实变函数笔记20250228

第二章 Lebesgue测度

外测度定义P31：

设$A \subseteq \mathbb{R}$，A 的外测度 $m^*(A) := \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} l(I_k); A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k; I_k\text{是有限开区间}\}$

零测集定义：

外测度为0的集合称为零测集。

外测度性质：

1. 非负性：$m^*(A) \geq 0$
2. 空集的外测度为0：$m^*(\emptyset) = 0$
3. 单调性P31：$A \subseteq B \Rightarrow m^*(A) \leq m^*(B)$
4. 可数集的外测度为0P31。证明过程见P31

命题 1

区间的外测度等于其长度P31

命题 2

平移不变性P33：
$\forall A \subseteq \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}, m^*(A+x) = m^*(A)$

命题 3

可数次可加性P33：
$m^*(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^*(E_k)$

推论

Cantor集 $\mathcal{C}$ 为零测集：
$m^*(\mathcal{C}) = 0$

命题

$d(E_1, E_2) > 0 \Rightarrow m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$

其中 $d(E_1, E_2) = \inf\{d(p_1, p_2); p_1 \in E_1, p_2 \in E_2\}$

可测定义

$E \subseteq \mathbb{R}. E$ 可测$\Leftrightarrow \forall A \subseteq \mathbb{R}, m^*(A) = m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$

推论

1. E 可测 $\Leftrightarrow E^C$ 可测
2. E 可测 $\Leftrightarrow E + x$ 可测
3. E_1 可测且 $E_1 \cap E_2 = \emptyset \Rightarrow m^*(E_1 \cup E_2) = m^*(E_1) + m^*(E_2)$
4. E 可测 $\Leftarrow \forall A \subseteq \mathbb{R}, m^*(A) \geq m^*(A \cap E) + m^*(A \cap E^C)$

命题

零测集均可测

命题

E_1, E_2 可测 $\Rightarrow E_1 \cap E_2, E_1 \cup E_2$ 均可测

命题

有限可加性：
$\{E_i\}_{i=1}^n$可测且两两不交，则有 $\forall A \subseteq \mathbb{R}, m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^n E_i)) = \sum_{i=1}^n m^*(A \cup E_i)$

命题

可数可测性：
$\{E_i\}_{i=1}^\infty$ 可测 $\Rightarrow \bigcup_{i=1}^\infty E_i$可测

命题

可数可加性：
$\{E_i\}_{i=1}^\infty$可测且两两不交，则有 $\forall A \subseteq \mathbb{R}, m^*(A \cap (\bigcup_{i=1}^\infty E_i)) = \sum_{i=1}^\infty m^*(A \cup E_i)$