张瑯小强

手把手教会你模拟退火算法

今天终于用模拟退火过了一道题：CodeVS：P1344。

> 有 N (<=20) 台 PC 放在机房内，现在要求由你选定一台 PC，用共 N-1 条网线从这台机器开始一台接一台地依次连接他们，最后接到哪个以及连接的顺序也是由你选定的，为了节省材料，网线都拉直。求最少需要一次性购买多长的网线。（说白了，就是找出 N 的一个排列 P1 P2 P3 ..PN 然后 P1 -> P2 -> P3 -> ... -> PN 找出 |P1P2|+|P2P3|+...+|PN-1PN| 长度的最小值）

这种问题被称为最优组合问题。传统的动态规划算法O($n^2 2^n$)在n = 20的情况下空间、时间、精度都不能满足了。这时应该使用比较另类的算法。随机化算法在n比较小的最优化问题表现较好，我们尝试使用随机化算法。

```
#include<cstdio>
#include<cstdlib>
#include<ctime>
#include<cmath>
#include<algorithm>

const int maxn = 21;
double x[maxn], y[maxn];
double dist[maxn][maxn];
int path[maxn];
int n;
double path_dist(){
    double ans = 0;
    for(int i = 1; i < n; i++) {
        ans += dist[path[i - 1]][path[i]];
    }
    return ans;
}
int main(){
    srand(19260817U);                           // 使用确定的种子初始化随机函数是不错的选择
    scanf("%d", &n);
    for(int i = 0; i < n; i++) scanf("%lf%lf", x + i, y + i);
    for(int i = 0; i < n; i++) for(int j = i + 1; j < n; j++) dist[i][j] = dist[j][i] = hypot(x[i] - x[j], y[i] - y[j]);

    for(int i = 0; i < n; i++) path[i] = i;         // 获取初始排列
    double ans = path_dist();                   // 初始答案
    int T = 30000000 / n;                       // 单次计算的复杂度是O(n)，这里的30000000是试出来的
    while(T--){
        std::random_shuffle(path, path + n);    // 随机打乱排列
        ans = std::min(ans, path_dist());       // 更新最小值
    }
    printf("%.2lf", ans);
}
```

可惜的是，这个算法只能拿50分。使用O(n!)枚举排列和使用上述算法没有太大的不同。从解的角度分析，假如某一次计算尝试出了一个比较好的路径，那么最优的路径很可能可以在原基础上作一两次改动就可以得到，这时候完全打乱整个序列不是一个很好的选择。

公告

昵称： 张瑯小强
园龄： 3年
粉丝： 6
关注： 5
+加关注

< 2019年9

日	一	二	三
1	2	3	4
8	9	10	11
15	16	17	18
22	23	24	25
29	30	1	2
6	7	8	9

搜索

我的标签

C++(3)
OI(1)
编译选项(1)
模拟退火(1)
莫队算法(1)
算法(1)
ACM(1)
C(1)

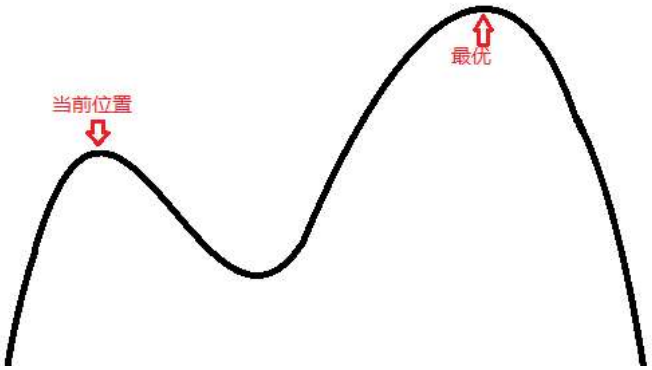
另一个方法：根据原序列生成一个新的序列，然后交换新序列的任意两个数。假如说新生成的序列更优，则使用新序列继续计算，否则序列不变。

这个算法就是局部搜索法（爬山法）。可惜，这个算法不正确。这个算法只顾眼前，忽略了大局，只要更优便走，这样可能会造成"盯着眼前的小山包，忽略远处的最高峰"，找到的值往往只是"局部最优值"。当然——这个方法也并不是完全不正确。我们可以多次计算使用上述方法计算，取最值。这里不再赘述。

下面介绍退火算法（SA,Simulated Annealing）。

首先拿爬山做例子：我们要找到山脉的最高峰，但是我（计算机）只能看到我的脚下哪边是上升的，哪边是下降的，看不到远处是否上升。每次移动，我们随机选择一个方向。如果这个方向是上升的的（更优），那么就决定往那个方向走；如果这个方向是下降的（更差），那么"随机地接受"这个方向，接受就走，不接受就再随机一次——这个随机是关键，要考虑很多因素。比如，一个陡的下坡的接受率要比一个缓的下坡要小（因为陡的下坡后是答案的概率小）；同样的下降坡度，接受的概率随时间降低（逐渐降低才能趋向稳定）。

为什么要接受一个更差的解呢？如下图所示：



如果坚决不接受一个更差的解，那么就会卡在上面的"当前位置"上了。倘若接受多几次更差的解，让他移动到山谷那里，则可以突破局部最优解，得到全局最优解。

既然这个随机这么重要，那么我们就将它写为一个函数：

```
bool accept(double delta, double temper){
    if(delta <= 0) return true;
    return rand() <= exp((-delta) / temper) * RAND_MAX;
}
```

其中delta是新答案的变化量，temper是当前的"温度"。温度是模拟退火算法的一个重要概念，它随时间的推移缓慢减小。我们来分析一下这个代码：

if(delta <= 0) return true;

由于答案越小越优，因此当温度的变化量小于零（新答案减小）时，新解比旧解优，因此返回"接受"

return rand() <= exp((-delta) / temper) * RAND_MAX;

RAND_MAX是rand()的最大值。为了保证跨平台、跨编译器甚至跨版本时的正常运作，我们不对其作出任何假定。

我们把它移项：return (double)rand() / RAND_MAX <= exp((-delta) / temper)。在右边，temper是正数，delta是正数（delta是负数的已经return出去了），因此exp()中间的参数是负数。我们知道，指数函数在参数是负数时返回(0, 1)——这就是接受的概率。我们在左边随机一个实数，如果它比概率小，就接受，否则就不接受。

然后将RAND_MAX移到右边，以省下昂贵的除法成本和避免浮点数的各种陷阱。

有了接受函数，就可以写计算过程了：

```
double solve(){
    const double max_temper = 10000;
    double temp = max_temper;
    double dec = 0.999;
    Path p;
    while(temp > 0.1){
        Path p2(p);
        if(accept(p2.dist() - p.dist(), temp)) p = p2;
        temp *= dec;
    }
    return p.dist();
}
```

其中Path是路径，它有一个构造函数是接受另一个Path类型的对象，然后交换其中两个点的顺序。

```
struct Path{
    City path[maxn];

    Path(){
        F(i, n) path[i] = citys[i];
    }

    Path(const Path& p):path(p.path){
        swap(path[rand() % n], path[rand() % n]);
    }

    void shuffle(){
        random_shuffle(path, path + n);
    }

    double dist(){
        double ans = 0;
        for(int i = 1; i < n; i++){
            ans += path[i - 1].distTo(path[i]);
        }
        return ans;
    }
};
```

上文的City是路径一个点。而void shuffle()是随机打乱整个序列（在本题没有用上）。

下面是City的定义：

```
struct City{
    double x, y;
    City(){}
    City(double x, double y):x(x), y(y){}
    double distTo(const City& rhs) const {
        return hypot(x - rhs.x, y - rhs.y);
    }
    friend istream& operator >> (istream& in, City& c){
        return in >> c.x >> c.y;
    }
}citys[maxn];
```

最后是程序的主框架：

```
int main(){
    srand(19260817U);
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin >> n;
    F(i, n) cin >> citys[i];
    double ans = 1./0;
    int T = 15;
    while(T--){
        ans = min(ans, solve());
    }
    printf("%.2lf", ans);
}
```

完整代码如下：

```
#define F(i, n) for(int i = 0; i < n; i++)
#define F1(i,n) for(int i = 1; i <=n; i++)
#include<cmath>
```

2. 手把手教会你模拟退
3. 编译器优化误解程序
4. SPFA最短路算法(1)
5. 我的G++编译选项(

```cpp
#include<algorithm>
#include<iostream>
#include<cstdio>
using namespace std;

const int maxn = 21;
int n;
struct City{
    double x, y;
    City(){}
    City(double x, double y):x(x), y(y){}
    double distTo(const City& rhs) const {
        return hypot(x - rhs.x, y - rhs.y);
    }
    friend istream& operator >> (istream& in, City& c){
        return in >> c.x >> c.y;
    }
}citys[maxn];

struct Path{
    City path[maxn];

    Path(){
        F(i, n) path[i] = citys[i];
    }

    Path(const Path& p):path(p.path){
        swap(path[rand() % n], path[rand() % n]);
    }

    void shuffle(){
        random_shuffle(path, path + n);
    }

    double dist(){
        double ans = 0;
        for(int i = 1; i < n; i++){
            ans += path[i - 1].distTo(path[i]);
        }
        return ans;
    }
};



bool accept(double delta, double temper){
    if(delta <= 0) return true;
    return rand() <= exp((-delta) / temper) * RAND_MAX;
}

double solve(){
    const double max_temper = 10000;
    double temp = max_temper;
    double dec = 0.999;
    Path p;
    while(temp > 0.1){
        Path p2(p);
        if(accept(p2.dist() - p.dist(), temp)) p = p2;
        temp *= dec;
    }
    return p.dist();
}

int main(){
    srand(19260817U);
    ios::sync_with_stdio(false);
    cin >> n;
    F(i, n) cin >> citys[i];
    double ans = 1./0;
    int T = 155;
    while(T--){
        ans = min(ans, solve());
    }
```

```
77     printf("%.2lf", ans);
78 }
```

其实本代码在很多地方写复杂了，比如累赘的City类。在比赛中，我们不会写得如此复杂。下面对其简化：

```
 1 #include<cstring>
 2 #include<cmath>
 3 #include<algorithm>
 4 #include<iostream>
 5 #include<cstdio>
 6 using namespace std;
 7
 8 const int maxn = 21;
 9 int n;
10 double x[maxn], y[maxn];
11 double dist[maxn][maxn];
12
13 struct Path{
14     int path[maxn];
15
16     Path(){
17         for(int i = 0; i < n; i++) path[i] = i;
18     }
19
20     Path(const Path& p){
21         memcpy(path, p.path, sizeof path);
22         swap(path[rand() % n], path[rand() % n]);
23     }
24
25     double dist(){
26         double ans = 0;
27         for(int i = 1; i < n; i++){
28             ans += ::dist[path[i - 1]][path[i]];
29         }
30         return ans;
31     }
32 };
33
34
35
36 bool accept(double delta, double temper){
37     if(delta <= 0) return true;
38     return rand() <= exp((-delta) / temper) * RAND_MAX;
39 }
40
41 double solve(){
42     const double max_temper = 10000;
43     const double dec = 0.999;
44     double temp = max_temper;
45     Path p;
46     while(temp > 0.01){
47         Path p2(p);
48         if(accept(p2.dist() - p.dist(), temp)) p = p2;
49         temp *= dec;
50     }
51     return p.dist();
52 }
53
54 int main(){
55     srand(19260817U);
56     cin >> n;
57     for(int i = 0; i < n; i++) {
58         scanf("%lf%lf", x + i, y + i);
59     }
60     for(int i = 0; i < n; i++){
61         dist[i][i] = 0;
62         for(int j = i + 1; j < n; j++){
63             dist[i][j] = dist[j][i] = hypot(x[i] - x[j], y[i] - y[j]);
64         }
65     }
66     double ans = 1./0;
```

```
67      int T = 155;
68      while(T--){
69          ans = min(ans, solve());
70      }
71      printf("%.2lf", ans);
72  }
```

交上去就可以AC了。

由于随机化算法有一定不稳定性，这里要多次调用计算过程取最小值。T=155就是外循环次数。

值得注意的是，T=15就可以过80%的数据，T=42可以过完全部数据，此时最大数据运行时间为86ms。这里T取155是保险起见，毕竟时间足够。

上面的代码仍有改进的余地。比如，在solve()函数中，应当把最优解记下来，在返回解时返回记下的那个最优解，免得跳到了某些差解后返回差解。

下面是一张表供大家估算运行时间，左边是"降温系数"，上方是初温与末温的比值，表格内容是大致的迭代次数。

	10,000	31,600	100,000	316,000	1,000,000	3,160,000	10,000,000	316,200,000	1,000,000,000	3,162,000,000
0.9	88	99	110	121	132	143	153	186	197	208
0.95	180	202	225	247	270	292	315	382	405	427
0.99	917	1031	1146	1261	1375	1490	1604	1948	2062	2177
0.995	1838	2067	2297	2527	2757	2986	3216	3905	4135	4364
0.999	9206	10356	11508	12658	13809	14959	16111	19563	20713	21864
0.9995	18417	20717	23021	25321	27625	29925	32229	39134	41437	43739
0.9999	92099	103604	115124	126629	138149	149654	161173	195710	207223	218734

从上表可以看出，增加十倍的初温与末温比值只会增加约25%的迭代次数，而往0.9...99的后面加个9会增加十倍的运行时间。

除了记忆上表外，我们还可以通过记录退火次数（将tot初始化为零，每次产生新解时tot++，计算完后看看tot）或者使用计算器计算退火次数。计算后选择一个合适的外循环次数。

除此之外，我们还要根据数据规模，灵活地调整初温、末温与降温系数。一般来说，初温不宜太大，否则会让前几次迭代接受了很差的解，浪费时间；降温系数不宜过大，否则会让算法过早稳定，不能找到最优值；同样，降温系数也不宜太高（更不能大于1，不然温度越来越高），否则可能会超时。

在正式使用中还有些技巧，如每次降温后，做足够多次计算后才再次降温（内循环），这对算法准确性没有太大影响。

除了模拟退火外，还有不少随机化算法。比如遗传算法、蚁群算法，这些算法被称为"元启发算法"，有兴趣的读者可以查阅相关资料。

标签： C++， 模拟退火， 算法

张瑯小强
关注 - 5
粉丝 - 6
+加关注

« 上一篇： 我的G++编译选项
» 下一篇： SQL注入方法之：获取列名

posted @ 2016-11-10 16:40 张瑯小强 阅读(6894) 评论(0) 编辑 收藏