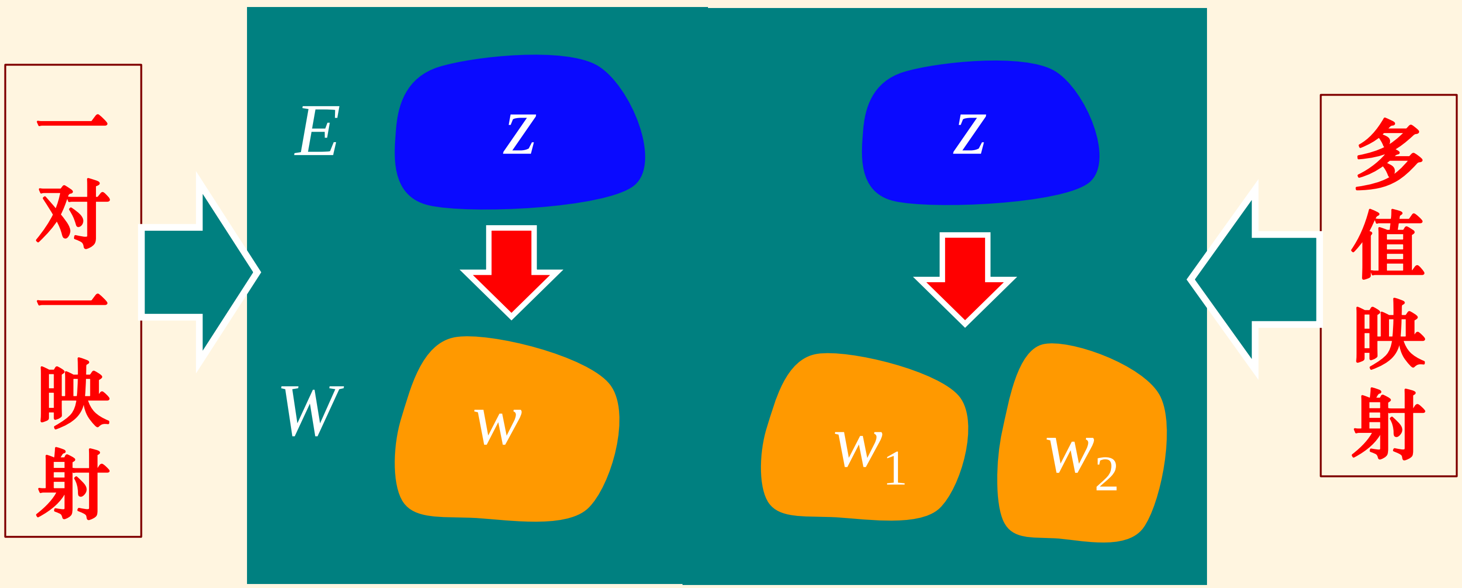
总 复 习—1

第一部分 复变函数

$w = f(z),\ z \in E$ —*E*到*W*的映射关系



一. 解析函数

■等价定义

1. 微分性质(ε邻域性质):可微（存在且有限）
2. 积分性质(全局性质): Cauchy定理
3. 级数性质(局部性质):Taylor展开

■基本性质

1. C-R条件：必要条件
2. 实部、虚部满足Laplace方程（非对称性）
3. 曲线族的正交性
4. 无限可导性
5. ……………

二. 初等函数

■单值函数

■ “好”函数——仅仅含有孤立奇点

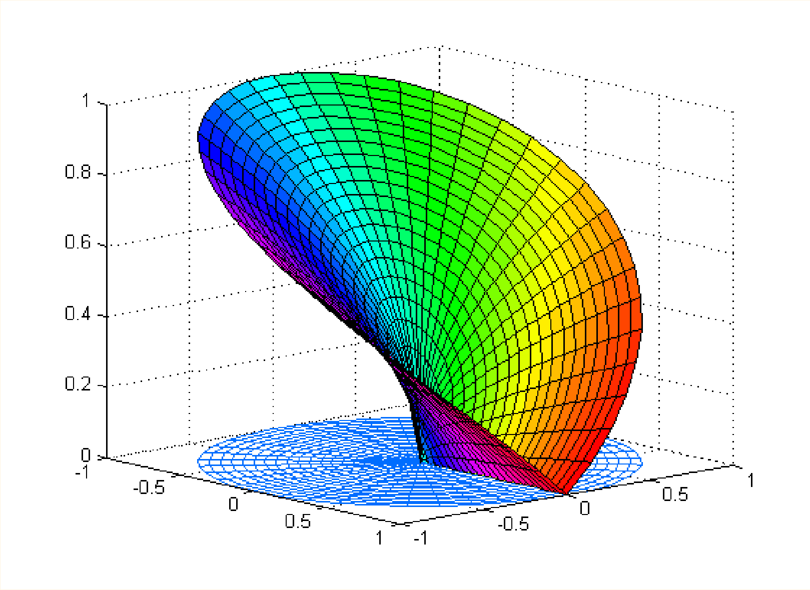
$$f(z)=\frac{1}{z};\frac{1}{z^2-a^2};\frac{1}{\sin z};\sin z,\exp(z);\cdots$$

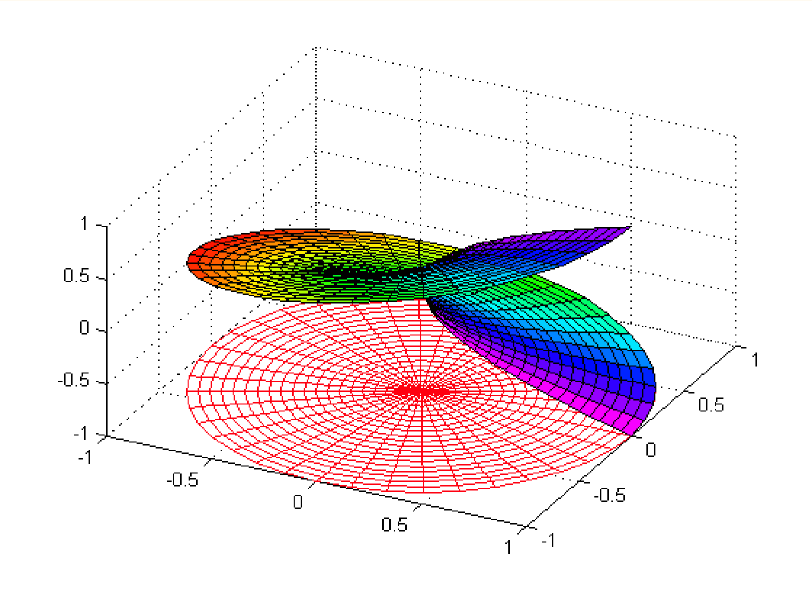
■ “坏”函数——多值函数，含有分支点

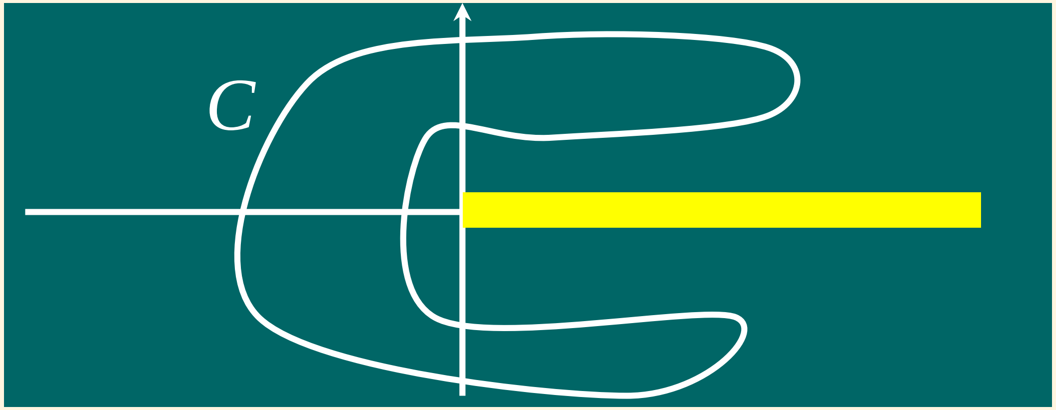
$$f(z)=\sqrt{z};z^{1/3};\frac{1}{\sqrt{z^2-a^2}};\ln z;\arcsin z;\cdots$$

□ 分支点：函数不解析的线段的起点和终点

$$w(z)=\sqrt{z}$$



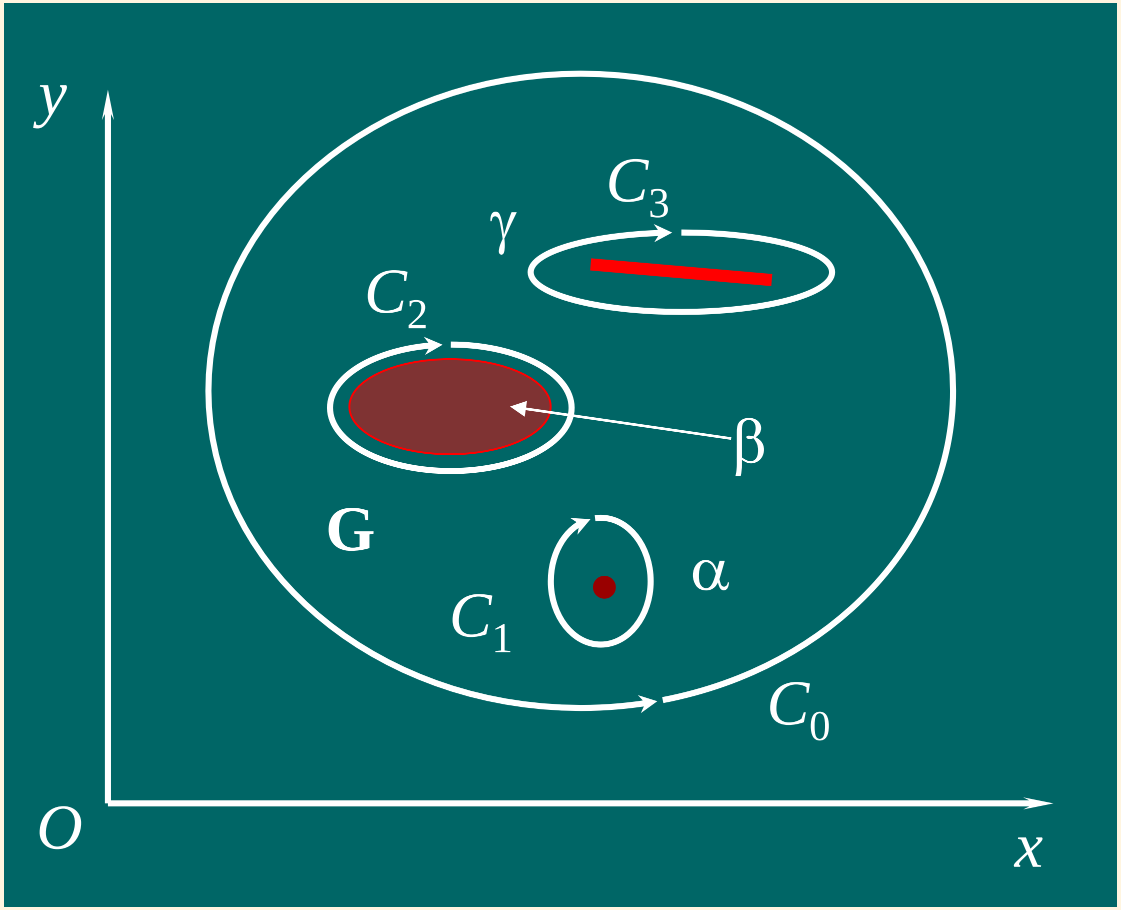




在单叶支上仍然可看为解析函数

三. Cauchy定理(解析函数重要性质之一)

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 0;\quad \oint_{C_0} f(z)\mathrm{d}z = \sum_{i=1}^{n} \oint_{C_i} f(z)\mathrm{d}z$$



四. 幂级数展开

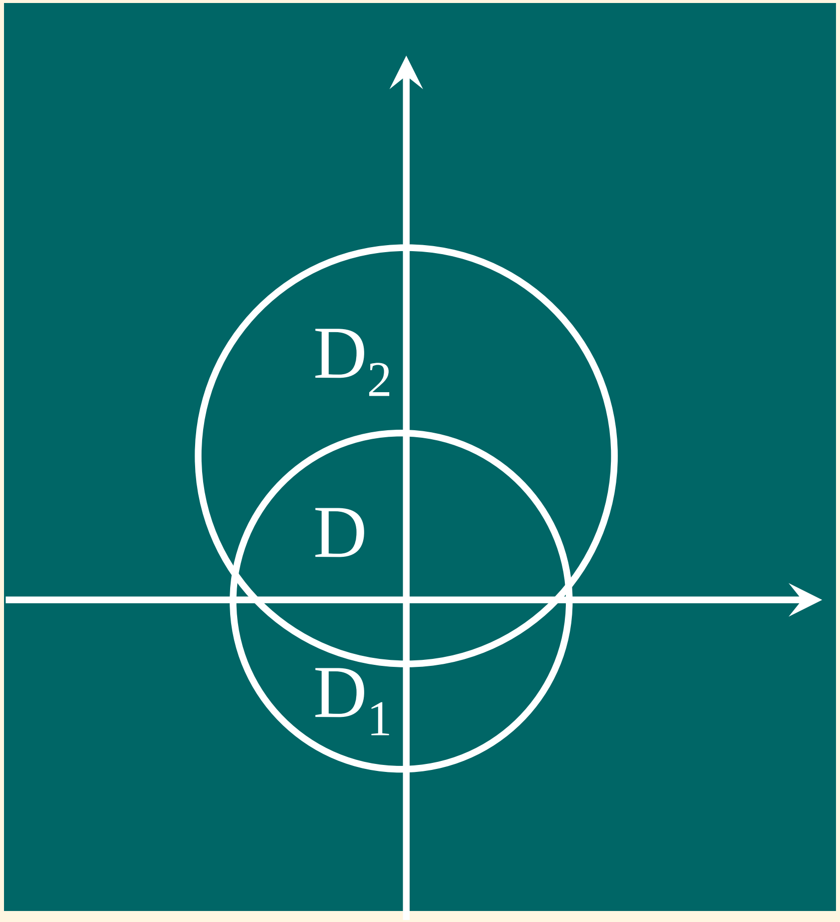
■解析点展开——Taylor展开

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\xi)}{(\xi-a)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

$$=\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

重要性质



解析延拓——解析函数重要性质之二

■奇点展开——Laurent展开

讨论奇点的性质

$$f(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n (z-b)^n$$

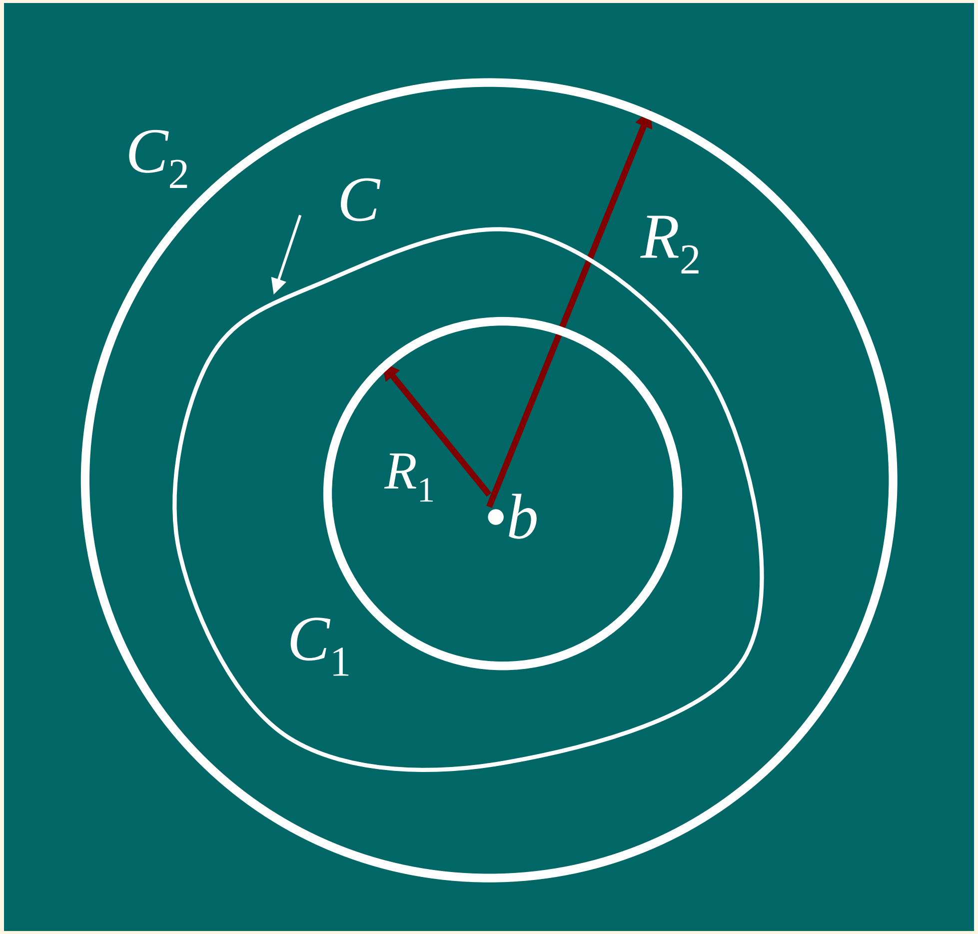
$$b_n=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi-b)^{n+1}}\mathrm{d}\xi$$

$$\Downarrow$$

$$b_{-1}=\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\oint_C f(\xi)\mathrm{d}\xi$$

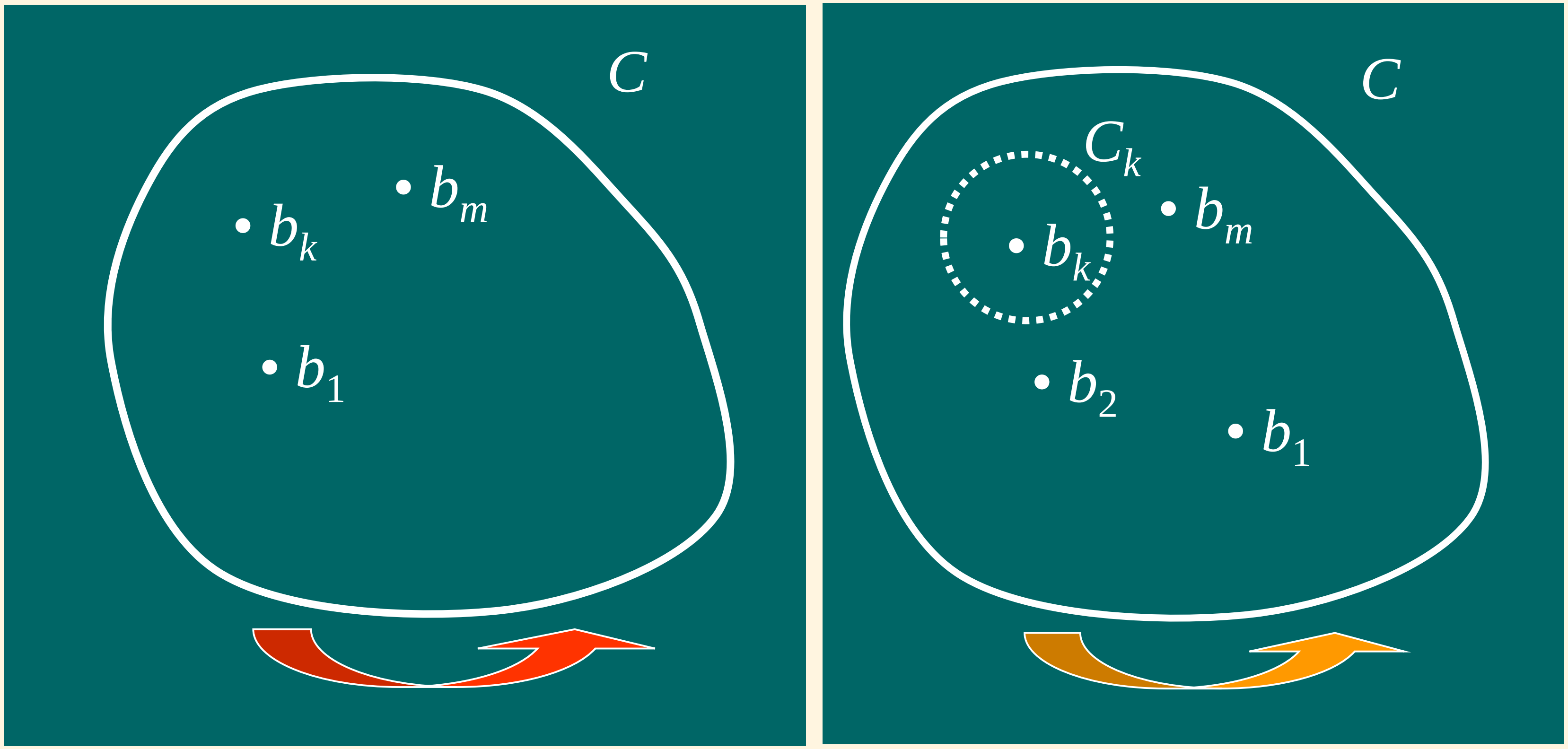
$$\equiv \mathrm{Res}[f(z),b]$$

——奇点b的留数



五. 留数定理和应用

$$\oint_C f(z)\mathrm{d}z = 2\pi \mathrm{i}\sum_{k=1}^{m}\mathrm{Res}[f(z), b_k]$$



■应用于实函数积分

■类型一 $$\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)\mathrm{d}x$$

注意区间

■类型二 $$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x$$

注意a的正负

■类型三 $$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x, \quad (a>0)$$

■类型四 实轴上有单极点的积分

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\mathrm{d}x; \quad \int_{-\infty}^{\infty} R(x)e^{aix}\mathrm{d}x, \quad (a>0)$$

第二部分 应用分析方法

1. Fourier级数展开

周期函数 $f(t)=f(t+T)$

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} f_n \exp\left(\mathrm{i}\frac{2n\pi}{T}t\right)$$

$$f_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp\left(-\mathrm{i}\frac{2n\pi}{T}t\right)\mathrm{d}t$$

$$\frac{1}{T}\int_0^T f^2(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|f_n|^2$$

——功率型信号

■收敛性质：Gibbs现象

■几个典型周期函数的Fourier级数及其性质

2. Fourier积分

非周期函数并且平方可积

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^{2}(t)\mathrm{d}t < \infty$$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)\exp(\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}\omega$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t$$

■Parseval等式

$$\int_{-\infty}^{\infty}[f(t)]^2 dt=\int_{-\infty}^{\infty}|F(\omega)|^2\,\mathrm{d}\omega$$

——能量型信号

■几个典型函数的Fourier积分及其性质

时间方波脉冲信号

时间Dirac Delta信号

时间余弦和正弦信号

时间Gauss信号

频谱的物理意义

二维方窗函数

三维Dirac Delta函数

一维空间正弦信号

空间谱的物理意义

二维Gauss函数

$$f(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}F(k_x,k_y)\exp[\mathrm{i}(k_x x+k_y y)]\mathrm{d}k_x\mathrm{d}k_y$$

$$F(k_x,k_y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x,y)\mathrm{expp}[-\mathrm{i}(k_x x+k_y y)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$f(x,y)=e^{-ax^2-by^2}$$

对称性：极坐标积分

■利用复变函数方法求Fourier积分

$$F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\exp(-\mathrm{i}\omega t)\mathrm{d}t$$

注意讨论：上、下平面的围道

■Fourier积分的微分、积分性质

$$\Im[f'(t)]=(\mathrm{i}\omega)\Im[f(t)]$$

$$\Im\left[\int f(t)dt\right]=\frac{1}{\mathrm{i}\omega}\Im[f(t)]$$

分数导数
分数积分

3. 广义函数和Dirac Delta函数

■经典函数存在的问题?

物理上，点源的表示问题?

经典函数求任意阶导数问题?

非平方可积函数的Fourier积分问题?

微分与无限求和交换问题?

■广义函数：检验函数——数的对应关系

奇异广义函数(解决了点源表示问题)

$$f(\varphi)=(f,\varphi)=\varphi(0)\Rightarrow\delta(x)$$

■重要关系

■卷积关系

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(x-y)\mathrm{d}y = f(x)$$

■复合函数

$$\delta[g(x)] = \sum_n \frac{1}{|g'(x_n)|}\delta(x-x_n)$$

■Fourier积分关系

$$\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}_0) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^n \int \exp[\mathrm{i}\boldsymbol{k}\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}_0)]\mathrm{d}^n\boldsymbol{k}$$

$$\delta(x,x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[\mathrm{i}k(x-x_0)]\mathrm{d}k$$

$$\delta(t,t_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \exp[\mathrm{i}\omega(t-t_0)]\mathrm{d}\omega$$

数学意义？
物理意义？

曲线坐标中的Dirac δ函数

柱坐标

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)=\frac{\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)\delta(z-z_0)}{\rho}$$

$$\Downarrow$$

$$\delta(\boldsymbol{r})=\delta(x)\delta(y)\delta(z)=\frac{1}{2\pi\rho}\delta(\rho)\delta(z)$$

简单理解：与方位角无关，且必须满足

$$\iiint_V \delta(\boldsymbol{r})\mathrm{d}V=1$$

$$\Downarrow$$

$$\int_0^\infty\int_{-\infty}^\infty\int_0^{2\pi}\frac{1}{2\pi\rho}\delta(\rho)\delta(z)\cdot\rho\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}z=1$$

球坐标

$$\delta(x-x_0)\delta(y-y_0)\delta(z-z_0)=\frac{\delta(r-r_0)\delta(\vartheta-\vartheta_0)\delta(\varphi-\varphi_0)}{r^2\sin\vartheta}$$

球坐标原点

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z)=\frac{1}{4\pi r^2}\delta(r)$$

球坐标极轴上

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)=\frac{\delta(r-z_0)\delta(\vartheta)}{2\pi r^2\sin\vartheta},(z_0>0)$$

$$\delta(x)\delta(y)\delta(z-z_0)=\frac{\delta(r-|z_0|)\delta(\vartheta-\pi)}{2\pi r^2\sin\vartheta},(z_0<0)$$

4. 二阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+p(z)\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+q(z)w=0$$

- **常点z_0：Taylor展开**
- **正则奇点z_0：Laurent展开，存在二个正则解**
- **非正则奇点z_0：Laurent展开，存在一个正则解的必要条件**
- **常规解和次常规解：如果非正则奇点z_0不满足存在一个正则解的必要条件，寻找常规解和次常规解，把方程转化成满足存在一个正则解的必要条件！**

5. 本征值问题和正交函数展开

■讨论本征值问题的意义?

本征值：可观察性—经典波动，量子力学

本征函数：数学上的性质—完备性

■正则的S-L本征值和本征函数的基本性质

1.本征值是实数且非负

2.本征函数系构成正交、归一的完备系

3.本征值构成无限、可数的分立谱

4.本征值非简并

5.本征函数零点分布性质

为什么写成S-L形式?

■一般Hermite对称微分算子的基本性质

1.本征值是实数且非负

2.本征函数系构成正交、归一的完备系

3.本征值构成无限、可数的分立谱

■算子谱与空间的关系

■离散谱——封闭空间

■连续谱——开空间

■混合谱（离散谱+连续谱）——非均匀开空间

■离散谱+连续谱——某个方向正交方向开空间

■本征谱的归一化

■ **分立谱**

$$\int_V \psi_n^*(\mathbf{r})\psi_m(\mathbf{r})\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \delta_{nm}$$

■ **连续谱**

$$\int \psi_\lambda(\mathbf{r})\psi_{\lambda'}^*(\mathbf{r})\mathrm{d}^3\mathbf{r} = \delta(\lambda-\lambda')$$

数学意义？

物理意义？

■封闭关系

■ **分立谱**

$$\delta(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\psi_n^*(\mathbf{r}_0)\psi_n(\mathbf{r})$$

■ **连续谱**

$$\delta(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \int \psi_{\lambda'}^*(\mathbf{r}_0)\psi_\lambda(\mathbf{r})\mathrm{d}\lambda$$

■ **混合谱**

$$\delta(\mathbf{r},\mathbf{r}_0) = \sum_{n=0}^{M}\psi_n^*(\mathbf{r}_0)\psi_n(\mathbf{r}) + \int \psi_{\lambda'}^*(\mathbf{r}_0)\psi_\lambda(\mathbf{r})\mathrm{d}\lambda$$

■三个典型正交多项式

❑**Legendre 多项式——有限区域[*a*,*b*]**

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$$

❑**Laguerre多项式——半无限区域(0,∞)**

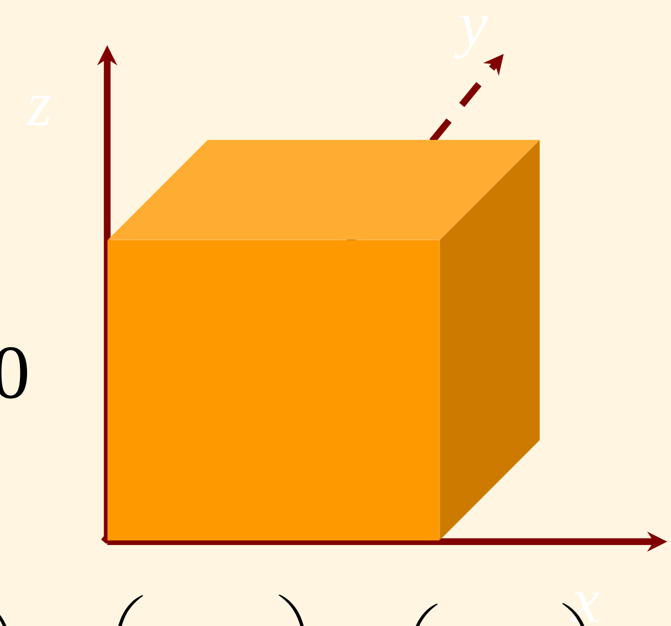
$$L_n(x)=\frac{1}{n!}\frac{1}{\mathrm{e}^{-x}}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^n\mathrm{e}^{-x})$$

❑**Hermite多项式展开——无限区域(-∞,∞)**

$$H_n(x)=(-1)^n\mathrm{e}^{x^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\mathrm{e}^{-x^2}$$

■Laplace算子的本征值问题

■直角坐标



$$L\psi = \lambda^2\psi; L \equiv -\nabla^2$$

$$\psi\,|_{x=0,l_x} = \psi\,|_{y=0,l_y} = \psi\,|_{z=0,l_z} = 0$$

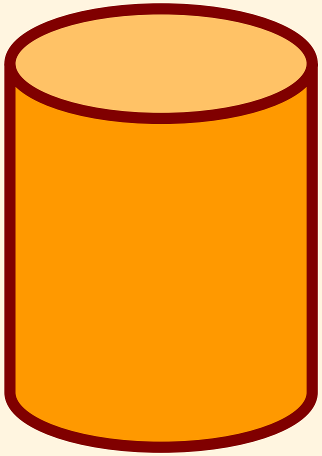
$$\psi_{pqr}(x,y,z) = \sqrt{\frac{8}{l_x l_y l_z}}\sin\left(\frac{p\pi}{l_x}x\right)\sin\left(\frac{q\pi}{l_y}x\right)\sin\left(\frac{r\pi}{l_z}z\right)$$

$$\lambda_{pqr}^2 = \left(\frac{p\pi}{l_x}\right)^2 + \left(\frac{q\pi}{l_y}\right)^2 + \left(\frac{r\pi}{l_z}\right)^2$$

$$p,q,r = 1,2,3,\cdots$$

■柱坐标

$$\begin{cases} -\nabla^2 \psi(\rho,\varphi,z) = \lambda^2 \psi(\rho,\varphi,z) \\ \psi(\rho,\varphi,z)|_{\rho=a} = 0 \\ \psi(\rho,\varphi,z)|_{z=0} = \psi(\rho,\varphi,z)|_{z=l} = 0 \end{cases}$$



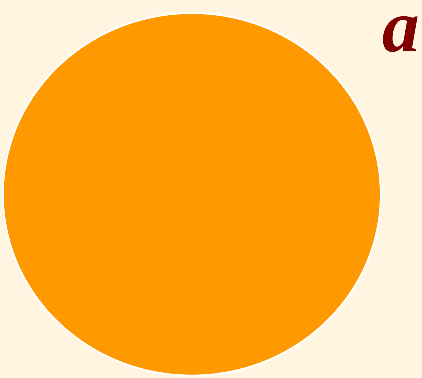
$$\psi_{jnm}(\rho,\varphi,z) = \frac{1}{N_{jnm}} J_m\left(\mu_j^m \frac{\rho}{a}\right) \sin\left(\frac{n\pi z}{l}\right) e^{\mathrm{i}m\varphi}$$

$$\lambda_{jnm}^2 = \left(\frac{\mu_j^m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 ; N_{jnm} = \sqrt{2\pi \frac{l}{2} \int_0^a \left[J_m\left(\mu_j^m \frac{\rho}{a}\right)\right]^2 \rho \mathrm{d}\rho}$$

$$n = 1, 2, \ldots; m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

$$\mu_j^m : J_m(\mu_j^m) = 0, j = 1, 2, 3, \ldots.$$

■球坐标



$$\begin{cases} -\nabla^2 \psi(r,\vartheta,\varphi) = \lambda^2 \psi(r,\vartheta,\varphi) \\ \psi(r,\vartheta,\varphi)\big|_{r=a} = 0 \end{cases}$$

$$\psi_{nlm}(r,\vartheta,\varphi) = \frac{1}{N_{nl}} j_l\left(x_n^l \frac{r}{a}\right) Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

$$\lambda_n^l = \frac{x_n^l}{a}; \quad N_{nl} = \sqrt{\int_0^a \left[j_l\left(x_n^l \frac{r}{a}\right)\right]^2 r^2 \mathrm{d}r}$$

$$l = 0,1,2,\ldots; m = 0,\pm 1,\pm 2,\pm l$$

$$x_n^l : j_l(x_n^l) = 0, n = 1,2,3,\ldots.$$

第三部分 数学物理方程

1. 数学物理方程的定解问题

■三类典型的泛定方程

波动方程 → 双曲型方程

扩散方程 → 抛物型方程

Laplace方程 → 椭圆型方程

■定解问题：泛定方程+边界条件+初始条件

初值问题：无限空间随时间演化

边值问题：有限空间与时间无关

混合问题：有限空间随时间演化

■定解问题的适定性

存在性　惟一性　稳定性

双曲型波动方程：不能提边值问题

抛物型扩散方程：不能提逆时间问题

椭圆型平衡方程：不能提初值问题

- 双曲型：波动过程：复杂，波沿特征线传播，可能存在　间断
- 抛物型：扩散过程：比较好，极值原理
- 椭圆型：位势平衡：好，极值原理，无限可微

■ 定解问题的解

古典解： 函数具有泛定方程出现的各级导数，且满足泛定方程以及边界和初始条件，这样的函数称为定解问题的古典解

强解： 利用函数序列逼近的广义解

弱解： 由广义函数定义的广义解称为方程的弱解

$$(\boldsymbol{L}u,\phi)=(u,\boldsymbol{L}^{+}\phi)=(f,\phi),\ \forall\phi\in D \Rightarrow \boldsymbol{L}(u)=f$$

意义： 通过扩充函数的定义域，广义解解决了方程解的存在性问题，因为定解问题中若干函数来自于实验测量，含有噪声，不一定满足可微性条件，古典解不一定存在

2. 分离变量法

- **可分离变量的一般原则**

- 方程可分离变量：线性方程（特殊的变系数方程，特殊的非线性方程也可以）；齐次方程。
- 边界条件可分离变量：线性边界条件；齐次边界条件；规则的边界。
- 关键：物理问题的解可以表示为简单的模式展开的形式
- 核心：基函数展开（叠加原理）

齐次方程+齐次边界条件 → 形成本征值问题

■本征函数展开法本质：寻找适当的基函数展开

非齐次方程+非齐次边界条件

↓

齐次方程+齐次边界条件

↓

分离变量方法：寻找适当的本征值问题

↓

本征函数展开法

↓

Lagrange恒等式，Green公式

↓

展开系数

3. 球函数及其应用

■球坐标中Laplace方程的通解

$$u(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^{l}+B_{lm}r^{-(l+1)}\right]Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

■球坐标中Helmholtz方程的通解

- **球内驻波解**

$$u(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}j_{l}(kr)+B_{lm}n_{l}(kr)\right]Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

球外部行波解

$$u(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}h_l^{(1)}(kr)+B_{lm}h_l^{(2)}(kr)\right]Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

■球谐函数的正交性和完备性

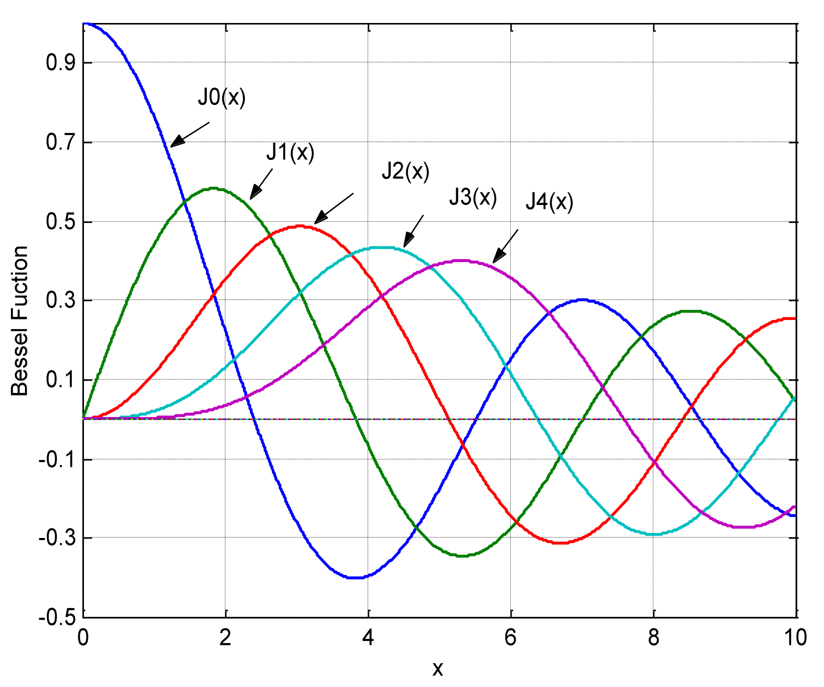
$$\iint_{\text{球面}} Y_l^m(\vartheta,\varphi)[Y_k^n(\vartheta,\varphi)]^*\mathrm{d}\Omega=(N_l^m)^2\delta_{mn}\delta_{lk}$$

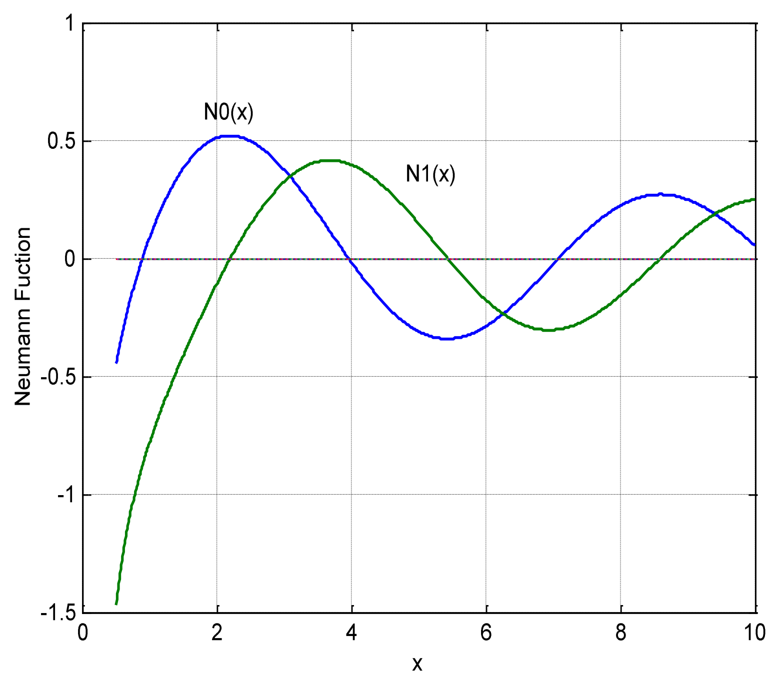
$$\begin{cases} f(\vartheta,\varphi)=\sum\limits_{l=0}^{\infty}\sum\limits_{m=-l}^{m=l}C_l^m Y_l^m(\vartheta,\varphi) \\ C_l^m=\dfrac{2l+1}{4\pi}\dfrac{(l-|m|)!}{(l+|m|)!}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}f(\vartheta,\varphi)[Y_l^m(\vartheta,\varphi)]^*\sin\vartheta\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi \end{cases}$$

4. 柱函数及其应用

■柱函数：Bessel 函数、Neumann 函数、Hankel 函数

■振荡性质





❑Bessel 和 Neumann 函数的基本性质

$x\to 0$ 特性

$$J_0(x)\sim 1-\frac{x^2}{4},\quad J_\nu(x)\sim\frac{x^\nu}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}\ (\nu\neq 0),$$

$$N_0(x)\approx\frac{2}{\pi}\ln\frac{x}{2}\ ;\ N_n(x)\approx-\frac{(n-1)!}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^{-n},(n\geq 1)$$

$x\to\infty$ 特性

$$J_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

$$N_\nu(x)\sim\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\nu\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)$$

■Hankel 函数的渐近性质

$$H_v^{(1)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{\mathrm{i}(x - v\pi/2 - \pi/4)}; H_v^{(2)}(x) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi x}} e^{-\mathrm{i}(x - v\pi/2 - \pi/4)}$$

不同用途:

（1）Bessel 函数：振荡特性，讨论封闭空间的驻波问题，类似于 coskx

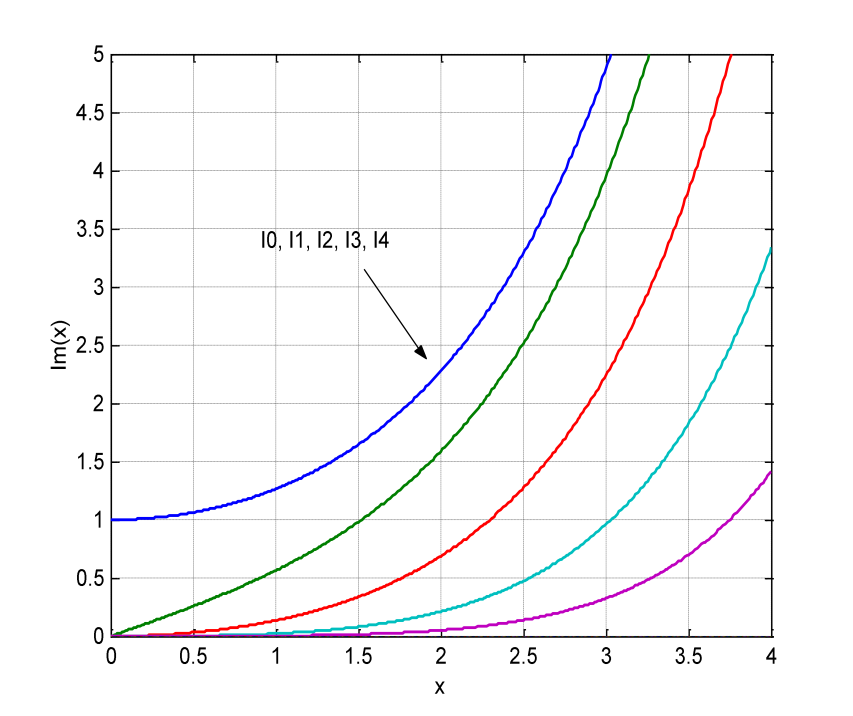
（2）Neumann 函数：在 ρ=0 有奇异性，讨论不包括原点的问题, 振荡特性: 类似于 sinkx

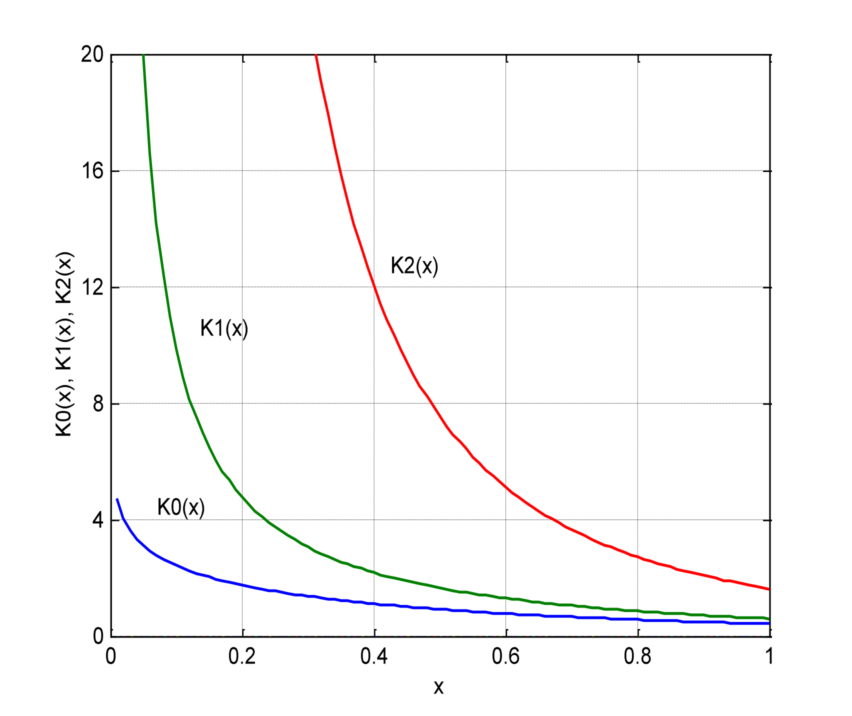
（3）Hankel 函数：行波特性，讨论开空间波的传播和散射问题，类似于 e^{ikx} 和 e^{-ikx}

■虚宗量 Bessel 函数

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}x}-(x^2+\nu^2)R=0,\qquad (x=\sqrt{|\mu|}\rho)$$

$$R(x)=AI_\nu(x)+BK_\nu(x)$$





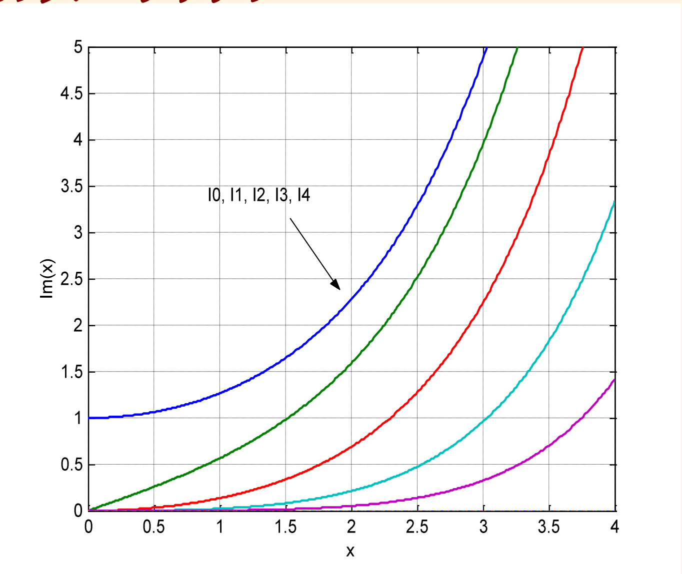
❑虚宗量 Bessel 和 Hankel 函数的特性

- 当 $x \to 0$ 时

$$I_0(0) = 1, \quad I_m(0) = 0 \quad (m > 0)$$

$$K_0(x) \sim -\ln\frac{x}{2}$$

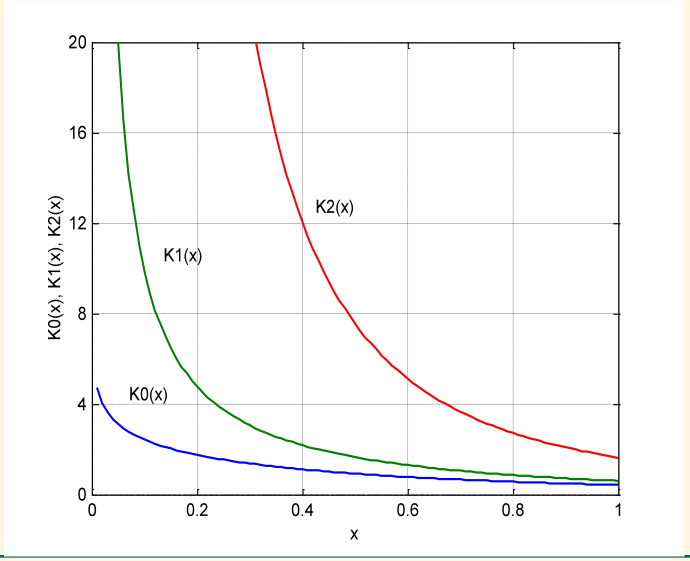
$$K_m(0) \sim \frac{(m-1)!}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m}$$



- 当 $x \to \infty$ 时

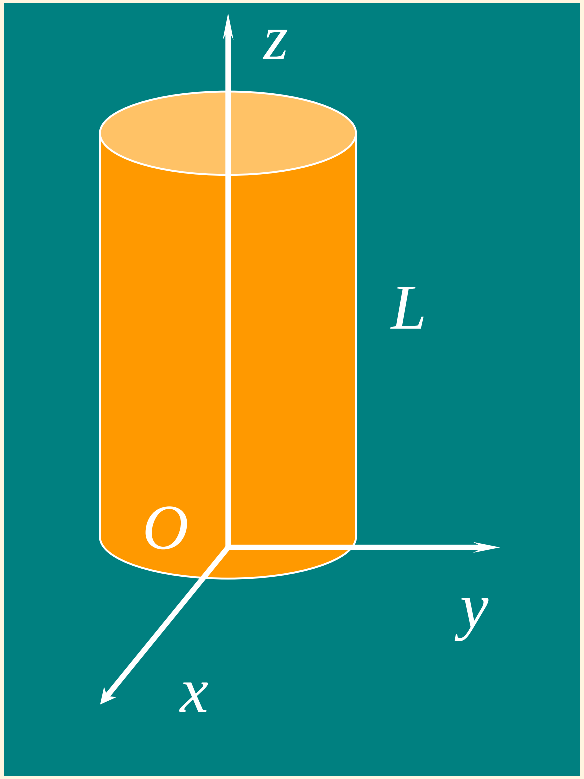
$$I_m(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{x}$$

$$K_m(x) \approx \frac{1}{2\sqrt{x}}e^{-x}$$



■柱内的Laplace方程边值问题

$$\begin{cases} \nabla^2 u = 0, \quad (0 < z < L, \rho < a) \\ \kappa \left.\dfrac{\partial u}{\partial \rho}\right|_{\rho=a} = q_0(z,\varphi), \quad u|_{\rho=0} < \infty \\ u|_{z=0} = f_1(\rho,\varphi), u|_{z=L} = f_2(\rho,\varphi) \end{cases}$$



一个复杂的定解问题化为二个简单的定解问题

令：$u=v+w$，其中

v：上下面是齐次的

w：径向是齐次的

□ Laplace方程 $\nabla^2 u = 0$

■ 球坐标

$$u(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}r^{l}+B_{lm}r^{-(l+1)}\right]Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

球内部

$$u(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}A_{lm}r^{l}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

球外部

$$u(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}B_{lm}r^{-(l+1)}Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

柱坐标

$$u(\rho,\varphi,z)=(C_0+D_0z)(E_0+F_0\ln\rho)+\sum_{m=-\infty}^{\infty}(C_m+D_mz)\rho^m e^{im\varphi}$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu>0}(A_m e^{-\sqrt{\mu}z}+B_m e^{\sqrt{\mu}z})\left[L_m J_m(\sqrt{\mu}\rho)+M_m N_m(\sqrt{\mu}\rho)\right]e^{im\varphi}$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu<0}(H_m\sin\sqrt{|\mu|}z+G_m\cos\sqrt{|\mu|}z)\left[O_m I_m(\sqrt{|\mu|}\rho)+P_m K_m(\sqrt{|\mu|}\rho)\right]e^{im\varphi}$$

$$\Phi_0(\varphi)=C+D\varphi$$

柱内部

$$u(\rho,\varphi,z)=(C_0+D_0z)+\sum_{m=0}^{\infty}(C_m+D_mz)\rho^m e^{im\varphi}$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu>0}(A_m e^{-\sqrt{\mu}z}+B_m e^{\sqrt{\mu}z})J_m(\sqrt{\mu}\rho)e^{im\varphi}$$

$$+\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{\mu<0}(H_m\sin\sqrt{|\mu|}z+G_m\cos\sqrt{|\mu|}z)I_m(\sqrt{|\mu|}\rho)e^{im\varphi}$$

□ **Helmholtz 方程** $\nabla^2 u + k^2 u = 0$

■ **球坐标**

球内驻波解

$$u(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}j_l(kr)+B_{lm}n_l(kr)\right]Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

球外部行波解

$$u(r,\vartheta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^{l}\left[A_{lm}h_l^{(1)}(kr)+B_{lm}h_l^{(2)}(kr)\right]Y_{lm}(\vartheta,\varphi)$$

柱坐标

柱腔内驻波解(有限柱内的本征值问题)

$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k_z,k_\rho}(H_m\sin k_z z+G_m\cos k_z z)\left[O_m J_m(k_\rho\rho)+P_m N_m(k_\rho\rho)\right]e^{\mathrm{i}m\varphi}$$

$$k^2=k_z^2+k_\rho^2$$

柱外行波解(无限长圆柱体辐射)

$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k_z,k_\rho}[H_m\exp(\mathrm{i}k_z z)+G_m\exp(-\mathrm{i}k_z z)]\left[O_m H_m^{(1)}(k_\rho\rho)+P_m H_m^{(2)}(k_\rho\rho)\right]e^{\mathrm{i}m\varphi}$$

$$k^2=k_z^2+k_\rho^2$$

柱内行波解(轴向波导)

$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k_z,k_\rho}(H_m\exp(\mathrm{i}k_z z)+G_m\exp(-\mathrm{i}\,k_z z)\left[O_m J_m(k_\rho\rho)+P_m N_m(k_\rho\rho)\right]e^{\mathrm{i}m\varphi}$$

$$k^2=k_z^2+k_\rho^2$$

平面波导

$$u(\rho,\varphi,z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\sum_{k_z,k_\rho}(H_m\sin k_z z+G_m\cos k_z z)\left[O_m H_m^{(1)}(k_\rho\rho)+P_m H_m^{(2)}(k_\rho\rho)\right]e^{\mathrm{i}m\varphi}$$

$$k^2=k_z^2+k_\rho^2$$

■柱函数与一维比较

二维（柱坐标）	一维（直角坐标）
$\frac{\mathrm{d}^2R(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}+\left(k_\rho^2-\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0$	$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2X=0$
■ **驻波解**	■ **驻波解**
$R(\rho)=C_1J_\nu(k_\rho\rho)+C_2N_\nu(k_\rho\rho)$	$X(x)=C_1\cos(k_xx)+C_2\sin(k_xx)$
$\begin{cases}H_\nu^{(1)}(k_\rho\rho)=J_\nu(k_\rho\rho)+\mathrm{i}N_\nu(k_\rho\rho)\\H_\nu^{(2)}(k_\rho\rho)=J_\nu(k_\rho\rho)-\mathrm{i}N_\nu(k_\rho\rho)\end{cases}$	$\begin{cases}e^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x\\e^{-\mathrm{i}x}=\cos x-\mathrm{i}\sin x\end{cases}$
■ **行波解**	■ **行波解**
$R(\rho)=C_1H_\nu^{(1)}(k_\rho\rho)+C_2H_\nu^{(2)}(k_\rho\rho)$	$X(x)=C_1e^{\mathrm{i}k_xx}+C_2e^{-\mathrm{i}k_xx}$

二维（柱坐标）

$$\frac{\mathrm{d}^2R(\rho)}{\mathrm{d}\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\mathrm{d}R(\rho)}{\mathrm{d}\rho}-\left(\kappa_\rho^2+\frac{\nu^2}{\rho^2}\right)R(\rho)=0$$

$$R(\rho)=C_1I_\nu(\kappa_\rho\rho)+C_2K_\nu(\kappa_\rho\rho)$$

一维（直角坐标）

$$\frac{\mathrm{d}^2X}{\mathrm{d}x^2}-\kappa_x^2X=0$$

$$X(x)=C_1e^{\kappa_x x}+C_2e^{-\kappa_x x}$$

$$\left\{J_\nu(\mathrm{i}\kappa_\rho\rho),J_{-\nu}(\mathrm{i}\kappa_\rho\rho),N_\nu(\mathrm{i}\kappa_\rho\rho),H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}\kappa_\rho\rho),H_\nu^{(2)}(\mathrm{i}\kappa_\rho\rho)\right\}$$

$$I_\nu(x)\equiv\mathrm{i}^{-\nu}J_\nu(\mathrm{i}x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\nu+2k}$$

$$K_\nu(x)=\frac{\pi}{2}\mathrm{i}^{\nu+1}H_\nu^{(1)}(\mathrm{i}x)=-\frac{\pi\mathrm{i}}{2}e^{-\mathrm{i}\nu\pi/2}H_\nu^{(2)}(-\mathrm{i}x)$$

三维（球坐标）

$$\frac{\mathrm{d}^2 R}{\mathrm{d}r^2}+\frac{2}{r}\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}+\left[k^2-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0$$

$$R_l(r)=A_l j_l(kr)+B_l n_l(kr)$$

$$h_l^{(1)}(kr)=j_l(kr)+\mathrm{i}n_l(kr)$$

$$h_l^{(2)}(kr)=j_l(kr)-\mathrm{i}n_l(kr)$$

$$R_l(kr)=A_l h_l^{(1)}(x)+B_l h_l^{(2)}(kr)$$

一维（直角坐标）

$$\frac{\mathrm{d}^2 X}{\mathrm{d}x^2}+k_x^2 X=0$$

$$X(x)=A\cos(k_x x)+B\sin(k_x x)$$

$$e^{\mathrm{i}k_x x}=\cos(k_x x)+\mathrm{i}\sin(k_x x)$$

$$e^{-\mathrm{i}k_x x}=\cos(k_x x)-\mathrm{i}\sin(k_x x)$$

$$X(x)=Ae^{\mathrm{i}k_x x}+Be^{-\mathrm{i}k_x x}$$

——驻波解，行波解

5. Green函数

■基本解

□三维Laplace 算子的基本解

$$-\nabla^2 G_0 = \delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') \Rightarrow G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{4\pi}\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

□二维Laplace 算子的基本解

$$-\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)G_0 = \delta(x-x')\delta(y-y')$$

$$\Downarrow$$

$$G_0(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}') = \frac{1}{2\pi}\ln\frac{1}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

□三维Helmholtz 算子的 基本解

$$-(\nabla^2+q^2)G_0=\delta(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')$$

$$G_{0\pm}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{e^{\pm \mathrm{i}q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}}{4\pi|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$

□二维Helmholtz 算子的 基本解

$$G_{0-}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(1)}(q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

$$G_{0+}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=\frac{\mathrm{i}}{4}H_0^{(2)}(q|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|)$$

■含时基本解

□n维扩散方程

$$\begin{cases} G_t - c^2\nabla^2 G = 0 \\ G|_{t=0} = \delta(\mathbf{r},\mathbf{r}') \end{cases} \Rightarrow G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t) = \frac{1}{(4\pi c^2 t)^{n/2}} e^{-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4c^2 t}}$$

$$\begin{cases} \tilde{G}_t - c^2\nabla^2 \tilde{G} = \delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \\ \tilde{G}|_{t=0} = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}';t,t') = \frac{H(t-t')}{\left[4\pi c^2(t-t')\right]^{n/2}} \exp\left[-\frac{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^2}{4c^2(t-t')}\right]$$

□三维波动方程

$$G_{tt}-c^2\nabla^2 G=0$$

$$G|_{t=0}=0,\quad G_t|_{t=0}=\delta(\mathbf{r},\mathbf{r}') \Rightarrow G(\mathbf{r},\mathbf{r}',t)=\frac{\delta(|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-ct)}{4\pi c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

$$\begin{cases}\tilde{G}_{tt}-c^2\nabla^2\tilde{G}=\delta(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\delta(t-t') \\ \tilde{G}|_{t=0}=0;\tilde{G}_t|_{t=0}=0\end{cases}$$

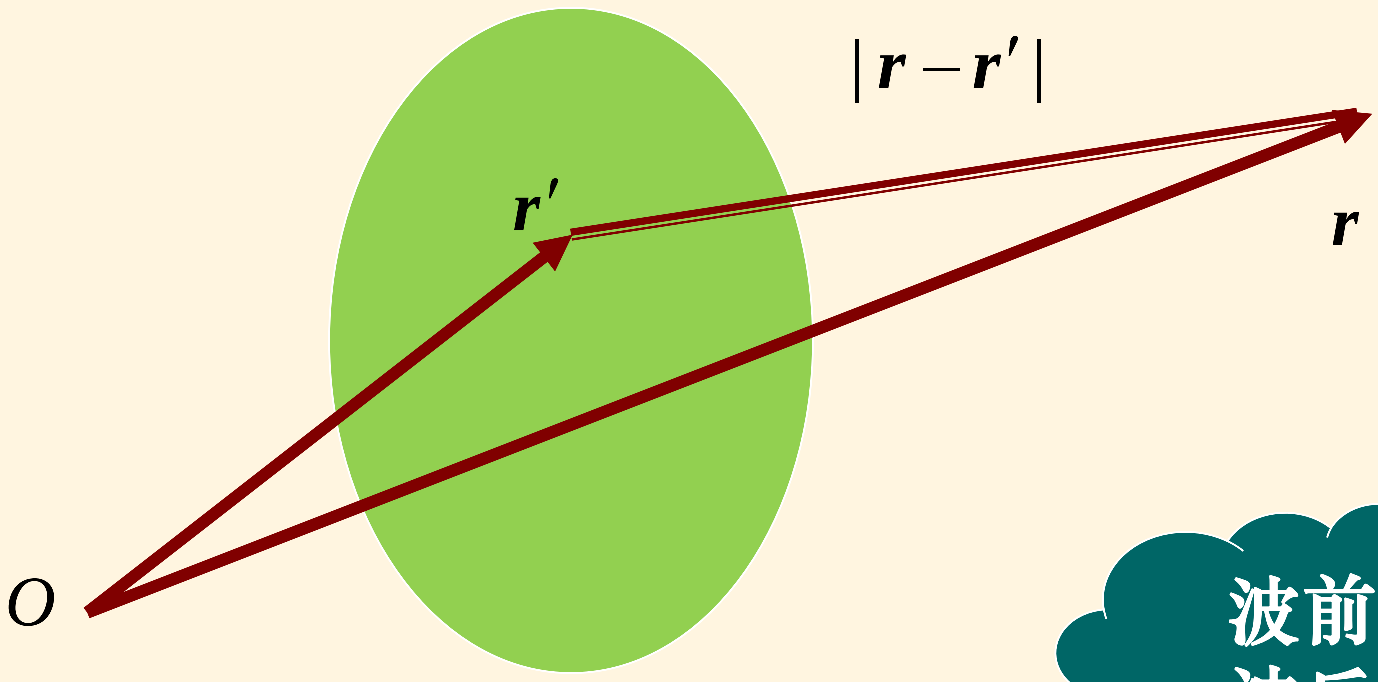
二维情况？

$$\Downarrow$$

$$\tilde{G}(\mathbf{r},\mathbf{r}',t-t')=H(t-t')\frac{\delta[|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|-c(t-t')]}{4\pi c|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}$$

三维

$$\tilde{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t') = H(t-t')\frac{\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-c(t-t')]}{4\pi c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}$$



到达时间

$$t = t' + \frac{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}$$

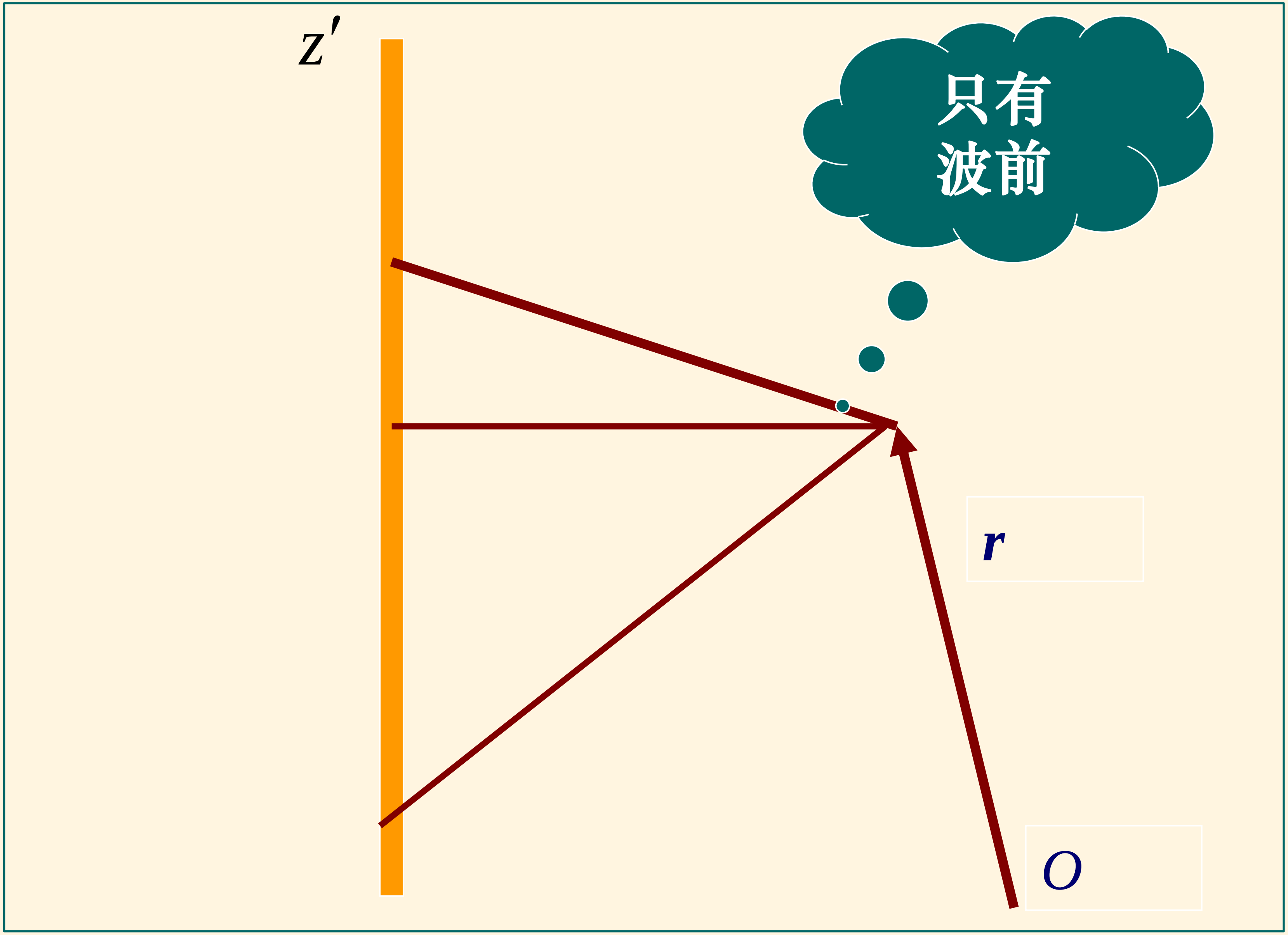
二维：降维法

$$\tilde{G}_{2D}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}',t-t')=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{G}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}',t-t')\mathrm{d}z'$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\delta[|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|-c(t-t')]}{4\pi c|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}z'$$

$$\Downarrow$$

$$G_{2D}(\boldsymbol{\rho},\boldsymbol{\rho}',t,t')=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi\sqrt{(t-t')^2-|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|^2/c^2}}, & t>t'+\dfrac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}{c}\\[2ex] 0, & t<t'+\dfrac{|\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\rho}'|}{c}\end{cases}$$



z′
只有
波前
r
O