实变函数笔记20250328

第四章 Lebesgue 积分

简单函数 Lebesgue 积分定义

$\phi: E \to \mathbb{R}$为简单函数，即$\phi = \sum_{k=1}^n c_k \chi_{E_k}$，则其 Lebesgue 积分定义为

$$\int_E \phi := \sum_{k=1}^n c_k m(E_k)$$

其具有如下性质：

1. 线性性：$\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \Rightarrow \int_E (\alpha\phi + \beta\psi) = \alpha \int_E \phi + \beta \int_E \psi$
2. 可加性：$E \cap F = \phi, \Rightarrow \int_{E\cup F} \phi = \int_E \phi + \int_F \phi$
3. 单调性：$\phi \le \psi \Rightarrow \int_E \phi \le \int_E \psi$
4. 三角不等式：$|\int_E \phi| \le \int_E |\phi|$

有界函数 Lebesgue 积分定义

E 可测，$m(E) < \infty, f: E \to \mathbb{R}$有界（但不一定可测）则
定义 Lebesgue 下积分 $\underline{\int}_E f := \sup\{\int_E \phi;\ \phi: E \to \mathbb{R}$且为简单函数，$a.e.\ \phi \le f\}$
定义 Lebesgue 上积分 $\overline{\int}_E f := \inf\{\int_E \psi;\ \psi: E \to \mathbb{R}$且为简单函数，$a.e.\ \psi \ge f\}$
如果$\underline{\int}_E f = \overline{\int}_E f$，则称 f 是 Lebesgue 可积的，记为$\int_E f$

Riemann 可积与 Lebesgue 可积的关系

$f: I = [a,b] \to \mathbb{R}$有界，如果$f$ Riemann 可积，则f Lebesgue 可积，且二者相等

$\underline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x \le \underline{\int}_I f \le \overline{\int}_I f \le \overline{\int}_a^b f(x)\mathrm{d}x$

定理

f 有界可测，则f可积

一致收敛定理

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 有界可测且f_n在E上一致收敛于f，则f可积且$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$

有界收敛定理

$\{f_n\}_{n=1}^\infty$ 可测且一致有界，f_n 点点收敛于 f，则 f 可积且$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$

非负可测函数 Lebesgue 积分定义

$f: E \to \bar{\mathbb{R}}$（不要求$m(E) < \infty$）
$\int_E f := \sup\{\int_E h;\ h: E \to \mathbb{R}$有界可测且$h \in [0, f]\}, m(\{x \in E;\ h(x) \ne 0\}) < \infty$
如果$\int_E f < \infty$则称f在E上可积

Chebychev 不等式

$f: E \to \bar{\mathbb{R}}$ 非负可测，则$\forall \lambda > 0, m(E_\lambda := \{x \in E, f(x) \ge \lambda\}) \le \frac{1}{\lambda} \int_E f$

命题

$f: E \to \mathbb{R}$非负可测，则$\int_E f = 0 \Leftrightarrow f = 0\ a.e.$

命题

$f, g : E \to \bar{\mathbb{R}}$非负可测，则上文线性性，可加性，单调性均成立。

Fatou 引理

$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 非负可测，f_n $a.e.$ 收敛于 f，则$\int_E f \le \liminf \int_E f_n$

推论

$\{f_n\}$非负可测，$0 \le f_n \le f$，f_n $a.e.$ 收敛于f，则$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$

单调收敛定理

$\{f_n\}$为非负可测渐升列，f_n $a.e.$ 收敛于f，则$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$

推论

设$\{u_n\}$ 非负可测，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = f$ $a.e$ 则有 $\int_E f = \sum_{n=1}^{\infty} \int_E u_n$

推论（Fatou 引理）

$\{f_n\}$非负可测，则$\int_E \liminf f_n \le \liminf \int_E f_n$

命题

f 非负可测，f可积$\Rightarrow$ f $a.e.$有限

Levi 引理

$\{f_n\}$非负可测渐升列，$\{\int_E f_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有界，则f_n点点收敛于一非负可积函数f，f $a.e.$ 有限且$\int_E f = \lim_{n\to\infty} \int_E f_n$