C \frac{f(z)}{(z-b)^m}\mathrm{d}z=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \oint_C (z-b)^{n-m}\mathrm{d}z=2\pi \mathrm{i} b_{m-1}$$

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-b)^n; \quad b_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(z)}{(z-b)^{n+1}}\mathrm{d}z$$

■ **正幂部分**

$$\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-b)^n$$

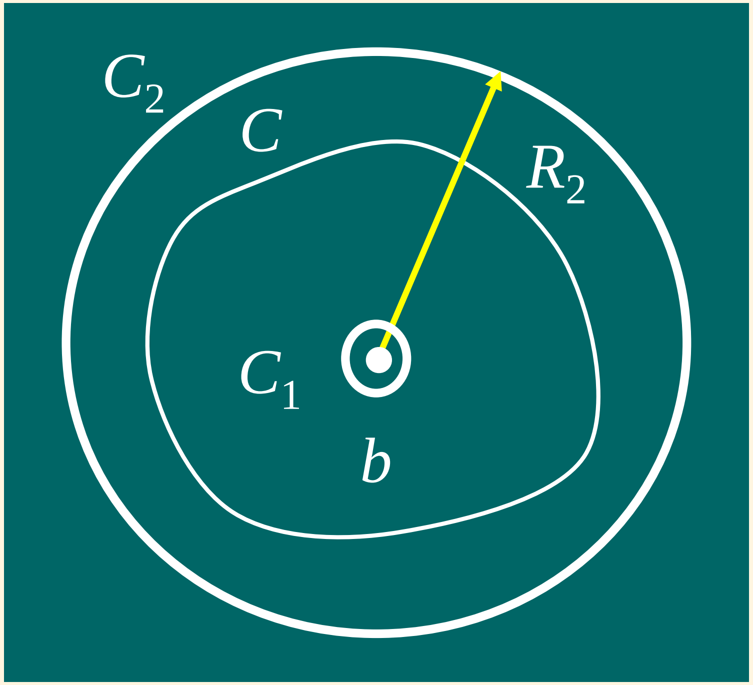
为 Laurent 级数的正则部分，在C_2圆内绝对收敛

- **负幂部分** $$\sum_{n=-\infty}^{-1} b_n (z-b)^n$$

为 级数的主部，在C_1圆外、 C_2圆内绝对收敛

- **当 $f(z)$ 在C_1 内只有唯一奇点 b 时， z 可以无限接近 b。主部反映出 $f(z)$ 在 $z=b$ 点的奇异性**

- **Taylor 级数 和 Laurent 级数 是唯一的。因此可用各种方法求一个函数的级数。**



去心圆内： $0<|z-b|<R_2$

关于 Laurent 级数的注意点

- 因含有 $(z-b)$ 的负幂次项，在$z=b$ 点是奇异的, 但 b 点可以是也可以不是函数 $f(z)$ 的奇点

例：求函数 $(z^2-1)^{-1}$ 在$1<z<\infty$ 中的 Laurent 展开

$$f(z)=\frac{1}{z^2-1}=\frac{1}{z^2}\frac{1}{1-z^{-2}}=\frac{1}{z^2}\left(1+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\ldots.\right)$$

$$=\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^4}+\frac{1}{z^6}+\ldots\ldots.$$

这里 $z=0$ 本身不是 $f(z)$ 的奇点，奇点是 $z=\pm 1$.

- 尽管求展开系数 b_n 的公式与 Taylor 展开系数的积分公式形式一样，但 $b_n\neq f^{(n)}(b)/n!$，不论 b 是否 $f(z)$ 的奇点，因为C_1内存在其他奇点

例1：求下列函数在 0<|z|<∞ 中的 Laurent 展开

$$f(z)=\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]$$

解：利用指数函数的展开公式

$$e^{\frac{x}{2}z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^k}{k!}z^k;\quad e^{-\frac{x}{2z}}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(x/2)^k}{l!}(-z)^{-l}$$

因此

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(x/2)^k}{k!}z^k\right]\cdot\left[\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(x/2)^l}{l!}(-z)^{-l}\right]$$

$$=\sum_{k,l=0}^{\infty}\frac{(x/2)^k}{k!}\frac{(x/2)^l}{l!}(-1)^l z^{k-l}$$

Bessel函数的母函数

$$k-l=n$$

$$\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l\frac{(x/2)^{n+2l}}{l!(n+l)!}\right]z^n\equiv\sum_{n=-\infty}^{\infty}J_n(x)z^n$$

其中 $J_n(\xi)$ 为 n 阶 Bessel 函数(以后将要仔细讨论)

$$J_n(x)=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{(-1)^l}{l!}\frac{1}{(n+l)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2l}$$

- **围道积分形式(C为包围原点的任意围道)**

$$J_n(x)\equiv\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{1}{z^{n+1}}\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]dz$$

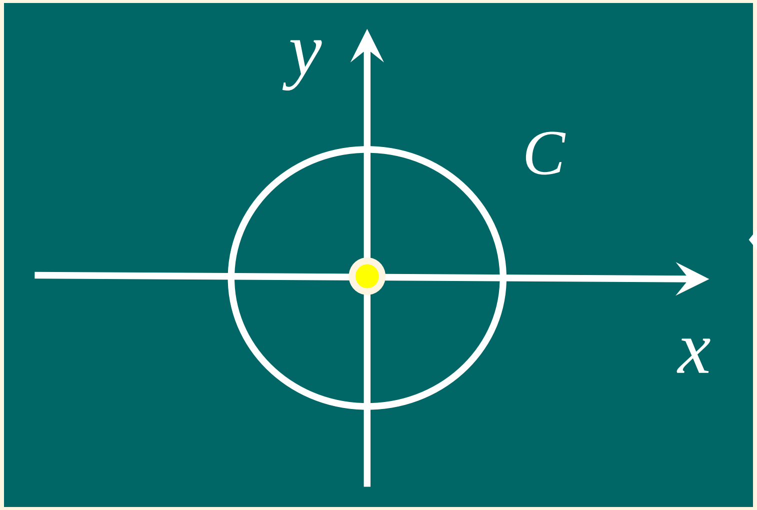
n是整数

积分路径C取为单位圆

$$z = e^{i\varphi} \Rightarrow dz = ie^{i\varphi}d\varphi$$

$$J_n(x) \equiv \frac{1}{2i\pi}\oint_C \frac{1}{z^{n+1}}\exp\left[\frac{x}{2}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]dz = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(x\sin\varphi - n\varphi)}d\varphi$$

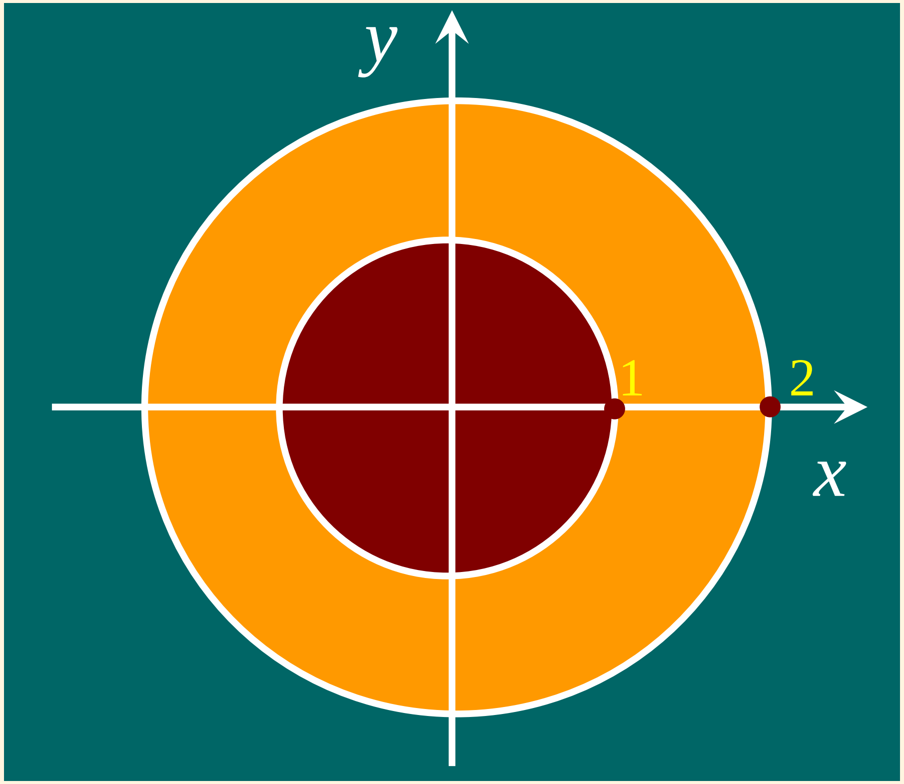
$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\exp[i(x\sin\varphi - n\varphi)]d\varphi$$



注意：为了保证函数的解析性质，*n*必须为整数，否则原点不仅仅是奇点，而且是支点，在正(或负)实轴式不解析，Laurent展开公式本身就不成立

例2

$$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$



二个奇点1和2

- **以z=0为展开中心**
- **在|z|<1的圆内，解析，Taylor级数**

$$f(z)=\frac{1}{1-z}-\frac{1}{2(1-z/2)}=\sum_{n=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{n+1}}\right)z^n$$

■ 在1<|z|<2的环内，Laurent级数

$$f(z) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-z/2} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}}z^{n} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{z^{n}}$$

无限多个
正幂和负幂

——展开中心为原点，无法分析奇点的特性

■ 在2<|z|<∞的环内，Laurent级数

$$f(z) = \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-2/z} - \frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-1/z} = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^{n}}$$

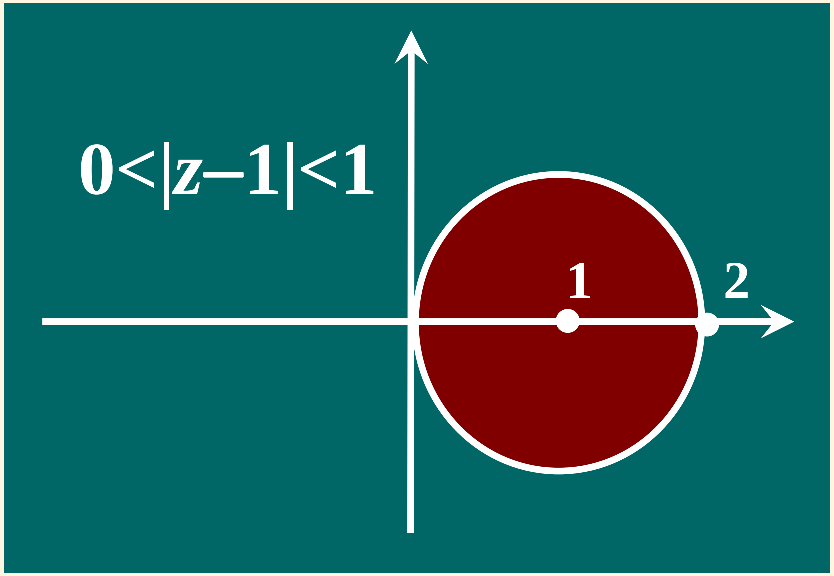
——无法分析奇点的特性,但可分析∞点的奇性

以$z=1$为展开中心

$$f(z)=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{1-(z-1)}$$

$$=\frac{1}{z-1}+\sum_{n=0}^{\infty}(z-1)^n$$

——$z=1$是一阶极点

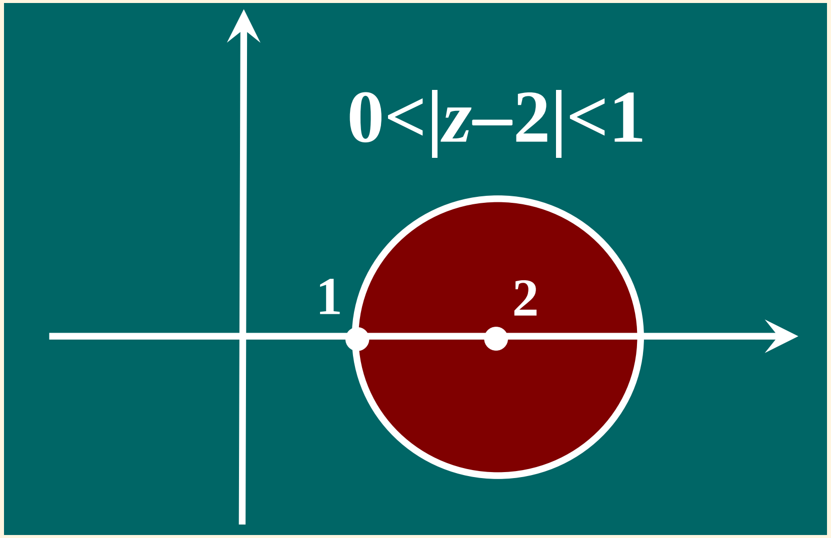


以$z=2$为展开中心

$$f(z)=-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{1+(z-2)}$$

$$=-\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-2)^n$$

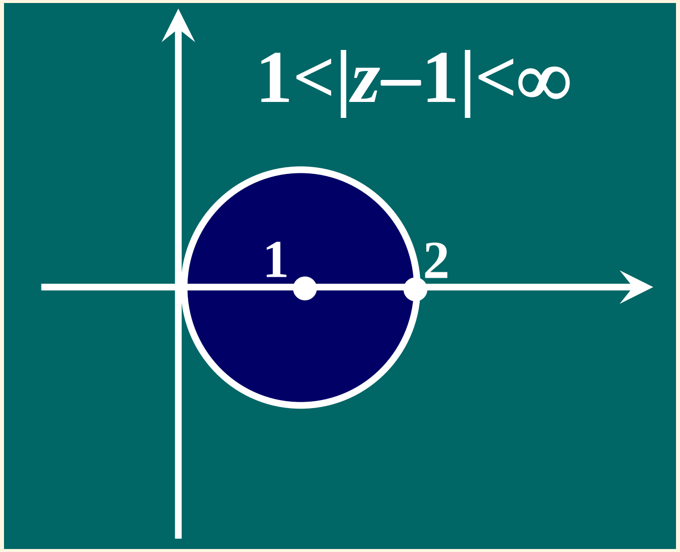
——$z=2$是一阶极点



- **以$z=1$为展开中心,但展开区域为 $1<|z-1|<\infty$**

$$f(z)=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1}\cdot\frac{1}{1-1/(z-1)}$$

$$=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-1}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-1)^n}$$

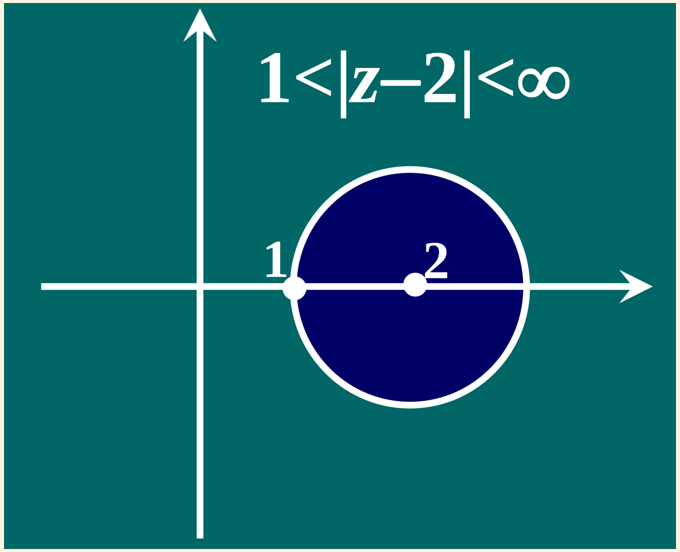


无限多个负幂次，但不能说$z=1$是本性奇点

- **以$z=2$为展开中心,但展开区域为$1<|z-2|<\infty$**

$$f(z)=-\frac{1}{z-2}+\frac{1}{z-2}\cdot\frac{1}{1+1/(z-2)}$$

$$=-\frac{1}{z-2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^{n+1}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(z-2)^{n+1}}$$

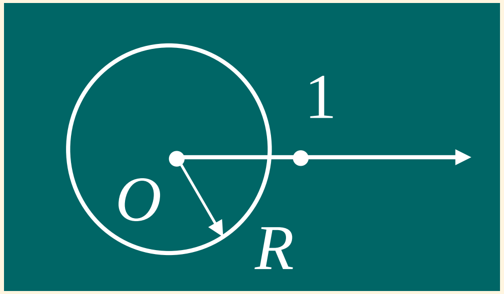


□单值函数的孤立奇点

孤立奇点的定义

设单值函数 $f(z)$ 在某点 z_0 不可导。如果在 z_0 的足够小的邻域内，除了z_0 外，$f(z)$ 处处可导，则称 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点。如果在 z_0 点的无论多么小的邻域内，总可以找到除 z_0 以外的不可导点，则称 z_0 为 $f(z)$ 的非孤立奇点。

例1：$z=0$ 是 函数 $1/[z(1-z)]$ 的孤立奇点. 因为在以$z=0$ 为圆心，$R<1$ 的圆内，除$z=0$ 外，无其他不可导点。



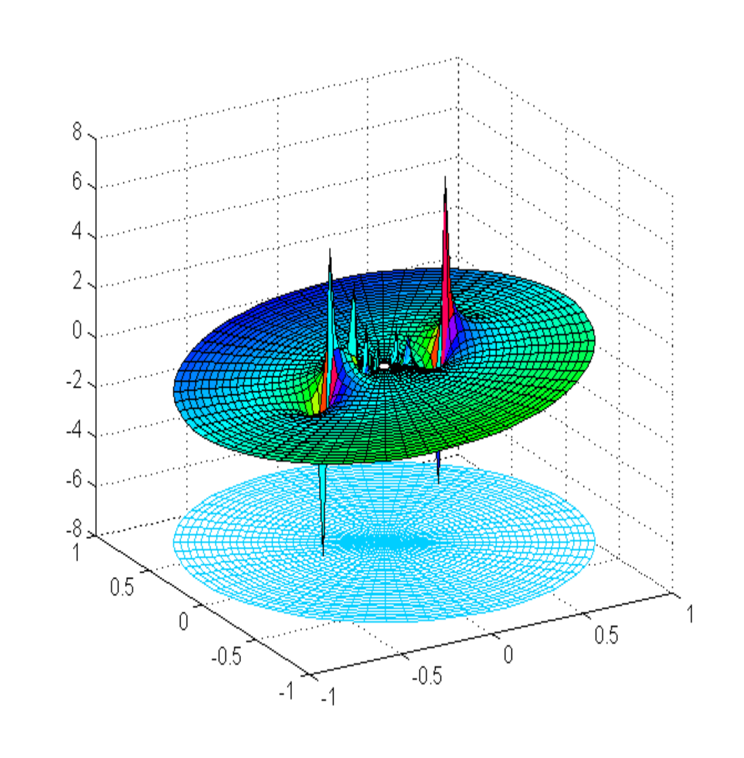
例2：z=0 是函数 $[\sin(1/z)]^{-1}$ 的非孤立奇点. 因为该函数的奇点为

$$z_n = \frac{1}{n\pi} \quad (n = \pm 1,\ \pm 2, \ldots)$$

$$u(x,y) = \mathrm{Re}[\sin(1/z)]^{-1}$$

——只要 n 足够大，$1/n$ 可以任意接近于 $z=0$, 即在 $z=0$ 无论多么小的邻域内，总可以找到函数的其它奇点。

函数的实部

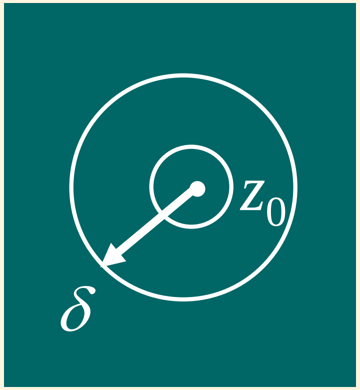


■ 孤立奇点的分类

在不同类型的奇点附近，函数具有不同的性质。

设：z_0 是单值函数 $f(z)$ 的孤立奇点，则在以 z_0 为圆心一个环状邻域 $0<|z-z_0|<\delta$ 内, 可以展开成 Laurent 级数

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$



(1)可去奇点：上述级数无负幂次

因此在可去奇点 z_0, 可以定义

$$\lim_{z \to z_0} f(z)=b_0$$

如果z_0是单值函数 $f(z)$ 的孤立奇点，且满足下列说法之一，那么z_0是$f(z)$ 的可去奇点

- **$f(z)$ 在z_0 点的Laurent展开主部为零**

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n (z-z_0)^n$$

- **$f(z)$ 在z_0 点的极限有限**

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=C(\neq\infty)$$

- **$f(z)$ 在z_0 点的邻域有界**

$$|f(z_0)|<M$$

例

$$f(z)=\frac{\sin z}{z}$$

$z_0=0$是函数的可去奇点

(2) 极点：上述级数有有限次负幂

如果z_0是单值函数 $f(z)$ 的孤立奇点，且满足下列说法之一，那么z_0是$f(z)$ 的m 阶极点, 当m=1 时，称谓单极点

- **$f(z)$在z_0 点的Laurent展开为**

$$f(z)=\frac{b_{-m}}{(z-z_0)^m}+\frac{b_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}}+....+\frac{b_{-1}}{(z-z_0)}$$

$$+b_0+b_1(z-z_0)+...+b_m(z-z_0)^m+...$$

- **$f(z)$在z_0 点的邻域内**

$$f(z)\equiv\frac{\varphi(z)}{(z-z_0)^m};\ \varphi(z_0)\neq 0$$

- 函数$g(z)$以z_0点为m级零点

$$g(z)=\frac{1}{f(z)}=(z-z_0)^m\psi(z);\ \psi(z_0)\neq 0$$

- $f(z)$的孤立奇点z_0为极点的充分必要条件是

(1) $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=\infty$

(2) $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z)=b_{-m}=$有限

判断极点的阶数

例

$$f_1(z)=\frac{1}{z^2};\ f_2(z)=\frac{e^{iz}-1}{z^2}$$

$z=0$是$f_1(z)$的二阶极点；$f_2(z)$的一阶极点

(3) 本性奇点：上述级数有无限多负幂次

$f(z)$的孤立奇点z_0为本性奇点的充分必要条件为

$$\lim_{z\to z_0} f(z) \neq \begin{cases} b(\text{有限}) \\ \infty \end{cases}$$

见下页讨论

即： $\lim_{z\to z_0} f(z)$ **不存在！**

- **性质：如果z_0是$f(z)$的本性奇点，一般也是$1/f(z)$的本性奇点。**

例：$z=0$是 $\exp(1/z)$ 和 $\exp(-1/z)$ **的本性奇点**

■ 关于无限大的说明

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty;\quad \lim_{z\to z_0} f(z)\neq\begin{cases} b(\text{有限}) \\ \infty \end{cases}$$

$$f_1(z)=\frac{1}{z};\quad f_2(z)=\exp\left(\frac{1}{z}\right)$$

当 (1) z 沿正实轴→0 时，$1/z\to+\infty$; $e^{1/z}\to\infty$
(2) z 沿负实轴→0 时，$1/z\to-\infty$; $e^{1/z}\to 0$
(3) z 沿虚轴，按 $i/(2\pi n)\to 0$ 时，$1/z\to -i\infty$; $e^{1/z}\to 1$

$$\lim_{z\to 0}\frac{1}{z}=\infty;\quad \lim_{z\to 0}\exp\left(\frac{1}{z}\right)=\text{不存在}$$

注意：不管 $+\infty$，$-\infty$，还是 $i\infty$，无限远是一个点

例1 求函数 $f(z)=1/\sin z$ 的奇点。

解：显然 $z_0=n\pi$ $(n=0, \pm 1, \pm 2\ldots)$ 是 $f(z)$ 的奇点。因为

$$\lim_{z\to n\pi}\frac{(z-n\pi)}{\sin z}\overset{(z-n\pi=\Delta z)}{=\!=\!=}\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{\sin(\Delta z+n\pi)}$$

$$=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{\sin(\Delta z)\cos(n\pi)+\cos(\Delta z)\sin(n\pi)}$$

$$=(-1)^n\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta z}{\sin(\Delta z)}=(-1)^n$$

因此 z_0 是该函数的一阶极点。

例2 求函数 $f(z)=1/\sin z-1/z$ 的奇点.

由上题知：$z_0=n\pi$ ($n=0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$) 是该函数的一阶极点，虽然在这些点上 $1/z$ 解析。在$z=0$，

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{1}{\sin z}-\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z-\sin z}{z\sin z}$$

$$=\lim_{z\to 0}\frac{z^3/3!-z^5/5!+\ldots}{z(z-z^3/3!+z^5/5!+\ldots)}=0$$

因此$z=0$是可去奇点。

例3 $z=0$是函数 $e^{1/z}$ 的本性奇点，在 $0<z<\infty$ 的环域内，它的 Laurent 级数为

$$e^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\ldots.$$

当 (1) z 沿正实轴$\to 0$ 时，$1/z\to\infty$, 故 $e^{1/z}\to\infty$;
(2) z 沿负实轴$\to 0$ 时，$1/z\to-\infty$, 故 $e^{1/z}\to 0$;
(3) z 沿虚轴，按$i/(2\pi n)\to 0$ 时，$e^{1/z}\to 1$;
因此：$z\to 0$ 时极限不存在!

由函数的图形,可以清楚看出: z 沿不同方向$\to 0$时, 函数的形态.

❑无限远点的解析性质

无限远点$z=\infty$孤立奇点

若存在$R>0$, $f(z)$在$R<|z|<\infty$内解析，即在∞点某邻域内除∞外，再无其它奇点，则称$z=\infty$为$f(z)$的孤立奇点，否则为非孤立奇点

例1 函数 $z^2, e^z, \sin z, \cos z$ 以∞为孤立奇点!

例2 函数 $f(z)=1/[e^z+1]$ 的奇点

$$z_k=(2k+1)\mathrm{i}\pi \quad (k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

在$z=\infty$邻域，除∞外，还有许多奇点（当$k\to\infty$）

—因此是非孤立奇点

无限远点的解析性质

令 $t=1/z$，则$f(z)$在无穷大处的解析性质就是$f(1/t)$在t=0处的解析性质。在t=0处展成Laurent级数

$$f(z)=f\left(\frac{1}{t}\right)=\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}a_{-k}t^{-k}}+\sum_{k=0}^{\infty}a_k t^k$$

主部

即

$$f(z)=\boxed{\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k}+\sum_{k=0}^{\infty}b_{-k}z^{-k}$$

主部

因此：在无穷大处，Laurent级数的主要部分为

$$f_1(z)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k z^k$$

无穷远点是可去奇点：没有正幂次

1、 $f(z)=b_0+\frac{b_{-1}}{z}+\frac{b_{-2}}{z^2}+\dots.$

2、 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=b_0$

3、 $f(z)$在$z=\infty$的去心邻域内有界

例 $$f(z)=\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

在圆环 $2<|z|<\infty$ 内的Laurent级数为

$$f(z)=\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^{n-1}-1}{z^n}$$ ——没有正幂次。

无穷远点是*m*阶极点：包含有限个正幂次

1、 $f(z)=b_m z^m+\ldots+b_1 z+b_0+\dfrac{b_{-1}}{z}+\ldots.$

2、 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)=\infty$

3、 ***f*(*z*)在*z*=∞的去心邻域内可表示成**

$$f(z)=g(z)z^m$$

其中*g*(*z*)在*z*=∞邻域内解析。

例：*m*次多项式以*z*=∞为*m*阶极点

$$f(z)=b_m z^m+b_{m-1}z^{m-1}\ldots+b_1 z+b_0$$

无穷远点是本性奇点：包含无限个正幂次

1、 $f(z) = \dots + b_m z^m + \dots + b_1 z + b_0 + \frac{b_{-1}}{z} + \dots$

2、 $\lim\limits_{z\to\infty} f(z)$ 不存在

例: $\exp(z);\sin(z);\cos(z)$ ——Laurent展开就是|z|< ∞ 的Taylor展式

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots; \quad \sin(z) = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\cos(z) = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$ ——有无限多正幂