数学物理方法

Methods of Mathematical Physics

程建春

南京大学物理学院

Email: jccheng@nju.edu.cn

本课程的目的

本科阶段后续理论课程中出现的数学方法

- ■电动力学
- ■量子力学
- ■统计力学
- ■专业课程(声学基础，固体理论)

■凝聚态理论、广义相对论、量子场论

■微分几何、泛函分析、群论、拓扑学

本课程的后续课程

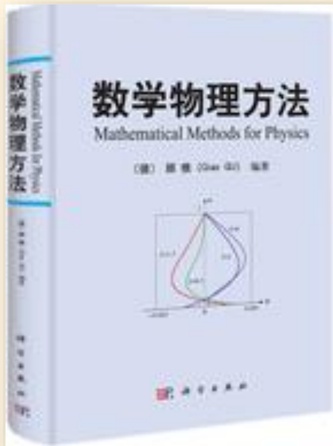
电动力学：静电场的求解，Laplace方程的边值问题；传播问题，辐射问题：波动方程的解,…

量子力学：算子理论：本征值问题；波动方程的求解、广义Fourier展开；近似方法,…

热力学和统计力学：热的输运，涨落相关性, 热扩散方程的求解；量子统计；态密度,..

声学基础：传播的传播；散射问题；腔内声场；声波辐射，波动方程的解,…

本课程的参考书(基本)



顾樵 /2016-01-01 /科学出版社

吴崇试 /2003-12-01 /北京大学出版社

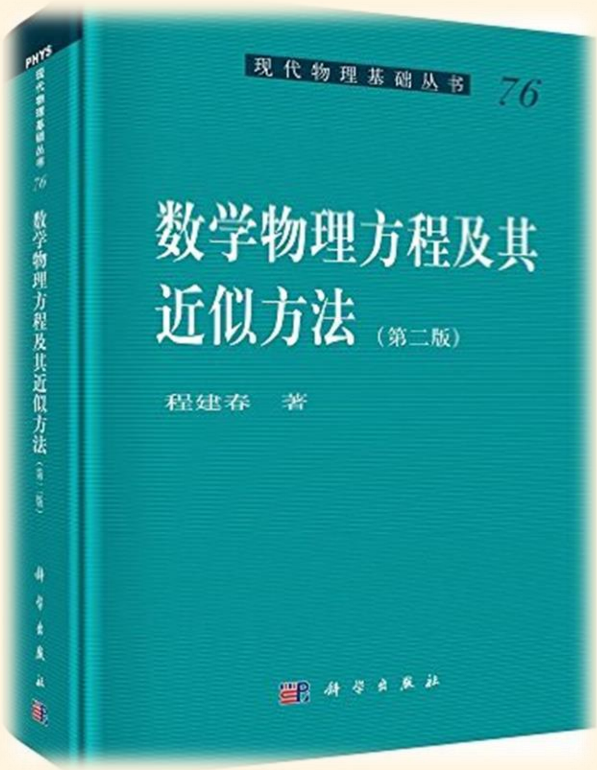
姚端正 /2015-12-01 /科学出版社

邵惠民 /2016-03-01 /科学出版社

本课程的参考书(扩展)

- Zauderer E. Partial Differential Equations of Applied Mathematics, 2nd ed. New York: John Wiley & Sons, 1989
- Stakgold I. Green's functions and Boundary Value Problems, 2nd ed. New York: Wiley-Interscience, 1997
- Prosperetti A. Advanced Mathematics for Applications, New York: Cambridge 2011
- Cushing JT Applied Analytical Mathematics for Physical Scientists, New Yorks: John Wiley & Sons, 1975
- R. 柯朗, D. 希尔伯特. 数学物理方法(上、下) . 北京：科学出版社 , 2012
- F. W. 拜仑, R. W. 富勒. 物理学中的数学方法(一、二卷) . 北京：科学出版社, 1982

本课程的参考书(扩展)



程建春，科学出版社，2016，北京

目　　录

本课程的主要内容

第一部分 复变函数论：解析函数、初等函数（多值函数）、复变函数积分、无穷级数、Taylor 展开和Laurent 展开、留数理论

第二部分 应用分析方法：Fourier变换、广义函数、常微分方程的级数解法、本征值问题、广义Fourier展开

第三部分 数学物理方程：定解问题、分离变量法、球函数及其应用、柱函数及其应用、Green 函数理论、变分法及应用、逆问题

介绍比较新的内容

- **分数导数和分数积分：** 含有分数导数的偏微分方程
- **分数Laplace算子:** 含分数Laplace算子的偏微分方程
- **时频分析：** 短时Fourier变换和Gabor变换，小波变换
- **分数Fourier变换:** Fourier积分算子及本征值问题，短时分数Fourier变换
- **逆问题：** 方程的逆问题，边界的逆问题，源的逆问题, Tikhonov正则化方法

第1章 复变函数和解析函数

1.1 复变函数和映射

复数，复变函数，极限和连续性

1.2 导数和Cauchy-Riemann条件

可导必要条件，导数的几何意义

1.3 解析函数及其性质

充要条件，调和函数的基本性质

1.4 初等解析函数

整幂次函数，指数函数，三角函数

1.5 多值函数(根式,对数, 反三角函数)

多值映射，分支点，割线

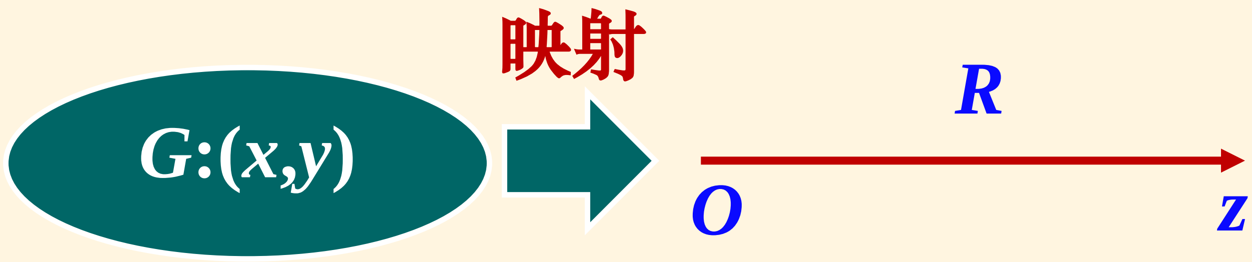
□复变函数：主要贡献

- Cauchy (1789-1857): 导数和积分入手——函数论
- Riemann (1826-1866): 几何性质入手——保角映射、Riemann面概念
- Weierstrass(1815-1897): 幂级数入手——解析延拓——解析理论

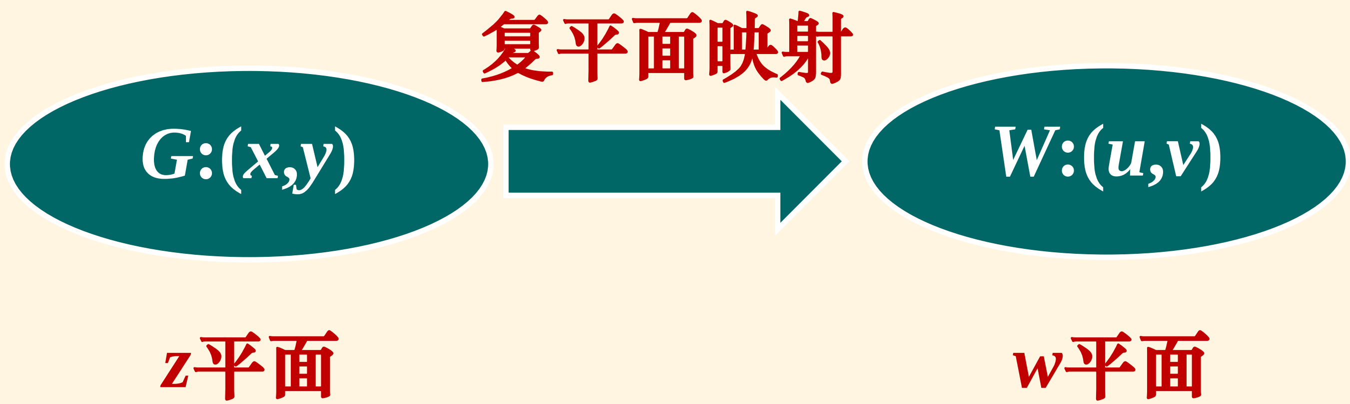
- 复变函数理论：抽象科学中最和谐、最完美的理论；
- 三个优美点：幂级数展开的存在性；Cauchy定理；解析延拓的唯一性——局部决定整体。

□复变函数是干什么的?

- 二元实变函数$z=f(x,y)$



- 一元复变函数$w=f(z)=f(x+iy)=u(x,y)+iv(x,y)$



■ 研究复变函数的性质

1. 连续性质：特定点的性质

间断（第一类、第二类），连续，一致连续

2. 微分性质：ε邻域性质——无限小局部性质

处处连续但处处不可导函数，Weierstrass函数

3. 积分性质：全局性质——有限或无限区间性质

绝对可积，平方可积，广义积分，主值积分

4. 幂级数性质：局部性质——收敛区间性质

实函数：不一定存在Taylor展开；复变函数?

1.1 复变函数和映射

□ 复数和复数域

有序实数对的集合 $z=(x,y),(x,y\in R)$

$$z=x+\mathrm{i}y$$

$\mathrm{i}=\sqrt{-1};\ \mathrm{i}^2=-1$

虚数单位

x=Re(z): 实部； y=Im(z): 虚部

定义加、减、乘、除运算（满足交换律和结合律）

复数域

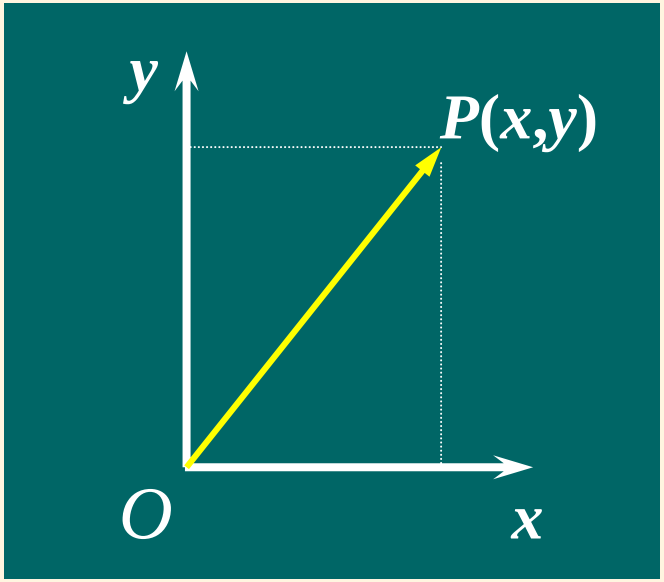
❑复数的复平面表示

复数与平面上的点一一对应

以x为横轴—实轴

以y为纵轴—虚轴

构成平面——复平面



$$z = x + \mathrm{i}y \iff P(x, y)$$

(x,y)：有限——有限复平面

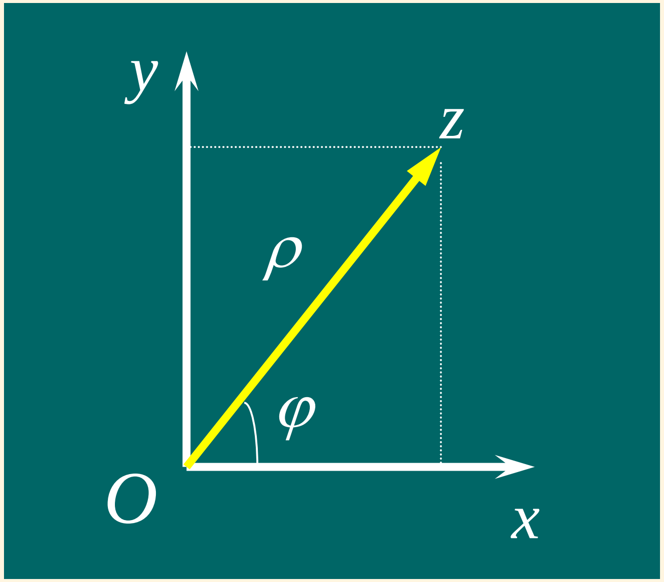
(x,y)：至少有一个无限——扩充复平面

复数无限大点的意义：复数的球面表示

❑复数的极坐标表示

$$x = \rho\cos\varphi;\quad y = \rho\sin\varphi$$

$$z = \rho(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = \rho\exp(\mathrm{i}\varphi)$$



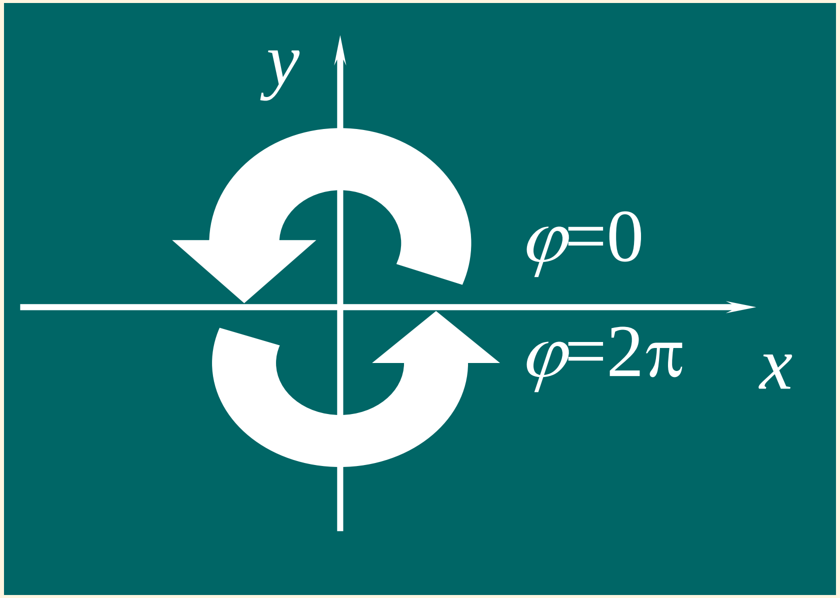
- **模和辐角** $\rho = |z|;\quad \varphi = \mathrm{Arg}(z)$
- **主值 满足** $0 \le \arg(z) < 2\pi$

$$\varphi = \mathrm{Arg}(z) = \arg(z) + 2k\pi \;\; (k = 0, \pm1, \pm2, \ldots.)$$

- **复数零：模为零，辐角任意(原点)**
- **复数无限大：模趋近无限大，辐角任意(一点)**
- **直角坐标 ⟹ 极坐标 ⟹ 变量的多值性问题?**

注意：1. 反正切的定义为

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan\left(\frac{y}{x}\right) < \frac{\pi}{2}$$



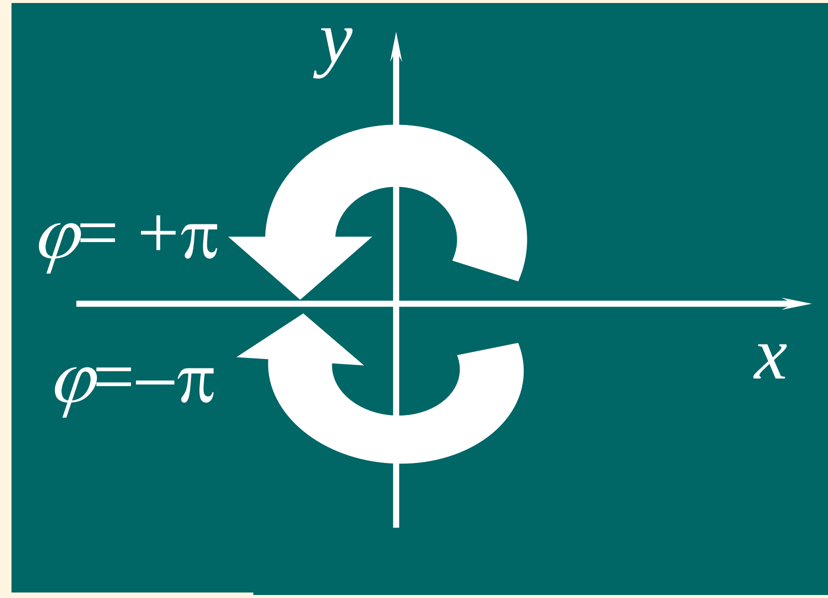
主值与反正切的关系为

$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right), & \text{第I象限} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \pi, & \text{第II、III象限} \\ \arctan\left(\frac{y}{x}\right) + 2\pi, & \text{第IV象限} \end{cases}$$

一般教科书中的辐角定义

2.可以定义主值范围

$$-\pi < \arg(z) \le \pi$$



主值与反正切的关系为

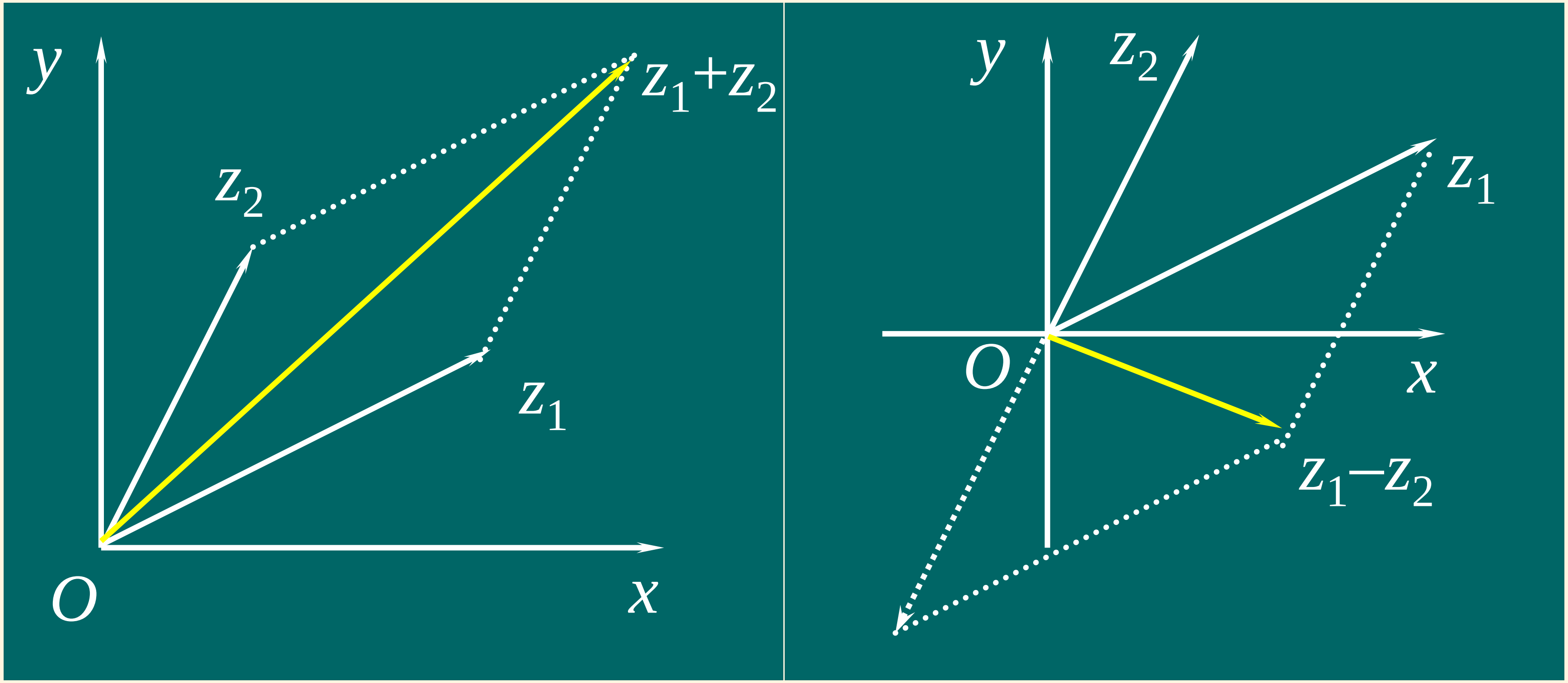
$$\arg(z) = \begin{cases} \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right), & \text{第I、IV象限} \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \pi, & \text{第II象限} \\ \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) - \pi, & \text{第III象限} \end{cases}$$

MATLAB中的辐角定义

❑复数的运算和几何意义（代数结构：复数域）

加法和减法 $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + \mathrm{i}(y_1 \pm y_2)$

几何意义：平行四边形法则



乘法

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + \mathrm{i}(x_1 y_2 + x_2\ y_1)$$

交换律 $$z_1 z_2 = z_2 z_1$$

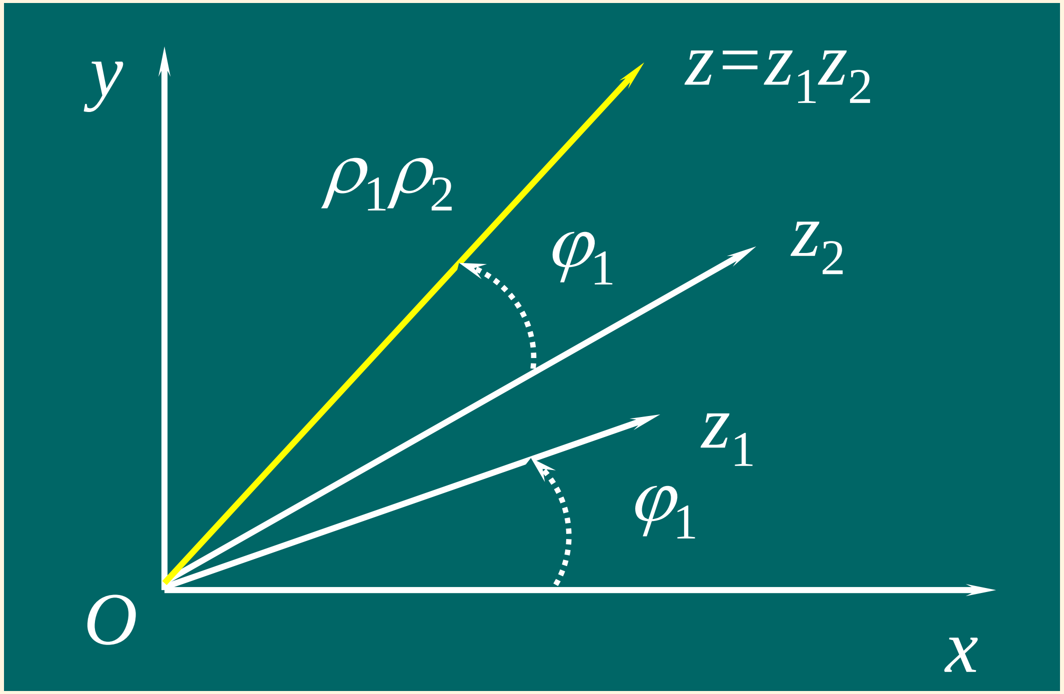
结合律 $$(z_1 z_2) z_3 = z_1 (z_2 z_3)$$

分配律 $$z_1 (z_2 + z_3) = z_1 z_2 + z_1 z_3$$

极坐标表示

$$z \equiv z_1 z_2 = \rho_1 \rho_2 \exp[\mathrm{i}(\varphi_1 + \varphi_2)]$$

几何意义:复矢量的转动和放大(缩小)——把 z_2旋转 φ_1，模扩大ρ_1倍；或者把z_1旋转φ_2，模扩大ρ_2倍



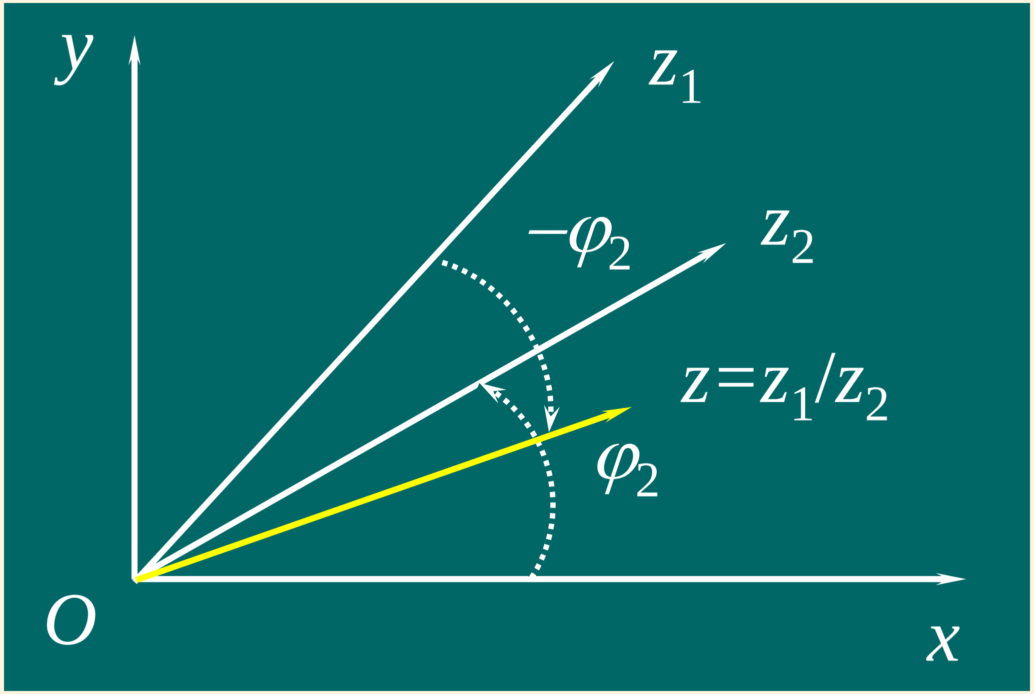
除法

$$z \equiv \frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + \mathrm{i}\,\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}$$

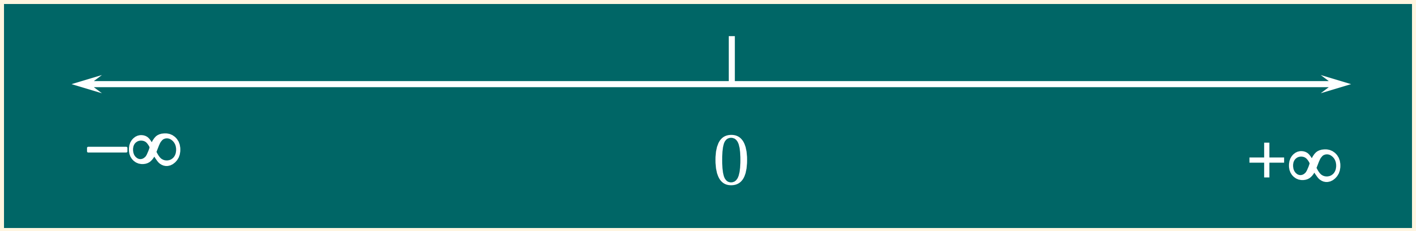
■ 极坐标表示

$$z \equiv \frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} \exp[\mathrm{i}(\varphi_1 - \varphi_2)]$$

几何意义：复矢量的转动和缩小(放大)——把z_1旋转（$-\varphi_2$), 模缩小ρ_2倍——乘法的逆运算



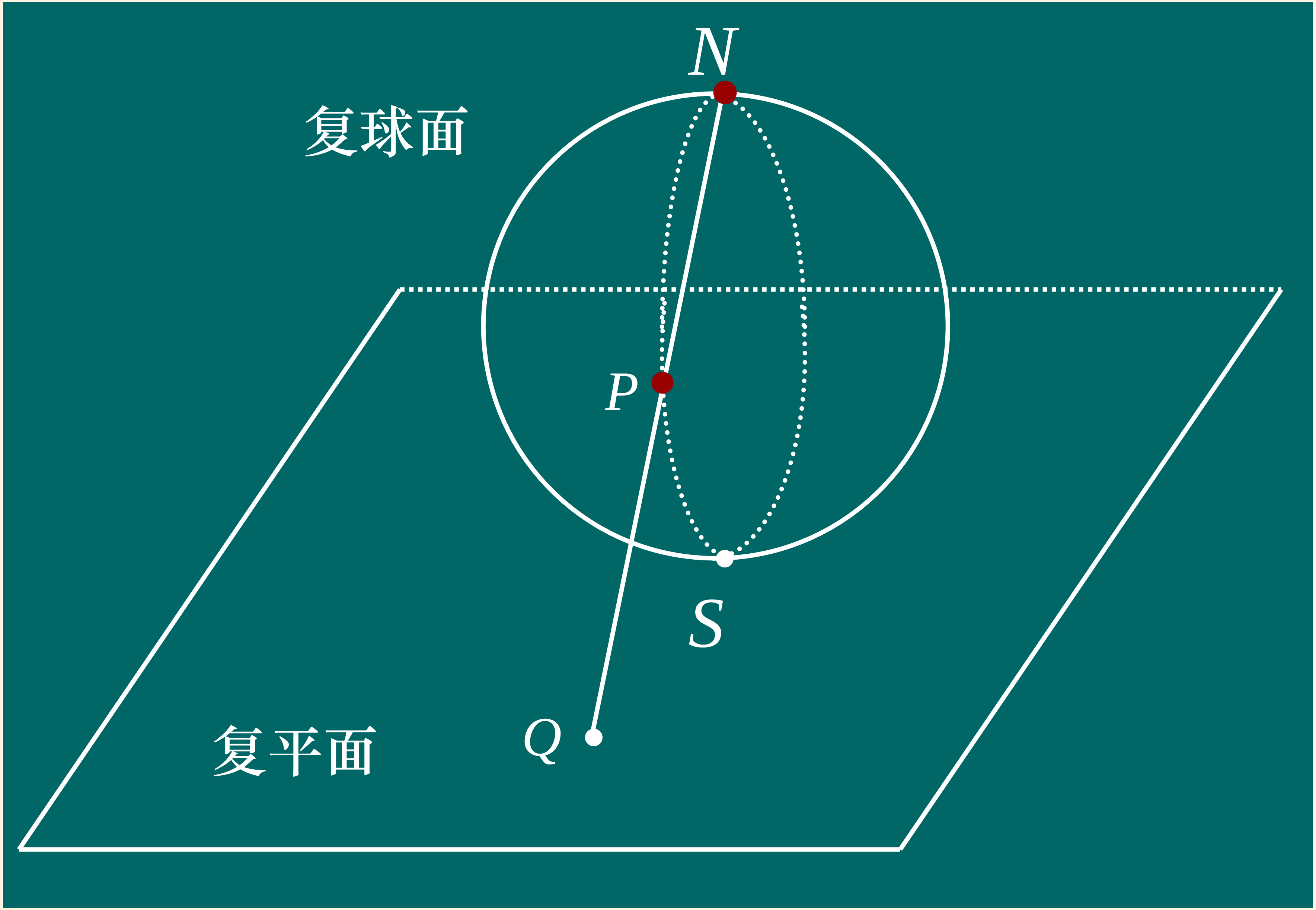
❑无限远点　　与实函数无限大的区别



实数：正无限和负无限——符号

复数：复平面上的一个点——模为无限，辐角不定——扩充复平面

复数的球面表示：复平面上的点与复数球面上的点一一对应。复球面的北极N与无限大对应——故复数无限大为复平面上的一个点


N
复球面
P
S
Q
复平面

□多元数（超复数）（中国科学家的贡献）

- 二元数： $z=x+iy$ 和，差，积，商 ➡ 复数域
- 三元数：$z=a+ib+cj$ 无法自恰定义和差积商，形不成数域
- 四元数：$z=a+ib+cj+dk$ 和，差，积，商

不满足乘法交换律

$$i^2=j^2=k^2=-1$$

$$ij=k,\ ji=-k,\ jk=i,\ kj=-i,\ ki=j,\ ik=-j$$

$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$，称为四元数的二范数。

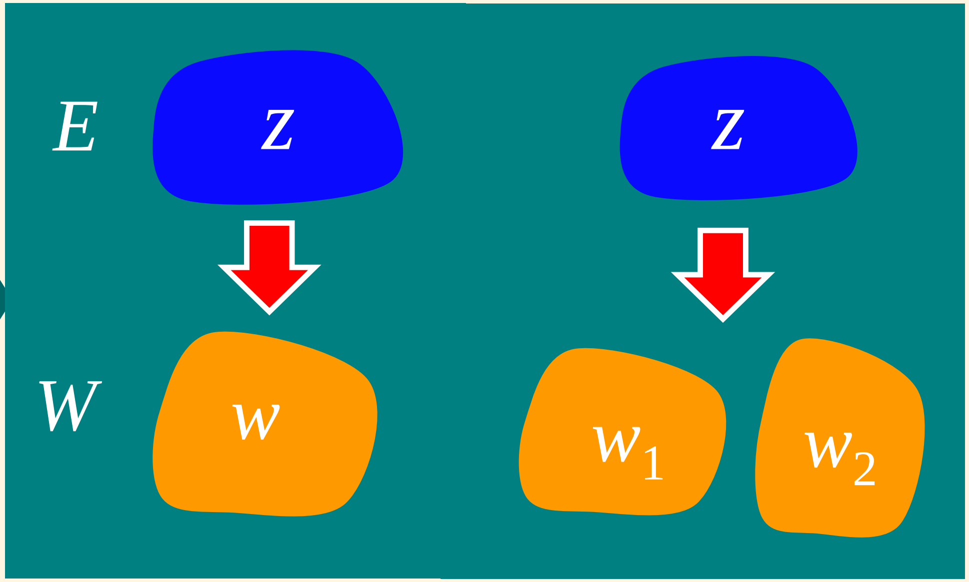
在电动力学和广义相对论中有应用（代替张量运算）

□ 复变函数和映射

□ **定义：若在复数平面上存在一个点集 E, 对于E 的每一点z，按照一定的规律，有一个或多个复值 w 与之相对应，则称w 为z 的复变函数**

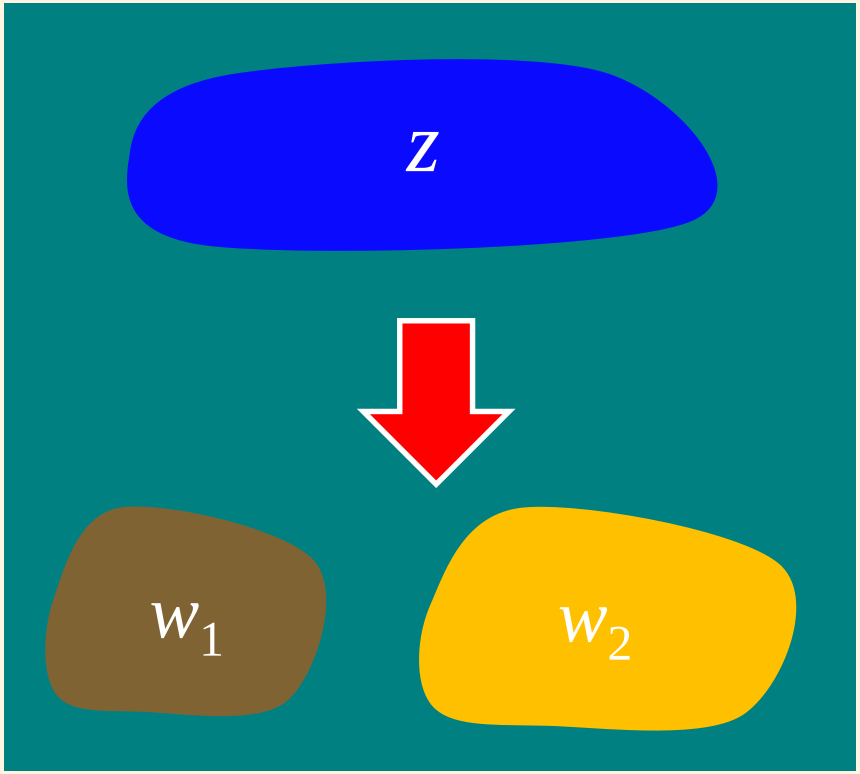
$$w = f(z),\ z \in E$$

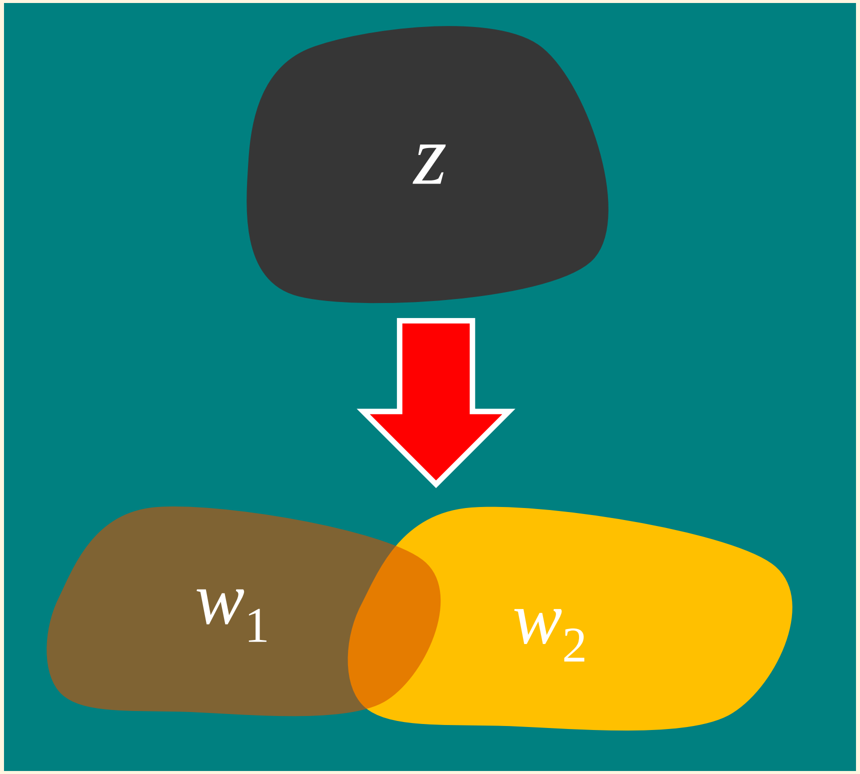
① 如果z与w 一一对应，则称$f(z)$为**单值函数**；
② 如果对应一个z，有多个w，则称$f(z)$为**多值函数**。



□ 多值函数

$$w = f(z),\ z \in E$$



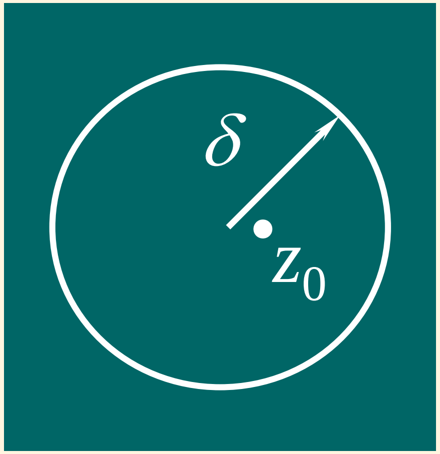


映射到二个独立的区域　　**二个映射区域相互交叠**

□区域的概念 邻域、内点、外点和边界点

■邻域：复平面C上一点z_0的δ邻域定义为半径为$\delta>0$的圆内部的各点

$$|z-z_0|<\delta$$



如果圆内部点不包括z_0点，则称为“去心邻域”

$$0<|z-z_0|<\delta$$

■内点：复平面C上的点集E，如果存在z_0的一个δ邻域，它的各点都属于点集E，那么称z_0为点集E的内点

■**边界点：**如果z_0的δ邻域内，既有属于点集E的点，又有不属于点集E的点，那么称z_0为边界点

■**外点：**如果不存在z_0的一个δ邻域，它的各点都属于点集E，那么称z_0为点集E的外点

■ 区域

1、全由内点组成的点集E；

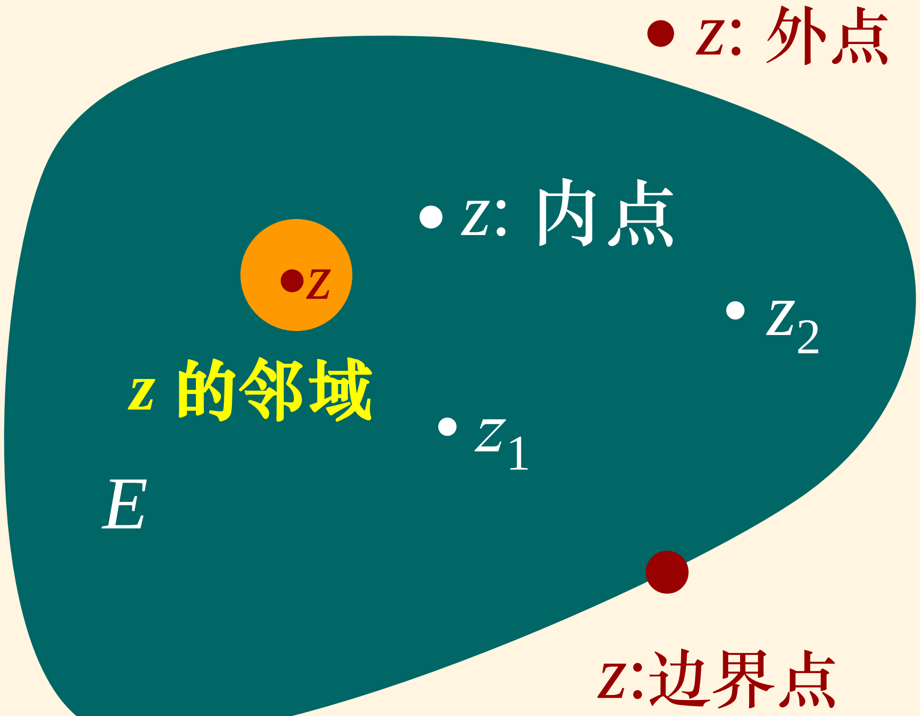
2、具有连通性: E中任意二点都可以用完全属于E 的一条折线连接起来。

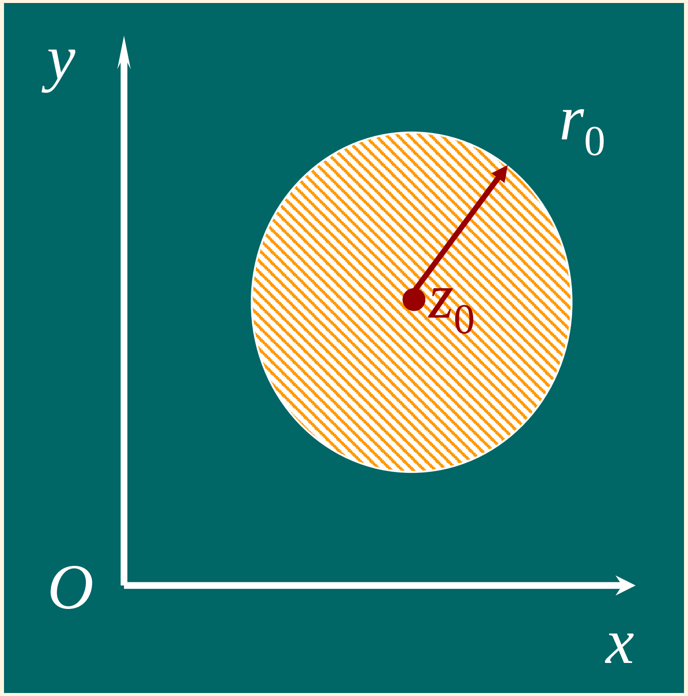
——简单地说：区域就是复变量z的变化范围。
注意：区域不包括边界点

邻域、内点、外点和边界点

开区域: $|z - z_0| < r_0$

闭区域: $|z - z_0| \le r_0$





闭区域：区域+边界点 $\overline{E} = E + \partial E$

❑单连通区域和多连通区域

- **曲线:**

复平面上的一条曲线可用参数方程表示为

$$x = x(t); y = y(t),\ (a \le t \le b) \Rightarrow z = z(t)$$

- **光滑曲线:**

$x'(t), y'(t)$ 连续且 $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ ，即曲线具有连续的切向。如果以上一阶导数分段连续，称为分段光滑曲线。

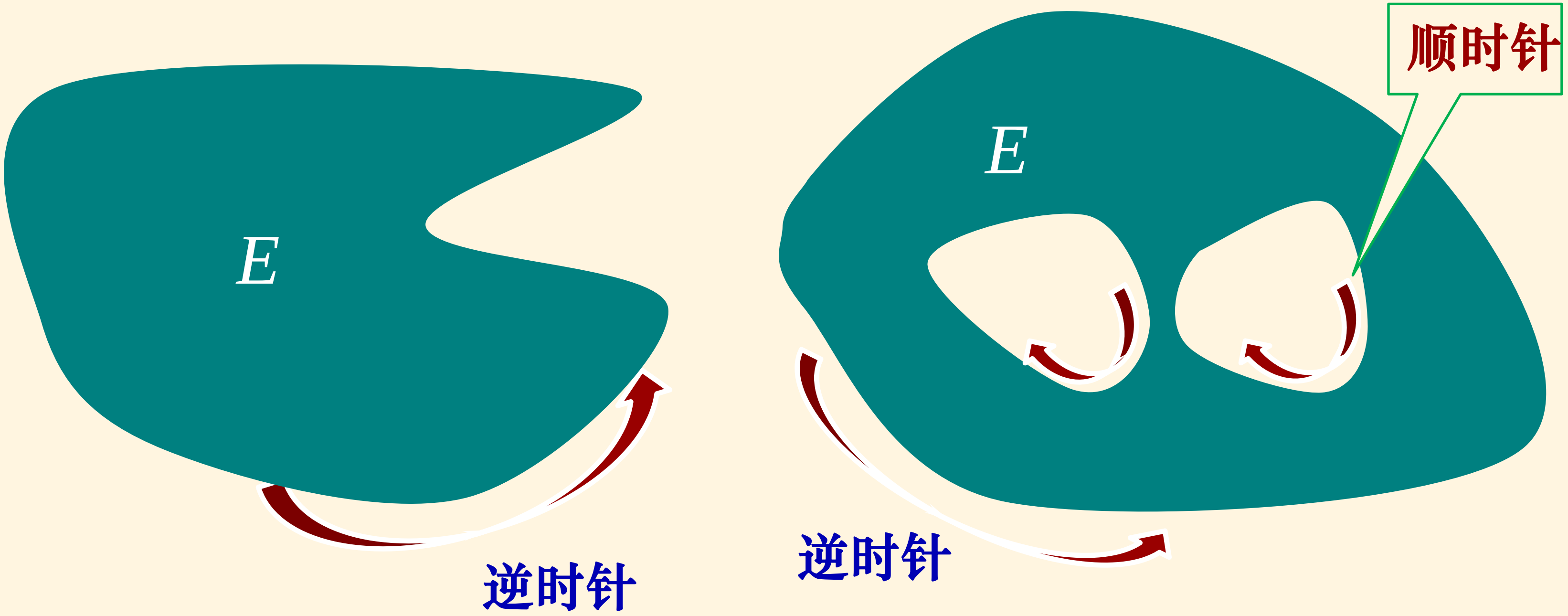
- **简单曲线：** 不相交的曲线。

- **闭合曲线:** $z(a) = z(b)$
- **曲线的方向:**

1、开曲线：起点 ➡ 终点

2、闭曲线：沿曲线的方向，区域始终在左边

■ **单连通区域:** 复平面上的区域E, 在其中任意作一条简单闭合曲线，如果曲线的内部都属于E，则这个区域称为单连通区域，否则为多连通区域。

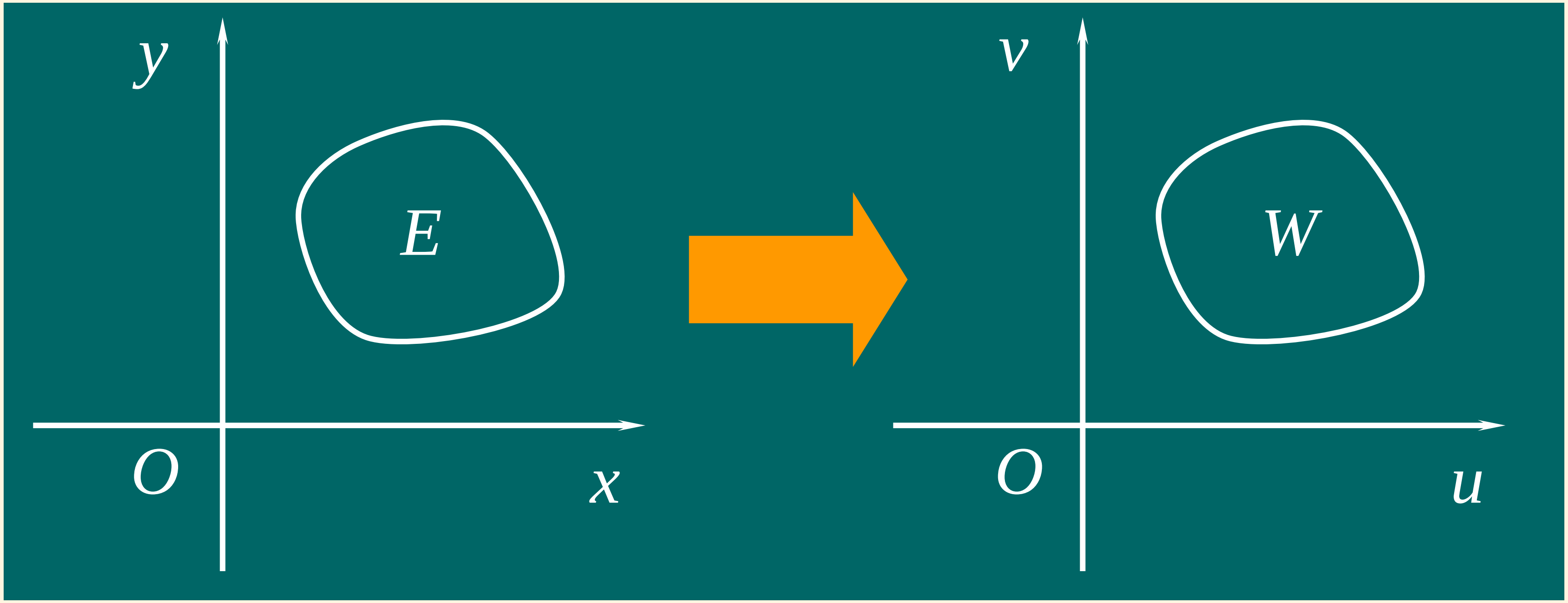


单连通区域 **多连通区域**

❑映射

函数 $w=f(z)$ **可看作：把z平面的点集E映射到w平面的点集W——称为象.**

$$w=f(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$



■ 研究复变函数的性质

1. 连续性质：特定点的性质

间断（第一类、第二类），连续，一致连续

2. 微分性质：ε邻域性质——无限小局部性质

处处连续但处处不可导函数，Weierstrass函数

3. 积分性质：全局性质——有限或无限区间性质

绝对可积，平方可积，广义积分，主值积分

4. 幂级数性质：局部性质——收敛区间性质

实函数：不一定存在Taylor展开；复变函数?

❑复变函数的极限、连续和一致连续

■极限: 设函数$w=f(z)$定义在z_0的去心邻域

$$0<|z-z_0|<\rho$$

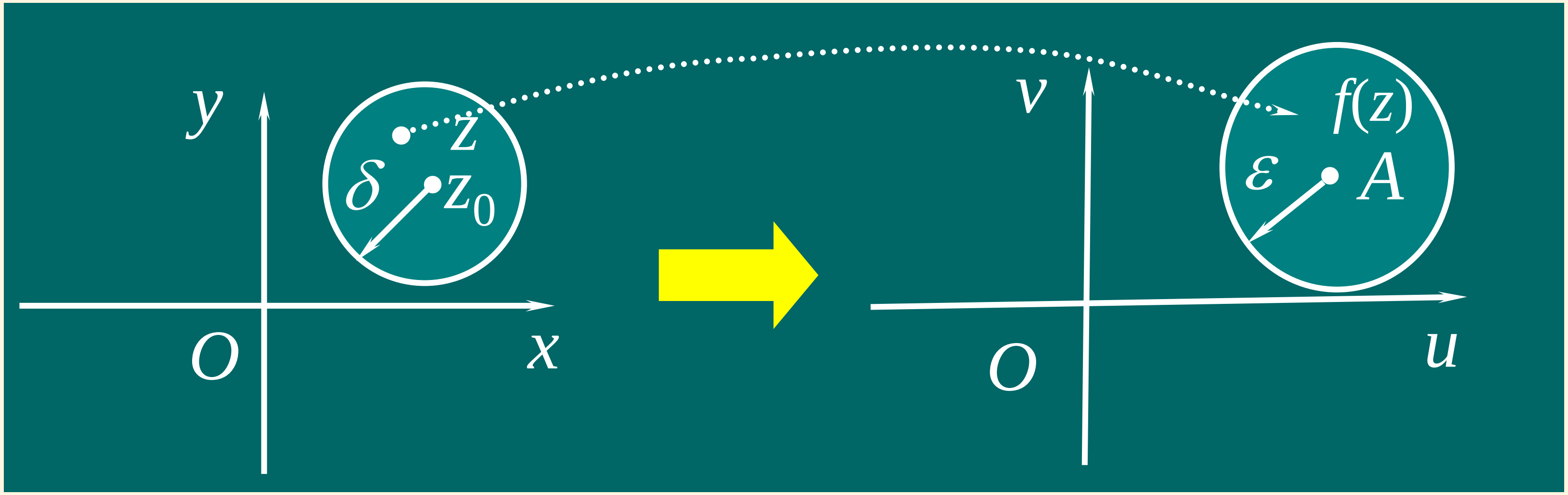
注意：意味着函数在z_0点无定义, 如果存在一确定的复数A，对于给定的$\varepsilon>0$，相应地必存在一正数$\delta(\varepsilon)$ $(0<\delta<\rho)$，当 $0<|z-z_0|<\delta$时

$$|f(z)-A|<\varepsilon$$

称A为$f(z)$当z趋近z_0时的极限. 记作

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=A$$

极限的几何意义



变点一旦进入z_0的δ去心邻域，象点$f(z)$就落入预先给定的ε邻域!

趋向z_0的方式是任意的

■**连续:** 函数$w=f(z)$在z_0点有定义且$f(z_0)=A$，如果当z趋近z_0点时，$f(z)$的极限存在且为有限常数A

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)=A$$

则称函数$w=f(z)$在z_0点连续.

■**一致连续:** (ε-δ语言)对任意的ε，存在与z_1和z_2无关的$\delta(\varepsilon)$，当$|z_1-z_2|<\delta$，使

$$|f(z_1)-f(z_2)|<\varepsilon$$

1、如果函数$w=f(z)$在区域E上的每一点都连续，则称函数$w=f(z)$在区域E上连续;

2、如果函数$w=f(z)$在曲线C上的每一点都连续，则称函数$w=f(z)$在曲线C上连续。

- 闭区域或者简单曲线上的连续函数一定是一致连续的—与实变函数结论类似。

$f(x)=\ln x$ 在区域$(0,\infty)$上连续，但不一致连续，但在区域$[\eta,\infty)$上一致连续，其中$\eta>0$.

连续函数的性质

如果 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)=f(z_0)$; $\lim\limits_{z\to z_0} g(z)=g(z_0)$

1、 $\lim\limits_{z\to z_0}\left[f(z)+g(z)\right]=f(z_0)+g(z_0)$;

2、 $\lim\limits_{z\to z_0} f(z)g(z)=f(z_0)g(z_0)$;

3、 $\lim\limits_{z\to z_0}\dfrac{f(z)}{g(z)}=\dfrac{f(z_0)}{g(z_0)}\quad (g(z_0)\neq 0)$.

注意点：极限无限大与不存在的区别

$$f(z)=\frac{1}{z}\Rightarrow\lim_{z\to 0}f(z)=\infty$$

- **沿正实轴趋向原点：** $z=x^{+}\to 0$

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{x\to 0^{+}}\frac{1}{x}=+\infty$$

- **沿负实轴趋向原点：** $z=x^{-}\to 0$

$$\lim_{z\to 0}f(z)=\lim_{x\to 0^{-}}\frac{1}{x}=-\infty$$

- **沿正虚轴趋向原点：** $z = \mathrm{i}y^{+} \to \mathrm{i}0$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{y\to 0^{+}} \frac{1}{\mathrm{i}y} = -\mathrm{i}\infty$$

- **沿负虚轴趋向原点：** $z = -\mathrm{i}y^{-} \to -\mathrm{i}0$

$$\lim_{z\to 0} f(z) = \lim_{y\to 0^{-}} \frac{1}{\mathrm{i}y} = \mathrm{i}\infty$$

四个类型都是无限大

$$\infty, -\infty, \mathrm{i}\infty, -\mathrm{i}\infty \Rightarrow \infty$$

$$f(z)=e^{1/z} \Rightarrow \lim_{z\to 0} f(z)=\text{不存在}$$

- **沿正实轴趋向零：** $z=x^{+}\to 0$

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{x\to 0} e^{1/|x|} \Rightarrow +\infty$$

- **沿负实轴趋向零：** $z=x^{-}\to 0^{-}$

$$\lim_{z\to \infty} f(z)=\lim_{x\to 0} e^{-1/|x|} \Rightarrow 0$$

- **沿正虚轴趋向零：** $z=\mathrm{i}y\to \mathrm{i}0^{+}$

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{y\to 0} e^{-\mathrm{i}/|y|}=\text{有限}$$

- **沿负虚轴趋向原点：** $z=-\mathrm{i}y\to -\mathrm{i}0^{-}$

$$\lim_{z\to 0} f(z)=\lim_{y\to 0} e^{\mathrm{i}/|y|}=\text{有限}$$

——极限不存在

1.2 导数和Cauchy-Riemann 条件

❑ 导数的定义：单值函数

$$w = f(z) \quad z \in B$$

如果极限

$$\lim_{z \to z_0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

$$\equiv \left. \frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z} \right|_{z=z_0} \equiv f'(z_0)$$

存在，且与$z \to z_0$的方式无关，则称函数$w = f(z)$在 z 点可导，此极限定义为函数$w = f(z)$ 在z点的导数。

□复变函数的可微

$$\lim_{z\to z_0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\left.\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{z=z_0}=f'(z_0)$$

高级无限小

$$\Delta w=f'(z_0)\Delta z+O(\Delta z) \Rightarrow \mathrm{d}w=f'(z_0)\mathrm{d}z$$

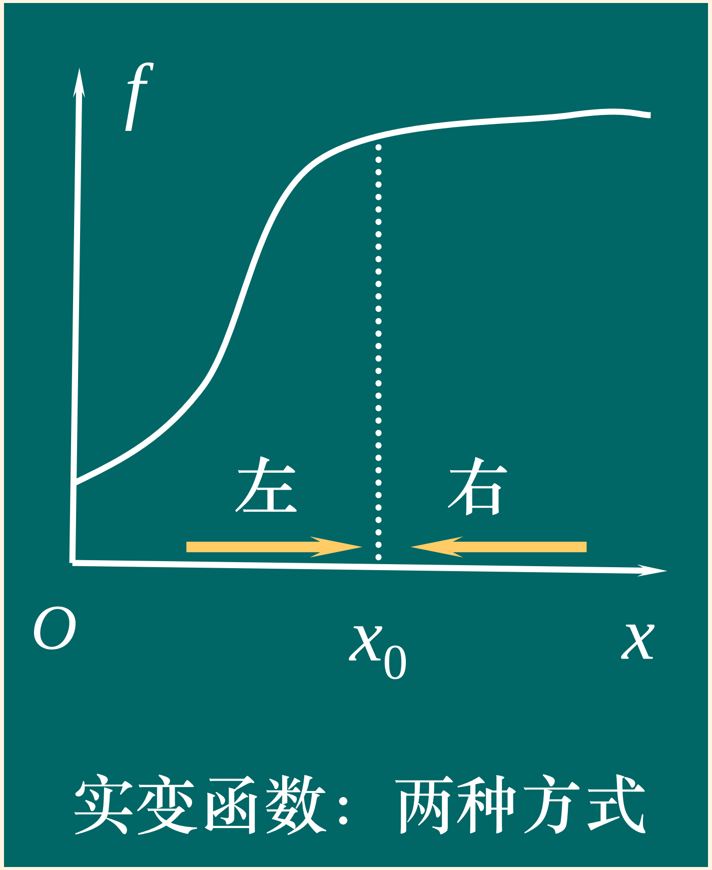
如果存在复数A, 使复变函数$f(z)$在z_0点的微分变化为

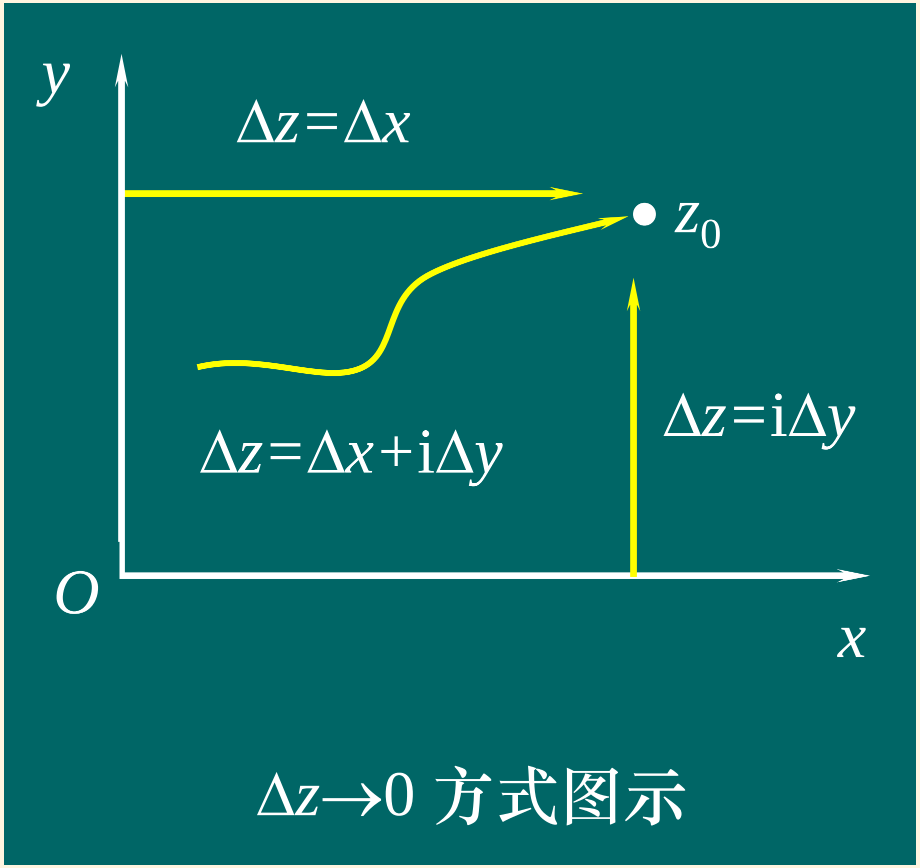
$$\mathrm{d}w=A\mathrm{d}z$$

则称$f(z)$在z_0点可微——与可导是等价的！

■ 与单变量实变函数导数的区别

实变函数：$\Delta x \to 0$；复变函数：$\Delta z \to 0$





与二个变量的实函数类似

- **C-R 方程: 复变函数$w=f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$在点z_0可导的必要条件是在z_0点满足C-R方程**

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

证明：1、实轴方向$\Delta z\to 0$, $\Delta y=0$, $\Delta z=\Delta x$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{\Delta z=\Delta x}=\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=\left.\frac{\Delta u}{\Delta x}\right|_{\Delta y=0}+\mathrm{i}\left.\frac{\Delta v}{\Delta x}\right|_{\Delta y=0}=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}$$

2、虚轴方向$\Delta z\to 0$, $\Delta x=0$, $\Delta z=\mathrm{i}\Delta y$

$$\left.\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right|_{\Delta z=\mathrm{i}\Delta y}=\frac{\Delta u+\mathrm{i}\Delta v}{\Delta x+\mathrm{i}\Delta y}=-\mathrm{i}\left.\frac{\Delta u}{\Delta y}\right|_{\Delta x=0}+\left.\frac{\Delta v}{\Delta y}\right|_{\Delta x=0}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$$

3、$f(z)$可导，$\mathrm{d}f(z)/\mathrm{d}z$ 与 $\Delta z\to 0$ 的方式无关，因此

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y} \Rightarrow \boxed{\text{C-R方程}}$$

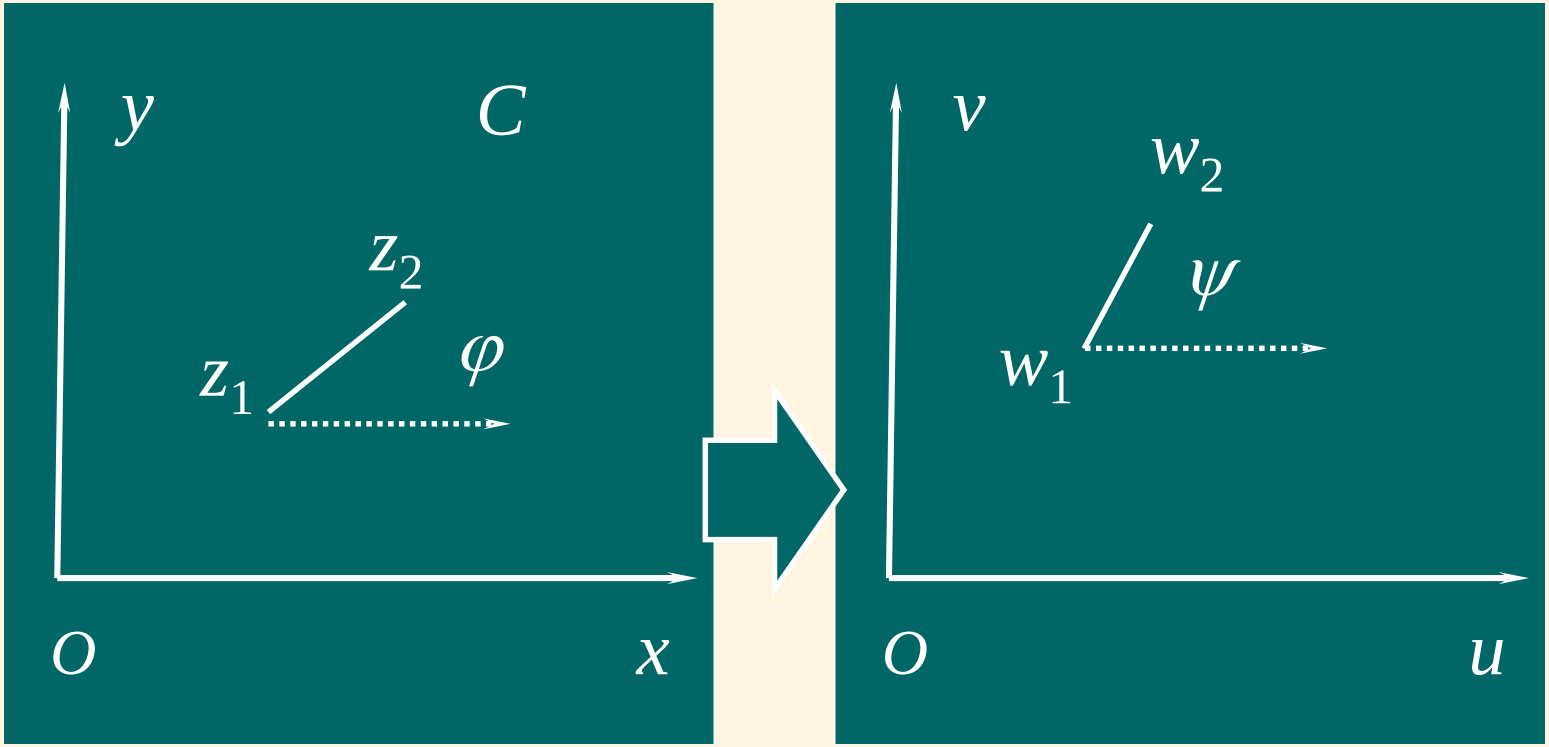
- 可导的充要条件：如果二元函数$u(x,y)$ 和$v(x,y)$ 的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$$

在点z_0存在、连续且满足C-R条件, 复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在点z_0可导。

□ 导数的几何意义

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} \approx \frac{w_2 - w_1}{z_2 - z_1} \approx \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} = \frac{|\Delta f|e^{\mathrm{i}\psi}}{|\Delta z|e^{\mathrm{i}\varphi}} = \frac{|\Delta f|}{|\Delta z|}e^{\mathrm{i}(\psi-\varphi)}$$



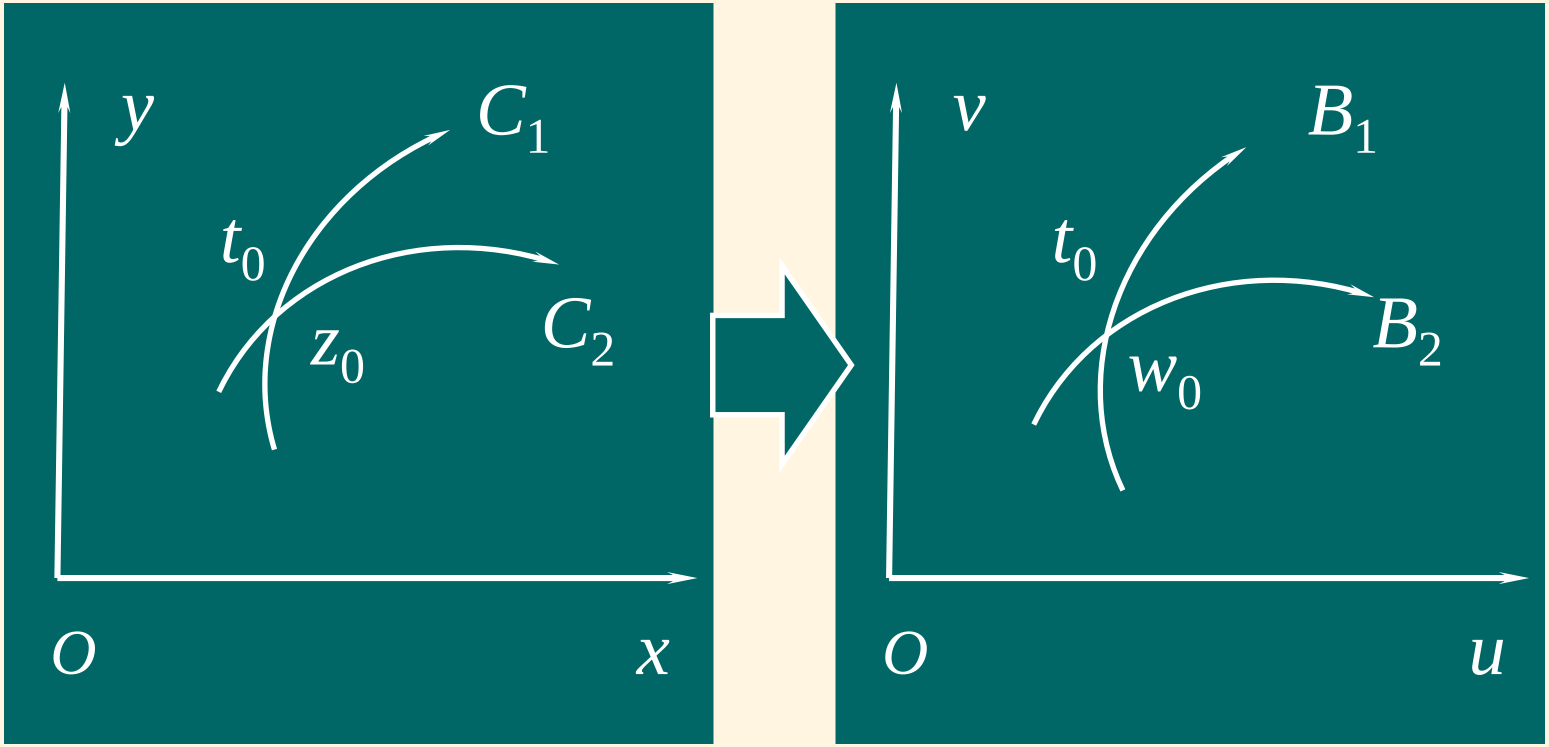
□ 保角和保形性质

C ➡ B:

$$w = f(z(t)) = u(t) + \mathrm{i}v(t)$$

$$z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$$

- **曲线C_1和C_2在t_0点的切线与x轴的夹角满足**



$$\tan(\varphi_i) = \frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x_i} \Rightarrow \varphi_i = \arg[z_i'(t_0)] \quad (i=1,2)$$

$$\frac{\mathrm{d}z_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \arg[z_i'(t_0)] = \arctan\left(\frac{\mathrm{d}y_i}{\mathrm{d}x_i}\right) = \varphi_i \quad (i=1,2)$$

■ **曲线B_1和B_2在t_0点的切线与u轴的夹角满足**

$$\phi_i = \arg[w_i'(t_0)] = \arg[f'(z_i(t_0))z_i'(t_0)]$$
$$= \arg[f'(z_0)] + \arg[z_i'(t_0)]$$

$$w(t) = f(z) = u(t) + \mathrm{i}v(t) \Rightarrow w'(t) = f'(z)z'(t)$$

因此，导数的辐角表示映射线元的转动

线元夹角变化

$$\phi_2-\phi_1=\arg[f'(z_0)]-\arg[f'(z_0)]+\arg[z_2'(t_0)]-\arg[z_1'(t_0)] \Rightarrow \phi_2-\phi_1=\varphi_2-\varphi_1$$

$$\Downarrow$$

映射前后线元的夹角相等——保角变换

■ **导数模的意义**

$$\left|\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}\right|=\left|\lim_{z_0\to z}\frac{w-w_0}{z-z_0}\right|\approx\frac{|w-w_0|}{|z-z_0|} \Leftarrow$$

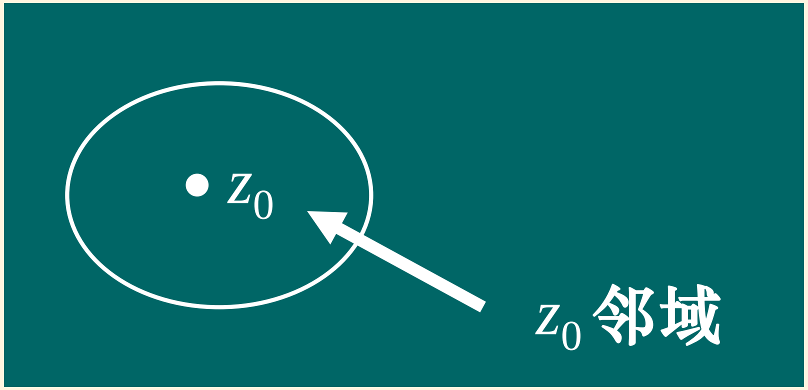
映射前后线元长度之比——伸缩率

伸缩率与方向无关——故称为保形变换

1.3 解析函数及其性质

❑定义：一个 z 的单值函数 $f(z)$，如果 $f(z)$ 在 z_0 及 z_0 的邻域内都可导，则称 $f(z)$ 在 z_0 点解析，否则称 z_0 点为奇点。

如果单值函数 $f(z)$在区域E的每一点解析，则称$f(z)$是E内的解析函数。



z_0 点可导与 z_0 点 解析的区别：函数 $f(z)=|z|^2$ 在 $z=0$ 点可导，而在其他点均不可导，故 $z=0$ 点不解析。

□连续、可导与解析的关系

z_0点解析 $\Rightarrow$ z_0点可导 $\Rightarrow$ z_0点连续

z_0点连续 $\xRightarrow{\text{不一定}}$ z_0点可导 $\xRightarrow{\text{不一定}}$ z_0点解析

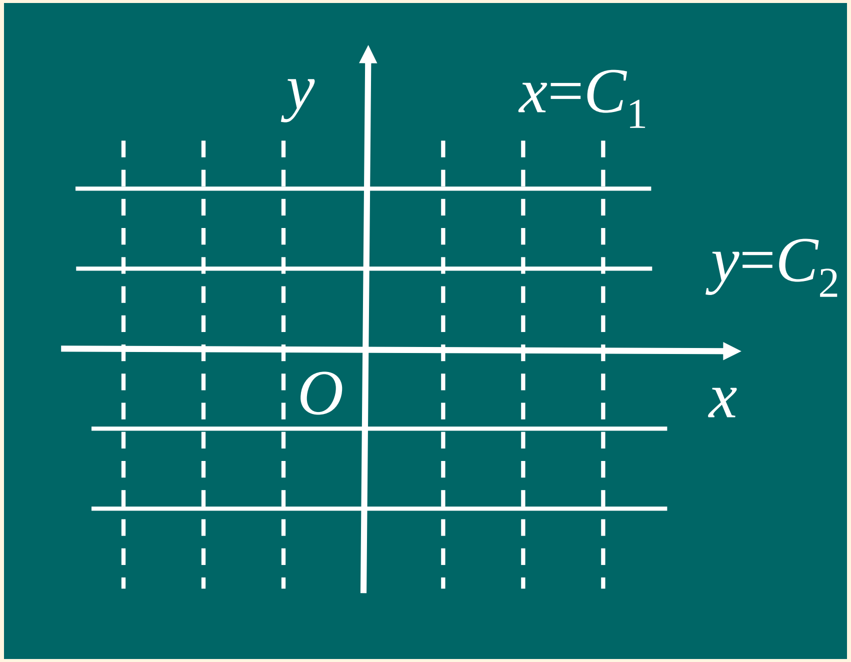
函数解析是很强的要求，我们主要讨论解析函数

解析函数性质1：若函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 在区域 B 上解析，则曲线族

$$u(x, y)=C_1;\quad v(x,\ y)=C_2$$

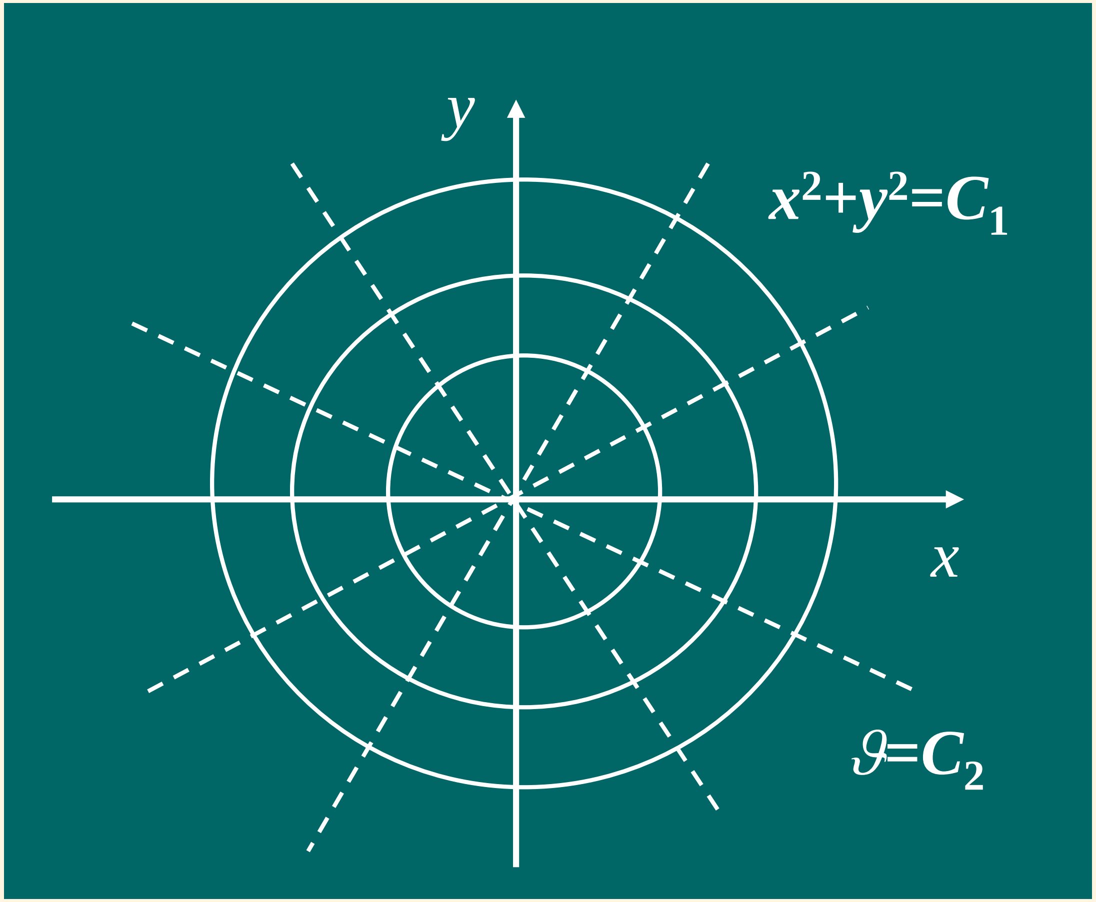
相互正交

例子1：$f(z)=z=x+iy$ ⟹ $x=C_1,\ y=C_2$



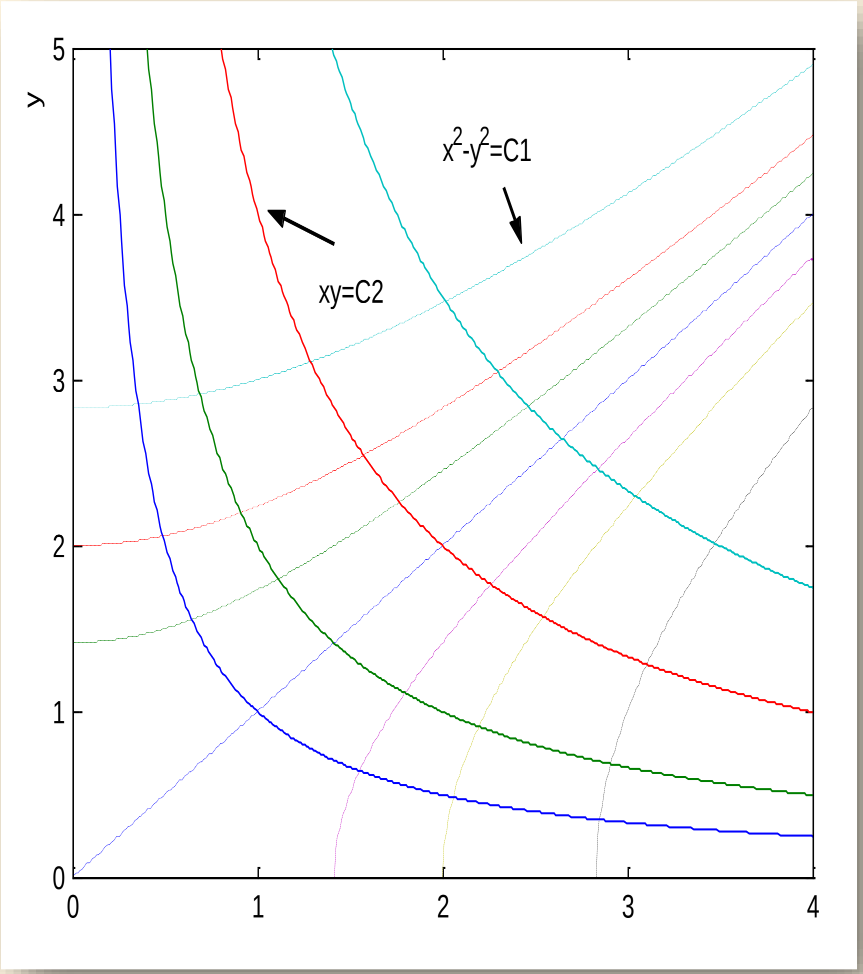
例子2、$f(z)=\ln z=\ln(x^2+y^2)^{1/2}+i\vartheta$

$\Rightarrow x^2+y^2=C_1,\ \vartheta=C_2$



例子3、$f(z)=z^2=x^2-y^2+2ixy$

$$\Rightarrow x^2-y^2=C_1,\ xy=C_2$$



- 解析函数性质2：$\nabla^2 u=0$ 和 $\nabla^2 v=0$, 即 u 和 v 是调和函数—v称为u的共轭调和函数。势函数满足Laplace 方程

电势 ϕ：　电场强度$E=-\nabla\phi$

速度势ϕ：　流体速度$V=-\nabla\phi$

温度场分布：　$\nabla^2 T(x, y)=0$

例子1：无限大带电导体平面的电场和势分布

例子2：无限长线电荷的电场和势分布

例子3：正交半无限大带电导体平面的电场和势分布

注意：u和v的非对称性

■ *u*和*v*的非对称性

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y};\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

解析函数 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$

$$\tilde{w}=\tilde{f}(z)=v(x,y)+\mathrm{i}u(x,y)$$ **也是解析函数?**

解析函数 $w=f(z)=z=x+\mathrm{i}y$

非解析函数 $\tilde{w}=y+\mathrm{i}x=\mathrm{i}[x-\mathrm{i}y]=\mathrm{i}z^{*}$ **解析函数**

$$\bar{w}=\bar{f}(z)=v(x,y)-\mathrm{i}u(x,y)=-\mathrm{i}[u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)]$$

解析函数性质3：通过解析函数变换

$$w(z)=f(x+\mathrm{i}y)=u+\mathrm{i}v$$

二维Laplace 方程形式不变

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=0 \Longrightarrow \frac{\partial^2\Phi}{\partial u^2}+\frac{\partial^2\Phi}{\partial v^2}=0$$

椭圆坐标系

$$u+\mathrm{i}v=\cosh^{-1}\left(\frac{x+\mathrm{i}y}{c}\right)$$

$$\Downarrow$$

$$x=c\cosh u\cos v$$

$$y=c\sinh u\sin v$$

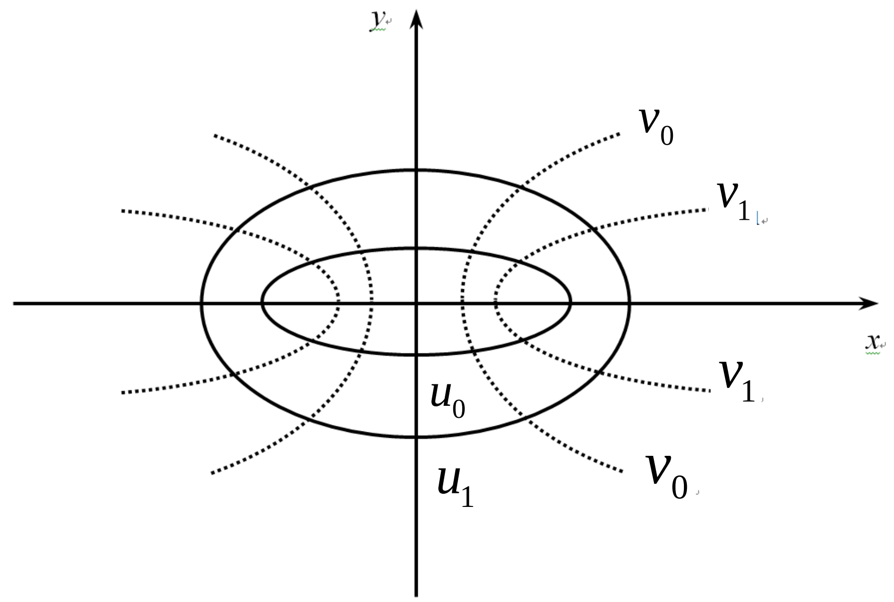


图 1.3.1 椭圆柱坐标系统：椭圆焦距为 $2c$

❑ 解析函数的充要条件(可作为解析函数定义)

如果二元函数$u(x,y)$ 和$v(x,y)$ 的偏导数

$$\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial v}{\partial x},\frac{\partial v}{\partial y}$$

在区域E内存在、连续且满足C-R条件, 那么复变函数 $f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$ 在区域E解析。

例 $f(z)=z^{*}=x-\mathrm{i}y=u+\mathrm{i}v \Rightarrow u=x; v=-y$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1;\ \frac{\partial u}{\partial y}=0;\ \frac{\partial v}{\partial x}=0;\ \frac{\partial v}{\partial y}=-1 \Leftarrow \text{不满足C-R条件}$$

—在整个复平面，该函数处处连续，但处处不可导、不解析！

1.4 初等解析函数

❑幂函数 $f(z)=z^{n}$

(1)当 n=1,2,3….时

$$\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}=nz^{n-1}$$

在整个复平面上有确定的值，且满足C-R条件，故 z^n 是全平面上的解析函数（不包括无限大）

(2)当 n=–1, – 2, – 3,…, z^n 时，导数表达式亦是nz^{n-1} (除 z=0 外)，并且满足C-R 条件，故 z^n 亦是全平面上的解析函数。 z=0是该函数的奇点

□指数函数

定义 $e^{z}=e^{x+\mathrm{i}y}=e^{x}\cos y+\mathrm{i}e^{x}\sin y$

（1）实部和虚部在全平面上满足 C-R 条件，并且有连续的偏导数，故 e^{z} 在全平面上解析（不包括无限大），导数

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}=e^{z}$$

（2）e^{z} 的周期为 $2\pi\mathrm{i}$, 而实函数无周期

（3）性质

$$\boxed{e^{z_1}\cdot e^{z_2}=e^{z_1+z_2}}$$

(4) 当$z\to\infty$, 极限不存在（本性奇点）

■ 趋向无限大特性

(1) $e^{z}=e^{x+\mathrm{i}y}=e^{x}e^{\mathrm{i}y}\Rightarrow|e^{z}|=e^{x}|e^{\mathrm{i}y}|\le\sqrt{2}e^{x}$

□ 左半平面 $x\to-\infty\Rightarrow|e^{z}|\to 0$

□ 右半平面 $x\to\infty\Rightarrow|e^{z}|\to\infty$

(2) $e^{\mathrm{i}z}=e^{\mathrm{i}x-y}=e^{\mathrm{i}x}e^{-y}\Rightarrow|e^{\mathrm{i}z}|=e^{-y}|e^{\mathrm{i}x}|\le\sqrt{2}e^{-y}$

□ 上半平面 $y\to\infty\Rightarrow|e^{\mathrm{i}z}|\to 0$

□ 下半平面 $y\to-\infty\Rightarrow|e^{\mathrm{i}z}|\to\infty$

(3) $e^{-\mathrm{i}z}=e^{-\mathrm{i}x+y}=e^{-\mathrm{i}x}e^{y}\Rightarrow|e^{-\mathrm{i}z}|=e^{y}|e^{-\mathrm{i}x}|\le\sqrt{2}e^{y}$

❑三角函数

定义

$$\sin(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}}(e^{\mathrm{i}z}-e^{-\mathrm{i}z});\ \cos(z)=\frac{1}{2}(e^{\mathrm{i}z}+e^{-\mathrm{i}z})$$

(1) 在全平面解析（不包括无限大）

(2) 实数周期 2π

(3) 当 $y\to\pm\infty,\quad |\sin(z)|$ **和** $|\cos(z)|\to\infty$

(4) 同样有公式

$$\sin(z_1\pm z_2)=\sin z_1\cos z_2\pm\cos z_1\sin z_2$$

$$\cos(z_1\pm z_2)=\cos z_1\cos z_2\mp\sin z_1\sin z_2$$

(5)当z→∞, 极限不存在（本性奇点）

❑双曲函数

定义

$$\sinh(z)=\frac{1}{2}(e^{z}-e^{-z});\quad \cosh(z)=\frac{1}{2}(e^{z}+e^{-z})$$

(1) 在全平面解析（不包括无限大）

(2) 虚数周期 2πi

(3) 当

$$x\to\pm\infty,\quad |\sinh(z)|\text{ 和 }|\cosh(z)|\to\infty$$

(4) 关系 sin(iz)=isinh(z), cos(iz)=cosh(z)

(5)当$z\to\infty$, 极限不存在（本性奇点）

1.5 多值函数(根式,对数, 反三角函数)

❑二次根式 $w=\sqrt{z}$ **定义** $w^2=z$

注意
主值定义

极坐标表示:

$$w=\sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}(\varphi+2n\pi)/2}\quad(n=0,1)$$

$$\rho=|z|;\quad \varphi=\arg(z)\ (0\le\varphi\le 2\pi)$$

其中

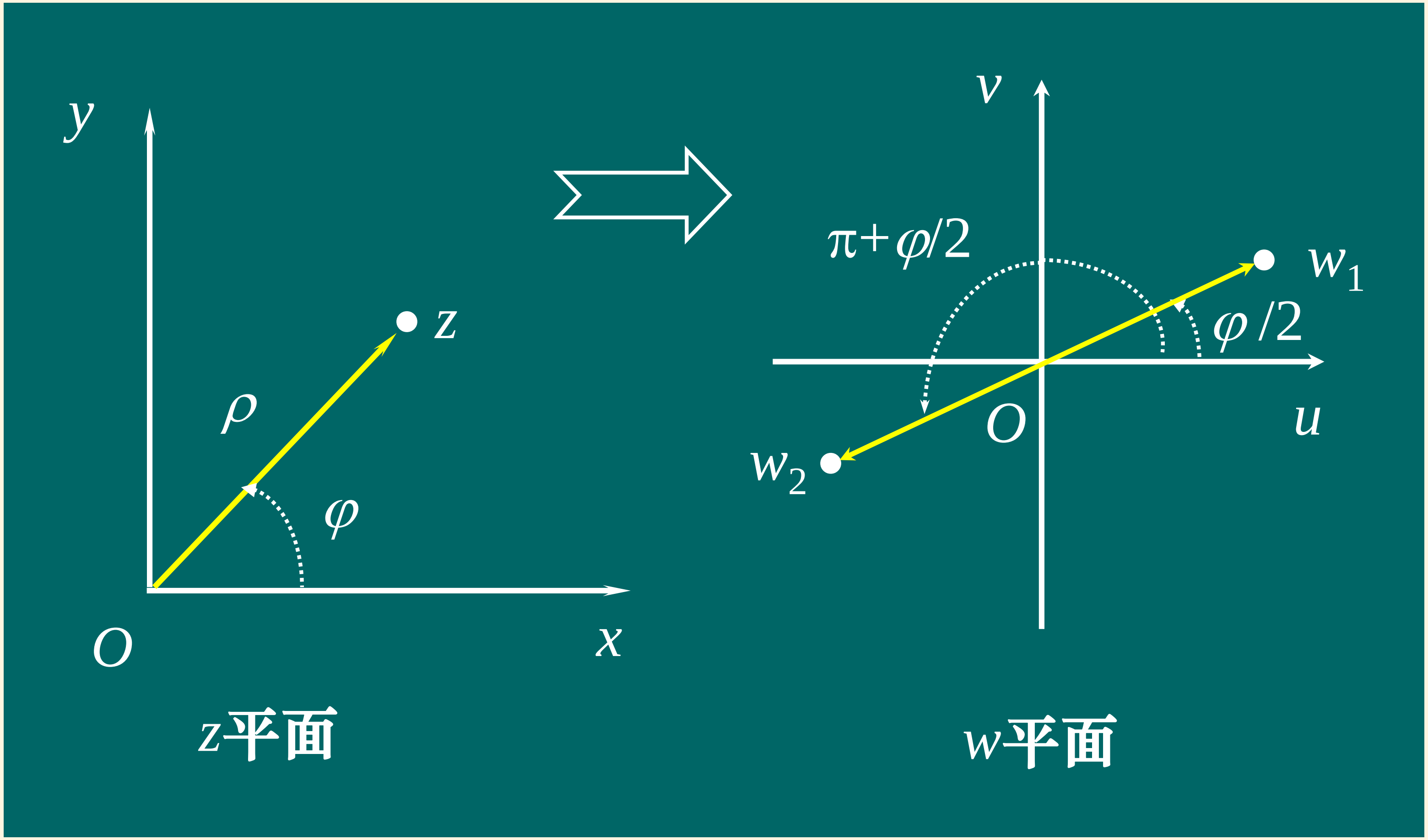
(1) ρ 与 |z|: 一一对应

(2) w 的辐角有二个值(多值性): $\varphi/2;\ \pi+\varphi/2$

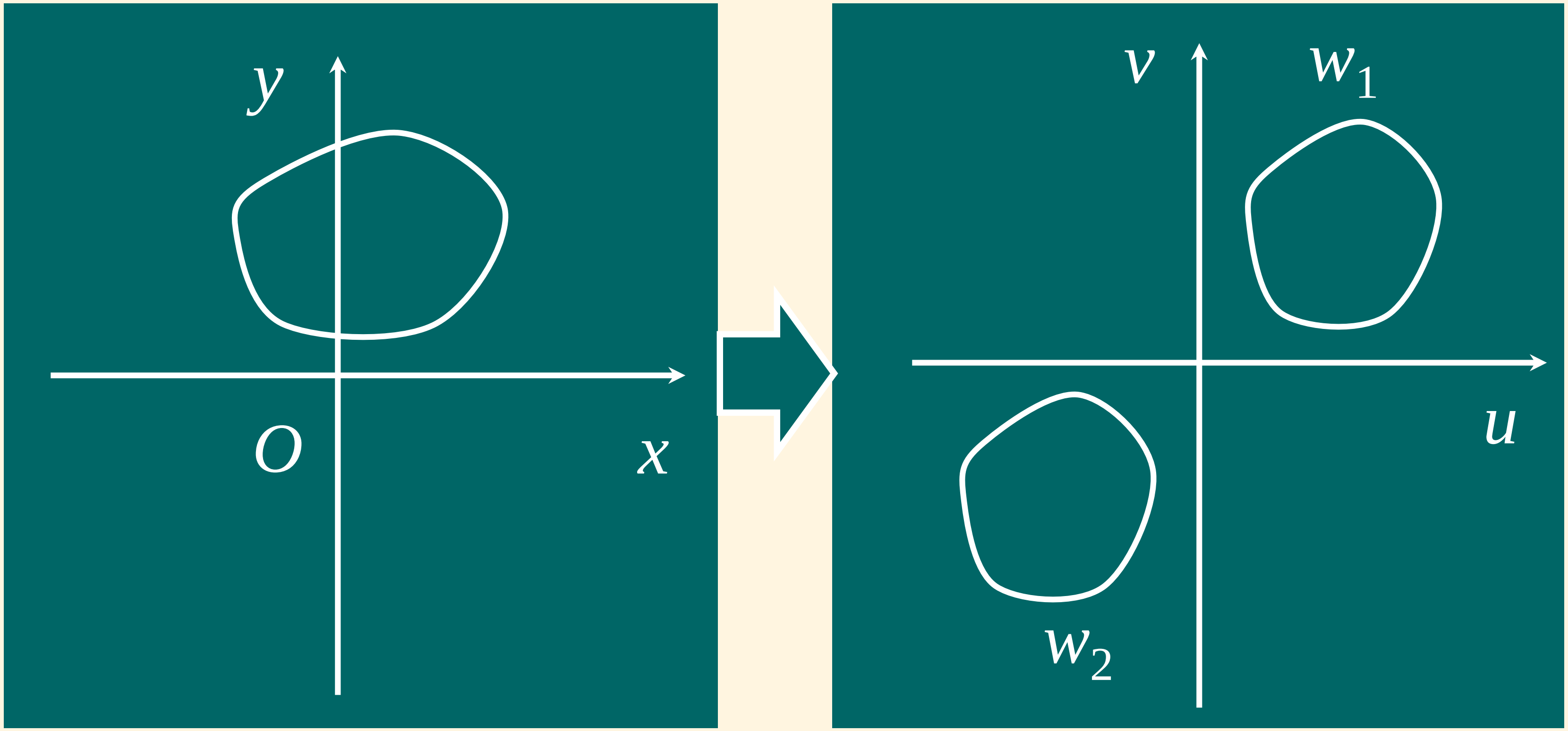
(3)二个单叶枝

$$w_1=\sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}\varphi/2}\quad 和 \quad w_2=-\sqrt{\rho}e^{\mathrm{i}\varphi/2}$$

z 平面 ⇨ w平面

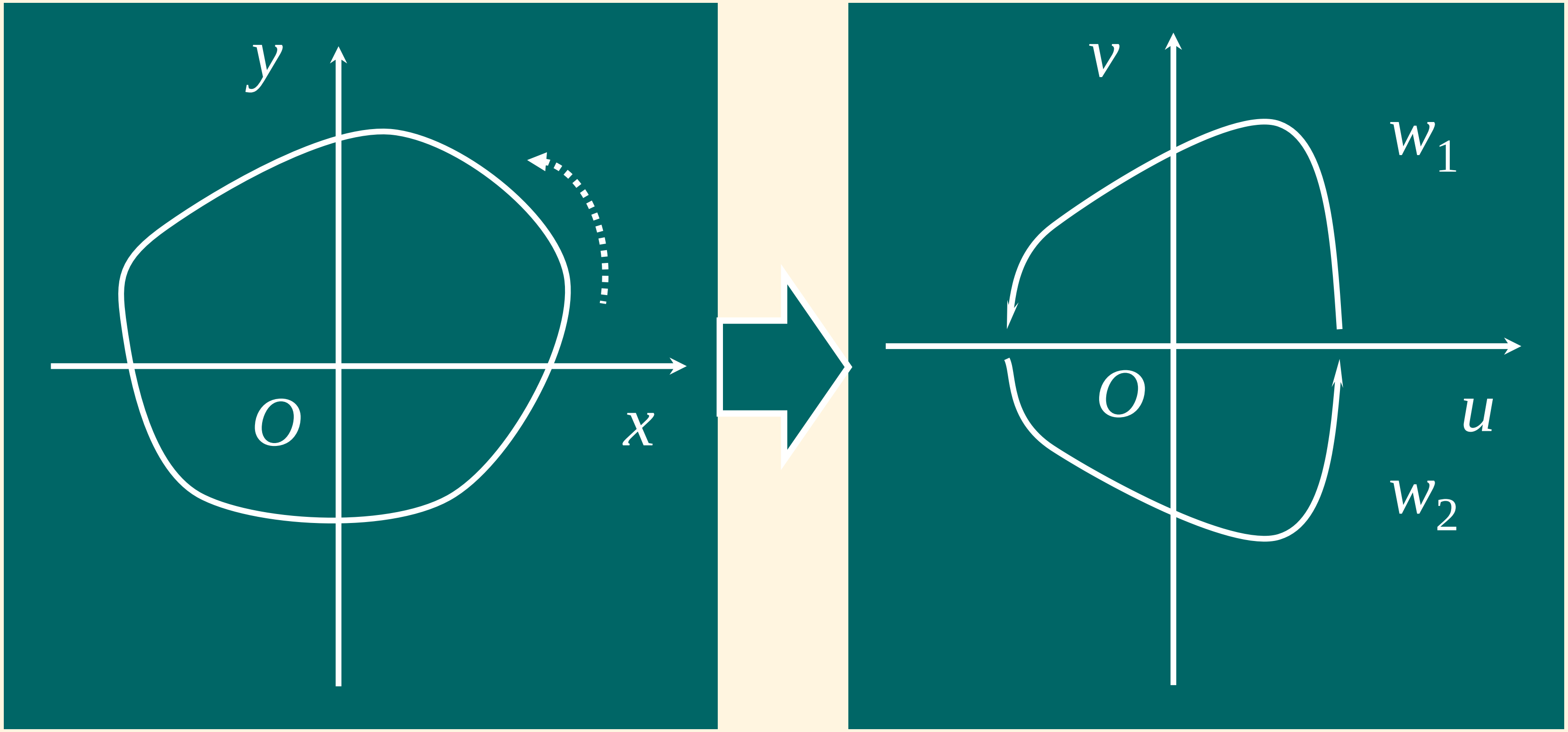


■ 映射关系：C不包含原点



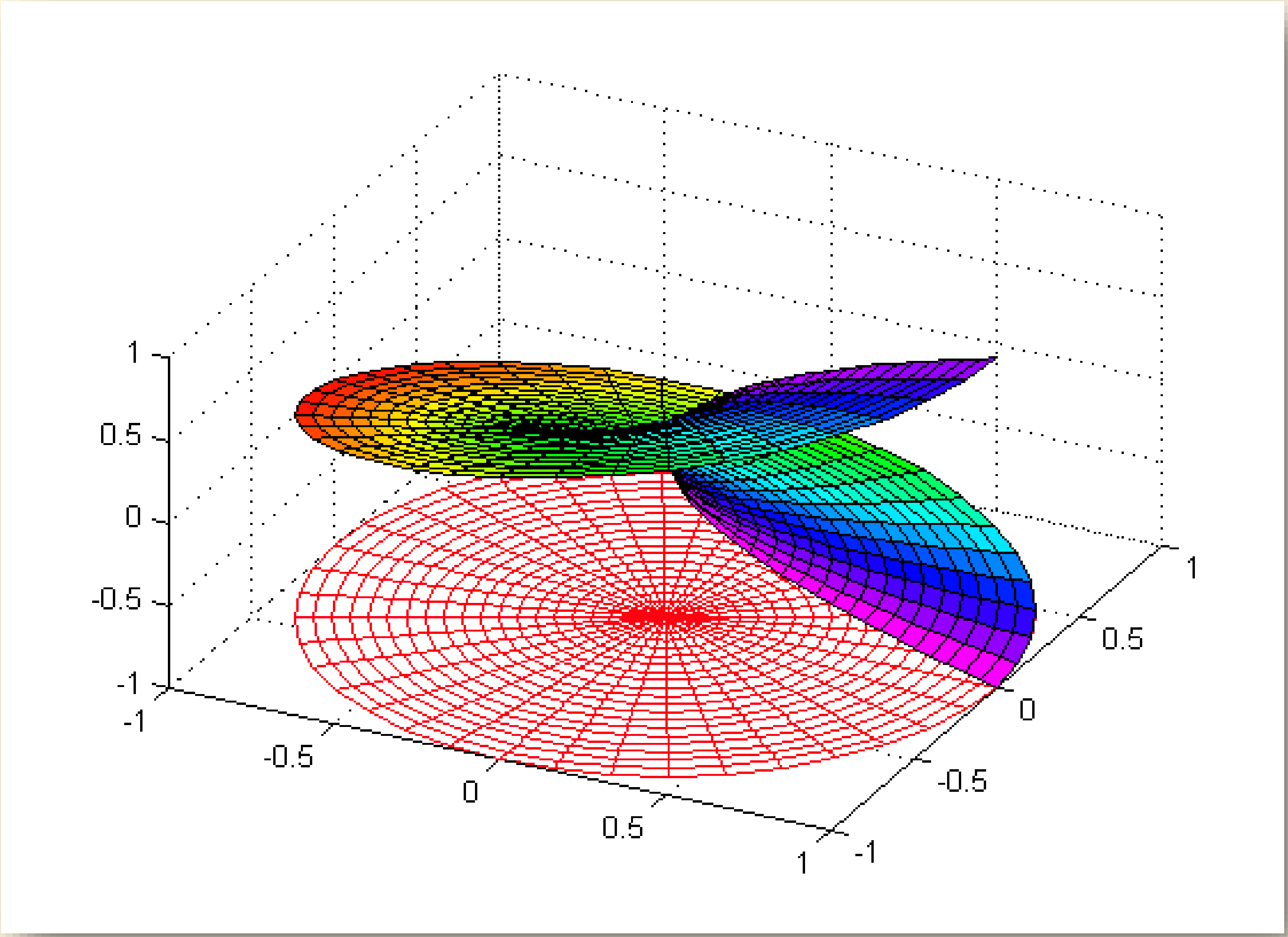
二个单叶支独立，在每个单叶支上，导数唯一，可看作**解析函数**

■ **映射关系：*C*包含原点**

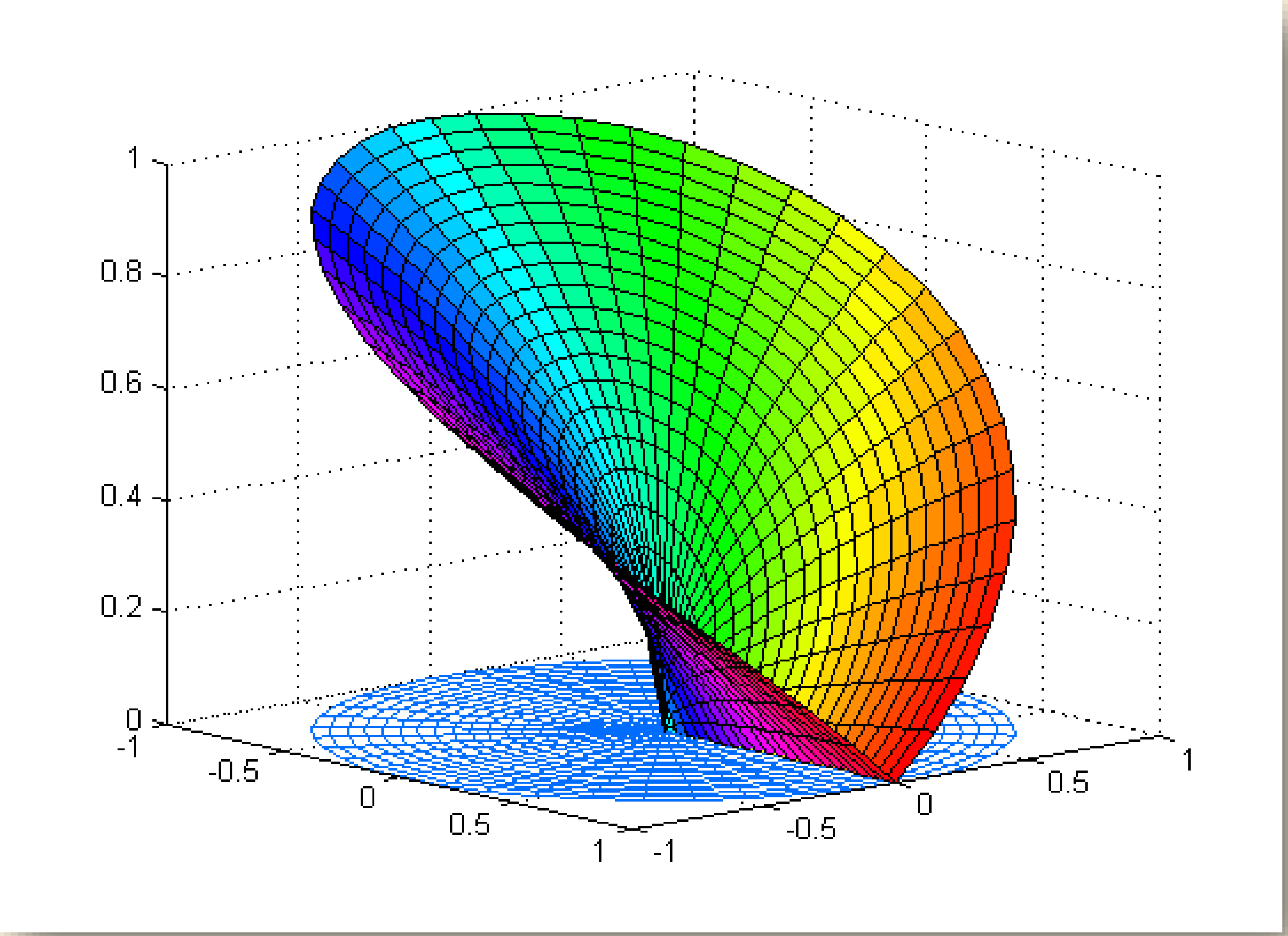


二个单叶支不独立，跨过正实轴时导数不连续，
函数不解析

$w(z)=\sqrt{z}$ 的图形（实部）（注意正实轴不连续）



$w(z)=\sqrt{z}$ 的图形（虚部）(注意正实轴和原点）



❑分支点(branch point)

对于多值函数 $w=f(z)$, 如绕某点 z_0 一周，函数值 w 不复原，而当 z 不绕 z_0 点转一圈回到原处时，函数值还原，则称 z_0 点为 $f(z)$ 的分支点。

$z=0$和无限大点是$w=\sqrt{z}$ 的分支点

- **$(N-1)$阶分支点：** 绕 z_0点N周后,函数值复原
- **分支点的判断：** 取

$$z_1 = z - z_0 = \rho e^{\mathrm{i}\varphi}$$

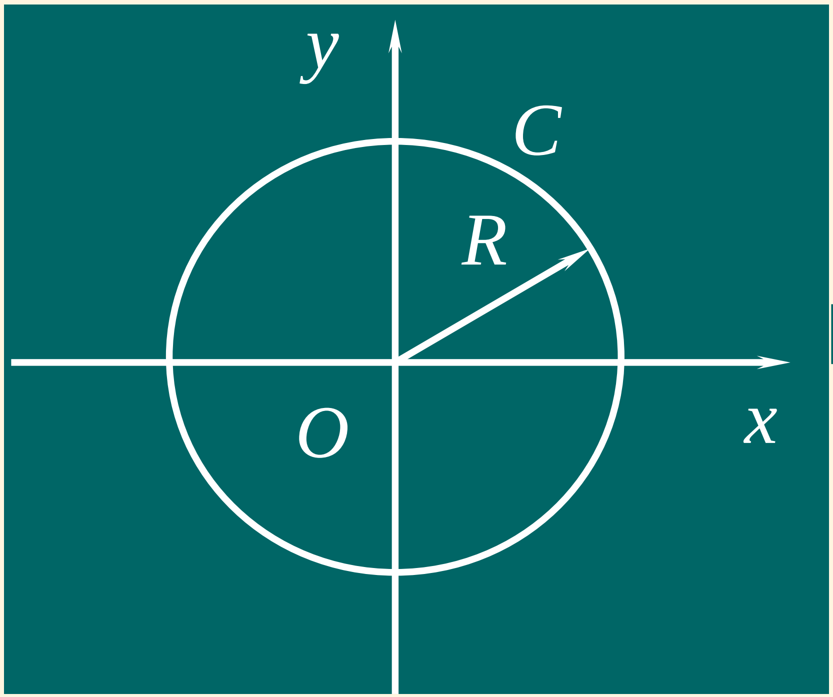
$$z_2 = z - z_0 = \rho e^{\mathrm{i}(\varphi+2N\pi)}$$

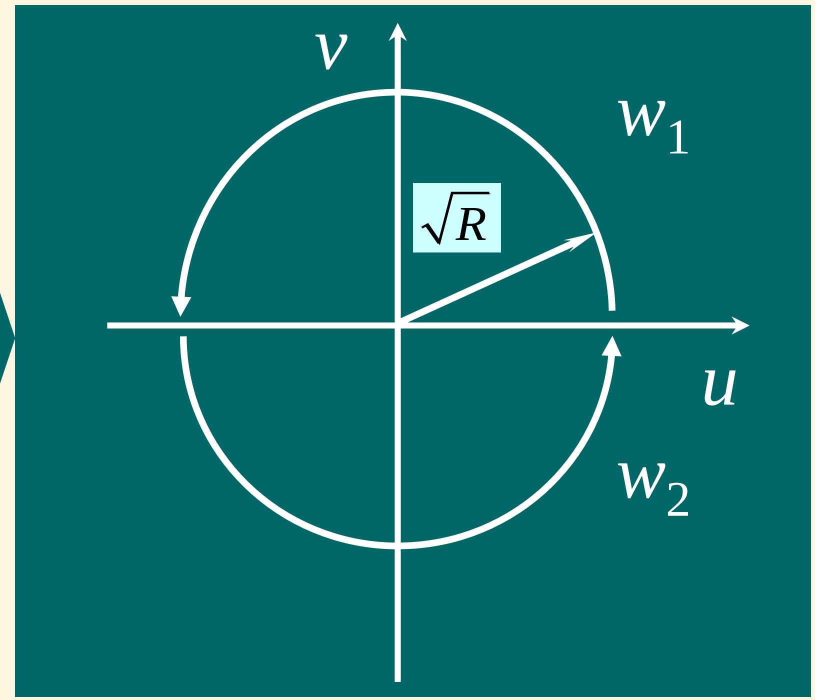
$\Rightarrow$ $f(z_1) \neq f(z_2)$ $\Leftarrow$ 是

$f(z_1) = f(z_2)$ 否

例: 函数 $w=\sqrt{z-a}$ 分支点：$z=a$和∞

■ **无限远点：z绕无限远点一周相当于绕半径为 R 大圆一周**





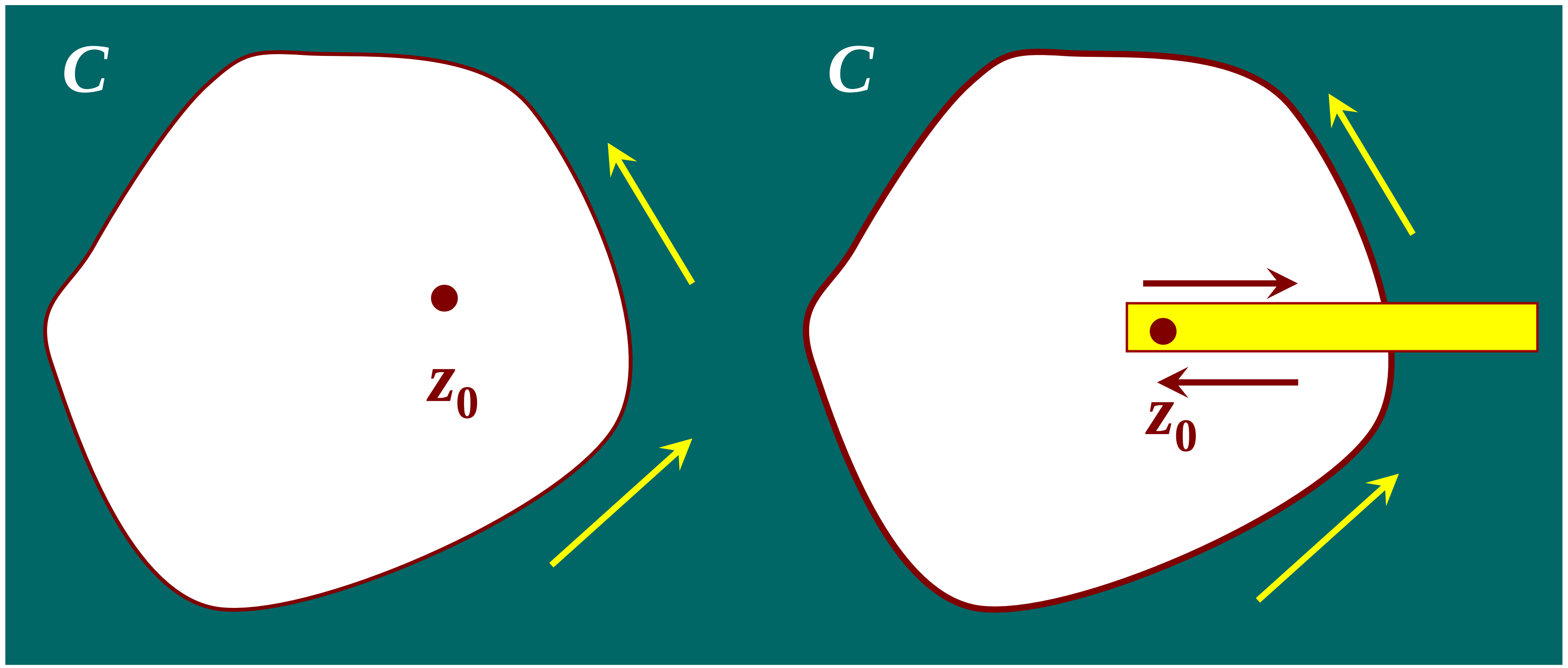
无限远点也有原点的特性: 二个单叶支不独立

作变换: $z = 1/t \Rightarrow \sqrt{z} = 1/\sqrt{t}$

t平面上相当于绕原点一周。

❑割线（割去不解析区域）

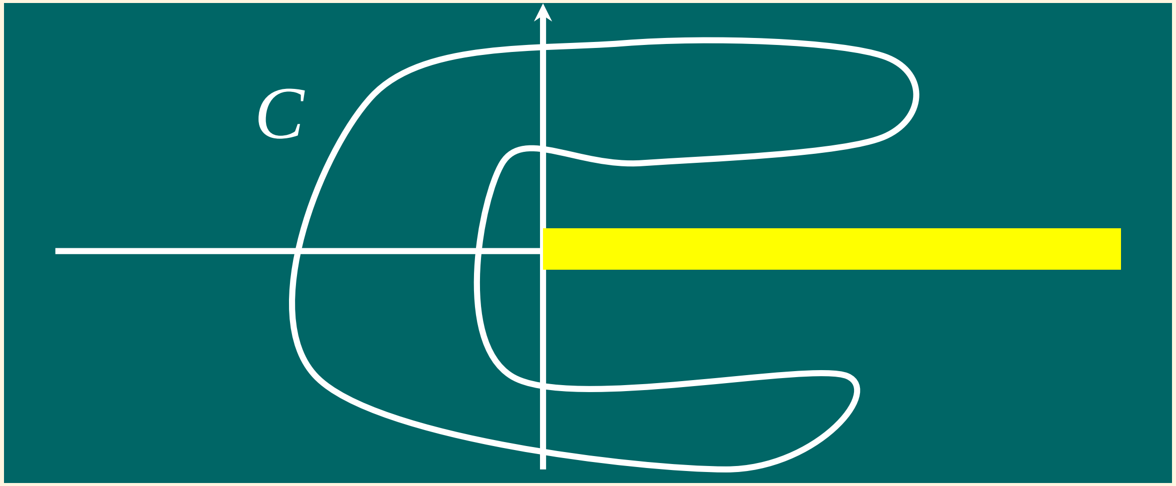
二个支点之间的连线，规定z变化时不能穿过割线，使z的闭区域不包括支点，因此二个单叶支是独立的，从而每个单叶支是单值函数。



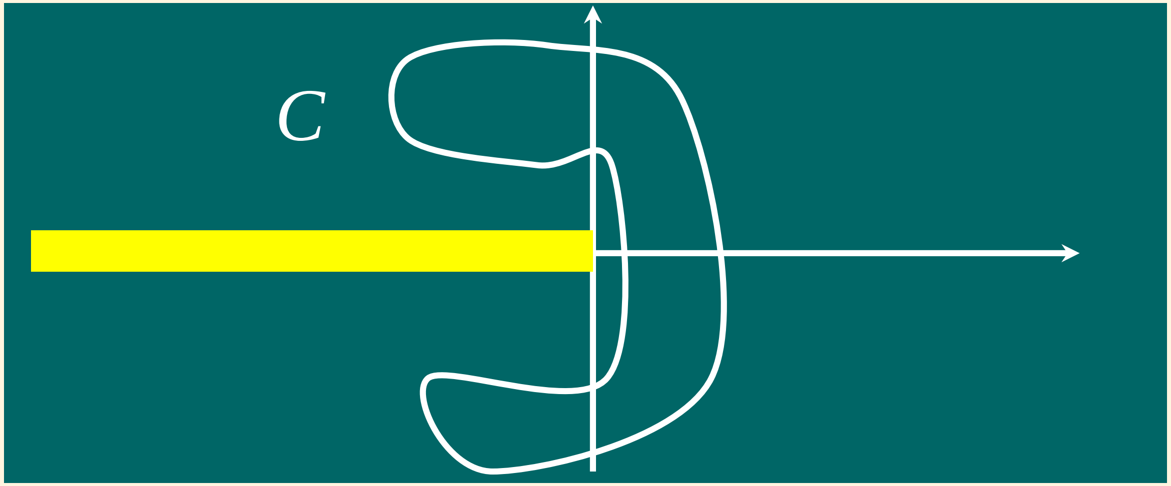
（把不解析的点或曲线排除在区域外）

73

$w=\sqrt{z}$ 的割线



注意1：当主值定义为 $-\pi<\arg z\le\pi$ ，割线取原点和负实轴

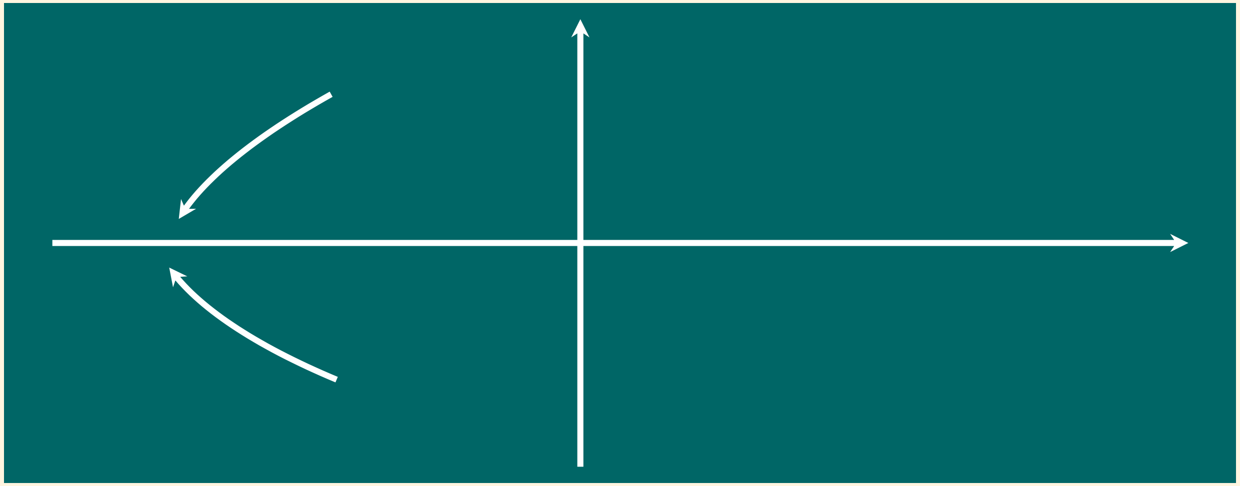


注意2：当主值定义为 $-\pi < \arg z \le \pi$ **，函数** $w=\sqrt{z}$ **在负实轴上不连续**

❑上半平面趋近负实轴

$$w=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\pi/2}=\sqrt{r}\left[\cos(\pi/2)+\mathrm{i}\sin(\pi/2)\right]$$

$$=\mathrm{i}\sqrt{r}$$

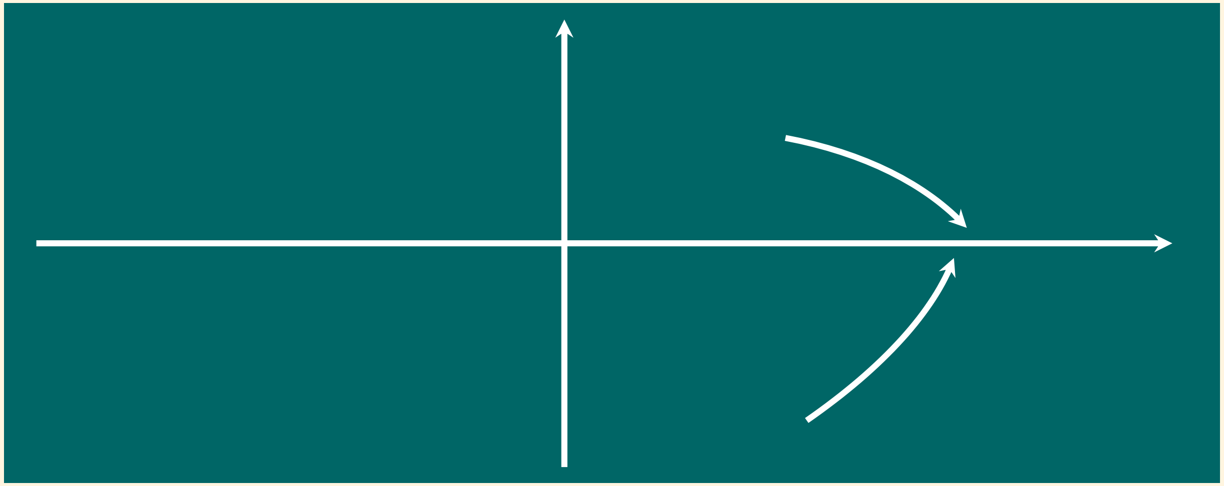


❑下半平面趋近负实轴

$$w=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{-i\pi/2}=\sqrt{r}\left[\cos(-\pi/2)-i\sin(\pi/2)\right]$$

$$=-i\sqrt{r}$$ ——虚部不连续

注意3：当主值定义为 $0<\arg z\le 2\pi$**，函数** $w=\sqrt{z}$ **在正实轴上不连续**



❑上半平面趋近正实轴

$$w=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{\mathrm{i}0}=\sqrt{r}\left[\cos(0)+\mathrm{i}\sin(0)\right]$$
$$=\sqrt{r}$$

❑下半平面趋近正实轴

$$w=\sqrt{z}=\sqrt{r}e^{\mathrm{i}2\pi/2}=\sqrt{r}\left[\cos(\pi)-\mathrm{i}\sin(\pi)\right]$$
$$=-\sqrt{r}$$

——实部不连续

注意：原则上，割线只要是二个支点的任意连线。但在闭合围道积分中，为了利用Cauchy定理，割线取包含不解析的连线！

例：判断下列函数的多值性，并找出多值函数的支点。

$$(a)\ w=\cos\sqrt{z};w=\sin\sqrt{z}$$

解： $z=re^{\mathrm{i}\varphi} \Rightarrow \sqrt{z}=\pm\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\varphi/2}$

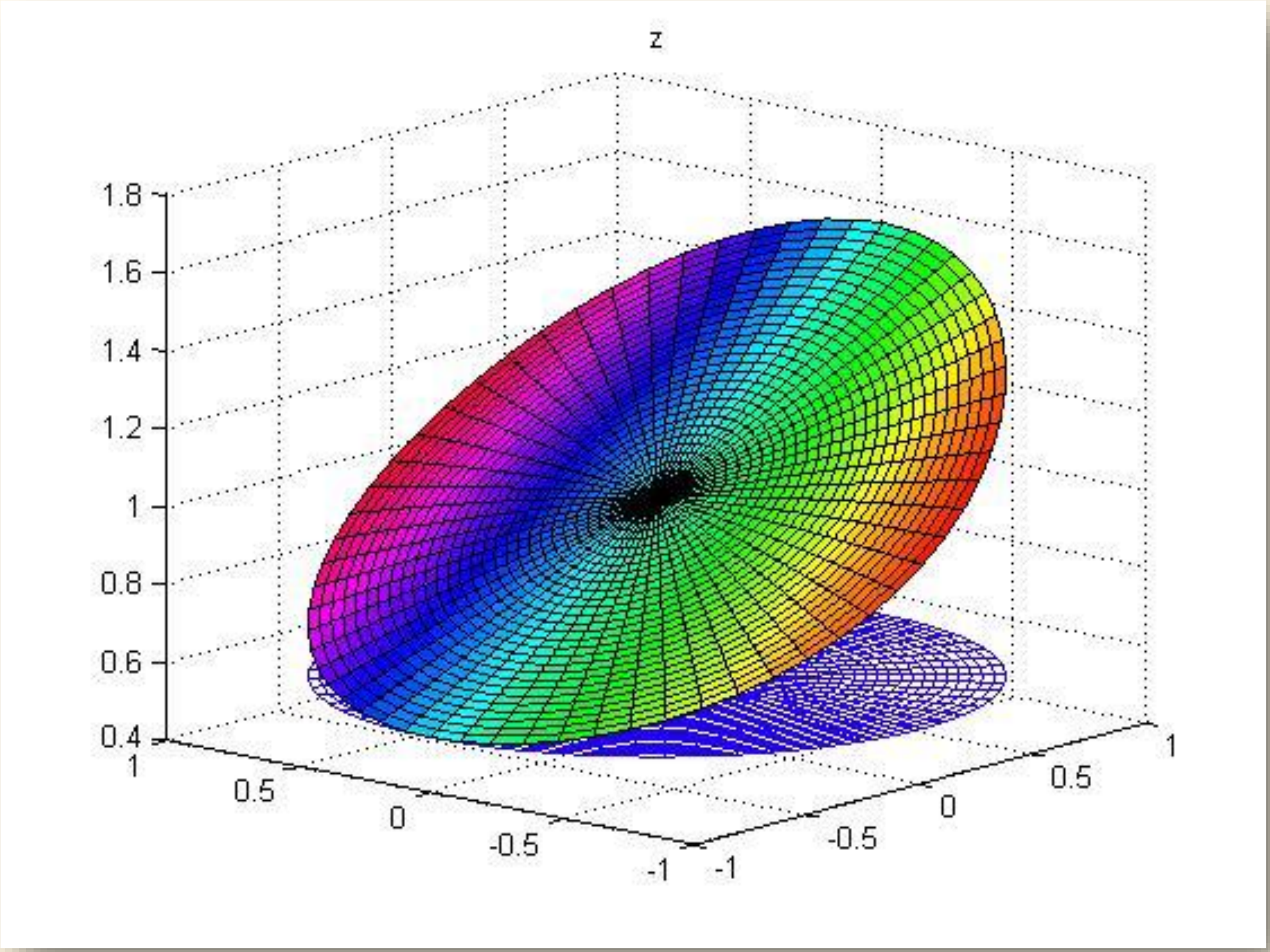
$$w=\cos\sqrt{z}=\cos\left(\pm\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\varphi/2}\right)=\cos\left(\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\varphi/2}\right)$$

——只有一个值：单值函数!

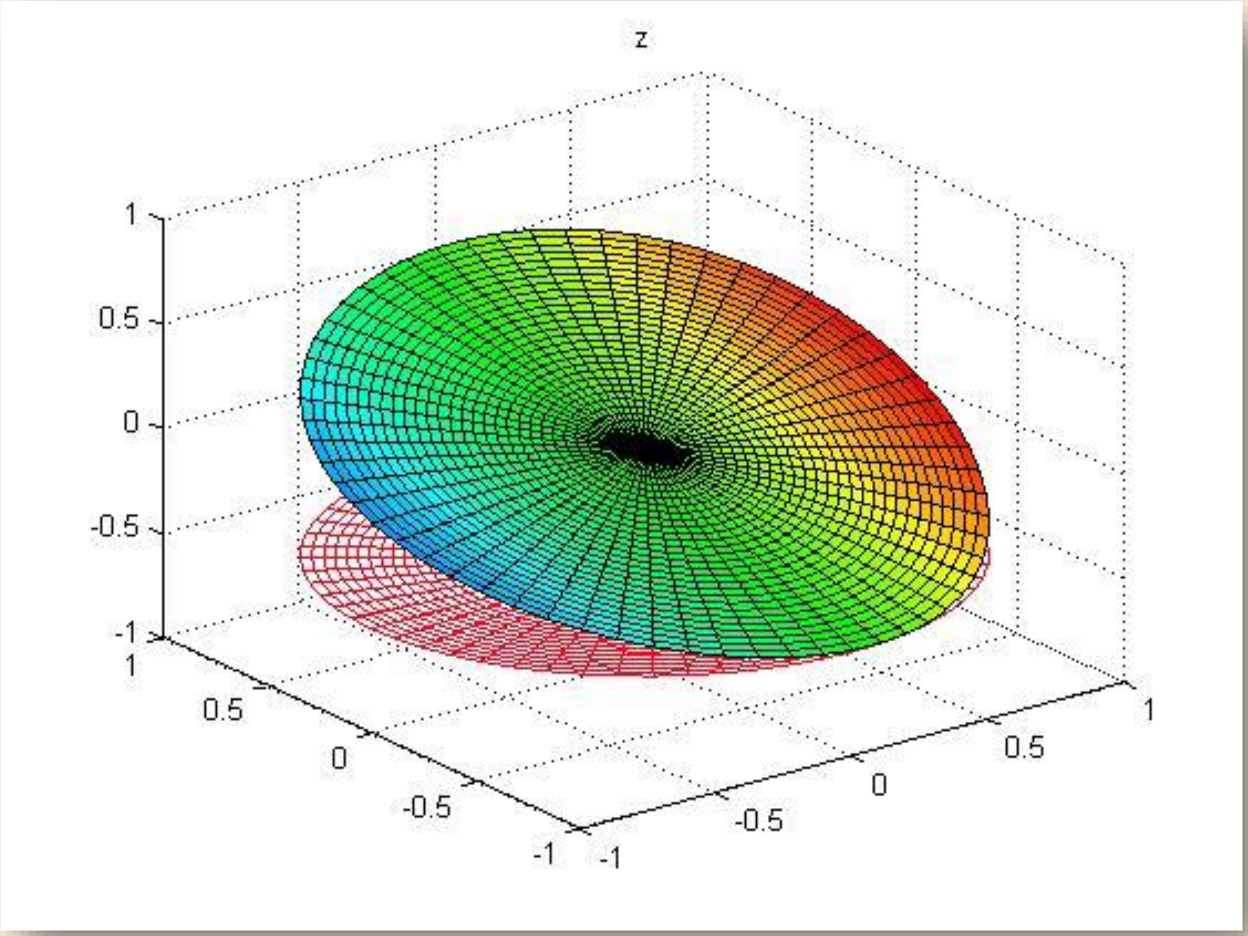
$$w=\sin\sqrt{z}=\sin\left(\pm\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\varphi/2}\right)=\pm\sin\left(\sqrt{r}e^{\mathrm{i}\varphi/2}\right)$$

——有二个值：多值函数!

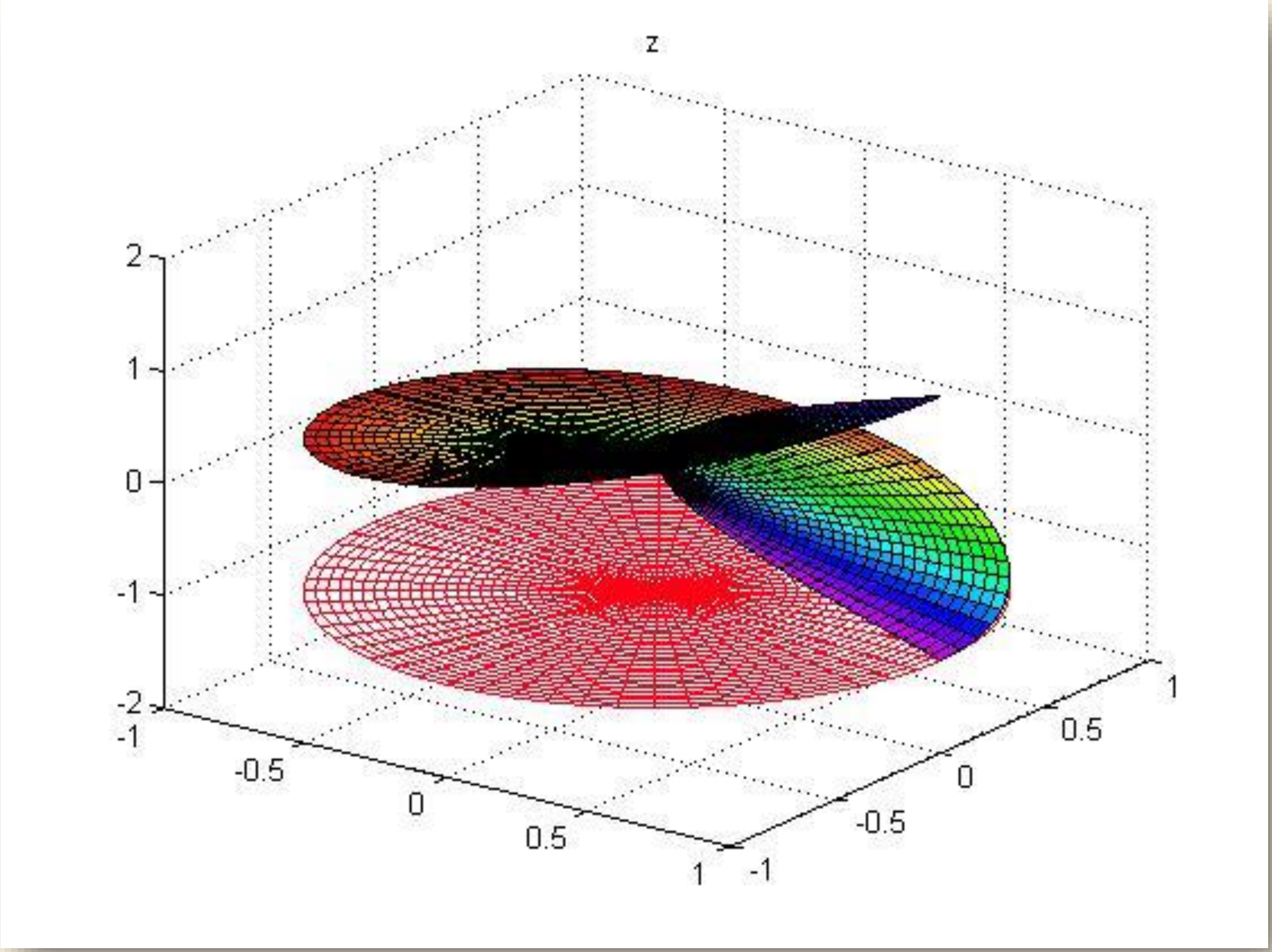
$w(z) = \cos\sqrt{z}$ 实部



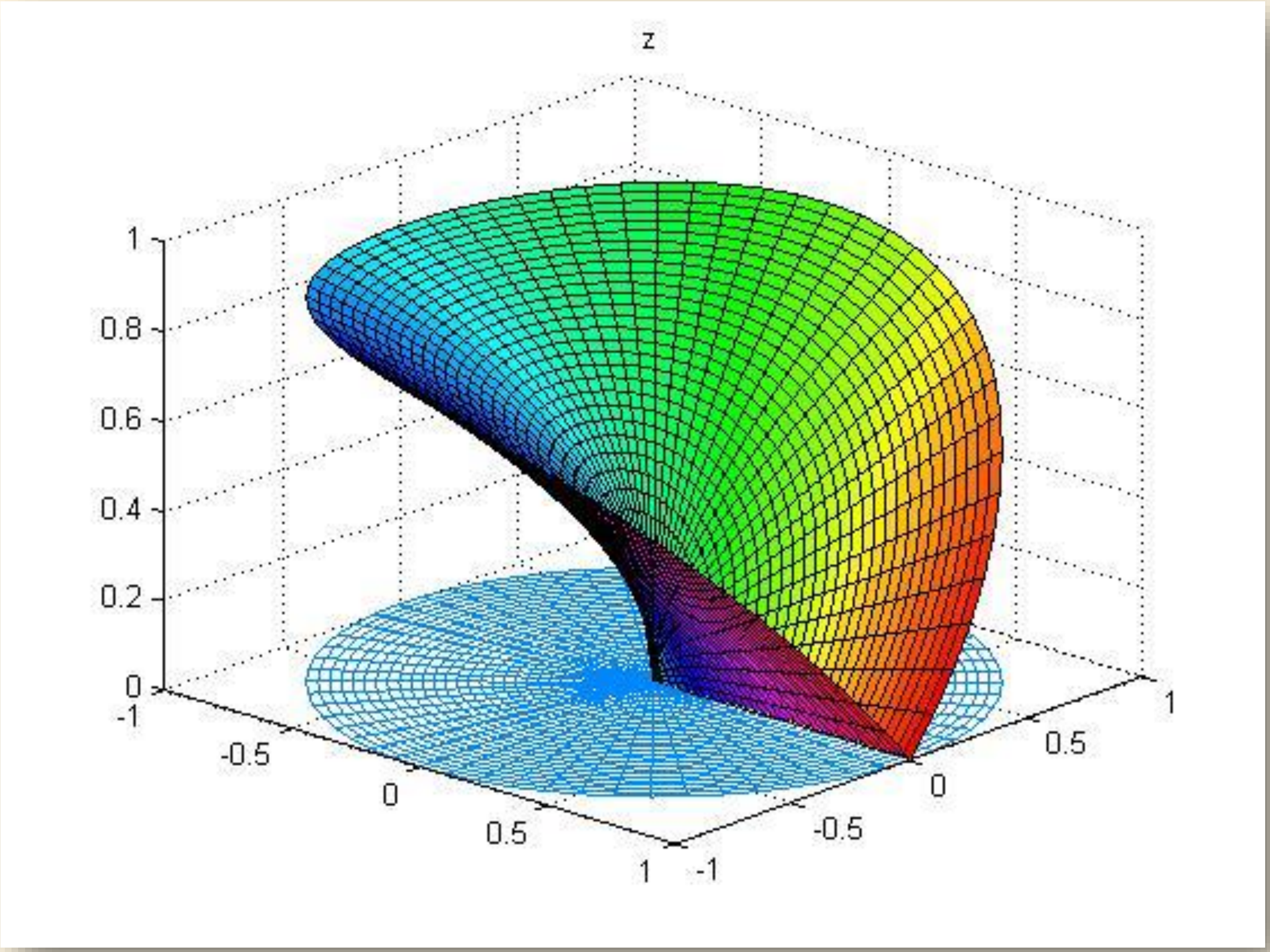
$$w(z) = \cos\sqrt{z}$$ **虚部**



$w(z) = \sin\sqrt{z}$ 实部



$w(z)=\sin\sqrt{z}$ 虚部



$(b) w=\sqrt{z^2+1/4}$ **可能支点：** $z=\mathrm{i}/2, -\mathrm{i}/2, \infty$

$$w=\sqrt{z^2+1/4}=\sqrt{(z-\mathrm{i}/2)(z+\mathrm{i}/2)}$$

- **在z=i/2邻域**

$$w\approx\sqrt{(z-\mathrm{i}/2)(\mathrm{i}/2+\mathrm{i}/2)}=\sqrt{\mathrm{i}(z-\mathrm{i}/2)}$$

——故z=i/2是一阶支点

- **在z=–i/2邻域**

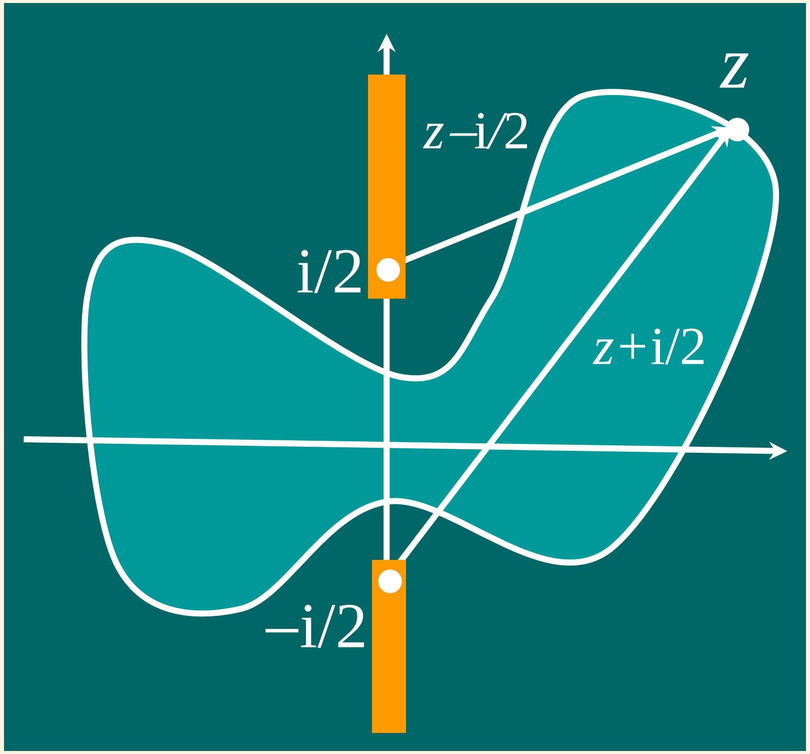
$$w\approx\sqrt{(-\mathrm{i}/2-\mathrm{i}/2)(z+\mathrm{i}/2)}=\mathrm{i}\sqrt{\mathrm{i}(z+\mathrm{i}/2)}$$

——故z= – i/2是一阶支点

- **在z=∞邻域**

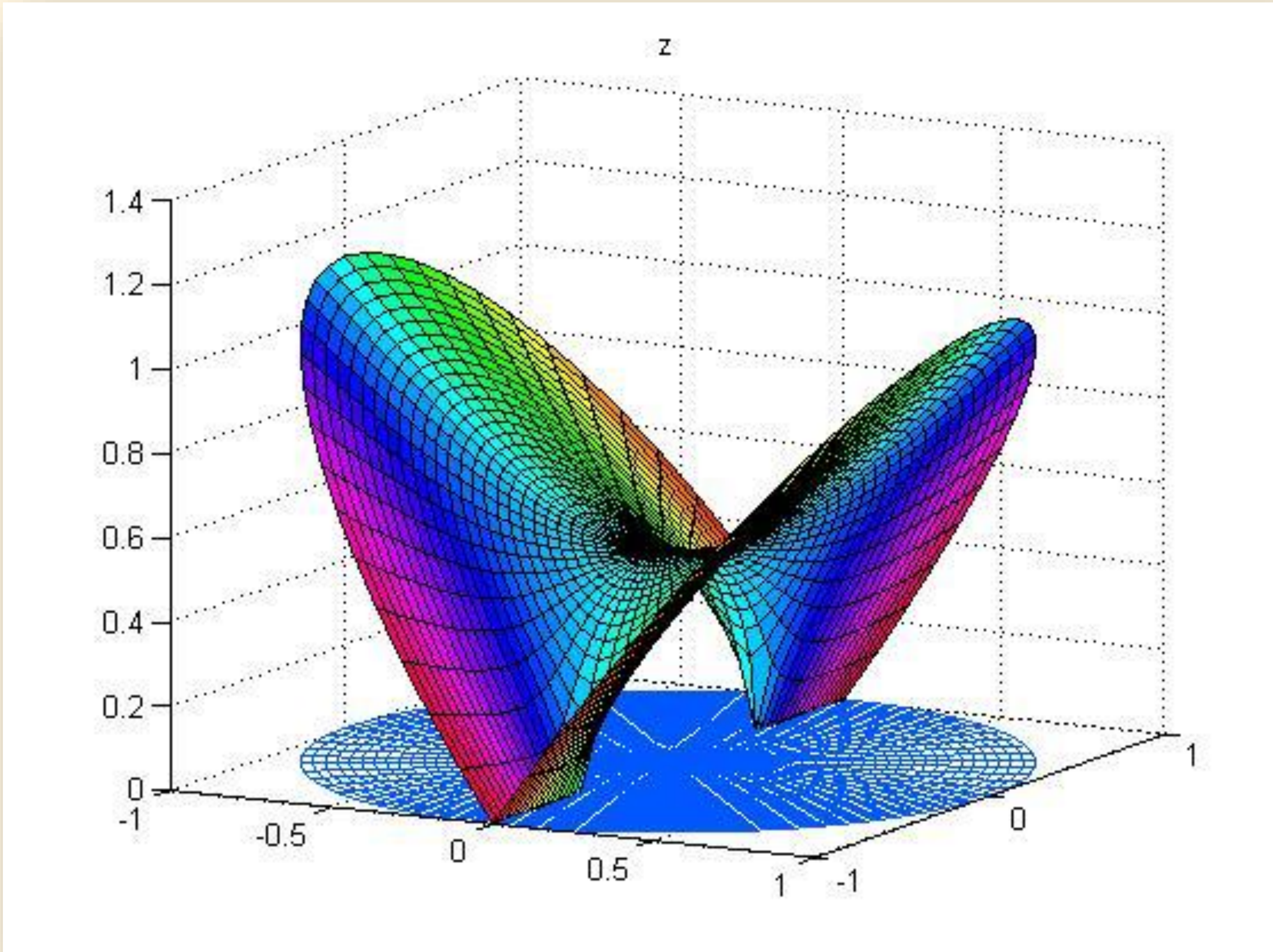
$$w\approx\sqrt{z^2}=z$$ **——故z=∞不是支点**

割线：二个支点的连线（割去不解析区域）

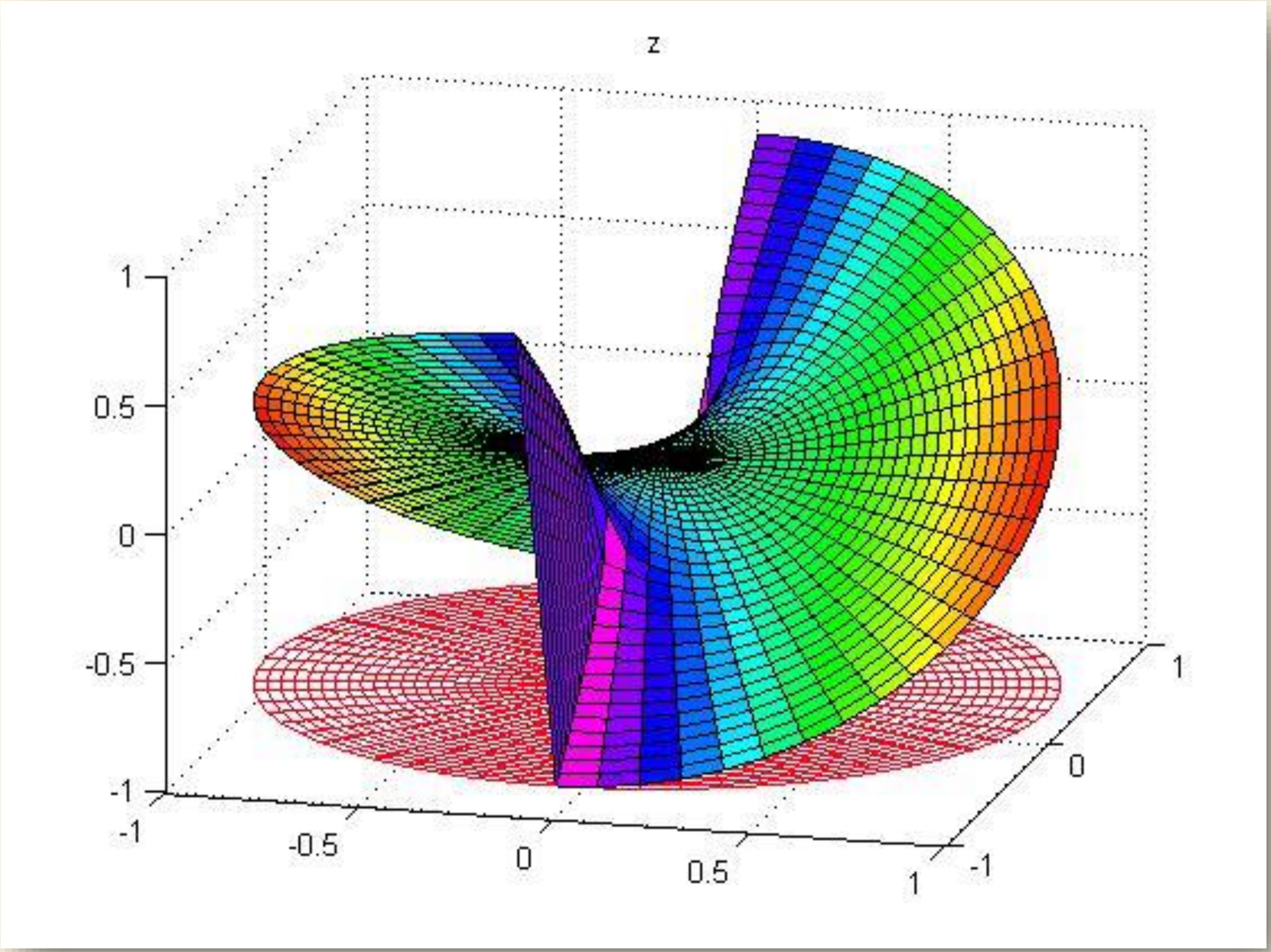


二个支点通过无限大点连接，围道不包含支点和不解析区域：单联通区域

$w=\sqrt{z^2+1/4}$ **实部**



$w = \sqrt{z^2 + 1/4}$ **虚部**



❑多值函数—对数

■ **定义**

$$w = \mathrm{Ln}(z) \Leftarrow e^{w} = z$$

极坐标表示

$$w = \ln\rho + \mathrm{i}(\varphi + 2n\pi),\ (n = 0, \pm1, \pm2, \ldots.)$$

辐角主值

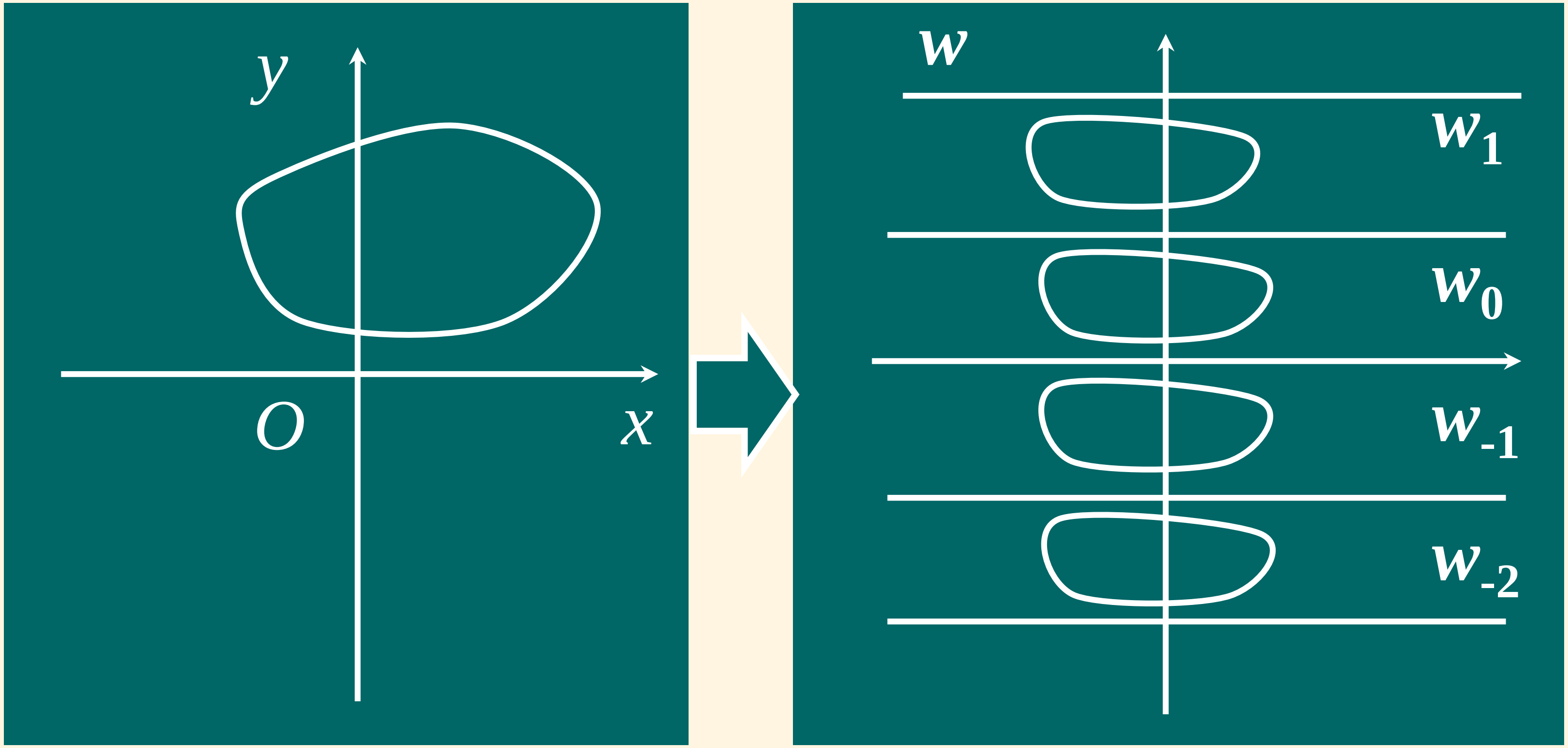
$$0 \le \varphi \le 2\pi$$

1、函数 $w=\mathrm{Ln}(z)$ 的支点是 $z=0$和无限远点

2、绕原点一周，$\arg(z)$ 增加 2π，相应的函数值 w 的虚部也增加2π

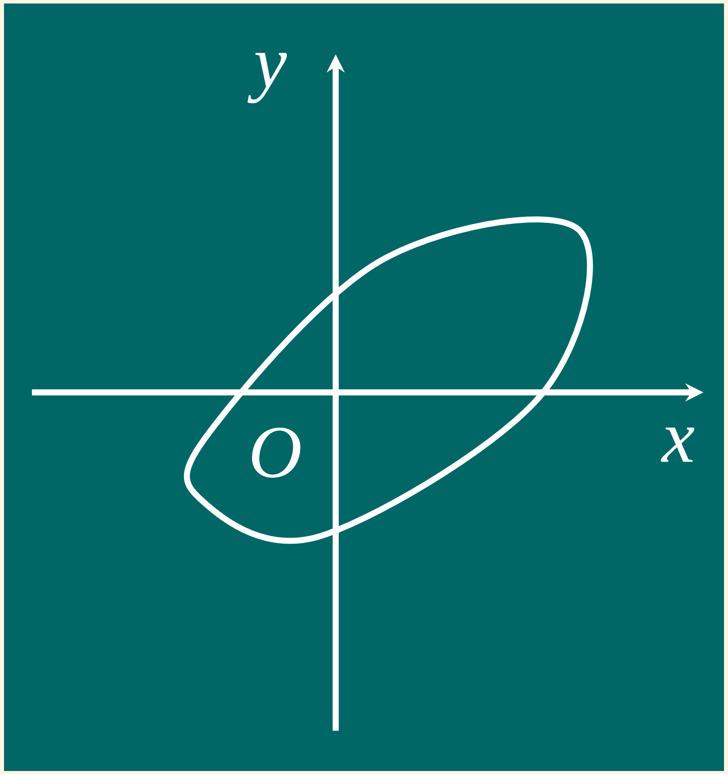
3、单叶分支由无穷多个平面叠加而成

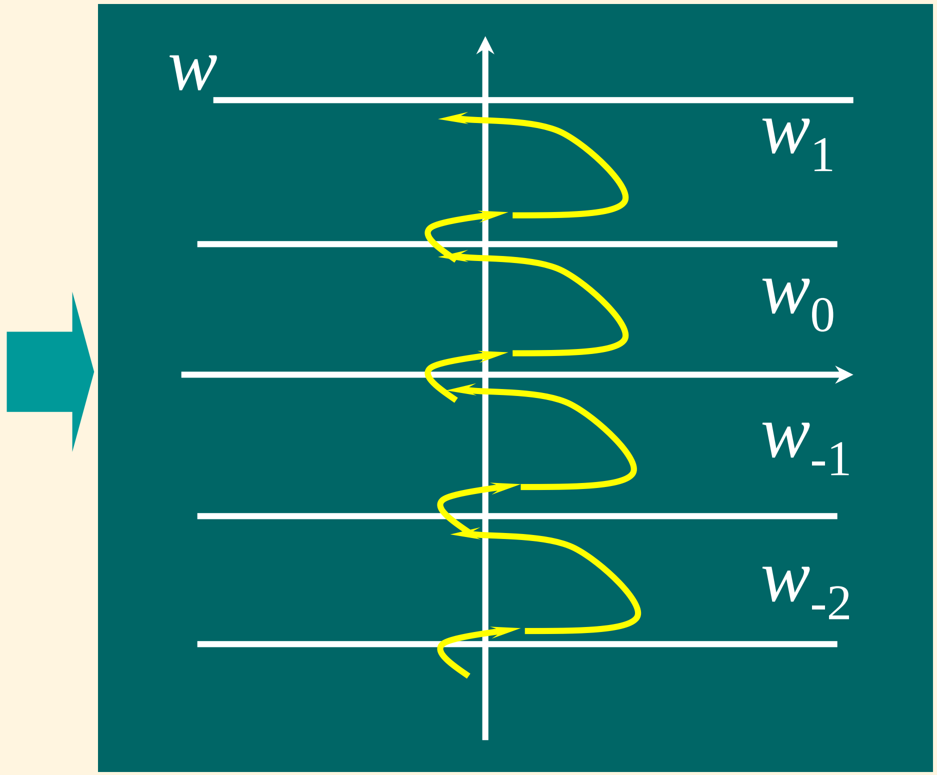
❑映射关系：C不包含原点



无限个单叶支独立，在每个单叶支上，导数唯一，可看作**解析函数**

❑映射关系：*C*包含原点

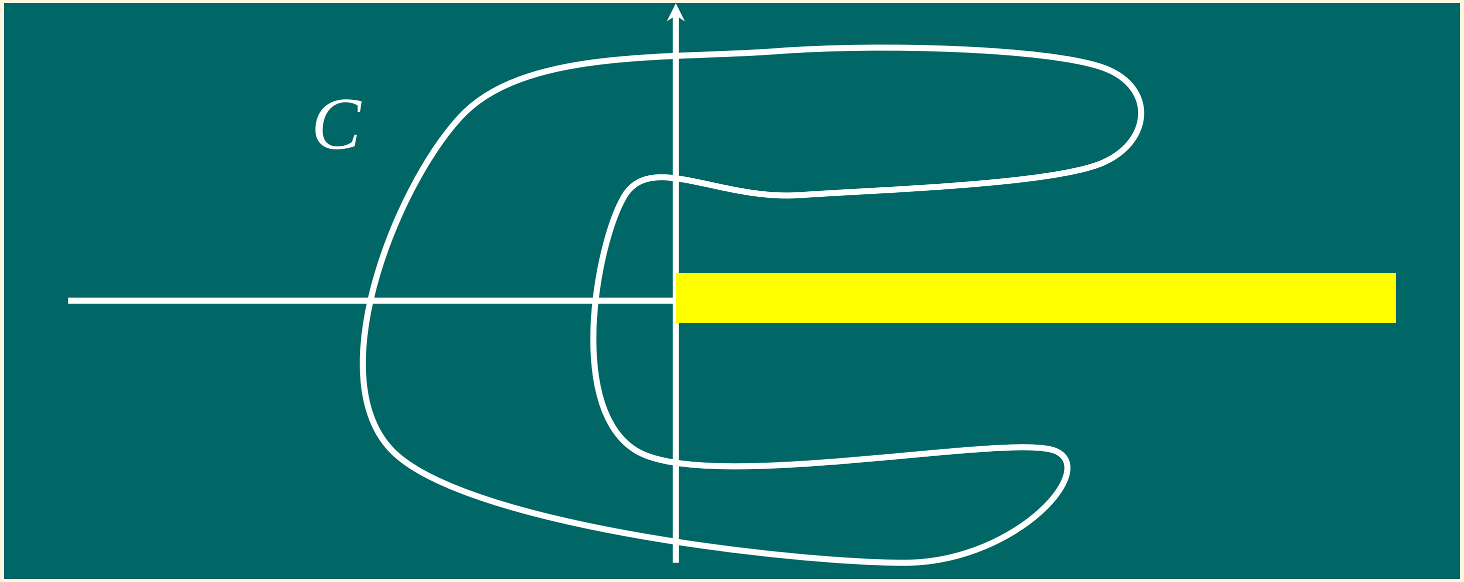




无限个单叶支不独立，跨过正实轴时导数不连续，
函数不解析

❑割线

原点和正实轴



注意：当主值定义为 $-\pi < \arg z \leq \pi$ **，** $w = \mathrm{Ln}(z)$

在负实轴上不连续

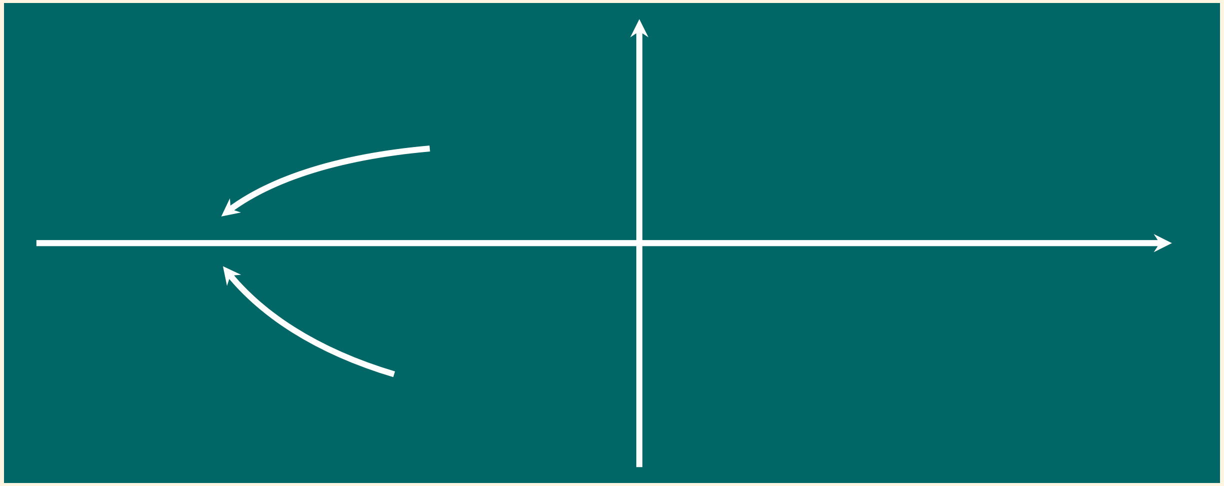
❑上半平面趋近负实轴

$$\varphi \to \pi \Rightarrow w = \ln \rho + i\pi$$

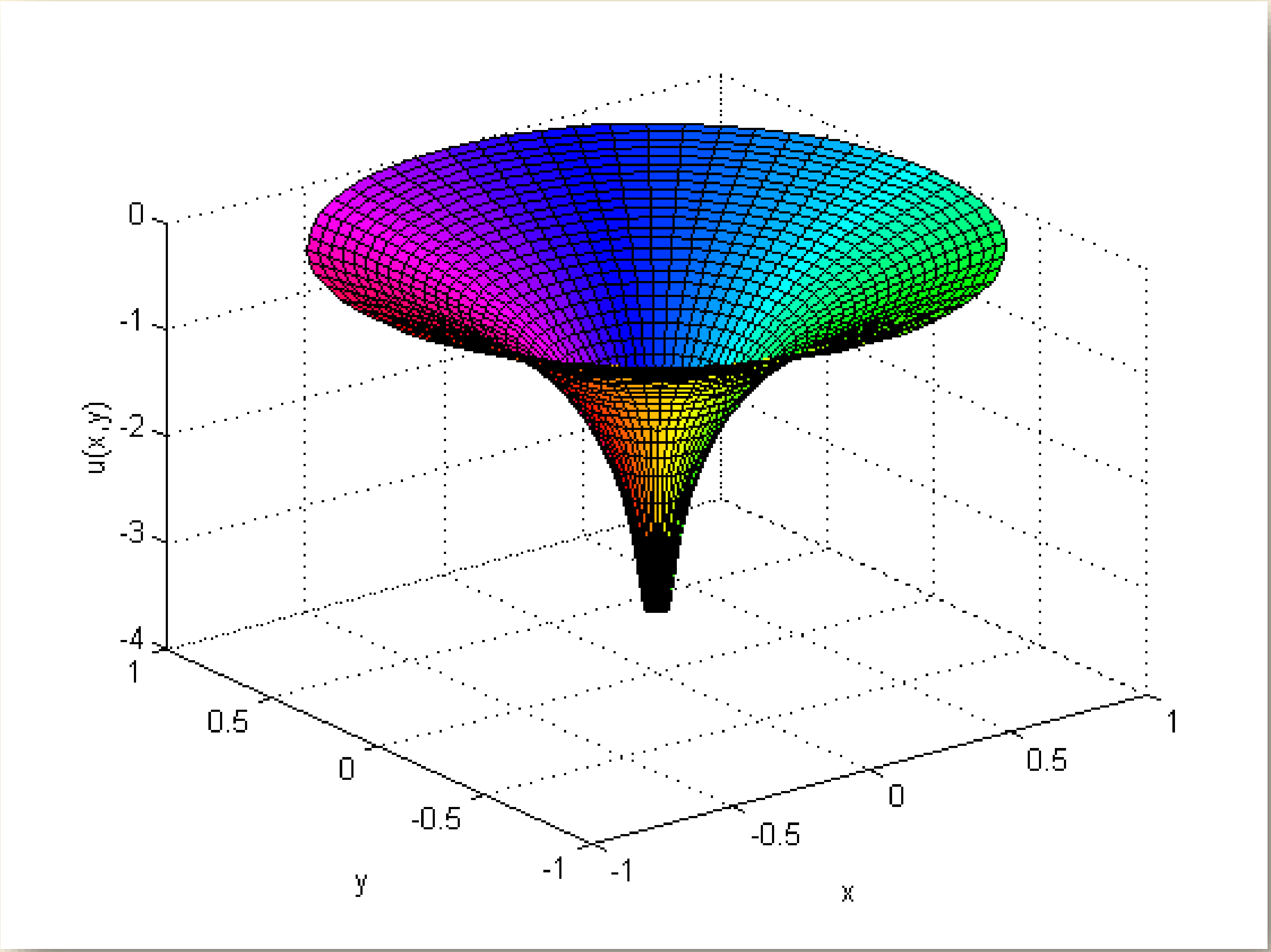
❑下半平面趋近负实轴

$$\varphi \to -\pi \Rightarrow w = \ln \rho - i\pi$$

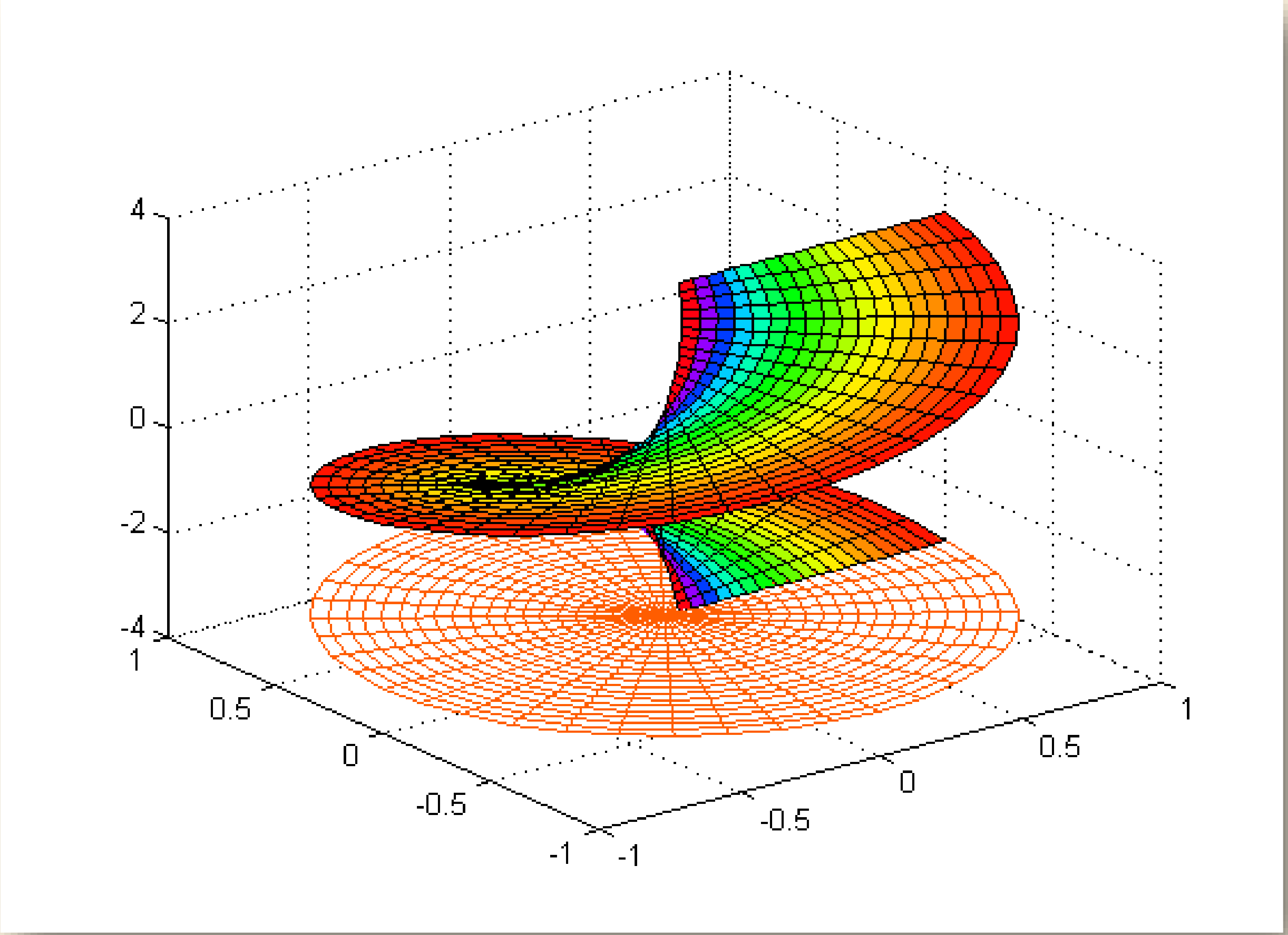
——虚部不连续



❑函数图形（实部）——连续



□ 函数图形（虚部）——不连续



□ 反三角函数和其它

■ 反正弦 $w = \arcsin(z) \Leftarrow z = \sin(w)$

由
$$z = (e^{\mathrm{i}w} - e^{-\mathrm{i}w})/(2\mathrm{i})$$

得到
$$w = \arcsin(z) = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}\left(\mathrm{i}z \pm \sqrt{1 - z^2}\right)$$

多值函数：取正根

$$w = \arcsin(z) = -\mathrm{i}\mathrm{Ln}\left(\mathrm{i}z + \sqrt{1 - z^2}\right)$$

■ 可能支点：$z=+1;-1$；∞。在$z=\pm1$邻域：

$$w \approx -\mathrm{i}\mathrm{Ln}\left(\pm\mathrm{i} + \sqrt{2(1 \mp z)}\right)$$ ——$z=\pm1$是支点

在$z=\infty$邻域

$$w \approx -\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(2\mathrm{i}z\right)$$ ——$z=\infty$ **是支点**

■ 反余弦

$$w=\arccos(z)=-\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(z+\mathrm{i}\sqrt{1-z^2}\right)$$

在$z=\infty$邻域

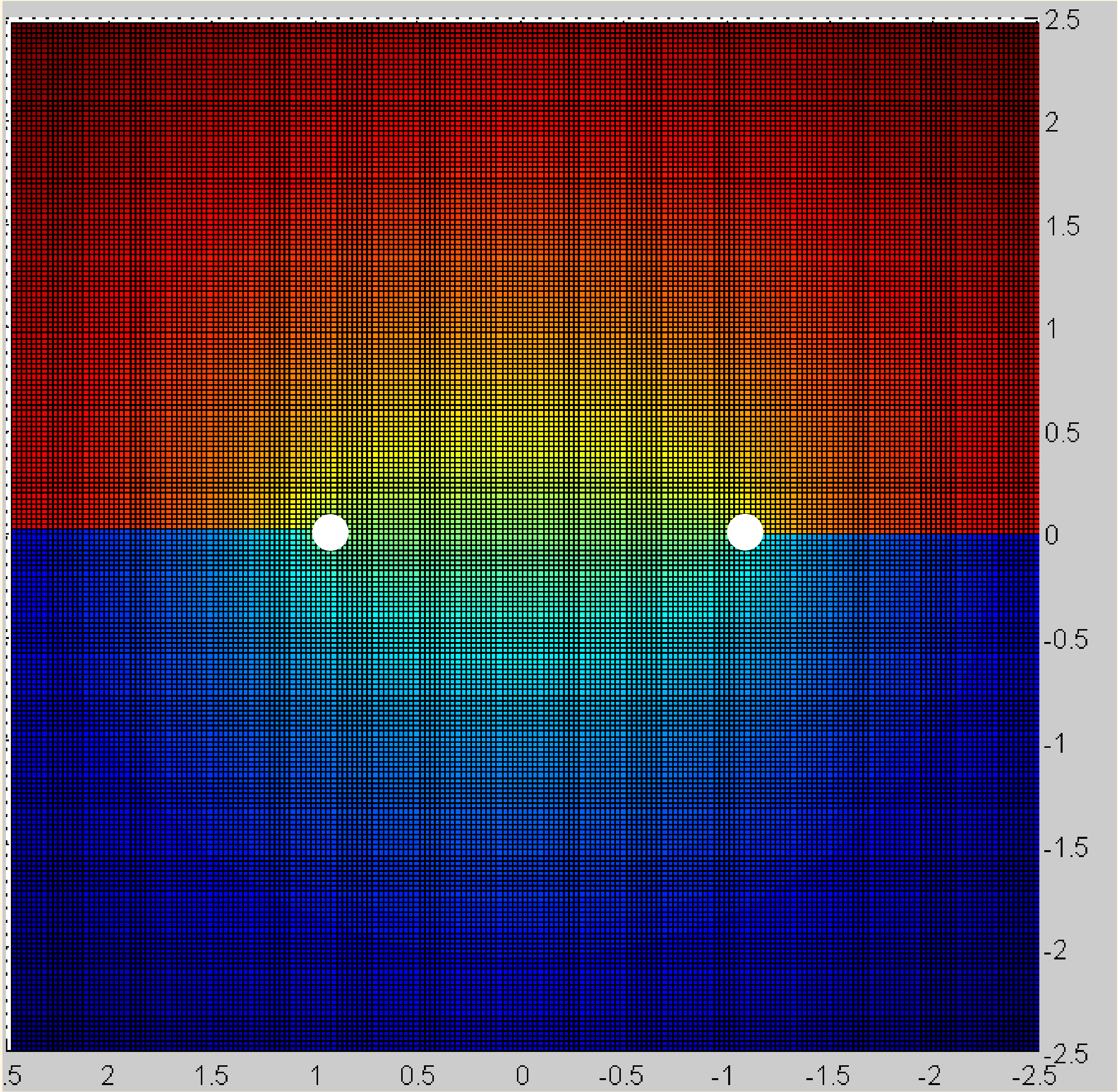
$$w=-\mathrm{i}\,\mathrm{Ln}\left(z-z\sqrt{1-\frac{1}{z^2}}\right)\approx \mathrm{i}\,\mathrm{Ln}(2z)$$ ——$z=\infty$ **是支点**

■ 反正切

$$w=\arctan(z)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right)$$

在$z=\infty$邻域: $$w\approx\frac{1}{2\mathrm{i}}\mathrm{Ln}(1)$$ ——$z=\infty$ **不是支点**

■ w=arcsin(z) 的图形（虚部）



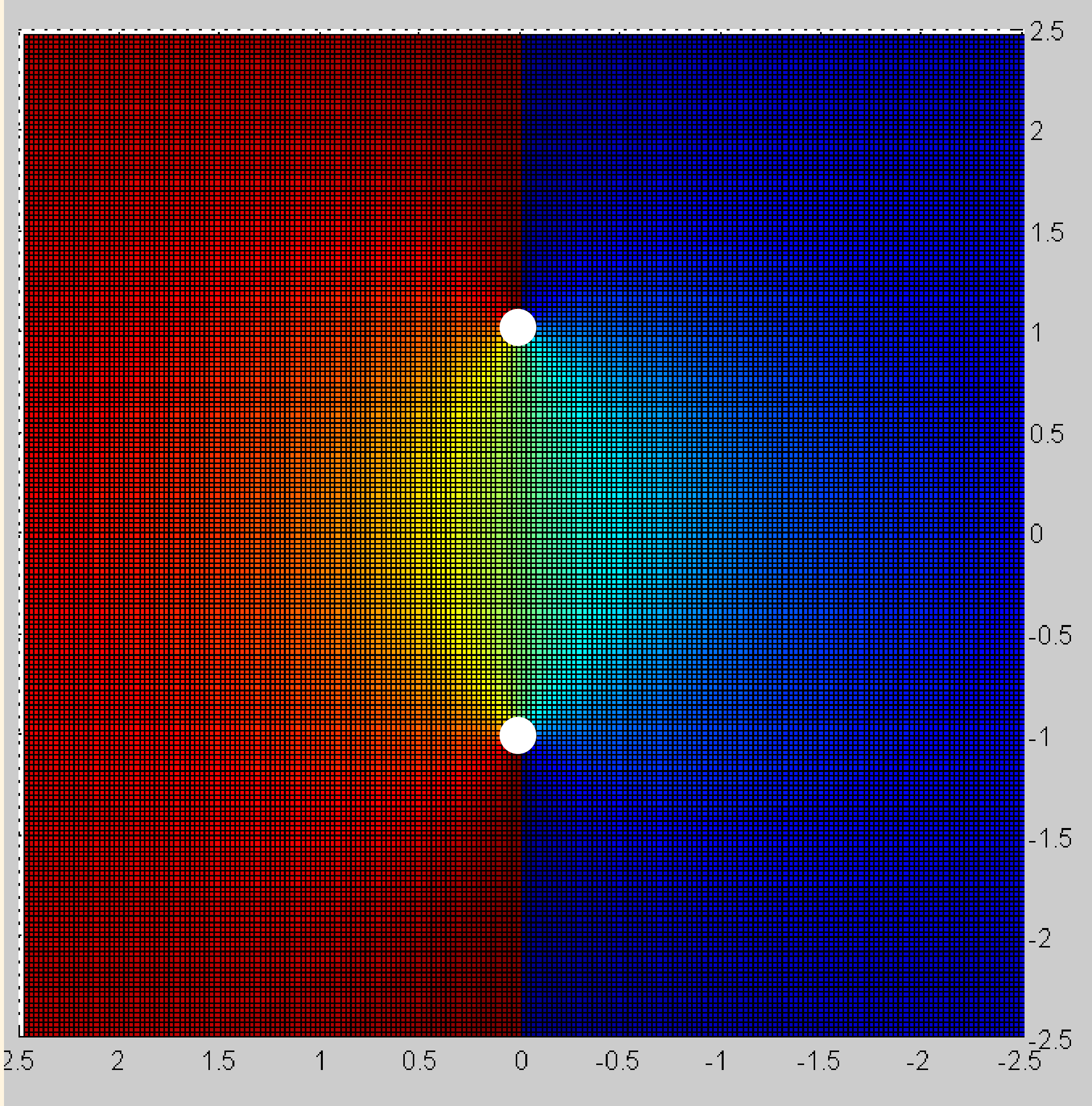
支点

$z=+1$

$z=-1$

$z=\infty$

■ w=arctan(z) 的图形（虚部）



支点

$z=+i$

$z=-i$

❑函数 z^s (s 为任意复数)

定义 $$z^s = e^{s\mathrm{Ln}z}$$

1、如果 s 为整数 n，当z 绕$z=0$ 一周后

$$e^{n(\mathrm{Ln}z+2\pi\mathrm{i})} = e^{n\mathrm{Ln}z}$$

——函数值还原——单值函数

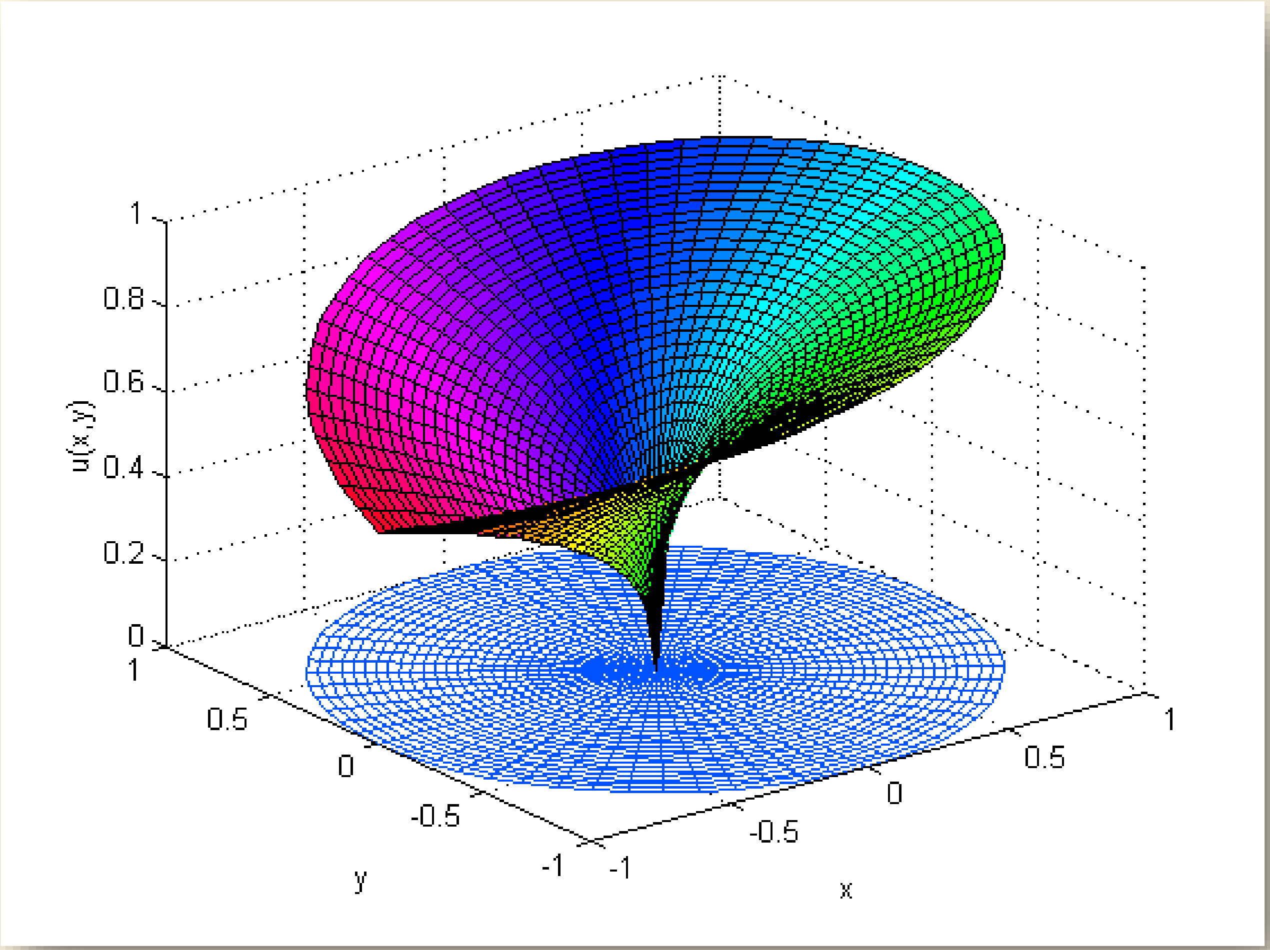
2、如果 s 是有理数 p/q ($q\geq 2$), 当z 绕$z=0$点q周后

$$e^{\frac{p}{q}(\mathrm{Ln}z+2\pi\mathrm{i}q)} = e^{\frac{p}{q}\mathrm{Ln}z}$$ ——$q-1$阶枝点

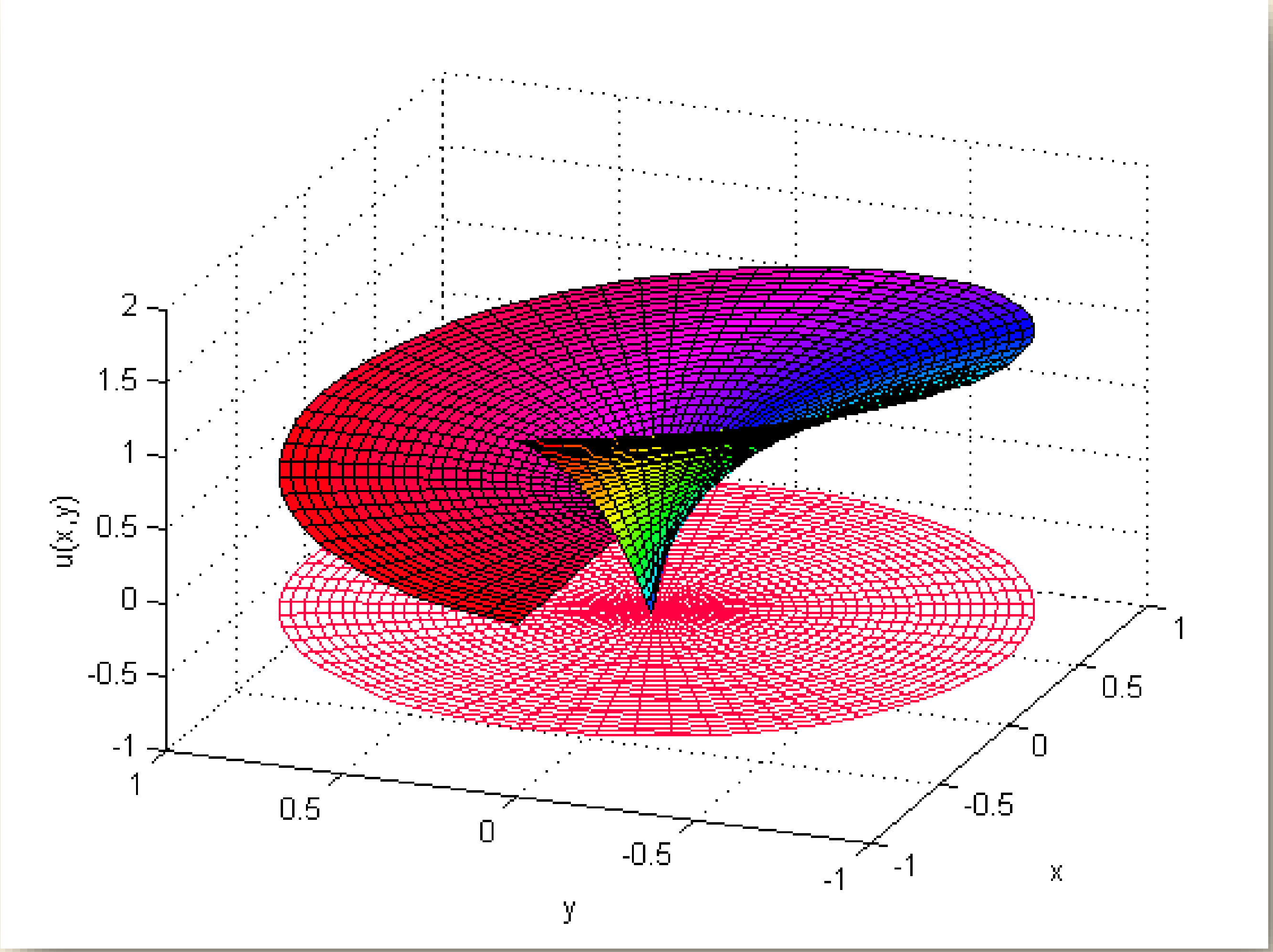
3、当 s 是无理数——无穷阶枝点

4、当 s 是任意复数时，较复杂

■ 函数 $w = z^{1/3}$ 的图形（实部）



■ 函数 $w = z^{(1+i)/3}$ 的图形（实部）



$w=\sqrt{z^2-a^2}$ 实部图像：a=1+0.5i