实变函数笔记20250307

命题

所有的可测集形成一个$\sigma -$代数，称为Lebesgue代数，记作m，且真包含Borel代数

命题

$\forall A, E \subset A, E$ 可测$, m^*(E) < \infty,$ 则有$m^*(A \setminus E) = m^*(A) - m^*(E)$

命题

每个区间均可测

推论

所有Borel集均可测

可测集的外逼近与内逼近

E可测
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists$开集$U \supseteq E,\ s.t.\ m^*(U \setminus E) < \epsilon$
$\Leftrightarrow \exists G_\delta$ 集合 $G \supseteq E,\ s.t.\ m^*(G \setminus E) = 0$
$\Leftrightarrow \forall \epsilon > 0, \exists$闭集$K \subseteq E,\ s.t.\ m^*(E \setminus K) < \epsilon$
$\Leftrightarrow \exists F_\sigma$ 集合 $F \subseteq E,\ s.t.\ m^*(E \setminus F) = 0$

等测包与等测核

1. $\forall E$（不要求可测）$\exists G_\delta$集$G \supseteq E,\ s.t.\ m^*(G) = m^*(E)$，此时$G$叫做$E$的等测包，且能推出当$E$不可测时，$m^*(G \setminus E) > 0$
2. E 可测$\Leftrightarrow \exists F_\sigma$集$F \subseteq E,\ s.t.\ m^*(F) = m^*(E)$，此时$G$叫做$E$的等测核

Lebesgue 测度定义

限制在 Lebesgue 代数上的外测度称为 Lebesgue 测度，记作$m(E)$

对称差定义

$A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ 称为 A 与 B 的对称差

定理

$\forall E$ 可测且 $m(E) < \infty,\ \forall \epsilon > 0,\ \exists$两两不交的开区间族$\{I_k\}_{k=1}^n,\ s.t.\ m(E \triangle U) < \epsilon, U = \bigcup_{k=1}^n I_k$

升列与降列

$\{E_i\}_{i=1}^\infty$ 当 $\forall i$，总有 $E_i \subseteq E_{i+1}$ 时，我们称其为升列；$\forall i$，总有 $E_i \supseteq E_{i+1}$ 时，我们称其为降列

命题

1. 若$\{E_i\}_{i=1}^\infty$均可测且为升列，则有$m(\bigcup_{i=1}^\infty E_i) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)$
2. 若$\{E_i\}_{i=1}^\infty$均可测且为降列，并且$m(E_1) < \infty$，则有$m(\bigcap_{i=1}^\infty E_i) = \lim_{i\to\infty} m(E_i)$

推论

$\{E_i\}$ 可测 $\Rightarrow m(\liminf E_i) \le \liminf m(E_i)$

几乎处处定义

如果一个性质在可测集E上几乎处处成立，是指其在$E \setminus E_0$上成立，$E_0 \subset E$且$m(E)=0$，记作$a.e.$

Borel-Cantelli 引理

$\{E_i\}_{i=1}^{\infty}$可测，$\sum_{i=1}^{\infty} m(E_i) < \infty$，则对$a.e.\ x \in \mathbb{R}$，其仅属于至多有限个$E_i$

引理

设$E \subseteq \mathbb{R}$为有界可测集，若存在有界可数集$\Lambda\ s.t.\ \{E+\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$两两不交，则有$m(E)=0$

有理等价定义

若 $x-y \in \mathbb{Q}$，则称 x 与 y 有理等价

不可测集的存在性

$\forall E \in R, \mathcal{F}$ 是 E 上所有有理等价类的集族
由选择公理知 $\exists C_E \subset E, C_E$ 由每一等价类中一代表元构成
可知

1. $\forall c, d \in C_E, d-c \notin \mathbb{Q}$，即$\forall \Lambda \subset \mathbb{Q}, \{C_E+\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$两两不交
2. $\forall x \in E, \exists c \in C_E$ 和 $q \in \mathbb{Q},\ s.t.\ x=c+q$

此时 C_E 不可测

Vitali 定理

$\forall$ 非零测集 $E \subseteq R$，均存在不可测集合$A \subseteq E$