第7章 二阶常微分方程的级数解法

7.1 常点邻域内的级数解

Legendre函数和多项式，自然边界条件

7.2 正则奇点邻域内的级数解

Bessel方程的解, 无限远点的正则性质

7.3 非正则奇点邻域内的正则解

存在一个正则解的条件，无限远点

7.4 不存在正则解的情况：常规解

Bessel方程，发散级数，Hermite多项式

7.1 常点邻域内的级数解

二个典型的常微分方程

- **ν 阶 Bessel 方程**

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-\nu^2)y=0$$

- **l 阶Legendre 方程**

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0$$

问题关键：变系数方程——求解析解的困难，解的特性如何?

■ 复数域的标准形式

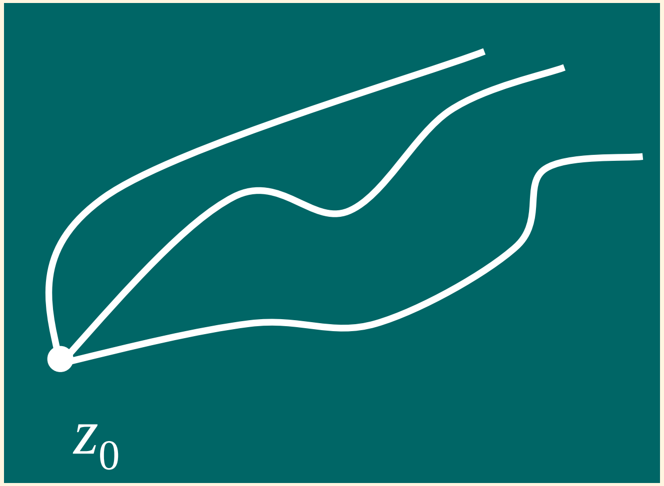
$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0$$

其中，*p*(*z*) 和 *q*(*z*) 为方程的系数，是已知的复变函数。

❑初值问题

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0$$

$$w(z_0)=c_0,\ w'(z_0)=c_1$$



求某区域方程的解 $w(z)$

❑ 边值问题

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}x^2}+p(x)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}+q(x)w=f(x), x\in(x_1,x_2)$$

$$\boldsymbol{B}_1 w|_{x=x_1}=c_1;\ \ \boldsymbol{B}_2 w|_{x=x_2}=c_2$$

边界条件：线性、非线性、一端关联、二端关联，周期边界条件,……

❑ 本征值问题(矩阵、线性微分、积分算子)

$$\boldsymbol{L}w(x)=\lambda w(x), x\in(x_1,x_2)$$

$$\boldsymbol{B}_1 w|_{x=x_1}=0;\ \boldsymbol{B}_2 w|_{x=x_2}=0$$

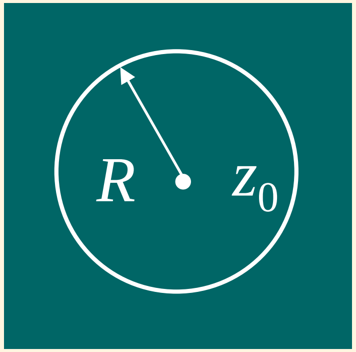
同时决定非零解 $w(x)$ 和本征值 λ

方程解 w 的解析性质
完全由 p 和 q 的解析性质决定

- **方程的常点：** 系数 $p(z)$和$q(z)$ 都在 z_0点及其邻域内解析，则 z_0点称为方程的常点
- **方程的奇点：** 系数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 只要有一个在z_0点不解析，则 z_0点称为方程的奇点

在常点 z_0 的邻域 $|z-z_0|<R$内，$w(z)$ 是解析函数，故可展开成Taylor 级数

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$



只要求出系数 a_k，方程的解即求得，而且容易的决定系数 a_k的递推关系。

一般系数的奇点可能是解的奇点，甚至是支点!

■一阶方程例子

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0 \Leftarrow q(z)=\sum_{-\infty}^{\infty} q_n (z-z_0)$$

环内解析

$$w(z)=\exp\left[-\int q(z)\mathrm{d}z\right]=\exp\left[-\int \sum_{-\infty}^{\infty} q_n (z-z_0)\mathrm{d}z\right]$$

$$=C\exp\left[-q_{-1}\int\frac{\mathrm{d}z}{z-z_0}-\sum_{n=0}^{\infty} q_n\int (z-z_0)^n \mathrm{d}z-\sum_{n=2}^{\infty} q_{-n}\int (z-z_0)^{-n}\mathrm{d}z\right]$$

$$=C\exp\left[-q_{-1}\ln(z-z_0)-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{-n-1}}{n}(z-z_0)^{-n}\right]$$

$$=C\boxed{(z-z_0)^{-q_{-1}}}\exp\left[\boxed{-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{q_n}{n+1}(z-z_0)^{n+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{q_{-n-1}}{n}(z-z_0)^{-n}}\right]$$

由q_{-1}决定奇性

❑Legendre 方程的级数解

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0$$

因

$$p(x)=-\frac{2x}{1-x^2},\ q(x)=\frac{l(l+1)}{1-x^2}$$

当 x=0时, $p(x)$和$q(x)$有限，因此是方程的常点

注意：当 $x=\pm 1$, $p(x)$, $q(x)$为无限大
因此 $x=\pm 1$是 Legendre 方程的奇点

在 x=0邻域 |x-0|<1内，Taylor 级数为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k$$

代入 Legendre 方程

$$(1-x^2)\sum_{k=2}^{\infty}c_k k(k-1)x^{k-2}-2x\sum_{k=1}^{\infty}c_k kx^{k-1}+l(l+1)\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^k=0$$

合并后

$$\sum_{k=0}^{\infty}\{(k+2)(k+1)c_{k+2}-[k(k+1)-l(l+1)]c_k\}x^k=0$$

因此,系数的递推关系为

$$c_{k+2}=\frac{k(k+1)-l(l+1)}{(k+2)(k+1)}c_k,\ (k=0,1,2,\ldots)$$

可见

① 从c_0可递推出 $c_2, c_4,\ldots,c_{2k},\ldots$ 即系数指标是偶数的项;

② 从c_1可递推出 $c_3, c_5,\ldots,c_{2k+1},\ldots$ 即系数指标是奇数的项

因此, Legendre 方程的通解可表示为

$$y(x)=c_0y_0(x)+c_1y_1(x)$$

❑级数的收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+2}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(k+2)(k+1)}{k(k+1)-l(l+1)}\right|=1$$

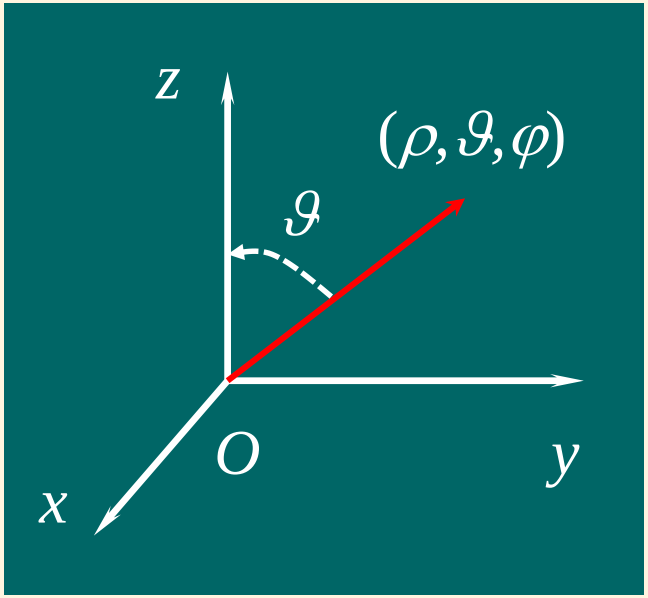
因为 $x=\pm1$ 是离$x=0$ 最近的奇点, 因此级数的收敛半径 $R=1$

■ 问题

在 $x=\pm 1$(即极角为$\vartheta=0$和$\vartheta=\pi$)端点，级数的收敛性如何?

■ 事实上

对任意的常数l, $y_0(x)$和 $y_1(x)$在$x=\pm 1$是发散的级数，而且不存在$x=\pm 1$二点同时收敛的无限级数解满足Legendre方程



■ 注意到

系数$l(l+1)$是分离变量过程中出现的任意常数，当 l 取某些数值时，无限级数能否退化成多项式?

- $l=2n$： $y_0(x)$ 最高幂次为x^{2n}； 从x^{2n+2}项起，系数为零；无限级数退化成最高幂次为x^{2n}的多项式，从而，在$x=\pm1$有限。而此时另一个解$y_1(x)$ 仍然是无限级数并且在$x=\pm1$ 发散

$$y_0(x)\equiv P_{2n}(x)=\sum_{k=0}^{n}c_{2k}x^{2k};\ \ y_1(\pm1)\to\infty$$

- $l=2n+1$： $y_1(x)$最高幂次为x^{2n+1}；从x^{2n+3}项起，系数为零；无限级数退化成最高幂次为x^{2n+1}的多项式，从而，在$x=\pm1$有限。而此时另一个解 $y_0(x)$仍然是无限级数并且在$x=\pm1$ 发散

$$y_1(x)\equiv P_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{n}c_{2k+1}x^{2k+1};\ \ y_0(\pm1)\to\infty$$

- 因此当 $l=0$ 和正整数时，可以得到在 $x=\pm 1$ 有限的一个多项式特解——Legendre多项式;
- 二阶方程的另一个特解, 可用其它方法得到。

□ **“自然边界”条件**

如果要求物理问题在$x=1$和$x=-1$有限，那么常数l只能取零和正整数。“解在$x=\pm 1$保持有限”——这一条件使 l 只能取零和正整数，称为自然边界条件。

Legendre方程 + 自然边界条件 $\rightarrow$ 本征值问题

■Legendre 微分算子的本征值问题

$$\boldsymbol{L} \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right], x \in (-1,+1)$$

非零的
有限解

$$\boldsymbol{L}y \equiv -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right] = \lambda y, x \in (-1,+1)$$

$$y(\pm 1) < \infty; \quad \lambda = l(l+1)$$

自然边界条件: 一般在*p*(*x*)和*q*(*x*)的奇点处存在

本征函数和相应的本征值:

$$y(x) \equiv P_l(x); \lambda_l = l(l+1), \quad l = 0,1,2,\ldots$$

■当l=0时，x=±1附近解的性质

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+l(l+1)y=0$$

$$2(1\mp x)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}\mp 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\approx 0$$

$$y_1(x)\sim B;\ y_2(x)\sim C\ln(1\mp x)$$

第一个解有限

一个解是常数，另外一个解对数发散

■当l=0时的严格解

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]=0 \;\Rightarrow\; (1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=C$$

①常数C=0

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y_1}{\mathrm{d}x}=0\Rightarrow y_1(x)=B$$

②常数$C\neq 0$

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=C\Rightarrow\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}=\frac{C}{1-x^2}=C\left(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$y_2(x)=C\left(\int\frac{\mathrm{d}x}{1-x}+\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x}+C_1\right)=C\ln\frac{1+x}{1-x}+C_2$$

■当$l\neq 0$时，x=1附近的近似解

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x^2)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)y=0\Rightarrow 2\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[(1-x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right]+l(l+1)y\approx 0$$

$$\eta=1-x$$

$$\eta\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\eta^2}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\eta}+\frac{1}{2}l(l+1)y=0$$

设级数形式的解为 $y\approx a+b\eta+c\eta^2$

$$\left[b+\frac{1}{2}l(l+1)a\right]+\left[4c+\frac{1}{2}l(l+1)b\right]\eta\approx 0$$

$$b\approx-\frac{1}{2}l(l+1)a;\quad c\approx\frac{1}{16}[l(l+1)]^2a$$

$$y_1(\eta) \approx a\left[1-\frac{1}{2}l(l+1)\eta+\frac{1}{16}[l(l+1)]^2\eta^2\right]$$

第二个解：Wronskian行列式方法(见下页)

$$y_2(\eta)=Ay_1(\eta)\int^{\eta}\frac{1}{y_1^2(\eta')}\exp\left[-\int^{\eta'}\frac{1}{t}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}\eta'$$

$$=Ay_1(\eta)\int^{\eta}\frac{1}{\eta' y_1^2(\eta')}\mathrm{d}\eta'$$

在η' =0附近，分母上可作近似 $y_1^2(\eta')\approx a^2$

$$y_2(\eta)\approx\frac{A}{a^2}y_1(\eta)\int^{\eta}\frac{1}{\eta'}\mathrm{d}\eta'=A_1 y_1(\eta)\ln\eta$$

$$y_2(x)\approx A_1 y_1(x)\ln(1-x)$$

可见:对数发散
对$l\neq 0$ 也成立

$$y_1(x)\approx a\left[1-\frac{1}{2}l(l+1)(1-x)+\frac{1}{16}[l(l+1)]^2(1-x)^2\right]$$

■Wronskian行列式法求第二个解

$$\frac{d^2y}{dz^2}+p(z)\frac{dy}{dz}+q(z)y=0$$

的二个解 $y_1(x), y_2(x)$ **，Wronskian行列式**

$$W(z)=\begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) \end{vmatrix}=y_1(z)y_2'(z)-y_2(z)y_1'(z)$$

$$y_2\left[\frac{d^2y_1}{dz^2}+p(z)y_1'(z)+q(z)y_1\right]=0$$

$$y_1\left[\frac{d^2y_2}{dz^2}+p(z)y_2'(z)+q(z)y_2\right]=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{dW}{dz}-p(z)W(z)=0$$

$$W(z)=W(c)\exp\left[-\int_c^z p(t)dt\right]$$

$$\frac{y_1(z)y_2'(z)}{y_1^2(z)}-\frac{y_2(z)y_1'(z)}{y_1^2(z)}=\frac{W(c)}{y_1^2(z)}\exp\left[-\int_c^z p(t)\mathrm{d}t\right]$$

$$\left[\frac{y_2(z)}{y_1(z)}\right]'=\frac{W(c)}{y_1^2(z)}\exp\left[-\int_c^z p(t)\mathrm{d}t\right]$$

$c_1=0$

$$y_2(z)=y_1(z)\left[c_1+W(c)\int_\alpha^z\frac{1}{y_1^2(z')}\exp\left[-\int_c^{z'} p(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z'\right]$$

$$y_2(z)=Ay_1(z)\int^z\frac{1}{y_1^2(z')}\exp\left[-\int^{z'} p(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z'$$

——已知道一个解，求另外一个解

■Legendre 方程的另外一个解

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}z^2}-\frac{2z}{1-z^2}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+\frac{\nu(\nu+1)}{1-z^2}y=0$$

已知一个解$P_\nu(z)$——第一类Legendre函数，求第二类Legendre函数

$$Q_\nu(z)=KP_\nu(z)\int_\alpha^z\frac{1}{P_\nu^2(z')}\exp\left[\int_0^{z'}\frac{2t}{1-t^2}\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z'$$

$$=A_\nu P_\nu(z)\int_\alpha^z\frac{\mathrm{d}z'}{(1-z'^2)P_\nu^2(z')}$$

■Legendre方程解总结

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\nu(\nu+1)y=0$$

通解

$$y(x)=aP_\nu(x)+bQ_\nu(x)$$

——第一、二类Legendre函数

■ **定义域：$x\in[-1,1]$; $x=\cos\vartheta$, $\vartheta\in[0,\pi]$**

要求$x=\pm1$处同时有限，ν=正整数$l=0,1,2,\ldots$

$P_\nu(x)=P_l(x)$ **——Legendre多项式**

$Q_\nu(x)=Q_l(x)$ **——第二类Legendre函数**

- **定义域：** $x\in[a,1]$; $x=\cos\vartheta$, $\vartheta\in[0,\alpha]$; $a>-1$

在x=1处存在一个有限解：$P_\nu(x)$

——第一类Legendre函数，不是多项式

第二类Legendre函数 $Q_\nu(x)$ 在x=1处仍然发散

- **定义域：** $x\in[a,b]$; $x=\cos\vartheta$, $\vartheta\in[\beta,\alpha]$; $a>-1$, $b<1$

物理问题不包含奇点——第一、二类Legendre函数

7.2 正则奇点邻域内的级数解

一般情形

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

如果 z_0 是 $p(z)$和 $q(z)$的奇点，一般也是方程的奇点(一般是分支点)。在 z_0 点邻域的级数解应该是 Laurent 展开。

比较简单的情况：z_0是方程的正则奇点

定义：如果在奇点 z_0 的邻域 $0<|z-z_0|<R$ 内，方程的二个线性独立解都只有有限个负幂项，则奇点 z_0 称为方程的正则奇点。

■ 正则奇点：存在级数系数的递推公式,容易计算

■ 一般奇点：级数的系数是无限联立的代数方程，无系数的递推公式

□ 解的存在性定理

z_0 是正则奇点的充要条件是: $(z-z_0)p(z)$ 和 $(z-z_0)^2q(z)$ 在 $0<|z-z_0|<R$ 内解析，即: z_0 至多是 $p(z)$ 的一阶极点,且至多是$q(z)$ 的二阶极点

$$p(z)=\sum_{k=-1}^{\infty}p_k(z-z_0)^k;\quad q(z)=\sum_{k=-2}^{\infty}q_k(z-z_0)^k$$

这时方程的二个线性独立解(称为正则解)为

- 如果$s_1-s_2\neq$整数

$$w_1(z)=(z-z_0)^{s_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$w_2(z)=(z-z_0)^{s_2}\sum_{k=0}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

- 如果$s_1-s_2=$整数(包括 0和正整数)

有可能
$A=0$

$$w_1(z)=(z-z_0)^{s_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$w_2(z)=Aw_1(z)\ln(z-z_0)+\sum_{k=0}^{\infty}c_k(z-z_0)^{s_2+k}$$

其中 s_1 和 s_2 是判定方程的二个根（且假定$s_1>s_2$ ）

$$s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0$$

■例子 正则奇点

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0$$

$$p(z)=\sum_{k=-1}^{\infty}p_k(z-z_0)^k;\ q(z)=\sum_{k=-2}^{\infty}q_k(z-z_0)^k$$

— z_0 是 $p(z)$ 的一阶极点, $q(z)$ 的二阶极点 $(q_{-2}\neq 0)$

在奇点附近，Euler方程

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p_{-1}(z-z_0)^{-1}\frac{dw}{dz}+q_{-2}(z-z_0)^{-2}w\approx 0$$

⇓

$$w(z)=(z-z_0)^{\alpha}$$

$$w'(z)=\alpha(z-z_0)^{\alpha-1};w''(z)=\alpha(\alpha-1)(z-z_0)^{\alpha-2}$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha(\alpha-1)(z-z_0)^{\alpha-2}+p_{-1}\alpha(z-z_0)^{\alpha-2}+q_{-2}(z-z_0)^{\alpha-2}\approx 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha(\alpha-1)+p_{-1}\alpha+q_{-2}\approx 0\Rightarrow\alpha^2+(p_{-1}-1)\alpha+q_{-2}\approx 0$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha_{1,2}=\frac{1}{2}\left[-(p_{-1}-1)\pm\sqrt{(p_{-1}-1)^2-4q_{-2}}\right]$$

■**二个根不同：二个线性独立解**

$$w(z)\approx C_1(z-z_0)^{\alpha_1}+C_2(z-z_0)^{\alpha_2}$$

■二个根相同：得到一个解

$$w_1(z) = C_1 (z - z_0)^{\alpha}$$

$$2\alpha = (1 - p_{-1})$$

$$(p_{-1} - 1)^2 - 4q_{-2} = 0$$

另外一个解

$$w_2(z) = A w_1(z) \left\{ \int^z \frac{1}{w_1^2(z')} \exp\left[-\int_c^{z'} p_{-1}(t - z_0)^{-1} \mathrm{d}t \right] \mathrm{d}z' \right\}$$

$$= A w_1(z) \left[\int^z \left(\frac{z' - z_0}{c - z_0} \right)^{-p_{-1} - 2\alpha} \mathrm{d}z' \right] \Leftarrow -2\alpha = p_{-1} - 1$$

$$= A w_1(z) \left[\int^z \left(\frac{z' - z_0}{c - z_0} \right)^{-1} \mathrm{d}z' \right] = C_2 (z - z_0)^{\alpha} \ln(z - z_0)$$

□ 求正则解的步骤（设z_0=0）

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+z^2 p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+z^2 q(z)w=0$$

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{k+s};\ p(z)=\sum_{k=-1}^{\infty}p_k z^k,\ \ q(z)=\sum_{k=-2}^{\infty}q_k z^k$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+s)(k+s-1)z^{k+s}+z\sum_{k=-1}^{\infty}p_k z^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+s)z^{k+s}$$
$$+z^2\sum_{k=-2}^{\infty}q_k z^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{k+s}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (k+s)(k+s-1) z^k + \sum_{l,m=0}^{\infty} (m+s) a_m p_{-1+l} z^{m+l}$$

$$+ \sum_{l,m=0}^{\infty} a_m q_{-2+l} z^{m+l} = 0$$

$$\boxed{m+l=k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (s+k)(s+k-1) a_k z^k$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \sum_{l=0}^{k} \left[(k-l+s) p_{-1+l} + q_{-2+l} \right] a_{k-l} \right\} z^k = 0$$

- z^0系数为零得到

$$s(s-1)+sp_{-1}+q_{-2}=0$$

——指标方程：二个根s_1和s_2，设$\mathrm{Re}(s_1)>\mathrm{Re}(s_2)$

$$w_1(z)=z^{s_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k;\ w_2(z)=z^{s_2}\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$$

- z^k系数为零得到

$$\boxed{(s+k)(s+k-1)a_k+\sum_{l=0}^{k}\left[p_{-1+l}(s+k-l)+q_{-2+l}\right]\cdot a_{k-l}=0}$$

——根s_1和s_2分别代入得到

$$(s_1+k)(s_1+k-1)a_k+\sum_{l=0}^{k}\left[p_{-1+l}(s_1+k-l)+q_{-2+l}\right]\cdot a_{k-l}=0 \Rightarrow \{a_k^{(1)}\}$$

$$(s_2+k)(s_2+k-1)a_k+\sum_{l=0}^{k}\left[p_{-1+l}(s_2+k-l)+q_{-2+l}\right]\cdot a_{k-l}=0 \Rightarrow \{a_k^{(2)}\}$$

■二套系数对应方程的二个解

$$w_1(z)=z^{s_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(1)}z^k;\quad w_2(z)=z^{s_2}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(2)}z^k$$

■二个解是否线性独立?

■ **$s_1-s_2=0$**

$$a_k^{(1)}=ca_k^{(2)}$$

——二个解仅仅相差一个常数c，不独立

$s_1-s_2\neq$整数（包括0）

当$z\to0$时

$$w_1(z)\to a_0^{(1)}z^{s_1};w_2(z)\to a_0^{(2)}z^{s_2}$$

$s_1-s_2=m$整数（包括0和正整数）

$$(s_1+k)(s_1+k-1)a_k+\sum_{l=0}^{k}[p_{-1+l}(s_1+k-l)+q_{-2+l}]\cdot a_{k-l}=0 \Rightarrow \{a_k^{(1)}\}$$

$$\Downarrow$$

$$w_1(z)=z^{s_1}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{(1)}z^k \Leftarrow \boxed{\text{一定能得到一个解}}$$

分析第二个解：看第m项（令$k=m$）

$$(s_2+m)(s_2+m-1)a_m^{(2)}+\sum_{l=0}^{m}[p_{-1+l}(s_2+m-l)+q_{-2+l}]\cdot a_{m-l}^{(2)}=0$$

$s_1-s_2=m$

$$s_1(s_1-1)a_m^{(2)}+\sum_{l=0}^{m}[p_{-l+l}(s_1-l)+q_{-2+l}]\cdot a_{m-l}^{(2)}=0$$

$$[s_1(s_1-1)+p_{-1}s_1+q_{-2}]a_m^{(2)}+\sum_{l=1}^{m}[p_{-l+l}(s_1-l)+q_{-2+l}]\cdot a_{m-l}^{(2)}=0$$

$$s_1(s_1-1)+s_1p_{-1}+q_{-2}=0 \Rightarrow a_m^{(2)}\to\infty$$

除非

$$\sum_{l=1}^{m}[p_{-1+l}(s_1-l)+q_{-2+l}]\cdot a_{m-l}^{(2)}=0 \Rightarrow a_m^{(2)}=\text{任意}$$

另外一个解

$$w_2(z)=Cw_1(z)\left[\int^z \frac{1}{w_1^2(z')}\exp\left[-\int^{z'} p_{-1}t^{-1}\mathrm{d}t-\int^{z'}\sum_{k=0}^{\infty}p_k t^k \mathrm{d}t\right]\mathrm{d}z'\right]$$

$$=Cw_1(z)\left[\int^z \frac{1}{w_1^2(z')}\exp\left[-p_{-1}\ln z'-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k}{k+1}z'^{k+1}\right]\mathrm{d}z'\right]$$

$$=Cw_1(z)\left[\int^z (z')^{-p_{-1}-2s_1}\frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k z'^k\right)^2}\exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k}{k+1}z'^{k+1}\right)\mathrm{d}z'\right]$$

- **如果$s_1-s_2=0$**

$$s_{1,2}=\frac{1}{2}\left[(1-p_{-1})\pm\sqrt{(1-p_{-1})^2-4q_{-2}}\right]$$

$$2s_1=(1-p_{-1})\Rightarrow -p_{-1}-2s_1=-1$$

$$w_2(z)=Cw_1(z)\left[\int^z (z')^{-1}\boxed{\frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{\infty}a_k z'^k\right)^2}\exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{p_k}{k+1}z'^{k+1}\right)\mathrm{d}z'}\right]$$

解析函数

$$=Cw_1(z)\left[\int^z (z')^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}a'_k z'^k\mathrm{d}z'\right]=Cw_1(z)\left[a'_0\int^z (z')^{-1}\mathrm{d}z'+\int^z\sum_{k=1}^{\infty}a'_k z'^k\mathrm{d}z'\right]$$

$$=Cw_1(z)\left[a'_0\ln z+\int^z\sum_{k=1}^{\infty}a'_k z'^k\mathrm{d}z'\right]$$

解析函数

$$=Aw_1(z)\ln z+\left[z^{s_1}\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k\int^z\sum_{k=1}^{\infty}a'_k z'^k\mathrm{d}z'}\right]=Aw_1(z)\ln z+z^{s_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$$

$$w_2(z)=Aw_1(z)\ln z+z^{s_1}\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^k$$

■ 如果$s_1 = s_2 + m$

$$s_1 + s_2 = (1 - p_{-1});\quad s_1 - s_2 = m$$

$$2s_1 = (1 - p_{-1}) + m \Rightarrow p_{-1} + 2s_1 = 1 + m$$

$$w_2(z) = Cw_1(z)\left[\int^z (z')^{-p_{-1}-2s_1} \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z'^k\right)^2} \exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} z'^{k+1}\right) \mathrm{d}z'\right]$$

$$= Cw_1(z)\left[\int^z (z')^{-(1+m)} \frac{1}{\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k z'^k\right)^2} \exp\left(-\sum_{k=0}^{\infty} \frac{p_k}{k+1} z'^{k+1}\right) \mathrm{d}z'\right]$$

$$= Cw_1(z)\left[\int^z (z')^{-(1+m)} \sum_{k=0}^{\infty} a'_k z'^k\right]$$

$$w_2(z) = Cw_1(z)\left[\int^z (z')^{-(1+m)}\left(\sum_{k=0}^{m-1} a'_k z'^k + a'_m z'^m + \sum_{k=m+1}^{\infty} a'_k z'^k\right)dz'\right]$$

$$= Cw_1(z)\left[\int^z \left(a'_m z'^{-1} + \sum_{k=0;k\neq m}^{\infty} a'_k z'^{k-(1+m)}\right)dz'\right]$$

$$= Cw_1(z)\left[a'_m \ln z + \int^z \sum_{k=0;k\neq m}^{\infty} a'_k z'^{k-(1+m)} dz'\right]$$

$$= Aw_1(z)\ln z + Cw_1(z) z^{-m}\left(a'_{m+1} z + \sum_{k=0;k\neq m;m+1}^{\infty} \frac{a'_k}{k-(1+m)} z^k\right)$$

$$= Aw_1(z)\ln z + Cz^{s_1-m}\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \left(a'_{m+1} z + \sum_{k=0;k\neq m;m+1}^{\infty} \frac{a'_k}{k-(1+m)} z^k\right)}$$

解析函数

$$= Aw_1(z)\ln z + z^{s_2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

$$w_2(z) = Aw_1(z)\ln z + z^{s_2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$$

□ Legendre 方程—x=1展开解

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\lambda(\lambda+1)y=0$$

$$p(x)=-\frac{2x}{1-x^2},\ q(x)=\frac{\lambda(\lambda+1)}{1-x^2}$$

奇点x=1，$p(x), q(x)$ ——一阶奇点，以正则奇点

x=1为展开中心的解为

$$y(x)=(x-1)^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n$$

$$-(x-1)(x-1+2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-2(x-1+1)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\lambda(\lambda+1)y=0$$

$$\Updownarrow$$

$$\boxed{y(x)=(x-1)^{\rho}\sum_{n=0}^{\infty}c_n(x-1)^n}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}c_n[-(n+\rho)(n+\rho-1)-2(n+\rho)+\lambda(\lambda+1)](x-1)^{n+\rho}$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty}c_n(n+\rho)^2(x-1)^{n+\rho-1}=0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n[-(n+\rho)^2-(n+\rho)+\lambda(\lambda+1)](x-1)^{n+1}$$

$$-2\sum_{n=0}^{\infty} c_n[(n+\rho)(n+\rho-1)+(n+\rho)](x-1)^n=0$$

$$(x-1)^0:\ \rho(\rho-1)+\rho=0 \Rightarrow \rho=0$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left\{c_{n-1}[-(n-1)n+\lambda(\lambda+1)]-2n^2c_n\right\}(x-1)^n=0$$

$$\Downarrow$$

$$c_{n+1}=\frac{[\lambda(\lambda+1)-n(n+1)]}{2(n+1)^2}c_n$$

■ **收敛半径**

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_n}{c_{n+1}}\right|=2$$

$$P_\lambda(x)\equiv y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\frac{\Gamma(\lambda+n+1)}{\Gamma(\lambda-n+1)}\left(\frac{x-1}{2}\right)^n$$

■ **存在一个在x=1点收敛的无限级数满足Legendre方程，但$\lambda\neq l$ (正整数)**

$$y_1(x)=P_\lambda(x)$$

称为第一类Legendre函数，另外一个解：第二类Legendre 函数

$$y_2(x)=Q_\lambda(x)=P_\lambda(x)\int\frac{1}{(1-x^2)[P_\lambda(x)]^2}\mathrm{d}x$$

❑Bessel 方程的级数解

在 x=0 的邻域上求ν阶 Bessel 方程的解

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-\nu^2)y=0\ (0<x<\infty)$$

$$\Updownarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0\ (0<x<\infty)$$

注意： ν 是任意数

$$p(x)=\frac{1}{x};\ q(x)=1-\frac{\nu^2}{x^2}$$

原点x=0 是 $p(x)$ 的一阶极点，$q(x)$的二阶极点，因此 x=0 是Bessel方程的正则奇点。

■原点x=0附近的近似解

① $\nu \neq 0$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\left(1-\frac{\nu^2}{x^2}\right)y=0$$

$$\Downarrow$$

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}-\nu^2 y\approx 0 \Leftarrow$$

Euler 方程

存在幂次解 $y(x)\approx x^{\alpha}$

$$\alpha(\alpha-1)+\alpha-\nu^2\approx 0\Rightarrow \alpha^2=\nu^2\Rightarrow \alpha=\pm|\nu|$$

$$\Downarrow$$

$$y(x)\approx ax^{|\nu|}+bx^{-|\nu|}\Rightarrow y(z)\approx az^{|\nu|}+bz^{-|\nu|}$$

——z=0的奇性由ν决定: 极点或支点

② $\nu = 0$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y = 0$$

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + x^2 y = 0$$

严格方程，
取近似困难

设存在多项式近似解

$$y(x) \approx a + bx + cx^2$$

一个近似解

$$b = 0;\quad 4c + a = 0 \Rightarrow y_1(x) \approx a\left(1 - \frac{x^2}{4}\right)$$

另外一个解

$$y_2(x) = Ay_1(x)\left[\int^x \frac{1}{y_1^2(z')}\exp\left(-\int_c^{z'} t^{-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}z'\right]$$

$$y_2(x) \approx A y_1(x)\left[\int^x \frac{1}{a^2\left(1-z'^2/4\right)^2}\exp\left(-\int_c^{z'} t^{-1}\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}z'\right]$$

$$\approx \frac{A}{a^2} y_1(x)\left[\int^x \exp(-\ln z')\mathrm{d}z'\right] = \frac{A}{a^2} y_1(x)\left(\int^x \frac{1}{z'}\mathrm{d}z'\right)$$

$$= \frac{A}{a}\left(1-\frac{x^2}{4}\right)\ln x \approx b\ln x$$

因此，当ν=0时，原点附近的二个近似解分别为

$$y_1(x) \approx a\left(1-\frac{x^2}{4}\right); \; y_2(x) \approx b\ln x$$

——另一个独立解对数发散?

为什么一个独立解对数发散?

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y_2}{\mathrm{d}x^2}\sim -b;\quad x\frac{\mathrm{d}y_2}{\mathrm{d}x}\sim b;\quad x^2 y\sim bx^2\ln x\to 0$$

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+x^2 y=0 \Rightarrow x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\approx 0$$

$$\frac{\mathrm{d}\ln y'}{\mathrm{d}x}\approx -\frac{1}{x}\Rightarrow y'\approx\frac{b}{x}\Leftrightarrow y(x)\approx b\ln x+c$$

——对这个近似解，Bessel方程的第3项可以近似为零

❑ $\nu \neq$ 整数(包括0)和半奇数：($s_1-s_2\neq$整数)

级数形式解

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{s+k}$$

代入Bessel方程，得到

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k (s+k)(s+k-1)x^k+\sum_{k=0}^{\infty} c_k (s+k)x^k$$

$$-\nu^2\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k+\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^{k+2}=0$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty} c_k[(s+k)^2-\nu^2]x^k+\sum_{k=2}^{\infty} c_{k-2} x^k=0}$$

(1) x^0 的系数方程

$$(s^2-\nu^2)\cdot c_0=0$$

$$s_1=\nu \quad \text{和} \quad s_2=-\nu$$

因为假定$\nu\neq$ 整数和半奇数，故

$$\boxed{s_1-s_2=2\nu\neq\text{整数}}$$

(2) x^1 的系数方程

$$[(s+1)^2-\nu^2]\cdot c_1=0 \Rightarrow c_1=0$$

(3) x^k 的系数方程

$$[(s+k)^2-\nu^2]\cdot c_k+c_{k-2}=0$$

因此, 递推公式为

$$c_k = -\frac{1}{(s+k)^2 - \nu^2} c_{k-2}$$

由于 c_1=0, 故级数所有奇数项系数为零：c_{2k+1}=0.

①当 $s=s_1=\nu$ ➡ $4k(\nu+k)\cdot c_{2k} + c_{2k-2} = 0$

$$c_{2k} = -\frac{1}{(s_1+2k)^2 - \nu^2} c_{2k-2} = -\frac{1}{2^2 k(\nu+k)} c_{2k-2} = \ldots$$

$$= (-1)^k \frac{1}{2^{2k} k!(k+\nu)(k+\nu)\cdots(1+\nu)} c_0$$

$$= (-1)^k \frac{\Gamma(1+\nu)}{2^{2k} k!\Gamma(k+1+\nu)} c_0$$

得到一个无限级数解

$$y_1(x)=c_0\Gamma(\nu+1)x^{\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

令任意常数（任意性）

$$c_0=\frac{1}{2^{\nu}\,\Gamma(\nu+1)}$$

$$\Downarrow$$

$$J_{\nu}(x)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\,\Gamma(k+1+\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

——ν 阶 Bessel 函数

②当 $s=s_2=-\nu$ ➡ $4k(k-\nu)\cdot c_{2k}+c_{2k-2}=0$

$$c_{2k}=-\frac{1}{(s_2+2k)^2-\nu^2}c_{2k-2}=-\frac{1}{2^2k(k-\nu)}c_{2k-2}=\ldots$$

$$=(-1)^k\frac{1}{2^{2k}k!(k-\nu)(k-\nu)\cdots(1-\nu)}c_0$$

$$=(-1)^k\frac{\Gamma(1-\nu)}{2^{2k}k!\Gamma(k+1-\nu)}c_0$$

得到另一个无限级数解

$$y_2(x)=c_0\Gamma(-\nu+1)x^{-\nu}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$$

令任意常数（任意性）

$$c_0 = \frac{1}{2^{\nu-}\Gamma(-\nu+1)}$$

$$J_{-\nu}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k+1-\nu)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-\nu+2k}$$

——$-\nu$阶 Bessel 函数

因此， 当$\nu \neq$整数和半奇数时， Bessel 方程的通解为

$$\boxed{y(x) = C_1 J_\nu(x) + C_2 J_{-\nu}(x)}$$

收敛半径：$J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 的收敛半径都是无限大

$$R = \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k-2}}{c_k}\right| = \infty$$

ν = 半奇数(l+1/2)： $s_1 - s_2 = 2l + 1 =$ **奇数**

① $$[(s_1+k)^2 - (l+1/2)^2]\cdot c_k + c_{k-2} = 0$$

$$4k\left(l+k+1/2\right)\cdot c_{2k} + c_{2k-2} = 0$$

$$J_{l+1/2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!\,\Gamma(k+1+l+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{l+1/2+2k}$$

② $$[(s_2+k)^2-(l+1/2)^2]\cdot c_k+c_{k-2}=0$$

$$2k[2k-(2l+1)]\cdot c_{2k}+c_{2k-2}=0$$

仅须考虑偶数项

因为2k≠2l+1 时,递推仍然可以进行下去，仍然得到另外一个独立解（注意：如果奇数项也需要递推，则递推不能进行下去，就必须用包含对数项的解。因此，这里仅是巧合，而非一般情况）

$$J_{-(l+1/2)}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+1-l-1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-(l+1/2)+2k}$$

因此，半奇数阶Bessel方程的通解仍然为

$$y(x)=C_1J_{l+1/2}(x)+C_2J_{-(l+1/2)}(x)$$

■ 半奇数 阶 Bessel 函数可用初等函数表示

$$J_{1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+3/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{1/2+2k}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin x$$

$$J_{-1/2}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{k!\Gamma(k+1/2)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-1/2+2k}=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos x$$

■ 可以证明公式

$$J_{l+1/2}(x)=(-1)^l\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{l+1/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^l\left(\frac{\sin x}{x}\right)$$

$$J_{-(l+1/2)}(x)=(-1)^l\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{l+1/2}\left(\frac{\mathrm{d}}{x\mathrm{d}x}\right)^l\left(\frac{\cos x}{x}\right)$$

❑ $\nu=$ 整数m: $s_1 - s_2 = 2m =$ 偶数

$$[(s_2+k)^2 - m^2]\cdot c_k + c_{k-2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$[(-m+k)^2 - m^2]\cdot c_k + c_{k-2} = 0$$

$$\Downarrow$$

$$4k(k-m)\cdot c_{2k} + c_{2k-2} = 0$$

奇数项系数为零仅考虑偶数

当$k=m$ 时，$c_{2m} \to \infty$，递推无法进行下去

事实上，当$\nu=$整数m时

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k!\Gamma(k+1-m)} \left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}$$

上式中，当$k+1-m$负整数时，$\Gamma \to \infty$，因此$k \geq m$

$$J_{-m}(x)=\sum_{k=m}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{k!(k-m)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}$$

$$=(-1)^m\sum_{l=0}^{\infty}(-1)^l \frac{1}{(m+l)!l!}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2l} \Leftarrow (k-m=l)$$

$$=(-1)^m J_m(x)$$

因此，当ν=整数m时，J_m和J_{-m}线性相关的，必须用含有对数项的解

$$y_2(x)=AJ_m(x)\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}c_k x^{-m+k}$$

注意：对m=0情况，$s_1=s_2=0$是重根，也必须用上述形式的解.

一般，用$J_\nu(x)$ 和 $J_{-\nu}(x)$ 线性组合成 Bessel 方程新的特解——ν阶 Neumann 函数

$$N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

为什么这样构成?

Bessel 方程的通解也可以写为

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x)$$

当$\nu\to m$时，极限存在且$N_m(x)$是m阶Bessel方程的一个独立解

$$N_m(x)\equiv\lim_{\nu\to m}N_\nu(x)=\frac{J_\nu(x)\cos\nu\pi-J_{-\nu}(x)}{\sin\nu\pi}$$

Bessel 方程解总结

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-\nu^2)y=0$$

- $\nu\neq$ 整数

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2J_{-\nu}(x)$$

- $\nu=$整数m(包括0)

$$y(x)=C_1J_m(x)+C_2N_m(x)$$

- 不管 ν 是何数，总成立

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x)$$

- $\nu=$半奇数，可用初等函数表示

无限远点奇点的正则性

令$z=1/t$

$$\frac{d^2w}{dz^2}+p(z)\frac{dw}{dz}+q(z)w=0$$

$$\frac{d^2w}{dt^2}+\left[\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}p\left(\frac{1}{t}\right)\right]\frac{dw}{dt}+\frac{1}{t^4}q\left(\frac{1}{t}\right)w=0$$

- **t=0或者z=∞为常点条件**

条件很苛刻

$$p\left(\frac{1}{t}\right)=2t+a_2t^2+\dots \Rightarrow p(z)=\boxed{\frac{2}{z}}+a_2\left(\frac{1}{z}\right)^2+\dots$$

$$q\left(\frac{1}{t}\right)=b_4t^4+b_5t^5+\ldots \Rightarrow q(z)=b_4\left(\frac{1}{z}\right)^4+b_5\left(\frac{1}{z}\right)^5+\ldots$$

- **t=0或者z=∞为正则奇点条件**

$$p^*(t)=\frac{2}{t}-\frac{1}{t^2}p\left(\frac{1}{t}\right)$$ ——**为t=0的一阶奇点**

$$q^*(t)=\frac{1}{t^4}q\left(\frac{1}{t}\right)$$ ——**为t=0的二阶奇点**

即要求

$$\frac{1}{t}p\left(\frac{1}{t}\right)=zp(z);\frac{1}{t^2}q\left(\frac{1}{t}\right)=z^2q(z)$$ ——**z=∞解析**

例1 Bessel方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y=0$$

$$p(z)=\frac{1}{z};\ q(z)=1-\frac{\nu^2}{z^2}$$

——z=0是正则奇点；无限远点是非正则奇点

例2 量子力学中谐振子

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+(\lambda-z^2)w=0 \Rightarrow p(z)=0;\ q(z)=\lambda-z^2$$

——z=0是常点；无限远点是非正则奇点

7.3 非正则奇点邻域内的正则解

方程的非正则奇点z_0 ⟹ 解的本性奇点或支点.

在环域$0<|z-z_0|<R$**，需作Laurent 展开**

$$w_1(z)=(z-z_0)^{s_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$w_2(z)=(z-z_0)^{s_2}\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^k$$

无限多项负幂次

或者

$$w_1(z)=(z-z_0)^{s_1}\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$$

$$w_2(z)=Aw_1(z)\ln(z-z_0)+\sum_{k=-\infty}^{\infty}b_k(z-z_0)^{s_2+k}$$

具体证明忽略

- 如果z_0是正则奇点，存在二个正则解
- 如果z_0是非正则奇点z_0，则至多存在一个正则解——条件是什么?

奇点z_0是极点情况：存在必要条件

奇点是本性奇点和支点：无一般结论

设非正则奇点z_0是极点

$$p(z)=(z-z_0)^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}p_k(z-z_0)^k$$

$$q(z)=(z-z_0)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}q_k(z-z_0)^k$$

***m*>1 或 *n*>2, 否则就是正则奇点或者常点**

■ 假定非正则奇点是原点

$$w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{k+s};\ p(z)=z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k,\quad q(z)=z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}q_k z^k$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+s)(k+s-1)z^{k-2}+z^{-m}\sum_{k=0}^{\infty}p_k z^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_k(k+s)z^{k-1}$$

$$+z^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}q_k z^k\cdot\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k=0$$

三项求和的最低次幂(k=0)

$$a_0 s(s-1)z^{-2} + p_0 a_0 s z^{-(1+m)} + q_0 a_0 z^{-n}$$

(1)如果 m>1, n<m+1, 则第2项幂次最低

$$p_0 a_0 s = 0 \Rightarrow s = 0$$

(2)如果, m>1, n>m+1, 则第3项幂次最低

$q_0 a_0 = 0$ ——**无法给出指标**

(3)如果m>1 , n=m+1, 则第2和3项合并后幂次最低

$$(p_0 s + q_0)a_0 = 0 \Rightarrow s = -q_0 / p_0$$

只有情况(1)和(3)给出一个指标，即给出一个正则解

结论：存在一个正则解的必要条件

$$\boxed{m>1,\quad n\leq m+1}$$

——具体求解与正则奇点类似

■无限远非正则奇点邻域内的正则解

一般无限远点是方程的非正则奇点。原则上，令$t=1/z$，讨论$z=0$点即可，有时直接讨论无限远点

设$z=\infty$是方程的极点型非正则奇点

$$p(z)=z^{m}\left(a_0+\frac{a_1}{z}+....\right);\quad q(z)=z^{n}\left(b_0+\frac{b_1}{z}+....\right)$$

其中：$m>-1$或$n>-2$, 否则$z=\infty$就是正则奇点或常点

设方程存在一个正则解

$$w(z)=z^{s}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{z^k},\quad (c_0\neq 0) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=z^{s}\left\{\sum_{k=0}^{\infty}c_k(s-k)(s-k-1)z^{-k-2}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{m-k}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k(s-k)z^{-k-1}+\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^{n-k}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}c_k z^{-k}\right\}$$

$$=z^{s}\left\{\boxed{\begin{array}{l}[c_0 s(s-1)z^{-2}+\ldots+[a_0 c_0 s z^{m-1}+\ldots]\\ +[b_0 c_0 z^{n}\ +\ldots]+\ldots.\end{array}}\right\}=0$$

第一项:最高次幂

三项求和的最高次幂(k=0)

$$c_0 s(s-1)z^{-2} + a_0 c_0 s z^{m-1} + b_0 c_0 z^n$$

(1)如果 $m > -1,\ m-1 > n$, 则第2项幂次最高

$$a_0 c_0 s = 0 \Rightarrow s = 0$$

(2)如果 $m > -1,\ m-1 < n$, 则第3项幂次最高

$$b_0 c_0 = 0 \quad \text{——无法给出指标}$$

(3)如果 $m > -1,\ m-1 = n$, 第2和3项合并后幂次最低

$$(a_0 s + b_0)c_0 = 0 \Rightarrow s = -b_0 / a_0$$

只有情况(1)和(3)给出一个指标，即给出一个正则解

结论：极点型无限远非正则奇点邻域内存在一个正则解的必要条件是

$$m > n+1, m > -1$$

即：p(z)的阶必须高于q(z)的阶！

特殊情况

1、 $q(z) \equiv 0$ $\quad b_0 = 0$ ➡ $\dfrac{d^2w}{dz^2} + p(z)\dfrac{dw}{dz} = 0$ ➡ **一阶方程容易求解**

2、 $p(z) \equiv 0$ $\quad a_0 = 0$ ➡ $\dfrac{d^2w}{dz^2} + q(z)w = 0$ ➡ **无正则解**

最高幂 z^n ➡ $b_0 c_0 = 0$

7.4 不存在正则解的情况:常规解

❑常规解

$$\frac{d^2 w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)w = 0$$

在非正则奇点z_0邻域不存在正则解：该奇点是解的本性奇点或支点。

实用的方法是求下列形式的解：称为**常规解**

$$w(z) = e^{Q(z)} v(z)$$

用$e^{Q(z)}$表示解的部分奇性

其中，$v(z)$具有正则解的形式

$$v(z) = (z - z_0)^{\rho} \sum_{k=0}^{\infty} c_k (z - z_0)^k$$

■ **设方程的常规解为**

$$w(z)=e^{Q(z)}v(z)$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}z^2}+p^*(z)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+q^*(z)v=0$$

$$p^*(z)=p(z)+2Q'(z)$$

$$q^*(z)=q(z)+p(z)Q'(z)+Q''(z)+[Q'(z)]^2$$

——对无限远非正则奇点，$p^*(z)$ 的阶必须高于 $q^*(z)$ 的阶

一般：根据无穷远的特性决定Q(z)的形式！

例1 Bessel方程在无穷远点的一个正则解

$$\frac{d^2y}{dz^2}+\frac{1}{z}\frac{dy}{dz}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y=0$$

$$p(z)=z^{-1};\ q(z)=z^0\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)\Rightarrow m=-1<0;n=0$$

——无限远点是非正则奇点且无正则解

设常规解： $y(z)=e^{Q(z)}v(z)$

Bessel方程在无限远处的奇性大致为

$$\frac{d^2y}{dz^2}+y\approx 0\Rightarrow y(z)\sim\exp(\pm iz) \Rightarrow Q(z)=\pm iz$$

因此，尝试取无穷远处常规解为 $y(z)=e^{\pm\mathrm{i}z}v(z)$

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}z^2}+\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}+\left(1-\frac{\nu^2}{z^2}\right)y=0$$

$$\Downarrow$$

$$v''(z)+\left(2\lambda+\frac{1}{z}\right)v'(z)+\left(\frac{\lambda}{z}-\frac{\nu^2}{z^2}\right)v(z)=0$$

$$(\lambda\equiv\pm\mathrm{i})$$

$$p^*(z)=2\lambda+\frac{1}{z}\Rightarrow z^0\left(2\lambda+\frac{1}{z}\right)\Rightarrow m=0$$

$$q^*(z)=\frac{\lambda}{z}-\frac{\nu^2}{z^2}\Rightarrow z^{-1}\left(\lambda-\frac{\nu^2}{z}\right)\Rightarrow n=-1$$

——无限远点是非正则奇点，但有一个正则解

正则解 $$v(z)=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{-k},\ (a_0\neq 0)$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}[(\rho-k+2)(\rho-k+1)+(\rho-k+2)-\nu^2]a_{k-2}z^{-k}$$

$$+\lambda\sum_{k=1}^{\infty}[2(\rho-k+1)+1]a_{k-1}z^{-k}\ =0$$

最高次幂(k=1)系数为零

$$2\rho+1=0 \Rightarrow \rho=-\frac{1}{2}$$

正则解大致为

$$v(z)=\frac{a_0}{\sqrt{z}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{a_0}z^{-k}\right)$$

■因此，Bessel方程在无穷远邻域的解为

$$y(z)=\frac{a_0 e^{\pm iz}}{\sqrt{z}}\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{a_0}z^{-k}\right)$$

系数较复杂，忽略

■级数的收敛性质

$$[(\rho-k+2)(\rho-k+1)+(\rho-k+2)-\nu^2]a_{k-2}$$
$$=\lambda[2(\rho-k+1)+1]a_{k-1}$$

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k-2}}{a_{k-1}}=\frac{\lambda[2(\rho-k+1)+1]}{[(\rho-k+2)(\rho-k+1)+(\rho-k+2)-\nu^2]}=0$$

——发散级数的意义，Bessel函数的渐近表达式

例2 量子力学中谐振子方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+(\lambda-z^2)w=0$$

$z=\infty$是非正则奇点，$p(z)\equiv 0$，不存在正则解

$z\to\infty$，方程近似为

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}\approx z^2 w \quad \Rightarrow \quad w\to\exp\left(\pm\frac{1}{2}z^2\right)$$

取常规解

$$w(z)=\exp\left(\pm\frac{1}{2}z^2\right)v(z)$$

$$\frac{d^2v}{dz^2}\pm 2z\frac{dv}{dz}+(\lambda\pm 1)v=0 \Rightarrow \boxed{\begin{array}{c} p^*(z)=\pm 2z \\ q^*=\lambda\pm 1 \end{array}}$$

——Herimte 方程

无穷远点满足存在一个正则解的条件

物理要求，取

$$w(z)=\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$$

□ 在无穷远点展开的正则解

$$v(z)=z^{\rho}\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^{-k},\ (a_0\neq 0)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}(\rho-k)(\rho-k-1)a_k z^{-k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}[-2(\rho-k)+(\lambda-1)]a_k z^{-k}=0$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}\{(\rho-k+2)(\rho-k+1)a_{k-2}+[-2(\rho-k)+(\lambda-1)]a_k\}z^{-k}$$

$$+[-2(\rho-1)\ +(\lambda-1)]a_1z^{-1}+[-2\rho\ +(\lambda-1)]a_0z^0=0$$

① 由0次幂系数为零

$$-2\rho\ +(\lambda-1)=0 \Rightarrow \rho=\frac{1}{2}(\lambda-1)$$

② 由−1次幂系数为零

$$(\lambda+1)a_1=0\Rightarrow a_1=0$$

③ 由−*k*次幂系数为零, 得到递推关系

$$(\rho-k+2)(\rho-k+1)a_{k-2}-[2(\rho-k)-(\lambda-1)]a_k=0$$

$$a_k = \frac{(\rho-k+2)(\rho-k+1)}{2(\rho-k)-(\lambda-1)} a_{k-2}$$

显然

$$a_0 \Rightarrow a_2 \Rightarrow a_4 \Rightarrow .....$$

$$a_1 = 0 \Rightarrow a_3 = 0 \Rightarrow a_5 = 0 \Rightarrow ....a_{2k+1} = 0$$

- **偶数项递推关系**

$$a_{2k+2} = -\frac{(\rho-2k)(\rho-2k-1)}{4(k+1)} a_{2k}$$

- **当指标为整数*n*时**

$$\rho = \frac{1}{2}(\lambda-1) \equiv n, \ (n = 0,1,2,...)$$

①当*n*=2*m*偶数时

$$a_{2k+2}=-\frac{2(m-k)(2m-2k-1)}{4(k+1)}a_{2k}$$

***k*>*m*项的系数为零**

$$v(z)=z^{2m}\sum_{k=0}^{m}a_{2k}z^{-2k}=a_0z^{2m}+a_2z^{2m-1}+\ldots+a_m$$

②当*n*=2*m*+1奇数时

$$a_{2k+2}=-\frac{(2m+1-2k)2(m-k)}{4(k+1)}a_{2k}$$

***k*>*m*项的系数为零**

$$v(z)=z^{2m+1}\sum_{k=0}^{m}a_{2k}z^{-2k}=a_0z^{2m+1}+a_2z^{2m-1}+\ldots+a_mz$$

■ 在常点z=0展开的Taylor级数解

$$v(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k z^k$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}a_k k(k-1)z^{k-2}-\sum_{k=1}^{\infty}2a_k k z^k+\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-1)a_k z^k=0$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{j=0}^{\infty}a_{j+2}(j+2)(j+1)z^j-\sum_{k=0}^{\infty}2k a_k z^k+\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-1)a_k z^k=0$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\left[a_{k+2}(k+2)(k+1)-2k a_k+(\lambda-1)a_k\right]z^k=0}$$

■ 递推关系

$$a_{k+2}(k+2)(k+1)=(2k+1-\lambda)a_k$$

■ 级数收敛性质

$$\lim_{v\to\infty}\frac{a_{k+2}}{a_k}=\frac{2}{k}$$

□ 比较级数

$$e^{z^2}=1+z^2+\frac{z^4}{2!}+\cdots+\frac{z^k}{(k/2)!}+\frac{z^{k+2}}{(k/2+1)!}+\cdots$$

$$\lim_{k\to\infty}\frac{a_{k+2}}{a_k}=\frac{2}{k}$$

故二者有同样的收敛性，即在一般情况下

$$\lim_{z\to\infty}v(z)=\exp(z^2) \Rightarrow \lim_{z\to\infty}w(z)=\exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)v(z)=e^{z^2/2}$$

一般情况下，Hermite方程的解在$x\to\pm\infty$ 的渐近表达式为$v(x)\sim\exp(x^2)\to\infty$ ，故w发散.但当λ满足一定条件时， Hermite方程存在多项式形式的解，那么$w\to 0(x\to\pm\infty)$.

■ Hermite方程的通解

$$a_{k+2}=\frac{2k-(\lambda-1)}{(k+2)(k+1)}a_k=\frac{2k+1-\lambda}{(k+2)(k+1)}a_k$$

从$a_0\to a_2\to a_4\to\cdots$, 偶数项，对称无穷级数$v_1(z)$
从$a_1\to a_3\to a_5\to\cdots$, 奇数项，反对称无穷级数$v_2(z)$

$$v(z)=a_0v_1(z)+a_1v_2(z)$$

■ 存在多项式解的条件

$$a_{k+2}=\frac{2k-(\lambda-1)}{(k+2)(k+1)}a_k=\frac{2k+1-\lambda}{(k+2)(k+1)}a_k$$

$$\Downarrow$$

$$\lambda=2n+1,(n=1,2,3,\ldots)$$

$$\Downarrow$$

$$a_{k+2}=\frac{2k-(2n+1-1)}{(k+2)(k+1)}a_k=\frac{2(k-n)}{(k+2)(k+1)}a_k$$

① 当n是偶数，$v_1(z)$是多项式；$v_2(z)$是发散的无穷级数；

② 当n是奇数，$v_2(z)$是多项式；$v_1(z)$是发散的无穷级数。

□如果直接求解

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+(\lambda-z^2)w=0;\quad w(z)=\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^k$$

$$\sum_{k=2}^{\infty}b_k k(k-1)z^{k-2}+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda b_k z^k-\sum_{k=0}^{\infty}b_k z^{k+2}=0$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}b_{k+2}(k+2)(k+1)z^k+\sum_{k=0}^{\infty}\lambda b_k z^k-\sum_{k=2}^{\infty}b_{k-2}z^k=0$$

$$b_2(0+2)(0+1)+\lambda b_0=0$$

$$b_3(1+2)(1+1)+\lambda b_1=0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_{\nu+2}(\nu+2)(\nu+1)+\lambda b_\nu-b_{\nu-2}=0$$

无穷联立的代数方程，得不到简单的递推关系

□总结：二阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

- **常点z_0：Taylor展开**

■Legendre方程

$$(1-x^2)\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}-2x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\nu(\nu+1)y=0$$

在x=0展开

$$y(x)=aP_\nu(x)+bQ_\nu(x)$$

——第一、二类Legendre函数

要求x=±1处同时有限，ν=正整数l=0,1,2,…

$P_\nu(x)=P_l(x)$ ——Legendre多项式

$Q_\nu(x)=Q_l(x)$ ——第二类Legendre函数

- 正则奇点z_0： Laurent展开，存在二个正则解

■Bessel 方程

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-\nu^2)y=0$$

在x=0展开

$$y(x)=C_1J_\nu(x)+C_2N_\nu(x)$$

- 非正则奇点z_0：存在一个正则解的必要条件

- 常规解：如果非正则奇点z_0不满足存在一个正则解的必要条件，寻找常规解，把方程转化成满足存在一个正则解的必要条件。

■量子力学中谐振子方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+(\lambda-z^2)w=0 \qquad w(z)=\exp\left(\pm\frac{1}{2}z^2\right)v(z)$$

Herimte 方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}z^2}\pm 2z\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}z}+(\lambda\pm 1)v=0$$