# 原 LCT（Link-Cut Tree）详解（蒟蒻自留地）

2017年02月16日 11:32:24 Saramanda 阅读数 13883 文章标签： LCT 更多

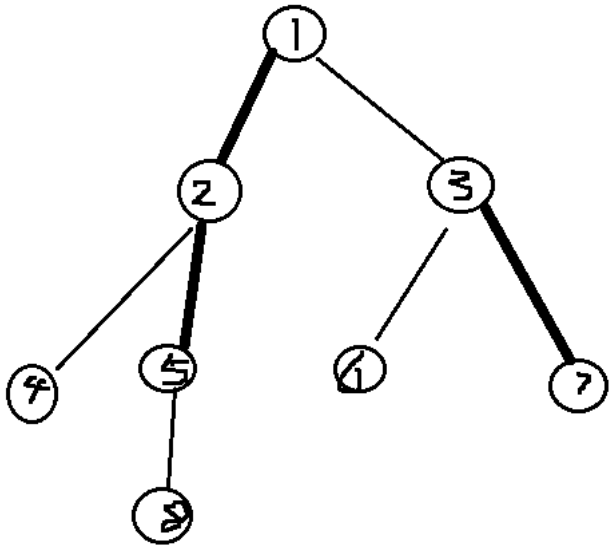


最近自学了LCT，发现网上的资料讲解不是很全面，像我这样的蒟蒻一时半会根本理解不了。了很久总算是理解了LCT，打算总结基本操作，还请诸位神牛来找找茬。

如果你还没有接触过LCT，你可以先看一看这里：

（看不懂没关系，先留个大概的印像）http://www.cnblogs.com/BLADEVIL/p/3510997.html

看完之后我们知道，LCT和静态的树链剖分很像。怎么说呢？这两种树形结构都是由若干条长度不等的“重链”和“轻边”构成（名字大概就是这个意思），“重链”之间由”轻边”连接。就像这样：




可以想象为一棵树被人为的砍成了一段段。

LCT和树链剖分不同的是，树链剖分的链是不会变化的，所以可以很方便的用线段树维护。但是，既然是动态树，那么树的结构开生改变，所以我们要用更加灵活的维护区间的结构来对链进行维护，不难想到Splay可以胜任。如何分离树链也是保证时间效率的关键和长度要平衡），树链剖分的“重儿子”就体现了前人博大精深的智慧。

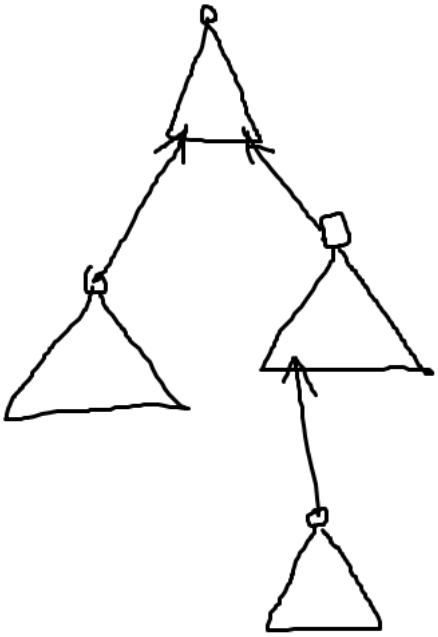
在这里解释一下为什么要把树砍成一条条的链：我们可以在logn的时间内维护长度为n的区间（链），所以这样可以极大的提高时间效率。在树链剖分中，我们把一条条链放到线段树上维护。但是LCT中，由于树的形态变化，所以用能够支持合并、分离、翻转等Splay维护LCT的重链（注意，单独一个节点也算是一条重链）。

这时我们注意到，LCT中的轻边信息变得无法维护。为什么呢？因为Splay只维护了重链，维护重链之间的轻边；而LCT中甚以不停的变化，所以也没法用点权表示它父边的边权（父亲在变化）。所以，如果在LCT中要维上信息，个人认为最方便的方法应成一个新点和两条边。这样可以把边权的信息变成点权维护，同时为了不影响，把真正的树上的点权变成0，就可以用维护点的方

## LCT的各种操作：

LCT中用Splay维护链，这些Splay叫做“辅助树“。辅助树以它上面每个节点的深度为关键字维护，就是辅助树中每个节点左儿子于当前节点的深度，当前节点的深度小于右儿子的深度。

可以把LCT认为是一个由Splay组成的森林，就像这样：（三角形代表一棵Splay，对应着上一条链）



箭头是什么意思呢？箭头记录着某棵Splay对应的链向上由轻边连着哪个节点，可以想象为箭头指向“Splay 的父亲”。但是，Splay的记录有这个儿子，即箭头是单向的。同时，每个节点要记录它是否是它所在的Splay的根。这样，Splay构成的森林就建成了。

这个是我的Splay节点最基本的定义：（如果要维护更多信息就像Splay维护区间那样加上更多标记）

```
struct node{
        int fa,ch[2]; //父亲和左右儿子。
        bool reverse,is_root;   //区间反转标记、是否是所在Splay的根
}T[maxn];
```

LCT中基本的Splay上操作：

```
int getson(int x){
        return x==T[T[x].fa].ch[1];
}
void pushreverse(int x){
        if(!x)return;
        swap(T[x].ch[0],T[x].ch[1]);
        T[x].reverse^=1;
}
void pushdown(int x){
        if(T[x].reverse){
                pushreverse(T[x].ch[0]);
                pushreverse(T[x].ch[1]);
                T[x].reverse=false;
        }
}
void rotate(int x){
        if(T[x].is_root)return;
        int k=getson(x),fa=T[x].fa;
        int fafa=T[fa].fa;
```

```
        pushdown(fa);pushdown(x);    //先要下传标记
        if(T[x].ch[k^1])T[T[x].ch[k^1]].fa=fa;
        T[x].ch[k^1]=fa;
        T[fa].fa=x;
        T[x].fa=fafa;
        if(!T[fa].is_root)T[fafa].ch[fa==T[fafa].ch[1]]=x;
        else T[x].is_root=true,T[fa].is_root=false;
        //update(fa);update(x);    //如果维护了信息，就要更新节点
}
void push(int x){
        if(!T[x].is_root)push(T[x].fa);
        pushdown(x);
}
void Splay(int x){
        push(x);   //在Splay到根之前，必须先传完反转标记
        for(int fa;!T[x].is_root;rotate(x)){
                if(!T[fa=T[x].fa].is_root){
                        rotate((getson(x)==getson(fa))?fa:x);
                }
        }
}
```

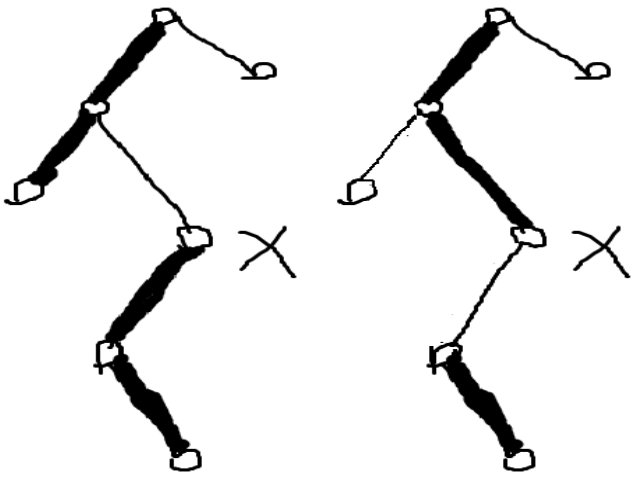
```
        T[fa].ch[k]=T[x].ch[k^1];
```

access操作：

这是LCT最核心的操作。其他所有操作都要用到它。

他的含义是”访问某节点“。作用是：对于访问的节点x，打通一条从树根（真实的LCT树）到x的重链；如果x往下是重链，那么把x往下成轻边。可以理解为专门开辟一条x到根的路径，由一棵Splay维护这条路径。

access之前：（粗的是重链）　　access之后：



access实现的方式很简单；

先把x旋转到所在Splay的根，然后把x的右孩子的is_root设为true（此时右孩子对应的是[illegible]的重链，这样就断开了x和下方的重

用y记录上一次的x（初始化y=0），把y接到x的右孩子上，这样就把上一次的重链接到了[illegible]重链一起，同时记得T[y].is_root=f

记录y=x，然后x=T[x].fa，把x上提。重复上面的步骤直到x=0。

代码：

```
void access(int x){
        int y=0;
        do{
                Splay(x);
                T[T[x].ch[1]].is_root=true;
                T[T[x].ch[1]=y].is_root=false;
                //update(x);     //如果维护了信息记得更新。
                x=T[y=x].fa;
        }while(x);
}
```

mroot操作：

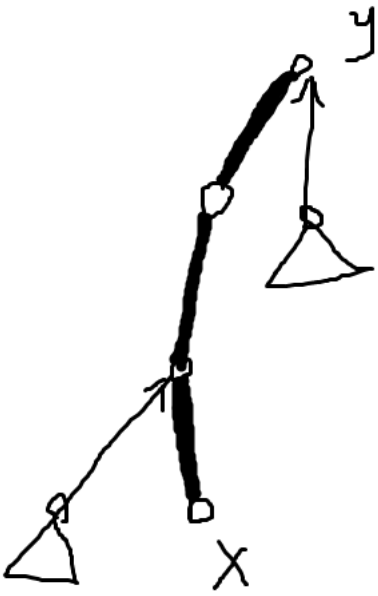
这个操作的作用是把某个节点变成树根（这里的根指的是整棵LCT的根）。加上access操作，就可以方便的提取出LCT上两点之间
提取u到v的路径只需要mroot(u),access(v),然后v所在的Splay对应的链就是u到v的路径。

mroot实现的方式：

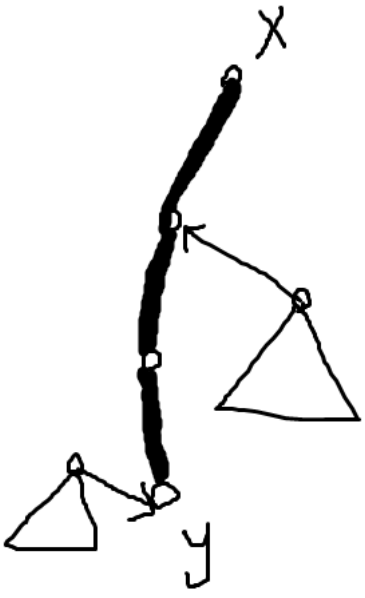
由于LCT是Splay组成的森林，所以要把x变成根就只需要让所有Splay的父亲最终指向x所在Splay。所以先access(x),Splay(x)，
和将成为根的x链在一棵Splay中，并转到根即可。但是我们注意到，由于x成为了新的根，所以它和原来的根所在的Splay中深度作为关
质遭到了破坏：新根x应该是Splay中深度最小的，但是之前的操作并不会改变x的深度（也就是目前x依旧是当前Splay中深度最深的）
们需要把所在的这棵Splay翻转过来。

（粗的是重链，y是原来的根）

翻转前：




翻转后：




这时候x才真正变成了根。

代码：

```
void mroot(int x){
        access(x);
        Splay(x);
        pushreverse(x);
}
```

link操作：

这个操作的作用是连接两棵LCT。对于link(u,v)，表示连接u所在的LCT和v所在的LCT；

link实现的方式：

很简单，只需要先mroot(u),然后记录T[u].fa=v就可以了，就是把一个Splay森林连到另一个上

代码：

```
void link(int u,int v){
        mroot(u);
        T[u].fa=v;
}
```

cut操作：

这个操作的作用是分离出两棵LCT。

代码：

```
void cut(int u,int v)
        mroot(u);   //先把u变成根
        access(v);Splay(v);    //连接u、v
        pushdown(v);     //先下传标记
        T[u].fa=T[v].ch[0]=0;
        //v的左孩子表示v上方相连的重链
        //update(v);  //记得维护信息
}
```

这些就是LCT的基本操作。我推荐几个LCT的练习题：

bzoj2049 SDOI2008洞穴勘探

模板题，只需要link和cut，然后询问连通性。题解：

http://blog.csdn.net/saramanda/article/details/55210235

bzoj2002 HNOI2010弹飞绵羊

模板题，需要link和询问某点到根的路径长度。题解：

http://blog.csdn.net/saramanda/article/details/55210418

bzoj3669 NOI2014魔法森林

LCT的综合应用。题解：

http://blog.csdn.net/saramanda/article/details/55250852