

关于 Quintessential Inflation 模型势能函数的探讨

尹琪钦 211870080@smail.nju.edu.cn

(南京大学物理学院, 南京 210093)

1 引言

Quintessential Inflation (QI) 框架允许我们通过单一标量场 ϕ 和很少的参数构建描述 inflation 和暗能量的统一理论模型, 并且很好的符合了相关的理论、观测给出的要求。在参考文献 [1] 中, 作者介绍了若干成功的 QI 模型, 值得注意的是, 引入的两个参数都是自然的 (Planck Mass m_p 以及 GUT 能标 M)

目前的一个困境是, 已经有若干 QI 模型和实验很好符合 [2], 但是我们无法排除这些。一方面是实验上缺少检验的手段, 这某种意义上也和这些模型的预言能力有限有关, 可能之后原初引力波的研究会帮助排除部分理论猜想; 另一方面在 inflation 阶段的一些信息理论上是我们不可知的, 以至于理论上没有可能区分 inflation 阶段的不同模型 (No-go)。

此外 QI 本身的 motivation 也不明确, 不同模型基本上都是对势能函数取不同的形式, 和 e-folds, spectral index, power spectrum 的观测结果拟合。

而这个势能函数的选择余地十分广泛, 源自本就丰富的 inflation 以及 quintessence 模型, 接下来将针对这两个阶段的各种理论可能性讨论 QI 势能的若干形式。也正是因此, 只需要满足相关的条件就可以被看作一个模型, 一个个去凑无异于大海捞针。有没有从第一性原理出发推导这个势能的可能性? 基于一些粒子物理模型寻找场 ϕ 可能的形式。(追问 QI 的势能形式可能是个不错的方向)

看起来, 宇宙的历史关于 QI model 的求解被 reheating 强硬的分为两段, 是否可以忽略 inflation 阶段转而求解后续的演化, 于是将 reheating 的一些参数作为初始条件? 但是这样和原版的 quintessence 模型好像也没有区别了。

构造 QI 理论和其势能的动机可谓是五花八门, Motivated by string theory, SUSY, P-Q Theory of QCD, quantum gravity, spontaneous symmetry breaking...

为了 naturalness 选择势能最低为 0, 可以理解, 但是这个零点的物理意义对应什么? 为什么势能的零点在场 ϕ 在远大于 0 处?

Naturalness 本质究竟指的是理论达到什么样的状态?

1.1 构建 QI 模型

除了 inflation 和 dark energy 的观测约束, 一个 QI 模型往往还需要满足:

1. “Sterile” inflaton: 标量场不和标准模型场耦合, 且 inflation 结束后不会衰变为标准模型粒子。最简单的, 标量场作为 gauge singlet 可以满足。
2. Quintessential tail: 当前, 标量场没达到势能最小值 (由于当前宇宙 DE 成分确实存在), 同时为了避免 fine-tuning 默认势能最低为 0。于是势能最低点距离初始点相当远 (可能无穷远)。综上, 要求势能存在两个平坦区域: inflationary plateau, quintessential tail.

2 两种 Inflation 机制对势能的影响

从 Alan Guth 首次提出 inflation，之后各种 inflation 模型被提出，描述宇宙早期的急剧膨胀阶段，以解决平坦性、视界疑难。我们在此关注只包含单个标量场的模型，同时，分类讨论的依据是不同暴胀场 ϕ 初始能量相比于 Planck 能标的大小。基于现有的 inflation 模型，就两种情况进行探讨，有 Chaotic Inflation (势能无上界, Peebles-Vilenkin 模型属于这种)，以及 Inflection Point Inflation (势能初始可能在平台处)，它们给出暴胀发生时刻势能形式两种典型样貌。

2.1 Chaotic Inflation

首先讨论 Chaotic Inflation，在这类模型中，inflation 的开始条件相对简单，一个关键特点是它不需要特定的初始条件或复杂机制来启动 inflation 过程。如果在 inflation 的初始阶段，根据量子涨落，标量场处于其势能曲线的某个较高处（远高于 Planck 能标，但这也会导致一些重整化修正，可能使得暴胀不会发生，是当今关于这类“大场”模型的一个争议），那么整个过程可以自然地开始。对于简单的二次、四次等多项式势能形式，当标量场的值足够大以至于其动能远小于其势能（即慢滚条件满足）时，inflation 会开始。标量场的初始值必须足够高，以确保 inflation 持续时间足够长，为解决平坦性、视界疑难提供充足的膨胀时间。

当标量场滚动至其势能曲线的较低部分，使得慢滚条件不再满足时，膨胀阶段结束。具体来说，当的动能开始占主导，即标量场滚动加快时，膨胀将结束。随后宇宙进入 Reheating 阶段，标量场的能量被转化为标准模型粒子的 thermal bath。

整个暴胀过程中，若宇宙只考虑标量场能量的贡献，并指定了势能的形式（以下计算取 $V = \frac{1}{2}m\phi^2$ ）和相关参数的具体数值，则可以由 Friedmann 方程和标量场运动方程联合求解，直至 slow-roll conditions 被破坏。除了约定自然单位制，约定 $c = \hbar = G = 1$ ，在具体的数值计算中，取 $m = 1, \phi(t = 0) = -50, \dot{\phi}(t = 0) = 0$ 以及设置暴胀发生在 $t = 0$ 时刻，求解得到 ϕ 随时间的演化：暴胀阶段较慢地滚动到势能零点，达到零点时几乎动能势能相等，从 slow-roll parameters 的演化数值结果也不难看出 slow-roll conditions 被破坏，于是暴胀结束；之后若不发生 reheating，标量场将在势能零点附近呈现逐渐衰减的振荡（这一部分在 QI 模型中是不必考虑的）。

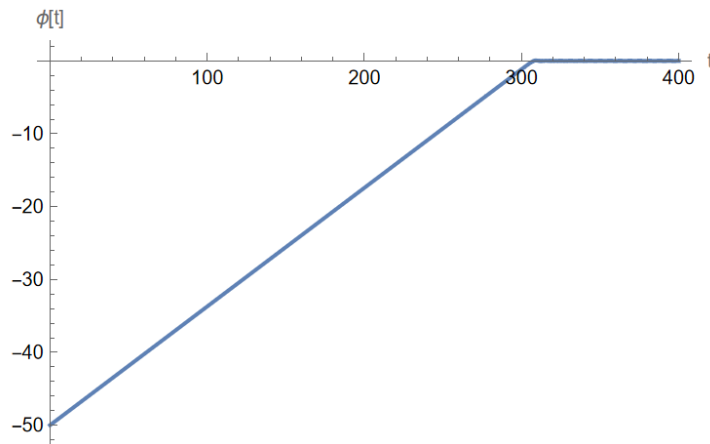


图 1: ϕ 随时间的演化

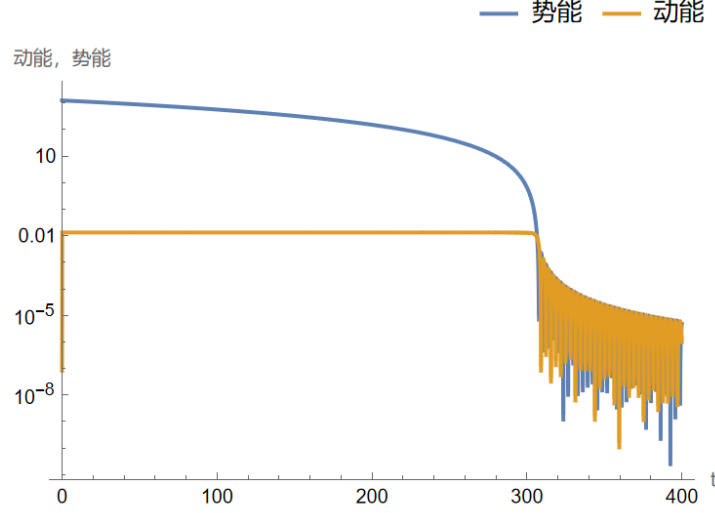


图 2: 标量场动能、势能随时间的演化

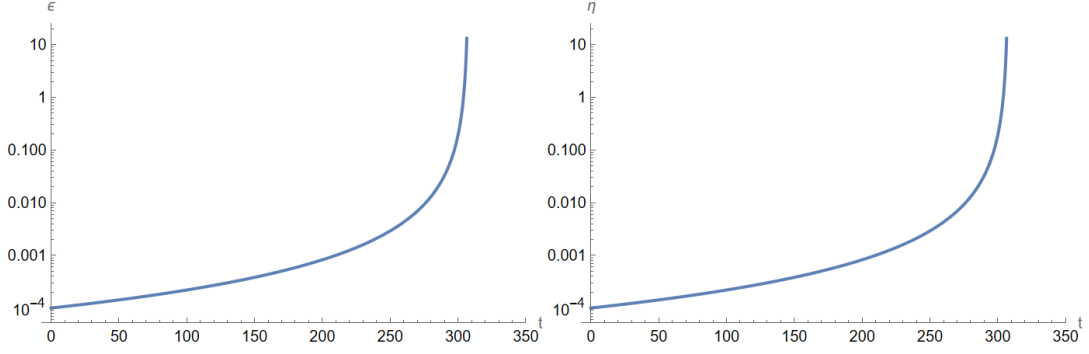


图 3: slow-roll parameters 随时间的演化

2.2 Inflection Point Inflation

接下来研究 Inflection Point Inflation, 这个模型依赖于标量场势能曲线上的一个拐点来实现暴胀。在拐点处, 势能曲线既不是绝对平坦也不是急剧下降, 允许存在足够长时间的 inflation 阶段。这类模型通常具有较低的能量尺度。

Inflection Point Inflation 模型势能形式较为复杂, 若从多项式形式出发有:

$$V(\phi) = V_0 + \alpha\phi^2 - \beta\phi^3 + \gamma\phi^4 + \dots \quad (1)$$

其中的参数往往需要 fine-tuning 构造使得暴胀场在拐点附近的行为符合要求。

基本的思路是: 在拐点处, 势能满足两个条件: 其一阶导数接近零 (但不为零), 二阶导数为零, 这是自然满足 slow-roll conditions 的。这种特殊的形态使得 inflaton 能够在势能拐点处缓慢滚动, 从而导致宇宙经历了一个稳定的膨胀期。这一过程可能需要一个较为精细调节的初始状态或一定的前期演化, 以确保标量场可以稳定在拐点附近足够长的时间。

在 Inflection Point Inflation 模型中, inflation 通常开始于标量场到达其势能曲线上满足拐点条件的位置。同样的, 当标量场的动能增长到达和势能相当时, 认为 inflation 阶段结束。

Inflection Point Inflation 模型在理论上具有较高的灵活性, 可以通过调整模型参数来与宇宙学

的观测数据相匹配。然而，这也是这类模型的一个争议点，即需要一定的 fine-tuning 才能得到预期的暴胀结果，同时，过多的拟合参数可能并不自然。

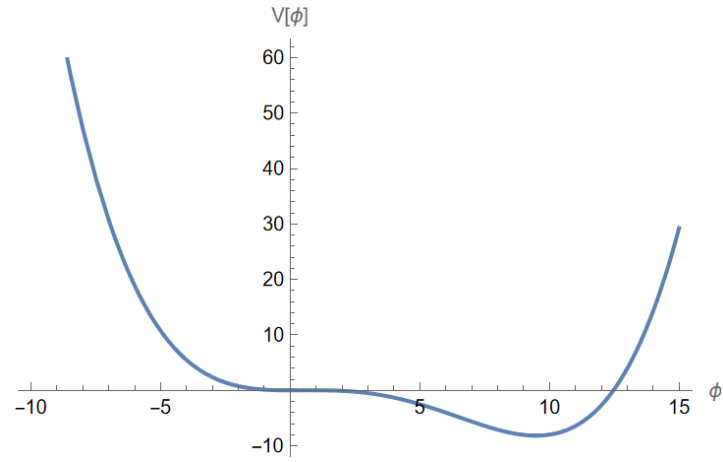


图 4: 势能曲线

类似的，指定势能 $V = a\phi^2 - c\phi^3 + b\phi^4$ ，为了简便起见这里没有调整使得势能最低点为 0，只需要之后的计算中注意带入势能和最低点的差值，其结果是等价的，人为的设置参数 $\{a, b, c\} \rightarrow \{0.07, 0.0038, 0.053\}$ 势能曲线，设置初始条件为：标量场开始于最靠近势能最低点的拐点，并且此时场的动能为 0，接下来带入数值求解即可。从求解过程不难看出，Inflection Point Inflation 模型需要 fine-tuning 的参数较多，其中包括势能的形式（控制拐点相对势能最低点的位置，拐点处的斜率）、标量场的质量、初始位置，且最后的暴胀结果敏感于这些参数。

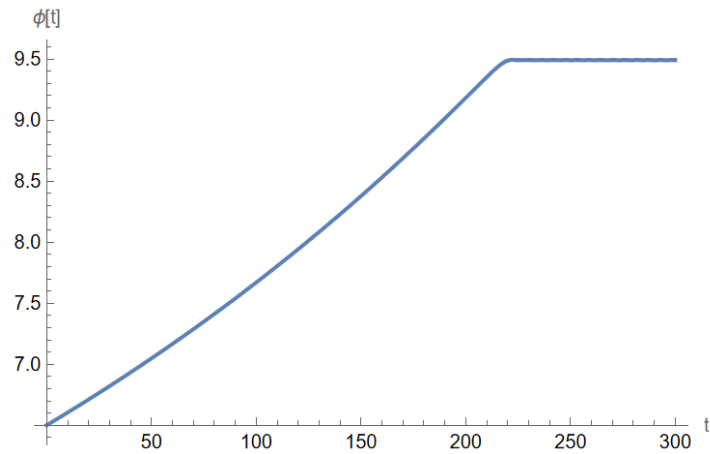


图 5: ϕ 随时间的演化

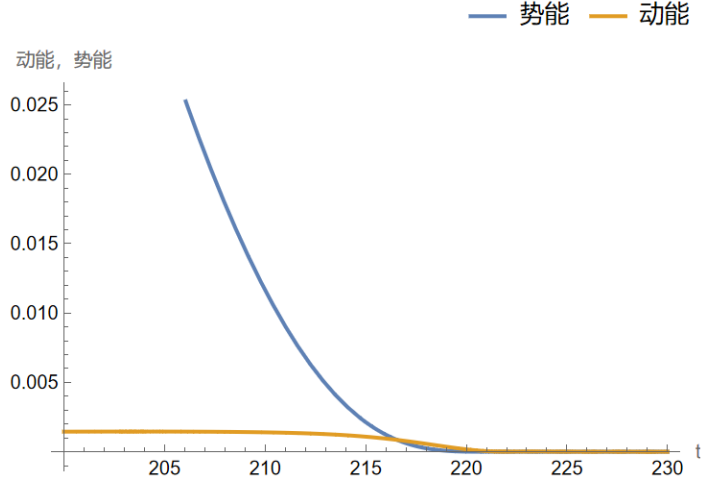


图 6: 标量场动能、势能随时间的演化

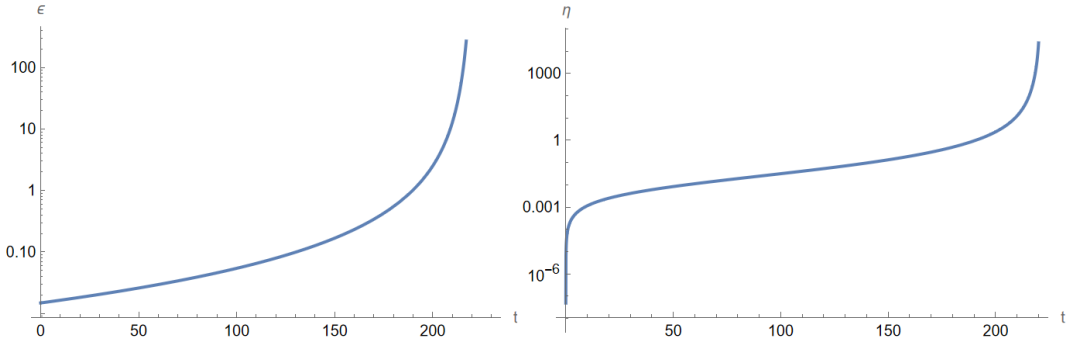


图 7: slow-roll parameters 随时间的演化

以上的两种 inflation 模型对应着暴胀开始时刻标量场的不同能标, 对于 Chaotic Inflation, 其势能远高于 Planck 能标, 最终的暴胀结果对于初始的势能形状并不敏感, 一定程度上减轻了 fine-tuning problem; 而 Inflection Point Inflation 依赖于在势能拐点处提供的暴胀区间, 允许较低的初始势能能标, 避免了过多的重整化修正, 使得理论在可以接受的能标下进行, 但是暴胀行为对于初始条件、势能形状非常敏感, 需要细致的 fine-tuning 才能得到预期的结果。

3 Quintessence

根据 reheating 机制的不同, 可以预想若干可能的初始条件: 比如 inflation 阶段标量场动能不断增加, 达到某个阈值发生相变 (类似于要求 reheating 发生条件是标量场动能大于这个能量下限), 标量场势能的滚动转化为动能和动能导致的 reheating 相互竞争, 直到动能几乎全部转化为大爆炸物质 (这里假设势能不与物质耦合, 而是独自演化的) 从而低于阈值。值得注意的是, 这个 reheating 阈值也可以解释后续标量场的演化依然有动能影响, 而不至于宇宙后续一直在产生大爆炸物质 (感觉其实和标量场动能只和某种很重的粒子耦合等价), 之后标量场彻底和宇宙中的物质退耦。(我关于 reheating 机制的一些思考)

当 reheating 结束后, 标量场 ϕ 的演化就完全由 Hubble 参数和势能决定了, 这和求解传统的 Quintessence models 思路一致。在 Peebles 最早的 QI 模型文章中 [3], 简单的认为物质主导时期后

续演化中，只考虑标量场的势能的贡献，随后的演化服 Λ CDM 模型，最终宇宙达到一个状态方程参数 $w_{eff} \sim -1$ ，宇宙膨胀率几乎恒定的，模拟结果如图 (8)，可以看出宇宙最终呈现出另一个永远类似指数膨胀下去的相，这和宇宙常数主导的解类似。

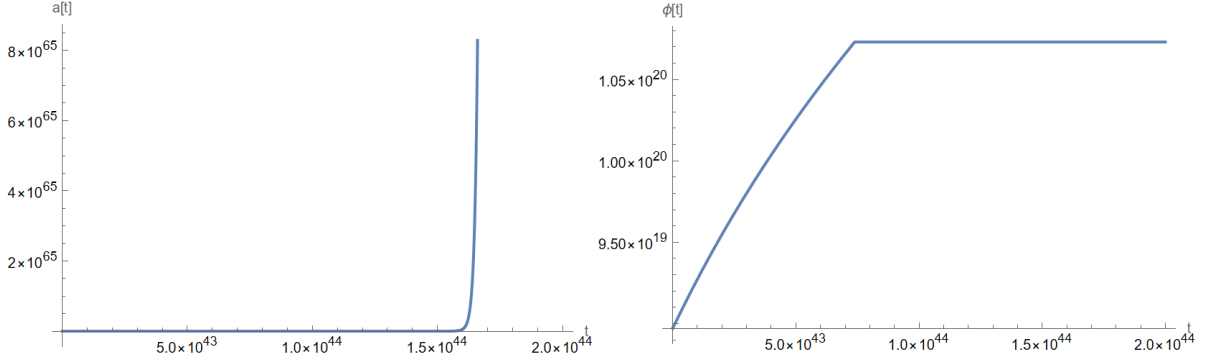


图 8: Peebles-Vilenkin 模型满滚 quintessence 演化

但是进一步的研究表明，若考虑背景物质占主导时期的演化和 reheating 之后标量场获得的少量动能，之后的演化将呈现出更丰富的形态。对于特定的背景物质，有状态方程参量 w_B 当其占主导时 $H^{-1} = \frac{3}{2}(1+w_B)t$ 。慢滚条件下标量场运动方程 (忽略标量场对时间二阶导):

$$3H \frac{d\phi}{dt} = \frac{2}{(1+w_B)t} \frac{d\phi}{dt} = -V'(\phi) \quad (2)$$

求解得:

$$\begin{aligned} f(\phi(t)) - f(\phi_F) &= F(t) \\ f(\phi) &\equiv - \int' \frac{d\phi}{V'(\phi)} \quad F(t) \equiv \frac{1}{4}(1+w_B)t^2 \end{aligned} \quad (3)$$

这里 $f(\phi)$ 给出的积分下限由一个不定系数 ϕ_F 表示，提供了不同的定性解:

$$\phi(t) \simeq \begin{cases} \phi_F & \text{when } f(\phi_F) \gg F(t) \quad \text{Frozen} \\ \phi_{\text{atr}}(t) & \text{when } f(\phi_F) \ll F(t) \quad \text{Attractor} \end{cases} \quad (4)$$

其中 $\phi_{\text{atr}}(t)$ 为:

$$f(\phi) \simeq F(t) \Leftrightarrow \frac{1}{4}(1+w_B)t^2 = - \int' \frac{d\phi}{V'(\phi)} \quad (5)$$

由于 $F(t) = \frac{1}{4}(1+w_B)t^2$ 不断增长，物理图像上，一开始标量场会冻在某个值，而之后 $F(t)$ 增大，标量场开始继续演化 (图 10 中标量场的状态方程因子的演化可以看出)。于是，两个因素决定了宇宙后续的演化: 标量场被冻结和解冻的时间、解冻后标量场的状态方程因子。援引参考文献 [1] 的示意图 (9):

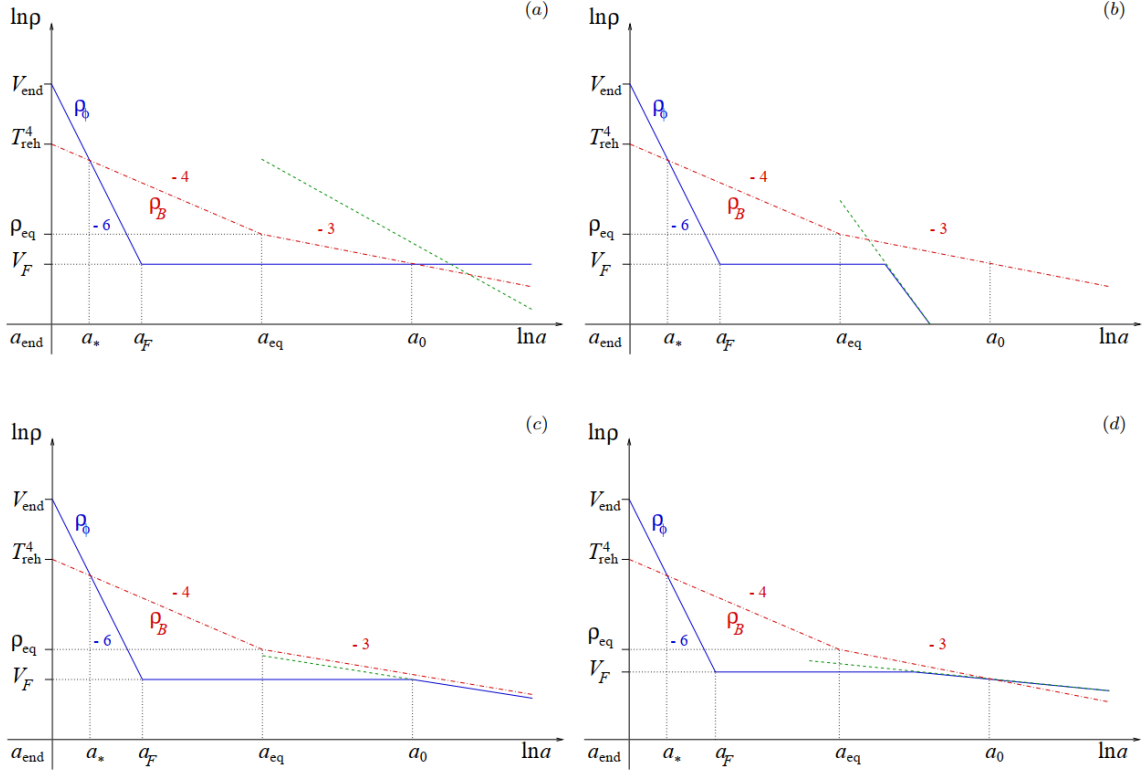


图 9: 不同条件下标量场和背景物质的能量密度演化 [1]

其中红色点划线代表背景物质、蓝色实线为标量场能量密度，绿色虚线为背景物质主导下 attractor solutions 的斜率（取决于势能尾部的形式）。于是，若达到 attractor solutions 的时间早于物质-标量场相等，且 attractor solutions 演化斜率小于等于物质演化斜率 (-3)，则宇宙永远达不到最终永恒的加速膨胀；若 attractor solutions 的斜率大于-2，那么宇宙都有可能最终永恒的加速膨胀下去。此外，也有可能宇宙在人类当前时刻处于短暂的加速膨胀时期，而后续尽管依旧是标量场主导的，但是动能占比增加，状态方程因子转变为大于 $-\frac{1}{3}$ 从而减速膨胀，这依赖于场的势能尾部形式和场的质量。

以下是对以上考虑的若干情况进行具体的数值模拟，结果和定性分析的基本一致。

基于 Peebles-Vilenkin 模型，背景物质主导时期的标量场演化数值模拟给出 (10)：当标量场慢慢滚至势能尾部，演化后期标量场的动能往往小于势能，且这个趋势对模拟初始时刻动能势能比值和背景物质是否为相对论性不敏感，即使起初动能远大于势能，动能也将迅速降低，标量场可以被冻结，和上一段的论述一致，最终解冻并开始演化，后期标量场势能也可能重新主导。此外，模拟结果显示，后期 quintessence 的状态方程因子趋近于小于零的固定值，标量场能量衰减慢于背景物质，这个值可能在 $-\frac{1}{3}$ 上下浮动，不难推断之后 quintessence 将占主导，且给出宇宙不同的结局：加速或减速膨胀。

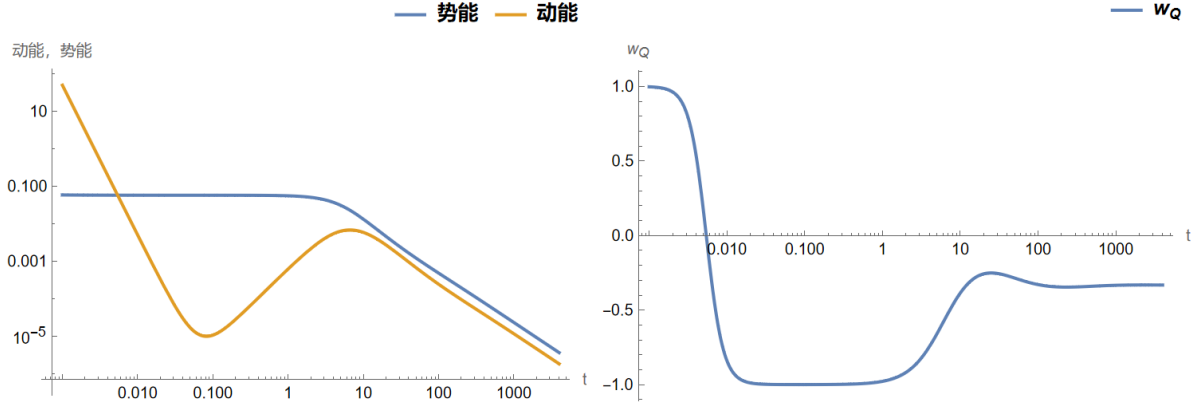


图 10: 背景物质 ($w_B = 0$) 中标量场动能、势能以及状态方程因子的演化

以及, 若宇宙已经演化为 quintessence 主导而仍处在 Frozen 状态, 取动能为 0, 接下来标量场能量的演化将近似保持在状态方程因子为-1 附近, 于是宇宙最后结局为持续加速膨胀, 如图 (11) 的模拟结果所示。

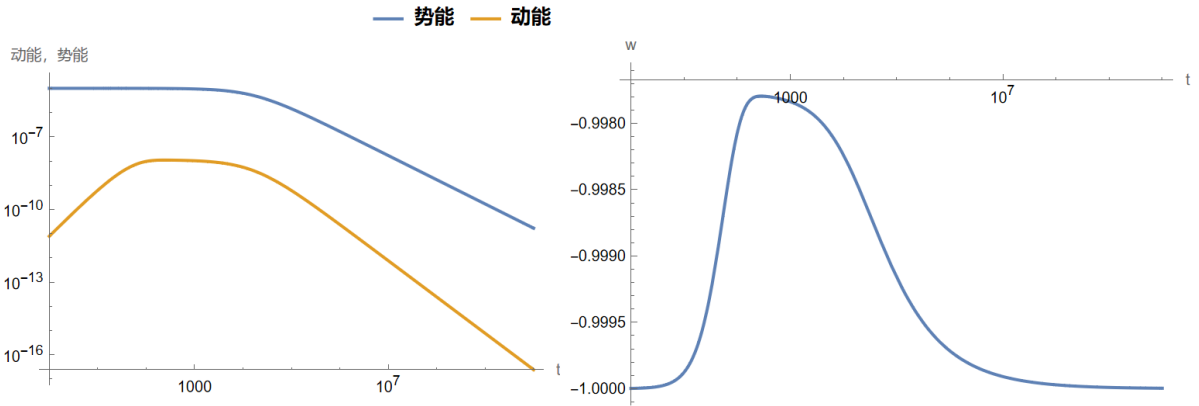


图 11: 单一 quintessence 演化, 最终势能主导

此外, 考虑场的势能形式, 若取 $V \propto \exp(-\phi^{1.5})\phi^{-3}$, 标量场主导情形下, 也可能短暂呈现加速膨胀, 对应标量场主导时仍处于 frozen solution 而后演化使得动能逐渐上升, 使状态方程因子 $w > -\frac{1}{3}$, 如图 (12)。

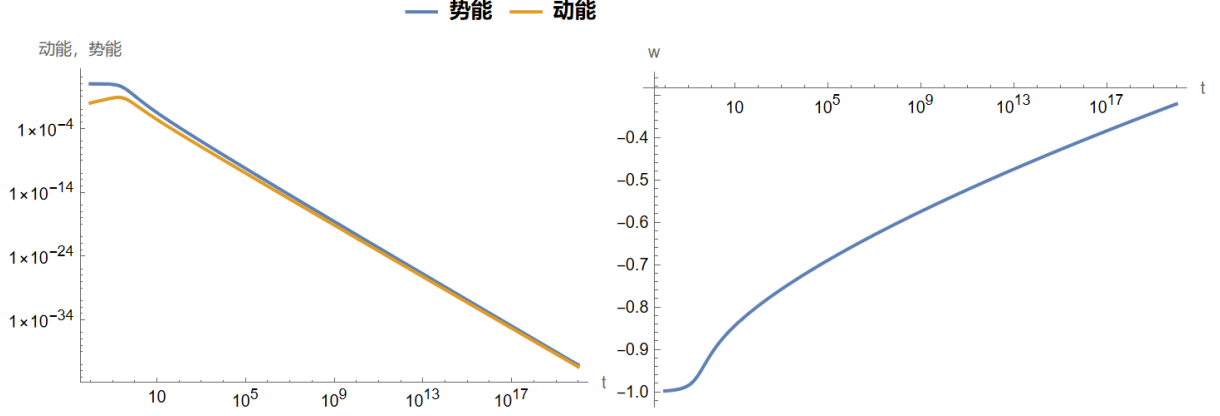


图 12: 单一 quintessence 演化, 动能比例上升, 最终宇宙减速膨胀

3.1 Tracker Solutions

以上介绍了 attractor solutions, 指的是在背景物质主导时期 (此时标量场能量由势能主导), quintessence 演化脱离 frozen solutions, 并且这种演化能量密度衰减斜率取决于具体的势能形式。在 attractor solutions 中, 已经讨论发现若标量场能量密度的衰减缓于背景物质, 那么宇宙最终必将达到标量场主导, 这种不依赖于初始标量场和背景物质能量密度比值的解被称为 tracker solutions [4]。起初, tracker solutions 在 quintessence 的研究中被提出, 作为一种不依赖于初始条件于是更加自然的模型被接受, 一定程度上解释了当今宇宙物质、暗能量比值的疑难。

由 attractor solutions 的方程, 背景物质主导下的 Hubble 参量:

$$\begin{aligned} \frac{1}{4}(1+w_B)t^2 &= -\int \frac{d\phi}{V'(\phi)} \\ H^2 &= \frac{\rho_B}{3m_p^2} = \frac{4}{9(1+w_B)^2 t^2} \end{aligned} \quad (6)$$

得到:

$$\frac{m_p^2}{3(1+w_B)} \left(\frac{V_{\text{atr}}}{\rho_B} \right) = -V \int' \frac{d\phi}{V'} \quad (7)$$

上式两边对 t 求导容易证明:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{V_{\text{atr}}}{\rho_B} \right) \geq 0 \Leftrightarrow V \geq (V')^2 \int' \frac{-dV}{(V')^2} \quad (8)$$

同理也可以证明 [4]:

$$\Gamma \equiv \frac{VV''}{(V')^2} \geq 1 \Leftrightarrow \frac{d^2}{dt^2} \left(\frac{V_{\text{atr}}}{\rho_B} \right) \geq 0 \quad (9)$$

以上两个不等式取等的条件为势能取指数衰减形式。由此可以证明 tracker solutions 仅存在于 quintessence tail 势能衰减比指数形式更缓慢的情形 (详细证明见 [1] 3.1.2 节内容), 这对势能尾部性质做出了进一步的约束。

此外, 以上条件也对 quintessence 的形式给出了约束: 似乎对于尾部比指数形式衰减更陡峭的势能, 只有 frozen quintessence 是可能实现的。但是已有研究显示, 比指数衰减更陡峭的势能, 往往导致 inflation 结束后很短时间达到 attractor solutions[1], 最终变为图 (9) 中 (b) 子图的情形, 导致模型失败。而尾部衰减缓于指数形式 (sub-exponential) 的势能函数, 对应的是 (d) 子图的情形, 和 frozen quintessence 类似, 可能导致宇宙永恒的加速膨胀。

3.2 指数势能临界条件下的短暂加速膨胀解

由先前的讨论，对于 attractor solutions，可以粗略的将势能尾部分为三类：陡峭型、平缓型、临界型（指数衰减）。若考虑势能曲线只具有以上的单一性质，排除如从陡峭变为平缓的尾部势能情形，那么只有平缓型会导致宇宙晚期暗能量主导而加速膨胀，这一小节中将讨论令先前不等式取等的临界的情形：指数衰减的势能尾部。

如此情形，将不会得到最终主导的暗能量解，而是短暂的出现标量场主导、宇宙加速膨胀的时期，但随后标量场和背景物质能量比值降低，背景物质继续占上风，最终标量场按照背景物质的衰减规律一同衰减，其能量比值近似不变却小于 1：

$$\frac{V}{\rho_B} \rightarrow \text{const} < 1 \quad (10)$$

以上论述由数值计算结果-图 (13) 给出，基本是一致的。指数形式将导致短暂的宇宙加速膨胀，而不是最终暗能量主导的宇宙。

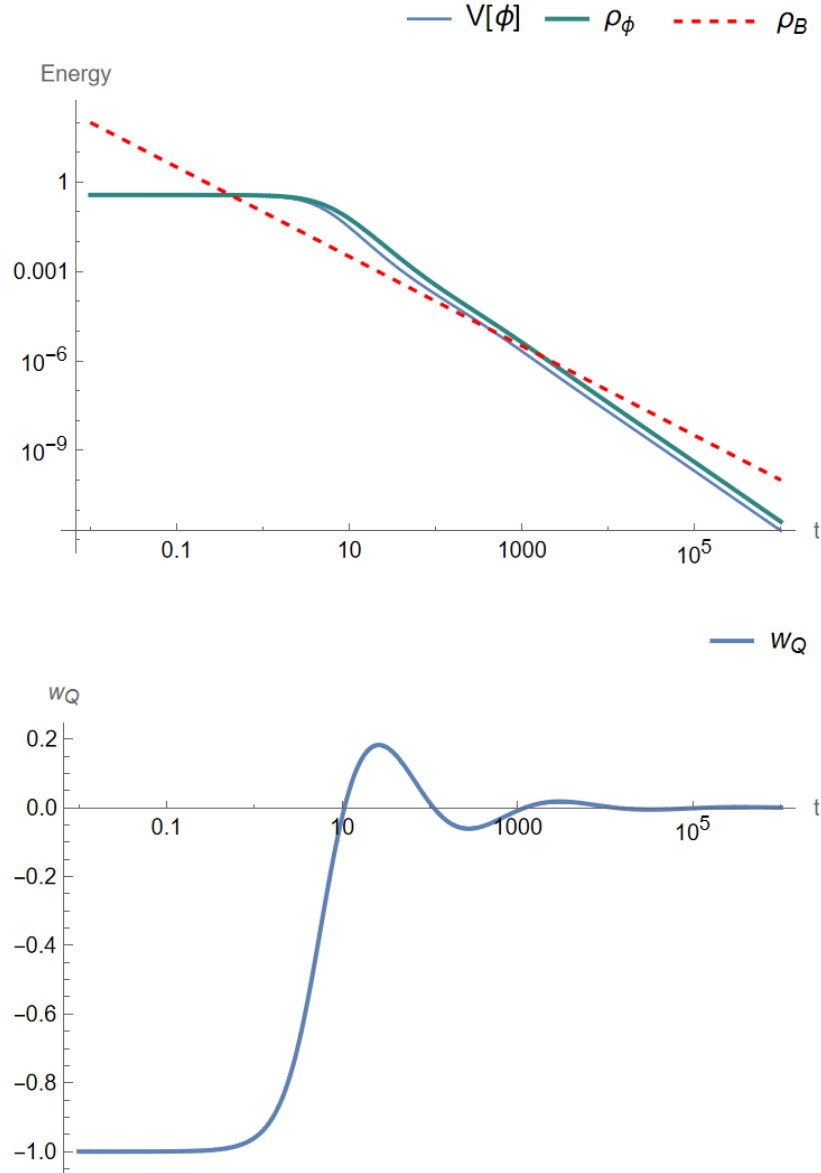


图 13: 指数尾部，宇宙出现短暂加速膨胀，最终依旧背景物质主导

以上的结局和 Λ CDM 宇宙似乎很不同，但这似乎是被 String Theory 支持的：若是宇宙结局为永恒的加速膨胀相，将存在一个未来事件视界，从而导致无法良好定义可观测量的渐近态。

将这个模型带入我们的宇宙，不难推断：当前的加速膨胀阶段对应 $\phi = \phi_F$ ，结局由背景物质主导 $V_{\text{atr}} \lesssim \rho_B$ 。

此外，值得一提的是，若势能函数尾部可以再乘以一个 ϕ^{-k} 称为 Inverse Power-Law (IPL) tail，也是较广泛选择的一种形式，因为其最终的演化性质和指数势能几乎一致，接下来将证明这一点。于是势能尾部取：

$$V(\phi \gg \phi_{\text{end}}) \simeq V_{\text{end}} \frac{\exp(-\lambda\phi/m_P)}{(\phi/m)^k} \quad (11)$$

其中 $k \geq 1$ 且为整数， m 设为 $< m_P$ 的常数。由上一次的调研报告中的解析求解得知 $\phi_F \gg m_P$ ，于是势能对 ϕ 导数：

$$V'(\phi_F) = -\frac{V}{m_P} \left[\lambda + k \left(\frac{m_P}{\phi_F} \right) \right] \simeq -\frac{\lambda V}{m_P} \quad (12)$$

这和指数势能的结果一致，且由于 attractor solutions 演化只和 V' 相关：

$$\frac{1}{4} (1 + w_B) t^2 = - \int' \frac{d\phi}{V'(\phi)} \quad (13)$$

于是，证明了 IPL tail 保留了指数势能的短暂加速膨胀阶段的性质，可以作为理论的候选势能。此外，有研究也指出这类形式的势能的理论动机，如动态超对称性破缺机制可能从微观给出势能的理论解释 [2]。

4 连接 inflation 和 quintessence

显然，这两个阶段的衔接是任何 QI 模型至关重要的一点，期间巨大的能标差异往往是最先遇到的困难，一般而言，若考虑能标更低的拐点暴胀模型，势能曲线存在两个平坦的区域 inflationary plateau, quintessential tail。但初始、过渡阶段的物理机制目前尚不明确，比如 inflation 的初始条件、reheating 的详细机制，因为这种模糊性，当前 QI 模型相关论文给人的感觉往往略显生硬，其克服 naturalness problem 的理由来自于理论参数的能标对应物理学基本常量。若是能基于相关的高能理论寻找这类标量场的候选者，将会使理论看起来更自然一些。

5 被提出的势能形式

在此列举若干已被研究过的 QI 标量场势能函数的例子 [5]，可以发现其定性而言几乎都被包含在以上的一系列讨论中。

5.1 Peebles-Vilenkin 模型及其改进版本

最先的 Peebles-Vilenkin 模型的势能函数定义为 [3]：

$$V = \begin{cases} \lambda(\phi^4 + M^4) & \text{for } \phi < 0 \\ \frac{\lambda M^8}{\phi^4 + M^4} & \text{for } \phi \geq 0 \end{cases} \quad (14)$$

其中 λ 是一个无量纲常数， $M \ll m_p$ 也是一个常数。模型在 $\phi \ll -m_p$ 时为典型的 chaotic inflation，而势能尾部则取幂函数衰减，演化后期取 frozen quintessence 解。

然而实验数据对比, 表明 Peebles-Vilenkin 模型不能给出符合观测的 spectral index 和 tensor/scalar ratio, 为了解决该的问题, 提出了改进的模型, 引入了 plateau potential 或 α -attractors [5]。有如下的 Exponential SUSY Inflation type potential:

$$V_\alpha^1(\phi) = \begin{cases} \lambda M_{pl}^4 \left(1 - e^{\alpha\phi/M_{pl}} + \left(\frac{M}{M_{pl}} \right)^4 \right) & \text{for } \phi \leq 0 \\ \lambda \frac{M^8}{\phi^4 + M^4} & \text{for } \phi \geq 0 \end{cases} \quad (15)$$

以及 Higgs Inflation-type potential::

$$V_\alpha^2(\varphi) = \begin{cases} \lambda M_{pl}^4 \left(1 - e^{\alpha\varphi/M_{pl}} + \left(\frac{M}{M_{pl}} \right)^2 \right)^2 & \text{for } \varphi \leq 0 \\ \lambda \frac{M^8}{\varphi^4 + M^4} & \text{for } \varphi \geq 0. \end{cases} \quad (16)$$

以上两种选择了拐点暴胀的势能形式, 改进后计算的 spectral index 和 tensor/scalar ratio 和观测较为符合。

5.2 Exponential QI 模型

这类模型的势能函数具有指数形式, 如:

$$V(\phi) = V_0 e^{-\gamma\phi^n/m_p^n} \quad (17)$$

其中, V_0 是一个常数, γ 是无量纲参数, n 是一个整数。同样的, 为了和观测数据符合, 可以引入修正项, 其中包含一个参数 M :

$$V(\varphi) = V_0 e^{-\gamma\varphi^n/m_p^n} + M^4 e^{-\gamma\varphi/m_p} \quad (18)$$

5.3 Lorentzian QI 模型

基于对 slow-roll parameter 的如下假设:

$$\epsilon(N) = \frac{\xi}{\pi} \frac{\Gamma/2}{N^2 + \Gamma^2/4} \quad (19)$$

其中 $N = \ln\left(\frac{a}{a_0}\right)$, ξ 为洛伦兹分布的幅值, Γ 为分布宽度。于是反推至势能函数:

$$V(\phi) = \lambda m_p^4 \exp\left(-\frac{2\xi}{\pi} \arctan\left(\sinh\left(\frac{\gamma\phi}{m_p}\right)\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{2\gamma^2\xi^2}{3\pi^3} \frac{1}{\cosh(\gamma\phi/m_p)}\right) \quad (20)$$

其中 λ 为无量纲常数, $\gamma \equiv \sqrt{\frac{\pi}{\Gamma\xi}}$ 。若认为如上洛伦兹分布宽度很小, 取条件 $\gamma \gg 1$; $\frac{2\xi}{\Gamma\pi} > 1$ 于是势能可以简化为:

$$V(\phi) = \lambda m_p^4 \exp\left(-\frac{2\xi}{\pi} \arctan\left(\sinh\left(\frac{\gamma\phi}{m_p}\right)\right)\right) \quad (21)$$

这种势能的无穷远极限有:

$$\lim_{\phi \rightarrow \infty} \lambda m_p^4 \exp\left[-\frac{2\xi}{\pi} \arctan\left(\sinh\left(\frac{\gamma\phi}{m_p}\right)\right)\right] = \lambda m_p^4 e^{-\xi} \quad (22)$$

势能最低点和 ξ 相关, 和这篇报告一开始基于 naturalness 假设的势能最低点为 0 似乎违背。

5.4 α -attractor

基于由 supergravity 启发的和 non-trivial Kähler manifold 相对应的 Lagrangian:

$$\mathcal{L} = \frac{m_p^2}{2} \frac{\dot{\varphi}^2}{(1 - \frac{\varphi^2}{6\alpha})^2} - \lambda m_p^4 e^{-\kappa\varphi} \quad (23)$$

考虑对其动能项化为正则形式, 令 $\varphi = \sqrt{6\alpha} \tanh\left(\frac{\phi}{\sqrt{6\alpha}} m_p\right)$, 也可以构造 QI 的势能函数:

$$V(\phi) = \lambda m_p^4 e^{-n \tanh\left(\frac{\phi}{\sqrt{6\alpha} m_p}\right)} \quad (24)$$

其中, $n = \kappa\sqrt{6\alpha}$ 是一个无量纲参数。这个势能的两个极限给出了 inflation plateau 和 quintessence tail:

$$\lim_{\phi \rightarrow \pm\infty} V(\phi) = \lambda m_p^4 e^{\mp n} \quad (25)$$

于是宇宙初期和晚期标量场能量密度之比由单参数 n 描述:

$$\frac{V_0}{V_\infty} = e^{2n} \quad (26)$$

但是这里和前一个模型一样, 依旧是势能最低点非零的。

5.5 Dimopoulos's QI potential

选择了渐近行为表现出拐点暴胀和 IPL tail 的势能函数:

$$V_k(\phi) = m^4 (1 - \tanh(\phi/m_p)) \cdot \left(1 - \sin\left(\frac{\pi\phi/2}{\sqrt{\phi^2 + M^2}}\right)\right)^k \quad (27)$$

其中 $M \ll m_p$, k 是一个正整数, 渐近的有:

$$V_k(\phi) = \begin{cases} 2^{k+1} m^4 & \text{for } \phi/M \ll 0 \\ 2^{1-k} \left(\frac{\pi}{4}\right)^{2k} e^{-2\phi/m_p} \left(\frac{mM^k}{\phi^k}\right)^4 & \text{for } \phi/M \gg 0 \end{cases} \quad (28)$$

研究指出选择恰当的 $k = 2$ 可以使得 $M \sim m$ 且量级处于 GUT 能标, 从而回答了 naturalness 的要求。

5.6 和中微子相互作用的标量场模型

以上考虑的都是单一的标量场演化, 只有在 reheating 时期才会存在标量场能量转换为某种很重的相对论性粒子, 从而破坏绝热演化条件。这里介绍一种标量场 ϕ 和中微子发生耦合的模型 [6], 作用量有:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{m_p^2}{2} R - \frac{k^2(\phi)}{2} \partial^\mu \phi \partial_\mu \phi - V(\phi) \right] + S_m + S_r + S_\nu(\phi, \Psi_\nu) \quad (29)$$

其中 S_m, S_r, S_ν 分别为物质、辐射、中微子的作用量, 势能取纯指数形式:

$$V(\phi) = m_p^4 e^{-\alpha\phi/m_p} \quad (30)$$

标量场动能项在此是非正则形式的, 耦合参量 k 有:

$$k^2(\phi) = \left(\frac{\alpha^2 - \bar{\alpha}^2}{\alpha^2} \right) \frac{1}{1 + \beta^2 e^{\alpha\phi/m_p}} + 1 \quad (31)$$

但是当演化到后期 $\phi \rightarrow \infty \Rightarrow k \rightarrow 1$ 标量场的动能项变为正则。具有质量中微子的 Lagrangian 存在和标量场的耦合：

$$\mathcal{L}_\nu = i\bar{\Psi}_\nu \gamma^\lambda \partial_\lambda \Psi_\nu - m_{\nu,0} e^{\beta\phi/m_p} \bar{\Psi}_\nu \Psi_\nu \quad (32)$$

于是理论引入了参数： $\alpha, \tilde{\alpha}, \beta, \gamma$ 。

值得注意，当 $\phi \rightarrow \infty$ 中微子耦合项将给出关于势能简单的修正：

$$V_{eff}(\phi) = V(\phi) + \rho_{\nu,0} e^{\gamma(\phi-\phi_0)/m_p} \quad (33)$$

势能尾部依旧保持指数形式。

5.7 复标量场 QI 模型

有研究使用一个复标量场来描述宇宙的早期暴胀阶段和最近的加速膨胀 [7]。这个 toy model 基于 $U(1)$ Peccei-Quinn 对称性，该对称性在高能量尺度上自发破缺，并在低得多的能量尺度上 explicit 破缺。模型中的复标量场的幅值扮演暴胀场 (inflaton) 的角色，而相位，即 axion，是 quintessence 场。模型的 Lagrangian 势能包含一个可重整化的势能 $V(\Phi)$ 和一个引入的非对称性的 $\cos(\arg(\Phi))$ ：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - V(\Phi) - M^4 [\cos(\arg(\Phi)) - 1] \\ &= \partial_\mu \Phi \partial^\mu \Phi^* - \lambda \left(\Phi \Phi^* - \frac{f^2}{2} \right)^2 - M^4 [\cos(\arg(\Phi)) - 1] \end{aligned} \quad (34)$$

其中

$$\Phi = \frac{1}{\sqrt{2}} \phi e^{i\varphi/f} \quad (35)$$

这个复标量场的势能可以被分为两个部分，代表幅值和相位势能是解耦的：

$$\begin{aligned} V(\phi) &= \frac{\lambda}{4} (\phi^2 - f^2)^2 \\ V(\varphi) &= M^4 [\cos(\varphi/f) - 1] \end{aligned} \quad (36)$$

幅值 ϕ 起初位于平缓的 inflation plateau，类似于一个“墨西哥帽”的顶部，随后开始沿着势能函数滚动时，它满足慢滚条件，这使得宇宙发生暴胀，最终滚至谷底 $\phi = f$ 处开始振荡，通过这个过程释放其能量，转化为其他粒子，这与标准暴胀模型中的 reheating 过程相似。后期则由相位 φ 场负责提供 quintessence 的能量密度。

6 一些关于 QI 的研究话题

在这一部分，按照时间顺序选择若干高引用量的研究进行介绍，试图从中梳理 QI 相关内容的近期研究话题和未来可能的发展方向。

6.1 Bettoni, D., Rubio, J. 2022

“Quintessential inflation: A tale of emergent and broken symmetries”[8] 一文对 QI 模型进行了一定的拓展，讨论了 scalar-tensor 理论框架下的 QI 模型，即在作用量中综合考虑引力和标量场，考虑简化的版本 (称为 kinetic frame)，引力部分取常规的 Einstein-Hilbert 形式，动能是非正则形式的：

$$S[g_{\mu\nu}, \varphi, k(\varphi), V(\varphi)] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_p^2}{2} R - \frac{k(\varphi)}{2} g^{\mu\nu} (\nabla_\mu \varphi) (\nabla_\nu \varphi) - V(\varphi) \right] \quad (37)$$

其中引力作用不仅由度规张量决定，还受到一个或多个标量场的影响。这种理论可以包含多种不同的函数 (如以上的 $k(\varphi), V(\varphi)$)，这些函数定义了标量场如何影响引力的强度和形式，并给出了这些 φ 的任意函数的选择案例，比如 potential of exponential form, α -attractor form 等，和先前的讨论类似，并且这些不同的选择都可能给出成功的 QI 模型。

此外，文章探讨了对称性 (这里指标度不变性) 在 QI 中的重要性，以及它们是如何与量子引力理论中的紫外 (UV) 和红外 (IR) 不动点相关联的。考虑作用量：

$$S_c = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{\varphi^2}{2} R - \frac{1}{2} (B(\varphi/\mu) - 6) g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi - \mu^2 \varphi^2 \right] \quad (38)$$

这一部分的论述采用了一些研究相变有关的统计场论方法和概念，在此仅作简单介绍。在量子引力的表述中，UV 不动点是指在高能量极限下，理论的某些参数趋于固定值的点。这些固定点通常与 QFT 中的 RG Flow 相关，它们可以导致宇宙早期的暴胀，在 UV 不动点附近，物理过程不依赖于特定的尺度 (即具有标度不变性)。与 UV 固定点相对应，IR 固定点出现在低能量极限下，对应宇宙的晚期加速膨胀。综上所述，在早期和晚期宇宙中，标度不变性可以通过 UV 和 IR 固定点的出现而实现。这种尺度不变性可以解释为什么宇宙在大尺度上展现出均匀和各向同性的特性，并且可以为宇宙结构的形成提供理论基础。

关于唯象部分，文章提到了标量场可能的和物质耦合，目前最可能的是和 DM 或中微子的耦合。考虑如下模型：

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_P^2}{2} R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) + \frac{i}{2} \left(\bar{\psi} \gamma^\mu \nabla_\mu \psi - \bar{\psi} \overleftarrow{\nabla}_\mu \gamma^\mu \psi \right) - m_\psi(\phi) \bar{\psi} \psi \right] \quad (39)$$

描述了一个质量项由标量场 ϕ 影响的费米子场 ψ ，两个场通过一个可重整化的 Yukawa 相互作用耦合。这种耦合导致中微子的质量随着宇宙子场的变化而变化。中微子质量的增长提供了一种自然解释宇宙当前加速膨胀的机制，回答了“why now”问题，正因为中微子在宇宙演化的近期 ($z \sim 5$) 才变为非相对论的，导致场 ϕ 的运动方程发生改变从而导致宇宙转变为加速膨胀相，状态方程参数有：

$$1 + w(t_0) = \frac{m_\psi(t_0)}{12\text{eV}} \quad (40)$$

随着中微子质量的增长，它们可能会在宇宙中形成局部的高密度区域，即中微子团簇。其形成机制和引力结构类似，于是作者推断这些团簇可能对宇宙的大尺度结构产生影响，并可能作为大质量的暗物质候选者。

6.2 Dimopoulos, K., Karčiauskas, M., Owen, C. 2019

“Quintessential inflation with a trap and axionic dark matter” [9] 的思路和先前 [7] 不同，其借助 axion 作为暗物质的候选者。全文重点阐述了 inflation 阶段标量场的演化和 reheating 机制，模型设想了 inflaton 与 Peccei-Quinn (PQ) 场 χ 之间的耦合：

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{\alpha}{2} \left(\frac{m_p}{\phi} \right)^2 (\partial\phi)^2 + \frac{(\partial\chi)^2}{2} - V_0 e^{-\kappa\phi/m_p} \\ & - V(\chi) - \frac{g^2}{2} (\phi - \phi_{\text{ESP}})^2 \chi^2, \end{aligned} \quad (41)$$

这种耦合终止了 inflaton 的滚动，将其困在 Enhanced Symmetry Point (ESP)，从而打破了 PQ 对称性，并且由 inflaton 场在 ESP 处的非零势能密度解释暗能量。其中捕获机制为：当 inflaton 接近 ESP 时，通过与 χ 场的耦合，产生了大量 χ 粒子，这些粒子的产生对 inflaton 的运动产生了有效的线性势，捕获了 inflaton。随后 χ 粒子的衰变引发 reheating。此外，在以上过程中，晚于 inflation

结束发生的 PQ 对称性的破缺产生了一个无质量的 Nambu-Goldstone 玻色子，即 axion，并在这个理论中作为暗物质存在。

值得注意的是，理论中的暗能量并没有以 dynamical 的 quintessence 形式存在，而是作为 ϕ 被困在 ESP 处的遗迹，并且文章论述和观测结果比对良好，且对于 ESP 的位置（即 ϕ_{ESP} 的值）变化不敏感。

6.3 C. Wetterich 2015

“Inflation, quintessence, and the origin of mass”[10] 一文采用相变的视角研究 QI 模型中的标量场，基于量子引力的 fixed point 假设，即存在两个不动点：紫外 (UV) 不动点和红外 (IR) 不动点，并在它们之间有一个交叉，描述了宇宙从无质量粒子的尺度不变 “过去不动点” 过渡到通过自发破缺尺度对称性产生粒子质量的 “未来不动点”。

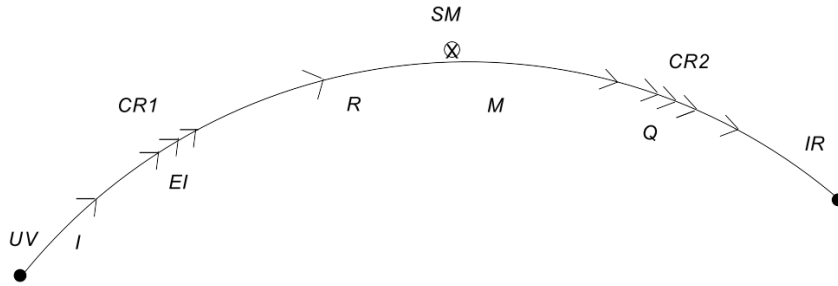


图 14: 宇宙从 UV 到 IR 的时间流向，其中存在近似不动点 SM 描述当前的标准模型能标 [10]

并基于这个宇宙能标改变的框架提出了粒子质量产生的机制：“所有粒子质量的产生都与尺度对称性的破缺直接相关（可能是 explicit or spontaneous symmetry breaking）”。

作者使用爱因斯坦框架来讨论暗能量和中微子质量的关系，详细讨论了宇宙标量场 φ 与中微子质量的耦合，标量场运动方程：

$$k^2(\ddot{\varphi} + 3H\dot{\varphi}) + \frac{1}{2}\frac{\partial k^2}{\partial \varphi}\dot{\varphi}^2 = \alpha M^3 \exp\left(-\frac{\alpha\varphi}{M}\right) + \frac{\beta}{M}(\rho_\nu - 3p_\nu) \quad (42)$$

其中 $k^2 = \frac{M\alpha}{2\kappa(\varphi - \bar{\varphi})} = \left(1 + \frac{2\kappa(\varphi - \varphi_0)}{M\alpha}\right)^{-1}$ 由 variable gravity 给出，最右侧一项中 $\beta(\varphi) = -M\frac{\partial \ln m_\nu(\varphi)}{\partial \varphi}$ ，描述了标量场和中微子的耦合。可以看出中微子平均质量 m_ν 依赖于标量场 φ ，作者讨论到中微子质量随着时间的推移而增加，这种质量的增长被称为 growing neutrino quintessence，提供了一种解释当前宇宙加速膨胀的机制。

这类机制通过将暗能量的密度与当前中微子的质量联系起来，一定程度上解释了为什么现在暗能量开始主导，以及在当前这个特定时期观察到加速膨胀。

6.4 Xiang-Hua. Z., Yi-Bin. Z. 2006

“Dynamics of Quintessential Inflation” [11] 中也研究了 Peccei-Quinn (PQ) 对称性破缺产生的 axion 场在 quintessential inflation 模型中的应用，和 5.7 节提到的复标量场思路类似，是参考文献 [7] 研究的延申讨论（理论价值而言，这篇并没有多少新的内容）。这里记号稍作修改：用 η 代表复标量场的幅值，用 ξ 代表场的相位，于是：

$$\begin{aligned} V_1(\eta) &= \frac{\lambda}{4}(\eta^2 - f^2)^2 \\ V_2(\xi) &= M^4[1 - \cos(\xi/f)] \end{aligned} \quad (43)$$

作者采用动力系统的研究方法，取 $u = \eta, v = \dot{\eta}; x = \xi, y = \dot{\xi}$ ，在相空间中描述运动方程：

$$\begin{aligned}\frac{du}{dt} &= v \\ \frac{dv}{dt} &= -3Hv + \frac{uy^2}{f^2} - V_1'(u) \\ \frac{dx}{dt} &= y, \\ \frac{dy}{dt} &= -\left(3H + \frac{2v}{u}\right)y - \frac{f^2}{u^2}V_2'(x)\end{aligned}\tag{44}$$

讨论了只存在 η, ξ 两个自由度情形下的相图及系统 critical points 的稳定性，这对应系统演化到后期将进入 attractor solution ξ 场提供的暗能量将以宇宙常数形式存在。

参考文献

- [1] Konstantinos Dimopoulos and JWF Valle. Modeling quintessential inflation. *Astroparticle Physics*, 18(3):287–306, 2002.
- [2] Pierre Binetruy. Models of dynamical supersymmetry breaking and quintessence. *Physical Review D*, 60(6):063502, 1999.
- [3] PJE Peebles and A Vilenkin. Quintessential inflation. *Physical Review D*, 59(6):063505, 1999.
- [4] Paul J Steinhardt, Li-Ming Wang, and Ivan Zlatev. Cosmological tracking solutions. *Physical Review D*, 59(12):123504, 1999.
- [5] Jaume de Haro and Llibert Aresté Saló. A review of quintessential inflation. *Galaxies*, 9(4):73, 2021.
- [6] Chao-Qiang Geng, Md Wali Hossain, R Myrzakulov, M Sami, and Emmanuel N Saridakis. Quintessential inflation with canonical and noncanonical scalar fields and planck 2015 results. *Physical Review D*, 92(2):023522, 2015.
- [7] Rogerio Rosenfeld and JA Frieman. A simple model for quintessential inflation. *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics*, 2005(09):003, 2005.
- [8] Dario Bettoni and Javier Rubio. Quintessential inflation: A tale of emergent and broken symmetries. *Galaxies*, 10(1):22, 2022.
- [9] Konstantinos Dimopoulos, Mindaugas Karčiauskas, and Charlotte Owen. Quintessential inflation with a trap and axionic dark matter. *Physical Review D*, 100(8):083530, 2019.
- [10] Christof Wetterich. Inflation, quintessence, and the origin of mass. *Nuclear Physics B*, 897:111–178, 2015.
- [11] Zhai Xiang-Hua and Zhao Yi-Bin. Dynamics of quintessential inflation. *Chinese Physics*, 15(10):2465, 2006.