实变函数笔记20250221

偏序

$X \neq \emptyset, X$ 上一个关系 $R \subseteq X \times X$,当R满足自反、传递、反对称，我们称R为一个偏序

> 默认下文中的R均为X上的偏序

全序子集

$E \subseteq X$,如果$\forall x_0, x_1 \in E, x_0 R x_1 \oplus x_1 R x_0$，我们称$E$是$X$的一个全序子集

上界

$\exists x \in X, \forall x' \in E \subseteq X, x' R x$，我们称$x$是$E$的一个上界

最大元

如果$x \in X, x R x' \Rightarrow x = x'$，我们称$x$为一个最大元 R$为X上的偏序，

Zorn 引理

设X为一偏序集，如果X的每一个全序子集均有上界，则X有一个最大元

选择公理

设$\mathcal{F}$为一族非空集合，则存在一个选择函数，即可从每一集合中选择一个元素

上极限集与下极限集

$\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$为一族集合
其上极限集$\limsup A_n := \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n=k}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \exists$无穷多$n\ s.t.\ x \in A_n$
其下极限集$\liminf A_n := \bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcap_{n=k}^{\infty} A_n \Leftrightarrow \exists$有限个$n\ s.t.\ x \notin A_n$

$\sigma-$代数

$\mathcal{A} \subseteq 2^X$，若$\mathcal{A}$满足

1. $\emptyset \in A$
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^C \in \mathcal{A}$
3. $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

则称$\mathcal{A}$为一个$\sigma-$代数

Borel 集族

Borel集族$\mathcal{B} \subseteq 2^{\mathbb{R}}$为包含所有$\mathbb{R}$中开集的最小$\sigma-$代数

F_σ与G_δ

F_σ为可数个闭集的并，G_δ为可数个开集的交

引理

$U \subseteq \mathbb{R}$且为开集，则存在存在至多可数个两两不交的开区间$\{I_k\}$使得$U = \bigcup_k I_k$

Cantor 集

$C_0 = [0, 1]$

$n \geq 1$递推定义C_n为：将C_{n-1}每个区间三等分后，留下的左右两个闭子区间。可知C_n为2^n个长度为3^{-n}的闭区间。

Cantor集$\mathcal{C} := \bigcap_{n=0}^{\infty} C_n$