实变函数笔记20250321

特征函数定义

$A \subseteq \mathbb{R}$其上的特征函数$\chi_A(x)$定义为$\chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases}$

$\chi_A(x)$可测$\Leftrightarrow$ A 可测

简单函数定义

$f : E \to \mathbb{R}$ 可测，如果f仅取有限个值，则称其为简单函数

$f = \sum_{k=1}^{n} c_k \chi_{E_k}$，$E_k = \{x \in E; f(x) = c_k\}$且可测

简单函数逼近引理

$f : E \to \mathbb{R}$ 有界可测，则$\forall \epsilon > 0, \exists$简单函数$\phi_\epsilon, \psi_\epsilon : E \to \mathbb{R},\ s.t.\ \phi_\epsilon \leq f \leq \psi_\epsilon,\ 0 < \psi_\epsilon - \phi_\epsilon < \epsilon$

简单函数逼近定理

$f : E \to \bar{\mathbb{R}}$可测$\Leftrightarrow$ $\exists \{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$简单函数列点点收敛于$f$，且$|\phi_n| < |f|$

若$f \geq 0$则可取ϕ_n为升列

Littlewood 三原理

1. 可测集“差不多”是有限个区间的并（参见笔记三对称差定义下方定理）
2. 可测函数“差不多”是连续函数（参见下文 Lusin 定理）
3. 点点收敛（几乎处处收敛）“差不多”是一致收敛（参见下文 Egorov 定理）

引理

设$E \subset \mathbb{R}$为可测集，$m(E) < \infty$
设E上的函数族$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$可测，$f : E \to \mathbb{R}$，f_n点点收敛于f
则$\eta, \delta > 0, \exists$可测集$A \subseteq E$和$n \in \mathbb{N}^+\ s.t.\ m(E \setminus A) < \delta$且$\forall n \geq N$和$x \in A,\ |f_n(x) - f(x)| < \eta$

Egorov 定理

设 E 可测，$m(E) < \infty$
设$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$可测，$f : E \to \mathbb{R}$可测，f_n点点收敛于f
则$\forall \epsilon > 0, \exists$闭集$F \subseteq E,\ s.t.\ m(E \setminus F) < \epsilon$，且$f_n$在$F$上一致收敛于$f$

1. 点点收敛 $\rightsquigarrow$ $a.e.$ 收敛
2. $\forall \epsilon > 0, \exists F_\epsilon\ s.t.\ m(E \setminus F_e) < \epsilon \not\rightsquigarrow \exists f \subset E,\ s.t.\ m(E \setminus F) = 0$
3. $m(E) < \infty$不可去掉
4. $m(E) = \infty$时，$\forall M > 0$，$\exists$闭集$F_M \subseteq E,\ s.t.\ m(F_M) > M$且$f_n|_{F_M}$一致收敛于$f|_{F_M}$

Lusin 定理

$f : E \to \mathbb{R}$可测，则$\forall \epsilon > 0, \exists$闭集$F \subseteq E$和连续函数$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\ s.t.\ m(E \setminus F) < \epsilon$且$g|_F \equiv f|_F$