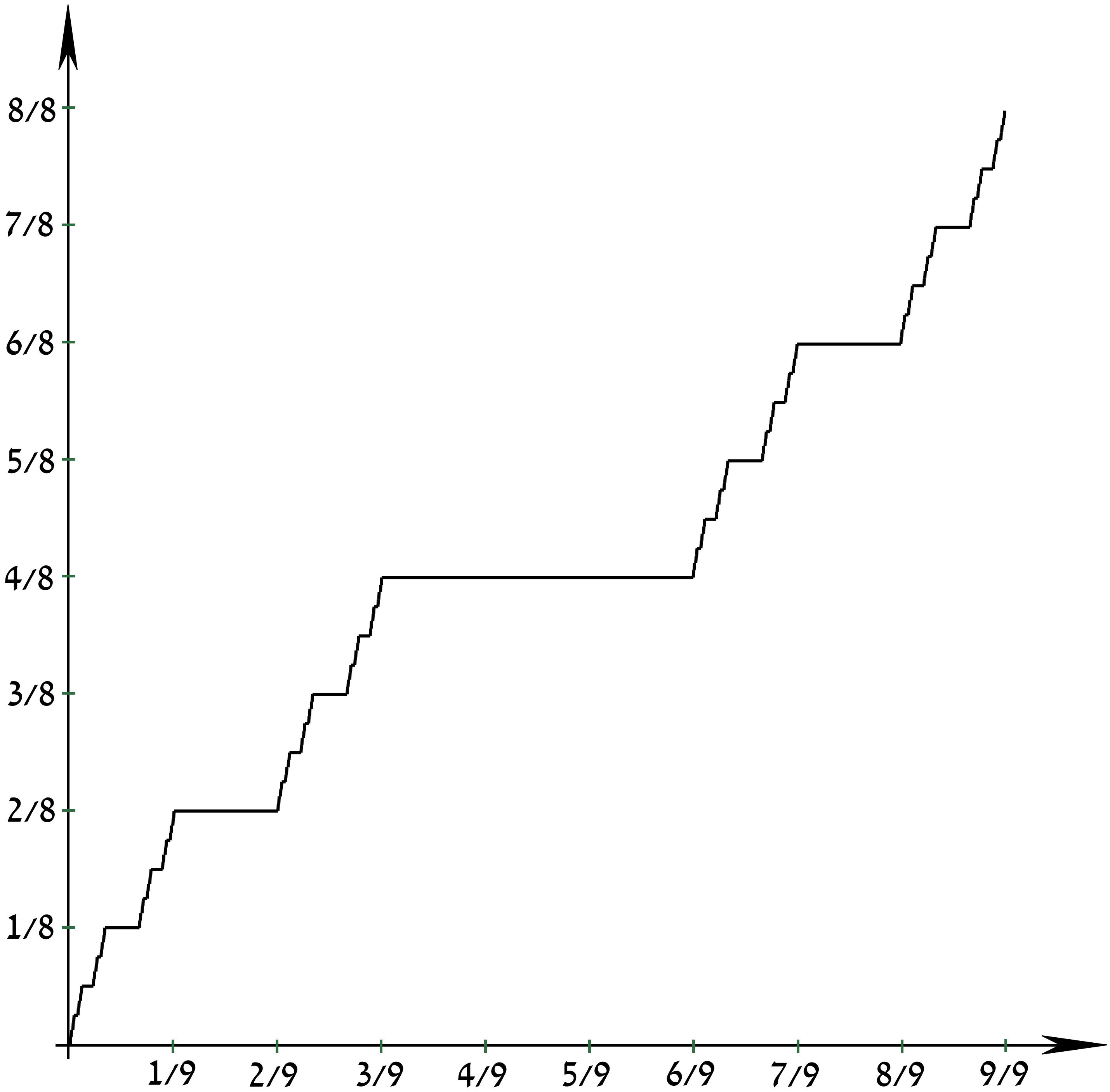
实变函数笔记20250314

推论

$\exists A, B \subseteq \mathbb{R}, A \cap B = \emptyset,\ s.t.\ m^*(A \cup B) < m^*(A) + m^*(B)$

Cantor-Lebesgue 函数



Cantor-Lebesgue 函数$\phi(x)$为$[0,1] \to [0,1]$的单调满射，注意到$a.e.\ \phi'(x) = 0$

$\psi(x) = \frac{1}{2}(\phi(x) + x)$ 为 $[0,1] \to [0,1]$ 的连续严格单调递增的双射函数，易知 $\psi^{-1}(x)$ 存在

命题

$\psi(\mathcal{C})$可测且$m(\psi(\mathcal{C})) = \frac{1}{2}$

非 Borel 集可测集的存在性

已知 $m(\psi(\mathcal{C})) = \frac{1}{2} > 0$
由 Vitali 定理知$\exists$ 不可测集 $E \subset \psi(\mathcal{C})$
考虑 $\psi^{-1}(E) \subset \mathcal{C}$
由 $m(\mathcal{C}) = 0$ 推知 $m(\psi^{-1}(E)) = 0$，即 $\psi^{-1}(E)$ 为零测集
故 $\psi^{-1}(E)$ 可测

命题

综上，有 Borel 集合$\mathcal{B} \subsetneq$ 可测集 $\mathcal{M} \subsetneq 2^{\mathbb{R}}$

第三章 可测函数

可测函数定义

E可测（此条件后文默认），$f: E \to \bar{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$，则下述命题等价：

1. $\forall c \in \mathbb{R}, \{x \in E; f(x) > C\}$可测
2. $\forall c \in \mathbb{R}, \{x \in E; f(x) \geq C\}$可测
3. $\forall c \in \mathbb{R}, \{x \in E; f(x) < C\}$可测
4. $\forall c \in \mathbb{R}, \{x \in E; f(x) \leq C\}$可测

若上述命题成立，则将f称为(Lebesgue)可测

f 可测 $\Rightarrow \forall c \in \bar{\mathbb{R}},\ \{x \in E;\ f(x) = c\}$可测

命题

$f: E \to R$ 可测 $\Rightarrow \forall U \subseteq \mathbb{R}$为开集，$f^{-1}(U)$可测

推论

1. 连续函数均可测
2. 设$f: E \to \mathbb{R}$可测，$g: F \to \mathbb{R}$连续，$f \supseteq f(E)$，则有$g \circ f: E \to \mathbb{R}$ 可测

   特别地，f可测$\to$ $\frac{1}{f}$可测，$\forall p \in (0, +\infty), |f|^p$可测

命题

1. f 可测，$a.e.\ g = f$，则g可测
2. 设$E = E_1 \cup E_2$，则f可测$\Leftrightarrow$ $f|_{E_1}, f|_{E_2}$均可测

注意

f处处有限 $\neq$ f有界

命题

设定义域相同的两函数f, g均可测且$a.e.$ 有限

1. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R},\ \alpha f + \beta g$可测
2. $f(x)g(x)$ 可测

命题

$\{f_i\}_{i=1}^{n}$可测，则有$\max\{f_1, \ldots, f_n\}, \min\{f_1, \ldots, f_n\}$均可测

定义$f^+ := \max\{f, 0\}; f^- := \max\{-f, 0\};$
则有

1. $f^+ - f^- a$
2. f可测$\Leftrightarrow$ f^+, f^-均可测
3. $|f| = f^+ + f^-$；f可测$\Rightarrow$ $|f|$可测

命题

$\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 可测，则$\sup f_i, \inf f_i, \limsup f_i, \liminf f_i$均可测

命题

$\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ 可测，f_i几乎处处收敛为f（$f_i \to f\ a.e.$）则 f 可测

> 几乎处处收敛：在除去一个零测集上点点收敛