Solving the Boltzmann Equation

尹琪钦　211870080@smail.nju.edu.cn
（南京大学物理学院，南京 210093）

1 Boltzmann equation

$1+2 \leftrightarrow 3+4$ 过程中 1 的数密度由下演化

$$\begin{aligned} a^{-3}\frac{d\left(n_1 a^3\right)}{dt} = & \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3}\int \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} \\ & \times (2\pi)^4 \delta_{\mathrm{D}}^{(3)}\left(p_1+p_2-p_3-p_4\right)\delta_{\mathrm{D}}^{(1)}\left(E_1+E_2-E_3-E_4\right)|\mathcal{M}|^2 \\ & \times \left\{f_3 f_4\left[1\pm f_1\right]\left[1\pm f_2\right]-f_1 f_2\left[1\pm f_3\right]\left[1\pm f_4\right]\right\} \end{aligned} \tag{1}$$

通常感兴趣的是 $T<E-\mu$ 的情形，于是近似的所有分布都满足 Maxwell-Boltzmann distribution, 于是：

$$\begin{aligned} & f_3 f_4\left[1\pm f_1\right]\left[1\pm f_2\right]-f_1 f_2\left[1\pm f_3\right]\left[1\pm f_4\right] \\ & \rightarrow e^{-\left(E_1+E_2\right)/T}\left\{e^{\left(\mu_3+\mu_4\right)/T}-e^{\left(\mu_1+\mu_2\right)/T}\right\} \end{aligned} \tag{2}$$

不难得到：

$$a^{-3}\frac{d\left(n_1 a^3\right)}{dt} = n_1^{(0)} n_2^{(0)}\langle\sigma v\rangle\left\{\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}}-\frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}}\right\} \tag{3}$$

其中：

$$\begin{aligned} \langle\sigma v\rangle \equiv & \frac{1}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}}\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3}\int \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} e^{-\left(E_1+E_2\right)/T} \\ & \times (2\pi)^4 \delta_{\mathrm{D}}^{(3)}\left(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4\right)\delta_{\mathrm{D}}^{(1)}\left(E_1+E_2-E_3-E_4\right)|\mathcal{M}|^2 \end{aligned} \tag{4}$$

于是

$$\begin{aligned} a^{-3}\frac{d\left(n_1 a^3\right)}{dt} = & \{\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1}\int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2}\int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3}\int \frac{d^3p_4}{(2\pi)^3 2E_4} e^{-\left(E_1+E_2\right)/T} \\ & \times (2\pi)^4 \delta_{\mathrm{D}}^{(3)}\left(\boldsymbol{p}_1+\boldsymbol{p}_2-\boldsymbol{p}_3-\boldsymbol{p}_4\right)\delta_{\mathrm{D}}^{(1)}\left(E_1+E_2-E_3-E_4\right)|\mathcal{M}|^2\} \\ & \times\left\{\frac{n_3 n_4}{n_3^{(0)} n_4^{(0)}}-\frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}}\right\} \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $E_i=E_i(p_i)$ 由色散关系支配。

粒子数密度：

$$n_s = g_s e^{\mu_s/T}\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-E_s(p)/T} \tag{6}$$

并定义 $n_s^{(0)}$：

$$n_s^{(0)} \equiv g_s\int \frac{d^3p}{(2\pi)^3} e^{-E_s(p)/T} = \begin{cases} g_s\left(\frac{m_s T}{2\pi}\right)^{3/2} e^{-m_s/T} & m_s \gg T \\ g_s\frac{T^3}{\pi^2} & m_s \ll T \end{cases} \tag{7}$$

一般的会给出 Bessel 函数格式：

```
ns = gs 4 Pi/(2 Pi)^3 Integrate[e Sqrt[e^2 - m^2] Exp[-e/T], {e, m, Infinity},
   Assumptions -> {m > 0, T > 0}]
```

积分 指数形式 无穷大 假设

$$\frac{m^2\, T\, \mathrm{BesselK}\left[2, \frac{m}{T}\right] g_s}{2\pi^2}$$

图 1: ns 的一般表达式

2 问题描述

考虑一个只存在一种 $m = 100\mathrm{MeV}$ 的矢量玻色子 Z（注意这里并不是具有 V-A 结构的，重点在玻色子具有质量）和正负电子（质量可以忽略）的宇宙。起初只存在正负电子，但是正负电子可以反应生成 Z：

$$e^+(1) + e^-(2) \leftrightarrow Z(3)$$

于是关于 Z 数密度演化的 Boltzmann 方程最初的形式：

$$\begin{aligned} a^{-3}\frac{d\left(n_3a^3\right)}{dt} =& \{\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} e^{-(E_1+E_2)/T} \\ & \times (2\pi)^4 \delta_{\mathrm{D}}^{(3)}\left(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3\right) \delta_{\mathrm{D}}^{(1)}\left(E_1+E_2-E_3\right) |\mathcal{M}|^2\} \\ & \times \left\{ \frac{n_1 n_2}{n_1^{(0)} n_2^{(0)}} - \frac{n_3}{n_3^{(0)}} \right\} \end{aligned} \tag{8}$$

假设宇宙总电荷为零，即 $n_e = n_{e^+} = n_{e^-}$，以及近似电子无质量 $E_e = p_e$，上式改写为：

$$\begin{aligned} a^{-3}\frac{d\left(n_3a^3\right)}{dt} =& \{\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2} \int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} e^{-(p_1+p_2)/T} \\ & \times (2\pi)^4 \delta_{\mathrm{D}}^{(3)}\left(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3\right) \delta_{\mathrm{D}}^{(1)}\left(p_1+p_2-E_3\right) |\mathcal{M}|^2\} \\ & \times \left\{ \left(\frac{n_e}{n_e^{(0)}}\right)^2 - \frac{n_3}{n_3^{(0)}} \right\} \end{aligned} \tag{9}$$

近似地认为电子达到平衡：

$$n_e = n_e^{(0)} \tag{10}$$

又由于只存在 Z 和正负电子之间的相互转化，总粒子数守恒：

$$\frac{d\left((n_3+n_e)a^3\right)}{dt} = 0 \tag{11}$$

不妨定义：

$$X = \frac{n_3}{n_3+n_e}$$

Boltzmann 方程变为：

$$\begin{aligned} \frac{dX}{dt} =& \frac{1}{n_e^{(0)}}\{\int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2} \int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} e^{-(p_1+p_2)/T} \\ & \times (2\pi)^4 \delta_{\mathrm{D}}^{(3)}\left(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3\right) \delta_{\mathrm{D}}^{(1)}\left(p_1+p_2-E_3\right) |\mathcal{M}|^2\} \\ & \times \left\{ 1 - \left(1 + \frac{n_e^{(0)}}{n_3^{(0)}}\right) X \right\} \end{aligned} \tag{12}$$

3 计算过程

为了保证结果的精度，暂且对玻色子用最 general 的数密度表达式：

$$n_3^{(0)} = \frac{3}{2\pi^2} m^2 T \ \mathrm{BesselK}[2, \frac{m}{T}] \tag{13}$$

并且电子的数密度有：

$$n_e = n_e^{(0)} = 2\frac{T^3}{\pi^2} \tag{14}$$

具体的求解将从计算跃迁矩阵元平方开始，我们将发现：当忽略电子质量后，$|\mathcal{M}|^2$ 将是一个常数。于是我们可以计算这个复杂的相空间积分。最终可以构造出一个关于 X 的常微分方程，并求解得到其演化趋势。

3.1 $|\mathcal{M}|^2$ 的计算

考虑 Z 与电子之间发生三顶角相互作用。借助 Mathematica 中计算费曼图的 FeynCalc 包，我们不难得到振幅平方：

$$|\mathcal{M}|^2 = \frac{4}{3}\alpha^2 m^2 \tag{15}$$

其中 m 即为 Z boson 的质量，α 表征耦合强度。具体计算过程如下图 (2) 所示

Obtain the amplitudes

```
In[148]:= amp[0] =
    α Spinor[Momentum[l1], SMP["m_e"], 1].DiracGamma[Momentum[Polarization[p, ⅈ]]].
      Spinor[-Momentum[l2], SMP["m_e"], 1]
```

Out[148]= $\alpha\,(\varphi(\overline{l_1}, m_e)).(\overline{\gamma}\cdot\overline{\varepsilon}(p)).(\varphi(-\overline{l_2}, m_e))$

Fix the kinematics

```
FCClearScalarProducts[]
SP[p] = SMP["m_Z"]^2;
SP[l1] = 0;
SP[l2] = 0;
SP[l1, l2] = Simplify[(SP[p] - SP[l1] - SP[l2]) / 2];
SP[p, l1] = Simplify[ExpandScalarProduct[SP[l1 + l2, l1]]];
SP[p, l2] = Simplify[ExpandScalarProduct[SP[l1 + l2, l2]]];
```

Square the amplitudes

We average over the polarizations of the Z-boson, hence the additional factor 1/3

```
In[155]:= ampSquared[0] =
    (amp[0] (ComplexConjugate[amp[0]])) //
    FermionSpinSum // DiracSimplify //
    DoPolarizationSums[#, p, ExtraFactor → 1/3] /. SMP["m_e"] → 0 & // Simplify
```

Out[155]= $\frac{4}{3}\alpha^2 m_Z^2$

图 2: 振幅平方计算代码

于是在对动量空间的积分中我们可以放心的将 $|\mathcal{M}|^2$ 看作常数而移到积分符号外。

3.2 动量空间积分

接下来定义积分 I：

$$I \equiv \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2} \int \frac{d^3p_3}{(2\pi)^3 2E_3} e^{-(p_1+p_2)/T} \\ \times (2\pi)^4 \delta_{\mathrm{D}}^{(3)} \left(\boldsymbol{p}_1 + \boldsymbol{p}_2 - \boldsymbol{p}_3\right) \delta_{\mathrm{D}}^{(1)} \left(p_1 + p_2 - E_3\right) \tag{16}$$

于是式 (12) 被改写为：

$$\frac{dX}{dt} = \frac{|\mathcal{M}|^2}{n_e^{(0)}} I \left\{1 - \left(1 + \frac{n_e^{(0)}}{n_3^{(0)}}\right) X\right\} \tag{17}$$

首先对 $\boldsymbol{p}_3$ 积分，可以消去式中的 $\delta_{\mathrm{D}}^{(3)}$。于是：

$$I = \pi \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1} \int \frac{d^3p_2}{(2\pi)^3 2p_2} \frac{e^{-(p_1+p_2)/T}}{E_3} \delta_{\mathrm{D}}^{(1)} \left(p_1 + p_2 - E_3\right) \tag{18}$$

式中 $E_3 = \sqrt{m^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2\cos\theta}$，是 p_1, p_2, θ 的函数，θ 的意义是 $\boldsymbol{p}_1$ 和 $\boldsymbol{p}_2$ 之间的夹角，于是可以固定 $\boldsymbol{p}_1$ 在 z 轴方向对 $\boldsymbol{p}_2$ 进行积分。

展开 d^3p_2 有：

$$I = \pi^2 \int \frac{d^3p_1}{(2\pi)^3 2p_1} \int \frac{p_2 dp_2}{(2\pi)^3} \int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{E_3(\theta)} \delta_{\mathrm{D}}^{(1)} \left(p_1 + p_2 - E_3(\theta)\right) e^{-(p_1+p_2)/T} \tag{19}$$

令 $x = \cos\theta$ 并借助 Dirac δ 积分性质：

$$\int g\left(x\right) \delta\left(f\left(x\right)\right) dx = \left[\frac{g\left(x\right)}{|df/dx|}\right]_{f(x)=0} \tag{20}$$

于是:

$$g(x) = 1/E_3 = 1/\sqrt{m^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2x}$$
$$f(x) = p_1 + p_2 - \sqrt{m^2 + p_1^2 + p_2^2 + 2p_1p_2x}$$

计算得到：

$$\int_0^\pi \frac{\sin\theta d\theta}{E_3(\theta)} \delta_{\mathrm{D}}^{(1)} \left(p_1 + p_2 - E_3(\theta)\right) = \int_{-1}^1 dx g(x) \delta_{\mathrm{D}}^{(1)} \left(f(x)\right) = \frac{1}{p_1p_2} \tag{21}$$

条件是 $f(x)$ 的零点 $x_0 \in (-1, 1)$，这等价于要求 $\frac{m^2}{4p_1p_2} < 1$，于是展开 d^3p_1 后原式可以化简为：

$$I = \frac{\pi^2}{(2\pi)^5} \int_0^\infty dp_1 e^{-p_1/T} \int_{\frac{m^2}{4p_1}}^\infty dp_2 e^{-p_2/T} = \frac{\pi^2}{(2\pi)^5} mT \text{ BesselK}[1, \frac{m}{T}] \tag{22}$$

3.3 构建常微分方程

进一步的微分方程式 (17) 被化简为：

$$\frac{dX}{dt} = \frac{\alpha^2 m^3 \text{BesselK}[1, \frac{m}{T}]}{48\pi T^2} \left\{1 - \left(1 + \frac{4T^2}{3m^2 \text{BesselK}[2, \frac{m}{T}]}\right) X\right\} \tag{23}$$

接下来令：

$$x = \frac{m}{T} \tag{24}$$

并注意到 $T \propto a^{-1}$，以及 Hubble 参数的表达式

$$H = \sqrt{\frac{\rho}{3M_{\mathrm{pl}}^2}} = \frac{\pi}{3}\sqrt{\frac{g_\star}{10}} \frac{m^2}{M_{\mathrm{pl}}} \frac{1}{x^2} = H(x) \propto 1/x^2 \tag{25}$$

以 x 为自变量的微分方程有：

$$\frac{dX}{dx}=\frac{\alpha^2 m\ x^3\ \mathrm{BesselK}[1,x]}{48\pi H(x=1)}\left\{1-\left(1+\frac{4}{3x^2\ \mathrm{BesselK}[2,x]}\right)X\right\} \tag{26}$$

一开始时刻 $X=0$ 所以可以设置初始条件为：$X(x=0)=0$。接下来只需要带入各种参数的数值，就可以数值求解得到 X 的演化趋势。

3.4 带入数值计算

题目设置 Z 的质量 $m=100$ MeV，耦合强度 $\alpha=1\times10^{-12}$，其实这里的数据我的印象不是很深了，姑且认为如此吧。以及近似地认为 relativistic 贡献 Hubble 参数的粒子仅有正负电子，于是：

$$g_\star\simeq 3.5 \tag{27}$$

可以由此计算得到 $H(x=1)=3856.66\ s^{-1}$，于是带入数值后：

$$\frac{dX}{dx}=Ax^3\ \mathrm{BesselK}[1,x]\left\{1-\left(1+\frac{4}{3x^2\ \mathrm{BesselK}[2,x]}\right)X\right\} \tag{28}$$

其中

$$A=\frac{\alpha^2 m}{48\pi H(x=1)}\simeq 1.71948\times10^{-28} \tag{29}$$

进一步的对 Z boson 做非相对论近似，于是可以对 BesselK 函数做 $x\gg1$ 展开近似得到：

$$\frac{dX}{dx}=A\sqrt{x}e^{-x}\left\{1-\left(\frac{4}{3}\sqrt{\frac{2}{\pi}}x^{-3/2}e^{-x}+1\right)X\right\} \tag{30}$$

接下来带入 Mathematica 求解得到如下趋势：

```
In[14]:= eqn = y'[x] == √x Exp[-x] (1 - (1 + 4/3 √(2/Pi) x^(-3/2) Exp[x]) y[x]);
                           指数形式                          指数形式

         sol = NDSolve[{eqn, y[0.1] == 0.011398}, y, {x, 0.01, 100000}];
               数值求解微分方程组
         LogPlot[Evaluate[y[x] /. sol], {x, 0, Infinity}, PlotRange → All,
         对数图   计算                          无穷大      绘制范围    全部
          AxesLabel → {"x", "X[x]"}, PlotLabel → "Solution"]
          坐标轴标签                  绘图标签
```

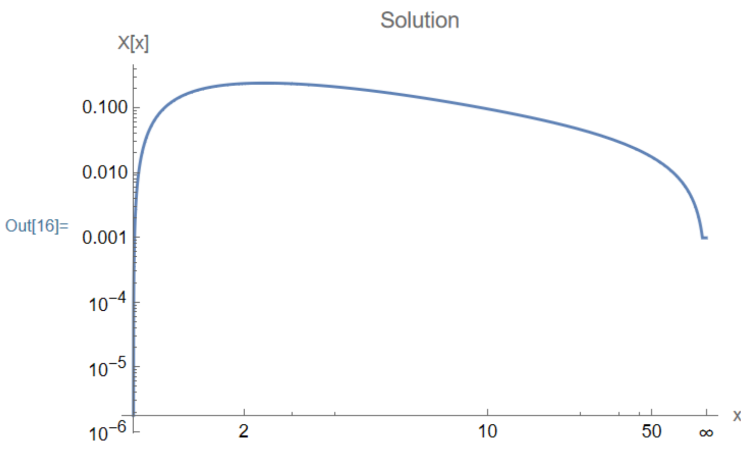

图 3: X 随 x 的演化趋势

需要注意的是，以上求解存在些许误差，首先，忽略了常数 A 对趋势的影响，计算中直接取了常数等于 1，其次，由于直接取初始条件 $X(x=0)==0$ 会导致无穷表达式，于是通过反推尽量使得 $X(x=0)\to 0$ 而确定了过程中的初始条件。