

Quintessential Inflation 调研

尹琪钦 211870080@smail.nju.edu.cn
(南京大学物理学院, 南京 210093)

1 引言

一言以蔽之, Quintessential Inflation 理论提供了一个统一的框架去描述宇宙早期的暴涨和晚期的暗能量膨胀, 通过同一个标量场-Cosmon Field ϕ 实现, 起初由 Peebles 和 Vilenkin 提出用演化的一个势能函数刻画这两种相。这种理论比较自然地解释了 Inflation scalar field 的物质起源, 并一定程度上消解了 Fine-tuning problem, 给出了宇宙的一个比 Λ CDM 模型更加简单的回答, 因为现有的模型分别用两个势能函数去解释 inflation 和 quintessence field, 并要求两个固定的初始条件。

2 理论框架

在最简单的形式中, Quintessential Inflation 建立在一个与引力最小耦合的标量场框架下, 有作用量:

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{M_{pl}^2}{2} R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 - V(\phi) \right] + S_I(g_{\mu\nu}, \phi, \chi, A_\mu, \psi) \quad (1)$$

其中 $M_{pl} = (8\pi G)^{-1/2}$ 为约化普朗克质量, R 是 Ricci 标量, $(\partial\phi)^2 = g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi$, S_I 包含了 cosmon field 和其余所有物质场 (χ -标量物质场, ψ -费米子场, A_μ -矢量玻色子场) 的各种相互作用, 选择平坦的 FRW metric, 对作用量 (1) 变分得到两个 Friedman 方程和 cosmon field 运动方程:

$$\begin{aligned} H^2 &= \frac{1}{3M_{pl}^2} \sum_i \rho_i \\ \dot{H} &= -\frac{1}{2M_{pl}^2} \sum_i (\rho_i + p_i) \\ \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} - a^{-2}\nabla^2\phi + V_{,\phi} &= Q(\phi, \chi, A_\mu, \psi) \end{aligned} \quad (2)$$

假设在, 宇宙的极早期和极晚期 S_I 中描述的所有物质场相当微弱, 从作用量 (1) 直接读取能量密度并借助连续性方程计算压强, 得到这些时期的 cosmon field 贡献的能量密度、压强和运动方程有:

$$\begin{aligned} \rho_\phi &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2a^2} |\nabla\phi|^2 + V \\ p_\phi &= \frac{1}{2} \dot{\phi}^2 - \frac{1}{6a^2} |\nabla\phi|^2 - V \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} + 3H \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{dV}{d\phi} \end{aligned} \quad (3)$$

若进一步限制在均匀的宇宙，则上式简化为：

$$\begin{aligned}\rho_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V \\ p_\phi &= \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - V \\ \frac{d^2\phi}{dt^2} + 3H\frac{d\phi}{dt} &= -\frac{dV}{d\phi}\end{aligned}\quad (4)$$

不难发现， ρ_ϕ, p_ϕ 的两种极限情形分别给出了不同的物质状态方程形式：

$$w_\phi \equiv \frac{p_\phi}{\rho_\phi} \simeq \begin{cases} -1 & \text{Potential domination} & V \gg \dot{\phi}^2 \\ +1 & \text{Kinetic domination} & \dot{\phi}^2 \gg V \end{cases} \quad (5)$$

和传统的处理 inflation 的模型类似，宇宙早期 cosmon field 处于 $V \gg \dot{\phi}^2$ 的状态 (slow-roll condition)，自然的推导得到一个 inflationary phase 来描述暴涨。但是在 Quintessential Inflation 的框架下，我们认为 cosmon field 的演化在 inflation 结束后依然会发挥作用并最终演化为如今满足 $V \gg \dot{\phi}^2$ 的暗能量形式，并假定 V 是 ϕ 的单调函数。如示意图 (1) 中一样，对应 inflation 和暗能量主导时期的两个处于不同大小的势能平缓区域，由一个较陡峭的阶梯连接，而这一快速下降的时期对应 cosmon field 的动能占宇宙能量密度的主导地位，满足 $\dot{\phi}^2 \gg V$ ，形成了一段比较奇怪宇宙膨胀历史 (Kination)，这里对应着一系列粒子的产生。之后，是较为熟悉的辐射、物质主导时期的演化， V 下降到平缓且低值的时期，但由于其能量密度不随时间演化，当辐射、物质的能量密度呈幂次降低，最终总会达到一个 V 重新占主导的时期，也就是宇宙晚期的暗能量主导时期。

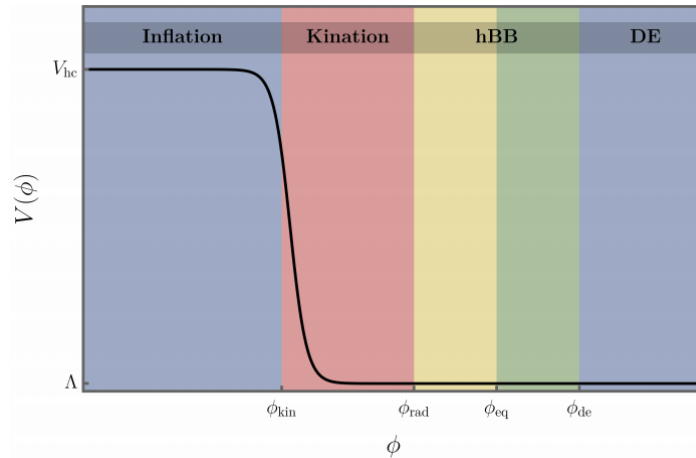


图 1: 势能 V 随着 ϕ 的演化和宇宙的不同时期 [1]

最早当 Peebles 和 Vilenkin 提出 Quintessential Inflation 模型时 [2]，采用的势能形式有：

$$V = \begin{cases} \lambda(\phi^4 + M^4) & \text{for } \phi < 0 \\ \frac{\lambda M^8}{\phi^4 + M^4} & \text{for } \phi \geq 0 \end{cases} \quad (6)$$

仅仅依赖于两个参数，并且可以被现有观测确定下来 (参见参考文献 [3] 第四页)，这里 $M \ll M_{pl}$ 。尽管后续的实验观测表明这种势能形式并不能很好符合，但是一些改进的版本可以弥补这一点 (如 Exponential SUSY Inflation type potential, Higgs Inflation-type potential 等)。不失物理意义的，我们仍然可以借助求解 Peebles-Vilenkin 模型的原始版本研究 Quintessential Inflation 模型下宇宙演化的各个时期。

2.1 Cosmon field 和宇宙演化的不同时期

在这里我们先总结一下 Quintessential Inflation 模型中 cosmon field 的值和宇宙不同演化时期的关系，并在接下来进一步考察。

假定 inflation 发生在 ϕ 远小于负的普朗克质量的时期 $\phi \ll -M_{pl}$ ，此后 ϕ 逐步增加趋于 0。

直到相当一部分的势能 V 转化为动能而结束 inflation 并进入一个动能主导的时期 (Kination)，这大约发生在 $\phi \sim -M_{pl}$ ，并发生由引力引起的大质量粒子产生，这些粒子衰变作为 reheating 的开始。值得注意的是，传统的 inflation 模型认为，inflation 结束后一瞬间产生各种粒子并发生 reheating，而这里 inflation 发生时候 ϕ 场的势能逐步转化为动能而 Kination 阶段开始，大质量粒子正在这一阶段产生并衰变从而导致 reheating。这里的核心要求是 V 需要比辐射等物质更快的衰减，才能满足 inflation 结束产生的粒子能量最终占主导，而势能 V 可以被忽略。最终当产生的粒子的能量和场 ϕ 的能量相当，可以认为 kination 结束。

在 reheating 之后一段时间的演化中，可以用我们熟悉的辐射、物质主导时期的处理方法研究，而 ϕ 场可以借助一系列近似和辐射、物质主导时期的 Hubble 参量关于时间 t 的关系求解 ϕ 场的演化，并最终演化到宇宙晚期暗能量主导的膨胀。

2.2 从 Inflation 的结束到 Kination

由于暴涨时期的内容和 Λ CDM 模型一样，Quintessential Inflation 模型的重点在于暴涨结束后的演化，我们从暴涨时期的结束讨论。如前面介绍的，inflation 时期结束的标志是相当部分的势能转化为 ϕ 场的动能，不妨设为：

$$\dot{\phi}_{END}^2 = V(\phi_{END}) \quad (7)$$

于是由式 (4) 得到暴涨结束时的能量密度、压强和 slow-roll parameter (应用了其 Hubble 参量的关系)：

$$\begin{aligned} \rho_{END} &= \frac{3}{2}V(\phi_{END}) \\ P_{END} &= -\frac{1}{2}V(\phi_{END}) \\ \Rightarrow \epsilon &= -\frac{\dot{H}}{H^2} = 1 \end{aligned} \quad (8)$$

由 slow-roll parameter ϵ 的定义和 Peebles-Vilenkin 模型的势能 V 表达式：

$$\epsilon \equiv \frac{M_{pl}^2}{2} \left(\frac{V_{,\phi}}{V} \right)^2 \cong \frac{8M_{pl}^2}{\phi^2} \quad (9)$$

结合 $\epsilon = 1$ 我们得到 $\phi_{END} = -2\sqrt{2}M_{pl}$ 这和我们在上一节给出的 inflation 结束的条件一致。并可以计算 inflation 结束时的能量密度：

$$\rho_{END} = \frac{3}{2}\lambda(\phi_{END}^4 + M^4) \cong \frac{3}{2}\lambda\phi_{END}^4 = 96\lambda M_{pl}^4 \quad (10)$$

接下来假设 inflation 结束时的能量密度和 kination 开始时的能量密度相等 ($\rho_{END} = \rho_{kin}$)，并在这些模型中认为 kination 开始于 $\phi = 0$ ，结合 Friedman 方程可以确定 kination 开始时的 Hubble 参量：

$$\rho_{kin} \cong 96\lambda M_{pl}^4 \implies H_{kin} \cong 4\sqrt{2\lambda}M_{pl} \quad (11)$$

并考虑到 kination 时期 ϕ 场的动能占主导 ($w_\phi \cong 1$)，于是由 ρ, P 的比例关系不难从式 (2) 得到：

$$\dot{H} = -3H^2 \implies H(t) = \frac{1}{3t} \quad (12)$$

将这个结果带入 Friedman 方程：

$$H^2 = \frac{1}{9t^2} = \frac{1}{3M_{pl}^2} \frac{\dot{\phi}^2}{2} \quad (13)$$

并由 kination 开始时的初始条件解得之后 ϕ 的演化（以下分别用 t, H 表示）：

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \sqrt{\frac{2}{3}} \frac{M_{pl}}{t} \Rightarrow \phi(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} M_{pl} \ln \left(\frac{t}{t_{kin}} \right) \\ \dot{\phi}(t) &= \sqrt{6} H(t) M_{pl} \Rightarrow \phi(t) = \sqrt{\frac{2}{3}} M_{pl} \ln \left(\frac{H_{kin}}{H(t)} \right) \end{aligned} \quad (14)$$

接下来考虑到，在从 inflation 结束到 kination 开始的相变过程中，绝热状态被打破，并导致了粒子的产生（需要弯曲时空的量子场论来处理）。假设这些粒子的质量非常大、由引力产生，并且 conformally coupled to gravity(具体含义???)。因此，它们必须衰变成较轻的等离子体，才能形成相对论性等离子体，最终在宇宙的能量密度中占主导部分。和前面的思路类似，认为 kination 结束的标志是 ϕ 场的动能和产生的粒子的能量在同一量级。

2.3 粒子的衰变至物质-辐射相等时期

进一步考察上述提到的粒子衰变形成等离子体的反应，这有两种可能的情形：

1. 在 kination 结束前衰变
2. 在 kination 结束后衰变

这两种不同的情形也对应着不同的 reheating time 与 kination 结束时间的前后顺序：一方面，若认为粒子在 kination 结束前衰变，并注意到衰变产物的热化 (thermalization) 几乎是瞬间的，于是 reheating time 和 kination 结束的时间重合，此时 cosmon field 能量密度和辐射的能量密度相等，后续的演化将按照辐射主导的形式直至物质-辐射演化到相等量级 (matter-radiation equality)；另一方面，若认为粒子在 kination 结束后衰变，那么认为 kination 结束的标志是一种粒子的能量密度与 cosmon field 能量密度相等，从 kination 结束到 reheating 发生，宇宙将经历一段物质主导的时期 (inflation 结束时由引力产生的质量很大的粒子)，至于从 reheating 发生到 matter-radiation equality 这段时间中 ϕ 的演化则取决于具体的 reheating 机制。

接下来以在 kination 结束前衰变情形为例研究 reheating 的发生到实现 matter-radiation equality 的历史。由于 reheating 发生时仍然处在 kination 时期（尽管已经十分末尾了）此时的 ϕ 场依旧近似遵循 kination 时期的演化规律，由式 (14)：

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_{reh} &= \sqrt{6} H_{reh} M_{pl} \\ \phi_{reh} &= \sqrt{\frac{2}{3}} M_{pl} \ln \left(\frac{H_{kin}}{H_{reh}} \right) \end{aligned} \quad (15)$$

由于 kination 结束时 cosmon field 能量密度和辐射的能量密度相等，Friedman 方程容易得到 reheating 时的 Hubble 参量：

$$H_{reh}^2 = \frac{2\rho_{reh}}{3M_{pl}^2} \quad (16)$$

式中 ρ_{reh} 既等于此刻 ϕ 场的能量密度，也等于辐射的能量密度，于是有 Stefan-Boltzmann 定律 ($\rho_{reh} = \frac{\pi^2}{30} g_{reh} T_{reh}^4$) 和先前解得的 $H_{kin} = 4\sqrt{2\lambda} M_{pl}$ 容易带入得到：

$$\begin{aligned} \phi_{reh} &= \sqrt{\frac{2}{3}} M_{pl} \ln \left(\frac{12}{\pi} \sqrt{\frac{10\lambda}{g_{reh}}} \left(\frac{M_{pl}}{T_{reh}} \right)^2 \right) \\ \dot{\phi}_{reh} &= \sqrt{\frac{\pi^2 g_{reh}}{15}} T_{reh}^2 \end{aligned} \quad (17)$$

以上两个等式作为下一阶段（kination 结束到物质-辐射相等的辐射主导时期）演化的初始条件。

由于接下来都是辐射主导演化，等效的 EoS parameter $w_{eff} = 1/3$ ，依然可以由宇宙总能量密度和压强的比值得到这段时期 Hubble 参量的演化：

$$\dot{H} = -2H^2 \Rightarrow H(t) = \frac{1}{2t} \quad (18)$$

辐射主导时期 ϕ 场的动能与势能近似看作无关的，于是近似 $V_{,\phi} = 0$ ，将 Hubble 参量表达式带入一开始就得到的 ϕ 场的运动方程：

$$\ddot{\phi} + \frac{3}{2t}\dot{\phi} = 0 \quad (19)$$

解得 ϕ 场的演化：

$$\begin{aligned} \dot{\phi}(t) &= \dot{\phi}_{reh} \left(\frac{t_{reh}}{t} \right)^{3/2} = \sqrt{\frac{\pi^2 g_{reh}}{15}} T_{reh}^2 \left(\frac{2H(t)}{3H_{reh}} \right)^{3/2} \\ \phi(t) &= \phi_{reh} + 2\dot{\phi}_{reh} t_{reh} \left(1 - \sqrt{\frac{t_{reh}}{t}} \right) = \phi_{reh} + 2\sqrt{\frac{2}{3}} M_{pl} \left(1 - \sqrt{\frac{2H(t)}{3H_{reh}}} \right) \end{aligned} \quad (20)$$

最后演化到物质-辐射能量密度相等时，Hubble 参量可以由 Friedman 方程定下，并令此时的物质、辐射能量密度都为 ρ_{eq} ，有：

$$\begin{aligned} H_{eq}^2 &= \frac{2\rho_{eq}}{3M_{pl}^2} \\ \rho_{eq} &= \frac{\pi^2}{30} g_{eq} T_{eq}^4 \end{aligned} \quad (21)$$

于是定下物质-辐射能量密度相等时的 ϕ 场

$$\begin{aligned} \phi_{eq} &= \sqrt{\frac{2}{3}} M_{pl} \ln \left(\frac{12}{\pi} \sqrt{\frac{10\lambda}{g_{reh}}} \left(\frac{M_{pl}}{T_{reh}} \right)^2 \right) + 2\sqrt{\frac{2}{3}} M_{pl} \left(1 - \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{g_{eq}}{g_{reh}} \right)^{1/4} \frac{T_{eq}}{T_{reh}} \right) \\ \dot{\phi}_{eq} &= \frac{2\pi}{9} \sqrt{\frac{2g_{eq}}{5}} \left(\frac{g_{eq}}{g_{reh}} \right)^{1/4} \frac{T_{eq}^3}{T_{reh}} \end{aligned} \quad (22)$$

在此之后的演化是绝热的，物质、辐射分别按照各自的幂律随着标度因子衰减，这些内容是我们比较熟悉的。

2.4 物质-辐射相等之后的演化

由于这段时期的演化是绝热的，不难得到物质、辐射各自的演化规律：

$$\begin{aligned} \rho_m(a) &= \rho_{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^3 = \rho_{eq} e^{3(N_{eq}-N)} \\ \rho_r(a) &= \rho_{eq} \left(\frac{a_{eq}}{a} \right)^4 = \rho_{eq} e^{4(N_{eq}-N)} \end{aligned} \quad (23)$$

其中定义了一个与红移有关的变量 $N \equiv -\ln(1+z) = \ln\left(\frac{a}{a_0}\right)$ ，并定义两个无量纲量，借此改写 ϕ 场的运动方程 ($\frac{d^2\phi}{dt^2} + 3H\frac{d\phi}{dt} = -\frac{dV}{d\phi}$):

$$\begin{aligned} x &\equiv \frac{\phi}{M_{pl}} \\ y &\equiv \frac{\dot{\phi}}{H_0 M_{pl}} \\ \begin{cases} x' &= \frac{y}{H}, \\ y' &= -3y - \frac{\bar{V}_x}{H} \end{cases} \end{aligned} \quad (24)$$

其中 x', y' 表示对 N 求导, 以及为了实现无量纲化定义的 $\bar{V} \equiv \frac{V}{H_0^2 M_{pl}^2}$, $\bar{H} = \frac{H}{H_0}$, $\bar{\rho}_r = \frac{\rho_r}{H_0^2 M_{pl}^2}$ 和 $\bar{\rho}_m = \frac{\rho_m}{H_0^2 M_{pl}^2}$ 。于是 Friedman 方程被改写为:

$$\bar{H}(N) = \frac{1}{\sqrt{3}} \sqrt{\frac{y^2}{2} + \bar{V}(x) + \bar{\rho}_r(N) + \bar{\rho}_m(N)} \quad (25)$$

由前一部分解得的 $\phi_{eq}, \dot{\phi}_{eq}$ 作为初始条件可以数值积分得到后续 ϕ 场以及相关物理量的演化, 并由 $\bar{H}(N=0) = 1$ 的约束可以解得势能表达式中的参数 M 。

最终, 我们引用参考文献 [3] 给出的模拟结果, 可以看出在 Quintessential Inflation 模型下起初的暴涨场如何迅速衰减给辐射、物质提供其占主导的演化窗口并最终暗能量主导的形式恢复到宇宙最后的膨胀阶段。

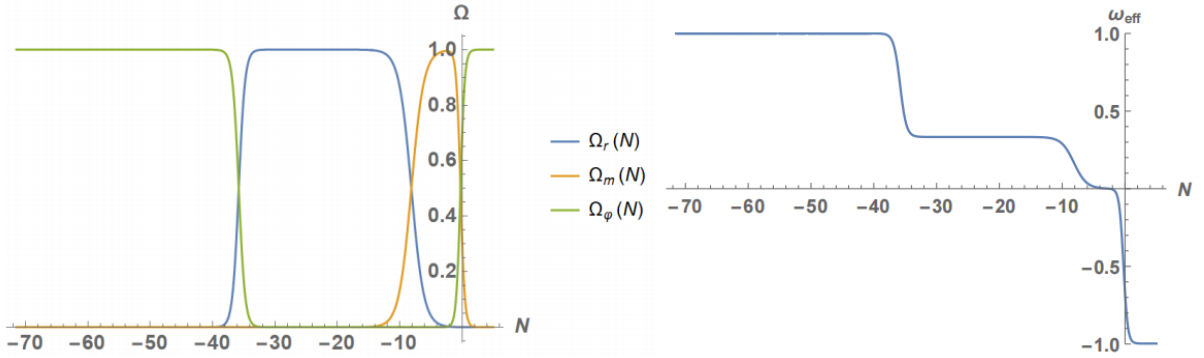


图 2: Ω 和 w 随着 N 的演化给出宇宙的不同阶段

3 一些观测上的可能

根据综述 [1] 的内容, Phenomenology 部分详细讨论了 cosmon field 与物质的直接耦合, 这可能影响到中微子的质量和原初结构的形成。此外, 还阐述了通过与 Spectator field 的 Ricci-mediated 耦合, 可能触发比如全局 $U(1)$ 或 Z_2 对称性这样的内部对称性的自发对称性破缺, 并对早期宇宙中大量物理过程产生影响。这一部分有些不太好读, 只是粗略介绍一些可能的实验证据, 对于有价值的部分后续可以进一步调研。

Quintessential Inflation 模型预言在宇宙的暴涨期间, 原初量子涨落被放大成为宇宙中的引力波。这些原初引力波可能在宇宙微波背景辐射的 B-模极化中留下标记, 这将是 Quintessential Inflation 模型的一个可能的观测证据。

在某些 Quintessential Inflation 的场景中, 可以形成宇宙弦这种拓扑缺陷。这些宇宙弦可以产生不同于原初量子涨落的引力波背景, 因此通过引力波观测来探测宇宙弦的存在或许会提供验证这个模型的可能。

此外, Quintessential Inflation 模型中的场与物质的直接耦合可能会对中微子的质量产生影响。这意味着通过精确测量中微子质量, 也可以为这一模型提供线索。

参考文献

- [1] Dario Bettoni and Javier Rubio. Quintessential inflation: A tale of emergent and broken symmetries. *Galaxies*, 10(1):22, 2022.
- [2] PJE Peebles and A Vilenkin. Quintessential inflation. *Physical Review D*, 59(6):063505, 1999.

- [3] Jaume de Haro and Llibert Aresté Saló. A review of quintessential inflation. *Galaxies*, 9(4):73, 2021.