

原

二分图的性质及其应用 (konig定理)

2018年08月09日 17:00:31 葉心 阅读数 1003 更多

版权声明：本文为博主原创文章，遵循 CC 4.0 BY-SA 版权协议，转载请附上原文出处链接和本声明。  
本文链接：<https://blog.csdn.net/li13168690086/article/details/81531258>

写在之前：更多二分图知识，请关注--->[二分图知识导航篇](#)

性质

- 二分图中，点覆盖数是匹配数。
- (1) 二分图的最大匹配数等于最小覆盖数，即求最少的点使得每条边都至少和其中的一个点相关联，然直接取最大匹配的一段节点即可。
  - (2) 二分图的独立数等于顶点数减去最大匹配数，很显然的把最大匹配两端的点都从顶点集中去掉这个时候剩余的点是独立集，这是 $|V|-2*|M|$ ，从每条匹配边的两端取一个点加入独立集并且保持其独立集性质。
  - (3) DAG的最小路径覆盖，将每个点拆点后作最大匹配，结果为 $n-m$ ，求具体路径的时候顺着匹配边走就可以，匹配边 $i \rightarrow j, j \rightarrow k, k \rightarrow l \dots$ 构成一条
  - (4) 最大匹配数=左边匹配点+右边未匹配点。因为在最大匹配集中的任意一条边，如果他的左边没标记，右边被标记了，那么我们就可找到一条新的以每一条边都至少被一个点覆盖。
  - (5) 最小边覆盖=图中点的个数-最大匹配数=最大独立集。

转自其他博主。

本章内容主要讲解其中的最大匹配数=最小覆盖数，这性质也叫konig定理，引用最广的证明来自博主Matrix67，这里我就不贴原文(转载)了，我就用下他的证明。

图解

且看第1图，这是一个已经找到最大匹配的二分图，橘线代表最终的匹配边，实心圈是已经匹配好的顶点，空心圈是没有找到匹配的顶点。其中有两个这里我们选择以G集为出发集，B集为被匹配集。

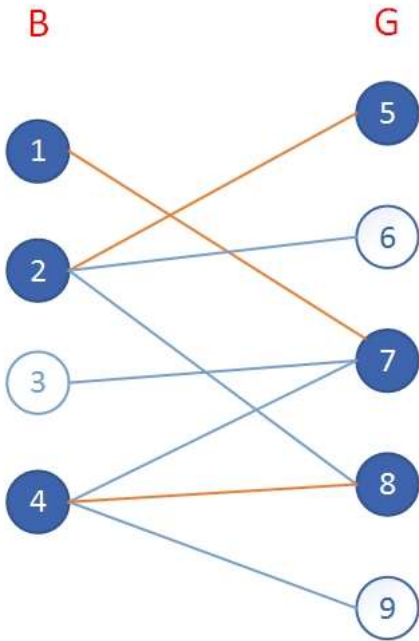


图1

根据证明，我们要找到最小覆盖点，就要从G集里找到未匹配点（如6和9），然后对每个未匹配点进行广度的查找，查找过程中，所遇到的所有点就是做记号。下面图2和图3就是对点6和9寻找增广路的过程，绿色代表寻找路径，并且绿色的点代表对其记录，记住是从6和9出发，为起点。

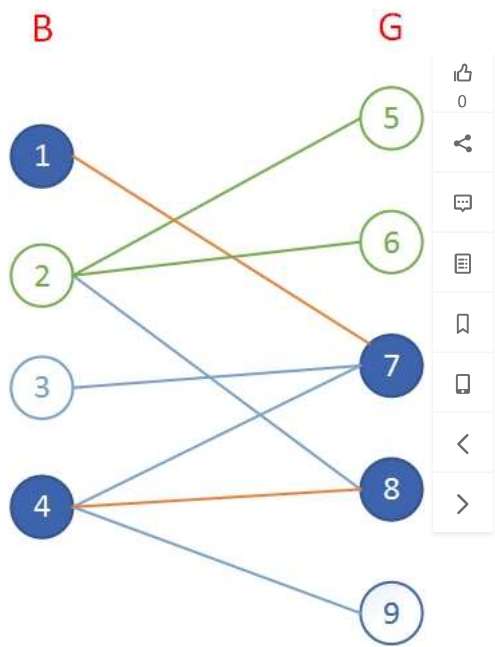


图2

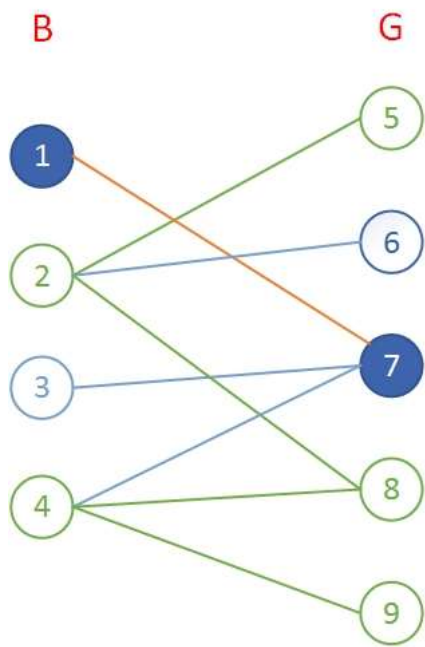


图3

完成这一过程后，来看最后被记录(绿色)的点有哪些，见下面图4。



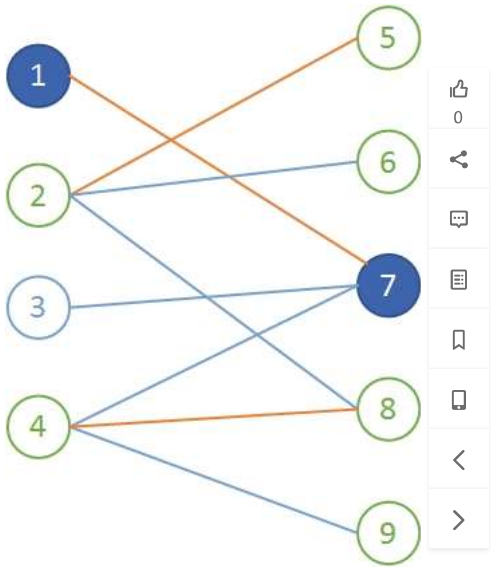


图4

然后我们将从这两个集合里找点，其中在出发集G里找没有被标记的点（7），在被匹配集B里找被标记的点（2, 4），见图5。

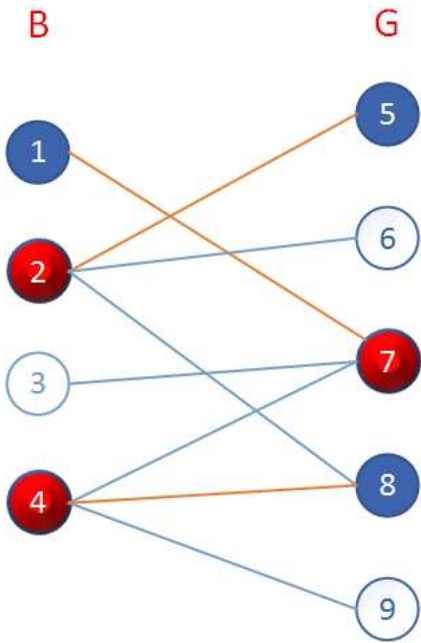


图5

最后得到点2、4、7，这就是最小覆盖点了，刚好3个，跟最大匹配边数一样。根据博主Matrix67的反证法式的证明，这些最小覆盖点一定是匹配边上的点（图5可知），那么m条最大匹配边，至少用m个点来代表即覆盖（二分图的匹配是一一匹配）。这也是我对找最小覆盖点思路的理解了。下面看一道例题（11419），来分析代码怎么具体实现。

描述

给出一个R\*C大小的网格，网格上面放了一些目标，可以在网格外发射子弹，子弹会沿着垂直或者水平方向飞行，并且打掉飞行路径上的所有目标。计算出最少需要多少子弹，各从哪些位置发射，才能把所有目标全部打掉。

- Input
- The input file contains several test cases. Here, the temple is defined as a  $R \times C$  grid. The first line of each test case contains 3 integers: 1001),  $C$  ( $0 < C < 1001$ ) representing the grid of temple ( $R$  means number of row and  $C$  means number of column of the grid) and the enemies  $N$  ( $0 < N < 1000001$ ) inside the temple. After that there are  $N$  lines each of which contains 2 integers representing the position of the enemies in that temple. Each test case is followed by a new line (except the last one). Input is terminated when  $R = C = N = 0$ .
- Output
- For each test case there will be one line output. First print the minimum number ( $m$ ) of cannonballs needed to wipe out the enemies in a single space and then  $m$  positions from which he can shoot those cannonballs. For shooting horizontally print 'r' followed by the row number and for vertical shooting print 'c' followed by the column number. If there is more than one solution any one will do.
- Sample Input

- 4 4 3
- 1 1
- 1 4
- 3 2
- 4 4 2
- 1 1
- 2 2
- 0 0 0
- Sample Output
- 2 r1 r3
- 2 r1 r2



题目分析

每个敌人，所占的坐标，就代表了x轴和y轴的一个关系，即横打和纵打的一个关系。然后观察横打和纵打的关系，如果你从第一行横着打，你会将第i行清空，但不会影响到其他行的敌人；如果你从第一列竖着打，你会清空第一列的所有敌人，但不会影响其他列的敌人，这里的敌人代表关系。从这样很明显可以分成一个二分图，而出发集和被匹配集可以分为x轴和y轴。根据输出要求，是要将覆盖点输出，并且是最少覆盖点，因为要用最少的点（炮轰掉）所有的关系（敌人）。

解题思路

因为要求最少覆盖点的具体值，所以不能仅仅求出最大匹配数(匈牙利算法)就完了。而是要在求完最大匹配数后，再对出发集中未匹配点再进行一边增广(匈牙利算法)。然后根据出发集未被标注的点，和被匹配集标注的点，来输出攻击方向和位置。下面代码中，我用X轴横着打作为出发集，也就是r；用Y轴作为被匹配集，c。（因为受经典男女配对题目的影响，我习惯用Girl表示出发集，Boy表示被匹配集。）

AC代码

```
1 | #include <iostream>
2 | #include <queue>
3 | #include <vector>
4 | #include <algorithm>
5 | #include <string.h>
6 | #include <stdio.h>
7 | #include <math.h>
8 | using namespace std;
9 | const int N = 1010;
10 | int line[N][N]; //新建可搭配数组
11 | int gUsed[N],bUsed[N];
12 | int Girl[N],Boy[N];
13 | vector<int> h;
14 | vector<int> v;
15 | int k,m,n;
16 | int r,c,e,x,y;
17 |
18 | bool found(int x){
19 |     gUsed[x] = 1; //第x横坐标被标记
20 |     for(int i = 1; i <= c; i++){ //遍历所有纵轴点
21 |         if(line[x][i] && !bUsed[i]){ //如果第x横坐标和第i纵坐标有关系(出现敌人)，并且第i纵坐标还没被用过，就进行选择
22 |             bUsed[i] = 1; //第i纵坐标被标记
23 |             if(Boy[i] == 0 || found(Boy[i])){ //如果第i纵坐标还没被任何人横坐标搭配过，或者说选择第i纵坐标的横坐标还有其他纵坐标可选(DFS
24 |                 Girl[x] = i; //第x横坐标选择了第i纵坐标
25 |                 Boy[i] = x; //第i纵坐标选择了第x横坐标
26 |                 return 1; //并返回1
27 |             }
28 |         }
29 |     }
30 |     return 0; //如果没有选择的对象，就返回0
31 | }
32 |
33 | int main(){
34 |     while(1){
35 |         scanf("%d %d %d",&r,&c,&e);
36 |         if(r == 0 && c == 0 && e == 0)
37 |             break;
```



```
38 | memset(line, 0, sizeof(line));
39 | for(int i = 0; i < e; i++){
40 |     scanf("%d %d",&x,&y);
41 |     line[x][y] = 1; //标记关系, 也是记录敌人位置
42 | }
43 | int sum = 0; //最大匹配数, 也是最小覆盖数
44 | memset(Girl, 0, sizeof(Girl));
45 | memset(Boy, 0, sizeof(Boy));
46 | for(int i = 1; i <= r; i++){ //遍历所有横轴点
47 |     memset(gUsed, 0, sizeof(gUsed)); //用于记录出发集X里的顶点有没有被使用
48 |     memset(bUsed, 0, sizeof(bUsed)); //用于记录被匹配集Y里的顶点有没有被使用
49 |     if(found(i)) //看下一个横坐标能否匹配成功
50 |         sum++;
51 | }
52 | printf("%d",sum); //输出最小覆盖数
53 | v.clear();
54 | h.clear();
55 | memset(gUsed, 0, sizeof(gUsed)); //用于记录出发集X里的顶点有没有被使用
56 | memset(bUsed, 0, sizeof(bUsed)); //用于记录被匹配集Y里的顶点有没有被使用
57 | for(int i = 1; i <= r; i++){
58 |     if(!Girl[i]) //出发集里还未匹配的点
59 |         found(i); //寻找增广路, 并标记经过的点
60 | }
61 | for(int i = 1; i <= r; i++){
62 |     if(!gUsed[i]) //出发集X里, 所有没有被打记号的
63 |         h.push_back(i); //记录位置
64 | }
65 | for(int i = 1; i <= c; i++){
66 |     if(bUsed[i]) //被匹配集Y里, 所有被打记号的
67 |         v.push_back(i); //记录位置
68 | }
69 | for(int i = 0; i < h.size(); i++){
70 |     printf(" r%d",h[i]); //预设出发集为横轴, 所以输出r
71 | }
72 | for(int i = 0; i < v.size(); i++){
73 |     printf(" c%d",v[i]); //预设被匹配集为纵轴, 所以输出c
74 | }
75 | puts("");
76 | }
77 | return 0;
78 | }
```

👍 0

👤

💬

📄

🔖

📱

<

>

此外还有最大独立集合和DAG最小路径覆盖的应用, 见其他文章。



**人脸识别主要算法原理**  
人脸识别算法  
3691阅读

🗣️

想对作者说点什么

简单二分图的应用

阅读数 58

题目链接题目描述: 我们把一个城市考虑为一个图,街道为边,路口为点.路口标记为0~N-1.盗贼从一个点开始逃亡,每一... 博文 来自: [AYZXX的博客](#)

算法讲解: 二分图匹配

阅读数 3万+

二分图匹配, 自然要先从定义入手, 那么二分图是什么呢? 二分图: 二分图又称作二部图, 是图论中的一种特殊模型...

二分图的定义和判定

阅读数 6317

写在之前: 更多二分图知识, 请关注---&gt;二分图知识导航篇 定义 二分图也称二部图, 是图论里的一种特殊...

二分图定理

阅读数 976

二分图一些定理性质

👑 来自: [thunderMrbird的...](#)

📄 来自: [知行合一](#)

🔖 来自: [wild-wind的专栏](#)



cpu天梯图,自己看吧

图应用之二分图判定

二分图判定图

Konig定理

Konig定理：最少覆盖数==最大匹配数例题： 有两台机器A和B及N个需要运行的任务， 每台机器有M种不同的模式...

Konig定理——最小点覆盖数等于最大匹配

转自：http://www.matrix67.com/blog/archives/116Konig定理是一个二分图中很重要的定理，它的意思是，一个...

二分图的应用

行列交换HDOJ2819题目要求使对角线上都是1，就意味着我们要先选择几个1来挪到对角线上。又易知每一行每一列...

二分图最大匹配与其应用

部分定义传递闭包一个图。如果图GG中点i到点j存在通路，那么在传递闭包中有边i->j二分图...

二分图的完全匹配---KM算法 - 知行合一 - CSDN博客

图应用之二分图判定 - Silicat's Blog - CSDN博客

别再玩假传奇了！这款传奇爆率9.8，你找到充值入口算我输！

贪玩游戏 · 顶新

二分图性质

来源：http://endlesscount.blog.163.com/blog/static/821197872012622103810976/鸣谢博主常用定理：最小...

二分图定理 - wild-wind的专栏 - CSDN博客

二分图性质 - umalaka的博客 - CSDN博客

二分图匹配原理及其应用

正文抱歉，这篇文章还没开始写。



AYZXX

193篇文章

关注 排名:千里之外



thunderMrbird

37篇文章

关注 排名:千里之外



不羁-的风

3篇文章

关注 排名:千里之外

二分图相关知识指南 - CSDN博客

二分图性质 - weixin\_30770495的博客 - CSDN博客

König定理及证明

König定理的内容是，一个二分图中的最大匹配数等于这个图中的最小点覆盖数。看过Matrix67大牛的证明后感觉证...

【转载】二分图最大匹配的König定理及其证明

二分图最大匹配的König定理及其证明转载自Matrix67本文将是这一系列里最短的一篇，因为我只打算把König定理...

简单二分图的应用 - AYZXX的博客 - CSDN博客

二分图及其~~谜一样的~~名词 - weixin\_33895695的博客 - CSDN博客

二分图最大匹配的König定理及其证明

这是转载的，这里是原链接：大牛博客链接如果你看不清楚第二个字母，下面有一个大号字体版本：二分图最大匹配...

0

- 阅读数 264
- 来自：Silicat's Blog
- 阅读数 1165
- 来自：SCUT\_Pein
- 阅读数 39
- 来自：CY05627的博客
- 阅读数 44
- 来自：ValarMorg的博客
- 阅读数 1943
- 博文 来自：一位蒟蒻的小博客

- 阅读数 625
- 博文 来自：pbihao的博客
- 阅读数 39
- 博文 来自：To\_the\_beginning...

阅读数 833

博文 来自：ACM暑期修行

阅读数 185

来自：AIDreamer

阅读数 65

博文 来自：肥仔的博客

老公自从吃了它，每天晚上要我好几次！

晨韵 · 猎媒

二分图性质总结 - last\_xuanshen的博客 - CSDN博客

[匈牙利算法] 最小点覆盖 König定理

König定理

二分图最小点覆盖König定理的简单证明

König定理是一个二分图中很重要的定理，它的意思是，一个二分图中的最大匹配数等于这个图中的最小点覆盖数。...

二分图基本性质

最小点覆盖=最大匹配。最小边覆盖=最大独立集=图中点的个数-最大匹配。 最小路径覆盖结论:DAG最小路径覆盖=...

二分图详解----匈牙利算法+km算法+ Gale-Shapley---婚姻匹配算法+例题

先介绍一下基本概念以下基本概念转自其他的博客，不是原创二分图：简单来说，如果图中点可以被分为两组，并且...

二分图基础学习

转载：https://blog.csdn.net/qq\_36345036/article/details/76977294二分图又称作二部图，是图论中的一种特殊...

陈小春坦言：这游戏不充钱都能当全服大哥，找到充值入口算我输！

贪玩游戏 · 顶新

二分图详解附图

转至：http://blog.csdn.net/pi9nc/article/details/11848327 二分图的最大匹配、完美匹配和匈牙利算法2013-08-...

图论 —— 二分图

【概述】二分图又称作偶图，是图论中的一种特殊模型。设G=(V,E)是一无向图，若顶点V可分割为两个互不相交的子...

二分图的基础定义

二分图又称作二部图，是图论中的一种特殊模型。设G=(V,E)是一个无向图，如果顶点V可分割为两个互不相交的子集...

二分图匹配——匈牙利算法和KM算法

二分图的概念二分图又称作二部图，是图论中的一种特殊模型。设G=(V,E)是一个无向图。如果顶点集V可分割为两个...

二部图（二分图）总结

1二部图二部图又叫二分图，是图论中的一种特殊模型。设G=(V,E)是一个无向图，如果顶点V可分割为两个互不相交...



用什么软件画流程图  
流程图

《iVQA: Inverse Visual Question Answering》读书笔记

《iVQA:InverseVisualQuestionAnswering》读书笔记一、iVQA介绍VQA是根据image、question生成关于image...

二分图的基本概念+二分图的最大匹配问题（匈牙利算法）

今天学了二分图的最大匹配，其中的匈牙利算法。。哦不，其实远不止这个，还有后面的一系列KM、开花树啊什么...

图论——二分图——二分图染色（1.0版）

一、定义二分图又称作二部图，是图论中的一种特殊模型。设G=(V,E)是一个无向图，如果顶点V可分割为两个互不相...

二分图大合集——二分图最大匹配（最小覆盖数），完美匹配以及最优匹配（带权最大匹配）

二分图：定义：二分图又称作二部图，是图论的一种特殊模型。设G=(V,E)是一个无向图，如果顶点V可分割为两个互...

二分图的相关概念（一）

1、二分图：设G=(V,E)是一个图，图的顶点集合可以分为两个集合V1，V2，E中的每个边都有一个点要么属于点集V...

👍  
0

🔗

💬  
阅读数 466

📄  
来自: kkkGIGi\_qtt

🔖  
阅读数 118

🔖  
来自: 永不止步的博客

📄  
阅读数 267

🔍  
来自: Evildoer\_llc的博客

🔍  
阅读数 1万+

📄  
来自: qq\_40938077的博客

📄  
阅读数 393

📄  
来自: 洋葱专栏-有灵魂的...

📄  
阅读数 6770

📄  
来自: Kirito\_j的博客

📄  
阅读数 898

📄  
来自: Alex\_McAvoy的博客

📄  
阅读数 8142

📄  
来自: Dreame的博客

📄  
阅读数 3万+

📄  
来自: C20180630的博客

📄  
阅读数 72

📄  
来自: 哆啦A瑶的博客

📄  
阅读数 226

📄  
来自: jiang6869732的博客

📄  
阅读数 1万+

📄  
来自: x\_y\_q的博客

📄  
阅读数 46

📄  
来自: T.J的博客

📄  
阅读数 1万+

📄  
来自: ling\_wang的博客

📄  
阅读数 88

📄  
来自: CF不紫不改名







机器学习->推荐系统->基于图的推荐算法(PersonalRank)

博文

阅读数 4821

博文

来自: 村头陶员外的博客

博文

来自: 论坛

二分图大讲堂——彻底搞定最大匹配数（最小覆盖数）、最大独立数、最小路径覆盖、带权最优匹配...

阅读数 313

二分图大讲堂——彻底搞定最大匹配数（最小覆盖数）、最大独立数、最小路径覆盖、带权最优匹配

来自: qiudesuo的专栏

[图初学]二分图的判定

阅读数 1959

图的表示方法：（1）邻接矩阵（2）邻接表邻接矩阵：用V\*V的二维数组来表示图，g[i][j]表示顶点i和顶点j的关系，...

来自: ymyfszx的博客

二分图

阅读数 75

1068.GirlsandBoysthesecondyearoftheuniversitysomebodystartedastudyontheromanticrelationsbetweenthe...

来自: 程序员养成日记

这变态传奇你卸载算我输！爆率9.8，不花一分钱，刀刀爆橙装！

贪玩游戏 · 顶新

CDQ分治【分治（真得头疼）

博文

阅读数 7665

前言：说实话我对于这种没有固定板子，变化多端的算法实在是非常头疼的但是不学不行，这也是一种很重要的思伟...

来自: Coco\_T的博客

c#改变td值

c#怎么读取html文件

c#如何跳出整个循环

c# throw的用法

c# 判断域名端口


c#前景怎么样

c#遍历datelist

c#如何改变控件字体

c#网络编程 vs

c# 文件读取image



葉心

私信

关注

TA的个人主页 >

原创

23

粉丝

9

喜欢

15

评论

1

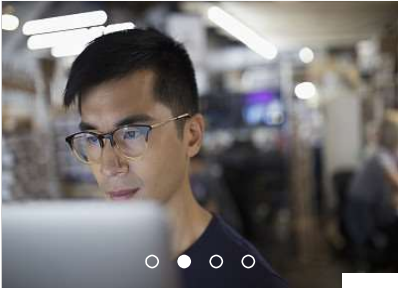
等级: 博客 已

访问: 1万+

积分: 353

排名: 28万+

勋章: 恒



黑马程序员学费

最新文章

计算机系统基础--链接 第一节课

Spring Boot （六） 表单验证

Spring Boot （五） 事务管理

Spring Boot （四） 连接数据库

Spring Boot （三） Controller的使用

分类专栏

C

2018宁夏邀请赛

2篇



C

并查集

3篇

C

字典树

3篇

C

English Reading

0篇

C

50 GREAT SHORT STORIES

0篇

C

一八四

...

展开

归档

2018年9月	5篇
2018年8月	15篇
2018年7月	3篇

热门文章

二分图的定义和判定

阅读数 6266

二分图的完全匹配---KM算法

阅读数 1917

Spring Boot (三) Controller的使用

阅读数 1185

二分图的性质及其应用 (konig定理)

阅读数 992

Spring Boot (四) 连接数据库

阅读数 958

最新评论

二分图的完全匹配---KM算法

u013030035: 假如出发集X有点A,B; 被匹配集Y有点B,E。AB边权值是10, CB边权值是11, 而 ...

云服务器低至42元/6个月

百度云智峰惠大促,云服务器  
服务器低至一折,爆款1核1G  
服务器新客专享42元/6个月!



CSDN学院



CSDN企业招聘

 QQ客服

 kefu@csdn.net

 客服论坛

 400-660-0108

工作时间 8:30-22:00

关于我们

招聘

广告服务

网站地图

 百度提供站内搜索

京ICP备19004658号

©1999-2019 北京创新乐知网络技术有限公司

网络110报警服务

经营性网站备案信息

北京互联网违法和不良信息举报中心

中国互联网举报中心

家长监护

版权申诉



0











<

>







