

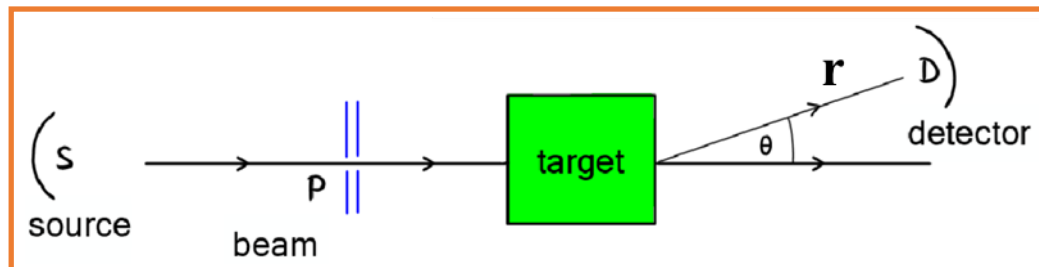
# 第九章 散射问题

# 9.1 Lippmann-Schwinger方程和散射截面

- 我们将散射问题的Hamiltonian写为

$$\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{V}$$

其中,  $\hat{H}_0 = \frac{\hat{\mathbf{p}}^2}{2m}$  是动能项,  
 $\hat{V}$  是散射势。



- 我们考虑短程的散射势, 可以选择入射粒子为自由粒子。在没有散射势的情况下, 自由粒子  $|\mathbf{p}\rangle$  是能量本征态, 本征能量为  $E_{\mathbf{p}} = \mathbf{p}^2/2m$ 。我们讨论弹性散射, 散射过程中能量不变, 因此要寻找  $\hat{H}$  的能量为  $E_{\mathbf{p}}$  的本征态。
- 令  $|\phi\rangle$  表示入射粒子状态, 并且它是  $\hat{H}_0$  的能量为  $E$  的本征态, 即

$$\hat{H}_0|\phi\rangle = E|\phi\rangle$$

而我们想要计算的是  $\hat{H}$  的本征态  $|\psi\rangle$ , 即

$$(\hat{H}_0 + \hat{V})|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

容易验证,  $|\psi\rangle$  满足下面的方程,

$$|\psi\rangle = \frac{1}{E - \hat{H}_0} \hat{V} |\psi\rangle + |\phi\rangle$$

# 9.1 Lippmann-Schwinger方程和散射截面

- 为了消除分母的奇异性，我们在分母上引入一个小的虚部，

$$|\psi^\pm\rangle = \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\eta} \hat{V} |\psi^\pm\rangle + |\phi\rangle$$

其中  $\eta \rightarrow 0^+$ ，这个方程称为Lippmann-Schwinger方程。

## $|\psi^\pm\rangle$ 的物理意义

- 在坐标表象下，

$$\langle \mathbf{r} | \psi^\pm \rangle = \langle \mathbf{r} | \phi \rangle + \int d^3 r' \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\eta} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi^\pm \rangle$$

- 如前所述，我们选择入射粒子为  $|\phi\rangle = |\mathbf{p}\rangle$ ，令  $\mathbf{k} = \mathbf{p}/\hbar$ ，则

$$\langle \mathbf{r} | \phi \rangle = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

- $\langle \mathbf{r} | \psi^\pm \rangle$  依赖于Green函数  $G^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\eta} | \mathbf{r}' \rangle = \left[ -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right]$

- 通常，散射势  $\hat{V}$  满足  $\langle \mathbf{r} | \hat{V} | \mathbf{r}' \rangle = V(r)\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$

# 9.1 Lippmann-Schwinger方程和散射截面

➤ 因此，我们有

$$\langle \mathbf{r} | \psi^\pm \rangle = \langle \mathbf{r} | \phi \rangle - \frac{2m}{\hbar^2} \int d^3 r' \frac{e^{\pm i k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} V(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r}' | \psi^\pm \rangle$$

➤ 为了更清楚的了解  $\langle \mathbf{r} | \psi^\pm \rangle$  的物理意义，我们来考察  $r \rightarrow \infty$  时的结果

❖ 当  $r \rightarrow \infty$  时，可以做如下近似

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = (\mathbf{r}^2 + \mathbf{r}'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{1/2} \approx r - \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' / r$$

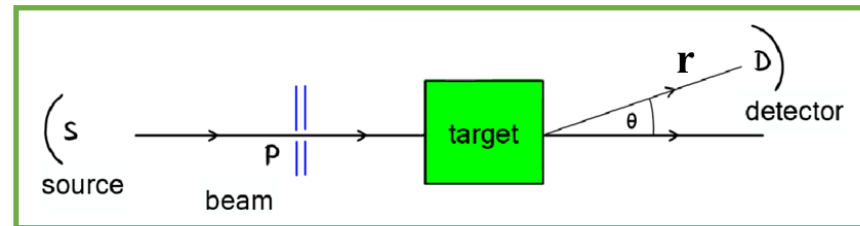
$$e^{\pm i k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx e^{\pm i k r} e^{\mp i \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'},$$

$$\mathbf{k}' = k\mathbf{r}/r$$

$$\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \approx \frac{1}{r}$$

$\mathbf{k}'$  是指向探测器位置的矢量。

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \psi^\pm \rangle &= \langle \mathbf{r} | \phi \rangle + \int d^3 r' \langle \mathbf{r} | \frac{1}{E - \hat{H}_0 \pm i\eta} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \hat{V} | \psi^\pm \rangle \\ G^\pm(\mathbf{r}, \mathbf{r}') &= -\frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm i k |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \langle \mathbf{r} | \hat{V} | \mathbf{r}' \rangle &= V(r) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \end{aligned}$$



$$\text{于是, } \langle \mathbf{r} | \psi^\pm \rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \langle \mathbf{r} | \phi \rangle - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm i k r}}{r} \int d^3 r' e^{\mp i \mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r}' | \psi^\pm \rangle$$

# 9.1 Lippmann-Schwinger方程和散射截面

$$\begin{aligned}\langle \mathbf{r} | \psi^\pm \rangle &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \langle \mathbf{r} | \phi \rangle - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{\pm ikr}}{r} \int d^3r' e^{\mp i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r}' | \psi^\pm \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') \frac{e^{\pm ikr}}{r} \right]\end{aligned}$$

其中,  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{(2\pi)^{1/2}m}{\hbar^2} \int d^3r' e^{\mp i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r}' | \psi^\pm \rangle$

- ❖  $\langle \mathbf{r} | \psi^\pm \rangle$  是入射平面波和散射波的叠加, 散射波是球面波,  $\langle \mathbf{r} | \psi^+ \rangle$  包含的是出射球面波,  $\langle \mathbf{r} | \psi^- \rangle$  包含的是入射球面波。从物理上考虑散射问题中只应有出射球面波, 我们只保留  $\langle \mathbf{r} | \psi^+ \rangle$ 。
- ❖  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  称为**散射振幅**, 它可以改写为  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \psi^+ \rangle$
- ❖  $\langle \mathbf{r} | \psi^+ \rangle$  的物理意义: 它描写的是入射粒子为平面波, 被散射以后 (在无穷远处) 变成以靶为中心的球面波, 而全部的波函数为入射波与散射波的叠加。

# 9.1 Lippmann-Schwinger方程和散射截面

- 因为  $\mathbf{k} = \mathbf{k}'$ ，所以  $f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$  是  $\mathbf{k}'$  偏离  $\mathbf{k}$  的角度的函数，也就是探测器（相对于靶）的位置偏离入射粒子动量方向的角度，于是， $\langle \mathbf{r} | \psi^+ \rangle$  可以写为

$$\langle \mathbf{r} | \psi \rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right]$$

其中， $(\theta, \phi)$  描述的是以入射粒子动量为参考轴的方向。

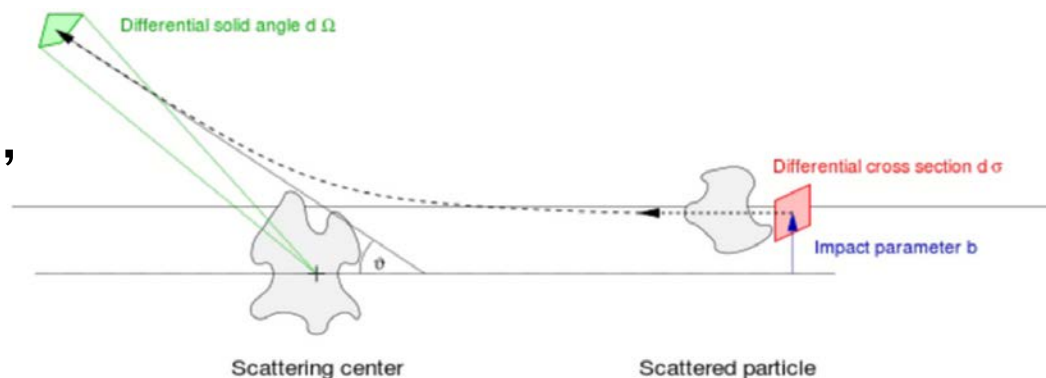
## 散射截面

- 微分散射截面的定义为单位时间被散射到  $(\theta, \phi)$  方向立体角  $d\Omega$  内的粒子数  $dn(\theta, \phi)/dt$  与  $d\Omega$  和入射流密度大小之比

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = \frac{dn(\theta, \phi)}{d\Omega dt} \frac{1}{|\mathbf{j}_i|}$$

对  $d\Omega$  积分，得到总散射截面，

$$\sigma_t = \int \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega$$



# 9.1 Lippmann-Schwinger方程和散射截面

## 散射截面与散射振幅的关系

- 入射粒子流密度为  $\mathbf{j}_i = -\frac{i\hbar}{2m}(e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\nabla e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} - e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}\nabla e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}}) = \frac{\hbar\mathbf{k}}{m}$
- 单位时间散射到  $(\theta, \phi)$  方向立体角  $d\Omega$  内的粒子数为  $\frac{dn(\theta, \phi)}{dt} = \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j}_s r^2 d\Omega$

其中，散射粒子流密度的径向分量为

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j}_s &= -\frac{i\hbar}{2m} \left[ f^*(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right) - f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( f^*(\theta, \phi) \frac{e^{-ikr}}{r} \right) \right] \\ &= \frac{\hbar k}{m} \frac{|f(\theta, \phi)|^2}{r^2}.\end{aligned}$$

- 微分散射截面为  $\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = \frac{\mathbf{e}_r \cdot \mathbf{j}_s r^2}{|\mathbf{j}_i|} = |f(\theta, \phi)|^2$
- 总散射截面为  $\sigma_t = \int \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} d\Omega = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi |f(\theta, \phi)|^2 \sin \theta d\theta$

## 9.2 Born近似

- 散射问题中波函数满足的方程可以改写为

$$\langle \mathbf{r} | \psi \rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle - \frac{(2\pi)^{1/2} m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3 r' \langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{r}' | \psi \rangle$$

- 做迭代求级数解，我们有

$$\langle \mathbf{r} | \psi \rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \langle \mathbf{r} | \phi \rangle - \frac{m}{2\pi\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3 r' e^{-i\mathbf{k}' \cdot \mathbf{r}'} V(\mathbf{r}') \langle \mathbf{r}' | \psi \rangle$$

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \psi \rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \langle \mathbf{r} | \mathbf{k} \rangle - \frac{(2\pi)^{1/2} m}{\hbar^2} \frac{e^{ikr}}{r} \langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k} \rangle \\ + \left[ -\frac{(2\pi)^{1/2} m}{\hbar^2} \right]^2 \frac{e^{ikr}}{r} \int d^3 r' \frac{e^{ikr'}}{r'} \langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{r}' \rangle \langle \mathbf{k}'' | \hat{V} | \mathbf{k} \rangle + \dots \end{aligned}$$

Born近似适用  
条件：V(r) 很  
弱，或者粒子  
能量很高。

- 在一级近似下，散射幅为

$$f(\mathbf{k}, \mathbf{k}') = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \langle \mathbf{k}' | \hat{V} | \mathbf{k} \rangle = -\frac{4\pi^2 m}{\hbar^2} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^3 r e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r})$$

$$\text{微分散射截面为 } \frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = |f(\mathbf{k}, \mathbf{k}')|^2 = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| \int d^3 r e^{i(\mathbf{k}-\mathbf{k}') \cdot \mathbf{r}} V(\mathbf{r}) \right|^2$$

- ❖ 对于 V(r) 球对称的情况，可以定义  $\mathbf{q} = \mathbf{k}' - \mathbf{k}$  ( $q = 2k \sin \theta/2$ )，选取 z 轴沿  $\mathbf{q}$  方向，则  $(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{r} = qr \cos \theta'$ ，于是，散射集中在小角度

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = \frac{m^2}{4\pi^2 \hbar^4} \left| \int e^{iqr \cos \theta'} V(r) r^2 \sin \theta' dr d\theta' d\phi \right|^2 = \frac{4m^2}{\hbar^4 q^2} \left| \int_0^\infty r V(r) \sin qr dr \right|^2$$



## 9.3 分波法

- 分波法是研究球对称散射势下的散射问题的一个重要方法。
- ❖ 将波函数用球谐函数（角动量本征态）展开（也称为分波展开），由于散射势  $V(\mathbf{r})$  球对称，角动量守恒，我们可以分别考虑各个分波的散射。
- 考虑入射粒子为沿  $z$  方向入射的平面波，将平面波用球面波展开

$$\begin{aligned} e^{ikz} &= \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} j_l(kr) Y_{l0}(\theta, \phi) \\ &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_{l0}(\theta, \phi) \frac{1}{kr} \sin\left(kr - \frac{l\pi}{2}\right) \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} i^l \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_{l0}(\theta, \phi) \frac{1}{2ik} \left[ e^{-il\pi/2} \frac{e^{ikr}}{r} - e^{il\pi/2} \frac{e^{-ikr}}{r} \right] \\ &= \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_{l0}(\theta, \phi) \frac{1}{2ik} \left( \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r} \right), \end{aligned}$$

## 9.3 分波法

$$e^{ikz} = \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_{l0}(\theta, \phi) \frac{1}{2ik} \left( \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r} \right)$$

➤ 于是，我们有

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{r} | \psi \rangle &\xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ e^{ikz} + f(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \left[ \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} Y_{l0}(\theta, \phi) \frac{1}{2ik} \left( \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r} \right) \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} a_l(k) Y_{l0}(\theta, \phi) \frac{e^{ikr}}{r} \right] \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_{l=0}^{\infty} \sqrt{4\pi(2l+1)} \frac{Y_{l0}(\theta, \phi)}{2ik} \left[ (1 + 2ika_l(k)) \frac{e^{ikr}}{r} - \frac{e^{-i(kr-l\pi)}}{r} \right] \end{aligned}$$

➤ 散射势只影响出射球面波，并且只影响展开系数， $1 \rightarrow S_l(k) = 1 + 2ika_l(k)$

➤ 弹性散射要求概率守恒，因此， $|S_l(k)| = 1$

➤ 令  $S_l(k) = e^{2i\delta_l}$ ，我们有

$$\langle \mathbf{r} | \psi \rangle \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} \frac{i^l e^{i\delta_l}}{kr} \sin(kr - l\pi/2 + \delta_l) Y_{l0}(\theta, \phi)$$

❖ 在离散射中心无穷远处来看散射势的效果只是改变了出射球面波的相位，因此我们称  $\delta_l$  为相移

## 9.3 分波法

- 根据相移  $\delta_l$  的定义，我们有

$$a_l(k) = \frac{S_l(k) - 1}{2ik} = \frac{e^{i\delta_l} \sin \delta_l}{k}$$

$$S_l(k) = 1 + 2ika_l(k)$$

$$S_l(k) = e^{2i\delta_l}$$

- 定义分波散射振幅为

$$f_l(\theta, \phi) = \frac{1}{k} \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{i\delta_l} \sin \delta_l Y_{l0}(\theta, \phi) \quad f_l(\theta, \phi) \text{ 与 } \phi \text{ 无关}$$

- 在  $(\theta, \phi)$  方向的总散射振幅为

$$f(\theta, \phi) = \sum_l f_l(\theta, \phi) = \frac{1}{k} \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{i\delta_l} \sin \delta_l Y_{l0}(\theta, \phi)$$

- 微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum_l \sqrt{4\pi(2l+1)} e^{i\delta_l} \sin \delta_l Y_{l0}(\theta, \phi) \right|^2$$

- 利用  $Y_{l0}(\theta, \phi)$  的正交性，可得总散射截面为

$$\sigma_t = \int |f(\theta, \phi)|^2 d\Omega = \frac{4\pi}{k^2} \sum_l (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

- 考虑到  $Y_{l0}(0, \phi) = \sqrt{(2l+1)/4\pi}$ ，我们有  $\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \text{Im } f(0, \phi)$

低能散射下，  
只需要考虑  
最低的几个分  
波，甚至只需  
考虑  $s$  分波。

称为光学定理，它给出了向前散射振幅与总散射截面的关系。

## 9.3 分波法

➤ 例题：对于如下球形势井

$$V(r) = \begin{cases} -V_0, & r < a \\ 0, & r \geq a \end{cases}$$

其中  $V_0 > 0$  是常数，在低能散射下，只考虑  $s$  波，计算散射截面。

➤ 解：散射问题中  $E > 0$ ，对于  $s$  波，令径向波函数  $R(r) = u(r) / r$ ，径向方程为

$$\begin{cases} \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \kappa^2 u(r) = 0, & r < a \\ \frac{d^2 u(r)}{dr^2} + k^2 u(r) = 0, & r \geq a \end{cases}$$

其中  $\kappa^2 = 2m(E + V_0)/\hbar^2$ ， $k^2 = 2mE/\hbar^2$ 。

满足边界条件  $u(0) = 0$  的解为  $\begin{cases} u(r) = A \sin(\kappa r), & r < a \\ u(r) = B \cos(kr) + C \sin(kr), & r \geq a \end{cases}$

利用  $r = a$  处波函数及其一阶导数需要满足的边界条件，有

$$\begin{cases} A \sin(\kappa a) = B \cos(ka) + C \sin(ka), \\ A \kappa \cos(\kappa a) = -Bk \sin(ka) + Ck \cos(ka), \end{cases}$$

## 9.3 分波法

解得

$$\begin{cases} A \sin(\kappa a) = B \cos(ka) + C \sin(ka), \\ A\kappa \cos(\kappa a) = -Bk \sin(ka) + Ck \cos(ka), \end{cases}$$

$$\begin{cases} B = A[\sin(\kappa a) \cos(ka) - \frac{\kappa}{k} \cos(\kappa a) \sin(ka)] \\ C = A[\sin(\kappa a) \sin(ka) + \frac{\kappa}{k} \cos(\kappa a) \cos(ka)] \end{cases}$$

令  $B = \rho \sin \Delta$ ,  $C = \rho \cos \Delta$ , 在  $r \rightarrow \infty$  处, 有

$$u(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \rho \sin(kr + \Delta) \quad \text{其中} \quad \tan \Delta = \frac{k \tan(\kappa a) - \kappa \tan(ka)}{\kappa + k \tan(\kappa a) \tan(ka)}$$

于是, 当  $r \rightarrow \infty$  时径向波函数为  $R(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \frac{\rho}{r} \sin(kr + \Delta)$

因此, 相移  $\delta = \Delta$ 。利用  $Y_{l0}(0, \phi) = \sqrt{(2l+1)/4\pi}$ , 可得微分散射截面为

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{\sin^2 \delta}{k^2}$$

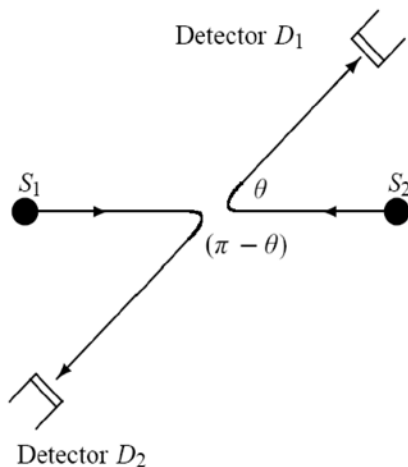
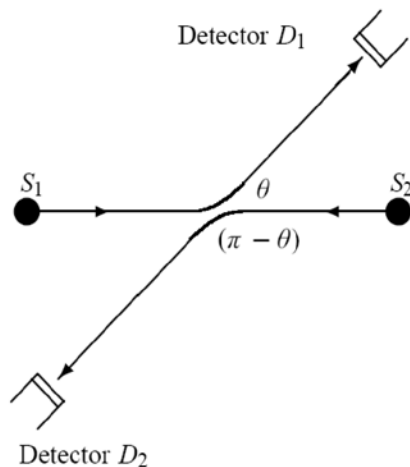
总散射截面为

$$\sigma_t = \frac{4\pi \sin^2 \delta}{k^2}$$

## 9.4 全同粒子散射

- 全同粒子散射需要在质心系中研究两个粒子的相对运动，而且必须考虑粒子的交换对称性。我们假定两个粒子的相互作用与自旋无关，则波函数的自旋和空间部分可以分离。
- 因为交换两个粒子相当于  $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ ，也就是  $(r, \theta, \phi) \rightarrow (r, \pi - \theta, \pi + \phi)$ ，所以相对运动部分的波函数在  $r \rightarrow \infty$  处可以写为

$$\psi(r, \theta, \phi) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} A \{ (e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} \pm e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}) + [f(\theta, \phi) \pm f(\pi - \theta, \pi + \phi)] \frac{e^{ikr}}{r} \}$$



非全同粒子

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = |f(\theta, \phi)|^2 + |f(\pi - \theta, \pi + \phi)|^2$$

全同粒子

$$\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} = |f(\theta, \phi) \pm f(\pi - \theta, \pi + \phi)|^2$$

## 9.4 全同粒子散射

### 自旋 $S = 0$ 的全同粒子

- 粒子为玻色子，波函数要满足交换对称。

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} &= |f(\theta, \phi) + f(\pi - \theta, \pi + \phi)|^2 \\ &= |f(\theta, \phi)|^2 + |f(\pi - \theta, \pi + \phi)|^2 + 2 \operatorname{Re}[f^*(\theta, \phi)f(\pi - \theta, \pi + \phi)]\end{aligned}$$

### 自旋 $S = 1/2$ 的全同粒子

- 粒子为费米子，波函数要满足交换反对称。

自旋单重态

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} &= |f(\theta, \phi) + f(\pi - \theta, \pi + \phi)|^2 \\ &= |f(\theta, \phi)|^2 + |f(\pi - \theta, \pi + \phi)|^2 + 2 \operatorname{Re}[f^*(\theta, \phi)f(\pi - \theta, \pi + \phi)]\end{aligned}$$

自旋三重态

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} &= |f(\theta, \phi) - f(\pi - \theta, \pi + \phi)|^2 \\ &= |f(\theta, \phi)|^2 + |f(\pi - \theta, \pi + \phi)|^2 - 2 \operatorname{Re}[f^*(\theta, \phi)f(\pi - \theta, \pi + \phi)]\end{aligned}$$

自旋非极化

$$\begin{aligned}\frac{d\sigma(\theta, \phi)}{d\Omega} &= \frac{1}{4}|f(\theta, \phi) + f(\pi - \theta, \pi + \phi)|^2 + \frac{3}{4}|f(\theta, \phi) - f(\pi - \theta, \pi + \phi)|^2 \\ &= |f(\theta, \phi)|^2 + |f(\pi - \theta, \pi + \phi)|^2 - \operatorname{Re}[f^*(\theta, \phi)f(\pi - \theta, \pi + \phi)].\end{aligned}$$